INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

NUMERO SPECIAL 1

Mai 1993

CAHIER DE DIDIREM

METACONNAISSANCES
EN IA,
EN EIAO
ET EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Groupe de travail "Math & Méta"
1990-1992

recueil édité par M. Baron et A. Robert

LAFORIA-IBP & DIDIREM

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE-PARIS VII

Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques

Groupe de travail "Math & Méta"

1990-1992

recueil édité par M. Baron et A. Robert

LAFORIA-IBP & DIDIREM

Sommaire du recueil

Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques

Groupe de travail "Math et Méta", Jussieu, 1990-1992,

édité par M. Baron et A. Robert

INTRODUCTION ET PRESENTATION DU RECUEIL

Monique Baron et Aline Robert

Pourquoi réunir dans un même recueil des textes de didacticiens et d'informaticiens sur ce thème de "métaconnaissances", général, et encore un peu vague pour certains ?
Plusieurs raisons peuvent être évoquées.

* D'abord il faut rappeler que dans les deux disciplines, didactique des mathématiques et intelligence artificielle, le mot est utilisé, plus officiellement d'ailleurs dans la seconde[1] : est-ce dans le même sens ?
La lisibilité respective des travaux des uns par les autres dépend fortement de cette réponse. Mais pourquoi donc vouloir échanger entre les deux branches ?

* Il se trouve d'autre part que les recherches en intelligence artificielle et en EIAO ont amené certains chercheurs à se poser des questions de résolution de problèmes : résolutions de problèmes par ordinateurs, à partir d'une base de données et d'un certain nombre de règles, mais aussi apprentissage des élèves soumis à un enseignement assisté par ordinateur, interactif si possible, si ce n'est "intelligent".
Comment concevoir les règles du système informatique pour la résolution de problèmes ? Comment concevoir les EIAO[2] pour que les élèves apprennent ?
C'est là que les deux disciplines peuvent se rejoindre, ou au moins se répondre.

Certes, la première question relève peut-être autant de connaissances de psychologie que de connaissances spécifiquement didactiques, dans la mesure où elle concerne à première vue plus les experts que les élèves, car ce sont les experts qui vont servir de "modèles" aux chercheurs en IA. Cependant le mécanisme de résolution de problèmes est peut-être plus compliqué qu'il peut y paraître d'abord, et les catégories d'analyse introduites par les didacticiens peuvent être utiles... Réciproquement, les questions posées par la conception de systèmes peuvent permettre aux didacticiens d'envisager sous un autre angle le problème d'acquisition des connaissances, ce qui est souvent utile...

---

[1] Cf. le livre de Pitrat, paru en 1990 sous le titre "Métaconnaissance, Futur de l'intelligence artificielle" (Hermès, Paris)
[2] EIAO = Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur

Quant à la deuxième question, elle intéresse à l'évidence les deux communautés : l'aspect conception des contenus à proposer et des scénarios favorables ainsi que l'expérimentation relèvent plutôt de la didactique, les didacticiens devant essayer de s'adapter à la spécificité des situations d'enseignement avec ordinateur ; l'aspect conception informatique et implémentation sur les machines relève plutôt de l'informatique, les informaticiens ayant à discuter avec les didacticiens de la "faisabilité" informatique des propositions de ces derniers.
Ainsi les échanges entre familles de chercheurs semblent incontournables, ce qui explique l'idée de travailler en commun sur l'explicitation d'un terme clef en IA, qui est aussi utilisé en didactique mais peut-être pas dans le même sens...
Les métaconnaissances en effet devront être envisagées des deux points de vue : pour ne prendre qu'un exemple, les métarègles à mettre dans les systèmes, familières aux informaticiens quant à leur forme, devront être précisées quant à leur contenu par les didacticiens, plus familiers des mécanismes d'apprentissage conçus dans des environnements spécifiés (situations)...

* Enfin, une conjoncture géographique favorable (le même lieu de travail !) permettait de réunir très facilement des représentants des deux familles, ce qui a déclenché, de manière un peu volontariste au départ, il faut l'avouer, l'opération qui est à l'origine de ce recueil.

Un groupe de travail s'est donc constitué en juin 1990, comprenant essentiellement des didacticiens des mathématiques et des chercheurs en IA et EIAO, à l'initiative de M. Baron et A. Robert. Situé initialement hors structure institutionnelle, ce groupe s'est ensuite rattaché à l'atelier "Systèmes à base de connaissances et enseignement" du GDR Sciences Cognitives de Paris-Centre (GDR 957, CNRS). Une dizaine de réunions ont été organisées, sur deux années (de 1990 à 1992) et ce sont les textes issus de ces réunions que nous avons rassemblés ici.

Nous devons préciser que ces textes ne sont pas des textes "définitifs", ils correspondent à une étape de la réflexion[3], et c'est dans cette optique qu'il faut lire le recueil : il s'est agi d'établir une communication entre les groupes de chercheurs, chaque groupe exposant sa problématique propre, autour de métaconnaissances, pour que les autres groupes puissent en profiter. Nous espérons même que, rapidement, une partie de ces textes deviendront partiellement caduques, si ce n'est pour l'historien bien sûr, car cela voudra dire que les chercheurs ont progressé, ce qui était notre objectif premier...

[3] De ce fait, nous n'avons pas unifié les présentations et nous n'avons pas voulu trop modifier les textes écrits par rapport aux exposés présentés.

Nous avons tout de même tenu à les rendre publics, notamment comme témoins de la difficulté du dialogue entre les chercheurs, car nous pensons que ces difficultés révèlent un obstacle tout à fait réel, dont il faut tenir compte, à notre avis. Les informaticiens doivent tenir compte du fait que l'apprentissage (des élèves en tout cas) est loin d'être aussi transparent qu'ils ont pu l'imaginer d'abord, les didacticiens doivent tenir compte des possibilités éventuelles offertes par les ordinateurs et se mettre à étudier les situations correspondantes...

Ce recueil a en quelque sorte trois entrées : l'entrée didactique "pure", celle d'IA "pure", et l'entrée EIAO, puisqu'il fallait bien commencer par présenter la notion de métaconnaissances dans les trois points de vue. Il peut donc se lire dans plusieurs sens, mais pour l'édition il fallait bien choisir une page 1 !

Nous avons donc adopté l'ordre suivant : les trois premiers textes (A. Robert, M. Artigue) tentent de dégager, en donnant quelques exemples à l'appui, tout ce que peut recouvrir la notion en didactique des mathématiques.

Les deux derniers textes (J.M. Bazin, D. Pastre) concernent les métaconnaissances en IA, le second étant dirigé vers la démonstration de théorèmes.

Les textes centraux (M. Baron, E. Delozanne, M. Rogalski, J.F. Nicaud), pivot essentiel justifiant a posteriori notre démarche, présentent

- quelques aspects relatifs à la notion de métaconnaissances en EIAO,
- un exemple de conception d'un logiciel interactif résultant précisément d'une collaboration entre didacticien et informaticien,
- une réflexion plus générale sur les difficultés a priori de ce type d'entreprise, pour tenter de délimiter à l'avance le champ des contenus les plus appropriés...
- un modèle de connaissances en algèbre conçu pour un EIAO.

Des bibliographies sont jointes à chaque article.

Remerciements

Le GDR Sciences Cognitives de Paris-Centre (GDR 957, CNRS) a accordé un soutien financier pour l'édition de ce recueil.

PRESENTATION DU POINT DE VUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES SUR LES METACONNAISSANCES

A. Robert
Equipe DIDIREM, Université Paris 6

1) A l'origine

Les premières tentatives d'introduire des "métaconnaissances" dans l'enseignement des mathématiques relèvent de deux types de travaux (élèves de collège en très grande difficulté, élèves des filières scientifiques des lycées et des premières années d'université).

Pour ces élèves, les situations didactiques "ordinaires" ne suffisent pas à déclencher les apprentissages souhaités : ce peut être à mettre en rapport avec le recrutement (plus large qu'avant) de ces élèves, au collège notamment, ou aux connaissances visées, qui ne se prêtent pas à une introduction classique avec un bon problème permettant de leur donner du sens (c'est le problème qui n'existe pas !).

Dans ces deux cas, aussi bien les analyses que les chercheurs font pour expliquer les difficultés que les moyens qu'ils proposent pour y remédier relèvent d'un niveau qui n'est pas celui des connaissances mathématiques strictes, mais celui d'une réflexion sur ces connaissances ou sur l'accès à ces connaissances. Ainsi, les éléments nouveaux que les didacticiens proposent de prendre en compte dans leurs analyses ne sont pas des connaissances mathématiques au sens habituel, comme les définitions, les théorèmes, les propriétés, les solutions de problèmes..., mais ils y sont très liés : en fait ces connaissances mathématiques sont l'objet sur lequel portent, à un titre ou à un autre, ces nouveaux éléments. Les analyses des blocages, les propositions de "remédiation" ne portent donc pas seulement sur les contenus mathématiques stricts, mais par exemple sur la nature mathématique des concepts en jeu, ou encore sur la façon dont les élèves les abordent, et par là même concernent leurs représentations sur les mathématiques et la manière de les apprendre, "en amont" de la classe pourrait-on dire.

Tout ceci justifie l'emploi des mots "métaconnaissances", ou connaissances "métacognitives" : on désigne ainsi des connaissances SUR les mathématiques à enseigner, l'activité mathématique, l'apprentissage des mathématiques...

2) Des exemples

Nous allons décrire assez brièvement des exemples des deux niveaux évoqués ci-dessus, un exemple plus détaillé sera développé dans l'article suivant.

a) Au collège

Pour des élèves de collège en grande difficulté, souvent en mathématiques comme dans les autres disciplines, les chercheurs ont été amenés à compléter les discours habituels tenus en classe par les enseignants par d'autres informations. Il s'agit d'éléments sur les mathématiques, sur ce que c'est que faire des mathématiques, pour les élèves et peut-être aussi pour les professionnels, sur ce qu'on a le droit de faire en mathématiques, sur ce qu'il peut être utile de faire pour apprendre ce que le professeur doit enseigner... (cf. Boero, Butlen, Perrin).

Il s'agit le plus souvent d'élèves d'origine sociale "modeste", et ce sont ces informations sur les mathématiques, qui complètent dans une certaine mesure le bagage culturel disponible, que nous appelons "métaconnaissances".

Ces informations sont associées à des situations où les élèves ne savent pas quoi faire, plus qu'à un concept particulier, et il est proposé de remettre les élèves dans des situations analogues toute l'année.

Ces interventions contribuent à expliciter le jeu auquel on entend que les élèves jouent pour apprendre, et pour faire savoir qu'ils ont appris (ceci fait partie de ce qu'on appelle le contrat). Elles dévoilent aussi ce qui est "normal" dans ce jeu, les difficultés, ce qui peut être long par exemple. L'enseignant espère ainsi aider les élèves à anticiper, à mieux calibrer les efforts consentis, à agir plus efficacement.

b) Dans l'enseignement des mathématiques dans les filières scientifiques

Là encore la démocratisation de l'enseignement (après la seconde en France) a amené les enseignants à se poser la question d'un accès plus large à des connaissances mathématiques gardant leur sens.

Le manque d'initiative de beaucoup d'élèves devant le moindre problème nouveau, alors même que ces élèves ont "appris" les connaissances nécessaires à la résolution du problème, est à la fois un indice d'échec et un blocage pour un apprentissage authentique. Cela a amené certains chercheurs, Schoenfeld aux USA, Legrand, Robert, Tenaud, Dorier, Rogalski... à travailler sur autre chose que sur les seules connaissances mathématiques : ils proposent de rajouter dans l'enseignement des éléments de connaissances ou de réflexion SUR les mathématiques des domaines visés. Cette idée est d'autant plus plausible que les élèves sont âgés (plus de 15 ans) et sont tout à fait capables (et peut-être même le demandent-ils pour certains) d'avoir accès à des

métaconnaissances, en les distinguant des connaissances elles-mêmes (ce qui est plus problématique pour des élèves du collège, encore "syncrétiques").
Ce peuvent être des méthodes, des moyens systématiques de contrôle ou de choix de stratégies, ou des activités portant sur la nature même des concepts à apprendre : on reconnaît des connaissances métacognitives.
Dans l'enseignement, il s'agit plus précisément d'associer des éléments d'information de ce type et des activités mathématiques où les élèves en ont besoin. Ainsi espère-t-on faciliter, accélérer, peut-être améliorer les apprentissages, ne serait-ce que parce qu'un tel enseignement doit permettre à beaucoup plus d'élèves de résoudre dans des conditions raisonnables beaucoup plus de problèmes...
Nous donnons ici trois exemples permettant d'éclairer nos propos, un dernier exemple plus détaillé fait l'objet de l'exposé suivant.

Premier exemple : I. Tenaud a expérimenté l'association d'un enseignement de méthodes concernant les problèmes de géométrie de terminale C et les recherches (pour les élèves) d'exercices sans indications de méthodes. Les élèves ont souvent besoin de réfléchir à une méthode pour aborder l'exercice proposé, sinon ils n'arrivent pas à démarrer ; de plus ils travaillent en petits groupes, ce qui facilite la discussion sur les méthodes, d'autant plus que l'enseignant est intervenu explicitement sur le sujet (à la fois sur les méthodes elles-mêmes et sur leurs conditions d'utilisation).
Dans ce cas nous appelons métaconnaissance ce qui a été enseigné sous le titre "méthodes".
Pour ces élèves ce sont des connaissances qui portent à la fois sur ce qu'ils connaissent déjà et sur ce qu'ils doivent apprendre de nouveau en géométrie ; la mise en oeuvre de ces méthodes les aide à résoudre les exercices non triviaux que l'enseignant leur propose, elles contribuent aussi à (ré)organiser leurs connaissances. D'où notre hypothèse que l'enseignant a peut-être là un moyen pour faciliter l'apprentissage des notions de géométrie visées.
Explicitons ce que nous entendons par méthodes : d'abord ces méthodes sont élaborées en partie par les élèves tout au long de l'année ; elles consistent essentiellement en :
- des points de repère sur les problèmes proposés à ce niveau : le type des problèmes, les cadres utilisés, les configurations de base, les outils adaptés,
- des conseils de type stratégique plus généraux, qui permettent de prendre des initiatives, comme changer de cadre, introduire des intermédiaires, changer de point de vue...
Cependant pour des mathématiciens plus avertis, ces méthodes n'apparaîtraient peut-être pas comme telles, soit parce qu'ils n'éprouvent pas le besoin de distinguer dans leur démarche de résolution ce qui correspond à la mise en oeuvre de méthodes, soit parce que leurs méthodes sont plus sophistiquées (le recours systématique aux invariants est exclu en terminale par exemple).

Pour des élèves de première en revanche, il s'agit de connaissances hors de portée de ce qu'ils savent déjà, et sans doute en partie inefficaces.
Les recherches effectives ont consisté à expérimenter plusieurs années de suite le scénario mis au point la première année et à analyser les comportements des élèves, notamment pendant les recherches en petits groupes sur des exercices proposés sans indication de méthode. Les résultats vont dans le sens d'une confirmation des hypothèses, mais nécessitent d'être encore affinés.

Un autre exemple est donné dans les travaux de J.L. Dorier (à la suite de travaux de A. Robert et J. Robinet sur la convergence).
J.L. Dorier s'attache à analyser l'enseignement en algèbre des concepts particuliers que nous avons nommés "unificateurs, formalisateurs et généralisateurs" : ce sont ces concepts, comme celui de limite ou d'espace vectoriel, qui ont été formalisés après que de nombreux mathématiciens aient su résoudre un certain nombre des problèmes où les dits concepts peuvent servir comme outil. Mais chaque résolution en était alors particulière, tandis que le recours aux concepts permet d'unifier (et souvent de simplifier) les solutions, sans parler des nouveaux problèmes qu'il permet d'aborder, mais qui sont beaucoup plus difficiles.
Dans ces conditions, il est clairement problématique d'aborder ce type de concepts avec les étudiants : il n'est pas facile (voire impossible) de trouver de "bons" problèmes pour motiver leur introduction, puisque les problèmes du niveau des étudiants qui relèvent du champ peuvent être résolus "autrement" ; et les étudiants sont déroutés par un formalisme qui ne leur apparaît pas toujours nécessaire, même si les solutions plus familières sont plus longues, ce qui ne les rebute pas !
J.L. Dorier fait le raisonnement suivant : les mathématiciens eux-mêmes ont recours à une analyse réflexive pour construire les concepts du type qui nous intéresse (cf. Piaget Garcia), il n'y a pas de genèse artificielle évidente à mettre en oeuvre pour faciliter l'apprentissage des étudiants, donc il reste à l'enseignant à provoquer chez les étudiants une forme condensée de cette analyse réflexive sur les objets et les méthodes du champ considéré avant d'introduire les nouveaux concepts.
Cette analyse réflexive relève évidemment de notre "méta", en tant qu'élément de réflexion sur un domaine particulier des mathématiques, qui doit être ensuite reconsidéré autrement par l'étudiant. L'auteur donne deux types d'exemples.
D'une part il organise pour les étudiants des activités qui les amènent à s'interroger sur la structure d'opération interne et de groupe, d'un point de vue axiomatique. Quelles sont les propriétés minimales à introduire pour garantir la résolution habituelle et automatique des équations linéaires ? Le problème est donc de nature inhabituelle, c'est un problème de réflexion sur des objets familiers... Chercher ce problème, de niveau "méta", permet

de changer de point de vue et de mieux aborder la suite du cours : l'enseignant va ensuite faire jouer une certaine analogie pour introduire d'autres axiomes algébriques, espérant que cette première activité aura un effet sur leur appréhension de ce chapitre assez abstrait.
Dans une autre expérience, J.L. Dorier propose aux étudiants de résoudre un problème (d'interpolation, dit de Gregory) en leur faisant découvrir l'économie qu'ils font s'ils utilisent le formalisme algébrique au lieu d'un calcul direct.
Ici encore il s'agit à travers des activités non classiques, et en particulier des questions de réflexion adéquates, d'amener les étudiants à mener une analyse SUR ce qu'ils manipulent, sur la nature des êtres mathématiques rencontrés, leurs raisons d'être...
Les résultats des expériences, qui sont en cours, sont tout à fait encourageants mais encore insuffisants.

Dernier exemple : le circuit logique de M. Legrand
Il s'agit là de transmettre explicitement aux étudiants les règles du jeu du fonctionnement logique élémentaire des mathématiques (règle du tiers exclu, implication), notamment lorsque les mots utilisés "vrai", "faux", "implique", n'ont pas le sens courant de l'usage en français. L'auteur utilise une séquence qui force les étudiants à répondre à des questions de ce type et à réfléchir par là même explicitement, compte tenu des différences qui apparaissent dans la classe, à leur validation.

3) Comment sont choisies les métaconnaissances faisant l'objet d'un enseignement ?
Précisons d'abord que les métaconnaissances enseignées aux élèves ne visent pas, on l'a bien vu, à restituer un comportement expert : elles visent à faire apprendre des mathématiques à un plus grand nombre d'élèves, à rendre opérationnelles les connaissances enseignées, mais cette fonctionnalité n'est que celle de l'élève en situation scolaire... La comparaison des conceptions et des pratiques des experts et des élèves n'a même pas de sens dans ces conditions !
C'est pour cela que le modèle de l'expert, qu'il soit conçu comme utilisant des méthodes ou comme tout à fait étranger à ce mode de travail ne nous convient pas en tant que tel : nous ne cherchons pas à ce que les élèves imitent les experts, les élèves ne sont pas vraiment des "experts en herbe", même si certains d'entre eux le deviendront.
En revanche, et malgré une certaine diversité sans doute, nous pensons qu'on peut s'inspirer de certains éléments des comportements des experts, tout le problème étant de faire le tri et d'adapter...
Ainsi lorsque l'expert cherche un nouveau problème, qu'il sèche, nous avons analysé son comportement pour voir s'il n'y avait pas d'éléments exportables ; son activité est alors en effet de la même nature que celle de l'élève, c'est pendant ce temps là que se construit une partie du sens des connaissances... A cela près que l'expert a beaucoup plus de

connaissances, de références, d'expériences que l'élève, et qu'il a confiance en lui... Ceci fait qu'il va vite, avec des raccourcis, des contrôles, des prises de décision "stratégiques" presqu'automatiques, même si cela cache par exemple la mise en oeuvre de méthodes bien réelles pour certains, au niveau de connaissances correspondantes bien sûr.
Nous en avons déduit qu'il était intéressant de remplacer pour les élèves, de manière artificielle et partielle, ce bagage quelquefois complètement intériorisé qu'a l'expert et qu'il utilise devant un problème. Nous voulons garder la richesse de la situation de résolution de problème, mais la rendre effectivement accessible à plus d'élèves. D'où ce choix, d'indiquer aux élèves, pour les leur faire mettre en pratique, des mécanismes de recherche en mathématiques, de plus en plus précis et diversifiés au fur et à mesure que les élèves sont âgés et ont affaire à des connaissances complexes. Ces mécanismes sont inspirés de ceux des experts, mais sont plus lourds, plus systématiques, ils doivent correspondre aux ressources des élèves, donc être adaptés à leurs connaissances du moment et être explicités complètement.
Une partie du travail du chercheur en didactique est d'ailleurs de trouver, pour des élèves précis, les méthodes à transmettre, les contrôles à encourager, les automatismes à mettre en place rapidement.

Un autre aspect a été rencontré : c'est celui de l'expert en train de réorganiser ses connaissances, notamment pour élaborer certains concepts. Là encore, sans "copier" l'expert, les chercheurs s'inspirent de l'existence d'une réflexion sur les mathématiques, qui est à l'origine du travail du mathématicien. L'hypothèse que des analyses distanciées de ce type peuvent dans certains cas produire des effets facilitateurs, notamment pour produire du sens pour les concepts correspondants, est exportée du domaine du savoir savant à celui du savoir enseigné.
Le travail du didacticien consiste à provoquer, grâce à une activité mathématique bien choisie et un contrat approprié, une réflexion adéquate sur la nature de certains concepts.

On peut dire presque les mêmes choses un peu autrement : dans la première partie, il est apparu que ce que nous acceptions sous le préfixe méta pouvait effectivement relever de deux types de savoir : le savoir privé, surtout côté métacognition au sens classique, lorsque ce qui est en jeu concerne les connaissances d'un individu, d'un sujet, sur ses propres connaissances mathématiques, ses stratégies..., et le savoir public, prêt à être transmis, externe avons-nous dit, qui concerne par exemple ce que l'enseignant veut transmettre à sa classe comme éléments de méthodes, ou comme références épistémologiques.
On peut alors interpréter une partie des travaux précédents de la façon suivante : le scientifique construit un savoir privé qui comprend des éléments d'ordre "méta" qui l'aident notamment en situation de recherche ; l'enseignement tente d'offrir aux élèves

des occasions de construire et de faire fonctionner une partie de ce savoir, rendu donc public en l'occurrence...
Un autre travail pour le didacticien est de mettre en place les scénarios correspondants, qui jouent sur un temps long...

4) Définitions

Nous utiliserons le préfixe méta devant les mots connaissances ou cognitif pour désigner des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, et leur fonctionnement ou leur utilisation, qu'ils soient généraux ou tout à fait liés à un domaine particulier. Ce peut être donc des éléments de métaconnaissance, voire de métacognition ou des connaissances métacognitives.
Cependant, il est impossible de ne pas tenir compte dès maintenant de la relativité de la définition : la distinction entre mathématique et "méta"(mathématique), dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, n'est pas du tout absolue à nos yeux.

* De la relativité de la notion
D'abord nous ne l'utilisons que dans le cadre de l'enseignement ; ensuite, elle dépend pour nous essentiellement des "protagonistes" du discours concerné, des élèves en l'occurrence.
Ainsi certaines méthodes relèvent du méta pour des élèves NE CONNAISSANT PAS ENCORE COMPLETEMENT LE CHAMP AUXQUELLES ELLES S'APPLIQUENT, pour l'enseignant ce sont quasiment des mathématiques, pour lui la distinction n'a pas lieu d'être en tout état de cause (cf. premier exemple ci-dessus).
Autrement dit nous utiliserons le mot "méta" plutôt que mathématique s'il y a pour le récepteur du discours apport d'un élément sur des mathématiques à apprendre, en partie encore donc non acquises, ce qui justifie qu'on ne peut pas assimiler ces éléments à des mathématiques ou du moins qu'il soit intéressant de les distinguer des connaissances mathématiques "ordinaires".
Peut-être pourra-t-on déjà déceler ici qu'une partie de l'intérêt de ce type d'information tient à l'anticipation qu'elle permet dans l'action, malgré la part d'inconnu, d'apprentissage en cours.

On pourrait encore dire que certaines connaissances vont avoir un statut de connaissances ou de métaconnaissances selon le traitement qu'il est possible de leur appliquer avec les élèves : encore une fois des méthodes sur un domaine entièrement connu par les élèves, ne relèveront pas spécialement du méta mais des mathématiques. L'enseignant n'y accordera pas une attention spéciale, même s'il les utilise naturellement, automatiquement peut-être, ainsi que les élèves d'ailleurs.

Reste que pour d'autres éléments méta, plus généraux, on ne changera pas de vocabulaire que ce soit pour les élèves ou pour les experts...
Précisons donc maintenant le champ du "méta".

* Le particulier et le général, les mathématiques et l'épistémologie
Reprenons notre première définition : en fait, relevant de la relativité décrite ci-dessus, il y a plusieurs niveaux d'information et de connaissances sur les mathématiques et leur fonctionnement ou leur utilisation, que nous devons préciser. On peut citer :
- des informations constitutives de la connaissance mathématique (méthodes, structures, organisation),
- des informations constitutives de l'accès à la connaissance mathématique, accès d'un individu donné ou plus général (jeux de cadres, rôle des questionnements, des exemples et des contrôles, et aussi rôle de la réflexion épistémologique pour apprendre)
- des informations sur les (modes de) productions ou les mises en fonctionnement mathématiques de soi et des autres (contrôle, guidage).

Ainsi non seulement certains de ces éléments peuvent être très liés à un fonctionnement personnel, d'autres concernant plus un "sujet" épistémique, mais encore certaines informations que nous qualifierons de "méta" peuvent concerner plus l'épistémologie des apprenants vis à vis de la discipline que directement la discipline.
Il apparaît ainsi que, pour l'utilisation que nous proposons, le mot recouvre des informations qui, si elles sont relatives aux apprenants, sont néanmoins assez larges.
En fait, dorénavant nous réunissons sous le même mot des catégories qui ont pu être disjointes dans la littérature (réflexion et métacognition notamment), ce qui justifie le choix du seul préfixe "méta" auquel nous nous sommes ralliés.
En résumé, pour nous ce qui va unifier le champ dont nous parlons n'est pas le caractère externe au sujet ou propre au sujet, mais bien le niveau de ce dont on parle par rapport à la connaissance en jeu.

Nos définitions vont toujours être relatives à une classe de sujets (les élèves en l'occurrence). Nous considérons pour ces sujets, compte tenu de leurs connaissances mathématiques, tout ce qui concerne la réflexion sur ces connaissances, qu'elle soit ou non explicite ou consciente, qu'elle soit le fait d'un sujet particulier ou qu'elle reste potentielle : réflexion individuelle (du type qu'est-ce que je peux faire avec mes connaissances), ou générale (comment puis-je faire pour les mettre en fonctionnement ou les accroître), ou bien encore sur la signification des connaissances mathématiques...

5) Le "méta" simple instrument pour mener des analyses ou futur objet d'enseignement ?

Se pose maintenant une question, qui même si elle n'est pas toujours explicitée dans les travaux, est fondamentale : ou bien on en reste à ces catégories pour analyser les élèves notamment, ou bien on se lance dans une action relevant explicitement de ce niveau (même si c'est mélangé à d'autres niveaux) en direction des élèves, avec expérimentation, évaluation ...

Il y a là une option : pourquoi donc faire accéder l'élève ou chercher à le faire accéder à ce niveau, doit-on réserver ce niveau à l'analyste, ou peut-être à l'enseignant, à la limite pourquoi chercher à donner à l'élève des clefs ?

En particulier, beaucoup d'auteurs, comme nous l'avons vu, ont montré que des métaconnaissances apparaissaient chez les élèves plus âgés, dans des domaines comme la mémoire ou la lecture, accompagnant souvent les performances des élèves jugées satisfaisantes, et ceci "quoiqu'on fasse".

Cependant, ces mêmes auteurs ont souvent aussi montré qu'une intervention de type remédiation auprès d'élèves "moins bons", voire jeunes, était positive, mais les recherches sont très difficiles, il y a tellement de problèmes méthodologiques qu'il est facile de rester sceptique surtout si on est hostile à l'accès des élèves à ce niveau... Citons comme problèmes souvent évoqués : comment mesurer la "métacognition" chez les élèves, peut-on se contenter d'indices verbalisés, comment être sûr que les interventions supposées agir à ce niveau le font...

Voilà donc des questions clef de notre travail : avant tout, y a-t-il lieu de s'intéresser à ces niveaux, dans l'enseignement des mathématiques, même pour comprendre ce qui est en jeu ? Doit-on laisser faire "la nature" et se contenter d'analyser ? Puis faut-il intervenir, et s'il faut intervenir, comment ?

6) Le "méta", un moyen ou une fin pour l'apprentissage mathématique ?

En fait, deux objectifs liés à ces éléments d'information "méta" peuvent apparaître, vu ce qui précède, avec dans chaque cas un versant individuel et un versant général :

- le méta comme un moyen pour accélérer les apprentissages, à titre général (par exemple pour l'enseignant, pour décider de certaines de ses interventions) et à titre individuel (par exemple pour l'apprenant, pour piloter ses apprentissages et ses activités mathématiques)
- le méta comme une fin, dans la mesure où on estime qu'un apprentissage scientifique met en jeu (i.e. à la fois exige et développe) un niveau réflexif quant à la constitution et au contrôle des connaissances. Ce niveau, plus ou moins implicite au collège, dont nous nous demandons s'il ne doit pas devenir explicite au lycée, est à mettre en rapport avec les représentations des étudiants sur l'apprentissage et la mathématique : il y a une dialectique entre les représentations qu'un étudiant a des mathématiques, la manière dont

il les apprend et les fait fonctionner et ... à nouveau les représentations qu'il a des mathématiques.
Dans le premier aspect, est défendue l'idée que des informations "méta", sur les mathématiques, contribuent à aider les mises en fonctionnement mathématiques. Mais comme en même temps toute activité mathématique contribue à alimenter la réflexion qu'a celui qui la mène sur les mathématiques, et à renforcer l'image qu'il en a, les deux niveaux ci-dessus sont en interaction étroite.
La grande question reste alors, encore une fois, de savoir s'il faut laisser ce processus se faire tout seul (et s'il se fait), s'il est intéressant qu'il se fasse, et donc s'il y a une place pour l'enseignement, et alors pour la réflexion didactique.

7) Retour à l'enseignement : premières conséquences de ces définitions, une prise de position

Pour dire les choses extrêmement brièvement : Piaget nous a appris que l'enfant construit son savoir (qu'on le veuille ou non d'ailleurs !). A l'enseignement de proposer des situations favorisant cette construction dans les domaines relevant du scolaire.
Nous pensons que l'enfant construit aussi son mode d'accès au savoir, notamment au savoir construit par les autres : nous allons défendre la thèse que pour des connaissances assez complexes, ou pour des enfants ayant eu peu d'occasions de construire un savoir se rapprochant du savoir mathématique, l'enseignement doit et peut aussi proposer des situations propices à une construction efficace de l'accès au savoir, le "méta" intervenant comme un des ingrédients de choix de ces situations... Cela ne veut pas dire qu'il y ait lieu de séparer les situations de construction de savoir des autres : au contraire nous pensons qu'il y a lieu de les imbriquer, tout comme l'accès au savoir est imbriqué chez tout un chacun à son propre savoir...
Reste que le problème de la construction effective de ces situations est entier : ce que nous avons exposé ne préjuge que très peu des moyens que l'enseignement doit se donner pour remplir un tel objectif ! Et dans notre conception, c'est précisément à la didactique des mathématiques de concevoir et d'expérimenter des scénarios adéquats...
En particulier comment évaluer des dispositifs qui prétendent introduire ce type d'éléments, comment distinguer leurs effets des autres éléments de l'apprentissage ?

8) Pistes de réflexion et de recherches

Nous avons précisé ce que nous mettons sous le mot. Nous avons dégagé une hypothèse, à savoir que nous pensons que, pour certains élèves au moins, la transmission par l'enseignement d'éléments relevant du niveau "méta" devait faciliter, rendre possible, ou accélérer des apprentissages mathématiques.

Autrement dit, nous considérons que ce niveau contribue non seulement à analyser les comportements des élèves, mais peut aussi intervenir dans la définition des connaissances transmises. Reste alors de très nombreuses questions, que nous allons esquisser maintenant, sans les résoudre nécessairement, et notamment les rapports avec le point de vue classique en didactique des mathématiques.

Mais avant nous devons nous arrêter sur une question préalable :

a) Les métaconnaissances en mathématiques sont-elles des connaissances ou pour qui sont-elles des connaissances ?

Jusqu'à présent nous avons utilisé indifféremment dans notre exposé les mots connaissances ou éléments pour désigner tout ce que nous avons convenu de reconnaître sous le préfixe choisi comme étiquette. Nous avons surtout défini le niveau où nous nous placions pour regarder, sans trop aborder la nature de ce que nous regardions.

Si on n'utilise ces éléments que pour analyser les fonctionnements des élèves, pour expliquer des blocages ou pour constater des ressources de cet ordre chez certains, on n'a peut-être pas besoin d'en préciser plus la nature. On peut même évoquer des connaissances pour le chercheur, qu'il cherche à enrichir.

Le problème se complique si on a des visées pour l'enseignement : parlera-t-on de connaissances à transmettre aux élèves (voire de savoir), cherchera-t-on à les évaluer ?

b) Enseignement d'éléments "méta", situations didactiques.

Comment intégrer à la théorie des situations ce type d'enseignement ?

c) Eléments de réflexion sur l'efficacité de la prise en compte d'éléments "méta" dans l'enseignement

Nous pensons en effet que ces éléments peuvent contribuer à l'apprentissage à condition de les transmettre correctement, au bon moment, et à la condition sine qua non que des activités adéquates soient proposées aux élèves, leur permettant de les utiliser...

Ceci suppose que parmi les éléments transmis aux élèves il y en ait susceptibles de réinvestissement en termes d'activités pour les élèves (condition que nous avons déjà évoquée).

Plusieurs hypothèses partielles, complémentaires, et relevant de dimensions différentes, nous semblent pouvoir être évoquées pour justifier cette hypothèse, tous ces plans interférant vraisemblablement chez les élèves de manière diverse.

Dans tous les cas, nous essayons d'émettre des hypothèses sur le fait que ces éléments "méta" aident les élèves à résoudre des problèmes, à mettre du sens et à organiser leurs connaissances mathématiques, sans que nous puissions mettre de hiérarchie entre tous ces "ingrédients" de l'apprentissage mathématique. Nous ne distinguons pas non plus entre les différents modes d'intervention "méta" possibles, estimant à première vue que, dans l'ensemble, les objectifs et les raisons de leur efficacité sont assez communs.

* Dans une perspective interactioniste, voire Vygotskienne, de tels éléments peuvent faire plus facilement l'objet de communications entre les élèves que les math elles-mêmes, qu'elles précédent en quelque sorte, d'où leur intérêt, notamment pour "se lancer dans l'action". Ce sont des éléments sur les connaissances mathématiques, or résoudre un problème c'est justement agir avec et sur les connaissances mathématiques... et il s'agit de réussir à agir assez vite, sans une trop grande dépense d'énergie à chaque fois, d'où l'intérêt d'avoir des "aides à l'action", suffisamment générales pour resservir, et même pour s'autorégénérer (à la différence de recettes).

* Dans une perspective constructiviste (au sens large) nous nous demandons si nous ne contribuons pas avec ce type d'interventions à créer un certain déséquilibre, déséquilibre dynamique entre métaconnaissances et connaissances, comme un appel d'air entre ce qui est attendu, prévu, anticipé formellement, et ce qu'il faut mettre dedans. Si le déséquilibre est trop grand il ne se passe rien que du vent ; mais si la marge est suffisamment petite, les élèves sont aidés à franchir le pas dans l'inconnu... Cela est peut-être à rapprocher des théories de Brüner concernant l'anticipation.

* Par essence, puisque c'est leur objet direct, ces éléments peuvent faciliter les mises en relation, les anticipations, ils préparent les élèves, ils canalisent les écoutes, ils indiquent la longueur d'onde, ils évitent de trop grandes dispersions, c'est comme un pont, un intermédiaire, une rampe, une canne...

* Enfin, on peut aussi évoquer des éléments liés à des modèles de construction des connaissances scientifiques liés à la formation même de ces connaissances. Travailler sur l'accès aux connaissances est une entrée au travail d'acquisition...

On retrouve que les recherches les plus envisageables sont celles qui peuvent avoir un rapport direct avec les productions des élèves (au sens large) (cf. paragraphe précédent)...
D'une part il est nécessaire de dégager, pour des élèves déterminés et des connaissances à enseigner, les éléments métacognitifs qu'on suppose pouvoir aider ces élèves dans leur apprentissage (travail de conception et d'ingénierie).
Ce type de travail a été commencé, mais reste en général très partiel, limité qui plus est aux élèves de collège en difficulté ou aux élèves des filières scientifiques. Y a-t-il lieu de généraliser ces tentatives ? Aux élèves dits "littéraires", ou non scientifiques en tout cas, par exemple ? Y a-t-il des effets différentiels selon les élèves ?

* D'autre part, et c'est évidemment lié à ce qui précède, ces ingénieries, existantes ou à concevoir, doivent être expérimentées et évaluées, ce qui suppose la mise en place de dispositifs expérimentaux lourds, et ce d'autant plus qu'il ne s'agit pas d'intervenir une fois sur un sujet précis, mais au contraire que le long terme (année scolaire) intervient nécessairement...

Bibliographie sommaire

ASTER 12 (1991), L'élève épistémologue, Revue de didactique des sciences expérimentales, INRP.

Bachelard (1967) Formation de l'esprit scientifique, Librairie Vrin.

Boero P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems, Actes de PME 13.

Bruner (19 83) Savoir dire, savoir faire, PUF.

Butlen D. et Pezard M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, Cahier de Didirem n°13, IREM PVII, Paris.

Butlen D. et Pezard M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 13.1, Grenoble.

E. Cauzinille-Marmèche et A.M. Melot (1992), Etude expérimentale de la réorganisation des connaissances par la résolution de problèmes, ECCO'S 1992, Colloque du programme Cogniscience du CNRS.

Chartier et Lautrey (1992) L'apprentissage de stratégies métacognitives, L'Orientation scolaire et professionnelle, Vol 21 n°1.

Dorier J.L.(1990) Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier de Didirem n°7, IREM PVII, Paris.

Dorier J.L. (1992) Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire, Cahier de Didirem n°14, IREM PVII, Paris.

Dubinski E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced mathematical thinking, in Advanced mathematical thinking, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publishers.

Flavell (1985) Développement métacognitif dans J. Bideault, M. Richelle (Eds) Psychologie développementale, problèmes et réalités, Mardaga, Bruxelles.

Forrest-Pressley D.L., Mac Kinnon G.E., Gary Waller T. Ed. (1985) Metacognition, cognition and human performance, Academic Press (deux tomes).

Larochelle et Desautels (1992), A propos de l'idée de sciences, De Boeck.

Legrand M. (1991) "Circuit ou les règles du débat mathématique, in Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année, Commission interIrem Université, Lyon.

Melot A.M., (1991) Contrôle des conduites de mémorisation et métacognition, Bulletin de psychologie n°399, T. XLIV.

B. Noel (1991) La métacognition, De Boeck.
Perrin M.J. (1992) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 13.1, Grenoble.
Piaget (1974) Réussir et comprendre, PUF.
Piaget (1974) La prise de conscience, PUF.
Piaget et Garcia (1983) Psychogénèse et histoire des sciences, Flammarion, Paris.
Pitrat (1990) Métaconnaissance, Futur de l'intelligence artificielle. Hermès, Paris.
Polya G. (1945) How to solve it ? Princeton University Press.
Resnick (1989) Knowing learning and instruction, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
Robert A. et Josse E. (1992) Introduction de l'homothétie en seconde : analyse de deux discours de professeurs, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 13.1, Grenoble.
Robert A. et Robinet J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves, Repères Irem N°7.
Robert A. et I. Tenaud (1988) Une expérience de la géométrie en terminale C, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 9.1, Grenoble.
Robert A. (1991) Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie en formation continue), Cahier de Didirem n°9, IREM PVII, Paris.
Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 12.2-3, Grenoble.
Robinet J. (1992) Le pourquoi et le comment d'une ingénierie (la convergence uniforme), Cahier de Didirem n°12, IREM PVII, Paris.
Rogalski M. (1990) Enseigner des méthodes en mathématiques, in Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A première année, Commission interIrem Université, Lyon.
Rogalski M. (1991) Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année, Cahier de Didirem n°11, IREM PVII, Paris.
Schoenfeld A. (1985), Mathematical problem solving, Academic Press.
(1987) (Ed.) Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates).
Sternberg (1982) A componential approach to intellectual development, in Advances in the psychology of human intelligence, Hillsdale, NJ : Erlbaum.
Tenaud I. cf. Robert A.
Vygotski (1985) Pensée et langage, Editions sociales, Messidor.

UN EXEMPLE DE SCENARIO INTEGRANT DES ELEMENTS "META" EN LICENCE

A. Robert
Equipe DIDIREM, Université Paris 6

Il s'agit d'un enseignement d'algèbre et géométrie, effectué pour un public en formation continuée, niveau licence. Le programme imposé comprend des éléments de géométries affine et euclidienne, essentiellement en dimension deux et trois, et le début de la théorie des groupes.
Nous allons présenter divers éléments qui entrent en jeu explicitement dans notre enseignement, et que nous avons envie, a priori, de distinguer du reste et de baptiser "méta".
Nous les avons reclassés pour les besoins de la présentation selon leur "nature" par rapport aux connaissances, cependant les motivations qui nous amènent à les enseigner, qui sont indiquées ailleurs[1] , peuvent se recouper, ainsi que les modes de transmission utilisés.
Nous n'avons pas tenu compte ici des caractéristiques professionnelles du public. En revanche nous exploitons à fond leur âge (**ce sont des adultes**), et toutes leurs capacités de réflexion sur ce qu'ils font, ou sur les connaissances elles-mêmes.

1) Du côté de l'épistémologie : réflexions sur la nature des concepts visés et informations des étudiants.

Il s'agit là en effet de transmettre sous forme d'informations, et sans évaluation directe, des éléments de réflexion épistémologique (rassemblés par l'enseignant) sur la nature des concepts visés par l'enseignement.
Le statut unificateur, généralisateur, formalisateur d'un bon nombre des concepts visés leur confère en effet, à notre avis, des particularités vis à vis de leur enseignement.
C'est qu'en effet, les problèmes où l'utilisation de ce type de concepts est indispensable sont, du moins jusqu'à ce qu'on nous prouve le contraire, trop difficiles pour les

[1] A. Robert (1991) Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continue) cahier de Didirem n° 9 IREM P7

étudiants qui débutent sur le sujet ; de plus, dans les problèmes du niveau des élèves, ceux-ci peuvent souvent travailler avec d'autres outils, adaptés au contexte particulier du problème, et ce aussi bien qu'avec les outils plus "formels" qu'on veut mettre en fonctionnement.

C'est le cas avec les espaces affines de dimension 2 et 3 : en remplaçant ces espaces par R^2 ou R^3, on peut fort bien se passer de tout une partie du formalisme introduit dans le cours. De même les caractéristiques générales des isométries ne sont pas nécessaires pour résoudre de manière "ad hoc" de nombreux problèmes de transformation du plan ou de l'espace. Enfin les problèmes abordés qui relèvent de la théorie des groupes peuvent souvent être résolus dans leur cadre d'origine sans qu'il y ait besoin de tout l'arsenal théorique.

Cela donne naissance à notre avis à deux difficultés importantes pour l'apprentissage :

- le fait de forcer les étudiants à utiliser le cadre algébrique plutôt qu'un autre va souvent devoir relever du contrat,

- l'enseignant ne va pas pouvoir introduire (même partiellement) les concepts concernés en proposant aux étudiants la recherche d'un "bon problème" (suivie du cours).

Cela nous amène à intervenir sur ces questions avec les étudiants.

Nous leur exposons au fur et à mesure du développement du cours nos réflexions sur la nature des concepts visés par l'enseignement, et nous les prévenons des deux difficultés citées ci-dessus. Nous y revenons à chaque fois que cela nous semble justifié.

Il s'agit d'informations plutôt épistémologiques sur les mathématiques du programme, complétées par une réflexion plutôt pédagogique, donnée à l'avance, sur des contraintes et des règles du jeu qu'entraîne la spécificité des contenus.

Tout se passe comme si l'enseignant espérait que ces informations, bien que non évaluées, sans activités directement associées, agissent sur l'appréhension globale des étudiants de ce qui va se jouer. Elles préparent ou rappellent la place qu'ils peuvent réserver aux connaissances à acquérir, elles indiquent une "longueur d'onde" adéquate à l'apprentissage.

L'enseignant attire ainsi l'attention sur quelque chose qui est en amont des connaissances proprement dites, il prépare le terrain d'une certaine façon, il anticipe sur ce qui va être fait non en termes de contenus mais en termes de place dans la connaissance, et de contrat.

C'est comme un engrais : seul il ne sert absolument à rien, mais il peut favoriser la pousse de certaines graines s'il leur est adapté, s'il pleut assez, si le sol est bien préparé... !

Ce discours de l'enseignant, puisque dans ce cas c'est vraiment de cela qu'il s'agit, est-il entendu par les étudiants, alors même qu'il concerne des connaissances à venir ? A-t-il un effet quelconque (compte tenu du reste bien entendu) ? Est-ce le même effet sur tous les étudiants ?
Nous pensons que les reprises du discours, au cours de l'année, sont perçues de mieux en mieux, au fur et à mesure que les étudiants rencontrent des problèmes qu'elles contribuent à éclaircir, mais le premier discours est indispensable à notre avis, pour que les interventions suivantes en soient justement des reprises.
Ceci dit, nous n'avons pas les moyens d'en évaluer les impacts, d'autant plus qu'il serait difficile de séparer ce type d'intervention du reste ....
Signalons que dans d'autres scénarios la prise en compte des deux difficultés signalées ci-dessus, qui sont intimement liées à la spécificité des connaissances, donne lieu à d'autres types d'interventions qu'on a également envie de qualifier de "méta", et qui s'appuient plus sur des activités des étudiants[2].

2) Du côté de l'organisation et de la mise en fonctionnement des connaissances : "trames" et enseignement de méthodes. Evaluation des étudiants.

Au début de chaque grande partie du cours l'enseignant donne aux étudiants une trame de ce qui va être fait, en distinguant **concepts et exemples, types de problèmes, méthodes assez générales et questions** (cf. annexe).
D'autre part un enseignement de méthodes (non systématique) accompagne certains chapitres du cours (notamment *la classification des isométries planes, et les sous-groupes distingués*) (cf. annexe).
Ce sont ces éléments dont nous pensons qu'ils relèvent du méta, qu'ils constituent ou vont constituer des métaconnaissances pour les étudiants et dont l'enseignement peut à notre avis contribuer à l'acquisition des connaissances. Mais sous certaines conditions ! Comment, pourquoi ?

Dans notre idée, ces "ingrédients", trames, méthodes,..., ne suffisent pas à initialiser quelque chose (pour suffisamment d'étudiants en tout cas). Ils servent *indirectement*, ils contribuent à permettre des résolutions de problèmes intéressants, et ce sont elles qui sont constitutives des apprentissages. C'est que les problèmes trop "faciles", très découpés par exemple, pour lesquels les étudiants n'ont pas besoin de questionnement sur les méthodes (ou autre), nous semblent souvent insuffisants pour contribuer à la construction des connaissances, avec leur sens. D'où **le "détour"** : le contenu des trames, les

---

[2] J.L Dorier (1992) Eléments de réflexion sur l'enseignement des concepts unificateurs et généralisateurs en mathématiques - à paraître

méthodes doivent en fait être associés à des mises en situations où les étudiants en ont besoin pour résoudre des exercices ou des problèmes satisfaisants (pour notre projet d'enseignement).

Nous proposons ainsi régulièrement aux étudiants des recherches de problèmes où la réflexion sur les méthodes ou sur le questionnement adéquat pour aborder les résolutions est nécessaire au démarrage, pour un bon nombre d'étudiants au moins. Par exemple dans un problème sur les applications (dans notre contexte), le passage au linéaire est souvent très efficace, d'où une question presque systématique : *faut-il passer au linéaire ?*

Nous organisons souvent pour ces situations un travail en petits groupes (de trois ou quatre étudiants), pour faciliter la communication, les diversités, les échanges de points de vue et renforcer les effets escomptés.

De plus, dans les corrections, orales et écrites, nous faisons référence aux mêmes éléments, habituant les étudiants à la mise en évidence et à l'utilisation des points de repère usuels en mathématiques. Nous insistons notamment sur le repérage des cadres mis en jeu dans le problème, sur la pertinence d'envisager un changement de cadre ou de point de vue, sur le type du problème, et sur les méthodes éventuelles qui semblent a priori adaptées. En somme, nous passons en revue les catégories de la trame adaptée au cas envisagé. Même stratégie dans les cours.

Très brièvement, les questions les plus fréquemment utilisées sont dans la liste suivante : *de quel type de problème s'agit-il, qu'est-ce qu'on a à sa disposition pour ..., dans quel cadre est-on, y a-t-il lieu d'en changer, à quoi cela ressemble, qu'est-ce qui est spécifique de la notion concernée ?*

Il y a plusieurs façons de caractériser le type du problème, et il est quelquefois utile d'en regarder plusieurs, nature du problème (dont théorème d'existence), type de raisonnement à mettre en oeuvre (égalité d'applications ou d'ensemble), etc.

C'est dans ces différentes situations, que, petit à petit, les étudiants apprennent à utiliser et utilisent ces divers éléments, trames, méthodes ..., et par là même résolvent des problèmes pas trop faciles. On voit bien que l'ensemble du scénario est en cause, même si dans le titre nous en avons privilégié une partie, celle où nous pensons trouver des ingrédients de niveau méta.

Enfin, et cela nous semble constitutif du scénario, nous faisons intervenir dans les évaluations des étudiants (devoirs, partiels) des questions nécessitant un certain questionnement comme ceux pratiqués dans l'année, voire des questions (faciles) portant sur des méthodes précises *(qu'est-ce que vous avez à votre disposition pour démontrer qu'une application affine est une projection ? Distinguer selon la manière dont est donnée l'application).*

Les révisions sont aussi organisées autour des trames, qui s'avèrent très appréciées des étudiants à ce moment-là. On perçoit bien à cette occasion le rôle du temps dans ce type de scénario.
Nous avons même proposé des évaluations en temps non limité, pour faire mettre en fonctionnement des réflexions permises par le temps long.

3) Bilan et évaluation de la recherche

Il est encore difficile à ce point de notre description de définir plus précisément ce que nous avons mis sous le terme de métaconnaissances. Y participent cependant certaines classifications des connaissances, ou plutôt une certaine présentation classée des connaissances et de leurs mises en fonctionnement potentielles, avec plusieurs entrées d'ailleurs, et en particulier avec l'explicitation des catégories utilisées. Y est liée de façon essentielle la possibilité de mise en fonctionnement par les étudiants de ces classifications, la possibilité d'une certaine opérationnalisation donc de ce qu'on a mis sous le terme.
Car nous pensons que ce n'est pas la simple "fréquentation" de ce type de métaconnaissances qui modifiera les apprentissages : il s'agit de les intégrer véritablement à des activités de résolution de problèmes.

Une séquence de nos scénarios peut être une modification, un enrichissement des conceptions des étudiants sur l'activité mathématique. Ce sont ces conceptions, sur les mathématiques, la manière de les apprendre, de les enseigner, que nous avons appelées ailleurs les représentations métacognitives.
Dans notre démarche, la modification des représentations est sans doute bienvenue, mais nous la considérons comme seconde, comme une conséquence du reste, qui va sans doute ensuite agir positivement .

Il y a d'autres occurrences où nous nous demandons s'il y a lieu d'utiliser la notion de métaconnaissances.
D'abord en ce qui concerne les explicitations que nous sommes amenées à donner sur les règles du jeu mathématique général et particulier à notre enseignement, puis en ce qui concerne les remarques qualitatives que nous pouvons faire, et enfin en ce qui concerne les structurations que nous sommes amenées à montrer dans nos discours.
Dans tous les cas, il s'agit d'éléments déclaratifs, même s'ils peuvent avoir des conséquences indirectes en termes d'activités pour les étudiants.
Nous signalons par exemple telle difficulté, dont nous soulignons qu'elle est résistante, voulant insister sur le caractère "normal" de la longueur de l'apprentissage.
Nous nous livrons à des analyses d'erreur, que nous essayons d'accepter comme témoins d'un apprentissage, et non comme mise en cause de nos étudiants et de nous-mêmes.

Nous explicitons au maximum ce que nous attendons des étudiants, ce que nous valorisons.
Signalons à ce propos que les étudiants entendent parfaitement bien ce type de message, comme l'a montré dans son DEA[3] A.Benezra .
Reste tout ce qui accompagne un cours, ce qui permet de structurer le cours, tous les commentaires sur les gains, sur ce qui manque, sur les comparaisons, les retours en arrière, les généralisations, les synthèses, toutes les images ou les métaphores, les traductions qualitatives, même les mises en garde.
Ces informations, qualitatives pourrait-on dire, sont-elles des métaconnaissances ? Font-elles partie d'un discours métamathématique ? participent-elles de la métacognition ?...
Autant de questions encore ouvertes.

Quant à l'évaluation de ce type d'enseignement, voire de la recherche sous-jacente, elle n'est encore que très partielle et largement insuffisante. Dans son DEA[3], A. Benezra travaille sur un exercice proposé au second partiel aux étudiants qui suivent cet enseignement.
La seule chose sûre me semble être que certains éléments de niveau "méta" ont été entendus par beaucoup d'étudiants, et ont même peut être aidé un certain nombre d'entre eux à produire une démonstration un peu longue (notamment exhiber toutes les isométries conservant un rectangle).
Tout le travail, y compris méthodologique, reste à faire.

[3] A. Benezra (1992) DEA Université Paris 7, Comparaison des apprentissages réalisés par les étudiants ayant suivi le même enseignement à distance ou non.

Exercice 4. Après le cours sur les isométries affines de $\mathbb{R}^3$

Lorsqu'on a une isométrie affine f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

on étudie l'application linéaire associée $\vec{f}$: directe ou indirecte.

Si $\vec{f}$ est directe, c'est soit une rotation, soit l'identité.
soit l'identité si elle a au moins un point fixe.

Si $\vec{f}$ est une rotation, f est aussi une rotation, reste à en déterminer le centre (point fixe).

Si $\vec{f}$ est l'identité, f est
soit une translation (si elle n'a pas de points fixes).
soit l'identité si elle a au moins un point fixe.

Si $\vec{f}$ est indirecte, c'est une symétrie (axiale).
f est
soit une symétrie (par rapport à une droite) si elle a au moins un point fixe.
soit une symétrie glissée si elle n'a pas de point fixe (les milieux des segments [M, f(M)] déterminent l'axe, le vecteur de la translation est de direction celle de cet axe,

$u = \overrightarrow{Mf(M)}$ si M appartient à l'axe, ou bien $f^2 = t_{2u}$).

1) Montrer que si u est un vecteur et Δ une droite telle que

$u \in \vec{\Delta}$

$t_u \circ s_\Delta$ est une symétrie.

Est-ce que $t_u \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_u$?

2°) Identifier $s_{\Delta 1} \circ s_{\Delta 2}$ lorsque $\Delta 1$ et $\Delta 2$ sont parallèles (cf F6) puis concourantes.
Pouvez-vous énoncer une réciproque ?
3) Etudier la composée de trois symétries d'axes concourants puis parallèles.
Réciproque ?.

TRAME SUR ESPACES AFFINES

CONCEPTS	TYPES DE PROBLEMES	METHODES (ET ... QUESTIONS)
Espaces affines, sous espaces affines .. Applications affines (et linéaires associées) - compositions Applications affines particulières (translations, homothéties, symétries projections, affinités) Espaces affines euclidiens Matrices orthogonales Isométries - points fixes, décomposition canonique, composition Classification explicite pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ Sous groupes d'isométries conservant certaines configurations planes ou de l'espace Herbier des applications	Etude d'une transformation (affine ou aff. euclidienne) données de différentes manières - Identification - Effets sur une configuration, une mesure ... - Décomposition en produit de transformations - composition - caractérisation de divers types Etude d'une configuration à l'aide de transformations (affines euclidiennes) Etude de sous ensembles d'applications ou d'isométries - Conservant une configuration ou une classe de configuration, ou une mesure, ... - Transformant une config. $\mathcal{C}$ en une autre etc ... (Etude et utilisation de sous-groupes d'isométries.)	Passage de l'affine au linéaire (et retour) Passage aux matrices et/ ou aux coordonnées (dans différentes bases - à choisir) Utilisation des diverses classifications de transformations et des transformations connues usuelles. Recherche des points fixes (points fixes successifs s'il y a décomposition) Utilisation des compositions et décompositions "canoniques". Utilisations des déterminations "minimales" des diverses applications en cause. Utilisation des sg connus. Repérer ce qui relève de l'affine / de l'affine euclidien / du vectoriel

TRAME INCOMPLETE (ce sera à charge des étudiants de la remplir)

CONCEPTS	TYPES DE PROBLEMES	METHODES, QUESTIONS
Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes Ordre d'un élément d'un groupe Groupes cycliques Sous-groupes distingués Groupe quotient Groupe opérant sur un ensemble, orbite Quelques dénombrements "Herbier" sg d'isométries $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ S_4, S_n, $\mathfrak{A}_n$	Etudes de sg particuliers Actions de groupes sur des ensembles	Reconnaissance de groupes connus Stabilité par composition Utilisation de décompositions Introduction de groupes opérant sur un ensemble Dans quel ensemble se placer ? Quel groupe faire agir ?

CONNAISSANCES ET METACONNAISSANCES - UNE PERSPECTIVE DIDACTIQUE

Michèle Artigue
IUFM de Reims & Equipe DIDIREM, Université Paris 7

Ce texte fait suite à une présentation au séminaire "Math et Méta". Il a pour objectif, d'une part de contribuer à préciser certaines distinctions entre connaissance et métaconnaissance que peut être amené à faire le didacticien dans son travail d'analyse a priori de situations didactiques ou son travail d'analyse de comportements observés, d'autre part, d'aider à situer ces notions par rapport aux notions de connaissance et métaconnaissance utilisées en intelligence artificielle.

Je partirai d'un exemple assez élémentaire concernant les nombres complexes. C'est en effet un domaine sur lequel j'ai eu l'occasion, dans le cadre de l'unité de valeur :"Approche historique et didactique des mathématiques" de maîtrise de l'université Paris 7, d'observer, plusieurs années successives, le fonctionnement d'étudiants sur des problèmes proposés sans indications. Et ce fonctionnement m'a semblé suffisamment riche et diversifié pour servir efficacement de base au propos didactique que je souhaitais développer ici.

I - CONNAISSANCES ENGAGEES DANS LA RESOLUTION D'UN PROBLEME : UN EXEMPLE

Il s'agit du problème suivant :
Identifier géométriquement la transformation Φ du plan complexe définie par :

$\omega.\bar{z} + \bar{\omega}.\Phi(z) = k$ (1), ω étant un nombre complexe non nul et k un nombre réel.

Ce problème ne nécessite pour prendre sens que des connaissances élémentaires sur les nombres complexes et leur représentation géométrique : calcul algébrique élémentaire, notion de complexe conjugué, association nombre complexe/point du plan étendue à l'association entre fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et transformation du plan.
L'énoncé sous-entend d'autre part que la transformation donnée, soit correspond à une transformation géométrique classique, soit peut s'exprimer simplement à partir de telles transformations.

Les étudiants confrontés à ce problème commencent presque toujours par mettre Φ sous forme explicite et arrivent alors à l'expression :

$$\Phi(z) = \frac{\omega}{\bar{\omega}}\bar{z} + \frac{k}{\bar{\omega}} \qquad (2)$$

On peut penser que, pour des étudiants de ce niveau, cette transformation opérée sur les écritures est intentionnelle et ne constitue pas une manipulation algébrique choisie un peu au hasard parmi un ensemble de transformations possibles. C'est en ce sens que nous associons à la décision prise la connaissance suivante que nous qualifierons de **connaissance stratégique**[1], qui fonctionne ici de façon le plus souvent implicite :

> *"Pour identifier ou travailler avec un objet mathématique donné sous forme implicite, il peut être intéressant , si ce n'est pas trop coûteux, d'en obtenir une forme explicite."*

Notons que cette connaissance prend ici la priorité sur une autre connaissance stratégique applicable à la situation et qui pourrait s'exprimer ainsi :

> *"Quand un problème présente une certaine symétrie[2], il est souvent intéressant d'essayer de conserver cette symétrie le plus longtemps possible dans la résolution."*

On peut d'ailleurs penser que si la première connaissance fonctionne chez ces étudiants de façon implicite et quasi-automatisée, ce n'est sans doute pas le cas pour la seconde qui nécessite en général une réflexion consciente sur les stratégies de résolution possibles et un choix explicite[3].

---

[1] Nous qualifions ici une connaissance de stratégique quand elle apparaît étroitement liée dans son fonctionnement en situation et sa formulation à une prise de décision organisée, sans toutefois que l'issue de la décision prise soit connue avec une complète certitude. C'est pourquoi une connaissance stratégique s'exprimera le plus souvent comme ici par un énoncé qui indique l'intérêt de faire tel choix ou de faire tel choix plutôt que tel autre, sans garantir pour autant que les choix privilégiés permettront nécessairement d'aboutir.

[2] Cette connaissance stratégique fait appel à une notion de symétrie tout à fait générale. Dans le cas présent, l'expression donnée $\omega.\bar{z} + \bar{\omega}.\Phi(z)$ est une somme de deux termes faisant intervenir de façon "symétrique" ω, z et la relation de conjugaison.

[3] Nous avons eu l'occasion d'observer ce phénomène dans ce même champ des complexes à propos de la résolution de l'exercice suivant : on considère un quadrilatère convexe ABCD et on construit à l'extérieur du quadrilatère quatre triangles rectangles isocèles ABA', BCB', CDC' et DAD'. Que pouvez-vous dire du quadrilatère A'B'C'D' ? Peut-il être un carré ? Les étudiants, le plus souvent, après avoir échoué dans la recherche d'une solution géométrique, vu leur manque de familiarité avec ce domaine, essayaient une résolution complexe. Le choix de préserver la symétrie par rapport à celui consistant à simplifier les affixes de deux des sommets du quadrilatère initial a toujours résulté dans les groupes de décisions explicitées et débattues.

I.1 - L'identification "immédiate"

Une fois l'expression (2) obtenue, pour certains étudiants, le problème est résolu, le mot "résolu" étant pris ici au sens suivant : la transformation est identifiée comme une similitude indirecte car de la forme : $z \rightarrow a.\bar{z}+b$ avec a non nul et l'étudiant sait comment trouver les caractéristiques de cette similitude.

En effet, le rapport de la similitude est donné par le module de a. Si le module de a est différent de 1, la transformation admet un point fixe M_0 d'affixe $z_0 = \dfrac{a.\bar{b}+b}{1-a.\bar{a}}$. En posant $Z = z-z_0$, elle s'exprime sous la forme: $Z \rightarrow a\,\bar{Z}$; c'est donc la composée d'une symétrie axiale autour de l'horizontale passant par le point M_0 et d'une similitude directe de centre M_0, de rapport $|a|$ et d'angle θ de mesure arg(a). Si le module de a est égal à 1, c'est une isométrie indirecte. C'est donc soit une symétrie axiale autour de la droite des points fixes si $a.\bar{b}+b = 0$ (ce qui est le cas ici), soit une symétrie glissée dont la décomposition canonique en symétrie axiale et translation peut-être déterminée de la façon suivante: l'axe de symétrie est le lieu des milieux des segments formés de points homologues et le vecteur translation, colinéaire à l'axe, est obtenu en décomposant le vecteur associé à $\Phi(z)-z$ en somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à l'axe et l'autre colinéaire à l'axe.

Mais, en général, l'étudiant qui déclare le problème résolu, ne fonctionne pas directement sur la base de l'ensemble des connaissances déclaratives que nous venons de citer. Il fonctionne plutôt comme s'il se savait capable d'actionner par rapport au problème posé un **plan de résolution** qui le mènera de façon sûre à la solution cherchée, un plan qui peut être par exemple basé sur les connaissances suivantes, si l'on cherche à se rapprocher au maximum des faits énoncés ci-dessus:

"- Pour identifier une similitude donnée par son expression complexe: $z \rightarrow a.\bar{z}+b$, il faut regarder d'abord le module de a.

- Si ce module est égal à 1, c'est une isométrie indirecte.

- Si ce module est différent de 1, il y a un point fixe et on ramène l'origine à ce point fixe."

Un tel plan n'est pas complet et n'a pas intérêt à l'être. Il suffit qu'il donne le moyen de brancher sur du connu. En particulier, il n'inclut pas les valeurs discriminantes en dehors de celle du module de a. Mais il peut inclure des sortes d'annexes, comme le moyen de retrouver aisément les points fixes:

"Pour trouver les points fixes, conjuguer la relation donnée".

Cette annexe fonctionne alors comme une compilation du calcul suivant:

$$z = a.\bar{z}+b$$
$$\bar{z} = \bar{a}.z+\bar{b}$$
$$z = a(\bar{a}.z+\bar{b})+b$$

$$z = |a|^2 z + (a\bar{b}+b)$$

$$z = \frac{a.\bar{b}+b}{1-|a|^2}$$

Ce plan fonctionne comme une mémorisation, dans ses grandes lignes, du début d'un parcours que l'on n'a pas besoin d'anticiper plus avant puisque l'on sait que lorsqu'on aura réalisé cette partie, on se trouvera de toutes façons en un point où l'on saura quel nouveau plan développer.

Chaque année, il y a eu chez les étudiants observés quelques fonctionnements de ce type. Pour la majorité cependant, les classifications des similitudes planes et des isométries, les relations entre transformations géométriques et nombres complexes ne sont plus que des souvenirs très lointains. On peut voir alors se développer cinq types de démarches:

1 - Expliciter davantage la transformation en sortant du registre intrinsèque[1] d'expression initial,

2 - Essayer des valeurs particulières de ω et de k,

3 - Explorer la transformation en cherchant l'image de points particuliers,

4 - Chercher les points fixes,

5 - Décomposer la transformation en transformations plus simples.

On peut là encore relier ces différentes démarches à des connaissances stratégiques implicitement ou explicitement mises en oeuvre. Les étudiants qui choisissent la première démarche utilisent systématiquement la représentation cartésienne des nombres complexes. On pourrait voir là le choix d'un registre adapté aux opérations algébriques en jeu dans l'expression (présence simultanée de produits et d'additions tendant à disqualifier les registres exponentiel et trigonométrique) donc l'effet encore une fois d'une connaissance. Mais ceci est une interprétation peu probable: dans toutes les activités proposées, les étudiants en effet font preuve spontanément d'une adhérence forte au registre cartésien : ce registre n'est pas vraiment choisi, il est le seul envisagé !
Il semble plus raisonnable de lier cette démarche au choix de se raccrocher à la géométrie analytique, que nous relierons à la connaissance stratégique suivante, fonctionnant de façon implicite:

> *"On arrive souvent à résoudre par l'analytique des problèmes géométriques que l'on ne sait pas résoudre de façon intrinsèque. C'est souvent laborieux mais en général efficace."*

---

[1]Les nombres complexes fonctionnent ici dans deux cadres : le cadre algébrique et le cadre géométrique. Dans ces cadres, on les manipule via des représentations symboliques qui appartiennent à divers registres. Dans le cadre algébrique, nous distinguons ainsi les registres cartésien, trigonométrique et exponentiel, ainsi que le registre que nous qualifions d'intrinsèque où le nombre complexe est représenté via des expressions de la forme z, $\bar{z}$....

Et, pour les démarches suivantes :

"Lorsqu'un problème dépend de paramètres, il peut y avoir intérêt pour se faire une idée des solutions, à choisir des valeurs particulières des paramètres."

"Pour identifier un objet fonctionnel, il peut y avoir intérêt à chercher les images de valeurs particulières."

"Pour identifier une transformation, il est intéressant de déterminer ses points fixes ; ceci peut suggérer un changement de repère intéressant ou permettre des conjectures sur la nature de la transformation."

"Pour identifier une transformation, il peut être intéressant de la mettre sous forme de composée de transformations plus simples."

Pratiquement, les étudiants qui choisissent le passage à l'analytique, ne pensent pas à réinvestir leurs connaissances d'algèbre linéaire et ne savent pas plus interpréter les expressions trouvées que les expressions initiales.

Ceux qui choisissent des valeurs particulières de ω et k commencent souvent par $\omega = 1$ ou -1 et $k = 0$. Mais ils estiment en général que le choix pour ω d'une valeur réelle et pour k de la valeur 0 sont trop particuliers pour autoriser des conjectures fondées dans le cas général. Ils choisissent alors un ω complexe, un k non nul et n'y voient plus rien.

L'exploration portant sur des points particuliers pour un ω quelconque est en général très vite abandonnée car trop coûteuse par rapport aux informations fournies.

Finalement seules résistent la recherche des points fixes et la décomposition en transformations élémentaires qui sont en fait les connaissances stratégiques les plus liées au champ considéré.

I.2 - La recherche des points fixes

La recherche des points fixes est généralement effectuée en passant au registre cartésien: on obtient alors l'équation d'une droite. Soulignons qu'il est économique ici de rester en expression intrinsèque et de conserver la symétrie de la formule. En effet :

$$\omega.\bar{z} + \bar{\omega}.z = k \leftrightarrow k = 2\mathrm{Re}(\omega.\bar{z}) = k \leftrightarrow \mathrm{Re}(\omega.\bar{z}) = \frac{k}{2}$$

Et $\mathrm{Re}(\omega.\bar{z})$ n'est autre que le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OW}$, M étant le point d'affixe z et W le point d'affixe ω. La droite des points fixes est donc l'ensemble des points M du plan tels que:

$$\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OW} = k$$

Bien sûr, cette utilisation du registre intrinsèque n'est efficace et économique que si l'on est capable d'associer "partie réelle d'un produit" et "produit scalaire de deux vecteurs", donc si l'on dispose de connaissances sur les systèmes de traduction entre cadre algébrique complexe et cadre géométrique relativement élaborées et si, de plus, on sait interpréter la relation vectorielle obtenue. Ce n'est pas le cas généralement pour les étudiants concernés ici.

Quelle que soit la méthode utilisée pour déterminer les points fixes de la transformation, lorsque les étudiants ont trouvé une droite de points fixes, ils n'hésitent pas : la transformation doit être une symétrie axiale par rapport à cette droite. On peut voir dans cette quasi-certitude la manifestation,
- soit d'une connaissance erronée :

"Si une transformation a une droite de points fixes, c'est une symétrie orthogonale",

- soit d'une connaissance que je qualifierai de **didactique**, car elle met en jeu les connaissances de l'étudiant sur l'institution didactique elle-même:

"Puisque l'on m'a posé cette question, c'est qu'il s'agit d'une transformation connue donc sûrement une symétrie orthogonale, puisque ça n'a pas l'air d'une projection."

Quelques-uns cependant cherchent à renforcer cette conjecture avant de se lancer dans une vérification analytique qui leur semble à priori laborieuse, la droite des points fixes n'ayant aucune position particulière. On peut voir là encore une fois la manifestation d'une connaissance stratégique très générale:

"Avant de se lancer dans des calculs relativement compliqués, si l'on peut le faire économiquement, il est intéressant d'essayer de s'assurer que l'on aura vraiment à les effectuer."

Les renforcements peuvent ici prendre des formes variées:
1 - L'étudiant cherche a posteriori dans l'expression donnée de Φ, une raison confirmant l'hypothèse faite. En général, il s'agit ici de la raison suivante:

"Φ est définie à partir du conjugué de z, or la conjugaison correspond géométriquement à une symétrie par rapport à l'axe réel."

2 - L'étudiant cherche à tester économiquement la conjecture. Il peut le faire en cherchant l'image de quelques points ou en mettant en jeu des connaissances plus élaborées sur la symétrie orthogonale, par exemple:

"Si la transformation est une symétrie orthogonale, c'est une involution."

"Si la transformation est une symétrie orthogonale, le milieu de deux points homologues est un point fixe."

Soulignons que ces deux derniers tests (qui ne permettent pas d'écarter une symétrie oblique) sont particulièrement économiques dans le registre intrinsèque. Ce n'est pas nécessairement celui qu'utilisent les étudiants, vu leur difficulté à se détacher du registre cartésien. La connaissance stratégique:

"Si l'on doit effectuer des calculs avec des complexes, on a souvent intérêt à conserver le plus longtemps possible une forme intrinsèque",

ne fait pas en général partie des ressources disponibles.

La conjecture, renforcée ou non par les tests, doit ensuite être prouvée. En général, pour les étudiants, cette preuve passe par un retour à la définition de la symétrie orthogonale et il s'agit alors de prouver que, pour tout point M, la droite des points fixes est perpendiculaire au segment [M Φ(M)] en son milieu. Là encore, suivant les systèmes de traduction disponibles entre cadre algébrique complexe et cadre géométrique, les calculs pourront être plus ou moins lourds.
Soulignons que l'on peut, à ce niveau, fonctionner plus économiquement en utilisant la caractérisation des isométries du plan suivant leurs points fixes:

"Une isométrie qui a une droite de points fixes est, soit l'identité, soit la symétrie orthogonale par rapport à cette droite."

Il s'ensuit qu'il suffit de vérifier que la transformation est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les distances, ce qui est immédiat en registre intrinsèque puisque:

$$\bar{\omega}.[(\Phi(z) - \Phi(z')] = [\bar{z} - \bar{z}'] \ ,$$

à condition bien sûr de savoir que:

"La distance de deux points M et M' d'affixes z et z' s'exprime dans le registre intrinsèque par $|z-z'|$."

I.3 - La décomposition en transformations élémentaires

Cette démarche consiste à décomposer la transformation donnée de la façon suivante:

$$\boxed{z \rightarrow z_1 = \bar{z} \qquad z_1 \rightarrow z_2 = -\frac{\omega}{\bar{\omega}} z_1 \qquad z_2 \rightarrow \Phi(z) = z_2 + \frac{k}{\bar{\omega}}}$$

En général, les étudiants qui se lancent dans cette décomposition arrivent à identifier les trois transformations introduites. L'identification est immédiate pour la symétrie et la translation et souvent plus laborieuse pour la rotation intermédiaire. En revanche, une fois les trois transformations identifiées, ils estiment en général que la tâche n'est pas terminée et qu'il leur faut ramener cette décomposition à une seule transformation géométrique. Peu sont capables de raisonner directement en termes d'isométrie, en faisant intervenir des connaissances comme:

"Translation, symétrie orthogonale et rotation sont des isométries."
"La composée d'isométries est une isométrie."
"Translation et rotation sont des isométries directes, la symétrie orthogonale est une isométrie indirecte."
"La composée d'isométries directes et d'un nombre impair d'isométries indirectes est une isométrie indirecte."
"Une isométrie indirecte est, soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie/translation."

ou, plus directement :

"La composée d'une rotation et d'une symétrie orthogonale est une symétrie orthogonale par rapport à un axe passant par le centre de la rotation."
"La composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation est une symétrie orthogonale si l'axe de la symétrie est orthogonal au vecteur translation, une symétrie/translation sinon."

En effet, ceux qui le sont, ont traité le problème par identification immédiate.
Les étudiants reviennent donc à des stratégies plus globales, en particulier la recherche des points fixes.

II - COMMENTAIRES DIDACTIQUES

Dans l'analyse qui précède, je n'ai pas introduit le terme de "métaconnaissance". Je me suis bornée à faire des hypothèses sur certaines des connaissances en jeu implicitement ou explicitement dans le fonctionnement des étudiants, ou à interpréter ce même fonctionnement comme témoignant de la non-activation de connaissances a priori pertinentes pour la résolution.
Ces connaissances ont été exprimées le plus souvent sous forme déclarative, mais pour un certain nombre d'entre elles, j'aurais pu proposer des versions procédurales, a priori tout aussi adaptées à la modélisation du fonctionnement des étudiants.

Ces connaissances apparaissent cependant diverses. Elles sont diverses bien évidemment de par leur contenu mathématique car divers domaines sont concernés : les nombres complexes dans leurs aspects algébriques et géométriques, les isométries et similitudes du plan, la géométrie analytique, les connaissances pouvant se situer à l'intérieur de l'un de ces domaines, mais mettant en jeu aussi très souvent des correspondances entre domaines ou des correspondances entre cadres et registres d'expression pour un même domaine.

Mais ce qui nous intéresse ici davantage, c'est la diversité de leur statut et de leur fonction. Certaines connaissances se présentent comme des faits mathématiques, faits certains ou seulement fortement probables, d'autres se présentent sous forme de conseils ou de règles: dans telle circonstance, il faut faire ceci ou on a intérêt à faire ceci ou cela, ces conseils ou règles pouvant être plus ou moins généraux. Certaines connaissances servent à exécuter des calculs, d'autres à interpréter des résultats obtenus, d'autres encore à prendre des décisions en situation de choix.

Considérons par exemple les énoncés suivants :

E1 : "Un nombre complexe peut s'exprimer algébriquement dans plusieurs registres: le registre cartésien qui met en évidence la décomposition en partie réelle et imaginaire: $z=a+ib$, les registres trigonométrique et exponentiel qui mettent tous deux en évidence le module et l'argument mais avec des caractéristiques sémiotiques différentes :
$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $\rho e^{i\alpha}$".

E2 : "Si $z = \rho e^{i\alpha}$, la partie réelle de z est $\rho\cos\alpha$ et sa partie imaginaire est $\rho\sin\alpha$; si $z = a+ib$, son module ρ est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$ et son argument est donné par les relations $\cos\alpha = \frac{a}{\rho}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\rho}$ "

E3: "Le registre cartésien est bien adapté au calcul de sommes, les registres trigonométrique et exponentiel sont bien adaptés au calcul de produits, quotients, puissances, racines."

E4: "Si le problème à résoudre est un problème de calcul de puissance nième d'un nombre complexe ou de recherche de ses racines nièmes, mettre le nombre complexe sous forme exponentielle."

E5: "Quand on résout un problème portant sur des complexes, on a intérêt à se poser la question du choix d'un registre adapté au traitement et à changer éventuellement de registre en fonction de l'avancée du traitement."

Ces cinq énoncés concernent le même contenu mathématique: la représentation algébrique des nombres complexes. Le premier exprime une connaissance mathématique de base. Le second fournit les systèmes de traduction d'un registre à l'autre. Le troisième énonce des propriétés des registres d'expression sous forme déclarative, le quatrième fournit une règle procédurale d'action issue de E3. Quant à E5, elle exploite E3 sous forme de conseil stratégique général."

Il s'agit dans tous les cas de connaissances mais le didacticien, bien qu'il ne soit pas comme le chercheur en IA confronté aux problèmes conceptuels et techniques liés à l'implémentation d'une modélisation sur machine, a tout intérêt, me semble-t-il, à les distinguer.

Ainsi il me semble important de distinguer entre des connaissances qui correspondent directement à la définition de notions et à leurs propriétés mathématiques comme El et E2 et des connaissances qui expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion dans un contexte donné, sur les moyens de gérer cette notion comme E3, E4 et E5, voire les difficultés que l'on risque de rencontrer dans la manipulation de cette notion, les erreurs habituellement commises et donc les moments où il faut faire preuve d'une vigilance particulière. Je nommerai de telles connaissances des métaconnaissances.

En fait, **cette distinction est un moyen de marquer explicitement dans l'analyse didactique une séparation entre des connaissances servant à la prise de décision et au contrôle et des connaissances sur lesquelles s'appuient à la fois cette activité réflexive et l'exécution proprement dite.**
Les activités proposées aux étudiants considérés sur les nombres complexes mettent bien en évidence le fait que E1 et E2 sont des connaissances partagées par tous les étudiants, ce qui est normal vu le niveau considéré. Elles montrent aussi qu'ils sont capables, questionnés, de formuler une connaissance de type E3, mais que pratiquement aucun ne met en jeu dans son fonctionnement les métaconnaissances E4 et E5 qui s'en déduisent comme si, dans leur travail mathématique antérieur, ils n'avaient jamais été réellement confrontés à la gestion autonome des choix de registres.

Il me semble de plus important de distinguer des connaissances et métaconnaissances ancrées dans un domaine précis de métaconnaissances plus générales concernant la résolution de problèmes mathématiques. comme peuvent l'être les métaconnaissances heuristiques explicitées dans les travaux de G.Polya comme:

> *"On a souvent intérêt à décomposer le problème posé en sous-problèmes élémentaires, à chercher des analogies avec des situations déjà rencontrées, à explorer la situation en essayant des valeurs particulières par exemple, à supprimer certaines contraintes de l'énoncé ..."*

également identifiables dans les conduites des étudiants.

La distinction entre connaissances et métaconnaissances ne va pas forcément de soi ni dans l'absolu ni a fortiori lorsqu'il s'agit d'interpréter en ces termes tel ou tel comportement ou production d'élève. Il faut souligner que nous n'avons directement accès que très partiellement aux unes et aux autres et fonctionnons souvent sur la base d'inférences. Connaissances et métaconnaissances sont de plus hiérarchisées: si l'on revient aux cinq énoncés cités, par exemple, E3 est une métaconnaissance qui ne prend

son sens qu'à travers les connaissances E1, E2 et E5 elle-même ne prend son sens qu'à travers E3.
Jusqu'où faut-il pousser la précision dans les distinctions et le raffinement hiérarchique ? Il ne me semble pas raisonnable de chercher à donner à cette question une réponse a priori: les distinctions ne sont pertinentes qu'en tant qu'elles servent le travail didactique visé et suivant le contexte et les objectifs de ce travail, ce critère de pertinence doit pouvoir amener à des choix substantiellement différents.

Dans les activités sur les nombres complexes, en fonction de l'analyse du domaine et des observations effectuées, il m'a semblé par exemple intéressant de distinguer:
- au niveau connaissances:

  * *les connaissances portant sur un domaine précis, dans un cadre donné.*
  * *les connaissances mettant en jeu des relations entre domaines, cadres et registres.*

- au niveau métaconnaissances:

  * *les connaissances ancrées dans un domaine mathématique précis,*
  * *les connaissances heuristiques générales.*

Je voudrais apporter maintenant à l'appui des affirmations qui précèdent un certain nombre de raisons qui dépassent le cadre strict du contexte utilisé jusqu'ici.
1 - Si l'on cherche à analyser le fonctionnement des étudiants et à comprendre ce qui sous-tend, dans une situation donnée, la réussite ou l'échec, introduire de telles distinctions est nécessaire. En effet, souvent, ce n'est pas au niveau des connaissances de base élémentaires comme celles citées ici en E1 et E2 que les étudiants vont se différencier, mais au niveau des connaissances sur ces connaissances que sont les métaconnaissances qui expriment les possibilités d'utiliser ces connaissances.

Soulignons que l'analyse faite ici confirme tout à fait les résultats obtenus par différents chercheurs, notamment (A.Schoenfeld, 1985), (A.Robert & I.Tenaud, 1988), concernant le fait que des métaconnaissances générales pour être efficaces, doivent pouvoir s'appuyer sur des métaconnaissances plus locales portant sur les domaines mathématiques concernés, lesquelles à leur tour doivent pouvoir s'appuyer sur des connaissances mathématiques dans ces domaines. La partie géométrique de la recherche en est ici un exemple flagrant. Ainsi, il ne sert à rien de disposer d'une métaconnaissance heuristique générale affirmant l'intérêt de l'exploration si l'on n'a pas les moyens de guider dans le contexte précis concerné une exploration efficace, de savoir qu'il est intéressant de rechercher les points fixes d'une transformation géométrique pour l'identifier si l'on n'est pas capable d'exploiter les informations recueillies ou a fortiori de mener à bien les calculs permettant de localiser ces points fixes. Il en est de même pour le passage à l'analytique et la décomposition en transformations élémentaires.

Dans d'autres activités, nous avons observé des étudiants, bloqués dans la résolution d'un exercice de géométrie, essayer de changer de cadre et décider de faire intervenir les nombres complexes pour se retrouver à nouveau bloqués, faute d'arriver à exprimer simplement dans le cadre algébrique complexe le fait qu'un triangle est rectangle isocèle ou que deux diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires et de même longueur.

2 - Si la distinction apportée est, pour le didacticien, un outil d'analyse efficace du fonctionnement de l'étudiant ou de l'élève, c'est aussi parce que **connaissances et métaconnaissances ne sont pas des connaissances traitées de la même manière par l'enseignement.** Ainsi, les connaissances El et E2 citées ci-dessus sont directement raccrochables à des savoirs officiellement enseignés. On les trouvera dans les manuels, dans les cahiers d'élèves. Des connaissances comme E3, E4. E5, même si elles vivent dans une classe donnée, y seront moins visibles. En effet, au niveau secondaire, l'examen des énoncés proposés aux élèves de terminale montre qu'en général, ce n'est pas eux qui ont en charge le choix du registre d'expression et les changements éventuels de registres mais l'enseignant. Et au niveau du supérieur, même si l'autonomie des étudiants est plus grande, la question du choix n'est pas réellement posée, travaillée: les étudiants qui réussissent sont ceux qui font des choix efficaces, le corrigé fourni par l'enseignant en propose un généralement efficace et économique à la fois, mais la question du choix n'entre que rarement en débat.

De telles considérations pourraient nous conduire à introduire une distinction didactique et non plus cognitive entre connaissance et métaconnaissance: ces dernières seraient des connaissances en fonctionnement dans les situations didactiques, qu'elles soient gérées par l'élève ou par l'enseignant, mais hors du savoir officiel pour reprendre la terminologie introduite par Y.Chevallard (Chevallard, 1992). Encore faudrait-il bien sûr définir ce que l'on entend ici précisément par savoir officiel. En effet, les considérations de méthodes, sous formes de conseils méthodologiques, de boites à méthodes, prennent une place grandissante dans les manuels actuels du secondaire. Certaines métaconnaissances semblent donc repérables comme des éléments du savoir officiel et la tendance est à l'accroissement de leur visibilité. Mais, bien sûr, ceci n'implique pas pour autant qu'elles fonctionnent identiquement, à la fois au niveau du discours de l'enseignant mais aussi plus globalement au niveau du contrat didactique, c'est à dire des règles explicites mais plus souvent implicites qui gèrent les responsabilités et attentes respectives de l'élève et de l'enseignant par rapport au savoir (Brousseau, 1986). Les travaux en cours sur le métadiscours de l'enseignant comme ceux de C.Chiocca, E.Josse et A Robert cités en référence, devraient nous permettre d'avancer sur ce plan.

3 - Si l'on excepte le paragraphe précédent, l'analyse développée ici a été une analyse avant tout cognitive. Or qu'il s'agisse de modéliser le fonctionnement de l'élève ou d'analyser l'enseignement, on sait bien qu'une telle analyse est tout à fait insuffisante. Les connaissances mises en jeu dans une situation d'enseignement par l'élève ne sont pas uniquement des connaissances mathématiques, ce sont aussi ses connaissances sur le fonctionnement de l'institution scolaire dans laquelle cette situation prend place. En référence à la théorie des situations didactiques (G. Brousseau, 1986), nous désignerons par **a-didactiques** les connaissances et métaconnaissances que l'élève met en jeu dans un rapport direct avec le problème posé. comme s'il oubliait que ce problème lui a été posé par un enseignant avec un ou des objectifs de nature didactique (apprentissage, évaluation ....) et par **didactiques** les connaissances et métaconnaissances mettant en jeu l'institution scolaire et ses caractéristiques.
Ces deux types de connaissance et métaconnaissances interfèrent en permanence dans l'enseignement et les mécanismes sous-jacents à l'apprentissage: l'élève s'adapte aux situations mathématiques scolaires donc apprend des mathématiques à l'école via son adaptation à l'institution scolaire et non indépendamment d'elle, une ambition fondamentale de la didactique étant justement de fournir les moyens théoriques et méthodologiques d'analyser, contrôler et gérer, efficacement vis à vis des apprentissages souhaités, ces adaptations multiples et leurs incohérences éventuelles.

Dans la première partie de ce texte, connaissances et métaconnaissances didactiques sont peu présentes: je les ai évoquées à propos de la conjecture sur la symétrie orthogonale, elles sont manifestes aussi dans l'interprétation initiale de l'énoncé et la non-satisfaction des étudiants après décomposition en transformations élémentaires. Je voudrais compléter ici par d'autres exemples rencontrés avec les mêmes étudiants ou avec des élèves de terminale, toujours dans le domaine des nombres complexes.
Le premier exercice proposé aux étudiants est celui-ci:

> *"La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse : si deux nombres réels sont somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi ?"*

Le problème est posé dans un cadre arithmétique. Les étudiants restent dans ce cadre pour tester la conjecture et/ou essayer de la prouver, en ayant recours dans ce cas au calcul littéral. Il est possible d'aboutir ainsi mais, en général, bien peu y arrivent. On trouve toujours quelques étudiants pour, après divers essais infructueux, raisonner de la façon suivante:

> *"Nous travaillons sur les complexes, ce problème d'une manière ou d'une autre doit y être relié."*

Ce raisonnement témoigne d'une connaissance manifestement didactique :

> *"Les exercices et problèmes posés au cours de l'enseignement d'un contenu donné ont nécessairement à voir avec ce contenu."*

Ceci active en général l'interrogation:

"Où y-a-t-il donc des sommes de carrés dans les complexes ?" ,

interrogation qui les conduit de façon quasi immédiate à la solution.

De la même façon, un élève de terminale bien adapté à qui l'on demande, sans autre indication, de résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du troisième degré cherche aussitôt une racine évidente.

Ici encore, des connaissances didactiques:

"Seules les équations du second degré sont au programme"

"Les exercices proposés dans les manuels peuvent être résolus avec les notions du programme",

il déduit la connaissance déclarative:

"Toute équation du troisième degré proposée dans un manuel de terminale a une racine évidente",

à laquelle il associe ensuite la règle stratégique:

"Si équation du troisième degré à résoudre, essayer 1, -1, 2. -2..." ,

le fonctionnement de ces connaissances restant ici encore plus ou moins implicite.

Et, toujours de la même façon, si on lui demande de mettre sous forme trigonométrique et exponentielle un nombre complexe donné sous forme cartésienne, il sait qu'il doit essayer de repérer des rapports trigonométriques d'angles multiples de $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{6}$, comme il sait que si on lui demande la puissance nième d'un nombre complexe donné sous forme cartésienne c'est que sa forme exponentielle est accessible ...

REFERENCES CITEES

Brousseau G. (1986) La théorisation des phénomènes didactiques, Thèse d'état, Université de Bordeaux I

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12/1, 73-112.

Chiocca C., Josse E.& Robert A. (1991) Analysis of the accompanying discourse of the teacher in the classroom, Proceedings of PME 1991, Assisi, Vol.1, 215-222.

Robert A. & Tenaud I. (1988) Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 9/1, 31-70.

Schoenfeld A. (1985) Mathematical problem solving, Academic Press.

Tenaud I. (1991) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C: enseignement de méthodes et travail en petits groupes, Université Paris 7.

CONNAISSANCES, METACONNAISSANCES ET EIAO, QUELQUES ASPECTS

Monique Baron
LAFORIA-IBP, Université P. &M. Curie (Paris 6)

Après une brève présentation du domaine appelé EIAO, quelques interventions du "méta" dans ce domaine (métaconnaissances, métaraisonnement...) sont évoquées et illustrées. Nous nous limiterons ici à certains des aspects qui concernent la représentation du domaine enseigné, pour les capacités de résolution de problèmes et d'explications, et la modélisation de l'apprenant.
Le terme "connaissances" dans cet article est généralement utilisé dans un sens large incluant savoir, savoir faire, capacités. Le terme "métaconnaissances" y désigne des connaissances dont on peut dire qu'elles portent sur des connaissances.

I. Brève présentation de l'EIAO.

L'*Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateur* (première signification du sigle EIAO) est né dans la décennie 1970-1980 (aux Etats-Unis), avec l'objectif de dépasser, en utilisant des techniques d'intelligence artificielle, certaines limites de l'enseignement assisté par ordinateur (EAO) classique, généralement dans le cadre d'un enseignement individualisé. Il visait notamment une plus grande souplesse du déroulement d'une session, davantage d'initiative pour l'élève ainsi qu'une meilleure capacité du système à analyser les réponses de celui-ci, une meilleure adaptabilité du système à son utilisateur.
Ce domaine a d'abord été pour l'intelligence artificielle une source de problèmes intéressants et un domaine d'expérimentation de modèles et de techniques, en liaison avec le développement des *systèmes à base de connaissances* et des systèmes interactifs, l'objectif général étant de concevoir des systèmes informatiques destinés à faciliter chez leur utilisateur des apprentissages dans un domaine donné.
Les travaux de recherche en EIAO concernent plusieurs types de problèmes, parmi lesquels :
1) la représentation[1] explicite de connaissances du domaine enseigné et la modélisation de raisonnements utilisant ces connaissances, pour donner au système la capacité de

[1]le mot représentation est utilisé dans cet article avec son sens usuel en IA.

résoudre de manière communicable des problèmes posés à (ou par) l'apprenant[2] et de fournir des explications à sa demande,
2) la représentation et la gestion, par le système, d'informations sur l'apprenant, afin d'assurer une meilleure compréhension de son comportement et une bonne adaptation de l'interaction,
3) la représentation explicite de connaissances pédagogiques, pour assurer la conduite de la session de manière souple, adaptable et efficace,
4) la recherche de modes d'interaction et de communication facilitant le "dialogue" apprenant-système et favorisant les apprentissages.
Ces problèmes sont diversement posés, selon les objectifs de recherche et les types d'*Environnement Interactif d'Apprentissage avec Ordinateur* (signification plus récente du sigle EIAO[3]) ; une bonne présentation en est faite dans [Wenger 87].

Pour les *systèmes tutoriels intelligents (STI)*[4], les interactions système-apprenant sont organisées autour d'activités de résolution de problèmes plus ou moins menées, aidées ou contrôlées par le système, qui joue ainsi un rôle de précepteur attentif et plus ou moins dirigiste. L'architecture informatique de ces systèmes comporte généralement quatre modules interdépendants, qui correspondent respectivement aux quatre types de problèmes mentionnés ci-dessus : modules "domaine", "apprenant" (ou "élève"), "pédagogue" (ou "module tutoriel") et "interface" ; ces modules doivent de plus être intégrés dans une architecture adaptée pour coopérer efficacement.
A côté des STI, d'autres approches existent pour des EIAO basés sur d'autres activités susceptibles de favoriser des apprentissages : l'exploitation de simulations, l'exploration de micro-mondes, la découverte guidée, l'apprentissage par collaboration par exemple.

La conception d'EIAO nécessite de prendre en compte, outre les "états de l'art" en informatique et en intelligence artificielle, les "états de l'art" des diverses disciplines concernées par l'apprentissage (humain) et l'enseignement, en particulier la psychologie cognitive, la didactique, les sciences de l'éducation et de la communication ; la coopération pluridisciplinaire s'avère ainsi de plus en plus nécessaire en EIAO. Mais une des difficultés d'une telle coopération est de s'entendre sur la signification des mots employés, en particulier lorsqu'il s'agit de mots riches de sens, renvoyant à des notions, des expériences, des réalités différentes selon les disciplines. C'est le cas du "méta", de la (ou des) "métaconnaissance(s)" : ce thème a émergé en IA dans la décennie 80-90 dans le cadre des systèmes à base de connaissances (cf. [Pitrat 90] par exemple et la 3ème partie de ce recueil), en particulier à l'occasion de travaux en EIAO ; il concerne aussi, comme

[2] "apprenant" est le terme générique désignant l'utilisateur final d'un tel système, désigné aussi par "élève" ou "étudiant".
[3] On parlera donc soit de l'EIAO, comme domaine, ou bien d'un EIAO ou des EIAOs.
[4] pour plus de détails sur les STI et des exemples, le lecteur peut consulter [Nicaud & Vivet 88]

le montre la 1ère partie de ce recueil, des travaux en didactique ; il a fait également l'objet de travaux en psychologie cognitive.
Il convient donc en EIAO d'examiner tous ces aspects pour y chercher des éléments de réponses à certaines questions de conception et pour tenter de prendre en compte les différents résultats, contraintes et exigences.

II. Interventions du "méta" en EIAO, quelques aspects et exemples.

Plusieurs aspects "méta" peuvent être considérés en EIAO.
La modélisation du domaine à enseigner est une question fondamentale, particulièrement pour un STI : quelles sont les connaissances du domaine (qu'il convient d'expliciter) ? Peut-on (doit-on) distinguer des connaissances et des métaconnaissances ? Comment les faire intervenir, les représenter, les organiser ?

Si on a pu d'abord (naïvement...) considérer ces questions posées "dans l'absolu", à un spécialiste du domaine donné (voir les débuts des "systèmes experts"), on s'est aperçu depuis qu'il convenait, pour y répondre, de préciser les objectifs de modélisation.
Dans un EIAO de type STI, ces objectifs sont multiples, et relatifs aux diverses fonctionnalités souhaitées : résolution de problèmes, présentation à l'apprenant de connaissances et de raisonnements, explications, aides, analyse de productions de l'apprenant, conduite tutorielle, adaptabilité à différents niveaux.
La précision de ces fonctionnalités dépend elle-même des objectifs d'apprentissage présidant à la conception de l'EIAO considéré. S'agit-il de renforcer les connaissances de base de l'apprenant dans un domaine particulier (plus ou moins complexe), de l'entrainer à la résolution de problèmes, en le guidant de près ou bien en le laissant tenter des expériences et tatonner ? Vise-t-on aussi (ou surtout) à développer chez l'apprenant des capacités plus générales relatives à la recherche et la manipulation d'informations, à la mise en œuvre de méthodes, ou bien souhaite-t-on développer des capacités réflexives ? Le lecteur pourra par exemple se reporter à [Paquette 91] pour la présentation de tels objectifs, et pour une reflexion sur la conception et l'utilisation d'EIAO dans de telles perspectives.

Quoi qu'il en soit, la réalisation des diverses fonctionnalités attendues dans un STI fait intervenir de manière plus ou moins directe et explicite plusieurs sortes de connaissances, dont certains aspects (méta en particulier) sont développés et illustrés dans les § qui suivent.

II.1 Représentation de connaissances du domaine, modélisation de compétences de **résolution de problèmes** et d'**explication.**

La représentation des connaissances du domaine enseigné, pour donner au système des capacités de résolution de problèmes et d'explication, est, rappelons-le, un problème central pour les STI, dont l'essor initial a été lié à celui des "systèmes experts" (SE). En effet, ces derniers disposaient d'une part, dans leur "base de connaissances", de connaissances explicitement formulées dans un langage proche du langage usuel du domaine, et d'autre part avec le "moteur d'inférence", d'un moyen de simuler un raisonnement de mise en oeuvre de ces connaissances. Les capacités des systèmes experts à résoudre ainsi des problèmes et à fournir des explications sur le raisonnement suivi ont incité à les utiliser comme base de systèmes dédiés à l'enseignement (voir par exemple [Vivet & Baron 87], [Quéré & al. 91]). Les travaux menés depuis le début des années 80 ont permis une certaine évolution des idées sur ce sujet.

II.1.1 Les enseignements de GUIDON

C'est ainsi que, dans les années 80, W.J. Clancey a conçu GUIDON (un STI), à partir de MYCIN, "système expert" en diagnostic de maladies infectieuses et en prescription d'antibiotiques, destiné à aider des médecins généralistes à effectuer leurs consultations. GUIDON proposait à un étudiant, placé en situation de médecin, un cas de patient à traiter (issu d'une base de cas) ; l'utilisation préalable de MYCIN pour résoudre ce cas servait de référence à GUIDON pour suivre et analyser le comportement de l'étudiant, ainsi que pour répondre à ses demandes d'information, d'aide ou d'explications.

Or, dans les expérimentations de ce système, les règles ont été jugées par les étudiants difficiles à comprendre et à assimiler, et les capacités d'explication inadaptées et insuffisantes ; de plus le raisonnement modélisé s'est avéré trop rigide et non suffisamment conforme au raisonnement de diagnostic médical usuel. En effet, dans MYCIN comme dans les premiers SE, les capacités d'explication portaient sur deux aspects du raisonnement suivi par le système : "comment un fait a-t-il été obtenu ?", et "pourquoi le SE pose-t-il une question à l'utilisateur ?", les réponses à ces questions reprenant les contenus des règles examinées par le système et les faits disponibles. Le système ne pouvait pas fournir d'explications sur le contenu des règles, sur les processus physiologiques ou sur la manière de conduire le raisonnement de diagnostic, car certaines connaissances, non directement nécessaires pour produire un diagnostic ou un conseil thérapeutique, étaient absentes de la base de MYCIN, et d'autres, comme celles relatives à la stratégie de raisonnement, y étaient implicites.

Les problèmes mis en évidence par cette première version de GUIDON ont entraîné une réflexion exemplaire sur les exigences de modélisation de domaines de connaissances en

EIAO ([Clancey 83], [Baron 84], [Wenger 87] chap. 12) ; ce travail a eu également des répercussions importantes sur la conception des systèmes à base de connaissances et sur les travaux relatifs aux capacités d'explications en IA. A la suite de ce constat, une réorganisation complète des connaissances de la base de MYCIN a conduit au nouveau système, NEOMYCIN, avec explicitation de nouvelles connaissances :
-introduction de catégories abstraites permettant une classification des entités du domaine apparaissant dans les règles et sur lesquelles porte le raisonnement (maladies, causes...),
- représentation explicite du raisonnement de diagnostic, modélisé de manière plus conforme au raisonnement médical usuel, au moyen de tâches abstraites de raisonnement organisées selon une structure arborescente et réalisées par des paquets de métarègles gérant la mise en œuvre des règles du domaine.

Le premier enseignement de GUIDON tient donc dans le constat suivant : un bon SE n'est pas nécessairement un bon "module domaine" pour un EIAO, les besoins de modélisation sont différents. D'autres enseignements de ce travail concernent d'une part la mise en évidence des liens étroits entre modélisation du domaine et capacités d'explication et d'autre part le problème désigné alors en IA sous le terme général de "contrôle" ou de "stratégie de raisonnement" ; ce problème pour les systèmes à base de règles est relatif à l'explicitation du fonctionnement du moteur d'inférence, au choix des règles à déclencher et à leur enchaînement, c'est-à-dire à l'explicitation de métaconnaissances, au sens de connaissances pour utiliser des connaissances. Ces travaux ont conduit aussi aux approches de modélisation de divers raisonnements et à certaines approches en ingéniérie de la connaissance (voir par exemple les travaux relatifs aux "tâches génériques" de Chandrasekaran et aux méthodes d'acquisition de connaissances telles que KADS).

La représentation explicite des tâches et de la stratégie de raisonnement permet de faire porter explicitement la communication système-apprenant sur ce niveau, par exemple pour nommer des ensembles de pas de raisonnement, présenter de manière structurée et plus ou moins résumée le raisonnement effectué par le système, formuler des explications, des aides ou des conseils stratégiques, situer les propositions de l'étudiant.
On peut attendre aussi de l'explicitation de ce niveau de connaissances de disposer d'un niveau de flexibilité pour l'adaptabilité de la résolution et des explications proposées à l'apprenant. Enfin, ces notions de stratégie de raisonnement sont généralement réutilisables pour d'autres domaines ; Clancey a d'ailleurs exploré cette possibilité avec le système HERACLES, système général de "classification heuristique", et GUIDON2, le tuteur associé.

II.1.2 Des résolveurs de problèmes en mathématiques pour EIAO ?

Depuis le début des années 80, plusieurs travaux de chercheurs en IA (en France en particulier) ont expérimenté différentes approches d'explicitation et d'organisation de connaissances mathématiques pour la conception de résolveurs orientés EIAO.
Ainsi pour des domaines liés à l'algèbre, on peut rappeler brièvement quelques idées.
Le système SEME [Baron 82], en manipulation formelle d'expressions, proposait un cadre de modélisation du raisonnement en termes de tâches de résolution de problèmes, avec un langage comportant des règles de réécriture d'une part et des règles de production d'autre part ; les règles de production permettaient de formuler des connaissances pour contrôler l'application des règles de réécriture, ainsi que pour effectuer d'autres transformations et opérations de résolution de problèmes. Le contrôle des règles de production était implicite dans le fonctionnement de l'interpréteur (voir aussi [Baron 85]).
Le système CAMELIA [Vivet 84], un système pour raisonner et calculer en calcul formel, proposait un langage de "plans", avec un niveau méta de contrôle assuré par des métarègles attribuant aux plans en conflit des notes de coût et d'espoir. Ce système a été utilisé en particulier pour formuler des connaissances en calcul de primitives et en calcul mental. Il a aussi servi de base à la proposition d'architecture générale du STI AMALIA, cadre dans lequel ont été étudiés des problèmes d'explication (voir l'article de E. Delozanne dans cette 2ème partie).
C'est avec le système APLUSIX [Nicaud 87], en factorisation de polynômes, qu'est apparue l'appellation "résolveur pédagogique" consacrant la différence entre système expert et résolveur pour EIAO. Ce système, plus complet, plus interactif que les précédents et qui a pu être expérimenté avec des élèves, met l'accent sur les savoir faire de niveau stratégique : choix de la transformation à appliquer, possibilité de retour en arrière. La modélisation de cette compétence stratégique est assurée dans les premières versions par un ensemble d'heuristiques, explicitées sous forme de règles du langage SYM développé à cette occasion ; un travail plus récent porte sur la formulation de tâches et de plans structurant des successions de transformations (voir l'article Nicaud & Saïdi dans cette partie, ainsi que [Saïdi 92]).

De nombreux travaux ont été également consacrés à des résolveurs en géométrie (voir par exemple [Py 90], [Pintado 91], [Inghilterra 92], [Bazin 93]).
Ces divers travaux en IA ont permis de concevoir et d'expérimenter d'une part des environnements informatiques, avec des langages de représentation de connaissances à base de règles et de structures "orientées objets", et d'autre part des approches pour la formulation et l'organisation de connaissances de plusieurs niveaux, ces connaissances étant souvent non complètement explicitées par les mathématiciens et les enseignants. Ils ont aussi permis de mieux cerner quelques problèmes, parmi lesquels :

- la difficulté réelle à constituer des bases de connaissances, à expliciter et réaliser des modèles qui soient à la fois "cognitifs et computationnels"[5] pour résoudre des ensembles de problèmes dans un domaine à un niveau d'enseignement donné,
- la difficulté à caractériser le domaine de validité d'un tel modèle,
- la dépendance entre contenus, formes, structuration des connaissances et système utilisé,
- le problème du niveau de granularité, qui varie selon le niveau et les objectifs d'apprentissage,
- le problème du statut des éléments d'une base de connaissances : par exemple une heuristique utilisée par un expert ou mise dans une base de connaissance par le concepteur d'un SE est-elle une connaissance mathématique "légale" ? Le système peut-il en faire état dans une résolution ou dans une explication ?

Certains de ces problèmes sont liés à la distance qui existe généralement entre les connaissances enseignées, théoriques, souvent qualifiées de déclaratives, et les connaissances pour résoudre les problèmes, qui utilisent ces dernières. Ils renvoient aussi à des questions délicates de méthodologie de conception d'un résolveur pour EIAO.

On voit qu'il n'est plus question d'utiliser, comme on a pu le penser initialement, un modèle d'expert, mais de réfléchir aux connaissances de référence, aux connaissances visées et à leur situation dans les modèles de résolution voulus.

II.1.3 Capacités d'explications, approches récentes en IA et en EIAO.

On a vu avec Guidon que les explications souhaitées pour un étudiant dans une session d'apprentissage sont différentes de celles souhaitées par un utilisateur plus averti en situation de résolution interactive de problème, qu'il s'agisse de leurs buts (les questions que l'utilisateur peut poser), de leurs contenus (le "quoi" des réponses) et de leurs formes (le "comment" des réponses). Il convient donc d'étudier les besoins d'explications spécifiques en EIAO (voir l'article de E. Delozanne dans cette partie). On peut remarquer aussi qu'un apprenant face à un EIAO peut souhaiter des explications sur autre chose que le domaine enseigné, par exemple sur les activités, sur le style d'apprentissage proposés.

Des travaux sur les explications en IA ont porté sur d'autres buts que les deux buts classiques déja mentionnés (explications négatives, explications sur la stratégie de raisonnement, sur les connaissances du domaine). Par ailleurs, l'approche récente des "systèmes experts explicatifs", considérant l'explication elle-même comme une tâche de résolution de problèmes, propose de modéliser explicitement le raisonnement explicatif présenté comme un métaraisonnement, puisqu'il porte sur le raisonnement du résolveur, avec des connaissances qui lui sont propres (voir par exemple [Jimenez 91]). Si la prise

[5] pour reprendre une expression récente de J. F. Nicaud

en compte du contexte et de l'interlocuteur est encore faible dans ces travaux, certains s'orientent cependant vers des explications "négociées" (par exemple [Lemaire 92]) ; cette direction est a priori intéressante pour l'EIAO, mais suppose encore l'explicitation de nouvelles connaissances.

II.2 Aspects méta relatifs à la modélisation de l'apprenant.

Si le premier point se rapportait à des connaissances que l'on pouvait considérer comme "objectives", les activités d'enseignement et/ou d'apprentissage concernent fondamentalement des modifications de l'état des connaissances d'un individu.
Que peut-on dire des connaissances d'un individu à un instant donné de son apprentissage, de leurs contenus, de leur organisation ? Quels aspects en retenir dans un EIAO ? Comment les représenter, comment les identifier, comment suivre leur évolution, comment en tenir compte dans les diverses interventions du système ?

II.2.1 Modélisation de l'apprenant dans un EIAO, généralités.

Le modèle de l'apprenant (MA) désigne pour un EIAO un ensemble de données, sorte d'image de l'utilisateur constituée et tenue à jour par le système ; il est considéré généralement comme un élément important pour l'adaptabilité du système à son interlocuteur. Il comporte généralement une composante "épistémique" plus ou moins développée, relative à l'état des connaissances de l'élève, et éventuellement d'autres éléments caractérisant par exemple les styles cognitif, d'apprentissage et affectif de ce dernier.
L'état des connaissances de l'élève a souvent été considéré en EIAO comme une sorte de variante des connaissances modélisées dans le "module domaine", qu'il s'agisse de l'approche modèle de connaissances partielles (ou "overlay model"), ou de l'approche modèle de connaissances erronées (ou "buggy model").

Les modèles de connaissances partielles ne retiennent que les connaissances du domaine plus ou moins maîtrisées par l'apprenant. Certaines de ces approches sont basées sur l'hypothèse forte que les connaissances de l'élève sont incluses strictement dans les connaissances du domaine et que les erreurs peuvent être expliquées par une absence de connaissances ; d'autres, sans adhérer à cette hypothèse, ne traitent que ce type d'information. Des coefficients numériques ou symboliques peuvent représenter des degrés de confiance : confiance ou maîtrise de l'élève, supposée par le système, relativement aux éléments de connaissance, ou bien degré de confiance que le système a dans l'hypothèse qu'il fait sur la connaissance de l'élève. Le diagnostic consiste dans ce

cas à déterminer quelles connaissances (de référence) l'élève utilise correctement et celles qu'il ne sait pas utiliser, avec éventuellement des coefficients de confiance ; il utilise généralement un processus de comparaison du comportement de résolution de l'élève à celui du module "domaine".
Les approches "buggy model" considèrent qu'il ne suffit pas de disposer des connaissances correctes maîtrisées par l'élève pour comprendre son comportement, en particulier lorsqu'il est erroné, mais qu'il faut avoir des idées sur les erreurs qu'il fait. Une hypothèse de ces approches est qu'une erreur, lorsqu'elle a un caractère systématique chez un élève, peut avoir une explication rationnelle en terme de "connaissance erronée" ou incorrecte ; une erreur est un symptôme. Cette approche, qui donne tout son sens au terme "diagnostic", propose donc de représenter dans le MA à la fois des connaissances correctes et des "connaissances incorrectes" de l'élève. Cette dernière appellation semblant paradoxale, certains parlent plutôt de conceptions ou de "croyances" de l'apprenant.

Quelle que soit l'approche et les objectifs d'utilisation du MA, un processus de diagnostic relève d'un raisonnement sur le raisonnement de l'apprenant et met en jeu des connaissances du domaine, il est donc de niveau méta. De nombreux travaux ont été consacrés à la modélisation de l'apprenant ; le projet ELECTRE, qui a tenté de concilier des connaissances, des hypothèses psychologiques et didactiques et un certain état de l'art en IA, met en jeu plusieurs aspects "méta" et fait probablement partie des approches les plus élaborées.

II.2.2 Le projet ELECTRE, architecture et diagnostic cognitifs

Le projet pluridisciplinaire ELECTRE en électricité [Paliès & al 86] avait pour premier objectif de tester par simulation informatique un modèle d'architecture cognitive complexe, qui comportait, outre des éléments de catégorisation des problèmes et des connaissances attachées (prototypes, schémas et heuristiques), un niveau de métaconnaissances portant sur le parcours des connaissances en situation de résolution ; cette architecture cognitive étant supposée commune aux "experts" et aux "novices", les comportements erronés des "novices" étaient expliqués par des contenus différents, ceux-ci par exemple privilégiant des traits de surface pour décrire prototypes ou schémas et appliquant des heuristiques erronées de simplification du problème.

Le second objectif était de réaliser un module de diagnostic automatique pour engendrer un modèle d'apprenant à partir des réponses à un ensemble d'exercices-tests [Paliès 88]. Ce module, correspondant à une modélisation du comportement du psychologue en situation d'analyse de protocoles, analysait ces réponses avec des mécanismes inspirés de l'apprentissage symbolique automatique, en utilisant des connaissances sur le domaine et sur les erreurs des novices ; il produisait ainsi des éléments du modèle de l'apprenant en modifiant ceux du module domaine (seules deux étapes sur les cinq prévues ont été implémentées). Du point de vue informatique, il a nécessité la réalisation spécifique d'un système où des règles pouvaient modifier d'autres règles.

II.2.3 D'autres approches

Des travaux se sont intéressés à d'autres aspects méta dans le MA, en particulier en termes de reconnaissance de plans ou d'intentions de résolution (par exemple [Py 90]).
Par ailleurs J. Self [Self 91] propose une approche de formalisation (proche des idées exposées dans [Baron 88]) en termes de modélisation d'agents et de systèmes de croyances, où le MA est une partie des "croyances" du système : il est constitué de croyances que le système a sur les connaissances de l'apprenant, qui peuvent être de différents niveaux. Il analyse dans ce cadre théorique plusieurs aspects méta, dont les traitements pour constituer, mettre à jour et utiliser un MA, ce dernier aspect relevant pour l'essentiel du module tutoriel.

III. Conclusion

Il conviendrait, pour avoir un aperçu plus complet des interventions du méta en EIAO, de compléter les aspects évoqués ci-dessus par les aspects relatifs au module tutoriel (voir par exemple [Labat 90]) et au module interface ; ceux-ci mettent en jeu d'autres points de vue sur le domaine enseigné et d'autres connaissances, sur les processus d'apprentissage humains, sur l'enseignement, sur les ordinateurs et leur utilisation par des individus en situation d'apprentissage. En effet, la tâche d'un STI est d'aider un apprenant à apprendre des connaissances par la résolution de problèmes, et non simplement (si l'on peut dire !) de résoudre des problèmes du domaine, comme on le demandait il y a quelques années aux premiers "systèmes experts".
En résumé, la réalisation des diverses fonctionnalités souhaitées dans un STI fait ainsi intervenir de manière plus ou moins directe plusieurs sortes de connaissances, parmi lesquelles on peut proposer de distinguer :
- un certain ensemble "objectif" de connaissances du domaine pour la résolution de problèmes, dont la précision à un niveau donné n'est pas toujours simple,
- les connaissances d'un individu, qui peuvent comporter des niveaux méta (connaissances dans un domaine, connaissances plus générales, capacités cognitives et métacognitives)
- des connaissances sur les connaissances du domaine (épistémologie, organisation, transposition didactique ...),

- des connaissances sur les connaissances des individus (connaissances sur le développement cognitif humain en général, sur les processus d'apprentissage, sur les conceptions fausses typiques dans un domaine, sur les cursus scolaires ...),
- des connaissances "didactiques" qui prennent en compte les diverses connaissances ci-dessus pour concevoir des situations d'apprentissage et pour agir dans ces situations de manière à favoriser des modifications souhaitées de l'état des connaissances de l'apprenant,
- et bien sûr, des connaissances en informatique et en IA, en particulier sur la représentation des connaissances.

Ces diverses sortes de connaissances ne sont pas nécessairement toutes à expliciter dans un EIAO, certaines peuvent guider ou justifier implicitement des choix de conception ou de représentation ; il ne serait d'ailleurs pas réaliste de penser pouvoir formuler toutes les connaissances qui permettraient de rationaliser explicitement a priori tous les actes d'enseignement ou d'apprentissage.

La conception d'EIAO nécessite donc reflexion sur des connaissances très diverses, dont certaines ne sont en général pas explicitées chez les enseignants ; elles ne se limitent pas aux connaissances du domaine pour la résolution de problèmes, dont la modélisation s'avère cependant fondamentale et délicate. Les articles qui suivent s'inscrivent dans une telle réflexion.

Références

[Bazin 93] Bazin J.M., Un modèle d'expert en résolution de problèmes de géométrie, Troisièmes Journées EIAO de Cachan, à paraître.

[Baron 82] Un système pour exprimer et mettre en œuvre des connaissances en manipulation formelle d'expressions, Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI, 1982.

[Baron 84] M. Baron -D'un "SE" à un "SEIAO", les enseignements d'un cas intéressant : GUIDON, notes de lecture.- Colloque Intelligence Artificielle, Aix-en-Provence, sept. 1984, publication n°49 du GR C.F. Picard (LAFORIA), 27-49.

[Baron 85] Quelques réflexions après la réalisation de SEME, Actes du Colloque Cognitiva, 1985.

[Baron 88] Quelques problèmes de non monotonie en EIAO, Actes du Premier Colloque Européen Intelligence Artificielle et Formation, Applica 88, Lille, oct. 88.

[Clancey 83] Clancey W.J., The Epistemology of a Rule-based Expert System, a Framework for Explanation, Artificial Intelligence 20, 1983, 215-251.

[Inghilterra 92] Inghilterra C., Apports de la représentation orientée objet et du raisonnement analogique dans la conception d'un tutoriel de géométrie, Thèse de l'Université Aix-Marseille III (Informatique), juillet 1992.

[Jimenez 91] Sur l'explication dans les systèmes à base de règles : le système PROSE, Thèse de l'Université Paris VI, 1990.

[Lemaire 92] Construction et transmission d'explications dans les systèmes à base de connaissances, Thèse de l'Université Paris XI-Orsay, 1992.

[Nicaud 87] Nicaud J.F., Aplusix : un système expert en résolution pédagogique d'exercices d'algèbre, Thèse de l'Université Paris XI-Orsay, 1987.

[Nicaud & Vivet 88] Nicaud J.F., Vivet M., Les tuteurs intelligents, réalisations et tendances de recherche, revue Technique et Science Informatiques, janvier 1988.

[Paliès & al 86] Paliès O., Caillot M., Cauzinille-Marmèche E., Laurière J.L., Mathieu J., Student Modelling by a Knowledge-based System, Artificial Intelligence Approaches to Education, Special Issue of Computational Intelligence Journal, vol 2, mai 1986, 99-107.

[Paliès 88] Paliès O., Métaconnaissances pour la modélisation de l'élève. Contribution au diagnostic cognitif par système expert, Thèse de l'Université Paris VI, mars 1988.

[Paquette 91] Paquette G., Métaconnaissance dans les environnements d'apprentissage, Thèse de l'Université du Maine (Informatique), oct. 1991.

[Py 90] Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur Intelligent de la géométrie, Thèse de l'Université de Rennes I, 1990.

[Pintado 91] Une approche pour un tuteur informatique d'entraînement à la résolution d'exercices de géométrie élémentaire, Deuxièmes Journées EIAO de Cachan, 24-25 janvier 1991, Editions de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 45-60.

[Pitrat 90] Métaconnaissance, futur de l'intelligence artificielle, Hermès 1990.

[Quéré & al. 91] Quéré M. (ed.), Systèmes experts et enseignement assisté par ordinateur, Ophrys, 1991.

[Saïdi 92] Saïdi M., Planification et explication du raisonnement d'un résolveur complexe en algèbre : application aux factorisations de polynômes et aux résolutions d'équations,Thèse de l'Université Paris XI-Orsay, 1992.

[Self 91] Self J., Formal Approaches to Learner Modelling, Technical Report AI-59, Lancaster University, Dep. of Computing, feb. 1991.

[Vivet 84] Expertise mathématique et informatique : CAMELIA, un logiciel pour raisonner et calculer, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris VI, juin 1984.

[Vivet & Baron 87] Vivet M., Baron M., Systèmes experts et tuteurs intelligents, Colloque AFCET-RFIA, Antibes, nov. 1987,

[Wenger 87] Wenger E., Artificial Intelligence and Tutoring Systems, Morgan Kaufman Pub., 1987.

UN PROJET PLURIDISCIPLINAIRE : ELISE UN LOGICIEL POUR DONNER DES LEÇONS DE METHODE

Elisabeth Delozanne

Laboratoire d'Informatique de l'Université du Maine
BP 535, 72017 LE MANS CEDEX
tél.: 43 83 32 21, télécopie : 43 83 33 66

Résumé :

A partir de l'expérience de collaboration IA/Didactique que nous avons menée au sein du projet ELISE, nous tentons de dégager les points de convergences et les apports réciproques de ces deux disciplines sur lesquels peut s'appuyer un travail commun en EIAO.

ELISE est un projet pluridisciplinaire dont l'objectif est la conception d'un logiciel à base de connaissances pour permettre à des étudiants de l'enseignement scientifique d'acquérir des savoir-faire sur le calcul des primitives, par la résolution de problèmes et les explications

Dans ce texte ELISE est d'abord globalement située par rapport aux problématiques de l'IA et de la Didactique, puis la méthodologie adoptée pour sa conception est exposée. Ensuite l'interaction étudiant/logiciel mise au point et testée auprès des utilisateurs est présentée. Elle est structurée par ce que nous appelons des "situations d'interaction" qui sont liées à la tâche et aux objectifs respectifs du système et des utilisateurs. Enfin nous présentons les résultats des tests concernant les explications

Si les situations d'interaction présentées ici sont spécifiques à un champ de connaissance donné, la notion de situation d'interaction et le mode de collaboration IA/Didactique que nous avons expérimenté nous semblent pouvoir concerner aussi la conception de systèmes d'EIAO et de systèmes à base de connaissances.

Mots-clés :

EIAO, explications, interaction homme machine, mathématiques, enseignement de méthodes .

1. Introduction

La nécessité d'un travail pluridisciplinaire en Intelligence Artificielle, en EIAO et sur les explications n'est plus à démontrer (par exemple [BARON 1982], [EIAO 1989, 1991], [EXPLICATIONS 1991,1992]). Cette collaboration que la communauté de chercheurs appelle de ses vœux n'est pas toujours aisée à mettre en œuvre du fait des différences dans les problématiques, les méthodologies, les concepts. Dans ce texte, à partir de l'expérience de collaboration IA/Didactique que nous avons menée au sein du projet ELISE, nous souhaitons dégager les points de convergence et les apports réciproques ces deux disciplines sur lesquels peut s'appuyer un travail commun en EIAO.

ELISE est un projet pluridisciplinaire dont l'objectif est la conception d'un logiciel à *base de connaissances* pour permettre à des étudiants de l'enseignement scientifique d'acquérir des *savoir-faire* sur le *calcul des primitives*, par la *résolution de problèmes* et les *explications*. Ce projet est né de la rencontre de deux équipes. Les informaticiens chercheurs en EIAO à l'Université du Maine, travaillent sur un logiciel à base de connaissances qui résout des problèmes de calcul de primitives et donne des explications sur sa résolution. Les chercheurs en Didactique des mathématiques s'intéressent à l'enseignement explicite de méthodes, en particulier pour le calcul de primitives[1].

Le paragraphe 2 situe ELISE par rapport aux problématiques IA et Didactique. Le paragraphe 3 définit la méthodologie adoptée pour la conception d'ELISE. Le paragraphe 4 présente l'interaction étudiant/logiciel mise au point et testée auprès des utilisateurs. Le paragraphe 5 analyse les résultats de ces tests concernant les explications.

2. Problématiques

ELISE se situe à l'intersection de deux courants de recherche :

- les recherches en Intelligence Artificielle sur les systèmes à base de connaissances et particulièrement les *systèmes experts explicatifs* et leurs applications à l'enseignement,
- les recherches en psychologie cognitive et en Didactique portant sur l'apprentissage des mathématiques par la résolution de problèmes, et particulièrement sur l'*enseignement explicite de méthodes*.

Dans ce paragraphe nous précisons les points de convergence entre ces courants sur lesquels s'appuie la collaboration pluridisciplinaire pour la conception d'ELISE.

2.1. Systèmes experts explicatifs

La problématique d'ELISE concernant les explications dans les systèmes experts, est issue d'un premier travail pour un DEA d'Intelligence Artificielle. Il s'agissait de doter le résolveur de problèmes CAMELIA [VIVET 1984] d'outils d'explications afin d'utiliser CAMELIA comme module expert du tuteur intelligent AMALIA[2]. Nous présentons d'abord ce travail, puis les différentes problématiques pour produire des explications dans les systèmes experts, avant d'exposer la problématique du projet ELISE dans ce cadre.

2.1.1 Produire des explications avec CAMELIA

CAMELIA est un résolveur de problèmes de calcul algébrique conçu pour établir des preuves et conduire des calculs symboliques en faisant appel à des algorithmes et à des heuristiques. Dans le cadre d'une utilisation pédagogique de CAMELIA, des outils

---

1 Les participants directs au projet ELISE sont :
- Martial Vivet qui a conçu et réalisé CAMELIA, a dirigé ce travail de recherche du point de vue Intelligence Artificielle ; il dirige au LIUM une équipe de recherche sur les nouvelles technologies de l'éducation ;
- Marc Rogalski (professeur à l'Université de Lille) qui a fourni l'analyse du domaine et a dirigé ce travail du point de vue de la didactique des mathématiques
- Elisabeth Carrière (LIUM) qui travaille sur la base de connaissances et le résolveur de problèmes ;
- Elisabeth Delozanne (LIUM) qui a conçu et réalisé les maquettes et les outils correspondants, organisé les séances de tests auprès des usagers et le dépouillement des résultats, proposé une analyse de ces résultats qui a ensuite été discutée par l'équipe, et enfin précisé les spécifications du système à partir de cette analyse remaniée ;

Plus ponctuellement, nous avons bénéficié des avis de d'Aline Robert (IREM de Paris 6-7) et de la réflexion des membres du groupe de travail Math et Méta (DIDIREM, LAFORIA, LIUM, LRI).

2 Cf. [VIVET 1987], [VIVET et al 1988], [CARRIERE et al 1990]

d'explications ont été développés pour permettre au système de répondre à certaines questions de l'élève sur la résolution proposée par la machine. Ces outils travaillent sur la trace de résolution du système et fonctionnent en deux temps.

Le premier temps consiste à filtrer l'arbre de résolution en utilisant trois critères :

- le type de l'explication : *exposer la solution* (présenter la branche succès), *commenter la résolution* (présenter le brouillon, c'est-à-dire la démarche de recherche, y compris les tentatives infructueuses), et *justifier* (expliciter les raisons des choix effectués) ;
- le degré de détail souhaité : pas à pas, ou les grandes étapes ;
- les thèmes à détailler ou à ne pas détailler.

Le deuxième temps consiste à traduire l'arbre compacté en langage "clair" pour l'élève.

```
CALCUL DE              prim (x * cos x) dx
   ESSAI DE  : INTEGRATION DE U*U'                  ECHEC

      APPLICATION DE  : Produit d'un monôme et d'une fonction log, expo ou
trigo
                 x est un monôme en x
                 cos x est une fonction trigonométrique de x
      CALCUL DE intégrer-par-parties (x* cos x) dx
                 APPLICATION DE  : PRIM UV' = UV - PRIM U'V
               1- poser u = x et calculer sa dérivée u'
                   la dérivée de x est 1
               2- poser v'= cos x et calculer sa primitive
                   prim (cos x) dx = sin x
               3- chercher la primitive de u'v
                   prim (sin x) dx = - cos x
               4- uv -prim u'v = (cos x) + x*(sin x)
   RESULTAT
   integrer-par-parties (x* cos x) dx = (cos x) + x* (sin x)

RESULTAT
prim x*(cos x) dx = (cos x)+ x*(sin x)
```

figure 1 : Exemple de résolution commentée par CAMELIA (copie d'écran)

Dans CAMELIA, les explications sont conçues comme des réponses apportées par le système à des questions de type "Comment ?" et "Pourquoi ?" posées par un élève après une résolution proposée par le système. Le raisonnement explicatif repose donc d'une part, sur les connaissances du système dans le domaine (trace de résolution et base de connaissance), et, d'autre part, sur des informations concernant l'élève et la session fournies au système explicateur par un (futur) module pédagogique.

Les limites de cette démarche sont de deux natures différentes [CARRIERE et al 1990] :

- la première concerne la représentation des connaissances du domaine pour obtenir un système expert explicatif,
- la deuxième concerne la pertinence des explications dans l'interaction.

2.1.2 Deux problématiques

La première de ces limitations est un problème bien repéré dans les recherches sur les systèmes experts explicatifs. De nombreux chercheurs en Intelligence Artificielle estiment que l'ajout d'un module d'explication à un système expert existant est un travail quasi impossible si la tâche d'explication (a fortiori d'enseignement) n'a pas été prise en compte dès la phase de conception du résolveur de problèmes.

Une difficulté particulière consiste à *identifier les connaissances stratégiques de résolution*, celles qui permettent qu'un système expert "raisonne sur son raisonnement" et en particulier les ***métaconnaissances*** qui permettent d'*évoquer les connaissances*, de *faire des choix raisonnés* et donc de *justifier ces choix*. En effet on ne trouve ces connaissances dans les manuels que de façons éparses et ponctuelles, et les experts du domaine les mentionnent incidemment en cours de résolution mais ne les énoncent pas spontanément et systématiquement. Or la qualité, la variété et l'organisation de ces connaissances sont tout à fait cruciales pour un système dont l'objectif est de s'expliquer et/ou d'enseigner. Les écueils à éviter dans la représentation de ces connaissances dans un système expert explicatif sont de plusieurs ordres :

- éviter les critères informatiques qui n'expliquent rien à un humain,
- éviter les règles ad hoc trop spécifiques qui peuvent conduire à des généralisations abusives,
- éviter les heuristiques trop générales pour être utilisables.

Ces préoccupations de concepteurs de base de connaissances à la recherche de connaissances stratégiques nécessaires à l'explication[1], sont très voisines des préoccupations des didacticiens s'intéressant à l'enseignement explicite de méthodes[2].

La deuxième limitation se rapporte à la *pertinence des explications dans l'interaction homme-machine* en général et dans l'interaction avec un logiciel d'EIAO en particulier.

Dans les recherches sur les systèmes experts explicatifs, la préoccupation première a été de s'intéresser aux connaissances nécessaires pour produire des explications, à leur explicitation et à leur représentation, c'est-à-dire à développer les capacités d'explication des systèmes à base de connaissances. Depuis quelques années une préoccupation nouvelle retient l'attention des chercheurs : les utilisateurs, en particulier industriels, n'utilisent pas (ou utilisent très peu) les fonctionnalités explicatives des systèmes à base de connaissances. On peut envisager plusieurs raisons à ce comportement :

- les ordinateurs n'ont pas la réputation d'être conviviaux, et les utilisateurs ne demandent pas ce qu'ils ne pensent pas trouver,
- l'interaction avec une machine est dirigée vers des commandes plus que vers des explications,
- les explications présentées par les logiciels ne sont pas suffisamment pertinentes par rapport aux attentes de l'utilisateur.

Dans les recherches récentes, on s'intéresse maintenant beaucoup à la pertinence des explications, c'est-à-dire aux besoins des utilisateurs en matière d'explication. L'explication n'est plus conçue comme une réponse ponctuelle à des questions "Comment ?" et "Pourquoi ?" de l'utilisateur mais comme un discours du système, un dialogue entre deux systèmes de connaissances ou comme un processus émergeant de l'interaction homme-machine lors de l'exécution d'une tâche commune [EXPLICATION 1991, 1992]. Des études en collaboration avec des linguistes, des ergonomes et des psychologues sont menées pour modéliser les dialogues explicatifs, les stratégies de discours, étudier la place des explications dans l'interface. Mais on est encore très loin d'une théorie de l'explication.

Dans cette problématique, l'explication est ainsi située dans le cadre plus général de l'interaction homme-machine.

---

[1] Cf. [CLANCEY 1983], [KASSEL 1986], [VIVET 1987], [CARRIERE et DELOZANNE 1989], [CAUZINILLE 1991], [BRUILLARD 1991], [AUSSENAC 1989], [JIMENEZ 1990], [BOURI et al 1990]

[2] Cf. [SCHOENFELD 1985], [ROBERT et al 1987], [ROGALSKI 1989]

2.1.3 ELISE, conception d'un système explicatif

Le premier travail que nous avons mené pour construire des outils d'explication autour du résolveur de problèmes CAMELIA, nous a fait retenir trois points essentiels pour concevoir un système utilisable à des fins d'enseignement :

1/ prendre en compte la tâche d'explication dès la phase d'acquisition des connaissances,

2/ insérer les explications données par le système dans des scénarios d'interaction qui leur assurent une pertinence par rapport aux objectifs du système et de l'utilisateur.

Sur ces deux points un travail en commun didacticiens/informaticien nous est apparu comme une nécessité incontournable, et nous a amené à nous intéresser à l'apprentissage par la résolution de problèmes.

2.2. Apprentissage par la résolution de problèmes

Ainsi, le deuxième courant de recherche auquel se rattache ELISE, s'intéresse à l'apprentissage par la résolution de problèmes, et plus particulièrement à l'enseignement de méthodes.

2.2.1 Enseignement explicite de méthodes

Souvent en mathématiques, les étudiants sont censés apprendre en faisant de nombreux exercices d'application. Dans ces exercices, l'enseignant indique au passage les théorèmes à appliquer, la démarche à suivre, ponctuellement, il peut expliquer pourquoi ça marche, mais généralement, c'est à l'étudiant de le deviner.

> "Pourquoi ne pas enseigner explicitement les méthodes qui, dans chaque domaine relativement limité, permettent d'amorcer la résolution de problèmes de ce domaine ? Ne serait-ce pas un moyen de combler un manque évident de l'enseignement, de le rendre plus efficace, de mieux dominer les concepts mathématiques en montrant explicitement comment ils servent ? " [ROGALSKI 1990].

Mais qu'est-ce qu'une méthode?

> "Une méthode ou un ensemble de méthodes sur un champ donné est la description d'un ensemble d'activités du sujet, portant sur l'analyse et le classement de problèmes à résoudre dans un domaine assez précis, l'utilisation des outils et techniques disponibles, les stratégies et tactiques possibles, la gestion dans le temps des choix des stratégies et de leur déroulement, la conscience de ces choix, les moyens de contrôle et de retour en arrière pour procéder à d'autres choix...
> Un algorithme produit une réponse, une méthode fournit des questions : quoi, pourquoi, comment, par quels moyens... et donne des outils pour générer et contrôler la recherche des réponses" [ROGALSKI 1990].

2.2.2 ELISE, un logiciel pour donner des leçons de méthodes

Une méthode est ainsi un outil d'organisation du travail de résolution basée sur un classement des problèmes et des outils de résolution, ce classement étant justifié par les propriétés des objets manipulés. A ce titre, une méthode nous intéresse, nous concepteurs de logiciel d'EIAO, pour *la construction d'une base de connaissances plus explicative* :

- le domaine est structuré par la méthode,
- la méthode contient de nombreuses informations pour évoquer les outils et les évaluer sans passer par des évaluations numériques difficilement explicables,
- la méthode exprime les connaissances stratégiques propres au domaine ; en particulier elle explicite les classes de problèmes et propose des justifications - basées sur les propriétés des objets manipulées- pour les démarches de résolution associées.

Or l'explicitation de ces métaconnaissances est essentielle pour les explications (Cf. § 2.1) et constitue ainsi une préoccupation commune aux deux disciplines IA et Didactique. Mais, l'enseignement explicite de méthodes nous intéresse également comme *stratégie d'enseignement adaptée au domaine et au public cible.* Dans le domaine qui nous concerne, l'enseignement explicite de méthodes nous fournit les analyses didactiques préalables à la conception du logiciel :

- analyse cognitive et didactique des connaissances de référence (la méthode)
- analyse du public cible et des difficultés usuelles (difficultés liées au contrôle de la résolution davantage que difficultés sur les techniques),
- analyses des connaissances prérequises (connaissances de base et connaissances techniques),
- définition des objectifs d'enseignement qui sont ceux de l'enseignement explicite de méthodes (Cf. [ROBERT et al 1987], [ROGALSKI 1990]) et plus précisément
  - entraîner à la méthode (pas au calcul),
  - rendre opérationnelles des connaissances étudiées en cours sur des exercices pas trop simples (différence avec le rituel des exercices d'application),
  - inciter à anticiper,
  - susciter un questionnement.

Cette stratégie définit un contexte d'utilisation intéressant pour un logiciel d'EIAO qui permet de dépasser les limites des logiciels "exerciseurs" qui entraînent les apprenants à appliquer localement des techniques. Le rôle du logiciel est de *donner des leçons de méthodes* c'est-à-dire d'*inciter à la réflexion sur les choix* faits et à faire au cours d'une résolution, de *guider cette réflexion* par des *principes de classification des problèmes et des outils*. Pour la définition des interactions étudiants/logiciel, on peut résumer le point de vue des didacticiens de l'équipe en quatre slogans :

- donnez aux étudiants l'occasion d'agir,
- incitez-les à anticiper, à se poser des questions, à appliquer la méthode,
- ne donnez pas trop de détails,
- ne résolvez pas le problème à la place des étudiants.

2.2.3 Pertinence des explications

Dans le cadre d'une interaction avec un logiciel d'EIAO, il faut s'interroger sur le rôle des explications dans l'apprentissage par la résolution de problèmes. Or, il apparaît que peu de didacticiens se sont intéressés à l'heure actuelle aux explications[1]. Pire, ils sont très méfiants quant aux explications : tout enseignant a pu constater que "montrer" une explication aussi bonne soit-elle, à un élève qui la "reçoit", ne suffit pas pour "transmettre" une connaissance à cet élève. Cette conception de l'apprentissage sur un modèle transmission-réception est considérée comme assez souvent inefficace par les chercheurs en Didactique et en sciences de l'éducation qui lui préfèrent une conception où les activités de l'apprenant sont déterminantes.

Dans cette optique, pour construire un logiciel qui enseigne à partir d'explications, il faut répondre à des questions portant sur le rôle des explications dans l'apprentissage :

- Quelle est l'activité de l'élève quand le système "expose", "commente" ou "justifie" ses propres résolutions ?
- Pour l'élève, regarder une solution détaillée, regarder un système chercher, regarder une justification, est-ce source d'apprentissage ?
- Un logiciel qui résout les exercices à la place des étudiants est-il beaucoup plus utile qu'un livre d'exercices corrigés, et si oui à quelles conditions ?

---

[1] Suite à un questionnement de l'EIAO, se penchent actuellement sur ce problème des didacticiens des Mathématiques (Nicolas Balacheff [BALACHEFF 1990 a et b] et Marc ROGALSKI) et dela Physique (Marie-Geneviève Séré et Annick Weil Barais [Explication 1990])

Cette problématique place l'interaction au cœur de l'apprentissage et les explications ne sont alors pertinentes que si elles interviennent dans le cadre de scénarios d'interaction précis (de "situation didactiques?") *mis au point pour faciliter l'apprentissage d'un champ de connaissance donné dans un contexte précis.*

Sur ce point encore, on retrouve une certaine convergence entre les problématiques de certains chercheurs en IA et en Didactique.

Nous avons ainsi structuré les interactions logiciel/étudiants autour de ce que nous avons appelé des **"situations d'interaction"** qui sont caractérisées par des objectifs, une tâche, des stratégies à mettre en œuvre pour effectuer cette tâche, des actions à l'interface pour mettre en œuvre ces stratégies ou demander de l'aide, enfin, les rétroactions du système (dont des interventions explicatives). Pour reprendre la terminologie d'E. Cauzinille [CAUZINILLE 1991], les situations d'interaction mettent en œuvre une *stratégie d'appropriation* par l'apprenant des connaissances à expliquer et pas seulement une *stratégie de présentation* de ces connaissances. Marc Rogalski [ROGALSKI 1992] parle de "situations explicatives" ou de "moments explicatifs d'une situation didactique donnée".

Les situations d'interactions mises au point dans ELISE sont présentées au §4. Ces situations sont spécifiques à ELISE, mais la conception de l'explication comme processus émergeant de l'interaction entre l'apprenant et des situations spécialement conçues pour favoriser un apprentissage donné, nous semble une conception assez générale pour être transposables à d'autres systèmes en EIAO.

3. Méthodologie de conception

De notre point de vue, d'une part la collaboration pluridisciplinaire et, d'autre part l'absence de théorie de l'interaction en EIAO imposent une démarche itérative de conception. La figure 2 représente les différentes étapes de cette démarche. Nous présentons les modalités de collaboration que nous avons adoptées pour le projet ELISE, en précisant, à chaque étape de la démarche de conception, le rôle de chaque discipline et en insistant sur les résultats concernant la base de connaissances et les explications.

La collaboration s'est organisée autour de quatre axes :
- un système à base de connaissances résolvant les problèmes sur le domaine, CAMELIA qui a servi de premier prototype au projet[1],
- un cours polycopié qui expose aux étudiants une méthode de résolution de problèmes du domaine,
- des maquettes simulant le comportement du logiciel à construire pour mettre au point les interactions et expliciter les connaissances nécessaires,
- des séances de tests auprès des utilisateurs.

Les paragraphes qui suivent présentent les trois derniers axes, sans revenir sur le travail pour CAMELIA qui a servi à définir la problématique d'ELISE.(§ 2.2.1).

[1] CAMELIA résout les problèmes du domaine mais sans appliquer systématiquement la méthode.

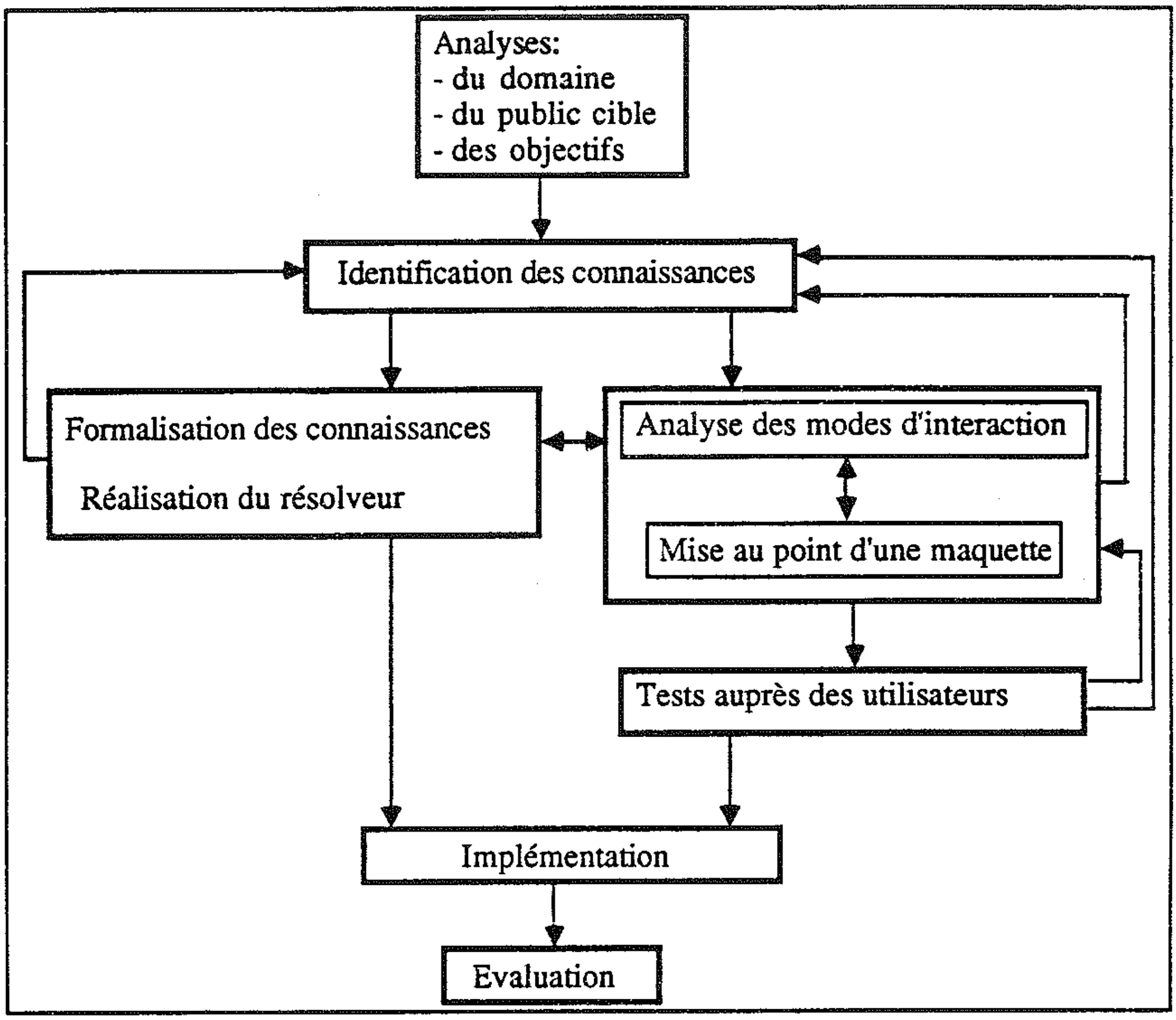


figure 2 : Démarche de conception d'ELISE

3.1. La méthode de recherche de primitives

La connaissance de référence figure dans un *cours polycopié* qui expose à un public étudiant, une méthode pour rechercher des primitives. Cette méthode, mise au point par Marc Rogalski [ROGALSKI 1988], est enseignée depuis quelques années à des étudiants de première année de l'enseignement universitaire scientifique (DEUG A). Elle s'inspire en partie d'une méthode utilisée par Schoenfeld [SCHOENFELD 1985]. Cette méthode structure les connaissances pour résoudre des problèmes du domaine en stratégies, tactiques, techniques et résultats connus.

La méthode propose trois ***stratégies*** :

- la *simplification* reposant sur un classement des outils,
- la *classification* reposant sur un classement des problèmes,
- des *stratégies complémentaires* (récurrence ou identification polynomiale) proposant des techniques spécifiques pour certaines classes de problèmes.

Chaque stratégie donne lieu à plusieurs *tactiques* suggérant des actions à tenter dans certaines situations. Ces tactiques s'appuient sur trois ***techniques*** principales de calcul qui sont l'intégration par parties, le changement de variable et la décomposition des fractions rationnelles. Enfin, il est essentiel de ***savoir par coeur*** les primitives d'un certain nombre de fonctions usuelles.

> Par exemple :
> dans la *stratégie de classification*, à la *classe de problèmes (tactique)* "Fractions rationnelles en sin, cos, tg", est associée une *démarche de résolution* (changement de variable t = tg x/2) et un *objectif* (pour se ramener à une fraction rationnelle). La tactique précise que, sur certains cas particuliers, on peut utiliser des changements de variable (t= tg x, t = cos x, t = sin x) qui donnent lieu à des calculs plus simples.

A partir de ce polycopié et du travail sur CAMELIA, nous avons élaboré une base de connaissances (papier[1]) organisée en quatre niveaux [CARRIERE et DELOZANNE 1990], [DELOZANNE 1992] :

- niveau 1, *les connaissances de base* (les résultats connus et les connaissances de calcul algébrique),
- niveau 2, *les connaissances opératoires*, c'est-à-dire les connaissances techniques de la méthode (intégration par parties, changement de variable, décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples),
- niveau 3, *les connaissances stratégiques propres au domaine*, c'est-à-dire les tactiques de la méthode (démarche type associées à des classes de fonctions, conditions favorables pour l'utilisation des techniques),
- niveau 4, *les connaissances générales de contrôle* de la résolution (par exemple, privilégier une démarche sûre, ne pas défaire ce que l'on vient de faire).

Connaissances de niveau 3

STRATEGIE : simplification
TACTIQUE : simplifier un produit de fonctions dissemblables par Intégration par Parties

UTILISATION1 : (objectif : se ramener à une primitive plus simple ...)

UTILISATION2 :
OBJECTIF : Retrouver la fonction de départ
PRINCIPE :
Avec des sin ou cos ou sh ou ch, on peut retrouver la fonction de départ après 2 IPP, et trouver une relation vérifiée par la primitive cherchée
JUSTIFICATION :
On joue sur le fait que sin et cos, sh, ch sont stables par 2 dérivations ou intégrations (à une constante multiplicative près)
CONTROLE
ENTREE :
CONDITIONS : produit dont un facteur est sin, cos, ch, sh
DEMARCHE : 2 IPP successives
SORTIE : une relation permettant de calculer la primitive de départ
SURETE : démarche sûre avec des sin et cos; dépend des coefficients avec des sh et ch
EXEMPLES : $\int \sin x . e^x dx$, $\int ch\, 2x . \cos x\, dx$, $\int sh\, 3x . e^x dx$, $\int ch\, 2x . sh\, x\, dx$
CONTRE-EXEMPLES : $\int sh\, x . e^x dx$, $\int ch\, x . sh\, x\, dx$
...

figure 3 : extrait de la base de connaissances

[1] Il s'agit d'une première formalisation en amont de la représentation informatique.

3.2. La réalisation de maquettes

La construction de *maquettes successives*, simulant le fonctionnement d'ELISE à partir des spécifications obtenues à l'étape précédente permet de définir des situations d'interaction pour atteindre les objectifs d'enseignement déterminés avec les didacticiens.

Le rôle de ces maquettes est très important dans la collaboration interdisciplinaire. Elles aident à une meilleure compréhension entre les informaticiens et les didacticiens en concrétisant les différents points de vue, et en leur permettant d'évoluer. Les informaticiens proposent des maquettes, les didacticiens les font fonctionner, les étudient, les discutent, proposent des idées.

En ce qui concerne la construction des scénarios d'interaction, les didacticiens dans la démarche d'"*ingénierie didactique*" [ARTIGUE 1988] sont habitués à spécifier des situations, mais pas de façon aussi détaillée que ne l'exige un cahier des charges informatique. De plus, l'utilisation pédagogique de l'informatique étant encore embryonnaire, les didacticiens ne disposent ni de la théorie ni de l'expérience pour définir a priori des scénarios d'interaction avec un logiciel. La construction de maquettes est ainsi un moyen "d'éliciter" les connaissances des didacticiens en matière d'interaction explicative.

C'est donc au concepteur informaticien de proposer de tels scénarios, les méthodologies d'ingénierie mises au point par les didacticiens servant de guide à leur conception.

3.3. L'organisation de tests auprès des utilisateurs

L'interaction entre un système informatique et un utilisateur est encore un domaine de recherche. En l'absence de théorie, *les séances de tests auprès des utilisateurs sont une nécessité dans la phase d'étude et de mise au point d'un logiciel* [COUTAZ 1991], [DIENG 1990], [PAQUETTE 1991], [ROGALSKI 1992].

En ce qui concerne le projet ELISE, la maquette qui a été testée, a été réalisée sur HyperCard. Elle a été appelée HYPER-ELISE et tourne sur Macintosh.

Pour la conception des séances de tests, le recueil des données et leur exploitation, là encore, les concepts, les méthodes et l'expérience des didacticiens ont servi de guide, en particulier les conseils de "vigilance indispensable à garder pour ne pas oublier de relativiser les résultats compte tenu des conditions de production (des données) [ROBERT 1992]". Sur ce terrain à nouveau, la Didactique apporte un questionnement et un savoir-faire fructueux pour l'EIAO.

Pour le projet ELISE, ces séances avaient pour objectifs :
• d'analyser le fonctionnement des étudiants dans les situations,
• de mettre au point les aides et explications,
• de corriger les défauts flagrants,
• de pointer les distorsions, les difficultés rencontrées par les utilisateurs,
• d'étudier et définir les paramétrages à prévoir.

Il s'agit donc d'une étude qualitative de l'interaction, pas d'études statistiques de l'influence du logiciel sur les performances des utilisateurs. Ces tests sont considérés comme une *évaluation formative* du logiciel et non comme une évaluation finale d'un produit. Les tests ont été organisés auprès des utilisateurs finaux d'ELISE que sont les étudiants et auprès des responsables du contexte d'utilisation que sont les enseignants. Nous présentons ici la conception des séances de tests, le recueil des données et leur exploitation. Les résultats sont exposés lors de la présentation des situations au paragraphe 4.

3.3.1 Les contextes de l'expérimentation

Etant donné l'objectif du projet qui consiste à *spécifier un outil s'insérant dans un dispositif d'enseignement*, il nous semble important de tester le logiciel dans de réels contextes d'enseignement. L'expérimentation a été organisée, pendant les horaires usuels d'enseignement, sur 30 étudiants de DEUG A1 de deux universités différentes à Lille et au Mans pour varier les contextes d'utilisation.

Les distinctions les plus significatives entre ces deux séances de tests portent sur l'enseignement préalable et le contrat de classe lors de ces tests.

Dans les deux cas, la maquette HYPER-ELISE a été testée après un cours :
- à Lille, le cours dispensé par Marc Rogalski se situe dans le cadre d'un enseignement explicite de méthodes et le polycopié qui a servi de base à la conception d'ELISE a été distribué aux étudiants une semaine auparavant ;
- au Mans, un polycopié sur le calcul de primitives a été distribué aux étudiants la veille de l'expérimentation ; le cours, suivi de sept heures de TD, portait sur les techniques et ne comprenait pas d'enseignement de méthodes.

Les différences de contrat ont masqué en grande partie les différences portant sur le type d'enseignement précédent l'utilisation d'HYPER-ELISE :
- à Lille, les étudiants pensaient faire une séance ordinaire de TP de mathématiques sur ordinateur : ils ont peu exploré, peu posé de questions, ont donné l'impression de vouloir résoudre les exercices proposés et, pour certains, apprendre à partir de leurs résolutions ;
- au Mans, les étudiants ont accepté de se rendre exceptionnellement en salle d'informatique pendant un TD de mathématiques pour tester un logiciel : ils ont exploré, débogué, critiqué, donné leur avis, mais se sont (dans l'ensemble) peu engagés dans la résolution des exercices.

Pour cette raison quand nous nous intéressons au fonctionnement mathématique des étudiants sur les situations, nous nous appuyons surtout sur l'analyse des résultats des groupes de Lille.

3.3.2 Le recueil et l'analyse des données

Pour réaliser ces tests, nous avons retenus plusieurs capteurs d'informations.

a) mémorisation des actions des étudiants à l'interface

La maquette contient un "*mouchard*" qui garde la trace des actions des étudiants sur le logiciel. Cette trace permet de rejouer les sessions et donne des indications sur le temps passé entre deux actions. En analysant ces traces, on obtient donc les *scénarios d'utilisation du logiciel* par les différents groupes. L'analyse des traces est faite en partie automatiquement (élagage et reformulation en langage clair[1], calcul des temps passés sur chaque situation).

Par contre, les intentions des étudiants sont parfois difficiles ou impossibles à déterminer ou même à deviner en étudiant la seule trace. En particulier, on peut constater qu'ils ont rencontrés une difficulté, mais on ne comprend pas toujours laquelle. C'est un problème bien connu de toutes les personnes qui essayent de comprendre le comportement de l'utilisateur à partir d'une trace de ses actions([PY 1991], [BALACHEFF 1991]). D'autres sources d'informations sont donc nécessaires.

---

[1] Enfin presque !

b) questionnaire

Un *questionnaire* rempli par les étudiants en fin de séance contient des questions ouvertes et fermées. Ce questionnaire comporte deux parties :

- la première concerne l'utilisation du logiciel ; les questions portent sur l'ergonomie, le contenu mathématique, la comparaison avec d'autres moyens d'enseignement (livre d'exercices, séance de travaux dirigés, leçon particulière), les points forts et points faibles du logiciel,
- la deuxième partie demande à l'étudiant des renseignements plus personnels concernant l'enseignement préalable sur le domaine, ou son degré de familiarisation avec l'informatique.

Les questionnaires sont un moyen d'obtenir des informations sur l'avis général des utilisateurs concernant le logiciel et son utilisation. C'est un moyen économique (ils sont faciles et rapides à dépouiller) pour établir des *comparaisons entre les groupes*, en particulier par l'intermédiaire des réponses aux questions fermées. Les questions ouvertes apportent des informations plus précises, mais les réponses sont parfois lapidaires ou difficiles à interpréter.

c) enregistrement audio

Les étudiants ont été placés *par groupe de deux* afin de pouvoir *enregistrer leurs réactions verbales sur cassette audio* [1]. Au niveau du décryptage des cassettes, nous avons rencontré une difficulté [2] : souvent, on ne peut pas distinguer les voix des intervenants. Nous ne pouvons donc mettre en évidence les tours de parole, et, dans l'analyse des corpus, nous considérons les deux étudiants comme un binôme. Cet inconvénient pourrait être évité en enregistrant un groupe mixte.

Ces enregistrements donnent une idée plus précise sur les réactions des étudiants aux explications et aux différents types d'interaction (et même au questionnaire). *Ils permettent de mieux comprendre les parcours des étudiants, les difficultés qu'ils ont rencontrées et même leur façon d'utiliser le logiciel.*

Nous avons enregistré deux groupes d'étudiants à Lille. Nous regrettons a posteriori de ne pas en avoir enregistré davantage, spécialement pour l'étude de l'impact des explications. Ceci aurait cependant posé d'autres problèmes : décrypter une cassette et analyser les enregistrements sont des activités extrêmement coûteuses en temps. De plus la grille d'analyse des enregistrements est extrêmement difficile à mettre au point ([ROBERT 1992], [CAUZINILLE et MELOT 1992]). Après des essais infructueux de codage, nous nous sommes intéressées, dans les corpus, aux difficultés rencontrées par les étudiants, à leurs demandes d'explication, aux réactions aux explications imposées, et à tout ce qui avant ou après permet de proposer une (ou plusieurs) interprétation(s) du fonctionnement des étudiants qui colle avec les difficultés rencontrées ou avec les réactions étudiées. C'est un exercice qui sort de la compétence des informaticiens pour l'étude du fonctionnement mathématique, mais qui demande de la part des didacticiens une excellente connaissance du logiciel et des problèmes de communication homme/machine. Ce travail nécessite de plus des discussions pour valider les interprétations proposées. Il est donc nécessairement pluridisciplinaire.

d) post-test

Un post-test sur des exercices comparables a permis d'évaluer le niveau des étudiants et d'étudier leurs difficultés éventuelles. Ces post-tests ne sont pas conçus pour

---

[1] Par ailleurs, le travail par groupe de deux, ce fonctionnement, habituel dans les séances de travaux pratiques, paraît être un facteur de discussion, de confrontation des savoirs et donc favorise l'apprentissage.

[2] Cette difficulté est également mentionnée par Isabelle Tenaud [TENAUD 1991]

discerner l'influence du travail avec la maquette sur les performances des étudiants. Rappelons que les tests ont pour objectif la conception du logiciel, pas son évaluation.

e) observateurs

Des observateurs ont assisté aux séances. On sait que le rôle des observateurs peut être déterminant sur le résultat des tests. Dans les expérimentations que nous avons menées, leur rôle a varié selon le contrat passé avec les étudiants. Ils ont été très sollicités au Mans pour recueillir l'avis des étudiants qui testaient le logiciel et très peu à Lille où les étudiants travaillaient sur un TP de Math.

f) grilles d'analyse

Deux grilles d'analyse ont été adoptées pour étudier les résultats, une grille longitudinale qui consiste à suivre chacun des groupes d'étudiants, et une grille transversale qui consiste à comparer les différents groupes. Pour chacune des deux grilles, les informations provenant de l'analyse du mouchard (M) sont complétées par des informations provenant de l'enregistrement audio (K7), du questionnaire (Q), de l'observation (O) ou du post-test (T).

3.3.3. Tests auprès des enseignants

Les objectifs de ces tests étaient :
- d'observer éventuellement des phénomènes de rejet d'une méthode élaborée par un autre et de les étudier,
- de recueillir des avis, d'effectuer les corrections et mises au point en prenant l'avis d'un autre groupe d'utilisateurs,
- d'étudier les possibilités d'utilisation réelle dans l'enseignement

La maquette a été diffusée auprès d'une vingtaine d'enseignants du premier cycle universitaire, en joignant un document présentant le projet, un mode d'emploi et d'installation de la maquette ainsi qu'un questionnaire voisin de celui adressé aux étudiants. Huit réponses nous sont parvenues. Une des réponses contient un "journal de bord" qui a été rédigé spontanément et donne des indications précieuses sur les difficultés rencontrées et les réactions de cette enseignante-didacticienne aux explications affichées.

3.4. Répartition des rôles

Le dépouillement des résultats des tests a été effectué par les informaticiens qui en ont proposé une analyse. Cette analyse a été ensuite discutée et reprise avec les didacticiens.

Pour résumer, dans cette collaboration interdisciplinaire, le rôle des didacticiens consiste à fournir l'analyse cognitive du domaine, les objectifs d'enseignement, des méthodes et une expérience pour l'organisation et l'analyse des tests et enfin un questionnement sur la pertinence des situations proposées, conçues, réalisées et analysées par les informaticiens.

4. Les situations d'interaction

Les analyses préalables ont conduit à faire des choix concernant le type de logiciel et le mode de communication (Cf. [DELOZANNE 1992]). En résumé, les options suivantes ont été retenues :
- ELISE est un environnement d'apprentissage où les étudiants, *par groupe de deux ont une assez grande autonomie de travail et l'initiative de l'interaction* ; ce n'est pas un tuteur qui décide de ce que l'étudiant doit faire ou ne pas faire, mais un outil aux mains des étudiants ; *le logiciel offre des fonctionnalités aux*

étudiants qui choisissent de les utiliser ou de ne pas les utiliser;

- son utilisation est associée à tout un contexte d'enseignement ; pour s'assurer des prérequis nécessaires, il doit être utilisé après un cours, après avoir travaillé en TD pour acquérir les habiletés techniques, et après avoir étudié un minimum le polycopié ; ce n'est donc pas un kit d'autoformation, mais *un outil complémentaire qui apporte un plus par rapport à l'enseignement usuel*; ;
- une part du travail avec ELISE se fait oralement avec le co-apprenant ou sur papier et ceci sans aucun contrôle du système ;
- sur les exercices, les *étudiants ont la charge du contrôle de la résolution* et le *logiciel celui des calculs* ;
- le mode de communication consiste pour les étudiants à faire des *choix dans des menus* ; ELISE affiche du texte en langue naturelle, du texte mathématique, des graphiques et des menus.

Nous avons distingué trois situations d'interaction : résolution en mode plan, résolution en mode pas-à-pas, et une vue générale sur les solutions "raisonnables" (c'est-à-dire qui correspondent à des tactiques de la méthode). Les deux premières situations proposent des *modes de résolution* de l'exercice ; la troisième propose un *bilan* sur l'exercice. C'est l'interaction avec ces trois situations sur plusieurs exercices qui fait entrer les étudiants dans un processus explicatif où ils ont un rôle actif.

Les paragraphes qui suivent décrivent les trois situations en donnant une présentation puis des observations suscitées chez les utilisateurs et les concepteurs, et enfin les spécifications que nous retenons pour le système ELISE.

4.1. Le mode Plan

a) présentation

Les *objectifs* sont ici d'inciter les étudiants à anticiper, à mettre en œuvre la méthode. La *tâche* proposée aux étudiants est d'établir un plan de résolution. Dans le langage proposé, un plan est une séquence de techniques.

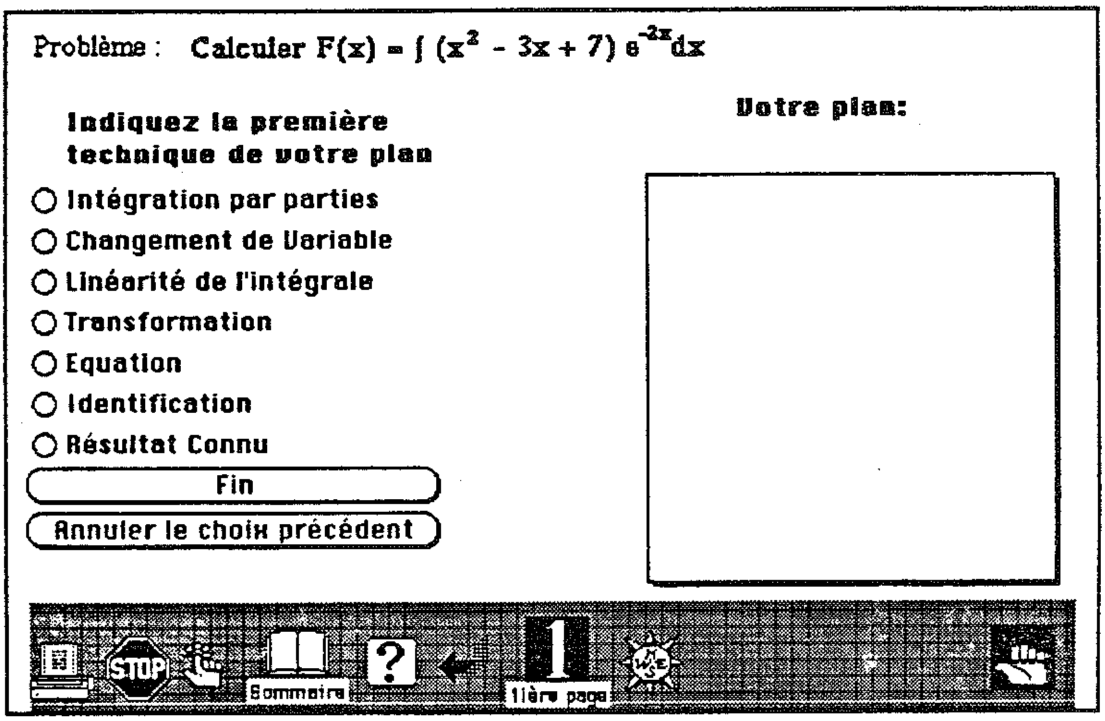


figure 4 : Résolution en mode plan

Pour effectuer la tâche les étudiants peuvent employer les *stratégies* suivantes :
- mettre en œuvre une des tactiques de la méthode, *anticiper* et traduire la tactique dans le langage ELISE,
- résoudre l'exercice sur papier et *résumer* leur résolution dans le langage proposé.

Les *actions des étudiants* sur le logiciel consistent à choisir les techniques dans l'ordre où elles doivent être appliquées pour résoudre l'exercice. Ils peuvent également demander de l'aide.

Les *réactions* du système consistent :
- à proposer, en cas de demande, une aide mathématique,
- à afficher, à chaque choix des étudiants, le numéro de l'étape et le nom de la technique choisie dans le tableau intitulé : votre plan,
- à évaluer le choix des étudiants (sommairement),
- à éditer un commentaire sur la tactique envisagée.

L'aide mathématique (ou *"coups de pouce"*) est conçue pour répondre à la question "comment démarrer ?". L'objectif n'est pas de donner la solution mais d'amener les étudiants à un questionnement.

En cas de "mauvais" plan le commentaire est laconique : les étudiants sont invités à le corriger eux-mêmes en passant au mode pas-à-pas. En cas de succès, le commentaire donne le "principe" du plan : l'objectif est de conforter la tactique mise en jeu par les étudiants, d'en donner une formulation dans les termes du savoir de référence (fig. 5).

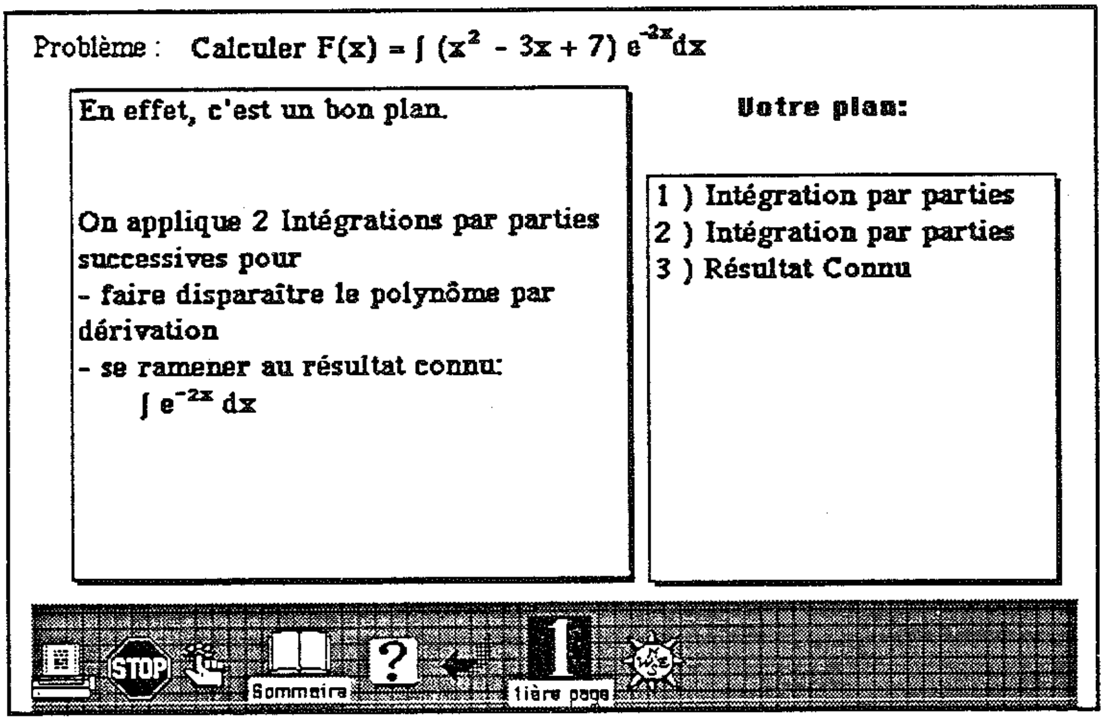


figure 5 : exemple de commentaires associés à un bon plan

b) observations

Cette situation offre un mode de résolution inhabituel en papier crayon et qui oblige à prendre du recul par rapport à l'application des techniques. Pendant les séances de tests, elle a été bien acceptée par les étudiants qui avaient une maîtrise suffisante des techniques, et rejetée ou inutilisée par les étudiants dont le niveau était insuffisant. Elle a été utilisée par les étudiants de deux façons : pour résoudre l'exercice dans les grandes lignes en anticipant, ou bien pour résumer et avoir la correction après une résolution papier. Elle suscite un questionnement chez les étudiants qui l'ont utilisée. Elle semble donc *intéressante par rapport aux objectifs d'enseignement.*

Les "coups de pouce" n'ont jamais été utilisés, soit parce que les étudiants n'ont pas repéré cette fonctionnalité, soit qu'ils n'ont pas ressenti la nécessité de l'utiliser. En effet la situation permet de mettre en œuvre facilement une stratégie essais-erreurs en passant en mode pas-à-pas. Si, en fonction des objectifs d'enseignement, on estime intéressant que les étudiants consultent les coups de pouce, *il faut les inciter à les demander en modifiant la situation.*

Les difficultés rencontrées concernent le vocabulaire et l'expression des plans (Cf. [DELOZANNE 1992] pour une analyse détaillée). Les améliorations à apporter portent sur trois points :

- accepter des plans partiels,
- favoriser les allers retours entre le mode de résolution pas-à-pas et le mode plan,
- proposer des coups de pouce méthodiques en cas d'erreur.

c) spécifications pour ELISE

La situation de résolution en mode plan nécessite des connaissances complexes et peu fréquemment représentées dans les systèmes experts,

- *capacités de résolution* :
  - anticiper la forme du résultat en utilisant des connaissances sur les outils et sur les objets manipulés,
  - choisir entre les tactiques applicables avec des critères de choix explicites (et proches des critères humains),
- *capacités d'explication* :
  - synthétiser un raisonnement pour n'en retenir que les étapes importantes (synthétiser),
  - évaluer le choix d'une tactique (commenter),
  - présenter les raisons qui guident cette évaluation (justifier par les traits caractéristiques de la classe de problèmes),
  - donner la raison ou le principe de la démarche associée à la tactique (justifier par les propriétés des outils et des objets manipulés),
  - donner des indices qui permettent aux humains de penser au(x) bon(s) choix et au système de les évoquer (coup de pouce).

4.2. Le mode Pas-à-pas

a) présentation

Les *objectifs* sont ici d'inciter à des choix raisonnés et de donner une correction de l'exercice. La *tâche à accomplir* est de choisir la technique applicable au problème courant (déterminer le prochain pas de résolution).

Pour effectuer la tâche les étudiants peuvent utiliser les *stratégies* suivantes :

- mettre en œuvre une des tactiques de la méthode, anticiper (raisonnement global) ;
- penser à une technique (vérification de ses conditions d'application) et
  - vouloir l'appliquer (voir ce que ça donne, raisonnement local) ;
  - vouloir un commentaire du système sur leur choix (évaluation de son intérêt, ou confirmation de l'évaluation de l'étudiant) ;
- poursuivre l'application d'une tactique qu'ils ont commencé à mettre en œuvre à une étape précédente (raisonnement global) ;
- résoudre l'exercice sur papier et vérifier leur résolution dans le langage proposé (correction) ;
- tester un plan refusé par le système pour obtenir des commentaires sur chacune

des étapes (correction) ;
• essayer au hasard (par jeu, par incompétence ou par indifférence).

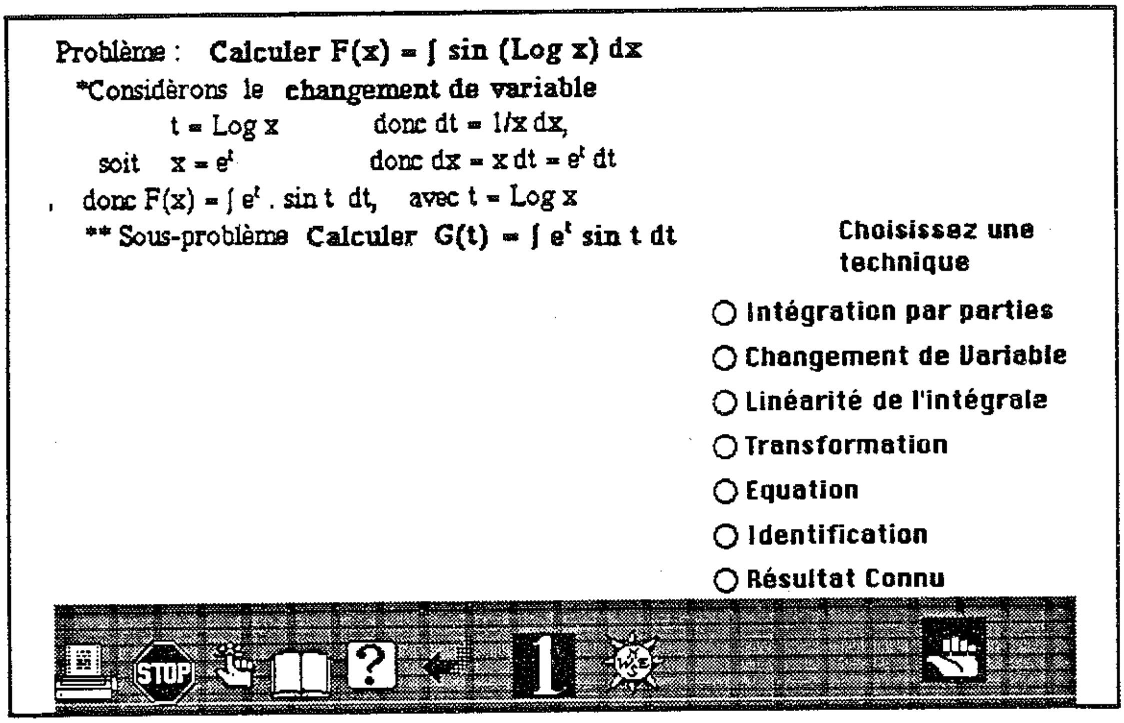


figure 6 : mode de résolution pas-à-pas (choix d'une technique)

Les *actions des étudiants* consistent à choisir la technique retenue, ou, éventuellement, à demander de l'aide (de même type que pour le mode plan). Les *réactions du système* sont :

- proposer un coup de pouce en cas de demande,
- évaluer la réponse des étudiants,
- éditer un commentaire (sur demande),
- appliquer le choix (s'il est applicable) pour passer à l'étape suivante, ou demander un choix complémentaire.

Les commentaires portant sur un bon choix de techniques présentent la tactique de la méthode qui recommande ce choix (Cf. annexe 1). Les commentaires portant sur un mauvais choix sont en général laconiques (par exemple : "Ne s'applique pas ici"); quelques fois, ils interprètent l'erreur et la mettent en évidence.

b) observations

C'est le mode de résolution qui a été le plus utilisé. Il est apprécié des étudiants pour son rôle de correcteur. Il est proche du papier crayon avec le gros avantage que le logiciel fait les calculs permettant ainsi d'étudier de nombreuses tactiques en peu de temps. On constate que, dans l'utilisation qui en a été faite, le choix raisonné l'emporte de loin sur les essais-erreurs.

Comme pour le mode plan, il n'y a eu aucune demande de coup de pouce et assez peu de demandes de commentaires sur le choix. Plusieurs raisons expliquent ce peu d'intérêt pour les commentaires, la principale semble de l'ordre de l'interaction : l'enjeu de la situation est de trouver la (ou une) solution. *C'est, pour l'étudiant, le succès d'une démarche qui la justifie. Demander une justification d'un autre niveau* (liée à la méthode, c'est-à-dire se rapportant à un classement des fonctions ou des outils) *est une exigence qui n'est pas du tout naturelle et constitue un changement dans le contrat habituel de résolution.*

Les améliorations à apporter sont :
- inciter à revenir au mode plan après un bon début de résolution ;
- proposer des coups de pouce méthodiques en cas de mauvais choix à la place de commentaires négatifs parfois "hasardeux[1]" ;
- modifier le contrat de résolution

1/ en annonçant explicitement les objectifs d'ELISE sur le premier écran et sur le mode d'emploi : entraîner à la méthode ; travailler sur un exercice avec ELISE n'est pas seulement trouver des solutions, mais aussi faire des choix raisonnés et s'entraîner à une méthode,

2/ en faisant formuler certains commentaires par les étudiants, les commentaires du système ayant alors un rôle de correcteur ou de base de discussion avec le co-apprenant,

3/ en présentant le principe de la tactique suivie à la fin d'une résolution et non seulement le corrigé-type.

c) spécifications pour ELISE

La situation de résolution pas-à-pas repose sur les capacités de résolution et d'explication "classiques " dans les systèmes explicatifs,
- capacités de résolution :
  - appliquer un outil à un problème pour le transformer en un (ou des) problème équivalent,
  - choisir parmi les outils applicables avec des critères de choix explicites (et proches des critères humains),
- capacités d'explication :
  - présenter une étape de la solution (exposer),
  - évaluer le choix de chacun des outils (commenter),
  - présenter les raisons qui guident cette évaluation (justifier),
  - donner des indices qui permettent aux humains de penser au(x) bon(s) choix et au système de les évoquer (coup de pouce) (cette dernière capacité n'étant pas vraiment classique).

4.3. Vue générale des solutions

a) présentation

Les *objectifs* ici sont :
- inciter à faire un bilan,
- prendre du recul par rapport à l'action,
- enrichir la panoplie de tactiques des étudiants,
- faire prendre conscience des choix effectués,
- permettre des comparaisons.

---

[1] Dans ce cas, l'interprétation par le concepteur de l'intention de l'utilisateur n'est pas toujours pertinente. En IA, les explications négatives (réponses à des questions Pourquoi Pas?) constituent un problème particulièrement difficile ([SAFAR 1987], [JIMENEZ 1990])

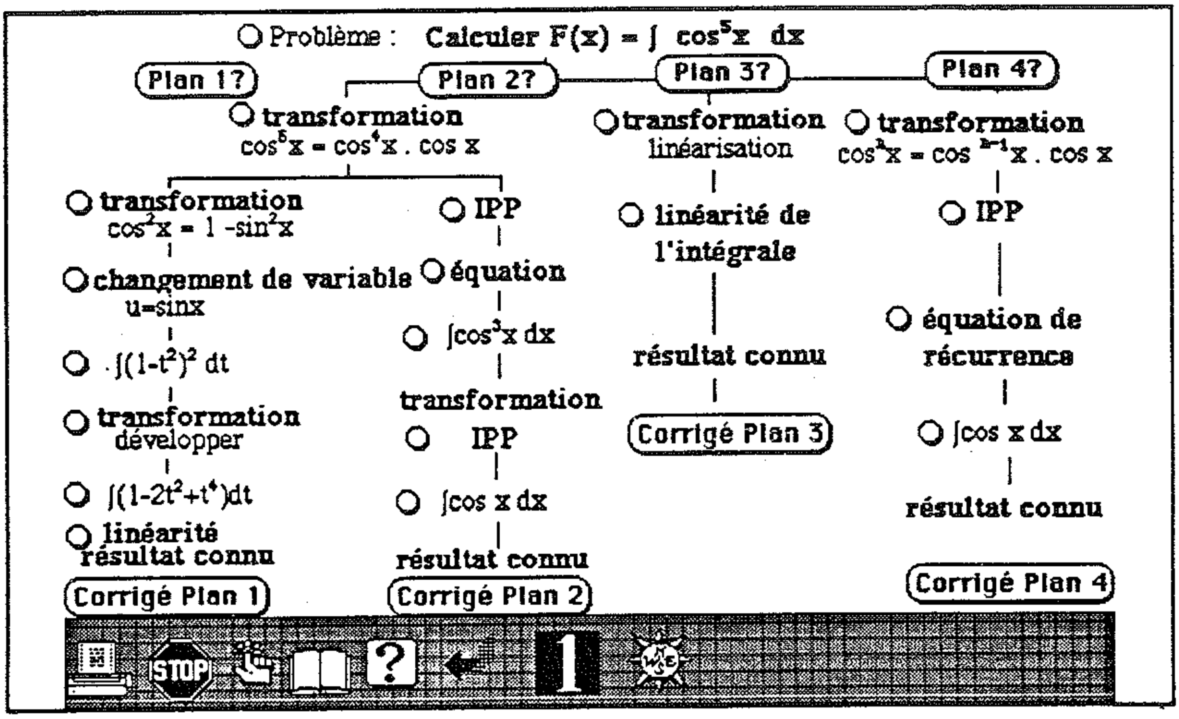


figure 7 : vue générale des solutions

Les *données* consistent en un arbre présentant un résumé des différentes solutions "raisonnables". La *tâche à accomplir* est intellectuelle et implicite : c'est une tâche de réflexion. Les *actions* des étudiants sur le logiciel consistent en des demandes d'explications :

- demander des commentaires pour chacune des tactiques conduisant à une solution,
- demander un corrigé-type pour chacune de ces tactiques,
- demander des détails sur les résolutions en revenant au mode pas-à-pas sur une étape quelconque.

b) observations

Cette situation a été appréciée par les étudiants et par les enseignants. Elle est originale par rapport à l'enseignement usuel et intéressante par rapport aux objectifs d'enseignement. Les explications demandées concernent à une écrasante majorité chez les étudiants, les corrigés types et, chez les enseignants, les commentaires sur la tactique mise en œuvre.

Les améliorations à apporter visent d'une part la présentation de certains écrans (très chargés), et, d'autre part, dans l'optique de la modification du contrat de résolution (§ 4.2.b) donner dans un premier temps le principe du plan comme correction de ce plan, le corrigé type n'étant accessible que dans un deuxième temps.

c) spécifications pour ELISE

La situation *vue générale* nécessite les mêmes connaissances que le mode plan, mais une *capacité de résolution* supplémentaire : obtenir sur un même exercice plusieurs solutions raisonnables (i.e. obtenues par application de la méthode).

4.4. Scénarios d'utilisation et réactions générales

Les étudiants ont utilisé des scénarios très divers. Par exemple :

1) proposer un plan,
2) étudier le commentaire (en cas de réussite) ou le vérifier pas-à-pas (en cas d'échec),
3) étudier la vue générale sur les solutions,
4) étudier les corrigés types sur toutes les tactiques envisageables.

ou bien

- essayer un plan sur le premier exercice
- sur tous les autres

1) une solution pas-à-pas,
2) étudier vue générale
3) étudier des solutions différentes en pas-à-pas

Comme souvent dans ce genre d'expérience, les réactions des étudiants sont très favorables (pour une analyse plus détaillée, voir [DELOZANNE 1992]. Les points faibles signalés sont le nombre trop faible d'exercices et des problèmes de vocabulaire et d'expression. Les points forts du logiciel sont :

- le caractère "agréable" du travail sur le logiciel,
- la qualité des explications qu'il fournit,
- la clarté et le fait de présenter plusieurs solutions,
- le fait de pouvoir aborder un exercice de plusieurs façons et de donner des méthodes (à Lille seulement).

Quant aux enseignants, aucun ne rejette la méthode de référence qui est assez classique. Les enseignants souhaiteraient pouvoir utiliser HYPER-ELISE à condition qu'il soit développé et à condition que les étudiants puissent disposer du matériel informatique adéquat, ce qui semble rarement être le cas.

5. Bilan sur les explications

Les tests semblent valider l'hypothèse de considérer *l'explication en EIAO comme un processus explicatif défini par les situations d'interaction.* Les étudiants dans le questionnaire, ont massivement écrit qu'ils ont apprécié les "explications" de la maquette HYPER-ELISE. Pourtant ils ont semble-t-il peu regardé les messages explicatifs mis à leur disposition. On peut ainsi considérer que c'est bien l'ensemble de l'interaction qui est explicative, et non pas le seul contenu des messages explicatifs ponctuels. Enfin, *si l'on veut qu'un message soit considéré par l'usager, il faut que son contenu soit un enjeu de l'interaction.* Dans le cas contraire, le message risque fort de ne pas être pris en considération par l'usager.

Les paragraphes précédents ont décrit les situations d'interaction dans lesquelles interviennent les interventions explicatives, nous présentons dans les paragraphes suivants les résultats obtenus concernant les messages explicatifs.

5.1. Types d'explications

Dans les maquettes, le concepteur a écrit au clavier toutes les résolutions et les messages explicatifs en s'inspirant "au maximum" du polycopié de référence. Différents *modes explicatifs*, liés aux objectifs d'enseignement ont été mis en évidence : *exposer une solution, commenter des choix, justifier des choix, évaluer des démarches, commenter des démarches, justifier des démarches, synthétiser un raisonnement, donner des indices pour démarrer.* Puis l'analyse de chaque message explicatif affiché a permis de déterminer et de typer la *nature des informations* qui le constituent. Ensuite, un retour sur la base de connaissances papier a été nécessaire pour typer ses éléments de la même façon, pour s'assurer que les informations affichées y sont présentes et éventuellement compléter.

sur le sous-problème $\int e^t \sin t\, dt$, en mode pas-à-pas, sur le choix de l'intégration par parties le commentaire peut être	
le message	*type de l'information*
"sur cette classe de fonctions en appliquant 2 fois l'intégration par parties on peut espérer retrouver la fonction de départ"	stratégie ou nature de la tactique plan associé à la tactique degré de certitude objectif
"on joue sur le fait que sin et exponentielle sont stables par deux dérivations et intégrations en appliquant 2 fois l'intégration par parties on peut espérer retrouver la fonction de départ "	principe de la tactique plan associé à la tactique degré de certitude objectif

figure 8 : contenus possibles des messages explicatifs

5.2. Formulation du message explicatif

On peut ainsi formuler les messages explicatifs (du type de ceux de la figure 8) de la même façon que ce qui a été implémenté pour CAMELIA, à partir :

- des informations sur la résolution (provenant de l'arbre de résolution),
- des caractéristiques du message souhaité correspondant aux attributs des objets de la base de connaissances,
- des valeurs des attributs de la base de connaissances.

Les mêmes informations peuvent être formulées différemment et seront peut-être perçues différemment. Nous ne nous sommes pas préoccupés de ce problème en nous contentant de définir des schémas de formulation pour chacun des types de messages répertoriés.

5.3. Choix du message explicatif

Enfin, pour chacune des situations, nous avons défini des *contextes d'explication* caractérisés par :

- des informations sur l'étape de résolution (mode de résolution, profondeur de l'étape, type du sous-problème),
- le type du choix (bon, mauvais, bof [1])
- des informations sur le comportement des étudiants (parcours du logiciel déjà effectué...).

[1] Un "bof choix" correspond à une technique localement applicable mais un ou plusieurs autres choix sont préconisés par la méthode.

A partir des différentes formulations envisagées, nous avons essayé de définir des *stratégies d'explication* permettant de choisir parmi ces messages. Mais nous n'avons pas toujours su trouver des critères de choix (annexe 2).

Nous avons également étudié très attentivement les deux protocoles d'interaction enregistrés sur cassette audio pour essayer d'analyser les demandes d'explication et les effets des messages explicatifs sur les étudiants. Sur chacun des deux enregistrements nous ne disposions que d'une seule demande d'explication de la part des étudiants (les autres sont à l'initiative du système). Dans ces deux cas, les demandes surviennent à la suite d'une difficulté rencontrée par les étudiants et, les étudiants trouvent dans le commentaire standard les informations qui leur permettent de surmonter leur difficulté. La compréhension automatique de ces difficultés nous semble hors de portée actuellement et pour plusieurs raisons :

- une étude attentive de l'enregistrement audio sur les minutes qui précèdent et qui suivent la question permet de comprendre la difficulté rencontrée ce que ne permet pas l'analyse de la seule trace des interactions obtenues à l'aide du mouchard ;
- si les didacticiens proposent des méthodes d'analyse de corpus, on ne dispose cependant pas d'expertise de diagnostic.

Ainsi, cette question du choix du message et des stratégies d'explication reste très ouverte.

5.4. Perspectives

Il serait souhaitable de faire une nouvelle expérimentation centrée sur les messages explicatifs. Plusieurs variantes expérimentales peuvent être envisagées (en particulier demander aux étudiants de formuler eux-mêmes les justifications), les objectifs de recherche étant :

- de recueillir des corpus plus nombreux pour analyser l'effet (à court terme) des explications sur les étudiants,
- d'essayer de cerner les principales préoccupations au moment où est donnée l'explication (mettre en évidence des questions standard dans certains contextes),
- d'étudier les auto-explications des étudiants pour tenter de dégager des profils d'utilisateurs
- définir des stratégies d'explication et des conditions d'application, en particulier enrichir les schémas explicatifs pour choisir quand donner l'explication ou quand proposer un changement de situations (étude d'un autre exercice ou passer en mode plan...)..

6. Conclusion

Ce texte présente le travail pluridisciplinaire entamé pour la conception d'Elise. Nous avons mis l'accent sur les apports de chaque discipline au sein de ce projet.

Les tests ont montré que les situations d'interaction mises au point étaient pertinentes par rapport aux objectifs d'enseignement. Le premier apport de ce travail est ainsi d'avoir entièrement spécifié un logiciel utilisable dans un réel contexte d'enseignement.

Au niveau de la base de connaissances du résolveur de problèmes, nous devons acquérir des connaissances complexes auprès d'experts. Nous avons mené un travail primordial d'élicitation des connaissances, mais la mise en œuvre informatique de la méthode reste à réaliser et nous n'en minimisons pas la difficulté [CARRIERE et DELOZANNE 1990]. Au niveau des explications, nous avons mené une analyse des besoins des utilisateurs en travaillant sur des corpus recueillis dans le cadre d'une interaction homme-machine.

Les situations d'interaction mises au point pour le projet ELISE sont spécifiques au champ de connaissances, mais la notion de situation d'interaction liée à la tâche et aux objectifs respectifs du système et de l'utilisateur nous semble un cadre assez général pour mettre au point une interaction homme/machine pertinente en EIAO.

Enfin la méthodologie de conception adoptée reposant sur l'élaboration de maquettes et sur l'analyse de tests auprès d'utilisateurs, nous semble intéressante, d'une part comme outil de collaboration pluridisciplinaire, et d'autre part pour créer des systèmes d'EIAO utilisables dans des contextes d'enseignement réels.

Références

[ARTIGUE 1988] ARTIGUE M., *Ingénierie didactique*, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 9, n°2, p. 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1988.

[AUSSENAC 1989] AUSSENAC N. , *Conception d'une méthodologie et d'un outil d'acquisition de connaissances expertes*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, Oct. 1989.

[BALACHEFF 1990a] BALACHEFF N., *Problèmes de la construction d'une explication : aspects conceptuels et langagiers*, Revue d'Intelligence Artificielle, Revue d'Intelligence Artificielle, vol 4, n°2/1990, édition Hermès p. 149-160.

[BALACHEFF 1990b] BALACHEFF N., *Nature et objet du raisonnement explicatif*, Actes du colloque : L'explication dans l'enseignement et l'EIAO, éditions Paris Onze, 1991, p 97-127.

[BALACHEFF 1991] BALACHEFF N., *Contribution de la didactique et de l'épistémologie aux recherches en EIAO*, Actes des XIII^e Journées Francophones sur l'Informatique, 1991, Grenoble, IMAG p. 1-37.

[BARON 1982] BARON M., *Un système pour exprimer et mettre en oeuvre des connaissances en manipulation formelle d'expressions*, Thèse de 3ème cycle, Paris 6, Décembre 1982.

[BOURI et al 1990] BOURI M., DIENG R., KASSEL G., SAFAR B., *Vers des systèmes experts plus explicatifs*, Actes des 3 èmes journées nationales du PRC IA, Hermès, PARIS 1990, 340-355.

[BRUILLARD 1991b] BRUILLARD E., *EIAO et Mathématiques : une vision hypertexte des environnements d'apprentissage*, Thèse de l'Université du Maine, 1991.

[CARRIERE 1988] CARRIERE E., *Contribution à l'explication du raisonnement dans le système expert CAMELIA*, Rapport de DEA IARFARG, Université Paris 6, 1988.

[CARRIERE et DELOZANNE 1989] CARRIERE E., DELOZANNE E., *Niveaux de connaissances et phases d'apprentissage dans un tuteur intelligent*, Colloque d'Intelligence sur la Métaconnaissance, Le Mans, Septembre 1989, Cahier du Laforia n°77, p. 241-256.

[CARRIERE et al 1990] CARRIERE E., DELOZANNE E., VIVET M., *Des connaissances pour produire des explications dans un Tuteur Intelligent*, Revue d'Intelligence Artificielle, vol 4, n°2/1990, édition Hermès, p.113-124.

[CARRIERE et DELOZANNE 1991a] CARRIERE E., DELOZANNE E., *Modélisation des connaissances dans ELISE: tenir compte des objectifs d'enseignement*, Actes des Journées EIAO, PRC-IA, Editions de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1991, p. 105-120.

[CAUZINILLE 1991] CAUZINILLE-MARMECHE E., *Explications, guidages cognitifs et méta-cognitifs*, Actes du colloque : L'explication dans l'enseignement et l'EIAO, éditions Paris Onze, 1991, p. 69-94.

[CAUZINILLE et MELOT1992] CAUZINILLE-MARMECHE E., MELOT A.-M., *Explications et apprentissage : l'analyse d'un dialogue tutoriel*, Actes des Deuxièmes Journées Explication du PRC-GDR-IA du CNRS, Sophia-Antipolis, juin 1992, p. 43-64.

[CHEVALLIER 1992] CHEVALLIER R., *Studia : mise en oeuvre d'un modèle dynamique de dialogue dans un Tuteur Intelligent*, Thèse de l'Université du Maine, Janvier 1992.

[CI2U 1990] Commission Inter-Irem Université, rédacteurs : ARTIGUE M., AUTHIER H., BESSOT D., DELALE A., GERMAIN G., JARRAUD P., LANIER D., LE GOFF J.P., LEGRAND M., ROBERT A., ROBINET J., ROGALSKI M., SACRE C., *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, bulletin Inter-Irem, 1990, 323 p.

[CLANCEY 1983] CLANCEY W.J., *The epistemology of a ruled-based expert system : a framework for explanation*, Artificial Intelligence, vol 20, 1983 p. 215-251.

[COUTAZ 1991] COUTAZ J., *Interfaces Homme-Machine un regard critique*, TSI, vol. 10, n°1, 1991.

[DELOZANNE 1988] DELOZANNE E., *Des Outils d'explication en temps différé pour le système AMALIA*, Rapport de DEA IARFAG, Université Paris 6, 1988.

[DELOZANNE et CARRIERE 1989] DELOZANNE E.,CARRIERE E., *Niveaux de connaissances dans un tuteur intelligent*, Actes des Journées EIAO, PRC-IA , Cachan, Décembre 1989, p. 89-98.

[DELOZANNE et CARRIERE 1992] DELOZANNE E., CARRIERE E., *Définir un processus explicatif, une étude de cas : la conception d'ELISE*, Actes des Deuxièmes Journées Explications du PRC-IA du CNRS, Sophia-Antipolis, Juin 1992, p. 185-208.

[DELOZANNE 1992] DELOZANNE E., Explications en EIAO Etude à partir d'ELISE, un logiciel pour s'entraîner à une méthode de calcul de primitives, Thèse de l'Université du Maine, Janvier 1992.

[DIENG 1990] DIENG R., *Méthodes et outils d'acquisition des connaissances*, ERGO-IA '90, Biarritz.

[EIAO 1989] BARON M., NICAUD J.-F., Actes des premières journées EIAO de Cachan, Rapport du LAFORIA n° 31/90, Institut Blaise Pascal des universités Paris VI, Paris VII et CNRS, 340 p.

[EIAO 1991] BARON M., GRAS R., NICAUD J.-F., Actes des deuxièmes journées EIAO de Cachan, Les Editions de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1991, 262 p.

[EXPLICATION 1991] SERE M.- G., WEIL-BARAIS A., Actes du colloque Esprit *L'explication dans l'enseignement et l'EIAO*, Edition Paris Onze, 1991, 260 p.

[EXPLICATION 1992] Actes des Deuxièmes Journées Explication du PRC-GDR-IA du CNRS, Sophia-Antipolis, juin 1992

[JIMENEZ 1990] JIMENEZ C., *Sur l'explication dans les systèmes à base de règles : le système PROSE*, Thèse de l'Université Paris VI, 1990.

[KASSEL 1986] KASSEL G., *Le système d'explication CQFE, une forme de méta-raisonnement intégrant règles et objets*, Thèse de l'Université Paris XI, 1986.

[PAQUETTE 1991] PAQUETTE G., *Métaconnaissance dans les environnements d'apprentissage*, Thèse de l'Université du Maine, Le Mans, Octobre 1991.

[PY 1991] PY D., *L'exploration de la démonstration dans le projet MENTONIEZH* , Actes des Journées EIAO, PRC-IA, Editions de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1991, p. 19-32.

[ROBERT et al 1987] ROBERT A., ROGALSKI J., SAMURCAY R., *Enseigner des méthodes*, Cahier de Didactique des Mathématiques n° 38, Irem, Université Paris 7, 1987.

[ROBERT 1992] ROBERT A., *Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12, n° 1, p.33-58, 1992.

[ROGALSKI 1988] ROGALSKI Marc, *Comment chercher une primitive? Question de méthode...*, Polycopié DEUG A1, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1988.

[ROGALSKI 1990] ROGALSKI Marc, *Enseigner des méthodes en mathématiques.*, In Commission Inter-Irem Université, Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, bulletin Inter-Irem, 1990, p. 65-79.

[ROGALSKI 1990] ROGALSKI Marc, ce numéro.

[SAFAR 1987] SAFAR B., *Le problème des explications négatives dans les systèmes experts : le système POURQUOI-PAS?*, Thèse de l'Université Paris XI, Orsay, décembre 1987.

[SCHOENFELD 1985] SCHOENFELD A.H., *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 1985.

[SCHOENFELD et al 1991] SCHOENFELD A.H., SMITH P, ARCAVI A., *Learning*, In R. Glaser (Ed.), Advances in Instructional Psychology (Vol. 4), Hillsdale, NJ : Erlbaum.

[TENAUD 1991], TENAUD I., *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*, Thèse de l'Université Paris VII, 1991.

[VIVET 1984] VIVET M., *Expertise mathématique et informatique : CAMELIA, un logiciel pour raisonner et calculer*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1984.

[VIVET 1987] VIVET M., *Systèmes experts pour enseigner : métaconnaissances et explications*, COGNITIVA 87.

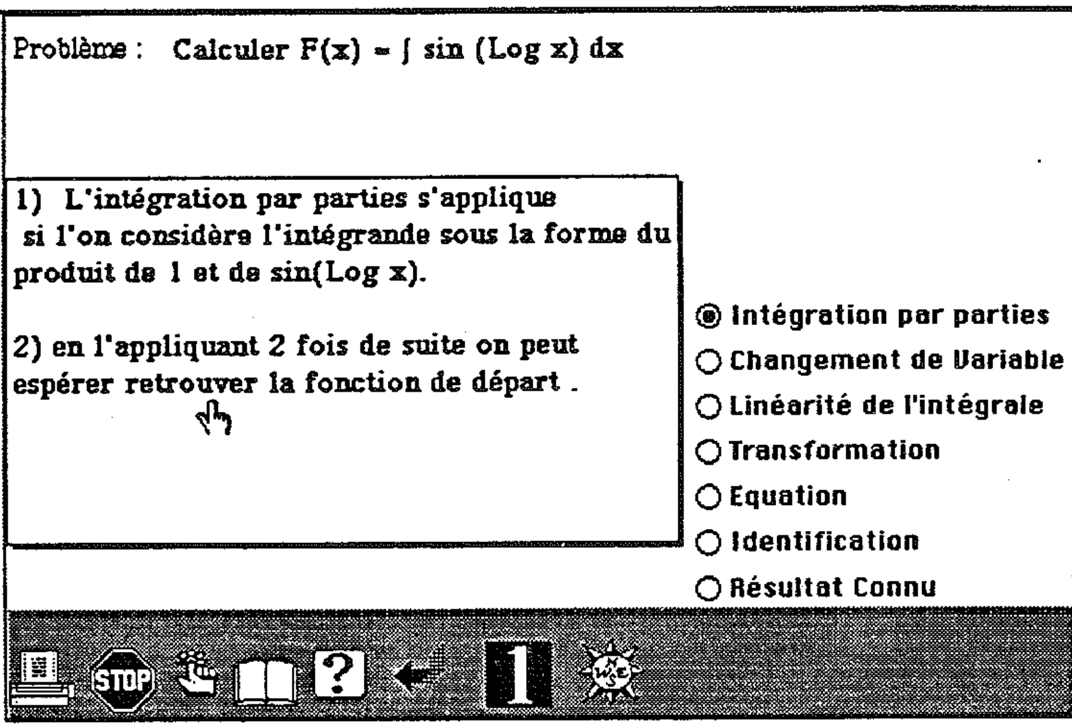
[VIVET et al 1988b] VIVET M., DELOZANNE E., CARRIERE E., *Presentation of different aspects of AMALIA : a knowledge based tutor of mathematics*, Actes de l'Université Européenne sur les Tuteurs Intelligents, Le Mans, 1988, p. 155-170.

ANNEXE 1 : un exemple de demande de commentaire

1. Contexte (lié à la session)

Les étudiants ont fait une première résolution pas-à-pas en employant la tactique "changement de variable pour simplifier une fonction composée"(10 min). Puis ils ont demandé l'écran vue générale (1 min 40) où ils ont remarqué l'existence d'une solution par intégration par parties à laquelle ils n'avaient pas pensé. Ils décident de l'essayer pas-à-pas (4 min).

2. Extraits du corpus



écran 1 : choix d'une technique en résolution pas-à-pas

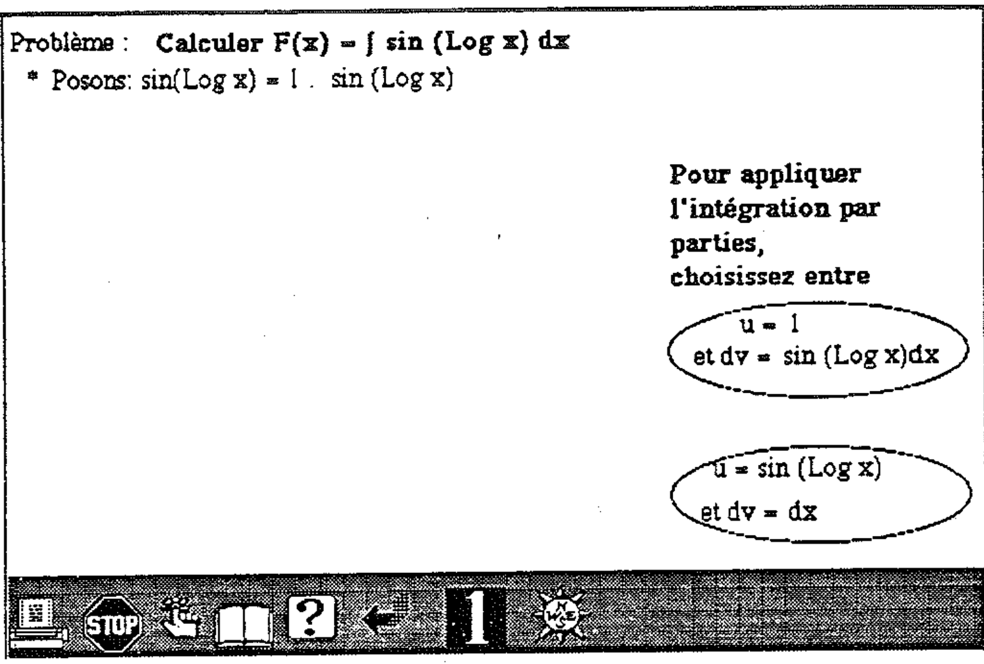
- on va essayer en faisant l'autre[1]
- tu n'es pas repassé par sommaire?
- alors intégration par parties
- *(lecture)* "En effet intégration par parties est envisageable ici voulez-vous l'appliquer?" oui
- un commentaire non?
- non attends
- on n'a qu'à prendre un commentaire
- commentaire, ouais
- *(lecture)* "L'intégration par parties s'applique si l'on considère l'intégrande sous la forme du produit de 1 et de sin(Log x)" de toutes façons on aurait fait ça hein?

(ne lisent, à haute voix tout au moins, que la première partie du commentaire)

- non, mais avec 1 il n'y a pas de problème
- ouais bon allez
- *(lecture)* "intégration par parties..."

---

[1] *l'autre solution, celle à laquelle ils n'avaient pas pensé)*



écran 2 : choix des facteurs d'une intégration par parties (pas-à-pas)

- pourquoi tu refais la même?
- alors intégration par parties on fait laquelle? on fait = 1 et dv = sin(log x)? ou...heu
- attends, alors dv = 1 .... *(très bas, écrit en même temps?)*
- ça c'est un bon truc n'empêche poser 1
- ouais, la première
- on prend 1, on prend u = 1,
- tu vas voir qu'on va se planter, vas-y
- non ils ont dit qu'il y avait des solutions

(lecture) "Réfléchissez, savez-vous calculer v ?"
- t'as vu tu t'es fait gauler! T'as vu dv l'expression que ça fait ? Je m'en doutais
- c'est la deuxième alors, clique!
- (marmonné) u en ce moment avec le commentaire e (rire)(????)
- c'est évident que l'autre choix il (marmonnements indistincts)
- ...

3. Interprétation

Demande d'explication suite à une difficulté rencontrée : il semble qu'ils n'ont pas compris *comment* l'intégration par parties est applicable puisque l'expression n'est pas écrite sous forme d'un produit.

Effet de l'explication : le message explicatif du système est en deux parties. La première partie répond à la question que se posent les étudiants et explique (en partie) **comment** appliquer l'intégration par parties. Les étudiants ne lisent pas la deuxième partie du message, ou en tout cas n'y prêtent pas attention. La suite (écran 2) prouve qu'ils n'ont pas compris pourquoi cette technique était intéressante. Il semble que la question ne se pose pas ("ils ont dit qu'il y avait des solutions", ce n'est pas leur solution, c'est celle du système). Par la suite, c'est seulement en choisissant le facteur de la deuxième intégration par parties (deux écrans plus loin) qu'ils mentionnent "on se retrouve avec sin (Log x)" et trouvent ainsi, a posteriori, la justification de cette tactique.

ANNEXE 2 : Eléments pour le choix d'une explication

Contexte :

Rétroaction du système en cas de choix par les étudiants d'une "bonne" technique en résolution pas-à-pas

Stratégies possibles :

1- proposer à l'étudiant de résoudre en mode plan (quand la méthode propose un plan)
2- mode silencieux : i.e. pas de commentaire à l'initiative du système uniquement sur demande des étudiants
3- mode bavard : le système commente tous les choix importants des étudiants
4- mode question : le système demande aux étudiants de commenter tous leurs choix importants (ils peuvent comparer leur commentaire à celui du système)
5- si les étudiants ne sont pas satisfaits du commentaire du système en proposer un autre, ou leur donner la possibilité d'en composer un autre, ou renvoyer au cours ou au prof.

Informations contenues dans le commentaire

Le commentaire peut porter sur
- la stratégie,
- la désignation des classes de problèmes (tactiques),
- la démarche associée (plan plus ou moins détaillé)
- la justification ou le principe,
- le degré de fiabilité,
- l'objectif poursuivi.

Critères de choix des informations

- Privilégier l'objectif de la démarche qui est utile pour planifier/anticiper
- Ne pas donner le plan détaillé, si on le demande par la suite. le donner quand il y a eu beaucoup d'échecs
- En phase d'entraînement à la méthode, donner les justifications/principes
- En phase de révision, donner les descriptions des tactiques
- Si une solution a déjà été étudiée ou passage par vue générale, donner la justification de la nouvelle démarche et son objectif
- Quand la démarche ne comporte pas de justification explicite, donner la description de la classe de problème

Contextes possibles(session) :

1- les étudiants ont au préalable établi un plan :
    1-1. juste, 1-2. incomplet, 1-3 faux ou incompris
2- la solution en cours est la première solution étudiée
3- une solution (ou plusieurs) déjà étudiée (s) en pas-à-pas, en mode plan
4- passage préalable par vue générale , étude des commentaires des corrigés-types)

Contextes possibles (résolution) :

1- profondeur de l'étape
2- (sous-)pb père ou fils (i.e. on cherche un plan (père) ou on en applique un (fils); le contrôle est moindre sur un problème fils)

Schéma d'interaction *: BON-choix d'une technique en pas-à-pas-Bavard*

Contexte de l'interaction

- résolution pas-à-pas
- l'étudiant a choisi une technique prévue dans la méthode

Condition particulière :

- mode bavard

Faire :

1) déterminer le contenu du commentaire en fonction de la réponse
2) éditer le commentaire
3) éditer un message de négociation

"Vous voulez :
- appliquer en pas-à-pas?
- établir un plan (ou modifier le votre)?
Réponses :"pas-à-pas", "plan"

5) action conditionnelle :
- si pas-à-pas, alors aller à choix suivant
- si plan, alors aller à plan

Schéma d'interaction *: BON-choix d'une technique en pas-à-pas-Silencieux*

Contexte de l'interaction

- résolution pas-à-pas
- l'étudiant a choisi une technique prévue dans la méthode

Condition particulière :

- mode silencieux

Faire :

1) éditer un message d'évaluation :

"En effet ce choix semble intéressant".

2) éditer un message de négociation

"Vous voulez :
- l'appliquer en pas-à-pas?
- obtenir un commentaire sur l'intérêt de votre choix?"
- établir un plan (ou modifier le votre)?
Réponses :"pas-à-pas", "commentaire", "plan"

3) action conditionnelle :
- si pas-à-pas, alors aller à choix suivant
- si plan, alors aller à plan
- si commentaire alors

faire
1)déterminer le contenu
2)éditer le commentaire mode affirmatif
3) suite du commentaire Cf.. 5) du mode bavard

Déterminer le contenu du commentaire : quels critères de choix?????

Contenus possibles du commentaire sur un problème-père

1- STRATEGIE + PLAN + SURETE + OBJECTIF

variante : **CHANGEMENT DE POINT DE VUE + STRATEGIE + PLAN + SURETE + OBJECTIF**

-Deux *modalités :* démarche sûre "Permet(tent) de", heuristique *:* "on peut espérer"

Formulation du contenu 1
Faire successivement *:*
1) *si* présence de changement de point de vue *alors* écrire "en posant ", <chgt de point de vue>

2) *si la stratégie est :*	*alors écrire :*
- classe de fonctions	"sur cette classe de fonctions, "
- simplification	"pour simplifier,"
- identification	"l'identification en appliquant "
- récurrence	"la stratégie de récurrence descendante, en appliquant "
3) *si la sûreté est :*	*alors écrire :*
- démarche sûre	"le plan *:* ", <plan>," permet de ", <objectif du plan>
- heuristique	"en appliquant *:* ", <plan>, "on peut espérer", <objectif>

avec pour <plan>, soit *:*
- le plan associé à la tactique ou à la classe de problème ou son action principale
- le plan associé aux heuristiques d'applications de la technique à laquelle renvoie le plan

et pour <objectif>, l'objectif lié au plan ou à son action principale
Degré de généralité *:* on peut instance le plan et le point de vue, ou le donner de façon générale
Niveau de détail *:* on peut plus ou moins détailler le plan (choix de IPP, CV, transformation)

Exemples :
. pb1 *:* $\int (x^2-3x+7)\, e^{-2x}\, dx$, choix de IPP

sur cette classe de fonctions,
le plan *:* 2 IPP (en dérivant le polynôme)
permet de se débarrasser du polynôme

. pb2 *:* $\int \sin(\mathrm{Ln}\, x)\, dx$, choix de CV
remarque *:* 2 tactiques suggèrent le même CV

pour simplifier
en appliquant *:* CV , nouvelle variable *:* la fonction la plus intérieure
on peut espérer
obtenir un produit de fonctions plus simples ou simplifiable par IPP.

ou

pour simplifier
en appliquant *:* CV , nouvelle variable *:* la fonction réciproque compliquée
on peut espérer se débarrasser de cette fonction réciproque.

ou

même chose avec Ln pour la fonction réciproque (compliquée)

. pb2 *:* $\int \sin(\mathrm{Ln}\, x)\, dx$, choix de IPP
remarque *:* IPP nécessite un changement de point de vue sur la fonction à intégrer

En posant f= 1. f
sur cette classe de fonctions
en appliquant : 2 IPP
on peut espérer retrouver la fonction de départ.

remarque : le plan associé à la classe de fonctions dit essayer IPP, et IPP avec un sin suggère 2IPP, ce n'est donc pas tout à fait le plan associé à la classe de problèmes, mais le plan lié à une heuristique d'utilisation d'IPP
Hiérarchie sur les tactiques (heuristiques plus faibles, prioritaires, plus ou moins laborieuses.....

2- DESCRIPTION DE LA TACTIQUE (+ CONDITIONS D'ENTREE)+SURETE + OBJECTIF

-Deux *modalités :* démarche sûre "Permet(tent de)", heuristique : "on peut espérer"
- Remarque :
  . le nom de la tactique décrit généralement les catégories de fonctions sur lesquelles cette tactique est intéressante : simplification des fonctions composées....;
  . parfois il décrit l'objectif de la tactique : éliminer les fonctions réciproques compliquées

Formulation du contenu 2
1) *si* présence de changement de point de vue *alors* écrire "poser ", <chgt de point de vue>
2) *si la stratégie est :* *alors écrire :*
- classe de fonctions < nom de la classe>/<nom de la sous-classe>/ <conditions d'entrée>
- simplification, identification, < nom de la tactique>

récurrence
3) *si la sûreté est :* *alors écrire :*
- démarche sûre <nom de la technique>," permet de ", <objectif>
- heuristique par <nom de la technique>, " on peut espérer", <objectif>

Degré de généralité : on peut instancier les conditions d'entrée et le point de vue, ou le donner de façon générale
Niveau de détail : on peut plus ou moins détailler la description de la tactique (conditions d'entrée, cas favorables

Exemples :

. pb2 : $\int \sin (\mathrm{Ln}\, x)\, dx$, choix de CV
remarque : 2 tactiques suggèrent le même CV
simplification d'une fonction composée ,
par CV on peut espérer obtenir un produit de fonctions plus simples ou simplifiable par IPP.
ou
éliminer une fonction réciproque compliquée :
par CV (ou IPP d'ailleurs), on peut espérer se débarrasser de la fonction réciproque
remarque 1 : la description de la tactique de simplification contient l'objectif

. pb2 : $\int \sin (\mathrm{Ln}\, x)\, dx$, choix de IPP
remarque : IPP nécessite un changement de point de vue sur la fonction à intégrer
poser f= 1. f,
produit de 2 fonctions dissemblables
(dont l'un des facteurs est sinus (ou cosinus ou sh ou ch))
par IPP, on peut espérer retrouver la fonction de départ

3- JUSTIFICATION/PRINCIPE + OBJECTIF

pb : 1) le principe contient (souvent) l'objectif; 2) le principe est souvent implicite

Formulation du contenu 3 :

1) écrire le principe (s'il est explicite dans le poly)
2} écrire la justification (si elle est explicite dans le poly)
3) *si la sûreté est :* *alors écrire :*
- démarche sûre <nom de la technique>," permet de ", <objectif>
- heuristique par <nom de la technique>, " on peut espérer", <objectif>

Degré de généralité et de détail figé, les principes et justifications sont des textes qui ne sont pas utilisés par le résolveur et ne sont donc pas manipulables; ils sont uniquement destinés à être affichés pour les explications.

Exemples :

remarque : ces commentaires n'apportent pas grand chose, l'objectif étant très général, et pas de principe, ni justification

. pb2 : $\int \sin(\mathrm{Ln}\, x)\, dx$, choix de IPP
remarque : IPP nécessite un changement de point de vue sur la fonction à intégrer
on joue sur le fait que sin et cos sont stables par 2 dérivations ou intégrations
par IPP, on peut espérer retrouver la fonction de départ

LES CONCEPTS DE L'EIAO SONT-ILS INDEPENDANTS DU DOMAINE ? L'EXEMPLE DE L'ENSEIGNEMENT DE METHODES EN ANALYSE

Marc Rogalski

Université des Sciences et Technologies de Lille

Résumé

A partir de l'étude de ce qu'un tuteur intelligent enseignant des méthodes en analyse (pour l'étude des suites numériques) devrait faire pour être efficace, nous posons quelques problèmes à la frontière de l'intelligence artificielle et de la didactique, et discutons des difficultés d'élaborer des résolveurs dans le domaine de l'enseignement de méthodes en analyse. Nous avançons quelques thèses concernant certains concepts de l'EIAO (interaction intelligente, modèle de l'apprenant, explications), quant à leur dépendance profonde des contenus en cause (algèbre, géométrie, analyse, raisonnement, ...) et de la nature de l'apprentissage visé (savoir-faire, concepts, méthodes, ...).

Introduction

Le présent texte se propose d'abord d'avancer quelques réflexions sur les problèmes posés par l'utilisation de logiciels d'enseignement intelligemment assisté par ordinateur (EIAO) pour l'enseignement de méthodes en analyse. Ces réflexions s'appuient sur une collaboration établie depuis quelques temps avec Elisabeth Carrière et Elisabeth Delozanne (cf. [1]). Je partirai d'un point de vue didactique en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, et je mettrai en évidence des objectifs et des contraintes nécessaires pour qu'un logiciel puisse, à mon avis, être utile de façon spécifique pour l'enseignement de méthodes en analyse. Je prendrai comme exemple significatif le texte d'une méthode portant sur l'étude des suites numériques en première année de DEUG A. J'ai choisi cet exemple, car il me semble révélateur des exigences importantes que la didactique a ou aura vis à vis de logiciels d'EIAO, tout en permettant un essai de correspondance entre des termes utilisés dans l'enseignement de méthodes (stratégie, technique, algorithme...) et des termes de l'IA (règle, métarègle...). Le point clé est qu'il s'agit dans cet exemple de problèmes d'analyse et non d'algèbre, et que le domaine de l'analyse est beaucoup moins algorithmisable que celui de l'algèbre, qu'il fait appel à des procédures de nature plus globale, que la "perte d'information", en particulier la recherche de conditions seulement suffisantes, peut notamment y jouer un grand rôle, et enfin que la "planification" y concerne plus une démarche de recherche que des actions à effectuer. Du coup, cet exemple permettra de soulever la question de savoir si certains concepts de l'EIAO gardent le même sens lorsque le domaine mathématique étudié varie. La comparaison de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, où il n'existe pas actuellement de tuteur intelligent (sauf dans le domaine de la recherche de primitives, qui relève surtout d'une démarche algébrique), révèle effectivement des problèmes délicats.

Le lecteur doit être conscient qu'on ne s'intéresse pas directement ici aux motivations propres des chercheurs en IA. Il va de soi que cette discipline a ses exigences spécifiques internes. Mais l'EIAO est justement un lieu où ces exigences et celles provenant de l'extérieur devraient se rencontrer, et ce serait un mauvais service à rendre au développement de l'IA que de "négocier à la baisse" les attentes que les didacticiens peuvent avoir d'une collaboration entre les deux disciplines. Les compromis viendront plus tard ...

Dans la première partie, j'aborderai la question de la place et de l'objectif possibles d'un système d'EIAO dans l'enseignement de l'analyse.

Dans la seconde, je poserai quelques problèmes et je mettrai en évidence des difficultés que rencontrera sans doute l'IA, dans la mise au point de résolveurs en analyse, pour répondre aux exigences des didacticiens. C'est pour illustrer ces difficultés que je prendrai comme exemple la méthode d'étude des suites numériques qu'on trouvera en annexe.

Une dernière partie sera consacrée à des problèmes actuellement discutés en EIAO : faut-il parler d'intelligence ou d'interactivité ? faut-il un "modèle" de l'apprenant ? quel peut être le rôle des "explications" ? peut-il y avoir explications sans résolution ? quelles peuvent être les places respectives de l'intelligence du tuteur et celle de l'apprenant ? Surtout, j'essaierai de voir s'il est possible de mettre le même sens sous ces divers termes utilisés en EIAO selon que l'on s'intéresse à l'analyse, à l'algèbre ou à la géométrie, et qu'on se propose d'enseigner des connaissances de type comportemental, de type conceptuel ou de type réflexif (métaconnaissances). Ma conclusion étant, a l'issue de ces réflexions, qu'il n'en est sans doute rien, et que la recherche de concepts trop formalisés propres à l'EIAO est peut-être prématurée.

I. Quel rôle pour un système d'EIAO ?

Nous posons évidemment la question du rôle spécifique qu'un logiciel d'EIAO peut jouer. S'il s'agit de faire sans changement ce que l'enseignant ou l'élève font déjà, on ne voit pas vraiment l'intérêt de la chose, sauf pour ceux qui pensent que, faute de moyens, le moment est venu de "remplacer les enseignants par des machines à enseigner" !

I.1. Un rôle qui n'est ni celui de l'EAO ni celui du système expert

Il est clair que des logiciels d'EAO peuvent être utiles pour faciliter l'apprentissage de certains concepts ou de certains savoir-faire, en permettant des activités du sujet plus difficiles, voire impossibles, sans ordinateur : visualisation de certaines formes ou de certains comportements, possibilités d'expérimentations trop coûteuses à la main, activités de conjectures... Certains logiciels sont déjà utilisés efficacement dans ce but (cf [2]). Mais on ne peut pas parler à leur sujet "d'intelligence".

Un autre rôle qui nous paraît peu spécifique à l'EIAO est celui d'expert plus ou moins autonome dans certains domaines. Il est clair qu'un résolveur d'équations numériques, ou un système de calcul formel, peuvent aider à résoudre certains problèmes, et donc permettre une exploration. Mais les méthodes de ces systèmes sont plus tournées vers l'efficacité du calcul que vers la préoccupation de l'enseignement, et elles sont souvent éloignées de ce qu'on désirerait que fasse un élève : à la fois trop ambitieuses et trop combinatoires par souci d'exhaustivité. Nous reviendrons sur ce point, que mettent d'ailleurs en évidence actuellement les spécialistes d'EIAO.

I.2. Un rôle qui n'est pas celui d'un répétiteur de techniques

On ne voit pas l'intérêt d'un tuteur intelligent qui se contenterait de paraphraser un manuel classique d'exercices, même avec corrigés. L'investissement dans la réalisation d'un tel tuteur serait évidemment disproportionné au but s'il ne s'agit que d'entraînement technique. De plus, il ne paraît pas souhaitable d'inciter, dans ce domaine, à abandonner le "papier-crayon". Seul celui-ci permet pour l'instant une "vision agissante instantanée" qui semble , en particulier, spécifique du calcul : la vitesse de réaction, l'écriture immédiate pour rapprocher des termes, corriger des morceaux, la vision globale des formules, l'anticipation visuelle des modifications possibles... utilisent une interaction entre la main, l'œil et le cerveau qui est, semble-t-il bien plus rapide et efficace que l'utilisation d'un clavier, la manipulation d'une souris, le choix dans un menu..., actions qui sont lentes, réductrices et séquentielles.

I.3. Un rôle privilégié : l'enseignement de méthodes

A mon avis, le rôle le plus intéressant pour un tuteur intelligent pourrait être d'aider à l'apprentissage des conduites stratégiques dans la résolution de problèmes d'un certain champ dans lequel des concepts vont à la fois servir d'outils et structurer le domaine en question. Cela pour trois raisons.

D'abord, les concepts mathématiques en jeu dans un domaine donné ne s'apprennent bien, le plus souvent, qu'à travers leur rôle pour la résolution des problèmes du domaine, et c'est donc à travers la résolution de problèmes qu'il faut raisonnablement envisager l'utilité principale d'un tuteur intelligent.

Ensuite, parce que la résolution elle-même appelle naturellement des méthodes, et ce n'est guère qu'à travers des méthodes que l'intelligence artificielle peut envisager la mise au point de résolveurs de problèmes, dont la présence semble nécessaire au fonctionnement intelligent de tuteurs (nous reviendrons sur cette question).

Enfin, parce que des raisons didactiques semblent montrer l'intérêt d'enseigner aux élèves ou aux étudiants des méthodes adaptées aux problèmes de certains domaines (cf [3], [4], [5]).

Mais qui dit méthodes en mathématiques dit "méta", c'est à dire métaconnaissances associées à certaines connaissances, certains domaines conceptuels, certaines classes de problèmes. J'énonce donc ici une première thèse, de caractère suffisamment générale pour qu'elle admette, bien sûr, de nombreuses exceptions ! Cette thèse se trouve aussi, d'ailleurs, dans les travaux de G. Paquette (cf [6]).

> **Thèse n°1** : L'enseignement de méthodes de résolution de problèmes dans un domaine mathématique bien défini est une utilisation privilégiée d'un tuteur intelligent (dans le cadre de l'enseignement des mathématiques).

Autrement dit, il ne s'agit pas d'entraîner des étudiants par répétition ou par exhaustivité des exercices proposés, ni de trop valoriser des algorithmes. Il s'agit de <u>favoriser la réflexion sur le pourquoi des choix faits ou à faire dans les stratégies de résolution</u>, à travers des principes de classification des problèmes et des outils, et des modalités d'utilisation des concepts pour guider les questions qu'il faut se poser. Nous ne parlerons donc dans la suite que de <u>ce rôle de "donneur de leçons de méthode" d'un tuteur intelligent.</u>

II. Quelques problèmes ou contraintes du côté d'un résolveur

II.1. Quelles capacités pour le résolveur d'un tuteur intelligent ?

Les spécialistes de l'EIAO ont avancé l'idée qu'on ne pouvait pas fonder les capacités intelligentes d'un tuteur sur les mêmes bases que celles souvent utilisées dans un système expert (voir [7]; les auteurs parlent aussi d'un "résolveur pédagogique"). Plus précisément, et pour un tuteur "donneur de leçons de méthodes", on peut déduire de leurs analyses la thèse suivante

> **Thèse n°2** : Le résolveur d'un tuteur "donneur de leçons de méthodes" doit fonctionner selon les méthodes qu'il veut enseigner, et non pas selon les méthodes expertes les plus générales du domaine concerné.

Cela signifie qu'il est inutile, voire nocif, de viser l'exhaustivité dans la recherche des solutions d'un problème. Aucune méthode n'est exhaustive dans la réalité de son utilisation, et quel intérêt didactique, pour l'apprentissage de méthodes de résolution, de dire à l'utilisateur : "j'ai tout essayé, et j'ai fini par trouver un truc qui marche" ? Qu'est-ce que cela apprend ? En particulier, la partie "combinatoire de toutes les possibilités", souvent nécessaire dans un système expert, doit être réduite voire supprimée pour un système EIAO.

De même, il faut probablement limiter strictement le nombre de pas d'anticipation dans la recherche d'une solution à un problème. Par exemple, en prenant l'exemple d'un projet de tuteur intelligent pour apprendre des méthodes de recherche de primitives comme ELISE, il est inutile du point de vue de l'apprentissage, voire décourageant pour l'élève, de lui dire : "on peut faire tel changement de variable dans l'intégrale proposée, parce que j'ai constaté qu'après encore trois changements de variable et deux intégrations par partie on trouve telle forme qu'on sait intégrer". L'anticipation humaine ne fonctionne pas comme cela. D'une part, elle est beaucoup plus locale dans le temps, en s'appuyant sur les étapes qu'on vient de franchir;

d'autre part, elle utilise des raccourcis qui renvoient à un fonctionnement plus global dans l'espace, ou au fait qu'on suit plusieurs idées à la fois, même inconsciemment.

Cette thèse n°2 peut servir de point de départ pour commencer à répondre à une question de Martial Vivet : "quand on envisage un tuteur intelligent, faut-il partir de l'apprenant ou des connaissances ?" La réponse est peut-être qu'il faut partir des connaissances telles qu'on veut qu'elles fonctionnent réellement après l'apprentissage. Cet état qu'on veut obtenir chez l'apprenant n'est pas celui qui correspondrait aux connaissances expertes les plus générales sur le domaine étudié. Il faut évidemment connaître celles-ci, pour déterminer ce qu'on veut en retenir comme objectif d'apprentissage, mais il faut limiter le résolveur à cet objectif.

Bien sûr, cela peut être un peu frustrant du point de vue de l'IA de limiter volontairement les capacités d'un résolveur, au profit d'un compromis entre les performances de résolution et les capacités à être un guide efficace pour l'enseignement de méthodes. Les enseignants connaissent bien, d'ailleurs, ce type de compromis, qui est pour eux aussi un peu frustrant... Déterminer précisément ce compromis peut justement être l'objet du travail commun aux didacticiens, à des experts éventuels (mathématiciens) et aux spécialistes de l'IA, et être spécifique du travail en EIAO.

II.2. Des difficultés importantes pour les résolveurs de problèmes d'analyse : l'exemple de l'étude des suites numériques

Il s'agit ici des résolveurs qui pourraient fonctionner dans des tuteurs intelligents ayant pour objectif de donner des leçons de méthodes pour résoudre des problèmes dans un domaine particulier de l'analyse. Des problèmes sérieux se posent déjà pour le projet ELISE, qui concerne pourtant un domaine de l'analyse très algorithmisable, de nature quasiment algébrique. C'est pourquoi on peut sans doute les résoudre dans ce cas. Je vais plutôt prendre comme exemple celui d'une méthode enseignée pour étudier les suites numériques en DEUG A première année. Cette méthode est très riche, et c'est évidemment ce qui va soulever des difficultés. Il y a des raisons épistémologiques à cette richesse, mais aussi des raisons didactiques. En effet, pour faire apprendre le concept de convergence et son utilisation pour résoudre des problèmes, on ne peut se borner à travailler sur des exercices trop élémentaires, sous peine de laisser s'installer chez l'étudiant des modèles trop simples ou erronés qui vont faire obstacle à l'apprentissage (cf [8]). Il faut impérativement utiliser aussi des exercices ayant un certains niveau de difficulté, pour que les étudiants puissent en tirer des leçons sur les rapports problèmes/concepts/résolution. Mais la difficulté peut entraîner l'échec, en particulier celui consistant à ne pas pouvoir entrer dans le problème; ainsi, l'enseignement de méthodes a pour rôle, entre autres, de permettre aux étudiants de démarrer une recherche sur ces exercices difficiles. Une telle méthode doit donc nécessairement être assez efficace, donc assez riche. Elle va donc avoir un certain nombre de ressorts qui vont justement être très difficiles à implémenter dans un résolveur. Je vais en dégager 6, et j'annonce à l'avance comme thèse le fait que ces six aspects de la méthode sont des problèmes (difficiles!) qu'il faudra que l'IA résolve pour que des tuteurs intelligents puissent être élaborés dans ce domaine.

> **Thèse n°3** : Pour construire des résolveurs utilisables pour enseigner des méthodes en analyse au moyen de tuteurs intelligents, l'IA devra prendre en compte les activités mathématiques relevant des termes suivants : **qualitatif; géométrique; global; infini; analogue; "il suffit de".**

II.2.1 <u>L'analyse de la méthode, sa traduction éventuelle en termes de l'IA</u>

Le texte de la méthode figure en annexe. J'en donne ici une brève analyse, en essayant de voir la correspondance entre ce que j'appelle tactique, technique ou stratégie et des termes classiques de l'IA.

Tactiques ou buts, techniques ou règles

Pour conclure sur le comportement d'une suite numérique, en termes de convergence ou non convergence, il y a en gros 7 **tactiques** possibles, que l'on doit parfois combiner :

(1) Si on a deviné la limite l, montrer par majoration que $u_n - l$ tend vers 0 (comme en terminale).
(2) Montrer que la suite diverge.
(3) Montrer que la suite converge par des techniques standard (théorèmes algébriques de convergence, souvent).
(4) Identifier la limite.
(5) Tactique ε-N avec encadrement de morceaux de la suite dont on connaît la limite.
(6) Partager une somme de n termes variables avec n en deux morceaux et majorer l'un par ε, l'autre étant convergent.
(7) Traiter une suite classique en utilisant l'algorithme adapté (suites linéaires, homographiques, séries usuelles ...).

En termes de l'IA, ces tactiques sont sans doute ce que l'on appelle des **buts**. Chacune de ces tactiques va utiliser des **techniques**, soit communes à plusieurs, soit spécifiques. De plus, une tactique peut évidemment en appeler une autre. Par exemple, l'intérêt de la (5) est souvent de se ramener à utiliser la (1), la (3) ou la (7). Il s'agit donc de la décomposition d'un but en **sous-buts**. Par ailleurs, plusieurs techniques sont utilisables pour une tactique donnée. Par exemple, pour utiliser la (3), on peut utiliser la technique : "suite croissante majorée", ou bien la technique "u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes", ou encore "le critère de Cauchy"... Les techniques apparaissent ainsi comme assez proches de ce que l'IA appelle des **règles**.

Bien entendu, on peut toujours trouver des suites pour l'étude desquelles l'ensemble des tactiques ci-dessus ne suffira pas : une méthode couvre un domaine relativement déterminé de problèmes se rapportant à un "champ conceptuel" (cf [9]), ici les suites usuelles ou un peu difficiles qu'on peut trouver en DEUG A.

L'organisation et l'emboîtement des buts, sous-buts, règles, constituent la **planification de la stratégie de preuve**, et les choix de planification vont dépendre des phases précédant la phase de preuve. En effet, avoir déterminé les buts et sous-buts et les règles à appliquer est évidemment la phase la plus simple, qui intervient à la fin (sauf si cela ne marche pas et qu'il faille retourner en arrière). Le vrai problème pour lequel une méthode est utile, et c'est aussi le vrai problème dans la construction d'un résolveur, c'est évidemment la démarche de recherche préalable qui va mener à ces choix de tactiques et de techniques. C'est l'enjeu des **phases stratégiques** qui précèdent celle de preuve : phase de classement du problème; phase de recherche d'idées, d'hypothèses, d'élaboration de conjectures.

Stratégies et métarègles

Il s'agit dans ces stratégies de **se poser des questions**, mais de façon méthodique, et c'est de la réponse à ces questions que vont dépendre les choix de la phase de preuve.

La première stratégie est une **stratégie de classification du problème**. Cette classification précise le champ auquel on se limite, et l'étude d'une suite qui ne rentre pas dans la classification sera évidemment plus difficile; l'un des **préceptes** utiles, c'est à dire sans doute une des **métarègles** au sens de l'IA, sera dans ce cas d'essayer de "ramener" (en un sens qu'il faudra préciser) la suite proposée à un type de suite figurant dans la classification.

Il apparaît donc deux étapes dans cette phase : d'abord, voir si la suite proposée est classable, et si oui la classer; ensuite, dans le cas où la suite n'est pas classable, essayer de la "rapprocher" de suites classables.

En ce qui concerne le classement, il y a deux grandes catégories : problème général (par exemple : "si nu_n tend vers 0, que fait u_n ?"; ou le théorème de Césaro : "si u_n tend vers l, que fait la suite $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$?") ou problème particulier, concernant une suite donnée. On trouvera dans le texte de la méthode, reproduit en annexe, la classification des suites particulières.

Dans la **stratégie de recherche, les questions à se poser sont guidées par un certain nombre de "préceptes" ou "métarègles"**, qui peuvent se regrouper sous des rubriques dont les titres évoquent, et ce n'est sans doute pas un hasard, **les préceptes de**

l'heuristique générale (cf [10]). Mais **chacun de ces préceptes est "accroché" à des connaissances du domaine des suites numériques.** Les titres de certains de ces regroupements annoncent déjà les difficultés qui vont se présenter pour implémenter une telle méthode, même si on peut espérer que le contexte du domaine va aider à circonscrire les possibilités : "dans un problème général, étudier des cas particuliers", ou "changer de point de vue sur la suite", ou "localiser la difficulté principale" ...

II.2.2 Les problèmes difficiles pour l'IA et qu'il faudrait résoudre pour élaborer un éventuel tuteur intelligent

Quelles sont les difficultés de l'IA pour implémenter la phase de classification ? D'abord, la distinction entre problème général et problème particulier, qui est évidemment fondamentale, pose un **problème de reconnaissance de forme** qui ne me paraît pas évident. On peut certes envisager qu'il soit résoluble par un codage approprié, si c'est l'utilisateur qui le rentre, mais si c'est le résolveur qui doit, pour étudier une suite particulière, se ramener à un problème général (et c'est un précepte souvent utile), comment faire ? On a bien l'impression qu'il faut disposer des concepts "général" et "particulier", et un résolveur a-t-il ces concepts ? Ensuite, même pour les suites particulières, les problèmes de reconnaissance de forme sont parfois redoutables. Ainsi, comment reconnaître ou même entrer dans un ordinateur la suite u_n définie comme "la plus grande racine de l'équation $x^3 - 3x - n = 0$" ? Si entrer la suite $u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n}}}}$ (avec n fois le signe $\sqrt{\ }$) paraît plus faisable, ce ne sera pas simple... De plus, ce sera une méthode récurrente (sur un nombre p variant de 1 à n) qui va donner de la suite une vision "dévissée" et non globale, et éliminer des tactiques possibles...

Mais le plus difficile réside sans doute dans la deuxième phase de la stratégie de classification, celle qui consiste à "se ramener à la classification", et qu'on a appelé de façon rassurante "autres moyens de classement". Dans cette phase, il s'agit en effet essentiellement, d'une part de reconnaître un groupement de termes dans l'expression de la suite ou de son mode de détermination qui ait un "comportement standard", de traiter à part ce groupement et d'en déduire une tactique de preuve; et d'autre part de comparer la suite proposée à des suites plus simples figurant dans la classification, mais dont la forme est suffisamment voisine pour qu'elles aient le même comportement; "comparer" signifie ici en général "encadrer".

Comment reconnaître ces groupements ou ces suites comparables ? Le champ des possibles est ici a priori **infini**, et c'est une des difficultés assez spécifiques de l'analyse. Dans la pratique, c'est **un problème de reconnaissance de la forme et du rôle du groupement.** Le mathématicien, mais aussi l'étudiant qui a un peu d'expérience, est amené à **considérer de façon globale** une certaine expression, et à y reconnaître les rôles de certains constituants. Par exemple, si on étudie la suite définie par récurrence par

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+\sin n}{n+\ln n} + u_n} \ ,$$

il faut isoler le groupement $\frac{n+\sin n}{n+\ln n}$, et s'apercevoir que la seule chose importante est qu'il a une limite, à savoir 1. On peut alors nommer ce groupement a_n, et encadrer la suite par deux suites récurrentes définies à partir d'un certain rang par l'expression obtenue en remplaçant a_n par $1 - \varepsilon$ d'une part, et $1 + \varepsilon$ de l'autre. Il s'agit **d'un raisonnement de nature qualitative**, sans doute très difficile à coder en IA. On se trouve dans la même situation, et avec le même type de difficulté quand on veut comparer la suite proposée à une suite plus simple : comment définir "plus simple" ? Comment choisir la suite à laquelle on va comparer ? Il faut qu'elle ressemble à la suite de départ, tout en étant plus simple ... Par exemple, on peut encadrer la suite vue plus haut $u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \dots + \sqrt{\frac{1}{n}}}}$ par les deux suites plus simples $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2^n}$ et w_n définie par récurrence par $w_n = \sqrt{\frac{1}{n} + w_{n-1}}$; comment implémenter une méthode de recherche permettant à un résolveur de reconnaître ce fait ?

En ce qui concerne la stratégie de recherche, les problèmes sont sans doute encore plus délicats. Je pointe juste quelques difficultés pour illustrer la situation.

On retrouve dans le "précepte" 1) (b) le problème de l'encadrement d'une suite par d'autres suites. De façon générale, **le problème des majorations et minorations est un problème difficile,** que l'on retrouve à d'autres endroits, par exemple dans la technique "suite croissante majorée" de la tactique (3) de preuve. Non seulement il y a la difficulté de deviner par quoi il faut majorer, mais il faut encore prouver une majoration. Certes, il est vraisemblable qu'on puisse écrire une méthode générale de recherche et de preuve pour **"majorer et minorer"**; mais elle serait au moins aussi élaborée que la présente méthode pour étudier une suite, et on n'éviterait tout de même pas le problème de **recherche de conditions suffisantes plus simples**, c'est à dire d'abandon pertinent d'un certain nombre d'informations. Par exemple, si on se propose de montrer que pour $x \geq 0$ on a $1 + \sin x \leq e^x$, le plus naturel sera de **faire un dessin** et d'essayer de **traduire le dessin** par **une condition suffisante**, en glissant une courbe entre les deux graphes : montrer que $1 + \sin x \leq 1 + x$, puis que $1 + x \leq e^x$. Et il s'agit là d'un exemple très élémentaire ! Comment faire lorsque l'on a à prouver l'inégalité : pour x dans $[0,1[$, $\ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2x}\right) \leq \frac{2x}{1-x}$? Il faudra sortir le 1/4 de la racine carrée parce que on aura **anticipé** qu'il donne un 1/2 qui, avec celui qu'on a déjà, fournit 1, et que $\ln(1 + u)$ est une fonction qu'on sait majorer par u; cette condition suffisante nous amène à majorer l'expression figurant sous le ln : $\sqrt{1 + 8x}$, etc. Le problème est que les valeurs des nombres explicites à mettre dans nos fonctions intermédiaires peuvent être **à choisir dans un référentiel infini** sans qu'on ait de guide bien net à part l'habitude de certaines expressions et **l'analogie** avec des majorations déjà faites. Ce sera particulièrement le cas si la majoration $f \leq g$ à faire est très grossière, c'est à dire si la marge entre f et g est très grande, car le choix d'une fonction h à glisser entre les deux n'est plus contraint : le choix des possibles est réellement infini ...

Les préceptes (métarègles) 1) (c) et 3) (b) concernent l'**utilisation d'un dessin.** Il s'agit là de mobiliser **la vision géométrique**, en particulier pour **reconnaître des formes globales** : monotonie d'une fonction, place de son graphe par rapport à la diagonale $y = x$, points d'intersection des deux courbes, positions respectives de certains points ... Bien sûr, certains de ces problèmes sont codables, au moins dans certaines limites, au moyen d'un nombre fini de tests numériques. Mais on ne peut à l'évidence prévoir toutes les idées que peut fournir à l'œil et donc au cerveau l'examen approfondi d'un dessin ...

La métarègle 3) (a) suggère de **"changer la formule ou l'expression"**; il s'agit, avec la métarègle concernant le dessin, de la particularisation au cas des suites du précepte heuristique : changer de point de vue (ce qui doit souvent correspondre au changement de "représentation" du problème au sens de l'I.A.). Là encore, **le champ des possibles est a priori infini**, et c'est **la forme qualitative de l'expression** initiale, ou **l'analogie avec une forme déjà vue**, qui permet de choisir. Comment implémenter le "déjà vu", par définition infini, compte-tenu des paramètres dont il dépend ?

La métarègle 1) (f) propose de **calculer littéralement pour "deviner" une formule.** L'exemple $u_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$ montre bien les problèmes : si on calcule en fractions les premiers termes, on trouve $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}, \frac{719}{720}, \frac{5039}{5040}$. Le résolveur pourra-t-il en induire[1] que l'on a probablement $u_n = \frac{n!-1}{n!}$?

La métarègle 4) **"faire n = ∞"** a déjà été évoquée : elle consiste à isoler certains groupements dont la limite est plus simple, et à les remplacer (par encadrement) par des termes

[1] Je suis sans doute un peu trop pessimiste : le logiciel Mapple, lorsqu'on entre $\sum_{p=2}^{n} \frac{p-1}{p!}$, répond $\frac{n!-1}{n!}$ ...

fixes proches de leurs limites. Nous avons vu les problèmes de **reconnaissance de forme et d'analogie** ainsi soulevés.

 Enfin, pour achever le tour d'horizon des difficultés d'élaborer un résolveur qui tienne compte des activités mathématiques citées dans la thèse n°3, citons quelques points qu'on peut relever dans **les diverses techniques utilisées dans les tactiques de preuve** : Quand faut-il raisonner par l'absurde ? Quand faut-il raisonner par récurrence ? Quand penser à nier le critère de Cauchy ? Comment mettre en œuvre une "récurrence paramétrée" ? Comment poser et conclure un raisonnement en ε-N ? Dans le découpage en deux d'une somme $\sum_{p=0}^{n} v_{n,p}$, comment choisir si l'entier intermédiaire sera fixe ou fonction de n, par exemple $[\sqrt{n}]$ ou $[\frac{n}{2}]$? Dans chacun de ces cas, se mélangent reconnaissance de forme, analogie, leçon à tirer d'un échec (comme dans la métarègle "analyser la difficulté principale", d'ailleurs), vision globale et qualitative ...

Ma conclusion concernant la possibilité d'élaborer un résolveur ayant un minimum d'efficacité dans le domaine de la convergence des suites est donc assez pessimiste. L'analyse comparée du type de méthode qu'on se propose d'enseigner dans le cas de la convergence des suites avec celle qu'on essaye d'implémenter dans Elise devrait nous éclairer sur les différences de difficulté, non seulement du point de vue des résolveurs, mais aussi du point de vue tutoriel. Il devrait alors être possible de se demander si les diverses notions de l'EIAO en fonction dans ces deux cas, et aussi dans d'autres cas (algèbre, géométrie) recouvrent bien les mêmes choses.

III. Algèbre, géométrie, analyse; savoir-faire, concepts, méthodes : quelles différences pour un tuteur ? quelle variabilité pour les notions de l'EIAO?

Il est maintenant assez fréquent d'entendre dire que même si on n'arrive pas à mettre assez d'intelligence dans un tuteur pour qu'il possède un bon résolveur, cela n'est pas très grave, et qu'on peut remplacer tout ou partie de l'intelligence de résolution par une intelligence plus développée dans l'interaction. Il ne me semble pas que cette opinion soit nécessairement fondée, s'agissant de tuteurs ayant pour objet l'apprentissage de méthodes de résolution. Cela risque de fortement dépendre du type de méthodes, c'est à dire en définitive du domaine mathématique concerné, et de l'apprentissage visé.

III.1. Méthodes fortement algorithmisables et méthodes d'exploration

Une différence importante apparaît immédiatement entre la méthode de recherche de primitives utilisée dans ELISE et celle figurant en annexe pour étudier la convergence des suites. La première est fortement algorithmisable, l'importance de la classification du problème y est déterminante, les techniques y sont en nombre très limité (intégration par partie, changement de variable, décomposition d'une fraction rationnelle, identification polynomiale ou récurrence); les consignes y sont données en terme d'actions techniques modifiant directement la forme du problème à résoudre, le faisant progresser vers sa forme finale où l'on reconnaît la solution; le sens des concepts mathématiques en jeu n'y est pas très utilisé.

La deuxième est essentiellement une méthode d'exploration : elle est beaucoup plus tournée vers la production d'un questionnement, mais les questions ne se traduisent pas par des actions immédiates bien précisées ou des réponses facilement codables; la liberté d'action laissée à l'apprenant est bien plus grande, et en particulier parce que le champ des possibles est bien plus vaste, et que le sens des notions mathématiques y intervient souvent, et pas seulement leur fonctionnement algorithmique; et c'est justement ce qui entraîne des difficultés pour un résolveur qui serait associé à cette méthode.

Ces différences fondamentales dans les méthodes élaborables par les "experts" de ces deux domaines ont évidemment pour causes les différences de nature des domaines mathématiques qui y sont en jeu. Si on regarde alors d'autres domaines mathématiques où ont été élaborés ou sont en projet, voire simplement imaginables par la pensée (comme pour les suites convergentes) des tuteurs intelligents, on constate que cette dichotomie : caractère assez algorithmisable ou caractère exploratoire, semble être générale :

> **Thèse n°4** : Selon la nature du domaine mathématique, la méthode de résolution de problèmes qu'un tuteur intelligent se propose d'enseigner sera soit assez fortement algorithmisable, soit de nature plutôt exploratoire. Les problèmes posés par l'élaboration du résolveur seront qualitativement différents dans l'un ou l'autre cas.

Par exemple, les tuteurs concernant l'apprentissage du calcul algébrique semblent être plus près du pôle "méthode algorithmisable" que du pôle exploratoire; en particulier, on peut y faire assez vite un diagnostic d'échec après un essai de solution, ce qui est bien moins évident pour une méthode de nature exploratoire. Par ailleurs, on y utilise peu les sens mathématiques du calcul algébrique : modélisation par une relation sur une inconnue d'un problème "concret" et rapport aux équations; nature fonctionnellement différente des expressions $2x$, x^2, $2+x$ ...; notion de polynômes formels.

En ce qui concerne les tuteurs pour l'apprentissage de la démonstration géométrique en quatrième-troisième, il faudrait faire toute une analyse des connaissances et méthodes géométriques sur lesquelles ils s'appuient, et de la façon dont elles sont utilisées au niveau de la démarche de résolution, pour savoir si elles relèvent plus de l'un de ces deux pôles.

Mais si l'on voulait implémenter dans un tuteur intelligent la méthode de recherche de résolution de problèmes de géométrie de terminale C due à Aline Robert et Isabelle Tenaud (cf [11]), il me paraît certain qu'il y aurait beaucoup de points communs avec la méthode proposée pour la convergence des suites, et qu'on serait très nettement du côté du pôle exploratoire; les difficultés d'un résolveur seraient sans doute aussi ardues, mais avec des spécificités propres (les problèmes de reconnaissance de formes géométriques y seraient évidemment beaucoup plus importants).

III.2. Peut-il y avoir interaction intelligente avec un résolveur limité ?

On a vu que cette question était l'un des points de réflexion actuels. Prenons l'exemple d'un tuteur qui devrait enseigner la méthode pour étudier la convergence des suites (il s'agit d'une expérience de pensée, puisque un tel tuteur n'existe pas!). Supposons par exemple que, étudiant une suite du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$, l'apprenant ait demandé le tracé des courbes $y = f_n(x)$ pour $n = 1, 2, \ldots, 10$. Le logiciel étant vraisemblablement incapable d'en déduire une conjecture, par exemple sur une relation d'ordre entre u_n et les points fixes x_n des f_n, quel conseil peut-il proposer à l'apprenant ? On imagine mal une suggestion allant au-delà de l'interrogation générale, qui figure dans le texte écrit de la méthode : "Voyez-vous une relation entre les u_n et les x_n ? Si oui, laquelle ?". Si l'on prend par exemple la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} u_n$, la relation à trouver est $x_n \leq u_n \leq x_{n-3}$, et ceci à partir de $n_0 = 8$ seulement; l'inégalité de droite sera sans doute invisible sur le tracé des graphes. Ce n'est qu'une étude volontaire, c'est à dire précisément guidée par l'apprenant, avec majoration effective à effectuer, et n_0 et p à déterminer, d'une inégalité du type $u_n \leq x_{n-p}$, qui pourra permettre d'aboutir. On voit clairement sur ce cas qu'une méthode de type exploratoire dans laquelle il y a beaucoup de difficultés pour le résolveur laisse peu de possibilité pour une initiative intelligente au tuteur.

Si l'on prend maintenant le cas d'ELISE, on peut au contraire imaginer des commentaires intelligents du tuteur, car ils devraient pouvoir provenir de la solution même donnée par le résolveur, y compris de la prise en cause de ses essais et échecs, facilement identifiables (telle intégration par partie ne marche pas parce qu'elle fait apparaître telle fonction plus compliquée, etc.). On peut faire le même commentaire en ce qui concerne des tuteurs en algèbre élémentaire.

Il me semble que ces deux exemples rendent vraisemblable la thèse suivante :

Thèse n°5 : Un tuteur opérant dans un domaine qui relève d'une méthode exploratoire avec un résolveur peu efficace ne pourra être "intelligent" au niveau de l'interaction qu'en utilisant fortement l'intelligence de l'apprenant, c'est à dire en étant tutoré par celui-ci, au moins pour certaines phases de l'activité.

Il faut donc en conclure, me semble-t-il, que le type de l'interaction tuteur-apprenant sera très différent selon le domaine mathématique concerné par le tuteur. **Peut-on parler du même concept d'interaction, lorsque dans un cas on utilisera fortement l'intelligence de l'apprenant et peu dans un autre ?**

Essayons de voir comment ces différentes phases pourraient, dans le cas du tuteur imaginaire concernant la convergence des suites, utiliser tantôt le résolveur et tantôt l'apprenant.

1. Lors de l'étape de classement d'une suite proposée à l'étude, on peut prévoir qu'un résolveur permettrait assez facilement de reconnaître le type de la suite, et par suite de réagir intelligemment aux actions de l'apprenant.

2. C'est évidemment lors de l'étape de la recherche exploratoire que la faiblesse du résolveur poserait plus de problèmes. On peut imaginer que le tuteur soit capable de se déplacer dans les différentes activités d'exploration, dans un certain ordre, et d'interroger à leur propos l'apprenant. Mais on voit mal comment l'énoncé des conjectures à tester, c'est à dire le choix de l'organisation de la preuve en but, règles et sous-but pourrait ne pas être à la charge de l'étudiant. Si, par exemple, le tuteur peut demander quels dessins faire, de quelles fonctions, à quelle échelle, pour combien de valeurs de n, et même demander à l'élève s'il en déduit telle conjecture (la suite est-elle monotone ? peut-on placer les u_n par rapport aux x_n ? etc.), il est vraisemblable qu'il ne pourra y apporter lui-même de réponse; la situation est analogue quant aux conclusions à tirer de certains calculs qu'aurait demandés l'élève (cf par exemple le cas de la suite $u_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$).

Il en résulte que l'apprenant, pour prendre en charge cette partie de l'activité, devra posséder un certain niveau d'expertise, car il devra penser cette phase de recherche en ayant en tête les différentes tactiques possibles pour établir le comportement d'une suite, et même l'agencement éventuel de tactiques différentes. Cela n'est pas gênant si l'objectif du tuteur est justement l'apprentissage de la méthode de recherche et non pas de ces tactiques, mais la connaissance de celles-ci est un préalable nécessaire. On peut dégager explicitement ce constat :

Thèse n°6 : Un tuteur ayant pour but un enseignement de méthode de nature surtout exploratoire ne pourra être efficace en ce qui concerne l'apprentissage que si l'apprenant possède déjà un certain niveau d'expertise relativement aux tactiques et techniques utiles dans le domaine.

Il est intéressant de remarquer que c'est le constat qui a été fait lors de l'expérimentation avec des étudiants du logiciel HYPERELISE (cf [12]), qui n'est pas très proche, pourtant, du pôle exploratoire.

3. La dernière étape est celle du plan de preuve : agencement entre but, règles, sous-buts. Il se peut qu'à ce niveau on puisse élaborer un résolveur relativement efficace, et permettre par conséquent une gestion plus intelligente de l'interaction à la charge du tuteur. Mais cela risque encore de dépendre du plan de preuve lui-même : s'il y a des majorations à faire (et c'est fréquent!), on a vu en effet que la situation redeviendra sans doute difficile, même si on dispose d'un sous-tuteur spécialisé dans la recherche de majorations (on grimpe d'un niveau de plus dans l'imaginaire!), car celui-ci sera inévitablement à base de méthodes relevant plus du pôle exploratoire que du pôle algorithmisable.

Mais en définitive, cette **nécessité probable de faire tutorer le tuteur par l'apprenant dans certaines phases du travail**, à condition que le rôle de certaines tactiques et techniques de base soit maîtrisé par l'étudiant, ne peut qu'être favorable à l'apprentissage, dans la mesure où il rend l'apprenant actif dans la phase de recherche, avec une activité non aléatoire, mais orientée vers un but dont il a conscience.

Une conclusion qu'on peut sans doute tirer des thèses n° 5 et 6, c'est que **parler d'interaction comme concept bien défini en EIAO risque de voiler des différences importantes, et de cacher le fait que les types d'interaction vont dépendre étroitement des capacités du résolveur, du domaine sur lequel porte le tuteur, et du caractère de la méthode qu'il s'agit d'enseigner : plutôt algorithmisable ou plutôt exploratoire.**

III.3. Y a-t-il un concept de "modèle de l'apprenant" ?

Un projet de tuteur intelligent est d'abord un projet d'enseignement. Il faut donc décrire ce que l'on se propose d'enseigner avant d'essayer de repérer l'état de l'apprenant vis-à-vis des connaissances à transmettre. Or elles sont de nature très différente selon le domaine, et selon le niveau auquel on se place dans le domaine.

Il peut s'agir de "savoir faire". C'est le cas par exemple avec les tuteurs portant sur l'algèbre élémentaire : ceux-ci s'occupent des règles de calcul, des stratégies de factorisation, de développement, etc. Ils ne prennent pas en compte les représentations des élèves sur les concepts mêmes de l'algèbre : que signifient les lettres x, y, a, b..., en quoi leur statut est-il différent de celui des nombres figurant dans les relations ? (la notion de variable, celle d'inconnue, de paramètre, les rapports avec la mise en équation...). Pourquoi $2x$ et x^2 doivent-ils se traiter différemment dans les calculs ? (les réponses relèvent de la notion de fonction, ou de celle de polynôme formel, toutes deux absentes de l'algèbre élémentaire; et la confusion entre $2x$ et x^2 est fréquemment constatée chez les élèves débutants). Des phénomènes d'ostention repérés par des didacticiens (prise en compte du coefficient 0 non écrit, disparition de termes avec le coefficient 1 dans les mises en facteur... cf [13]), ne sont pas pris en charge par le tuteur, ni par exemple le fait que les élèves veulent donner un sens au résultat en y retrouvant sous une forme ou une autre les prémisses...

Dans ces conditions, il semble inévitable que le seul type de modèle de l'élève qui puisse rendre compte du niveau sur lequel le tuteur se propose d'agir soit **un modèle comportemental**, qui ne pourra que très peu intégrer l'acquisition de certains concepts (l'inconnue, par exemple) ou les représentations de l'apprenant en terme d'objectifs du calcul algébrique (métaconnaissances).

Il peut s'agir de connaissances mathématiques de type conceptuel. C'est le cas pour des tuteurs de géométrie, où des concepts du raisonnement (rôles de l'hypothèse et de la conclusion, conditions nécessaires, suffisantes) sont mobilisés, ainsi que des concepts géométriques (parallélisme, théorème de Thalès, addition vectorielle).

Dans ce cas, un modèle de l'élève permettant d'interpréter l'effet du tuteur et les actions de l'apprenant sera plutôt **un modèle conceptuel ou épistémique**, dont il ne sera d'ailleurs pas évident qu'on puisse y avoir facilement accès avec les seules actions du sujet face au tuteur.

Il peut aussi s'agir de métaconnaissances sur les concepts mathématiques en jeu dans le domaine et leur utilisation pour en résoudre les problèmes. C'est le cas par exemple pour un tuteur qui se proposerait d'enseigner des méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie de terminale C (cf [11]), ou pour le tuteur imaginaire destiné à enseigner la méthode sur l'étude des suites que nous avons décrite plus haut.

Dans ces conditions, il semble clair qu'il faudrait avoir recours à **un modèle réflexif** de l'apprenant, qui puisse rendre compte de ses capacités à réfléchir sur ses connaissances mathématiques, c'est à dire rendre compte de ses métaconnaissances portant sur ses connaissances. Par exemple, on pourrait trouver dans cette description de l'élève des métaconnaissances du type : il sait, dans l'étude des suites, quand il faut effectuer un changement de point de vue, passer du numérique au graphique; ou bien, pour l'étude de problèmes de géométrie, il sait choisir le cadre de l'analytique ou du vectoriel à bon escient.

On voit apparaître dans ce dernier exemple une dépendance du modèle cherché, non seulement du niveau auquel se situent les connaissances visées (comportement, concepts mathématiques, métaconnaissances), mais aussi de la nature de ces connaissances. Ce sont les termes mêmes utilisés pour décrire le modèle de l'élève, l'architecture interne de sa description, les hiérarchies qui y figurent... qui vont dépendre du domaine mathématique sur lequel on travaille, et de l'objectif d'enseignement du tuteur.

Peut-être peut-on résumer ceci dans la thèse :

Thèse n°7 : La nature du concept de "modèle de l'élève" que l'EIAO se propose de définir dépend étroitement de la nature des connaissances à enseigner (algèbre, analyse, géométrie, et sans doute de sous-domaines encore plus fins...), et du niveau auquel on se place : comportements, concepts mathématiques, métaconnaissances.

On conçoit que la combinatoire du type de modèles de l'élève puisse ainsi être assez grande, d'autant plus que certains tuteurs pourraient vouloir avoir accès à plusieurs aspects différents. Du coup, les moyens d'accès à de tels modèles de l'élève par le tuteur lui-même paraissent assez problématiques.

D'abord, il faut convenir que les didacticiens eux-mêmes sont très loin de savoir définir clairement de tels modèles et de disposer des moyens d'y accéder. Par exemple, si des études didactiques (cf [8]) ont effectivement permis de dégager l'existence statistique de modèles des conceptions des élèves concernant la convergence des suites (modèles monotone, dynamique, statique...et les modèles mixtes!), on a peu de moyens de repérer rapidement de quel modèle relève tel élève, et on sait même que plusieurs modèles peuvent coexister chez le même élève, qui fera appel à l'un ou à l'autre selon le problème, les circonstances... Quant aux moyens didactiques à mettre en œuvre pour faire évoluer le modèle insatisfaisant d'un élève, on sait peu de choses à ce sujet... Il faut ajouter que les moyens d'un tuteur pour détecter le modèle d'un élève devraient être particulièrement performants, puisqu'il est peu vraisemblable, en tout cas pour certains types de tuteurs, que le même élève y ait accès plus de trois ou quatre fois. L'accès statistique ou en terme de reconnaissance de structure ne sera éventuellement possible que pour des logiciels travaillant sur le long terme (travail sur plusieurs semaines...).

En bref, je ne suis pas sûr que cette question du modèle de l'élève telle que se la pose actuellement l'EIAO soit vraiment pertinente dans sa généralité. Je crois qu'il faut être plus modeste, et se contenter du travail didactique "normal" qu'il faut évidemment faire pour élaborer un tuteur destiné à **enseigner dans un domaine donné à un niveau donné des connaissances données** : celui que fait le didacticien qui se propose de mettre au point une ingéniérie.

III.4. Explications : quelle variabilité ? quelle généralité ?

L'EIAO se pose des problèmes généraux concernant l'explication (cf par ex. [14]). Mais là aussi il faut sans doute se garder de vouloir être trop général trop tôt.

D'abord, **les didacticiens n'ont pas, à l'heure actuelle** (cf [15]), **fait de travaux sur les explications**. Pourtant, les enseignants expliquent. Mais, en fait, ils expliquent "en situation", c'est à dire de façon extrêmement diverse selon le contenu mathématique en jeu, et selon, là aussi, le niveau des connaissances. Les types d'explications que peut donner un enseignant vont être différents suivant qu'il s'agit d'algèbre, d'analyse ou de géométrie, par exemple. La variabilité sera aussi importante selon que l'objectif est de faire acquérir des comportements assez algorithmiques (des savoir faire), des concepts mathématiques ou des réflexions "méta" portant sur ces concepts et leur opérationalité pour résoudre les problèmes du domaine.

De plus, les explications renvoient à un rapport avec l'élève qui va dépendre beaucoup de la situation d'enseignement. Les explications qu'on trouve dans un cours magistral ont peu à voir avec celles que donne un enseignant à des élèves en train de chercher un problème, et qui lui posent des questions, ou avec celles qui tirent le bilan général d'un problème fait en classe. L'explication réponse à une question peut elle aussi être différente selon ce que révèle la question chez l'élève : incompréhension de langage, existence d'un concept erroné renvoyant à un obstacle épistémologique, ou à un effet didactique de l'enseignement antérieur, représentation erronée du rôle et de l'intérêt de certaines connaissances (niveau "méta")...

Par exemple (mais il s'agit là d'un constat empirique et non du résultat d'une recherche didactique), il y a des cas où répondre à l'élève en lui renvoyant d'autres questions (bien choisies) semble plus efficace que d'expliquer "classiquement". N'est-ce pas aussi un type d'explication ? De même, l'évocation de problèmes analogues (sans dire nécessairement qu'ils le sont) peut faire prendre conscience à l'élève d'une structure profonde, ou d'un mode d'utilisation des connaissances à mettre en jeu. Proposer un changement de cadre dans l'étude d'un problème peut être aussi un mode d'explication implicite favorisant sans le dire des transferts.

En définitive, il y a sans doute à élaborer en didactique, plus qu'une théorie générale de l'explication, des moyens d'analyser des "situations explicatives" ou des moments explicatifs d'une situation didactique donnée.

Il y a peu de chances que l'EIAO, qui a elle aussi à construire et gérer des "situations explicatives" (cf [1]), soit plus avancée dans une théorie générale. J'avance donc la thèse vraisemblable suivante :

> **Thèse n°8** : En matière d'explications, l'objectif premier de l'EIAO devrait être de construire pour chaque tuteur ou projet de tuteur des situations ressenties par leurs auteurs comme étant de nature explicative, puis d'analyser expérimentalement leur fonctionnement réel avec des élèves, et d'amasser ainsi des connaissances sur les variables qui permettent d'agir sur ces situations et de leur donner leur efficacité pour l'explication.

Ce n'est que dans une étape ultérieure, sans doute, et sur la base de connaissances expérimentales plus nombreuses et plus sûres qu'actuellement, qu'on pourra peut être se poser la question d'une théorie générale de l'explication.

Conclusion

Quelle peut être la validité des "thèses" dont ces réflexions sont parsemées, pour la commodité du lecteur ? A vrai dire, elles sont évidemment sujettes à discussion. Certaines de leurs justifications me paraissent s'appuyer raisonnablement sur des considérations didactiques assez bien établies. Mais il est clair que je me suis servi d'exemples qui sont souvent virtuels : il n'existe à l'heure actuelle aucun tuteur se proposant d'enseigner des méthodes de résolution de problèmes dans le domaine de la convergence des suites ni dans celui de la géométrie de terminale C. De telles méthodes existent et ont été enseignées, mais elles n'ont même pas été implémentées en tant que systèmes experts (ce qui serait plus facile que comme tuteur EIAO). Tout ce que l'on peut déduire de telles "expériences de pensée" est donc sujet à caution. Mais au moins les conclusions sont réfutables : il suffit (!) de construire les tuteurs correspondants pour trancher de la validité de telle ou telle thèse.

Ce qu'à mon avis le lecteur devrait surtout retenir de ces réflexions, c'est (de ma part!) une méfiance certaine relativement à des essais de définitions par trop formelles de certains concepts de l'EIAO, définitions qui se prétendraient trop indépendantes des contenus précis des connaissances et des niveaux de ces connaissances, c'est à dire du projet précis d'enseignement que se propose tel ou tel tuteur. Travailler sur les différences et les spécificités me paraît actuellement bien plus urgent et important que de travailler à des unifications qui risquent d'être surtout des simplifications abusives de la réalité, et donc des obstacles à l'efficacité didactique des tuteurs à élaborer.

Mais peut-être cet antagonisme spécificités/unification recoupe-t-il simplement les deux pôles didactique/IA, et les différences entre les préoccupations des deux communautés ?

Références

[1] E. Delozanne, E. Carriere : Définir un processus explicatif, une étude de cas : la conception d'ELISE; Deuxièmes Journées Explication du PRC-IA du CNRS, Sophia-Antipolis, 1992.

[2] P. Jarraud : Utilisation pédagogique de l'informatique; "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", brochure de la Commission Inter-IREM Université (CI2U), 1990.

[3] A. Robert, J. Rogalski, R. Samurcay : Enseigner des méthodes; Cahiers de Didactique des Mathématiques n°38, Irem Paris Sud.

[4] M. Rogalski : Enseigner des méthodes en mathématiques; "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", brochure de la Commission Inter-IREM Université (CI2U), 1990.

[5] A. Schoenfeld : Mathematical Problem Solving; Academic Press.

[6] G. Paquette : Métaconnaissance dans les environnements d'apprentissage. Thèse de l'Université du Maine, 1991.

[7] J.F. Nicaud, M. Vivet : Les tuteurs intelligents, réalisations et tendances; TSI vol 7, n°1, 1988.

[8] A. Robert : Thèse d'état; Université Paris VII, 1982.

[9] J. Rogalski : Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques; Cahiers de Didactique des Mathématiques n°2, Irem Paris Sud.

[10] G. Polya : Comment poser et résoudre un problème; Dunod.

[11] A. Robert, I. Tenaud : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C; Recherche en Didactique des Mathématiques (La Pensée Sauvage, Grenoble), n°9.1, 1989.

[12] E. Delozanne : Thèse de l'Université du Maine, 1992.

[13] Y. Chevallard : Arithmétique, Algèbre, Modélisation, Etapes d'une recherche; Irem d'Aix-Marseille.

[14] E. Carriere, E. Delozanne, M. Vivet : Des connaissances pour produire des explications dans un tuteur intelligent; Revue d'Intelligence Artificielle, vol 4, n°2/1990.

[15] N. Balacheff : Nature et objet du raisonnement explicatif; Actes du colloque L'explication dans l'enseignement et l'EIAO, éditions Paris Onze, 1991.

Annexe

Université des Sciences et Technologies de Lille
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées

USTL

Deug A1 Suit.RC.001.XX

Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode.

Introduction

Le but de ces notes est de donner une *méthode* assez générale pour étudier la convergence ou la divergence des suites réelles, au moins du type de celles qu'on rencontre fréquemment en DEUG première année. L'ensemble de ces types sera précisé plus loin au moyen d'un classement.

La méthode que nous allons proposer permet de *démarrer* une recherche, au moyen d'une *stratégie de classement* et d'une *stratégie de recherche de conjectures*, puis de la mener à son terme au moyen d'une *stratégie de preuve*. Certaines de ces stratégies comportent diverses *tactiques*, qui elles mêmes utilisent des *techniques*. La nature de la suite étudiée permet souvent de trier rapidement les tactiques qui paraissent adaptées. De plus, on donnera un *procédé de contrôle, correction et reprise* en cas d'insuccès.

À plusieurs reprises, nous insisterons sur l'idée du *changement de point de vue* qu'il faut savoir effectuer pour choisir une stratégie ou une tactique, ou pour en changer si nécessaire : passer d'un point de vue numérique (essais pour des valeurs de n, majorations...) à un point de vue géométrique (représenter (u_n) au moyen du graphe d'une fonction...), et réciproquement (traduire en inégalités une propriété géométrique...) ; ou bien, passer d'une suite particulière à un problème général, s'exprimant au moyen d'une suite non précisée... Nous verrons plusieurs exemples de ces changements de point de vue.

Plan

0. Connaissances disponibles nécessaires.
   A. Les théorèmes généraux sur les suites.
   B. Les suites et les fonctions à connaître en toutes occasions.
   C. Trois techniques indispensables.

I. Stratégie de classement.
   1) Classer le problème en problème général ou en problème particulier.
   2) Classer une suite particulière.
   3) Autres moyens de classement.

II. Stratégie de recherche.
   1) Faire des tests préliminaires.
   2) Etudier des cas particuliers.
   3) Changer de point de vue.
   4) Faire "$n = \infty$".
   5) Localiser la difficulté principale.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve.
1) Si on a deviné la limite.
2) Pour montrer une divergence.
3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.
4) Identifier la limite.
5) Tactique "ε — N avec encadrements".
6) Partager une somme $\sum_{p=0}^{n} v_{n,p}$ en deux termes.
7) Traiter une suite de type classique par les techniques standard.
8) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration.

IV. Contrôler, redémarrer.
1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
2) Contrôler par l'extérieur.
3) Redémarrage.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

---

0. Connaissances disponibles nécessaires.

A. Les théorèmes généraux sur les suites.

Avec exemples, contre-exemples, dessins associés... En particulier : suites monotones, suites adjacentes, le théorème d'encadrement à ε près (*si* $\forall n$, $v_n \leq u_n \leq w_n$, $v_n \to v$ *et* $w_n \to w$, *alors* $v - \varepsilon \leq u_n \leq w + \varepsilon$ *pour* n *assez grand.*), suites associées au théorème du point fixe... Bien sûr, le concept de convergence (formulation en ε—N) doit être dominé.

B. Les suites "à connaître en toutes occasions, même la tête en bas" : les suites et séries géométriques ou arithmétiques, les séries de Riemann, le comportement comparé de n^α, a^n, $n!$, les suites récurrentes linéaires à un terme, les suites $(1 + \frac{x}{n})^n$, et $\sum_0^n \frac{x^p}{p!} \dots$
Les fonctions de terminale, puis celles du DEUG.

C. Trois techniques indispensables.
1) Savoir majorer et minorer. Instruments essentiels : le théorème de comparaison (*si* $f(x_0) = g(x_0)$, *et* $f' \geq g'$, *alors* $f(x) \geq g(x)$ *si* $x \geq x_0$, *et* $f(x) \leq g(x)$ *si* $x \leq x_0$), la comparaison des positions relatives d'une courbe graphe d'une fonction à dérivée monotone et d'une de ses tangentes ou d'une de ses cordes (inégalités de convexité).
2) Raisonner par récurrence.
3) Utiliser les développements limités.

I. Stratégie de classement.

Remarque : Bien sûr, il y a des suites qui n'entrent pas dans la classification ci-dessous.

1) Classer le problème en problème général ou en problème particulier.

2) Classer une suite particulière parmi :
— les suites définies par une formule $u_n = f(n)$;
— les suites définies implicitement par une équation, par exemple : "u_n est la plus grande racine de $x^3 - 3x - n$" ;
— les sommes de séries ;
— les récurrences fixes à 1 terme : $u_{n+1} = f(u_n)$;
— les récurrences variables à 1 terme : $u_{n+1} = f_n(u_n)$;
— les récurrences linéaires à 2 termes : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$;
— les doubles récurrences linéaires à 1 terme : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$;
— les suites s'écrivant $u_n = \sum_{p=0}^{n} v_{n,p}$;
— ...

3) Autres moyens de classement.
— simplifier l'écriture en *donnant un nom à certains groupements*, par exemple : si $u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+\sin n}{n+\ln n} + u_n}$, poser $a_n = \frac{n+\sin n}{n+\ln n}$, et étudier le problème général : si $a_n \to l$, que fait la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$? On est ainsi passé d'un problème particulier à un problème général : c'est un changement de point de vue.
— *modifier (u_n) pour la comparer à des suites plus simples* qui sont dans la classification précédente, par exemple : si $u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \cdots \sqrt{\frac{1}{n}}}}$ (n fois $\sqrt{\ }$), alors $w_n \leq u_n \leq v_n$, où $w_n = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2^n}}$ et $v_n = \sqrt{\frac{1}{n} + v_{n-1}}$ avec $v_1 = 1$.

II. Stratégie de recherche :
faire des hypothèses, se donner des idées et faire des conjectures.

Les questions à se poser concernent : convergence, divergence, identification de limite éventuelle, monotonie éventuelle, majorations ou minorations, comportement séparé de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), comparaison à des suites connues...

1) Faire des tests préliminaires.
   (a) La suite est-elle connue ?
   (b) Peut-on l'encadrer par des suites connues ? ou l'encadrer à ε près, pour n assez grand, par des suites connues ?
   (c) Que suggère un *dessin* ? Attention : un dessin bien observé peut suggérer plusieurs pistes différentes ; si on décide d'en suivre une, ne pas oublier un retour possible aux autres en cas d'insuccès de la première.
   (d) Calculer des valeurs de $u_0, u_1, u_2, \ldots$ (attention aux fausses impressions comme avec $\frac{n!}{20^n}$). Faiblesse du calcul : une liste de nombres, croissante par exemple, ne donne aucune indication sur les raisons de la monotonie.
   (e) La suite est-elle *évidemment* monotone (ce qui donne une piste de recherche) ? Exemple : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.
   (f) Calculer *littéralement* $u_2, u_3, u_4, \ldots$ pour deviner une formule éventuelle. Exemples : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$, ou $u_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}$ (quand on a des factorielles, il y a souvent intérêt à rester en fractions).

(g) La forme de la suite dirige-t-elle tout de suite vers une tactique (si par exemple $u_n = \sum_{p=0}^{n} v_{n,p}$ on pense à la tactique 6) ?

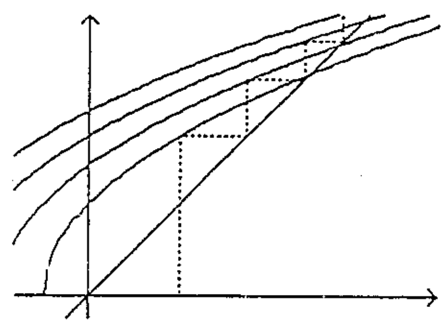
2) Dans un problème général, étudier des cas particuliers. Exemples :
— Si $u_n \to l$, que fait $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$? Étudier le cas $u_n \equiv l$.
— Si $u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$, où $a_n \to l$, que fait u_n ? Étudier le cas $a_n \equiv l$.

3) Changer de point de vue sur la suite.

(a) Changer la formule ou l'expression. Exemples :
— $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1+u_0^2+\cdots+u_n^2}{n+1}$ peut se définir par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+n)}{n+1}$.
— $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n} + u_n^2}$ peut se définir par $u_n^2 = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + 1 + u_1^2$.
— Une suite homographique a une forme bien plus simple si on l'exprime au moyen des points fixes de la fonction associée.
— On peut utiliser la fonction logarithme pour transformer une suite exprimée multiplicativement en une suite de nature additive ou linéaire. Exemple : si $u_{n+1} = nu_n^3$, (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$ est une suite récurrente linéaire.

(b) Passer du cadre numérique au cadre graphique et inversement.
— Pour une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, commencer par tracer le graphe de f et la bissectrice $y = x$.

— Pour une suite $u_{n+1} = f_n(u_n)$, tracer les courbes $y = f_n(x)$, l'*escalier* ou le *colimaçon*. Interpréter le comportement de (u_n) sur le dessin en termes de propriétés des f_n vues sur le graphique, et qu'il faudra prouver. Par exemple, comparer u_n et le point fixe x_n de f_n.



— Si $u_n = f(1) + \cdots + f(n)$, tracer le graphe de f, en déduire des encadrements, par exemple à l'aide de $\int_1^n f(x)\,dx$...

(c) Passer d'un problème général à un problème particulier, et inversement.

(d) Passer de l'étude de (u_n) à celle de $(u_{n+1} - u_n)$, et inversement. Par exemple, si $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n+n)}{n+1}$ avec $u_1 = 2$, alors $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n-1)}{n+1} \geq \frac{2}{n+1}$ à condition que $n \geq 1$, donc $u_n \geq \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{2} + 2$.

(e) Passer de l'étude de (u_n) à celle de $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, et inversement (la fonction logarithme permettant éventuellement de passer du quotient à une différence).

4) Faire "$n = \infty$".

Dans l'expression définissant u_n, on remplace certains termes $\varphi(n)$ par leur limite quand n tend vers $+\infty$ (si on la connait sans ambiguïté : attention aux $(u_n)^n$ par exemple) pour *deviner* le comportement de (u_n). Il faut alors rendre précis le raisonnement, et dire "si n est grand, $\varphi(n)$ vaut presque l", qu'on précise en : si $n \geq N_\varepsilon, l - \varepsilon \leq \varphi(n) \leq l + \varepsilon$; on peut alors faire des encadrements (dépendant de ε) de u_n pour $n \geq N_\varepsilon$.

5) Localiser la difficulté principale.

Il s'agit, soit d'exclure des pistes de recherche (la suite est *trop agitée*, par exemple, ni (u_n), ni (u_{2n}) ni (u_{2n+1}) ne paraissent monotones), soit de repérer ce qui empêche la suite d'être d'un type standard, et de concentrer alors les efforts sur ce point. Il s'agit aussi de tirer la leçon des essais infructueux : pourquoi telle tactique n'a pas marché ? Voir IV.4).

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve.

Écrire d'abord un plan de démonstration, avec l'emboîtement tactiques-techniques suggéré par la stratégie de recherche. Un tel plan va comporter en général des tactiques typiques, successives ou imbriquées, et comportant plusieurs techniques, dans la mesure où il va apparaître dans la résolution des sous-buts (suites auxiliaires, majorations préalables, etc.).

1) Si on a deviné la limite, montrer par des majorations que $u_n - l$ tend vers 0.

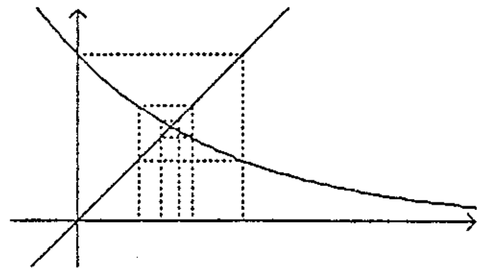
Il s'agit de la méthode utilisée en terminale : majorer $|u_n - l|$ par une suite classique tendant vers 0. Il s'agit souvent d'une suite du type C/n^α avec $\alpha > 0$. Une telle majoration peut assez souvent se montrer par une *récurrence paramétrée* : on note $H_n(C,\alpha)$ la propriété $|u_n - l| \leq C/n^\alpha$, et on cherche C et α pour que l'implication $H_n(C,\alpha) \Rightarrow H_{n+1}(C,\alpha)$ soit vraie à partir d'un certain rang N_0 ; il faut ensuite trouver un rang $n_0 \geq N_0$ tel que $H_{n_0}(C,\alpha)$ soit vraie. Il est souvent utile de poser $v_n = u_n - l$.
Exemple : si $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}u_n$, on devine facilement que la limite est 2 ; en posant $v_n = u_n - 2$, on cherche à majorer $|v_n|$ par C/n.

2) Pour montrer une divergence.
   (a) Montrer que la suite est non majorée ou non minorée. Cela peut se faire de plusieurs façons :
   — On minore (u_n) par une suite non majorée. Exemple : si $u_{n+1} = nu_n^3$ avec $u_1 \geq 1$, alors on montre d'abord par récurrence que $u_n \geq 1$, puis $u_n \geq n-1$.
   — Par l'absurde, par exemple : Pour $u_n = n^{\frac{1}{u_{n-1}}}$, si (u_n) était majorée par M (avec $M \geq 1$), $n = u_n^{u_{n-1}}$ serait majoré par M^M !
   (b) Exclure la seule limite possible, ou montrer qu'une limite ne peut pas exister. Exemples :
   — $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$; (u_n) est croissante, et si $u_n \to l$, $l \geq 1$ et $l = l + \frac{1}{l}$: absurde.
   — $u_0 = -\frac{1}{4}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$; (u_n) est décroissante, $u_n \leq -\frac{1}{4}$, or si $u_n \to l$, $l = 0$ ou $l = 1$: absurde.
   — $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$; en posant $f(x) = 3x - 2$, la seule limite possible $l = 1$ vérifie $f'(l) = 3$, donc est répulsive ; or $u_n = 1$ à partir d'un certain rang implique $u_0 = 1$.
   (c) Trouver une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui ne peuvent avoir la même limite. Exemples :
   — $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2}$; $u_{2n} \leq \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} \geq 2$.
   — $u_n = \frac{n}{n+2+(-1)^n(n+\sin n)}$; $u_{2n} \to \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} \to +\infty$.
   (d) Nier le critère de Cauchy. En général, il faut minorer $|u_{n+p} - u_n|$ par un nombre strictement positif fixe, pour p convenable éventuellement dépendant de n. Par exemple, si $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $u_{n+p} - u_n \geq \frac{p}{n+p} \geq \frac{3}{4}$ pour $p \geq 3n$.

3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.
   (a) Prouver la monotonie de (u_n) (calculs et/ou récurrence). Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser la monotonie de f ou le signe de $f(x) - x$.

(b) Majorer ou minorer (u_n) (calculs et/ou récurrence). Dans le cas des suites récurrentes, pour trouver un majorant C on se laisse guider par le dessin, ou on choisit C pour que la démonstration de $u_n \le C \;\Rightarrow\; u_{n+1} \le C$ *marche*, au moins pour n assez grand (récurrence paramétrée).

(c) Étudier séparément (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; c'est une méthode bien adaptée aux suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante. Exemple : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$; ici (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.



(d) Utiliser le critère de Cauchy. C'est souvent en désespoir de cause. Deux exemples importants quand même :
— somme de série $u_n = v_1 + \cdots + v_n$, avec v_n très petit pour n grand.
— $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $|f'| \le K < 1$; $|u_{n+p} - u_n| \le \frac{K^n}{1-K}|u_1 - u_0|$.

(e) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite λ : si $|\lambda| < 1$, $u_n \to 0$.

(f) Utiliser la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, en montrant par des encadrements qu'elle converge. Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

(g) Encadrer (u_n) entre deux suites convergentes (voir le deuxième exemple de I.3)). En particulier, dans le cas $u_{n+1} = f_n(u_n)$, comparer aux points fixes des f_n.

4) Identifier la limite.

(a) Si $u_n = f(n)$, f connue et ayant une limite en $+\infty$, alors $\lim u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. La recherche de cette limite peut utiliser les développements limités.

(b) $u_{n+1} = u_n + 13 \cdot 10^{-n^2}$, $u_0 = 1{,}3$; on obtient le développement décimal illimité de la limite de (u_n).

(c) Si $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, si (u_n) converge vers l, on a $l = f(l)$; et si on peut éliminer tous les points fixes (par exemple les points répulsifs) de f sauf un, on peut conclure.

(d) Plus généralement, si on peut éliminer tous les candidats à être la limite, sauf un. Exemple : u_n est la racine positive de $x^n + x^{n-1} + x^2 - x - 1 = 0$; $0 < u_n < 1$, (u_n) est croissante et on montre que si $t < 1$, t ne peut être limite ; donc $l = 1$.

5) Tactique "ε — N avec encadrements". Cette tactique est souvent utile pour les suites $u_{n+1} = f_n(u_n)$ et pour les suites à la marge de la classification.
Il s'agit d'encadrer u_n, pour $n \ge N$, par deux suites dépendant de ε et plus faciles à étudier, en s'appuyant sur ce qu'on a deviné dans la tactique de recherche d'hypothèse "faire $n = \infty$". Exemples :

— $u_n \to l$, que fait $v_n = \frac{u_1+\cdots+u_n}{n}$? Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que si $n \ge N$, $l - \varepsilon \le u_n \le l + \varepsilon$, donc $s_n \le v_n \le t_n$ avec $s_n = \frac{u_1+\cdots+u_N+(n-N)(l-\varepsilon)}{n}$ et $t_n = \frac{u_1+\cdots+u_N+(n-N)(l+\varepsilon)}{n}$; comme $\lim s_n = l - \varepsilon$ et $\lim t_n = l + \varepsilon$, il existe $N_1 \ge N$ tel que si $n \ge N_1$, $l - 2\varepsilon \le s_n \le v_n \le t_n \le l + 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim v_n = l$.

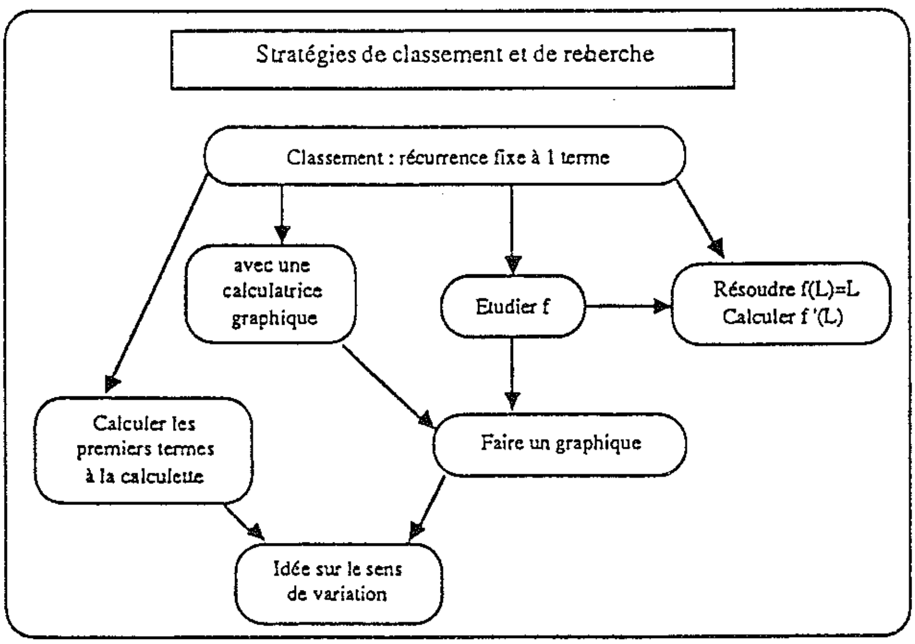
— $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{n} + u_n}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que si $n \ge N$, $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. On pose $v_N = w_N = u_N$, et pour $n \ge N$, $v_{n+1} = \sqrt{\varepsilon + v_n}$ et $w_{n+1} = \sqrt{w_n}$; alors $w_n \le u_n \le v_n$. On montre alors que $\lim w_n = 1$ et que $\lim v_n = \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2}$. Donc pour un $N_1 \ge N$, si $n \ge N_1$, on a $1 - \varepsilon \le u_n \le \frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2} + \varepsilon$, d'où $1 - \varepsilon \le u_n \le 1 + 2\varepsilon\ldots$

Attention. Le difficile est de comprendre quand on a gagné : si on arrive à : pour $n \geq N$, $l - \varepsilon - 2\varepsilon^2 \leq u_n \leq l + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, c'est gagné ! Pourquoi ?

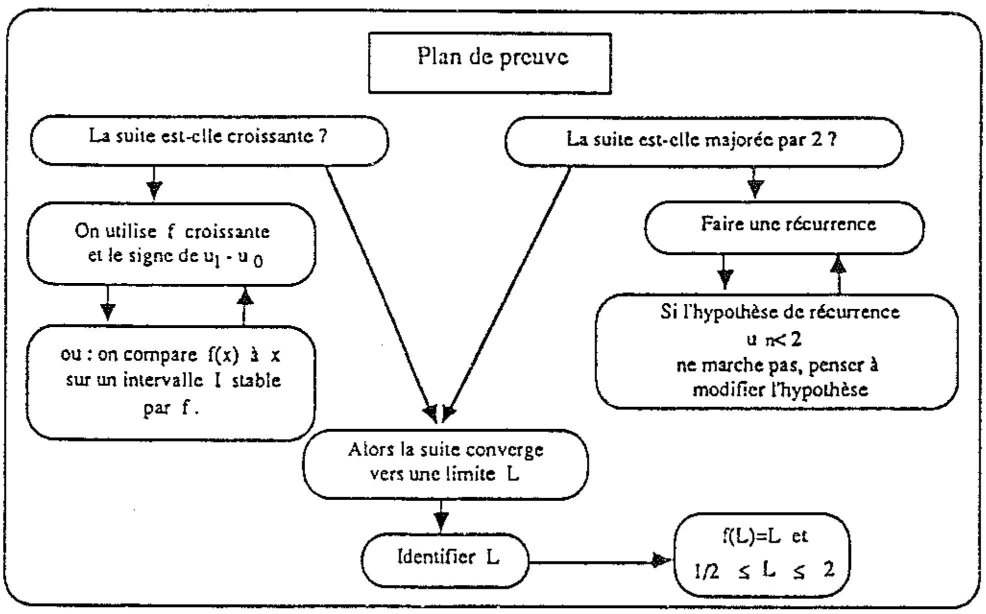
6) Partager une somme $\sum_{p=0}^{n} v_{n,p}$ en deux termes, dont l'un (ou les deux) est à majorer par $\varepsilon/2$.
On sommera de 0 à q d'une part et de $q+1$ à n d'autre part. Dans certains cas, on pourra prendre q fixe, assez grand pour que l'un des morceaux soit inférieur à $\varepsilon/2$, puis faire tendre n vers l'infini dans le deuxième morceau. C'est le cas dans le premier exemple de 5), $v_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p}{n}$ ou pour la suite $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}$. Dans d'autres cas, il faudra prendre q variable avec n, par exemple $q = [\sqrt{n}]$ ou $q = [n/2]$ ou $q = [n - \sqrt{n}]$...

7) Traiter une suite de type classique par les techniques standard (récurrente linéaire, homographique, de la forme $f(n)$, etc.).
On rappelle ce cas pour mémoire, car il servira souvent de moyen intermédiaire dans l'étude d'une suite plus compliquée.

8) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration suggéré par les stratégies de recherche, avec mise en évidence des choix décidés... sur lesquels on peut revenir. Suite $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.



Stratégie de preuve, pour prouver ce qu'on a observé :



IV. Contrôler, redémarrer.

1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
   (a) On a écrit un plan de démonstration : où en est-on ? Qu'est-ce qui est prouvé, reste à prouver... ? L'écrire, le noter dans le plan.
   (b) On utilise des théorèmes du cours : vérifier l'énoncé, faire le dessin correspondant, se rappeler un exemple d'application, comparer à la situation actuelle. Va-t-on l'utiliser pour prouver une convergence, ou pour prouver une divergence, par exemple par l'absurde ?
   (c) Attention au raisonnement *sous hypothèse* : quand on a montré que “si on a P, alors on a Q”, on a tendance à faire ensuite comme si Q était vraie — on oublie de vérifier si l'hypothèse P est vraie.
   (d) Dans le raisonnement par récurrence, il arrive que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ se démontre seulement si $n \geq N_0$; ne pas oublier de trouver un $n_0 \geq N_0$ tel que P_{n_0} soit vraie.

2) Contrôler par l'extérieur.
   A tout instant, il faut confronter ses résultats intermédiaires avec ce qui est déjà prouvé, avec ce qu'on sait par ailleurs, avec les prévisions faites, la figure dessinée, les valeurs calculées... Toute incohérence doit immédiatement amener à chercher l'erreur. Le bon sens et le stock d'exemples et de contre-exemples sont là indispensables.

3) Redémarrer.
   Si la preuve bloque, si on n'arrive pas à conclure, il faut repérer où se situe le blocage, et comparer aux choix faits, afin d'en faire d'autres :
   (a) Au niveau technique : telle majoration ne marche pas ? Penser à une autre technique de majoration ; penser aussi qu'en utilisant une condition suffisante, on perd un peu sur les hypothèses...
   (b) Au niveau tactique : par exemple, pour montrer que (u_n), croissante, tend vers $+\infty$, on n'arrive pas à minorer u_n par quelque chose tendant vers $+\infty$; se souvenir qu'on

a fait le choix de cette tactique; penser à une autre : si on supposait $u_n \to l$, on obtiendrait peut-être une contradiction.

(c) Au niveau stratégique : globalement, rien ne marche, on trouve des incohérences dans les résultats. Avait-on fait la bonne hypothèse ? Refaire le dessin, recalculer quelques valeurs, retourner aux autres pistes suggérées par le dessin et provisoirement inexploitées... Et surtout, *changer de point de vue*, aborder le problème d'un autre côté, et pour cela être conscient des choix de départ en ayant eu la prudence de les *écrire* explicitement.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

Étudier les suites suivantes :

1) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$ puis $v_n = u_1 + \cdots + u_n$.
2) $u_n = \frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln^2 n}$.
3) $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2}$.
4) $u_1 = 2$, $u_n = n^{\frac{1}{u_{n-1}}}$.
5) $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} = 2\ln(1+u_n)$.
6) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}\sqrt{u_n}$.
7) $v_1 = 1$, $v_{n+1} = 1 + \frac{n}{v_n}$ et $u_n = v_n - \sqrt{n}$.
8) $u_n = \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{n}}}}$ (n fois $\surd$).
9) $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 1 - \operatorname{th} u_n$.
10) $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.
11) $u_{n+1} = 1 - (u_n - 1)^3$ (discuter selon u_0).
12) $u_{n+1} = u_n(u_n - 1)$ (discuter selon u_0).
13) $u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n - 1 + \frac{2n}{n+1}\frac{1}{u_n - 1}$.
14) $u_{n+1} = 1 + \operatorname{argsh}((u_n - 1)\operatorname{sh} 1)$ (discuter selon u_0).
15) $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^3 + \cdots + \sqrt{n^n}}}}$.

UN MODELE DE RAISONNEMENT EN ALGEBRE BASE SUR DES CONNAISSANCES COMPILEES

Jean-François Nicaud, Mustapha Saïdi
L.R.I., CNRS URA 410, Université de Paris 11,
91405 Orsay cedex, France
{jfn , saidi}@lri.fr

1. Introduction

La problématique considérée dans cet article est celle de la modélisation cognitive et computationnelle d'un domaine de problèmes et de connaissances. Par modélisation cognitive nous entendons la recherche d'une certaine proximité entre le modèle et certains êtres humains au niveau des connaissances et de leur structuration se traduisant par une proximité des comportements engendrés. Par modélisation computationnelle nous entendons des connaissances et des structures pouvant assez facilement être mises en œuvre sur ordinateur avec les techniques d'aujourd'hui.

La conception d'EIAO (Environnement Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur) est l'un des objectifs de cette modélisation.

Nous nous plaçons sur le champ du raisonnement algébrique, plus précisément, nous considérons des résolutions de problèmes effectuées par des transformations successives d'expressions algébriques : étant donné un problème portant sur une expression symbolique e, il s'agit de trouver une *expression résolue* e_1 équivalente à e et une chaîne de transformations faisant passer de e à e_1. Ceci entre dans le cadre général de la recherche heuristique [Farreny & Ghallab 87, Pearl 90] : la résolution se fait en développant un espace de recherche dont les nœuds sont des expressions et les arcs des transformations licites. Lorque l'on ne compare pas les expressions engendrées, l'espace de recherche est un arbre, on peut avoir plusieurs nœuds avec la même expression ; lorsqu'on les compare pour ne constituer qu'un nœud pour une même expression, l'espace de recherche est un graphe. Dans tous les cas, l'espace de recherche potentiel est très grand (éventuellement infini) et des connaissances sont nécessaires pour limiter la partie que l'on parcourt et arriver rapidement à une solution pour les problèmes les plus fréquents. Ces connaissances sont des connaissances du domaine qu'un agent cognitif peut acquérir par compréhension du domaine ou par des mécanismes généraux d'apprentissage (généralisation, analogie...). Elles sont mises en œuvre à l'aide de connaissances générales.

Le modèle MCA (Modèle basé sur des connaissances Compilées pour l'Algèbre) que nous proposons a pour objet de représenter un agent cognitif ayant une assez bonne compétence dans un domaine de problèmes d'algèbre : il sait mobiliser les connaissances utiles pour les classes de problèmes de ce domaine et sait résoudre de nombreux problèmes en appliquant des connaissances mémorisées. MCA comporte des transformations, des concepts pour apparier les transformations aux expressions, des plans pour regrouper des transformations, des heuristiques pour choisir les actions (transformations, plans, retours en arrière), des décompositions de problèmes en sous-problèmes, des méta-stratégies pour poursuivre ou abandonner les sous-problèmes.

Le modèle MCA peut être regardé à travers le paradigme de la compilation des connaissances développé en psychologie cognitive [Anderson 83]. Si l'on sépare les connaissances déclaratives et les connaissances compilées en considérant que les premières ne sont pas intégrées à un mécanisme d'application et que les secondes le sont, MCA concerne fondamentalement des connaissances compilées. S'il l'on essaie de faire une séparation plus graduée en considérant que des connaissances peuvent être plus ou moins fortement compilées, les principaux concepts du modèle ont des statuts différents : on peut considérer qu'une heuristique est une connaissance faiblement compilée et qu'un plan est une connaissance fortement compilée ; la structure du modèle permet différents degrés de compilation.

Cet article commence par la description du modèle MCA en dégageant les niveaux connaissance et méta-connaissance. Il se poursuit par la présentation d'un prototype du projet APLUSIX qui met en œuvre ce modèle pour résoudre des problèmes de factorisation de polynômes et de résolution d'équations. Il se termine par une discussion sur les types de modèles pouvant servir en EIAO. Dans les deux premières parties, l'accent est mis sur la modélisation de la connaissance de résolution. Dans la dernière, trois autres types de connaissances d'un agent pédagogique sont aussi considérées : les connaissances pour analyser le comportement de l'élève, les connaissances d'explication et d'aide.

2. Le modèle MCA

Nous modélisons l'état de connaissance KS (Knowledge State) d'un agent cognitif a par un quadruplet KS = (D , O , S , M) dans lequel :
- D est un *domaine algébrique de problèmes*,
- O un ensemble de connaissances opératoires sur D,
- S un ensemble de connaissances stratégiques portant sur O,
- M un ensemble de connaissances méta-stratégiques permettant de mettre en œuvre S et O.

2.1. Domaine algébrique de problèmes

Le modèle MCA s'appuie sur un concept de *domaine algébrique de problèmes* qui définit de façon précise les objets intervenant dans le raisonnement avec une partie sémantique, des objets mathématiques abstraits définis par une axiomatique, et une partie syntaxique, des expressions suivant une grammaire. Les premiers ne sont manipulables que par l'intermédiaire des seconds, autrement dit, les objets mathématiques ne sont manipulables que par l'intermédiaire de leur représentation syntaxique. Il n'y a pas de bijection entre l'ensemble des objets mathématiques et l'ensemble des expressions : il existe des expressions ne représentant aucun objet mathématique ; un objet mathématique a généralement un nombre infini d'expressions le représentant. Les axiomes sur les objets mathématiques se traduisent par des axiomes sur les expressions. Dans MCA, un *domaine algébrique de problèmes* comprend aussi la définition précise des types de problème que l'on veut résoudre.

2.1.1. Termes

On considère des ensembles d'objets mathématiques et un ensemble de termes (ou expressions) représentant ces objets. L'ensemble des termes suit la définition ci-dessous empruntée à la théorie des réécritures [Dershowitz & Jouannaud 89].

Etant donné :

- un ensemble dénombrable C de symboles de constantes,
- un ensemble dénombrable X de symboles de variables,
- un ensemble fini F de symboles de fonctions d'arité fixe supérieure ou égale à un ou d'arité variable (pour les fonctions associatives),

un terme est un arbre dont les feuilles sont éléments de C ou X, et dont les autres nœuds sont des éléments de F respectant l'arité[1].

[1] Habituellement dans la théorie des réécritures, C et F forment un seul ensemble, les symboles de constantes étant des fonctions d'arité zéro ; nous les avons séparés car ces objets nous semblent être cognitivement de nature différente. Nous avons choisi une définition variadique des termes (arité variable pour les fonctions associatives) pour sa proximité avec la représentation usuelle.

On suppose qu'il existe une bijection entre l'ensemble T des termes et l'ensemble des formes de la représentation mathématique habituelle.

<u>Exemple</u> :

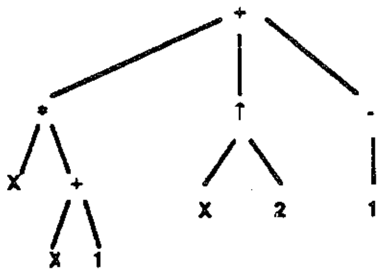
L'ensemble T_1 des formes syntaxiques des polynômes de la variable x à coefficients rationnels, numériques peut être défini ainsi :

$C = \mathbb{Q}_c$: ensemble des formes canoniques des rationnels,

$X = \{x\}$

$F = \{+ ; - ; * ; \uparrow\}$ avec "-" unaire, "+" et "*" d'arité variable, $\uparrow$ d'arité 2.

le terme :



a la représentation habituelle $x(x+1)+x^2-1$.

Dans la suite, nous utiliserons la représentation habituelle à la place de la représentation arborescente.

2.1.2. Identités, règles de réécriture

On considère un ensemble d'axiomes et de théorèmes exprimés sous la forme d'identités (égalités universellement quantifiées entre deux termes) avec éventuellement des conditions.

<u>exemples d'identités</u> :

$A(B+C)=AB+AC$

$A\neq 0,\ A^0=1$

Ces identités peuvent être utilisées à l'aide du mode d'inférence *remplacement d'égaux* de la façon suivante :

Si un sous-terme d'un terme *e* s'unifie avec un membre d'une identité I pour une substitution σ des variables de I et si les conditions de I sont vérifiées, alors ce sous-terme peut être remplacé par l'autre membre de l'identité I après application de la substitution σ. Le terme obtenu après remplacement est équivalent à *e* : il représente le même objet mathématique.

Par exemple, le membre droit de l'identité $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ peut s'unifier avec le sous-terme x^2-4 du terme $4(x-2)(x+2)-x(x^2-4)$ pour la substitution $(A \rightarrow x\ ,\ B \rightarrow 2)$. Le sous-terme peut être remplacé par $(x-2)(x+2)$ et le terme par $4(x-2)(x+2)-x(x-2)(x+2)$.

A chaque identité on associe deux règles de réécriture en choisissant une orientation pour le remplacement, ainsi, à l'identité $A(B+C)=AB+AC$ on associe les règles $A(B+C) \rightarrow AB+AC$ et $AB+AC \rightarrow A(B+C)$.

On peut considérer que les identités sont des formes déclaratives de connaissances et que les règles de réécritures sont des formes compilées. En effet, d'une part, le mécanisme de remplacement d'égaux est extérieur aux identités alors qu'il est codé d'une certaine façon dans la flèche des règles de réécriture, d'autre part, on peut considérer seulement les règles de réécriture ayant un intérêt pour les types de problème considérés et attribuer une valeur à cet intérêt pour chaque type de problème.

2.1.3. Domaine algébrique de problèmes

On définit un domaine algébrique de problèmes comme un triplet (T , **I** , **P**) dans lequel :
T est un ensemble de termes représentant des objets mathématiques,
I est un ensemble d'identités,
P est un ensemble de types de problème.

On définit un type de problème p par un prédicat de solution qui est une application de T dans {V , F}. On définit un problème par un couple (p , e) composé d'un type de problème p et d'un terme e.

Résoudre un problème (p , e) consiste à trouver une chaîne finie $e \to e_1 \to \dots e_n$ de dérivations dans laquelle $e_i \to e_{i+1}$ est l'application d'une règle de réécriture associée à une identité de **I** et telle que $\phi(e_n)=V$, ϕ étant le prédicat de solution de p.
e_n est appelé une *solution*, une *forme résolue* ou un *résultat* de (p , e).
$e \to e_1 \to \dots e_n$ est un *chemin de solution* et une preuve que e_n est une solution. Un tel chemin est souvent présenté en omettant des pas correspondant à des calculs effectués mentalement.

Une résolution est un processus développant un arbre de recherche en appliquant des règles de réécriture jusqu'à l'obtention d'une solution. Une résolution peut faire appel à des sous-problèmes pour établir qu'un terme peut être remplacé par un autre, par exemple :
(résoudre-équation $\frac{A}{B} = 0$)
peut faire appel aux sous-problèmes (factoriser A) et (factoriser B)

<u>exemple</u> :

On considère le domaine de problème $\mathbf{D}_1$ défini par :
* l'ensemble T_1 des formes de polynômes d'une variable à coefficients rationnels,
* un ensemble **I** d'identités permettant d'engendrer :
  - des règles de réduction : $0A \to 0$, $1A \to A$, $0+A \to A$, $A^0 \to 1$, $A^1 \to A$, des réductions additives réécrivant par exemple $2(x+1)+x+1$ en $3(x+1)$ ...
  - les règles de développement : $A(B+C) \to AB+AC$, $(A-B)(A+B) \to A^2-B^2$
    $-(AB) \to -AB$, $U^n \to UU...U$, pour n pair $(-U)^n \to U^n$,
    pour n impair $(-U)^n \to -U^n$, $-(-A) \to A$, $-(B+C) \to -B-C$
  - les règles de factorisation : $AB+AC \to A(B+C)$ et $A^2-B^2 \to (A-B)(A+B)$
* les types de problèmes *réduire*, *développer-réduire*, *factoriser*, *résoudre-équation* définis par le tableau ci-dessous :

p	ϕ
réduire	ne pas pouvoir appliquer de règle de réduction
développer-réduire	être sous la forme d'une somme de monômes réduits avec des coefficients sous forme canonique
factoriser	s'exprimer comme combinaison avec - * ↑ de termes du type a_ix+b_i, les a_i et b_i étant des formes canoniques de nombres
résoudre-équation	être une disjonction d'égalités du type $x=a_i$, les a_i étant des formes canoniques de nombres distincts

Le problème : (factoriser x^3-4x)
admet le chemin de solution[2] : $x^3-4x \rightarrow x(x^2-4) \rightarrow x(x-2)(x+2)$
et la solution : $x(x-2)(x+2)$

Le sens de *réduire* dépend de l'ensemble R des règles de réduction. Dans ce domaine de problème, réduire peut avoir comme fonction principale d'aider à la résolution des autres types problèmes.

Les types de problèmes autres que réduire ont des définitions non liées à des règles.

On peut considérer des domaines de problèmes avec d'autres sens pour *factoriser*, par exemple avec le prédicat de solution *être un produit* ou le prédicat de solution *être un terme construit en combinant avec - * ↑ des formes développées réduites de polynômes premiers* .

2.1.4. Types de problème simples et complexes

La propriété de terminaison de la théorie des réécritures permet de placer une séparation entre types de problèmes simples et complexes.

Un ensemble de règles de réécriture R1 sur un ensemble de termes T a la propriété de terminaison s'il n'existe pas de chaîne infinie de dérivation avec des règles de R1 [Dershowitz & Jouannaud 89].

Définitions
Etant donné un domaine de problèmes (T , **I** , **P**), un type de problème p est simple s'il existe un ensemble de règles R1 ayant la propriété de terminaison et tel que le prédicat de solution de p soit équivalent à : *ne pas pouvoir appliquer de règle de R1.*
Un type de problème est complexe dans les autres cas.

Les problèmes simples peuvent se résoudre en appliquant des règles de l'ensemble de règles de réécriture associé, dans n'importe quel ordre, jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Pour les problèmes complexes, des connaissances stratégiques sont nécessaires pour limiter la recherche.

Avec le domaine de problèmes $\mathbf{D}_1$ défini précédemment, le type de problème *réduire* est simple par définition. Le type de problème *développer-réduire* est simple car pour résoudre, il suffit d'appliquer les règles de développement et les règles de réduction : les premières font disparaître les parenthèses (il y a une règle pour chaque situation), les secondes ne font pas apparaître de parenthèses[3]. Le type de problème *factoriser* est complexe : la résolution des problèmes de factorisation s'appuie sur des règles de factorisation mais nécessite parfois des développements ; factorisations et développements étant inverses empêchent la terminaison[4]. Le type de problème *résoudre-équation* est complexe du fait qu'il contient le type précédent.

Si l'on restreint l'ensemble des problèmes, un type de problème complexe peut devenir simple : c'est le cas de *résoudre-équation* pour des équations de degré 1, c'est aussi le cas de *factoriser*, en milieu scolaire, à certains niveaux.

La confluence est un autre concept de base de la théorie des réécritures. Pour un ensemble de règles de réécriture qui a la propriété de terminaison, il y a confluence si la

---

[2] On suppose que les connaissances en appariement permettent d'apparier A^2-B^2 à x^2-4.

[3] Pour être rigoureux, puisque les objets sont des arbres, il faudrait définir des priorités d'opérateurs et parler *d'opérateur portant sur un opérateur moins prioritaire* au lieu de *parenthèses*.

[4] Ceci n'étant pas une preuve formelle.

forme réécrite finale de tout terme (appelée forme normale) ne dépend pas de l'ordre d'application des règles de R. La confluence n'est pas liée à la complexité de la résolution mais à l'unicité de la solution. Comme la tâche est de trouver une solution et non de prouver l'unicité de la solution, nous pouvons considérer la confluence comme un problème cognitivement non pertinent pour le type de domaines de problèmes que nous considérons. Si l'on veut regarder les choses de plus près dans $\mathbf{D}_1$, il y a solution unique pour *développer-réduire* modulo la commutativité et l'associativité car on peut mettre en bijection l'ensemble des formes développées réduites avec l'ensemble des polynômes. Il n'y a pas solution unique pour *réduire* car 1+x+1+x peut se réduire en 2(1+x) par la règle de réduction additive appliquée à 1=x et 1+x, mais aussi en 2+2x avec la même règle appliquée une fois à 1 et 1, et une fois à x et x. Il n'y a pas solution unique pour *factoriser* car 2(x+1)(x-2) et (2x+2)(x-2) sont deux solutions du problème <factoriser 2x(x-2)+2(x-2)>.

2.2. Les connaissances opératoires

Dans le modèle MCA, les connaissances opératoires sont modélisées par un quadruplet O = (C , T , P , K) dans lequel :
C est un ensemble de concepts sur les termes,
T est un ensemble de transformations,
P est un ensemble de plans,
K est un ensemble de connaissances en calcul.

Ces connaissances sont mises en œuvre par les connaissances de **S** et **M**.

2.2.1. Les concepts sur les termes

Un concept sur les termes représente une classe de termes et possède des traits permettant de manipuler les éléments de cette classe sans s'occuper de leur forme syntaxique.

Exemples :

le concept de monôme avec les traits *coefficient*, *variable*, *degré* ;
le concept de carré avec le trait *racine-carrée* ;
le concept de facteur-commun avec les traits *facteur* et *cofacteur*.

2.2.2. Les transformations

Une transformation est soit une règle de réécriture issue directement d'une identité de **D** (en remplaçant = par $\rightarrow$), soit une règle déduite des identités en les composant ou en utilisant des concepts sur les termes.

Exemples :

Règle de réécriture issue directement d'une identité :
$AB+AC \rightarrow A(B+C)$

Transformation utilisant le concept de monôme avec une syntaxe de règle de réécriture :
$ax^n+bx^n \rightarrow (a\underline{\underline{+}}b)x^n$

l'appariement des formes ax^n et bx^n est fait à l'aide du concept de monôme, cette règle peut ainsi s'appliquer à $3x^2+x^2$ bien que b soit absent ; $\underline{\underline{+}}$ est la somme calculée[5].

La même transformation avec une syntaxe de règle de production :
SI A est un monôme de coefficient a, de variable x, de degré n
ET B est un monôme de coefficient b, de variable x, de degré n

[5] avec a=2 et b=5, exprimer a+b et $a\underline{\underline{+}}b$ donne respectivement 2+5 et 7

ALORS remplacer A+B par le monôme de coefficient $a \underline{\underline{+}} b$, de variable x, de degré n

Ces transformations ont un statut par rapport aux types de problèmes de **D**. Nous considérons que ce statut est exprimé à l'aide de concepts stratégiques de base, chacun de ces concepts définissant un sous-ensemble de T. Par exemple, pour un KS sur $\mathbf{D_1}$, on peut partitionner les règles portant sur les expressions polynomiales en : règles de réduction, règles de mise en forme, règles de développement, règles de factorisation.

2.2.3. Les plans

Nous considérons ici un plan comme une combinaison de sous-problèmes qui a été mémorisée du fait de son intérêt pour un type de problème de **D**. Cet intérêt se traduit en général par un gain sur l'arbre de résolution (moins de nœuds engendrés) et par un gain de temps en réduisant énormément le raisonnement stratégique pendant l'application du plan. Comme nous l'avons dit en introduction, les plans comportent des connaissances stratégiques qui sont fortement compilées.

Les plans du modèle MCA ont les particularités suivantes :
- ils comportent des conditions servant à déterminer quand le plan est applicable, ces conditions pouvant s'exprimer à l'aide d'un langage comportant différents connecteurs,
- ils peuvent s'appliquer à des sous-expressions de l'expression considérée,
- ils comportent un corps de plan qui est une succession de sous-problèmes.

Nous avons choisi une structure simple pour le corps de plan afin d'avoir une bonne lisibilité.

Exemple de plan :

SI e1 et e2 sont deux termes d'une somme
SOIT m1 le monôme de plus haut degré de e1
SOIT m2 le monôme de plus haut degré de e2
SI m1+m2 est nul
ALORS développer-réduire e1
développer-réduire e2
réduire

Il faut noter que lorsqu'une étape d'un plan a été appliquée à un nœud de l'arbre, l'expression a été réécrite et de nouveaux nœuds ont été engendrés. Les étapes autres que la première font donc référence à des objets qui ont évolué.

<u>Remarque</u> :

Dans le modèle MCA, le concept de but est un peu caché du fait de la compilation des connaissances : chercher à atteindre un but se fait en posant un sous-problème entrant dans l'un des types de problèmes répertoriés. C'est pourquoi les briques de base des plans sont des sous-problèmes.

2.2.4. Les connaissances en calcul

Nous appelons connaissances en calcul, les connaissances mises en œuvre pour appliquer les transformations. Cela consiste à appliquer une substitution au terme résultat de la transformation, à remplacer un sous-terme par ce terme et à appliquer, quand cela est possible, quelques réductions élémentaires.

2.3. Les connaissances stratégiques

Nous appelons *connaissances stratégiques au sens large*, les connaissances qui servent à choisir les transformations à appliquer et nous appelons *heuristiques* des connaissances stratégiques atomiques exprimées sous forme de règles. Dans le modèle MCA, une première partie des connaissances stratégiques au sens large est compilée dans les plans (puisque les étapes d'un plan s'enchaînent) ; une deuxième partie est formée d'heuristiques qui s'appliquent aux transformations, aux plans et à l'arbre de résolution : nous les appelons *connaissances stratégiques* ; une troisième partie constitue les connaissances méta-stratégiques servant à appliquer les *connaissances stratégiques* et à faire fonctionner le raisonnement.

Le modèle MCA s'appuie sur une échelle de valeurs symboliques totalement ordonnée {t-faible, faible, moyen, a-bien, bien, t-bien} dite *échelle de qualités*. Les heuristiques apportent des informations ou effectuent des actions sur les transformations et les plans applicables en fonction du contexte.

Certaines heuristiques écartent des transformations ou des plans applicables, exemple :

SI le type de problème est factoriser
ET une transformation applicable TA effectue une factorisation sur les termes d'une somme sauf une constante
ALORS écarter TA

Des heuristiques attribuent des qualités en fonction du type de problème et des concepts stratégiques de base, exemple :

SI le type de problème est factoriser
ET une transformation applicable TA effectue une factorisation
ALORS qualifier TA bien

Des heuristiques modifient des qualités en fonction du contexte, exemple :

SI le type de problème est factoriser
ET une transformation applicable TA effectue une factorisation engendrant un facteur F
ET F est un facteur d'un autre terme de la somme englobante
ALORS augmenter la qualité de TA

2.4. Les connaissances méta-stratégiques

Pour faire fonctionner les connaissances opératoires et stratégiques, il est nécessaire d'avoir un mécanisme, un interpréteur au sens informatique du terme. Celui-ci peut être plus ou moins sophistiqué et plus ou moins explicite.

Exemple d'interpréteur rudimentaire :

Itérer sur :
1) si le prédicat de solution du type de problème est vérifié, arrêter l'itération (succès)
2) déterminer l'ensemble **T** des transformations/plans applicables de l'étape courante
3) appliquer les heuristiques du niveau stratégique à **T**
4) si **T** est vide, arrêter l'itération (échec)
5) choisir la meilleure transformation/plan applicable de l'étape courante
6) appliquer **ta** ; si **ta** échoue, arrêter l'itération (échec)

Cet interpréteur suit une seule ligne de raisonnement, il n'est pas capable de revenir en arrière, il peut effectuer un raisonnement sans fin. Il peut être amélioré en traitant les échecs par un retour en arrière sur l'étape précédente. On a alors un modèle pouvant avoir un raisonnement stratégique de haut niveau (étape 3) mais n'ayant pas de réelles connaissances méta-stratégiques : il est obstiné, ne revenant en arrière que lorsque la ligne de raisonnement en cours échoue. Il peut par exemple lancer un raisonnement dans une direction a priori intéressante qui s'avère ne pas aboutir mais amener un développement infini de l'arbre alors qu'une autre direction fournirait une solution.

La problématique méta-stratégique du modèle MCA comporte les points suivants :
- pouvoir abandonner à tout moment la ligne de raisonnement courante (la direction de recherche, le sous-problème, le plan) et pouvoir reprendre une ligne de raisonnement abandonnée,
- pouvoir abandonner à tout moment la résolution,
- optimiser la recherche des transformations/plans applicables,
- gérer l'aspect explicite/implicite des sous-problèmes.

L'unité de temps considérée (donnant un sens aux mots *à tout moment*) est la production d'un pas de raisonnement.

Pour traiter ces points, le modèle MCA comporte cinq interpréteurs :
- un interpréteur de problèmes simples,
- un interpréteur de problèmes complexes,
- un interpréteur de plans,
- un lanceur de sous-problèmes,
- un superviseur.

Pour chaque pas de raisonnement, le travail commence au niveau du superviseur qui considère le problème en cours p et l'étape en cours. Il prend l'une des décisions suivantes :
- abandon général de la résolution,
- passage au problème père de p (quand p est achevé),
- poursuite de p,
- mise en sommeil de p et lancement ou poursuite d'un autre problème p_1.

Pour prendre sa décision, le superviseur applique ses connaissances méta-stratégiques et raisonne sur l'arbre de raisonnement prenant principalement en compte la longueur et la complexité des problèmes (en cours, en sommeil ou susceptibles d'être lancés).

Le lancement et la poursuite d'un problème se font par l'intermédiaire de son interpréteur qui commence par effectuer son propre raisonnement méta-stratégique.

L'interpréteur de problèmes simples s'occupe du suivi des arguments du problème et applique la première transformation applicable à l'expression courante ou décrète que le problème est résolu si aucune transformation n'est applicable. Rappelons que pour un problème simple, l'ensemble des règles termine et fournit une solution.

Pour les problèmes complexes, l'espace de recherche est un arbre et les connaissances peuvent comporter de nombreuses transformations/plans qu'il faut choisir avec soin. L'interpréteur des problèmes complexes optimise la recherche des transformations/plans applicables en utilisant une information associée à chacun(e) indiquant sa qualité maximale (il s'agit d'une connaissance compilée indiquant, sur l'échelle des qualités, la valeur maximale de la transformation/plan). Il gère le développement de l'arbre en cherchant à prendre les directions les meilleures mais en cherchant aussi à garder une certaine stabilité.

L'interpréteur de plans a pour charge de faire suivre les arguments d'un problème à l'autre d'un plan (point évoqué en 2.2.3.) et de lancer le problème suivant quand le précédent n'a pas échoué.

Le lanceur de sous-problèmes décide, lorsqu'un sous-problème est lancé, s'il apparaît comme un sous-problème explicite (on le pose explicitement et on le traite à part), comme un sous-problème semi-explicite (on indique le but et on effectue le traitement sur le même arbre de raisonnement), ou comme un sous-problème implicite (on effectue le traitement sur le même arbre de raisonnement sans indiquer le but).

3. Mise en œuvre dans APLUSIX

Nous avons implanté ce modèle ci-dessus sur deux types de problèmes : les factorisations de polynômes et les résolutions d'équations polynomiales. Ces deux types de problèmes comportent des connaissances communes importantes sur les quatre composantes de l'état de connaissances KS du modèle MCA.

La mise en œuvre est effectuée avec le système d'inférence SIM [Nicaud 87] dans l'environnement Lisp (dialecte Le_lisp) sur macintosh. Chacun des interpréteurs de la méta-stratégie est implanté sous forme de paquet de règles de production écrites en SIM.

La figure 1 présente une résolution d'un exercice assez difficile nécessitant des appels explicites à des sous-problèmes.

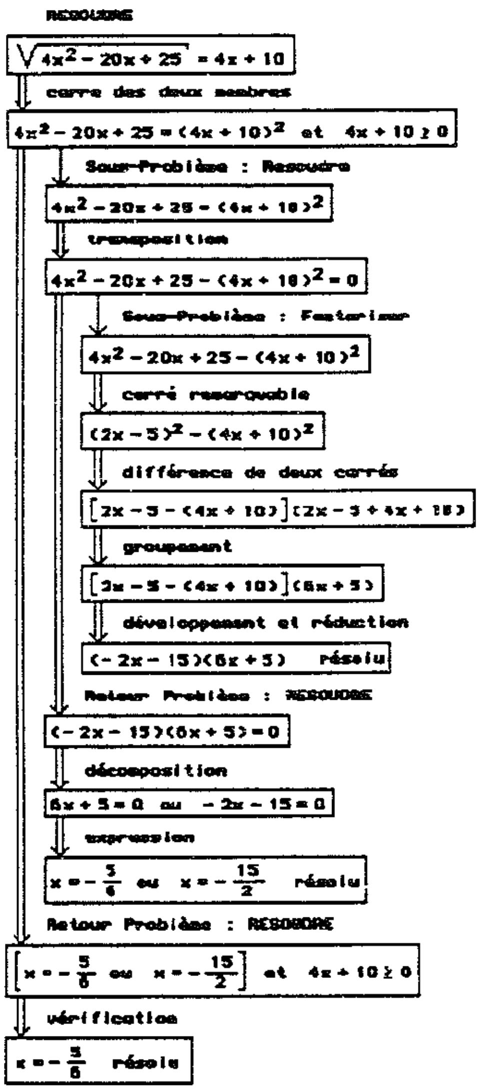


Figure 1

Les commentaires entre les boîtes décrivent les actions appliquées. Le système a lancé le problème complexe consistant à résoudre une équation avec un radical. Après avoir élevé au carré les deux membres en appliquant l'équivalence $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow (A = B^2$ et $B \geq 0)$, il se retrouve avec une équation et une inéquation. A ce stade, il pose explicitement le sous-problème
<résoudre $4x^2-20x+25=4x+10$>.
Après avoir résolu ce sous-problème, il retourne à l'étape 2 avec les nouvelles données : les solutions de l'équation.

Après la définition et l'implantation du modèle MCA dans Aplusix, des travaux en explication ont été entrepris aboutissant à la définition d'un modèle pour l'explication en algèbre sur le modèle MCA de résolution. Le processus d'explication que nous avons implanté est une tâche de résolution à part entière utilisant ses propres connaissances : un modèle du domaine d'explication représentant les connaissances d'explication et un modèle de résolution définissant les stratégies explicatives.

Les caractéristiques principales du module d'explication sont les suivantes :
- il explique le raisonnement effectué : les faits, les choix, les retours en arrière,
- il prend en compte l'état de connaissances de référence, l'état des connaissances de l'élève, l'historique en explication et des connaissances didactiques,
- il offre la possibilité à l'élève d'intervenir pendant la production d'explication,
- il dispose de plusieurs stratégies d'explication.

Le système d'explication est un ensemble de bases de règles écrites en langage SIM. L'interface est écrite en Le_lisp.

Voici un exemple de résolution d'équation avec demande d'explication de l'élève. Le problème à résoudre est <Résoudre $4x^2-20x+25+(4x-10)(x-5)=0$>. Le système est dans un sous-problème consistant à factoriser le membre gauche. Il choisit le plan qui consiste à factoriser la sous-expression $4x^2-20x+25$ puis à mettre en facteur $2x-5$ sur l'expression obtenue. Ce plan est un regard en avant supposé correspondre à un calcul mental : la factorisation engendre une puissance de $2x-5$; $2x-5$ est aussi un facteur de la sous-expression voisine $(4x-10)(x-5)$, il pourra être mis en facteur dans l'expression entière produite. APLUSIX la première partie de ce plan, l'élève intervient pour demander des explications. On obtient l'écran de la figure 2.

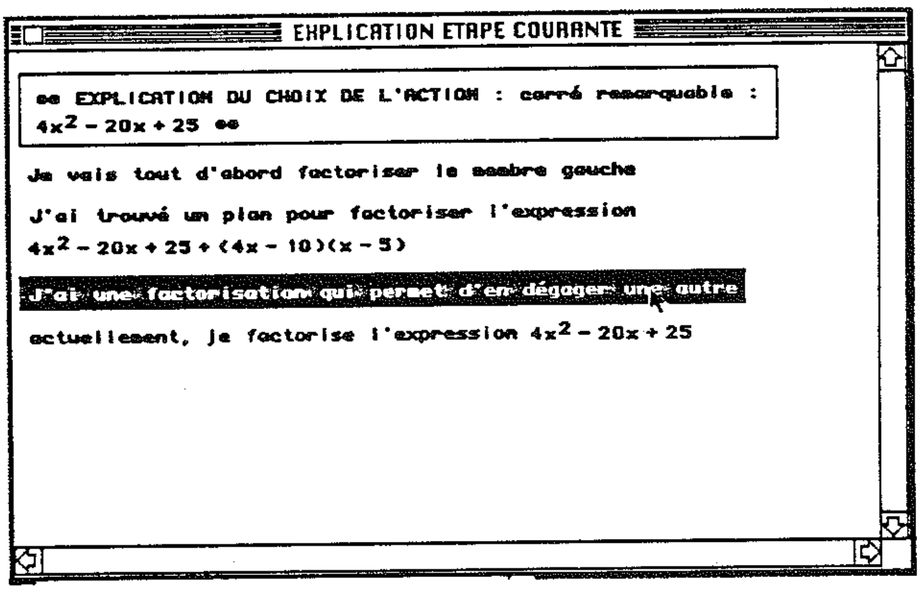


***Figure 2** : Le texte explicatif est structuré en une entête et quatre blocs. L'élève souhaitant des explications complémentaires sur le troisième bloc, clique sur celui-ci. Le système fait appel à une nouvelle stratégie d'explications pour fournir plus de détail sur cette partie ; il affiche le texte produit dans une nouvelle fenêtre "EXPLICATION SUITE".*

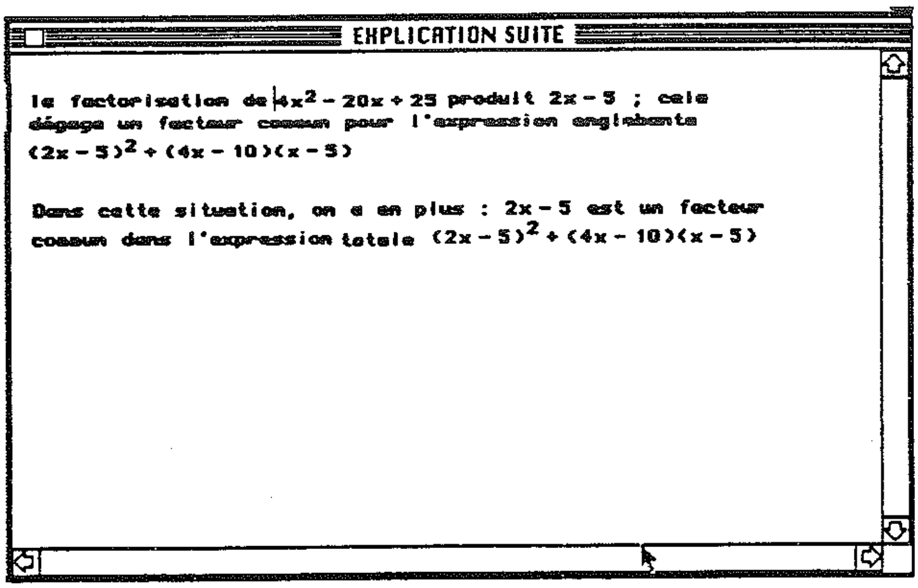


***Figure 3** : Explication suite du troisième bloc du texte explicatif de la figure 2. Des explications complémentaires peuvent à nouveau être demandées.*

4. Quel type de modèle pour l'EIAO ?

Nous nous intéressons aux EIAO capables de résoudre les problèmes du domaine d'une façon cognitive et nous considérons dans cette partie quatre grandes fonctions du module du domaine : la *résolution* pour traiter des exemples, *l'analyse* pour encadrer les résolutions des l'élève, *l'aide* pour assister l'élève dans ses résolutions, *l'explication* pour apporter des informations sur des connaissances du domaine et des méta-connaissances utiles pour les problèmes.

Deux questions fondamentales peuvent guider la conception du modèle du domaine :
(Q1) *A quel niveau veut-on enseigner ?* et sa conséquence : *Quel est l'état de connaissance pertinent à un moment donné pour le module du domaine d'un EIAO ?*
(Q2) *Quels types de connaissance veut-on enseigner : connaissances d'un domaine, méta-connaissances, connaissances pour apprendre ?* et sa conséquence : *Quelles sont les connaissances qui doivent être accessibles dans le module du domaine d'un EIAO ?*

Nous présentons ci-dessous quelques paradigmes pouvant servir de base à la modélisation du domaine pour l'EIAO en essayant de montrer leur rapport avec le questionnement précédent.

4.1. Système expert

L'un des premiers paradigmes à avoir été mis en œuvre de façon approfondie en EIAO est celui de système expert apportant un modèle de résolveur à très haut niveau de compétence. Le projet GUIDON [Clancey 82, 84] sur l'enseignement d'un domaine médical est un exemple d'EIAO autour d'un système expert. Différents problèmes se posent dans ce paradigme.

En premier lieu, un système expert est un résolveur performant qui n'est pas forcément un résolveur cognitif. Dans le cas de GUIDON, le résolveur MYCIN utilisait des règles apparemment compréhensibles. Il s'est avéré que ces règles, capables d'effectuer des diagnostics de très bonne qualité[6], étaient en fait une compilation de différents niveaux conceptuels et, qu'en conséquence, elles étaient très difficiles à apprendre. Le système

[6] MYCIN a une compétence égale à celle des experts de l'université de Standford.

expert a été reconçu sur la base d'un modèle plus cognitif (passage de MYCIN à NEOMYCIN [Clancey & Letsinger 84]). Un système expert est un état de connaissance avancé qui n'est envisageable que pour des élèves ayant déjà des connaissances suffisantes. Il ne résout pas le problème de l'acquisition de connaissances à des niveaux plus faibles.

Un système expert ne remplit que la fonction de résolution du module du domaine. Pour les fonctions d'analyse, d'aide et d'explication, il est nécessaire de lui adjoindre des mécanismes et des connaissances complémentaires.

4.2. Etat de connaissance de référence

Dans le paradigme de la *connaissance de référence* [Nicaud 92], un état de connaissance de référence RKS (Reference Knowledge State) est l'ensemble des connaissances mobilisées par un agent pédagogique pour encadrer les activités d'un élève à un niveau donné. Un RKS est une construction didactique que l'on peut rapprocher d'une transposition didactique [Chevallard 85]. La composante résolution d'un RKS peut être considérée comme un élève idéal. Par rapport au paradigme système expert : un RKS est fait pour un niveau choisi et comporte les fonctions de résolution, d'analyse, d'aide et d'explication.

Le paradigme de la connaissance de référence peut se définir de la façon suivante :
si l'élève a un état de connaissance qui n'est pas très éloigné du modèle, il est possible de lui faire assimiler l'essentiel du modèle en lui fournissant des exemples de résolution, en encadrant ses résolutions, en lui apportant de l'aide et des explications.

Le fait d'avoir un modèle de résolution ne suffit pas pour remplir les fonctions d'analyse, d'aide et d'explication. Au niveau de l'analyse, il s'agit de déterminer si les actions de l'élève sont légales et, lorsque c'est le cas, d'évaluer leur intérêt. Cela ne peut pas se faire en général par une simple comparaison avec les connaissances de résolution. Par exemple, en algèbre, l'analyseur doit pouvoir accepter les expressions 4x-6, 2x-3, 3-2x, 6-4x comme facteurs communs de (x+1)(6-4x)+(2x+1)(8x-12) alors que le résolveur n'a besoin que de l'une d'entre elles ; l'analyseur doit pouvoir détecter des actions erronées alors que le résolveur n'en produit pas. Au niveau de l'explication, les recherche effectuées en IA ces dernières années [Chandrasekaran et al. 89, Gilbert 88, Lemaire & Safar 91, Safar et al. 90] ont montré que l'on a affaire à une problématique à part entière. La problématique de l'aide est peut-être assez proche de celle de l'explication.

Un modèle basé sur des connaissances compilées et comportant les quatre fonctions est adapté pour ce paradigme car l'objectif est d'enseigner le modèle. Il peut enseigner de façon explicite les connaissances du domaine et les méta-connaissances qui sont explicites ; il peut enseigner de façon implicite certaines autres connaissances.

4.3. Réseaux de référence

Pour pouvoir encadrer un apprentissage sur une durée assez longue dans le paradigme de la connaissance de référence, il est nécessaire de faire évoluer l'état de connaissance de référence. Les *Réseaux de Référence* [Nicaud 92] organisent un ensemble de RKS sous la forme d'un réseau dont les arcs représentent les connaissances qui peuvent être acquises dans le RKS dont ils partent. Outre les items de connaissance qui peuvent être appris, ces arcs comportent des informations *génétiques* indiquant la façon dont ces connaissances peuvent être apprises (analogie, généralisation, découverte, instruction par le système, instruction par le professeur...). L'idée d'organisation génétique de la connaissance du domaine provient du concept *d'Epistémologie Génétique* de Piaget. Elle a vu le jour en EIAO avec le graphe génétique [Goldstein 82]. On la retrouve dans d'autres travaux d'EIAO comme *Progressions de Modèles Causaux* dans le domaine de la Physique [White &Frederiksen 90] et *MEMOLAB* dans le domaine de la psychologie [Dillenbourg et al. 91].

Dans le paradigme des réseaux de référence, il est possible d'apporter des informations sur la façon dont certaines connaissances peuvent être apprises et d'utiliser (quand ils existent) des exercices caractéristiques de l'acquisition d'un item pour permettre à l'élève de découvrir l'item et au système de savoir si l'élève l'a acquis. Un réseau de référence contient une théorie d'apprentissage du domaine qui est explicitée dans les liens d'acquisition et qui a été implantée par le concepteur.

4.4. Modèles du domaine avec apprentissage

Dans ce qui précède, nous avons considéré d'abord une théorie d'apprentissage du domaine implicite, puis une théorie explicitée par le concepteur. Pour aller plus loin, il reste à considérer des modèles qui apprennent les connaissances du domaine de façon automatique.

L'apprentissage automatique pour l'EIAO a une problématique complexe car il ne s'agit pas seulement d'améliorer les compétences d'un résolveur, il faut le faire de façon cognitive. L'apprentissage par recherche d'explications (EBL), l'apprentissage conceptuel et l'apprentissage rationnel [Kodratoff 86] ont l'objectif d'acquérir des connaissances communicables à l'homme. L'apprentissage automatique est très peu utilisé actuellement en EIAO pour les connaissances du domaine[7], la raison principale est sans doute que l'état de l'art actuel permet difficilement d'atteindre les niveaux conceptuels nécessaires à l'EIAO. ARCHIMEDE [Chouraqui & Inghilterra 92] est un exemple de module du domaine conçu pour un EIAO de la géométrie qui apprend certaines connaissances en même temps que l'élève selon des techniques d'analogie. L'acquisition de connaissances pour la fonction de résolution n'est pas suffisante, il faut aussi que les fonctions d'analyse, aide et explication restent opérantes pendant l'acquisition, c'est-à-dire, qu'elles soient construites sur des principes généraux permettant de prendre en compte l'apprentissage de façon rationnelle ou qu'elles apprennent elles-même en même temps que la fonction de résolution.

Quel intérêt y a-t-il à avoir un module du domaine qui apprend ? Rechercher des mécanismes généraux permettant d'apprendre automatiquement des connaissances du domaine avec les exigences cognitives va dans le sens d'une meilleure compréhension de l'apprentissage. Ce type de recherche poursuit un objectif à long terme. Il est peu compatible actuellement avec la réalisation de prototypes à expérimenter à court ou moyen terme. Le passage de l'EIAO qui n'apprend pas le domaine à l'EIAO qui apprend une partie du domaine est un changement d'échelle au même titre que le passage de l'EAO à l'EIAO.

4.5. Vers des extensions du modèle MCA

Le modèle MCA ne comporte pas de mécanisme d'apprentissage. Il est basé sur des connaissances compilées mais n'incorpore pas de mécanisme de compilation des connaissances. En conséquence il ne dispose d'aucun moyen pour améliorer la résolution des exercices problématiques (exercices non résolus ou avec une résolution laborieuse). Voici quelques idées pouvant guider des extensions de ce modèle.

4.5.1. Utilisation de connaissances déclaratives

On peut chercher à étendre le modèle MCA en ajoutant des connaissances déclaratives. Considérons ici des identités comme connaissances déclaratives. Il faut un mécanisme permettant d'engendrer des règles de réécriture à partir d'elles ; il faut aussi un mécanisme général capable de voir quelles identités peuvent apporter une contribution à un but. Le principe de fonctionnement peut être le suivant : le système utilise en priorité les connaissances compilées pour résoudre les exercices ; lorsqu'il rencontre un problème qu'il ne peut pas résoudre de cette façon, il va chercher des connaissances déclaratives pour essayer de débloquer la situation.

---

[7] L'apprentissage automatique a plus été utilisé en EIAO pour la modélisation de l'élève [Gilmore & Self 88, Paliès 88]. Il a parfois été utilisé pour le module pédagogique [Lewis et al. 87]

On peut ainsi imaginer d'aller chercher :

- l'identité $A^2 = AA$ pour le problème (développer $(x-4)^2$) si l'on n'a pas de règle de développement d'un carré : cela conduit à utiliser la règle $A^2 \rightarrow AA$ qui est une anti-réduction,
- l'identité $A^2B^2 = (AB)^2$ pour le problème (factoriser $4x^2-1$) afin de faire apparaître $4x^2$ comme un carré et appliquer la règle $A^2-B^2 \rightarrow (A-B)(A+B)$ à $4x^2-1$.

Il est aussi possible d'effectuer des appariements modulo une constante additive ou multiplicative. Borning et Bundy [81] ont mis au point un mécanisme de ce type capable de factoriser $x^2-8x+15$ par appariement avec le membre gauche de l'identité $A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$. Le mécanisme de base est un appariement caricatural oubliant les constantes additives et multiplicatives (à $x^2-8x+15$ est associé x^2+x, à $A^2+2AB+B^2$ est associé A^2+A lorsque l'on considère que B est une constante, x^2+x et A^2+A s'apparient simplement). Quand cet appariement caricatural réussit, un appariement réel est réalisé, effectuant les ajustements nécessaires, échouant éventuellement.

Le mécanisme consistant à aller chercher des connaissances déclaratives est à un niveau méta-connaissance. Son utilisation n'est pas de l'apprentissage, il y a apprentissage si l'on engendre des connaissances après cette utilisation. Il faut bien voir qu'il ne suffit pas, pour le type de problème concerné, d'ajouter une règle qui a fonctionné une fois à l'ensemble des règles pour avoir un état amélioré. Dans le cas de la règle $A^2 \rightarrow AA$ ou de la règle exprimant des entiers sous la forme de carrés (comme $9 \rightarrow 3^2$), il y a de nombreuses situations où ces règles sont nuisibles, apportant un développement de nombreuses branches inutiles sur l'arbre de recherche.

Pour des types de problèmes bien répertoriés, l'utilisation de connaissances déclaratives peut être remplacée par une organisation génétique des connaissances. En revanche, lorsque l'on veut aborder des types de problèmes non pris en compte de façon spécifique lors de la conception, l'utilisation de connaissances déclaratives peut devenir indispensable. Par exemple, pour le type de problème *mettre l'expression e sous la forme f*, il est difficile de compiler des connaissances du fait de la variété des formes que peut prendre *f* (*f* peut être A^2+B^2, $A\ B^3$, sinA+cosB..).

4.5.2. Apprentissage d'heuristiques

Le but de l'apprentissage d'heuristiques n'est pas comme précédemment de débloquer des situations mais d'améliorer l'efficacité du raisonnement en développant un arbre de recherche de petite taille et, pour de nombreux problèmes, en conduisant directement à une solution.

Des travaux d'apprentissage automatique ont déjà porté sur l'algèbre. Le système ELM de Brazdil [78] apprend à résoudre des équations. Pour cela il dispose d'opérateurs dont il modifie les conditions d'application afin de séparer les situations où ils doivent s'appliquer de celles où ils ne le doivent pas. Le système LEX [Mitchell et al. 83] apprend à effectuer des calculs de primitives. Il utilise un ensemble d'opérateurs et une taxonomie de fonctions. Ses essais et ses échecs, lorsqu'il tente d'appliquer une méthode, lui permettent de déterminer les parties de la taxonomie pour laquelle la méthode est pertinente.

Sans inventer des heuristiques, une autre façon d'améliorer l'efficacité du résolveur consiste à intervenir sur l'effet des heuristiques. Par exemple, si l'on attribue, au départ, une qualité q aux transformations applicables et si l'on utilise des heuristiques du type :

SI <conditions sur une transformation applicable TA> ALORS ajouter x_h à la qualité de TA

SI <conditions sur une transformation applicable TA> ALORS ajouter x_h à la qualité de TA

x_h pouvant être positif ou négatif, l'apprentissage peut consister à chercher les valeurs x_h optimales pour un ensemble d'exercices donné.

5. Conclusion

La modélisation cognitive et computationnelle de processus de résolution de problèmes pour l'EIAO peut être considérée comme une acquisition de connaissances auprès d'experts. Les experts sont ici des personnes capables d'apporter des éléments permettant de concevoir des états de connaissance pour servir de référence à différents moments de l'apprentissage. Ce ne sont pas forcément les personnes ayant les connaissances les plus pointues pour le domaine de problèmes considéré, ce sont des personnes ayant des connaissances sur l'enseignement du domaine. Comme pour la conception de systèmes experts classiques (i.e. non dédiés à l'enseignement) les experts apportent des connaissances (concepts, opérateurs, méthodes, heuristiques...), savent résoudre les problèmes et fournir des explications mais n'apportent pas un modèle computationnel. Pour obtenir un tel modèle, il reste beaucoup à faire : analyser profondément le domaine, préciser les éléments fournis et les structurer (séparer en particulier les niveaux connaissance et méta-connaissance), définir les éléments manquants (qui peuvent être très nombreux), expliciter les mécanismes faisant fonctionner toutes ces connaissances...

Le domaine présenté par Marc Rogalski dans ce même ouvrage est un bon exemple : *comment concevoir un résolveur sur les problèmes de convergence de suites ?* Marc présente un début d'analyse (s'appuyant sur une méthode), liste des problèmes difficiles et se demande si l'IA peut les traiter ? La meilleure façon de répondre à la question est sans doute d'essayer de concevoir un modèle. Pour aborder ce domaine il est évidemment nécessaire de conjuguer les efforts de chercheurs en IA, en mathématiques et en didactique des mathématiques. Que l'on réussisse ou que l'on échoue dans la conception du modèle, on devrait s'apercevoir que la méthode fournie ne comporte qu'une petite partie des connaissances nécessaires. Si l'on considère que l'on dispose d'opérateurs d'assez haut niveau tels que ceux qui peuvent être fournis par des logiciels de calcul formel, cette masse de connaissances manquantes peut être réduite, mais elle reste importante.

Pour progresser, il est important de trouver un niveau de modélisation qui soit à la fois compréhensible et computationnel. Par modèle compréhensible, nous entendons un objet que tous les chercheurs proches du même domaine puissent comprendre. Par modèle computationnel, nous entendons un objet dont le fonctionnement détaillé soit décrit et qui puisse être mis en œuvre à l'aide d'outils contemporains (éventuellement très sophistiqués) sans que la mise en œuvre soit elle-même un problème de recherche. L'usage n'est pas actuellement en EIAO de publier des modèles de ce type, ce sont des modèles plus généraux, plus abstraits qui sont généralement présentés. Il y a sans doute à cela différentes raisons : intérêt pour les objets abstraits et génériques, absence d'une demande, taille limitée des articles... L'une de ces raisons est sans doute que souvent ces modèles n'existent pas concrètement, qu'à côté d'un modèle général se trouve seulement un modèle instancié qui est codé dans des bases de connaissances sous une forme qui n'est lisible que par les concepteurs[8]. Peut-on se convaincre des qualités d'un modèle général si l'on n'a pas une instanciation complète pour les montrer ?

Nous n'avons cependant pas échappé à l'usage dans cet article : le modèle MCA que nous avons présenté est un modèle général. Nous avons cependant déjà présenté un modèle instancié sur les factorisations de polynômes [Nicaud et al. 89], dans un cadre général différent (sans plan et sans méta-stratégie).

---

[8] Lorsque les langages utilisés sont de haut niveau (au sens d'aujourd'hui), les concepteurs ont souvent l'impression que les objets qu'ils créent sont lisibles. Ce n'est sans doute jamais le cas.

Références

Anderson J. R. [83] : *The Architecture of Cognition.* Harward University Press, 1983.

Brazdil P. [78] : *Experimental Learning Model.* Proceedings of 3rd AISB meeting, Hambourg.

Borning A., Bundy A. [81] : *Using Matching in Algebraic Equation Solving.* IJCAI 81.

Chandrasekaran B., Tanner M. C., Josephson J. R. [89] : *Explaining Control Strategies in Problem Solving.* IEEE Expert, spring 1989, 9-20.

Chevallard Y. [85] : *La transposition didactique.* Editions La Pensée Sauvage, Grenoble. Nouvelle édition revue et corrigée 1991.

Chouraqui E., Inghilterra C. [92] : *Résolution par analogie de problèmes géométriques dans une perspective tutorielle.* Proceeding of ITS'92, Montreal, Springer-Verlag.

Clancey W. J. [82] : *Tutoring rules for guiding a case method dialogue.* In Intelligent Tutoring Systems (Sleeman & Brown eds), Academic Press, Londres, 1982.

Clancey W. J., Letsinger R. [84] : *NEOMYCIN: reconfiguring a rule-based expert system for application to teaching.* In Medical Artificial Intelligence: The First Decade (Clancey & Shortliffe eds), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1984.

Clancey W. J. [84] : *Teaching classification problem solving.* Proceedings of the Cognitive Science Society Conference, Boulder, Colorado, 1984.

Dershowitz N, Jouannaud J.P. [89] : *Rewrite Systems.* Handbook of Theoretical Computer Science, Vol B, Chap 15. North-Holland.

Dillenbourg P., Hilaro M., Mendelsohn P., Schneider D. [91] : *The MEMOLAB Project.* TECFA report 91-5, University of Geneva.

Farreny H., Ghallab M. [87] : *Eléments d'intelligence artificielle.* Hermès, Paris.

Gilbert G. [88] : *Forms of explanation.* Proceedings of AAAI'88 Workshop on Explanation, Saint Paul, 72-75.

Gilmore D., Self J. [88] : *The application of machine learning to intelligent tutoring systems.* In Artificial Intelligence and Human Learning, Self ed., Chapman and Hall Computing.

Goldstein I.P. [82] : *The Genetic Graph: a Representation for the Evolution of Procedural knowledge.* Intelligent Tutoring Systems (Sleeman & Brown eds). Academic Press.

Kodratoff Y. [86] : *Leçons d'Apprentissage Symbolique Automatique.* CEPADUES Editions, Toulouse.

Lemaire B., Safar B. [91] : *Some Necessary Features for Explanation Planning Architectures: Study and Proposal.* Proceedings of AAAI'91 Explanations Workshop, Anaheim, California.

Lewis M.W., Milson R., Anderson J.R. : The TEACHER'S APPRENTICE: Designing an Intelligent Authoring System for High School Mathematics. In Artificial Intelligence & Instruction, Kearsley ed., Addison-Wesley.

Mitchell T.M., Utgoff P.E., Banerji R. [83] : *Learning by experimentation, acquiring and refining problem-solving heuristics.* In Machine Learning, an Artificial Intelligence Approach. Michalski, Carbonell & Mitchell eds, Tioga Publishing Company.

Nicaud J.F [89] : *APLUSIX : un système expert de résolution pédagogique d'exercices d'algèbre.* Thèse de l'Université de Paris XI.

Nicaud J.F, Aubertin C., Nguyen-Xuan A., Saïdi M., Wach P. [89] : *APLUSIX : un environnement d'apprentissage a plusieurs niveaux dans le domaine du raisonnement algébrique.* Actes des premières journées EIAO de Cachan.

Nicaud J.F. [92] : *Reference Network: A Genetic Model for Intelligent Tutoring Systems.* Proceedings of ITS'92, Montréal, Springer-Verlag.

Paliès O. [88] : *Building a Student Model without a Bug Library.* Actes de l'Université Européenne "Les Tuteurs Intelligents", Le Mans, 1988.

Pearl J. [90] : *Heuristique.* Cepadues-Editions.

Safar B., Bouri M., Dieng R., Kassel G. [90] : *Systèmes à base de connaissances et explications.* Actes des 3èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle, Hermes, 1990.

White Y.W., Frederiksen J.R. [90]: *Causal Model Progression as a foundation for Intelligent Learning Environments.* Artificial Intelligence, Vol 42.

ELEMENTS D'ANALYSE DU LIVRE DE J.PITRAT "METACONNAISSANCE, FUTUR DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE".

Jean Michel Bazin

LAFORIA, Université de Paris 64, place Jussieu - 75252 Paris cedex 5
& UFR de Sciences exactes et naturelles, 51100 REIMS

INTRODUCTION

Le livre de J.Pitrat 'Métaconnaissance, futur de l'intelligence artificielle' est structuré en trois parties. La partie I propose une description des notions de connaissances, métaconnaissance et réflexivité dans le cadre de la résolution de problèmes en Intelligence Artificielle. La partie II décrit les différentes façons d'opérer à plusieurs niveaux, comment on observe un mécanisme en train de fonctionner, et comment un système peut comprendre les raisons de l'obtention d'un résultat.

Ces deux parties sont très marquées par l'analyse de systèmes d'Intelligence Artificielle. J.Pitrat a analysé ces systèmes, et y a "débusqué" la métaconnaissance qui y était utilisée. Cela lui a permis d'illustrer différentes notions propres à l'ensemble des problèmes rencontrés lorsqu'on veut réaliser des systèmes utilisant la métaconnaissance.

Les discussions du groupe Math et Méta ont beaucoup porté sur les questions d'utilisation et de représentation des connaissances. Cela permet de préciser la stratégie à adopter face à un problème et l'analyse possible des stratégies mises en oeuvre par les élèves.

La troisième partie du livre de J.Pitrat propose de distinguer trois sortes de métaconnaissances : les connaissances qui sont des propriétés des connaissances, les connaissances sur les connaissances des individus, les connaissances actives. Dans cette approche des diverses sortes de métaconnaissances, on peut trouver des éléments de réponses et des pistes de réflexions communes aux préoccupations du didacticien et du chercheur en Intelligence Artificielle utilisant la métaconnaissance.

Je me suis efforcé, en analysant cette troisième partie, d'établir une relation entre les idées évoquées par J.PITRAT et les situations rencontrées dans mon travail de conception d'un résolveur de problème en géométrie. Les connaissances sur les connaissances des individus jouent un rôle important dans les systèmes travaillant sur des données incomplètes, ou dans les systèmes qui utilisent des modèles des individus, avec gestion de leurs croyances. Dans la conception d'un résolveur de géométrie construit à partir d'un modèle d'expert, cet aspect du travail me concerne assez peu : le modèle est présent dans l'ensemble des règles de mon système, mais n'est pas géré explicitement.

J'étudierai en détail les connaissances **propriétés** des connaissances, les connaissances **actives**, puis je proposerai de replacer **une règle du système EURISKO** dans le cadre des différentes connaissances analysées.

Le travail présenté ici est une lecture **personnelle** du livre de J.Pitrat. Il ne prétend pas être un résumé, ni une synthèse, mais plutôt une analyse et une réaction aux idées développées par J.Pitrat.

Dans tout ce qui suit, on trouvera un résumé présentant brièvement les idées qui me semblent relever des préoccupations communes aux chercheurs en IA et aux didacticiens et une analyse personnelle (signalée par un `changement de police`) précisant les remarques que je fais à propos des idées exprimées par J.Pitrat dans le cadre de mon travail de conception.

Les citations explicites du livre de J.Pitrat sont reproduites *en italique.*

1. LES CONNAISSANCES QUI SONT DES PROPRIETES DES CONNAISSANCES.

J.Pitrat propose divers types de propriétés des connaissances, j'étudierai successivement l'historique, la véracité, la précision, la classification, et l'intérêt.

1.1 L'historique d'une connaissance.

J.Pitrat propose de s'intéresser à l'origine d'une connaissance : qui est à la source de cette connaissance ?

"L'opinion d'un expert ayant plus de poids que celle d'un novice...".

Il est aussi important de mémoriser tout ce que nous avons déduit à partir d'une connaissance.

" Quand nous avons reconnu qu'un fait est faux nous n'arrivons pas à éliminer tout ce que nous en avons déduit".

Ces deux aspects sont fondamentaux dans l'utilisation des systèmes non monotones. Une des supériorités de l'ordinateur sur l'humain résiderait dans sa faculté de pouvoir garder la trace de la vie d'une connaissance, il serait alors possible de supprimer toutes les idées fausses qui ont pu en être déduites si cette connaissance s'avère être à réviser.

L'historique d'une connaissance est un concept important pour tous les systèmes travaillant sur le raisonnement par défaut. Un fait que l'on croyait vrai (par défaut), peut se révéler inexact et même parfois interdire l'accès à une solution du problème posé.

Et en géométrie ?

L'implicite joue un très grand rôle ; je citerai :

- L'implicite de la dimension (2 ou 3). C'est le cas dans le problème du jardinier (planter quatre arbres à égales distances l'un de l'autre) ou pour le problème du camembert (couper un camembert en HUIT parties égales avec TROIS traits rectilignes de couteaux).

- L'implicite lié à l'effet contrat dans une situation didactique que l'on trouve dans le cas, par exemple, d'un élève de 4ième devant résoudre un problème de géométrie : il est implicitement convenu que l'élève dispose des connaissances nécessaires pour la résolution du problème.

1.2. Véracité d'une connaissance.

"Si le contraire n'est pas explicitement indiqué, un fait stocké en mémoire est vrai".

"Il n'est pas possible d'avoir uniquement des faits sûrement vrais, soit parce qu'il n'y a pas assez d'information pour en être sûr, soit parce que les informations à ce sujet sont contradictoires, soit parce que ce fait ne sera vrai que dans un autre monde".

La véracité d'une connaissance peut être définie, évaluée, en fonction de sa plausibilité, de sa cohérence vis à vis d'un ensemble global de connaissances. Ce n'est pas une notion intrinsèque, mais au contraire, une notion relative à un corpus de connaissances. En outre, la valeur de vérité d'une connaissance peut évoluer dans le temps. Il est possible de représenter cet aspect de la connaissance sur les faits "*en ajoutant à de tels faits l'indication qu'ils sont possibles*" ou comme dans les travaux de [Chatalic, 87], d'associer à un fait trois notions : la crédibilité, la plausibilité, la probabilité. Lorsqu'un système doit gérer des croyances, (notamment dans le cas où un système construit un modèle de l'utilisateur professeur ou élève), la notion de véracité d'une connaissance est à prendre en compte.

Et en géométrie ?

Au niveau méta, le concepteur d'un système peut avoir des croyances sur l'efficacité de telle ou telle méthode. Par exemple, j'ai la conviction que dans un problème de géométrie il faut commencer par tracer la figure, puis continuer par l'analyse de la figure. Il serait souhaitable que le système ait des croyances au niveau méta, sur la pertinence d'une méthode dans tel ou tel type de problème. La gestion des croyances au niveau méta suppose alors l'existence d'un niveau méta méta, le problème de l'empilement des niveaux méta pouvant être résolu par l'utilisation de la réflexivité. Il sera enfin souhaitable d'avoir un mécanisme de révision des croyances permettant de gérer la pertinence des différentes méthodes à utiliser.

Au niveau de la connaissance mise en oeuvre pendant la phase de résolution de problème, la **conjecture** peut être considérée comme une croyance dont le degré de certitude évolue pendant la recherche de solution. L'observation de la figure, ou plus généralement des données de l'énoncé, permet d'engendrer des conjectures, puis la démonstration permet d'établir la certitude d'un résultat. Un logiciel de type micro-monde [Cabri, 89] permet à tout élève capable de manipuler une souris, de déformer une figure (avec conservation des contacts) ; l'élève peut ainsi, par la mise en évidence des invariants, engendrer des conjectures qui seront exploitées après la phase de manipulation.

1.3. La précision d'une connaissance.

"La précision (...) a un sens pour des résultats numériques. A chaque valeur numérique est associée une fourchette qui donne les valeurs extrêmes entre lesquelles la valeur exacte se trouve sûrement".

La précision d'une connaissance sous entend une mesure liée à la connaissance. Une connaissance sera plus ou moins précise selon la fourchette dans laquelle se situe la mesure étudiée. En mécanique, la tolérance de cote est une valeur certaine de l'imprécision de la cote d'une pièce.

Et en géométrie ?

Dans le cadre d'un travail concernant la géométrie de quatrième, le problème de la précision d'une connaissance n'est pas pertinent. Même les aspects "numériques" du programme de quatrième (théorème de Thalès, de Pythagore) sont traités de façon symbolique. En revanche, Gelertner utilise des calculs numériques afin d'évaluer la valeur de vérité d'une conjecture.

Pour tester la conjecture "A B C alignés", son programme réalise un calcul analytique, et suivant le résultat de ce calcul, il en déduit que la conjecture "A B C alignés" mérite (ou ne mérite pas) d'être étudiée.

Au niveau métaconnaissance, la notion de précision et d'imprécision apparaît dans la phase de mobilisation des connaissances pertinentes pour un problème. Dans ce cas, nous sortons de l'aspect numérique évoqué ci-dessus. Les travaux de [Chi, 81] ont montré que dès la lecture de l'énoncé, un expert mobilise un ensemble de connaissances pertinentes pour le problème. La détermination de cet ensemble est extrêmement difficile et imprécise dans le cadre de la réalisation d'un résolveur. Comment réaliser un système capable de construire précisément, **a priori**, l' ensemble des connaissances nécessaires pour résoudre un problème à partir d'un vaste ensemble de connaissances disponibles ?

1.4. La classification des connaissances.

"Il est utile de classifier les connaissances".

Le mot utile se rapporte ici à deux destinataires, la classification est utile en premier lieu pour le concepteur de système, et en second lieu pour le système lui-même. Lorsqu'un système reçoit une nouvelle règle destinée à être intégrée à une classe de connaissances, il peut évaluer la conformité de cette règle, relativement à la classe dans laquelle on veut placer cette nouvelle connaissance. De plus,

"Une classification des règles est utile pour l'explication ... Dans la création d'une explication, il est en général inutile d'indiquer l'application d'une règle de défaut ou d'une règle de définition : il suffit d'en mentionner le résultat mais pour en arriver là, le système doit être capable de classer règles et prémisses".

La grande difficulté est de trouver une classification pertinente. Cette classification doit-elle être dynamique, guidée par le problème, ou doit-elle être statique, à l'image d'une bibliothèque ?

Et en géométrie ?

C'est la classification des règles qui permet, dans mon résolveur, de mobiliser la connaissance pertinente pour un problème. Afin de simuler le comportement de l'expert décrit par M.Chi, mon résolveur appelle des connaissances préalablement classées, en fonction de critères expérimentaux.

La classification des connaissances que j'ai en géométrie est extrêmement dépendante de mon expérience d'enseignant. Mes connaissances sont classées en fonction des niveaux scolaires dans lesquels j'ai enseigné la géométrie. Cette classification "par niveau scolaire" peut justifier le comportement suivant: si on propose un problème de géométrie élémentaire à un enseignant de Mathématique sans préciser le contexte pédagogique dans lequel ce problème est usuellement posé, la question la plus courante posée par le professeur porte sur la nature du contexte dans lequel ce problème a été posé, et sur la définition précise des connaissances auxquelles "il a droit".

1.5. L'intérêt d'une connaissance.

"L'intérêt d'une connaissance peut être défini à partir de diverses informations :
- intérêt des éléments qui lui ont donné naissance,
- intérêt des éléments auxquels elle a donné naissance,
- qualité des résultats obtenus en l'utilisant,
- aspect de la connaissance".

L'intérêt d'une connaissance est une notion récursive définie à partir des connaissances qui ont donné naissance à cette connaissance. Le rôle et l'intérêt des connaissances initiales données au système ou manipulées par l'expert est donc fondamental.

Dans le cas d'un intérêt initial déterminé uniquement par le système, on peut s'interroger sur la validité d'un intérêt a priori, qui ne pourrait être donné que sur des critères syntaxiques (nombre de connecteurs, nombre de prémisses...).

L'intérêt d'une connaissance peut être modifié, en tenant compte des connaissances auxquelles elle a donné naissance. Cela suppose de la part du système (ou de l'expert), une capacité à réanalyser l'histoire d'une connaissance. C'est dans le cadre d'une analyse épistémologique de cette histoire que l'intérêt d'une connaissance pourrait être réévalué.

"L'intérêt des connaissances joue un rôle central dans l'apprentissage".

Dans le cas de l'apprentissage, il me semble que c'est la facilité de mise en oeuvre d'une connaissance qui joue un rôle très important.

Et en géométrie ?

La connaissance de l'intérêt des connaissances est issue pour nous d'un apprentissage (parfois violent !). J'ai su que le théorème de Thalès était intéressant bien après l'avoir étudié et répété. C'est son utilisation fréquente qui m'a convaincu petit à petit de son intérêt.

J.PITRAT n'aborde pas un autre aspect de l'évaluation de l'intérêt d'une connaissance: son **efficacité esthétique**. L'efficacité esthétique est à relier à la notion de puissance d'un théorème ou d'une connaissance. De façon intuitive, un théorème est considéré comme puissant, si les hypothèses sont faibles, facilement vérifiables, peu nombreuses, alors que ses conclusions sont riches et nombreuses : c'est le cas pour le théorème suivant:

SI
"[A C] et [B D] ont même milieu
ALORS
Le quadrilatère A B C D est un parallélogramme".

Ici les hypothèses sont peu nombreuses (une seule prémisse à vérifier) et la conséquence est très riche. En effet, du fait "A B C D parallélogramme", on peut déduire de nombreuses propriétés d'égalité de longueur, et de parallélisme.

Les mathématiciens cherchent des solutions esthétiques et les théorèmes et méthodes permettant d'en obtenir sont **intéressants**.

Une des grandes difficultés de l'apprentissage en Intelligence Artificielle est justement de déterminer l'intérêt d'une connaissance, sans l'intervention d'une personne "extérieure" au système pour évaluer a priori cet intérêt. Cet aspect illustre une différence fondamentale entre un couple (enseignant, enseigné) et la situation d'auto-apprentissage d'un système qui doit déterminer tout seul si telle ou telle connaissance est intéressante. A cet égard, le système [Pintado,91] dispose de métaconnaissances permettant de déterminer l'intérêt d'une connaissance en recherchant dans un arbre de déduction des sous arbres remarquables.

2. LES CONNAISSANCES ACTIVES.

Le schéma suivant (figure 2) illustre la description des différents rôles de la métaconnaissance.

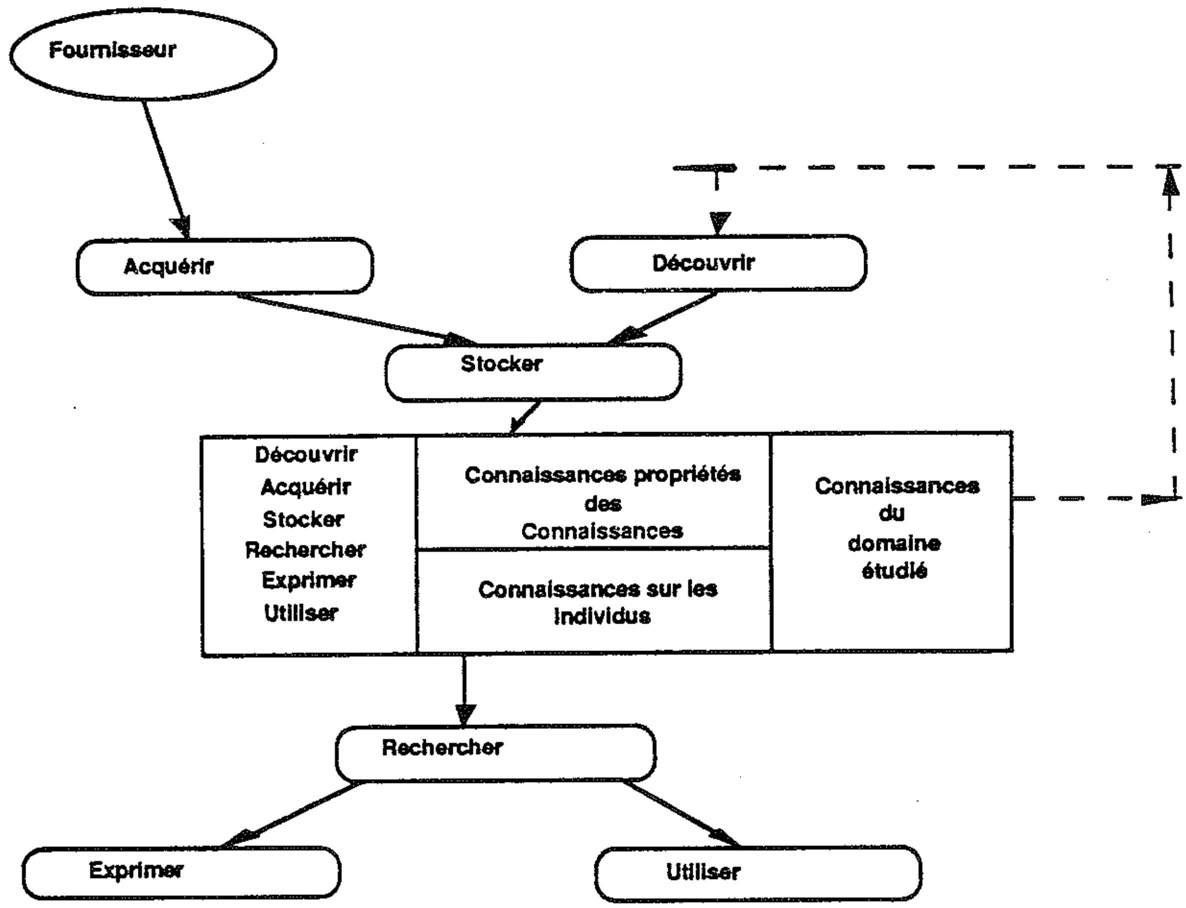


Figure 2

J.PITRAT définit la notion de connaissances actives : ce sont des connaissances qui manipulent physiquement des connaissances. On notera que les métaconnaissances de découvertes apparaissent d'une part dans des boites de formes rectangulaires, caractérisant les connaissances et métaconnaissances en tant qu'objets statiques (physiquement, ces connaissances sont des chaînes de caractères dans un fichier), et d'autre part, dans les boites à coins arrondis. Dans ce cas, les métaconnaissances jouent un rôle de module agissant et actif.

Les flèches continues de ce schéma représentent un transfert dynamique de connaissances d'un module de connaissances actives à un autre.

Le module Rechercher tire ses connaissances de l'ensemble statique des connaissances. L'ensemble des connaissances statiques (rectangle central) joue alors uniquement le rôle de fournisseur passif.

2.1 Acquérir, stocker, découvrir.

Les métaconnaissances d'acquisition, de découverte et de stockage de la connaissance permettent à un système d'accroître sa quantité de connaissances. On se propose ici de résumer brièvement le rôle de chacune de ces métaconnaissances.

L'acquisition des connaissances.

Une connaissance donnée au système par un fournisseur sera traitée par les métaconnaissances d'acquisition.

"La métaexpertise d'acquisition a un rôle d'aide ; il n'est pas facile de fournir des connaissances, et le système qui les reçoit doit rendre plus aisée la tâche de celui qui le nourrit de son expertise".

Cet ensemble de métaconnaissances permet de diagnostiquer la connaissance fournie (cohérence, redondance), et ainsi de déceler qu'un élément de connaissance est inutile ou anormal. Il permet enfin de compléter éventuellement la connaissance donnée au système si elle est incomplète. **En sortie** du module d'acquisition, la connaissance, qui a été fournie **en entrée**, est réécrite de façon correcte après avoir été complétée, et l'expertise de stockage peut alors déterminer comment cette connaissance doit être stockée en mémoire.

Le stockage des connaissances.

"Le problème important est de savoir stocker intelligemment des connaissances pour qu'elles soient disponibles rapidement quand on en a besoin, sans devoir balayer systématiquement la mémoire".

La métaexpertise de stockage pourra ainsi choisir **où** et **comment** stocker une connaissance préalablement traitée par la métaexpertise d'acquisition ou de découverte.

La découverte des connaissances.

On notera qu'une différence fondamentale existe entre le module de découverte et le module d'acquisition. Le module d'acquisition reçoit explicitement des connaissances d'un fournisseur et il dispose des métaconnaissances nécessaires pour juger de la pertinence et de l'exactitude de la connaissance qui lui est fournie (trouver des redondances, des incohérences par exemple).

Le module de découverte inter-agit avec un superviseur. Celui-ci peut le guider pour améliorer ses capacités de découverte, mais le superviseur ne fournit pas dans ce cas de connaissances explicites. Il est un observateur qui s'assure de la qualité de la découverte. On retrouve ici le schéma de la maïeutique socratique dans le discours de Protagoras : l'esclave découvre lui-même des propriétés de surface du carré, guidé et maintenu dans la cohérence par le discours du maître.

Les métarègles de découverte de la connaissance s'instancient à l'aide de faits pris dans l'ensemble statique des connaissances. La flèche pointillée issue du rectangle central symbolise le fait que **c'est en considérant les connaissances statiques comme une base de fait** que les métarègles de découverte créent de nouvelles connaissances. La métarègle du système EURISKO, étudiée en 3) illustre ce mécanisme.

2.2 Rechercher, utiliser, exprimer.

Les métaconnaissances que nous avons étudiées ci-dessus caractérisent des situations d'apprentissage. Lorsqu'un système (ou un expert) doit résoudre un problème, il doit rechercher des connaissances en mémoire, il doit aussi disposer d'une expertise lui permettant d'utiliser sa connaissance de façon pertinente et efficace pour résoudre le problème posé, enfin, il doit savoir exprimer des connaissances pour communiquer avec un utilisateur.

La recherche des connaissances.

"Le balayage complet d'une vaste mémoire est de toutes les façons matériellement impossible pour un être humain".

"Chercher quelque chose en mémoire est un problème et les métaconnaissances pour rechercher des connaissances seront utiles pour résoudre ce type de problème".

La métaexpertise de recherche des connaissances est constituée essentiellement de stratégies de reconstruction :

"Un homme, qui se souvient, le fait souvent en reconstruisant ce qui a dû arriver, plutôt que par une recherche directe de ce qui est arrivé".

L'utilisation des connaissances.

Lorsque la connaissance a été extraite de l'ensemble des connaissances passives du système deux types d'actions sont possibles : utiliser cette connaissance dans le cadre de la résolution de problème, ou expliquer comment a été résolu un problème.

" Les connaissances pour utiliser les connaissances indiquent ce que l'on a le droit de faire ou ce qu'il est intéressant de faire".

Les connaissances indiquant ce qu'<u>on a le droit de faire</u> sont typiquement des règles de grammaire, des règles de composition musicales.

Les connaissances indiquant ce qu'<u>il est bon de faire</u> sont essentiellement des règles de nature heuristique. Elles aident le système à choisir dans l'ensemble de toutes les connaissances statiques, celles qu'il sera bon d'activer. Cette métaexpertise d'utilisation permet de réaliser le contrôle de la recherche de solution. Ce contrôle peut avoir lieu en même temps que la recherche de solutions.

C'est dans ce type de connaissances que les préoccupations des chercheurs en Intelligence Artificielle et en Didactique se rencontrent. Elles concernent l'élaboration, et la gestion des plans, l'utilisation d'une représentation compilée de la connaissance permettant d'augmenter les performances du système.

Une autre préoccupation fondamentale du didacticien concerne l'expertise d'explication. Un logiciel d'EIAO doit certes résoudre des problèmes, mais il doit aussi disposer d'une capacité lui permettant de justifier ses résultats. Il est alors indispensable que ce type de logiciel dispose d'une métaexpertise d'expression des connaissances.

Exprimer des connaissances.

" Dans le problème de l'expression des connaissances, dual de l'acquisition, le système dispose d'une certaine quantité de connaissances qu'il doit communiquer à un autre système de traitement de l'information qui est en général un être humain".

Il convient, dans ce cas, de choisir ce que l'on va dire, et en utilisant le modèle de l'interlocuteur, d'expliquer en décidant à quel moment et sous quelle forme il est opportun d'exprimer des connaissances.

En distinguant nettement la métaexpertise d'utilisation des connaissances et la métaexpertise d'expression des connaissances J.Pitrat met en évidence une difficulté courante rencontrée par les formateurs de maîtres : faire prendre conscience aux futurs enseignants que leur maîtrise de la matière enseignée (ils savent **utiliser** la connaissance) doit être accompagnée d'une autre méta expertise, celle qui dit comment **exprimer** les connaissances dans une action didactique.

Une analyse globale du schéma des règles actives (figure 2) montre que les règles actives agissent sur l'ensemble de toutes les métaconnaissances. Cet ensemble ainsi modifié permettra aux métaconnaissances actives de modifier l'ensemble des connaissances et métaconnaissances du système, en retour, cette modification des connaissances du système peut conduire à la création de nouvelles métaconnaissances actives. De ce point de vue, on peut considérer qu'il y a **dépendance causale** entre les connaissances actives d'une part, et l'ensemble de toutes les métaconnaissances d'autre part. Cette interaction entre les métaconnaissances actives et passives nous semble être un exemple de **boucle réflexive.** [Nicolle, 92]

3. ETUDE D'UNE METAREGLE DU SYSTEME EURISKO.

La règle suivante (du système EURISKO) est une règle de découverte de connaissances à partir de la connaissance f.

Règle R

SI les résultats obtenus en utilisant la connaissance f ne sont que parfois utiles

ALORS

essayer de créer de nouvelles spécialisations de f en spécialisant des attributs de f.

Cette règle illustre comment l'ensemble des connaissances du rectangle central du schéma précédent (figure 2) peut être considéré comme une base de faits, sur laquelle les règles de découverte de la connaissance s'appliquent. La prémisse de cette règle observe "les résultats obtenus en utilisant une connaissance f" et évalue leur "utilité" (figure 3). Pour cela, le système qui instancie cette règle doit avoir accès à l'historique de f, et plus précisément, le système doit pouvoir retrouver toutes les connaissances R1,R2,...Rn qui ont été engendrées à l'aide de f. Il est aussi nécessaire de pouvoir évaluer l'utilité d'une connaissance. On a vu en 1.4 comment cette utilité pouvait être évaluée. En s'appuyant sur ces deux métaconnaissances (historique de f et utilité des connaissances engendrées par f) le système crée un indicateur : le pourcentage de bons objets produits p(f). La règle peut alors se déclencher si p(f) est inférieur à un certain seuil. Une nouvelle connaissance est créée par spécialisation de certains attributs de f. Ce mécanisme est résumé dans le schéma de la figure 3.

"La règle R, qui incidemment indique un moyen de spécialiser un objet, fait intervenir dans sa partie action un attribut non identifié. Cette imprécision conduit à de nombreux essais inutiles et <u>EURISKO est donc conduit à appliquer cette règle à elle-même</u> puisque ses résultats sont rarement utiles; parmi les nombreux candidats créés, la plupart sont sans intérêt; cela est normal puisque cette règle n'est pas satisfaisante. Mais certains se révéleront quand même supérieurs à la règle initiale, comme :

Règle R1

***SI** les résultats obtenus en exécutant f ne sont que parfois utiles*

***ALORS** envisager de créer de nouvelles spécialisations de f en spécialisant <u>un de ses attributs essentiels.</u>*

En effet certains attributs d'une règle ne sont pas liés à son comportement, comme l'auteur de la règle ou sa date de création ; agir sur ces attributs ne changera certainement pas les performances du système et les essais correspondants ne seront qu'une perte de temps. La nouvelle règle précise de n'agir que sur les attributs actifs, comme ceux qui contiennent des prémisses; elle ne fera pas les essais inutiles que faisait la règle initiale. Mieux définir les actions d'une règle améliore son efficacité".

Etude d'une méta-règle EURISKO

Métaconnaissance	Connaissance
	f est une connaissance
Historique de la connaissance f f a été utilisée pour engendrer les connaissances R1,R2...Rn	R1, R2, R3 ...Rn sont des connaissances
Utilité des connaissances R1 est une conn Utile R2 est une conn Inutile R3 est une conn Inutile R4 est une conn Utile ... ... Rn est une conn Utile.	
On pose Val(Ri) = 0 si Ri est inutile et Val(Ri) = 1 si Ri est utile.	
On définit une NOUVELLE propriété de la connaissance f par :	

$$\text{Pourcent de bons objet produit} = \frac{\text{Somme}(\text{Val}(Ri))}{n} = p(f)$$

La règle dit : si p(f) < seuil, alors créer une autre instance de f.

figure 3.

CONCLUSION

Les idées développées par J.Pitrat dans son livre me concernent à double titre : en tant que **concepteur de résolveur,** et en tant **qu'enseignant.**

Ce livre donne **au concepteur de résolveur** des pistes de réflexions pour la structuration d'une base de connaissances. Il donne des idées pour savoir ce qu'il faut mettre dans un système à base de connaissance. Il invite à un exercice fructueux, (et périlleux !) : analyser les différentes règles et métarègles de mon système en utilisant la classification des métaconnaissances proposée.

Ce livre met en évidence l'aspect général de la métaconnaissance : les problèmes qu'aborde J.Pitrat sont indépendants de tel ou tel domaine. Il est donc indispensable de réaliser des systèmes dans lesquels la métaconnaissance permet de résoudre de façon satisfaisante des problèmes qui sont difficiles à résoudre par les méthodes classiques de résolutions et même parfois insolubles à cause de l'explosion combinatoire.

Pour l'**enseignant**, le livre aide à cerner et à déterminer les mécanismes indispensables qui doivent être présents dans un logiciel à vocation didactique.

La réflexion sur la conception de logiciels d'EIAO, utilisant de la métaconnaissance, conduit à se poser la question de **ce qu'est l'enseignement** : est-ce une manière d'être et de chercher, ou bien, est-ce un contenu de connaissances dont l'exhibition permettra au spectateur / élève de construire sa capacité à raisonner ? Sans doute les deux **à la fois**, la difficulté étant de trouver le bon dosage. Cette double préoccupation est à la base de la réflexion de tout concepteur d'un système d'EIAO.

Remerciements.

Je remercie Hélène Giroire pour ses conseils et ses relectures de la version préliminaire de cet article.

REFERENCES.

[Nicolle, 92] Nicole A. : Cahiers du LAIAC Université de CAEN 1992 numéro 3.

[Cabri, 89] Baulac Y., Laborde J.-M., CABRI-GEOMETRE : *pour un nouvel apprentissage de la géométrie,* TSI, vol 8, 1989, p 387-391.

[Chatalic, 87] Chatalic P, Dubois D and Prade H. : *An approach to approximate reasoning based on the Dempster rule of combination.* 1987 Expert Systems 1. 121-152.

[Chi, 81] Chi M, Feltovich P. and Glaser R. : *Categorization and representation of physics problems by experts and novices.* 1981 Cognitive Science 5. 121-152.

[Eurisko] Lenat D. : *A program that learns new heuristics and domain concepts.* Artificial Intelligence 21. 61-98.

[Gelertner, 59] Gelertner H : *A note on syntactic symmetry and the manipulation of formal systems by machine.* 1959. Information and control 2. 80-89.

[Pintado, 91] Pintado M. : *Une approche pour un tuteur informatique d'entraînement à la résolution d'exercices de géométrie élémentaire.* Deuxièmes journées EIAO de Cachan. 1991 ENS Cachan 45-61

[Pitrat, 90] Pitrat J. : *Métaconnaissance, Futur de l'intelligence artificielle.* Hermès, 1990.

QUELQUES (META)CONNAISSANCES DONNEES AU DEMONSTRATEUR DE THEOREMES MUSCADET

Dominique Pastre
LAFORIA

1. Introduction

MUSCADET est un système à base de connaissances, destiné à faire de la Démonstration Automatique de Théorèmes dans des domaines mathématiques particuliers, non triviaux.

Il est constitué d'un moteur d'inférence, général dans le sens où il ne connait rien, non seulement des domaines mathématiques, mais même des mathématiques en général. Il ne sait pas ce que sont une hypothèse, une conclusion, un connecteur, une valeur de vérité. Il peut être considéré comme un résolveur de problèmes essentiel.

Des bases de connaissances générales sur les mathématiques, des techniques de démonstration et des heuristiques en font un démonstrateur de théorèmes général. Avec des bases de connaissances et de savoir-faire spécifiques à un domaine particulier, il devient un démonstrateur pour ce domaine particulier.

Toutes les (méta)connaissances sont exprimées sous forme de règles et métarègles.

Le système est décrit en détails dans [1] et [2]. Une présentation plus succinte, plus particulièrement destinée à des enseignants de mathématiques, se trouve dans [3]. Une présentation plutôt destinée à des théoriciens de la Démonstration Automatique se trouve dans [4]. Quelques réflexions et expérimentations sur la difficulté relative de différents problèmes se trouvent dans [5]. Enfin [6] décrit un travail préliminaire destiné à permettre au système de devenir un assistant pour le mathématicien.

Dans cet article, on donne quelques exemples de règles et métarègles. La classification qui en est faite est destinée à permettre au lecteur de voir quels types de connaissances le système reçoit. Le système ignore tout de cette classification.

2. Méthodes générales

Des choix de représentation ont été faits. Un théorème à démontrer est constitué d'une conclusion (à démontrer), d'hypothèses et d'un certain nombre d'autres informations. Au départ la conclusion est constituée de l'énoncé donné du théorème à démontrer. Des transformations sont effectuées par des règles, de nouvelles connaissances peuvent être ajoutées. La liste des règles actives (c'est-à-dire les règles pertinentes pour la situation actuelle), est établie et ordonnée par des métarègles.

3. Règles techniques

Pour montrer $A \Rightarrow B$ (c'est-à-dire si la conclusion est $A \Rightarrow B$), supposer A (c'est-à-dire ajouter l'hypothèse A) et montrer B (c'est-à-dire la nouvelle conclusion est B).

Pour montrer $\forall x\ P(x)$, créer x_1 et montrer $P(x_1)$.

Pour montrer $\forall x \in A\ P(x)$, créer x_1 tel que $x_1 \in A$ (c'est-à-dire ajouter l'hypothèse $x_1 \in A$) et montrer $P(x_1)$.

Si la conclusion fait partie des hypothèses, alors le théorème est démontré.

Si la conclusion est une disjonction de propriétés et que l'une d'elles fait partie des hypothèses, alors le théorème est démontré.

Pour montrer non A (c'est-à-dire si la conclusion est non A), supposer A (ajouter l'hypothèse A) et trouver une contradiction (démontrer la nouvelle conclusion "faux")

Si on a l'hypothèse "faux", alors le théorème est démontré.

Pour démontrer une conjonction de propriétés, démontrer successivement chacune d'elles.

Si on veut démontrer une conjonction de propriétés et que l'une de ces propriétés est vraie (trivialement vérifiée ou démontrée par un appel récursif au démonstrateur) alors la retirer de la conjonction.

Si la conclusion était une conjonction de propriétés et qu'il n'en reste plus à démontrer, alors le théorème est démontré.

Si on a une hypothèse $A \vee B$ et qu'on veut montrer C, alors montrer $(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$.

4. Super-actions

Ajouter une hypothèse H ne consiste pas à l'ajouter simplement mais ceci est fait par un paquet de règles (super-action):

Si H est une conjonction, ajouter chaque élément de la conjonction.

Si H est déjà une hypohèse, ne rien faire.

Si H est de la forme $x=x$, ne rien faire.

Si H est de la forme $\forall x \in A\ P$, ne pas l'ajouter, mais construire de nouvelles règles "locales" à partir de cette hypothèse (par des métarègles ,voir plus loin).

Dans tous les autres cas, ajouter H comme nouvelle hypothèse.

5. Techniques plus compliquées

Pour démontrer $\exists x(C_1(x) \wedge C_2(x) \wedge \ldots \wedge C_n(x))$, chercher les x qui vérifient $C_1(x)$ et essayer de montrer les autres $C_i(x)$ pour les valeurs trouvées. Le théorème est démontré s'il reste au moins une instantiation pour x à la fin.

6. Métarègles de construction de règles

Des règles sont construites à partir des définitions (et des hypothèses existentielles) par des métarègles.

Exemple: à partir de la définition $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Si on a une définition de la forme $X \Leftrightarrow Y$ et si la connective principale de X est P, alors construire le squelette de règle *si X alors* de nom *P* et travailler sur Y.

Ceci donne le squelette de règle *si on a l'hypothèse* $A \subset B$ *alors* de nom "$\subset$".

Si on doit travailler sur $\forall x$ P, travailler sur P.

Si on a le squelette de règle *si <liste de conditions> alors* et qu'on doit travailler sur $X \Rightarrow Y$ alors ajouter la condition *on a l'hypothèse X*, ajouter l'action *ajouter l'hypothèse Y*.

Ceci donne la règle de nom "$\subset$" *si on a les hypothèses* $A \subset B$ *et* $x \in A$ *alors ajouter l'hypothèse* $x \in B$

Ajouter une condition ou une action ne se fait pas simplement, mais dépend de la forme de ce qu'on doit ajouter, et est défini par des paquets de règles.

7. Métarègles d'activation de règles

On crée d'abord des liens: un *théorème à démontrer* est lié aux concepts qui apparaissent dans l'énoncé donné, ainsi qu'aux concepts qui apparaissent dans les définitions des concepts précédents, etc ... .

Des métarègles examinent les règles et en activent certaines. Ceci dépend de leur type, de leur forme, des concepts qui y apparaissent, de la place où ils apparaissent et des liens précédemment établis.

Exemple: les règles de type RO ("règle obligatoire") sont activées si elles ne comportent pas de concept (uniquement des symboles universels comme $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\exists$, $\forall$, ...), ou si elles comportent, dans leur première condition un concept lié au *théorème à démontrer*.

8. Métarègles d'ordre sur les règles

1) Les activations précédentes se font selon un certain ordre sur les types de règles (RO, savoir-faire, gestion, ...) qui peuvent dépendre des domaines (heuristiques).

2) Si on a une règle active R susceptible de créer un a tel que P, et une règle active R' susceptible de créer un b tel que Q , et si P est plus général que Q, alors R' doit être avant R (échanger sinon).

En fait on a une règle plus particulière:

Si l'action de R dit d'ajouter l'hypothèse $\exists x \in A$ B, celle de R' dit d'ajouter l'hypothèse $\exists x' \in A$ B', B' est une conjonction et B est un élément de cette conjonction (modulo x et x') alors R' doit être avant R.

9. Connaissances et savoir-faire spécifiques aux EVT

Un voisinage d'un point (x,x) de la diagonale est (peut être pris) de la forme UxU où U est un voisinage de x.

Un voisinage d'un point (x,y) avec $x \neq y$ sera pris de la forme UxV où U et V sont des voisinages de x et y respectivement.

Un voisinage d'un nombre réel est (peut être pris comme) un intervalle ouvert symétrique.

Si la conclusion parle d'un segment [x y] avec x et y $\neq$ O, alors on a un super-lien[1] à +.

Si la conclusion parle d'un segment [O x] alors on a un super-lien à *.

Si la conclusion parle d'un ensemble étoilé par rapport à 0, alors on a un super-lien à *.

Si on a un voisinage U de z et qu'on cherche un voisinage V de z inclus dans U, appliquer la continuité de + ou * en z.

Si on doit appliquer la continuité de + ou * , et si on a un superlien à +, l'appliquer à +.

Si on doit appliquer la continuité de + ou * , et si on a un superlien à *, et pas de superlien à +, l'appliquer à *.

Pour appliquer la continuité de f à z=f(x,y), si U est un voisinage de z, alors créer V voisinage de (x,y) et W=f(V) tels que $W \subset U$ (s'il n'en existe pas déjà) et activer toutes les règles relatives au concept image.

Si on a $z \in [x\ y]$ et qu'on a déjà les segments [0 x] et [0 y], alors créer $x' \in [0\ x]$ et $y' \in [0\ y]$ tel que z=x'+y' (s'il n'existe pas déjà).

Si on a $y \in [0\ x]$ alors créer $b \in [0\ 1]$ tel que y=b*x.

Pour montrer que B est voisinage de x essayer d'obtenir B comme union de voisinages.

---

[1] Un super-lien exprime un lien plus fort qu'un lien ordinaire. Par exemple, dès qu'on a un espace vectoriel, on a un lien à +, mais si on a de plus un segment[x y] avec x et y $\neq$ O, alors on ajoute un lien plus fort appelé super-lien.

Pour obtenir C, de la forme f(A,B) comme union d'ensembles, écrire C sous la forme $\bigcup\{f(x,B) \mid x \in A\}$.

Si B est une union d'ensemble, pour montrer que c'est un voisinage, montrer que chaque ensemble est un voisinage.

Pour montrer que B est un voisinage, s'il n'est pas une union d'ensembles, chercher une application continue f telle que B soit l'image inverse d'un voisinage par f.

10. Vers des métarègles de contrôle

Dans beaucoup de ces cas, on peut considérer qu'on a mélangé la méthode et le contrôle: au lieu d'écrire:

- une méthode par une règle R: *si* C_1 *et ... et* C_n *alors ...*

- et une métarègle: *si* C'_1 *et ... et* C'_p *alors appliquer R,*

on a écrit la règle: *si* C'_1 *et ... et* C'_p *et* C_1 *et ...et* C_n *alors ...*

Dans l'exemple du paragraphe précédent "Pour appliquer la continuité de f", on aurait plutôt dû écrire

- la règle simple: *pour appliquer la continuité de f à z=f(x,y), si U est un voisinage de z, alors créer V voisinage de (x,y) et W=f(V) tels que* $W \subset U$

- et deux métarègles:

si le déclenchement d'une règle introduit un nouveau concept, alors activer les règles relatives à ce nouveau concept;

si une règle crée un nouvel objet ayant certaines propriétés, ne l'appliquer que si l'on n'a pas encore un tel objet.

REFERENCES

[1] - MUSCADET : Un Système de Démonstration Automatique de Théorèmes utilisant Connaissances et Métaconnaissances en Mathématiques - Thèse d'état - Paris VI - Novembre 1984

[2] - MUSCADET: An Automatic Theorem Proving System using Knowledge and Metaknowledge in Mathematics - Journal of Artificial Intelligence 38 n° 3 (1989) - April 1989 - pp.257-318

[3] - Représentation et Expression de Connaissances Mathématiques pour Démontrer automatiquement des théorèmes - Université d'été Intelligence Artificielle et Enseignement des Mathématiques - TOULOUSE - Juillet 1987 - pp. 109-130

[4] - Déduction Naturelle et Utilisation de Connaissances, *in* Aspects de la Déduction Automatique en France, vers davantage d'efficacité et de facilité d'interaction dans la recherche et la communication de preuves - R.Caferra & al - Troisièmes Journées Nationales du PRC-IA - Paris - Mars 1990 - pp. 193-202

[5] - Qu'est-ce qu'un problème difficile ? Qu'est-ce qu'un problème résolu ? Qu'est-ce qu'un problème ? Colloque Intelligence Artificielle - Lyon - Septembre 1990 - Cahier du LAFORIA n°81 - pp. 9-29

[6] - Premiers pas vers la géométrie discrète - Publication n° 19/91 du LAFORIA - Septembre 1991

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Metaconnaissances en IA en EIAO et en didactique des mathématiques

AUTEUR (S) :

Recueil édité par M. BARON et A. ROBERT

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Mai 1993
ISBN : 2-86612-113-9