

LEIBNIZ ET L'ECOLE CONTINENTALE

Exposé de Jean Luc Verley le 11 décembre 1991
rédigé par Marie Françoise Jozeau

Dès 1666, Newton est en possession de sa méthode générale des fluxions et des suites infinies. Dans les *Principia* de 1687, il élabore une sorte de "géométrie sublime", suivant l'expression de F. De Gandt, mélange de considérations infinitésimales basées sur la notion de limite et de géométrie à la manière des anciens. Curieusement, il n'utilise pas sa méthode des fluxions. Chez Newton, le temps est un élément essentiel et notre référence au temps conduit à des notations assez lourdes et peu maniables. Après les travaux des élèves directs de Newton, Taylor, Stirling, Mac-Laurin, Moivre, les mathématiques anglaises connaîtront une période de relative stagnation.

A partir de 1684, Leibniz développe son calcul différentiel, puis son calcul intégral. Ses notations, qui sont à peu de chose près restées les nôtres, donnent à ce nouveau calcul une grande puissance d'invention. Entre les mains des frères Jacques et Jean Bernoulli puis de leurs élèves cet outil va permettre de résoudre d'innombrables problèmes de géométrie, de mécanique (résolution d'équations différentielles), de calcul des variations. L'école continentale de mathématiques vole de succès en succès et devient dominante. Peu importent les querelles de priorité entre les deux inventeurs du calcul infinitésimal. Le formalisme Leibnizien a incontestablement fait du XVIIIème siècle le siècle de l'analyse sur le continent, en culminant avec les travaux d'Euler, directement influencé par Jean Bernoulli.

A) LES DIFFERENTES PERIODES.

Nous pouvons distinguer trois périodes dans l'histoire continentale du calcul différentiel, chacune ayant leur spécificité

La première période se situe entre 1680 et 1690 environ. Le calcul différentiel se développe dans un cadre très précis, tout en débordant celui de l'analyse cartésienne c'est-à-dire l'étude des courbes par

des procédés algébriques. Toutes les grandeurs qui vont intervenir sont liées à la géométrie, ont une signification géométrique.

Le formalisme de Leibniz va donc s'appliquer à des situations géométriques extrêmement précises; ce n'est que plus tard qu'il se dégagera de telles situations. Les variables ne sont pas des fonctions mais des quantités, des entités liées à une courbe. Elles doivent donc respecter le principe d'homogénéité¹. La notion de fonction n'existant pas, la notion de dérivée ne peut pas être conçue et c'est donc la notion de différentielle qui s'introduit de façon naturelle par la notion d'infiniment petit. Newton avait évité la manipulation des infiniment petits en considérant des rapports de fluxions.

La deuxième période, qui s'étend de 1691 environ à la fin du XVIIIème siècle est caractérisée par l'émergence du concept de fonction. Leibniz se trouve en plein coeur de cette mutation; il sera le premier à employer le mot de fonction.

Ayant élaboré le calcul différentiel formellement à partir de la différentielle, il va faire de la différentielle un concept fondamental dans l'étude des fonctions.

La notion de fonction à une variable correspond à une séparation de la géométrie et de l'analyse; celle-ci constitue une discipline indépendante de la géométrie. Il va être possible de raisonner sur une formule, sans se préoccuper de la signification géométrique du problème à résoudre.

Cette notion de fonction émerge chez Leibniz sous une forme très vague en 1673 puis en 1692².

Leibniz utilise l'expression suivante: "*Les quantités géométriques, abscisses, ordonnées, cordes, sous-tangentes...sont fonctions d'une courbe*". La notion de fonction d'une variable n'est pas encore dégagée. Cette notion sera précieuse en 1698 dans un texte de Jean Bernoulli puis par Euler.

Le traité du marquis de l'Hospital Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes, (Paris 1696), écrit sous l'influence directe de Jean Bernoulli, est un exposé systématique du calcul différentiel à partir d'une introduction axiomatique des infiniment petits.

Dans la troisième période, la dérivée remplace la différentielle comme opération élémentaire de l'analyse. Cette période qui débute avec d'Alembert, correspond essentiellement à Lagrange et Cauchy, fondateur de l'analyse moderne. Le calcul différentiel des fonctions à une variable repose sur la notion de dérivée, celle de différentielle étant récupérée a posteriori³.

Le début du travail de Leibniz se situe dans la première période. Il est, avec les frères Bernoulli, l'auteur principal de la deuxième période.

¹ En effet, malgré Descartes, la conception géométrique reste très proche de celle des Anciens.

² Pour plus de détail, on peut consulter, "Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle. A. Youschkevitch in A.P.M.E.P. n° 41

³ De cette façon, la notion des infiniment petits, source de difficultés, est évacuée. D'autre part ce calcul des dérivées marche bien pour des fonctions à plusieurs variables (les dérivées partielles s'introduisent facilement), et pour les dérivées d'ordre supérieur.

B) Le CALCUL INFINITÉSIMAL CHEZ LEIBNIZ (1646-1716)

1) Biographie: quelques dates repères.

De formation juridique, il pratique à peu près tous les arts de son temps, il est philosophe. Voyageant continuellement pour des missions diplomatiques, il écrit beaucoup en carrosse¹.

En 1666, il passe une thèse de logique De arte combinatoria, dans laquelle il traite de configurations sur les combinaisons. Il s'intéresse à des questions de logique formelle, au principe du tout et de la partie. En 1671, il fait un projet de machine à calculer, reprenant l'idée de Pascal². Au cours de cette étude, il travaille sur des algorithmes. Les considérations algorithmiques qu'il aborde sont très formelles, caractéristiques en général du travail de Leibniz. Il réfléchit sur ce qu'est un algorithme, une formule, une notation. Cette réflexion est caractéristique de sa conception des mathématiques.

En 1672, il vient à Paris, envoyé par Huygens. Ce dernier lui fait connaître les écrits de Pascal, Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent... Leibniz découvre des ouvrages fondamentaux, il apprend à calculer sur les séries... Comme le souligne Parmentier³, "*Leibniz n'a pas commencé par apprendre les mathématiques, il a réalisé la gageure d'y être à la fois néophyte et inventeur*".

Il se rend aussi à Londres, correspond avec Oldenburg, Newton⁴. C'est au cours de cette période qu'il élabore un algorithme qu'il appelle "*propre au nouveau calcul*".

Faire un algorithme qui rende compte de ce nouveau calcul.

Dans un texte de 1714, publié seulement à la fin du 19^{ème} siècle, histoire et origine du calcul différentiel⁵, Leibniz raconte l'histoire de ses découvertes de façon lucide et passionnante. Il s'agit d'une réponse à une attaque des anglais qui voulaient voir en Leibniz un plagiaire de Newton⁶.

2) Préhistoire du calcul.

Le premier article de Leibniz annonçant la découverte de son nouveau calcul date de 1684 (Nova Methodus in Acta Eruditorum, octobre 1684)⁷.

Donc, depuis 1672, une longue maturation a eu lieu. Comme nous allons le voir, pendant ces années décisives, il va tâtonner pour arriver à mettre au point, non sans quelques erreurs et hésitations, ce nouveau calcul.

¹ Sa correspondance est volumineuse; elle comporte environ 200 000 pages de manuscrits conservés à Hanovre. Certains de ces manuscrits ont été édités par Gerhardt. (Leibnizens mathematische Schifften)

² Leibniz s'attache d'emblée au problème crucial de la multiplication directe, que Pascal n'avait pas su résoudre.

³ G.W. Leibniz La naissance du calcul différentiel Marc Parmentier Vrin 1989.

⁴ voir dans un prochain numéro de Mnemosyne les deux fameuses lettres de 1676, epistola prior et epistola posterior relatives à la théorie des séries.

⁵ traduction et notes, in les cahiers de Fontenay, I. 1975, prochainement publiées dans Mnemosyne.

⁶ Attaque menée par Craig, Collins. En fait Newton n'est jamais vraiment intervenu directement à ce sujet.

⁷ G.W. Leibniz La naissance du calcul différentiel Marc Parmentier Vrin 1989.

Deux idées sont essentielles dans cette genèse : le calcul des différences et le triangle caractéristique. la première idée vient des mathématiques discrètes, de l'analyse combinatoire qu'il a étudiée dans "De arte combinatoria ". Quant à la deuxième idée, le triangle caractéristique, il dit l'avoir découverte dans les oeuvres de Pascal. Ce triangle, que Pascal utilise dans chaque cas particulier, deviendra avec Leibniz un outil fondamental du calcul différentiel, pilier de sa théorie. De nombreux manuscrits de jeunesse de Leibniz ne sont pas édités et sont donc non accessibles. Dans ce qui suit, nous avons utilisé l'article de Leibniz lui même déjà cité (note) ainsi que l' analyse donnée par Morris Kline¹.

* Le calcul des différences (1672)

Dans "l' art combinatoire", Leibniz a déjà étudié le calcul des différences.

Soit A,B,C,D,E une suite croissante (afin d'éviter d'utiliser des nombres négatifs). On introduit la suite des différences premières:

$$L = B - A$$

$$M = C - B$$

$$N = D - C$$

$$P = E - D$$

$$\text{Alors } L + M + N + P = E - A$$

Si le premier terme est zéro, alors la sommation des différences restitue le dernier terme c'est-à-dire le terme le plus grand.

Dans ce calcul, deux opérations sont utilisées: une opération de passage de la suite donnée à la suite des différences et une opération de sommation de ces différences, conduisant à la restitution du dernier terme de la suite initiale.

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{exemple:} & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \\ & & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \\ & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

On vérifie que la somme des premières différences donne le dernier terme:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

Partant de là, Leibniz considère une quantité "y" (il n'utilise pas encore le mot de variable) et une suite de valeurs de y de plus en plus proches. Il introduit alors la suite des différences. Nous pourrions écrire qu'il considère un intervalle $[0,a]$ avec $y_0 = 0$ et $y_n = a$ qu'il découpe en éléments de la forme $[y_i, y_{i+1}]$, i variant de 0 à n-1.

Il considère une opération de différence (suite de la différence entre deux valeurs successives de y) et une opération de sommations de ces valeurs. La description de ces idées apparaît dans un manuscrit de 1673.

¹ Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Oxford University Press 1972 p. 370 et suivantes.

Il emploie comme notation ℓ pour ce qui deviendra ultérieurement dy , ℓ est un accroissement générique. Il introduit une opération qu'il appelle $\text{Omn } \ell$. "Omn" vient du latin Omnia (toutes choses). Cette opération consiste à faire la somme de tous les ℓ .

Comme $y_0 = 0$ on obtient $\text{Omn } \ell = y_n$.

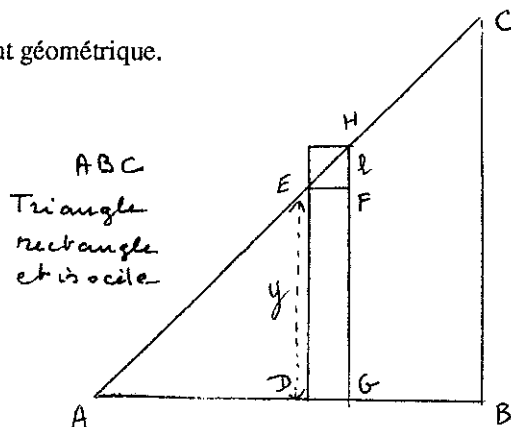
Dans ce manuscrit, Leibniz n'est pas plus précis. A cette époque, cette notion de différence est encore très vague. En particulier leur nombre n'est pas précisé; y-en-a-t-il un certain nombre, une infinité?

Leibniz évalue ensuite $\text{Omn } \ell y$ par un raisonnement géométrique.

ℓ est un accroissement de y

$y\ell$ représente donc l'aire du rectangle DEFG.

Ensuite, sans l'explicitier vraiment, Leibniz considère les ℓ arbitrairement petits; de ce fait, les aires des petits triangles EFH peuvent être négligées et il écrit que : $\text{Omn } \ell y = \frac{y^2}{2}$



Le triangle peut être obtenu comme "réunion" des aires des rectangles; ou en augmentant le nombre des rectangles, le triangle finit par être rempli, idée présente chez les Anciens.

Bien entendu, le résultat en soi n'est pas intéressant, il est connu depuis longtemps. l'intérêt, ici, réside dans la manière dont ce résultat est obtenu: par l'opération Omn , certes décrite de façon maladroite, qui sera plus tard l'intégration.

Le résultat n'est pas présenté seulement comme un résultat géométrique: un formalisme, un symbolisme y est présent.

Il est possible sur cet exemple très simple, d'entrevoir comment les idées de Leibniz se mettent à sa place. Le procédé utilisé est très général et repose en fait sur des manipulations algébriques: il forme des différences, les multiplie dans ce cas par y mais il aurait pu les multiplier par une autre expression.

Dans un autre exemple, il obtient $\text{Omn } y^2 \ell = \frac{y^3}{3}$ et une espèce de formule qui correspondrait à une intégration par parties.

Le calcul différentiel à sa naissance apparaît bien issu directement du calcul des différences.

* L'année 1675 marque un pas décisif: une notation déjà précise apparaît. Dans un manuscrit d'octobre 1675 les notations $\int$ et dy sont introduites.

Ainsi la formule $\text{Omn } \ell$ devient $\int \ell$. Il peut écrire $\int x = \frac{x^2}{2}$

Il réalise alors très clairement que les deux opérations d et $\int$ sont inverses l'une de l'autre:

d symbole différence

$\int$ symbole totalisateur

Par analogie avec le calcul des différences et le calcul des sommations pour des quantités discrètes, le caractère réciproque des deux symboles apparaît de façon naturelle, sous un aspect très formel dégagé de toute considération géométrique¹. Les infiniment petits font alors leur apparition au fur et à mesure.

* Le triangle caractéristique.

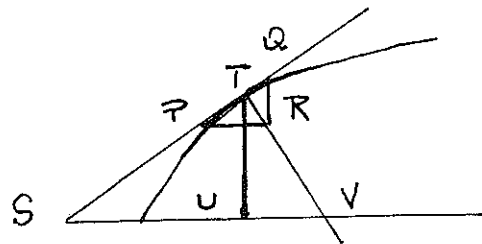
Durant l'année 1675, année cruciale intervient aussi une dimension géométrique due au triangle caractéristique.

Les valeurs de y sont toujours considérées comme les termes d'une suite mais dx et dy sont, expression utilisée par Leibniz: "*des quantités inassignables*"; les infiniment petits apparaissent ainsi.

$PR = dx$

$RQ = dy$

PQ est un segment assimilé à l'arc de courbe.



Citons Leibniz:

Il semblait toujours possible d'assigner des triangles semblables à ce triangle caractéristique bien qu'inassignables ou infiniment petit..."

Cette phrase met en évidence la différence essentielle entre Newton et Leibniz.

Dans la méthode "des témoins finis" de Newton, quand le temps s'écoulant, le triangle PQR disparaît, un témoin fini est gardé triangle fini fixe semblable à PQR.

Le point de vue de Leibniz est tout à fait différent: il admet des infiniment petits. Le triangle caractéristique est **inassignable** ou **infiniment petit**.

Les infiniment petits se prêtent à des raisonnements géométriques. Plusieurs triangles sont semblables au triangle caractéristique; les triangles STU et TUV sont les plus utilisés.

Les infiniment petits sont **actuels**. Ils interviennent de façon explicite dans les raisonnements.

Leibniz n'est guère tracassé par les nombreuses polémiques qui vont avoir lieu; il ne se pose pas de problème sur la nature des infiniment petits; l'essentiel est que les calculs marchent! Il sépare la métaphysique et les mathématiciens; à la fin de sa vie, il ne se battra pas pour l'existence des infiniment petits, reconnaissant en eux un moyen commode, un outil formel pour le calcul différentiel et le calcul intégral.

"... si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et

¹ Dans la tradition du 17ème siècle, le lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral reste noyé dans des considérations géométriques, comme par exemple, chez Barrow. Même chez Newton, dans De quadratura curvarum, ce lien n'est pas d'une extrême clarté.

comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune."¹

La nature et l'exigence des infiniment petits n'est pas son sujet; il s'intéresse avant tout à mettre en place un formalisme, issu de considérations algébriques et sous-tendu par des considérations géométriques.

$$\text{Il écrit: } \frac{dy}{dx} = \frac{TU}{SU} \quad (1)$$

Si, comme il le fera dans son mémoire de 1684, la sous-tangente est désignée par p , la formule (1) devient: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{p}$ ou $dy = \frac{y}{p} dx$

En novembre 1675, il s'attaque à différents problèmes appelés "problème inverse des tangentes", c'est-à-dire à la résolution d'équations différentielles.

Par exemple, soit à trouver une courbe dont la sous-normale est inversement proportionnelle à l'ordonnée.

Posons $q = UV$ Les triangles PQR et TUV sont semblables donc on a: $\frac{dy}{dx} = \frac{q}{y}$

Or par hypothèse, il existe b tel que $q = \frac{b}{y}$ ainsi $dx = \frac{y^2}{b} dy$

Il en déduit $\int dx$ par l'opération de sommation purement formelle.

$$\int dx = \int \frac{y^2}{b} dy \quad \text{d'où} \quad x = \frac{y^3}{3b} \quad \text{ce qui est donc une relation entre } x \text{ et } y. \quad ^2$$

Leibniz a donc pu montrer ici que sa méthode permet de résoudre des problèmes inverses des tangentes c'est-à-dire de résoudre des équations différentielles.

* Dans les manuscrits de novembre 1676, Leibniz est en possession de la formule

$$dx^n = nx^{n-1}dx.$$

Il la démontre pour n entier et admet la généralisation à n entier négatif et fractionnaire².

Il connaît donc aussi la formule $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(dans les manuscrits de cette époque dx n'est pas indiqué).

(Puis, ses manuscrits de 1677 nous révèlent qu'il est en possession, disons, des principales formules de dérivation: dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient...Ces formules sont de type algébriques, ce sont des formules abstraites.

¹ Lettre à Varignon, journal des savants de 1702.

² Il n'y a pas de constante d'intégration puisque le premier terme est toujours supposé nul.

² Newton, pour la série du binôme, avait fait de même.

Il n'obtient pas immédiatement la formule du produit. Il pense d'abord que $d(uv) = dudv$. Il n'avait pas encore bien clairement mis en évidence les différents ordres des infiniment petits¹.

Dans une lettre à Newton, il détaille son raisonnement:

$$(u + du)(v + dv) = uv + udv + vdu + dudv$$

$$\text{donc } (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

Pour des questions d'homogénéité, il faut que $dudv = 0$!

D'autres techniques s'étaient mises en place. Ainsi en 1676, il cherche la différentielles d'une expression telle que: $\sqrt{a + bz + cz^2}$

Il pose $x = a + bz + cz^2$, différentie $\sqrt{x}$, puis multiplie ce résultat par $\frac{dx}{dz}$. Il a en quelque sorte effectué un changement de variable, peu rigoureux mais l'idée est présente.

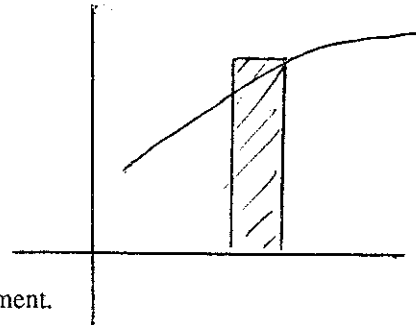
Nous voyons donc peu à peu surgir les principaux outils du calcul infinitésimal.

En 1680, l'expression "inassignable" est remplacée par celle "d' infiniment petit": " *Maintenant dx et dy sont pris infiniments petits, ou encore les deux points de la courbe doivent être considérés comme à une distance l'une de l'autre qui est inférieure à toute quantité donnée.*"

Par cette phrase, Leibniz rompt avec la géométrie euclidienne; le pas décisif est franchi; il n'aura plus recours au raisonnement apagogique des grecs². Les infiniment petits ont un statut actuel.

Leibniz appellera aussi dy l'accroissement momentané de y. Il identifie un arc de courbe avec un côté d'un polygone à une infinité de côtés. Pour obtenir l'aire sous une courbe, il somme les aires des rectangles IJKL car:

"on peut négliger les triangles parce qu'ils sont infiniments petits comparés aux rectangles et donc je représente dans mon calcul l'aire par $\int ydx$."



La hiérarchie entre l'ordre des infiniment petits apparaît ici clairement.

Il trouve : $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

puis il donne aussi le volume engendré par la courbe dans une rotation autour de l'axe des x, par la formule $v = \pi \int y^2 dx$

3) Commentaire du mémoire fondateur du calcul infinitésimal.

En octobre 1684, Leibniz publie son célèbre mémoire³: "Nova methodus pro maximis et

¹ La hiérarchie des infiniments petits sera présentée clairement dans le traité du Marquis de l' Hospital.

² Voir Mnémosyne n° 1: de la méthode d'exhaustion.

³ Dans cette partie, nous utiliserons abondamment l'ouvrage de Marc Parmentier: Leibniz Naissance du calcul différentiel. Vrin 1989 déjà cité.

minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus"

ou "Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique".

Dans ce mémoire, Leibniz précise que sa nouvelle analyse n'est pas, comme celle de Descartes, limitée aux courbes algébriques. Elle s'applique à toutes les situations données, y compris aux courbes dites mécaniques.

Le texte est peu clair, très obscur, très formel.. Il a eu peu d'influence sur ses contemporains. Les seuls qui l'ont compris sont les Bernoulli qui étaient par ailleurs en contact avec Leibniz. Jean dans une de ses lettres écrit:

"Ce texte est plutôt une énigme qu'une explication"

Voici une description rapide de ce très court mémoire.

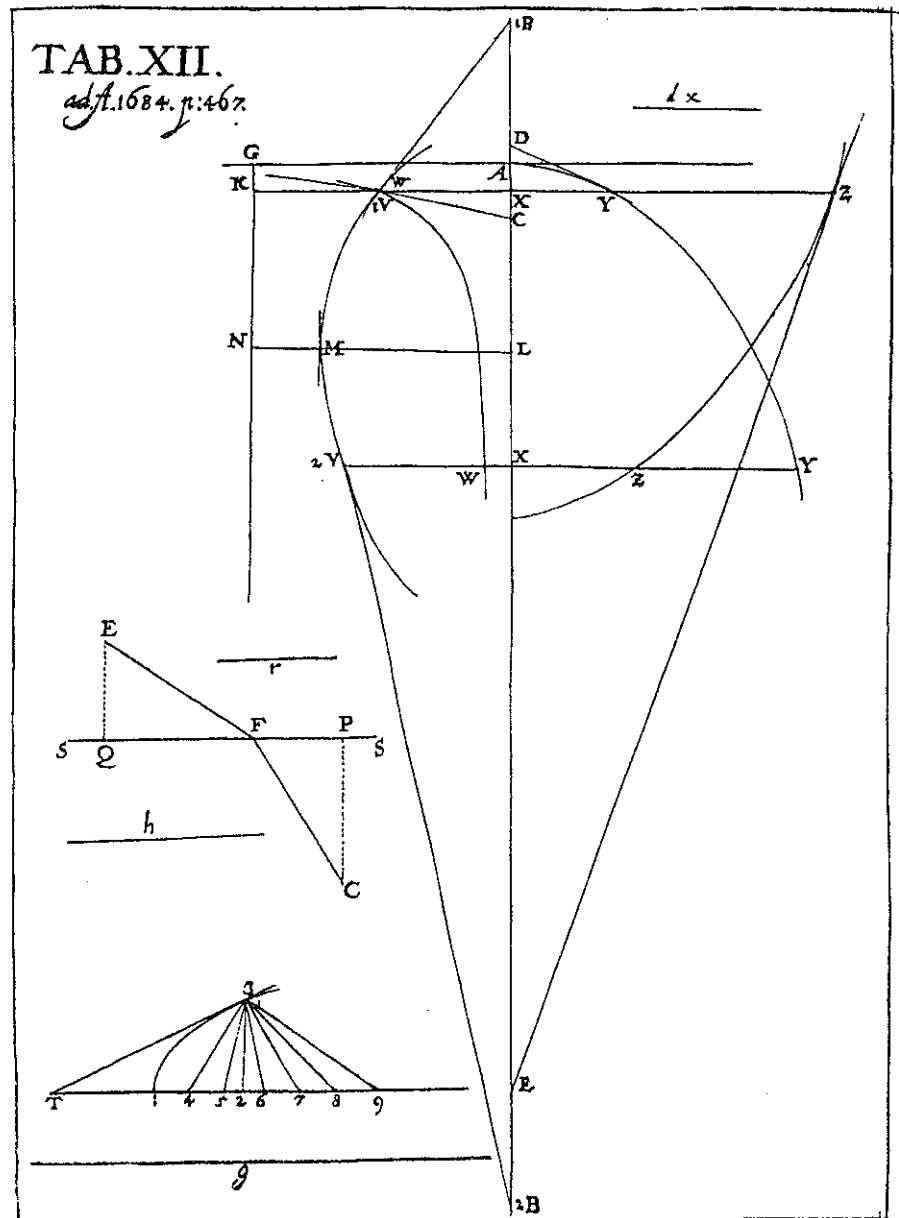
Leibniz énonce:

Soit $AX = x$ et $YX = y$
ne précisant pas le sens de dx , il écrit:

"Appelons alors dx un segment de droite choisi arbitrairement, et dv (dw , dy ou dz), c'est-à-dire différence de v , (de w , y ou z) un segment qui soit avec dx comme v (w , y ou z) avec XB (XC , XD ou XE)."

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{XD} = \frac{y}{p}$$

avec $XD = p =$ sous-tangente



Nous voyons que le texte débute mal quant à la rigueur. En effet, si on ne connaît pas à priori la sous tangente, dy n'est pas défini. On tourne en rond!

Au début de ce mémoire, dy n'est donc pas défini de façon explicite.

Dans les pages suivantes, Leibniz donne les diverses propriétés relatives au calcul "des dérivées".

La présentation est formelle, en exagérant, il procède comme Bourbaki; il introduit un opérateur d puis donne les propriétés. Les justifications sont très discutables. Nous avons vu auparavant comment ces règles se sont peu à peu mises en place mais dans ce texte rien apparaît à ce sujet: la présentation est purement formelle.

Enoncé des règles:

Soit a une constante donnée, da sera égale à 0, et $\overline{dax}$ sera égal à adx. Si y est égal à v (c'est-à-dire toute ordonnée de la courbe YY égale à l'ordonnée correspondante de la courbe VV), dy sera égal à dv ³⁸.

Addition et Soustraction : si $z = y + w + x = v$, $d z = y + w + x$, autrement dit dv, sera égal à $dz = dy + dw + dx$. *Multipliation* : $d xv$ égal $x dv + v dx$, c'est-à-dire, en posant $y = xv$, nous aurons dy égal à $x dv + v dx$. Car on a tout loisir d'employer soit l'expression xv, soit à sa place, une lettre, par exemple y, pour abrégier ³⁹. Remarquons que dans ce calcul x et dx sont traités sur le même pied, de même y et dy, ou toute autre lettre indéterminée et sa différentielle ⁴⁰. Remarquons également que la démarche inverse, à partir de l'équation différentielle n'existe pas toujours, ou tout au moins suppose une certaine précaution, dont je parlerai ailleurs ⁴¹.

Enfin la *Division* :

$$d \frac{v}{y} \text{ ou (en posant } z \text{ égal à } \frac{v}{y} \text{), } dz \text{ égal } \frac{\pm v dy \mp y dv}{yy} \text{ } ^{42}.$$

Remarquons que ces propriétés sont classées de manière moderne: dérivée d'une constante, linéarité, dérivée d'un produit, racines, applications aux tangentes, maximum, minimum, point d'inflexion. (p. 107 à 109 voir le texte en annexe).

"Lorsque l'on connaît en quelquesorte l'algorithme de ce calcul...."

Leibniz insiste sur le mot **algorithme**. En effet, il est bien conscient que l'on peut toujours différencier une expression. Parmentier dit: *"Aux yeux de Leibniz, le nouveau calcul est non seulement général, mais automatique: à la différence du regressus que constitue l'intégration, l'opération de différentiation ne peut qu'aboutir."*

Il s'aperçoit par contre que le calcul intégral échappe au champ des fonctions algébriques et définit des nouvelles fonctions, des fonctions transcendentes.

on peut trouver par le calcul ordinaire toutes les autres équations différentielles, celles des maxima et minima ⁵², ainsi que les tangentes, sans avoir à éliminer ni fractions, ni irrationalités, ni autres signes radicaux, ce qui était inévitable dans les Méthodes en usage jusqu'à présent. Avec l'expérience il sera aisé de démontrer tout ceci à partir de cette unique observation, dont on n'a pas encore bien mesuré l'importance : on peut considérer dx, dy, dv, dw, dz comme proportionnelles aux différences, accroissements ou diminutions élémentaires ⁵³ de (respectivement) x, y, v, w, z ⁵⁴.

On retrouve ici l'idée de Newton relative au rapport naissant, à l'ultime raison. Mais ici Leibniz l'assume vraiment en tant qu'infiniment petits: dx , dy , sont proportionnels aux accroissements de x , y , ... Leibniz ne dit pas "naissant" mais "élémentaire".

Avec le point de vue adopté ici, le $\frac{dy}{dx}$ est exactement la pente de la tangente.

On voit aussi que ma méthode s'étend aux courbes transcendentes, qu'on ne peut ramener à aucun calcul Algébrique, c'est-à-dire qui ne sont d'aucun degré déterminé⁵⁸, et cela de la manière la plus universelle, sans recourir à des hypothèses particulières qui ne sont pas toujours vérifiées, pourvu seulement qu'on s'en tienne à ceci : dans son principe, trouver la *tangente* consiste à tracer une droite joignant deux points infiniment proches de la courbe, c'est-à-dire tracer le côté d'un polygone *infiniment angulaire* qui à mes yeux, équivaut à la courbe⁵⁹. Or on peut toujours représenter cette distance infiniment petite par une différentielle connue dv , ou par une relation qui la fait intervenir, c'est-à-dire par une tangente connue. En particulier, à supposer que y soit une grandeur transcendante, comme l'ordonnée d'une cycloïde, entrant dans un calcul qui permet de déterminer l'ordonnée z d'une autre courbe, et que nous cherchions dz , autrement dit la tangente à cette seconde courbe, il s'agit de déterminer dz en fonction de dy , mais dy serait connue, puisqu'on connaît la tangente à la cycloïde. A supposer qu'on l'ignore, on pourrait la retrouver de la même façon par le calcul, à partir des propriétés des tangentes au cercle.

La connaissance de la tangente à la cycloïde permet de déterminer une différentielle de dy . En somme, il considère le problème à l'envers.

Puis il propose un exemple, un exemple inutilement compliqué, dans lequel il semble avoir rassemblé toutes les difficultés de calcul.

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-xx)}{(ex+fx)^2} + ax\sqrt{gg+yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh+lx+mx}} = 0$$

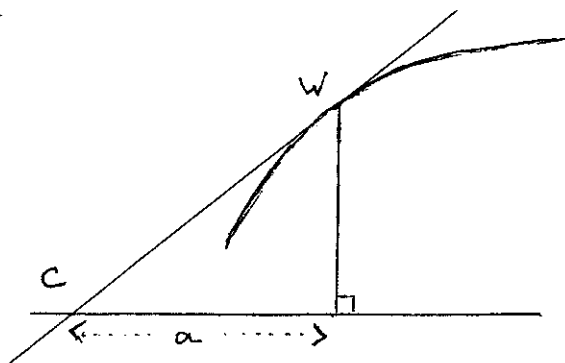
Il arrive à ses fins en bas de la page 113, montrant ainsi qu'il est toujours possible d'aboutir même si les calculs sont longs.

Il a ainsi l'occasion de montrer la virtuosité des différentes techniques dont il dispose.

"Montrons à présent leur emploi dans des exemples plus immédiatement intelligibles".

Il traite d'abord un problème de dioptrique puis il reprend le problème que Mr de Beaune a posé à Descartes, et qui a comme solution une courbe transcendante: une logarithmique¹. *"Trouver une courbe telle qu'en traçant la tangente WC jusqu'à l'axe, XC soit toujours égal à un même segment constant a".*

¹ Sous ce terme, il faut entendre en réalité la fonction inverse de la fonction logarithme, c'est à dire une fonction exponentielle.



XW, soit w , est donc par rapport à XC ou a comme dw à dx , dès lors, si on prend dx (qu'on peut choisir comme on veut) constant, c'est-à-dire invariable, à savoir égal à b , autrement dit si les x , ou AX, croissent uniformément, il viendra : $w = \frac{a}{b} dw$, et les ordonnées w seront proportionnelles à leurs accroissements ou différentielles dw , ou encore si les x sont en progression arithmétique, les w seront en progression Géométrique, et si les w sont des nombres, les x seront leurs logarithmes ; la courbe WW est donc la courbe logarithmique ⁷⁰.

4) Juin 1686: "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum."

ou Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis.

Comme le dit Parmentier, "l'objet principal de Leibniz est ici de replacer le nouveau calcul dans la perspective la plus naturelle et la plus féconde, l'évaluation des quadratures, plus précisément, le problème inverse des tangentes...."

Cet article complète donc "Nova Methodus". Là encore, Leibniz se démarque explicitement de la "géométrie profonde". Les italiens parleront longtemps de "géométrie sublime".

Dans le titre, le mot "indivisibles" peut être sujet de polémiques. Le propos de Leibniz est de présenter un formalisme, un formalisme qui rende compte du calcul des indivisibles pratiqué au XVII^e siècle. Leibniz n'utilise pas les indivisibles, il propose un algorithme du calcul intégral, qui soit général.

Mais je ne sais pourquoi, le calcul Algébrique en cette affaire ne m'apportait pas entière satisfaction, contraint que j'étais d'en passer par le détour des figures pour établir nombre de résultats que j'aurais voulu obtenir par l'analyse ; jusqu'au jour où je découvris enfin ce véritable complément de l'Algèbre pour les transcendentes ³⁸ qu'est mon calcul des indéfiniment petits ³⁹, que je nomme également différentiel, calcul des sommations, quadratique, et assez judicieusement me semble-t-il, *Analyse des indivisibles et des infinis* ⁴⁰. A peine fut-il découvert que tout ce qui en ce domaine m'avait rempli d'admiration, me sembla divertissement et jeu ⁴¹. Il m'était alors permis d'introduire de notables simplifications, mais aussi de mettre sur pied la méthode tout à fait générale que je viens d'exposer, permettant de déterminer dans toute la mesure du possible, aussi bien les quadratrices que les autres courbes inconnues, qu'elles soient Algébriques ou transcendentes.

Il lui est donc possible d'expliciter même par une équation les courbes transcendentes. L'exemple qu'il donne est celui de la cycloïde. Soit a un arc, x le sinus verse, nous aurons :

$$a = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

et si y est l'ordonnée d'une cycloïde

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}},$$

équation qui exprime complètement la relation entre l'ordonnée y et l'abscisse x

5) Septembre 1693 "Supplementum geometriae dimensoriae...."

ou Extension des mesures géométriques grâce à une manière absolument universelle de réaliser toutes les quadratures par le Mouvement, accompagnée de différents procédés pour construire une courbe à partir d'une condition imposée à ses tangentes.

Dans cet extrait, Leibniz établit clairement le lien existant entre la dérivation et l'intégration c'est-à-dire entre la recherche des tangentes et le recherche des surfaces: ces deux problèmes sont inverses l'un de l'autre. "*Je voudrais montrer que le problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée.*"

Dans ce mémoire, il se propose de fabriquer un intégraphe, machine mécanique permettant de réaliser une quadrature c'est-à-dire de calculer une intégrale. Son projet n'aboutira pas de son vivant¹. Il explique comment il construit une courbe dont les ordonnées donne l'aire de la courbe considérée, construction géométrique.

"On peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé."

Voilà la construction et la justification.

Je voudrais montrer à présent que le *problème général des Quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée* ⁴⁶, c'est-à-dire sur laquelle les côtés du triangle caractéristique assignable aient entre eux telle relation donnée ; après quoi je montrerai qu'on peut construire cette courbe par le mouvement que j'ai imaginé. En effet pour toute courbe $C(C)$, je considère un double triangle caractéristique, l'un assignable TBC , l'autre inassignable GLC , semblables entre eux.

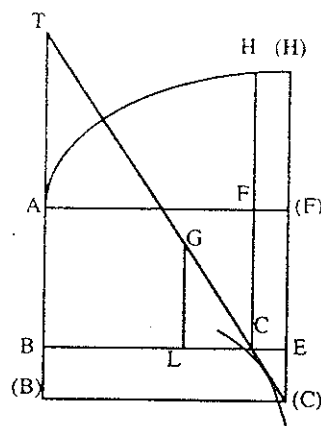


figure 31

¹ De telles machines existent au XIXème siècle, elles permettent d'obtenir une valeur approchée d'une aire.

Le triangle *inassignable* est délimité par les éléments GL et LC des coordonnées ⁴⁷ CF et CB qui en forment les côtés, et par l'arc élémentaire GC, constituant sa base ou hypoténuse. Mais le triangle assignable TBC est délimité par l'axe, l'ordonnée et la tangente, et exprime par conséquent l'angle que fait la direction de la courbe (c'est-à-dire aussi la direction de sa tangente) avec l'axe ou la base, autrement dit la pente de la courbe en un point donné C. Soit à quarrer la surface F(H) comprise entre la courbe H(H), les deux droites parallèles FH et (F)(H), et l'axe F(F); prenons sur celui-ci un point fixe A, prenons comme axe conjugué la droite AB perpendiculaire à AF passant par A, puis prenons sur chaque droite HF (qu'on aura au besoin prolongée) un point C, c'est-à-dire construisons une nouvelle courbe C(C) telle que, une fois tracées entre C et l'axe conjugué AB (prolongé au besoin), l'ordonnée conjuguée CB (égale à AF), mais aussi la tangente CT, la portion d'axe TB qu'elles délimitent soit avec BC dans le rapport de HF à la constante a, c'est-à-dire que le produit de a par BT soit égal au rectangle AFH (circonsrit au triline AFHA). Dans ces conditions, je dis que le produit de a par E(C) (différence entre les ordonnées FC et (F)(C) de la courbe) est égal à la surface F(H); de ce fait, si on prolonge la courbe H(H) jusqu'à A, le triline AFHA de la figure à quarrer est égal au produit de la constante a par l'ordonnée FC de la figure quadratrice. Mon calcul le montre immédiatement. Soit en effet

$AF = y$, $FH = z$, $BT = t$, $FC = x$, nous aurons par hypothèse $t = \frac{zy}{a}$, mais

également $t = \frac{ydx}{dy}$, expression des Tangentes selon les formules de mon

calcul, donc : $adx = zdy$ et par conséquent $ax = \int zdy = AFHA$. La courbe C(C) est donc une quadratrice pour la courbe H(H), puisque le produit de son ordonnée FC par la constante a est égal à l'aire, c'est-à-dire à la somme des ordonnées de H(H) appliquées à leurs abscisses respectives AF ⁴⁸. Partant, comme BT est avec AF dans le même rapport que FH avec a (par hypothèse) et que la relation de FH à AF (relation qui définit la figure à quarrer) est donnée, nous connaîtrons donc également la relation de BT à FH, c'est-à-dire la relation de BT à BC et donc celle de BT à TC, autrement dit la relation entre les côtés du triangle TBC. C'est pourquoi, il suffit, pour réaliser toutes les quadratures et toutes les mesures, d'être capable, à partir d'une relation donnée entre les côtés du triangle caractéristique assignable TBC, autrement dit, à partir de la loi des pentes, de tracer la courbe C(C), puisque nous avons montré qu'elle est une quadratrice.

c) Présentation du calcul infinitésimal par le marquis de l'Hospital.

En 1696, Le marquis de l'Hospital écrit le premier traité de calcul infinitésimal, faisant ainsi connaître le calcul leibnizien. Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbes.

La présentation de cet ouvrage est complètement axiomatique. Les axiomes concernent les infiniments petits.

L DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ○ N demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP , pM pour PM , l'espace ApM pour l'espace APM , le petit espace $MPpM$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMp pour le petit triangle AMS , l'angle pAM pour l'angle PAM , &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3.  On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm & l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

La parution de ce traité a déchaîné à l'Académie des lutes entre les partisans des méthodes leibniziennes parmi lesquels se trouve Varignon et les conservateurs tels Rolle. L'Académie a même du interdire à ses membres de discuter des problèmes des infiniments petits en séance plénière!

Le traité du Marquis de l'Hospital commence par une préface historique d'une grande richesse. Après avoir retracé les travaux des Anciens, de Pascal, de Descartes, de Cavalieri...il annonce les travaux de Leibniz:

"Dans tout cela il n'y a encore que la première partie du calcul de M. Leibniz, laquelle consiste à descendre des grandeurs entières à leurs différences infiniments petites, & à comparer entr'eux ces infiniments petits de quelque genre qu'ils soient: c'est ce Qu'on appelle calcul différentiel. Pour l'autre partie, qu'on appelle calcul intégral, & et qui consiste à remonter de ces infiniments petits aux grandeurs ou aux tous dont ils sont les différences, c'est-à-dire dire à en trouver les sommes, j'avais aussi dessein de le donner. Mais M. Leibniz m'ayant écrit qu'il y travaillait dans un traité qu'il intitule De Scientia infiniti, je n'ai eu garde de priver le public d'un si bel ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il a de plus curieux par la Méthode inverse des tangentes, pour les rectifications des courbes des surfaces des corps qu'elles renferment, pour la Quadrature des espaces qu'elles renferment, pour celle des surfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimension de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &..."

Mais ce fameux traité de calcul intégral malheureusement ne sera jamais écrit. Malgré des tentatives pleines d'erreurs (Carré, Stone) il faudra attendre M. de Bougainville qui publiera beaucoup plus tard, en 1754, sous l'influence de d'Alembert un traité complétant celui du Marquis de l' Hospital, relatif au calcul intégral.

ACTA ERUDITORUM

ANNO MDC LXXXIV

publicata,

ac

SERENISSIMO FRATRUM PARI,

DN. JOHANNI

GEORGIO IV,

Electoꝛatus Saxonici Hæredi,

&

DN. FRIDERICO

AUGUSTO,

Ducibus Saxoniae &c.&c.&c.

PRINCIPIBUS JUVENTUTIS

dicata.

*Cum S.Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Ele-
ctoꝛis Saxoniae Privilegiis.*

L I P S I Æ.

Prostant apud J. GROSSIUM & J. F. GLETITSCHIUM.

Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI.

Anno MDCLXXXIV.

Acta Eruditorum (Actes des savants) de Leipzig

3ème année 1684

La page 467 est la première page de "Nova Methodus Pro Maximis et Minimis..."

La figure en page 37 provient du même ouvrage.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, qua nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Si axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi-^{TAB. XII.}
nata, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respec-
tive, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx, & recta quæ sit ad
dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu-
a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuius or-
dinatæ respondentis curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub-*
tractio: si sit z = y + w + x æqu. v, erit dz = y + w + x seu dv, æqu
dz = dy + dw + dx. *Multiplicatio*, dx v æqu. x dv + v dx, seu posito
y æqu. x v, fiet dy æqu x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam,
ut x v, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x
& dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Equatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu.
 $\frac{+v dy - y dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituatur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro + scribi + dz, pro - scribi - dz, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesi valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum sit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.								
ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés.	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	27
13	0	13	35	4	0	1	2	25
13	30	14	6	16	0	1	2	23
14	0	14	37	27	0	1	2	21
14	30	15	8	38	0	1	2	19
15	0	15	39	47	0	1	2	17
15	30	16	10	56	0	1	2	15
16	0	16	42	3	0	1	2	13
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	7
17	30	18	15	17	0	1	2	5
18	0	18	46	19	0	1	2	2
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	57
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	51
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	45
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	55	49	0	1	1	39
22	30	23	24	39	0	1	1	36

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.									
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΤΩΝ.				
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.	
0	0	0	λα	κε	0	α	β	ν	
α	0	α	ς	ν	0	α	β	ν	
α	ς	α	λδ	ις	0	α	β	ν	
β	0	β	ε	μ	0	α	β	ν	
β	ς	β	λς	δ	0	α	β	μν	
γ	0	γ	η	κη	0	α	β	μν	
γ	ς	γ	λς	νβ	0	α	β	μν	
δ	0	δ	ις	ις	0	α	β	μς	
δ	ς	δ	μβ	μ	0	α	β	μς	
ε	0	ε	ιδ	δ	0	α	β	μς	
ε	ς	ε	με	ς	0	α	β	μς	
ς	0	ς	ις	μδ	0	α	β	μδ	
ς	ς	ς	μν	ις	0	α	β	μγ	
ς	0	ς	ις	λγ	0	α	β	μβ	
ς	ς	ς	ν	νδ	0	α	β	μς	
η	0	η	κβ	ις	0	α	β	μ	
η	ς	η	νγ	λε	0	α	β	λς	
θ	0	θ	κδ	νδ	0	α	β	λη	
θ	ς	θ	νς	ιγ	0	α	β	λς	
ι	0	ι	κς	λβ	0	α	β	λε	
ι	ς	ι	νη	μδ	0	α	β	λγ	
ια	0	ια	λ	ε	0	α	β	λβ	
ια	ς	ια	α	κς	0	α	β	λ	
ιβ	0	ιβ	λβ	λς	0	α	β	κη	
ιβ	ς	ιβ	γ	ν	0	α	β	κς	
ιγ	0	ιγ	λε	δ	0	α	β	κς	
ιγ	ς	ιγ	ς	ις	0	α	β	κγ	
ιδ	0	ιδ	λς	κς	0	α	β	κα	
ιδ	ς	ιδ	η	λη	0	α	β	ις	
ις	0	ις	λς	μς	0	α	β	ις	
ις	ς	ις	ι	νς	0	α	β	ις	
ις	0	ις	μβ	γ	0	α	β	ιγ	
ις	ς	ις	ιγ	δ	0	α	β	ις	
ις	0	ις	μδ	ιδ	0	α	β	ς	
ις	ς	ις	α	ις	0	α	β	ς	
ιη	0	ιη	μς	ις	0	α	β	β	
ιη	ς	ις	λς	κα	0	α	β	δ	
ις	0	ις	μν	κα	0	α	α	νδ	
ις	ς	ις	κ	ις	0	α	α	νδ	
κ	0	κ	ν	ις	0	α	α	νς	
κ	ς	κς	κς	ιβ	0	α	α	μν	
κς	0	κς	νβ	ς	0	α	α	μς	
κς	ς	κβ	κς	νη	0	α	α	μβ	
κβ	0	κβ	νγ	μδ	0	α	α	λς	
κβ	ς	κ	κς	ις	0	α	α	λς	

L'Almageste de Ptolémée

(Trad. par l'abbé Halma)

Avec la bienveillante autorisation de Madame le Directeur de la Bibliothèque Centrale du
Muséum d'Histoire Naturelle de Paris