Second CONTE

Lundi 16 décembre 1991
Michèle Grégoire

Peut- on décomposer des figures de même mesure à l'aide des mêmes pièces? Pour approcher le 3ème problème de Hilbert.

La question posée reprend le troisième des 23 problèmes que posa Hilbert aux mathématiciens réunis en 1900 pour un second congrès international. Hilbert expliquait qu'il avait été démontré que si deux polygones ont même aire, on peut découper l'un d'eux en un nombre fini de pièces et réarranger ces pièces pour obtenir l'autre polygone; nous dirons qu'ils sont équidécomposables. Il demandait si la propriété était vraie également pour deux polyèdres, en particulier pour deux tétraèdres, de même volume, remarquant que toutes les démonstrations de l'égalité des volumes de deux tétraèdres de base et de hauteur égales faisaient appel à des méthodes équivalentes aux méthodes infinitésimales. Pour situer la question, voici un historique rapide des liens entre égalité des mesures des figures et équidécomposabilité.

Chez Euclide, comme dans toute la géométrie grecque, on ne trouve pas la notion numérique d'aire ou de volume, mais seulement des comparaisons de figures. Euclide établit des égalités ou évalue des rapports de "grandeurs". La "méthode des aires" est un des outils importants de démonstration du Livre I des *Eléments* . Elle permet en particulier de démontrer l'égalité (en aires) de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur, par un procédé qui équivaut à un découpage et à un réarrangement de pièces. Dans le Livre VI, utilisant la théorie des proportions, mise en place au Livre V, Euclide montre que deux parallélogrammes puis deux triangles de même hauteur sont proportionnels à leur bases. En ce qui concerne les solides, Euclide, dans le Livre XI, montre un résultat analogue pour les parallélépipèdes: deux parallélépipèdes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, il peut étendre ce résultat aux prismes triangulaires qui sont des moitiés de parallélépipèdes (ces démonstrations ont été présentées ou lues dans le texte d'Euclide). Mais il ne peut étendre le dernier résultat aux pyramides qu'en ayant recours à la méthode par exhaustion, équivalente à notre passage à la limite.

Au XIXème siècle on a cherché à comprendre plus précisément le lien entre égalité d'aires et équidécomposabilité. L'égalité des aires de deux figures entraine-t-elle leur équidécomposabilité? F. Bolyai (le père de J. Bolyai), en 1832, et Gerwien, officier prussien et mathématicien amateur, en 1833, montrent que deux polygones de même aire sont équidécomposables. J'ai exposé une démonstration plus moderne de ce résultat: elle consiste à trianguler les polygones, à montrer qu'un triangle est équidécomposable avec un rectangle de même aire et qu'enfin deux rectangles de même aire sont équidécomposables (fig.1); on utilise la transitivité de la relation d'équidécomposabilité.

Le problème analogue pour les volumes est de chercher si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables. J'ai proposé une démonstration moderne de ce que deux prismes de même volume sont équidécomposables, illustrée en partie par les figures 2 et 3: un prisme est équidécomposable avec un parallélépipède oblique de même volume, lui-même équidécomposable avec un parallélépipède droit, ce dernier enfin est équidécomposable avec un cube.

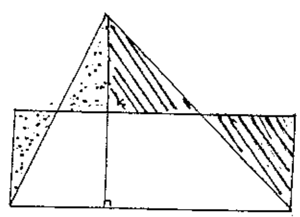
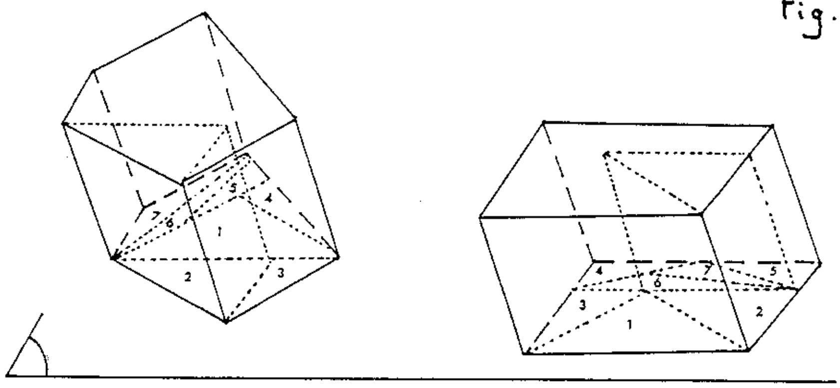


Fig. 1

Fig. 2.



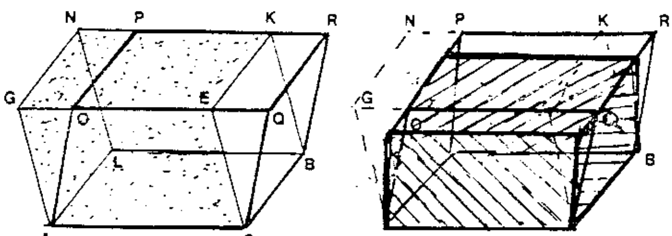


Fig. 3

Legendre, dans une note ajoutée à ses *Eléments de Géométrie* , avait déjà, au tout début du XIXème siècle, démontré que deux polyèdres symétriques sont équidécomposables avec des pièces strictement de même orientation. Hill, professeur à l'université de Londres, donne en 1895 des exemples de tétraèdres équidécomposables avec un cube (fig.4). Hilbert a cependant l'intuition que ces cas d'équidécomposabilité ne sont que des exceptions. Bricard, professeur de mathématiques à Paris, a donné en 1896 une condition pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables, condition qui ne peut manifestement pas être vérifiée pour toute paire de solides de même volume. Hilbert ne mentionne pas ce résultat car la démonstration de Bricard est incomplète. C'est Max Dehn, un élève de Hilbert, qui montre en 1900, quelques mois après le Congrès de Paris, qu'il existe des polyèdres de même volume non équidécomposables. Il précise la condition trouvée par Bricard: Si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables, il existe une relation linéaire entre les angles dièdres de ces polyèdres et l'angle plat, dont les coefficients entiers dépendent des longueurs des arêtes. Dehn met en évidence qu'un tétraèdre régulier et un cube de même volume ne peuvent être équidécomposables. Le mathématicien suisse Hadwiger a repris ces travaux dans les années cinquante et a simplifié la démonstration de Dehn. En particulier, il utilise ce qu'on appelle maintenant l'invariant de Dehn d'un polyèdre, qui est le même pour deux polyèdres équidécomposables. Or la décomposition d'un prisme en trois pyramides peut faire apparaître des pyramides de même volume mais d'invariants de Dehn différents. En 1965, après avoir obtenu plusieurs résultats intermédiaires, le mathématicien suisse J. P. Sydler réussit à démontrer que les conditions de Dehn sont nécessaires et suffisantes pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables.

Le troisième problème de Hilbert est complètement résolu. Il existe des pyramides de bases et de hauteurs égales non équidécomposables. Il n'est donc pas possible de construire une théorie des volumes des polyèdres en faisant l'économie d'une méthode équivalente au calcul infnitésimal.

Un exposé plus complet et une bibliographie se trouvent dans *La Figure et l'Espace,* Actes du 8ème colloque de la commission Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie , publié par l'Irem de Lyon (43 bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex) .

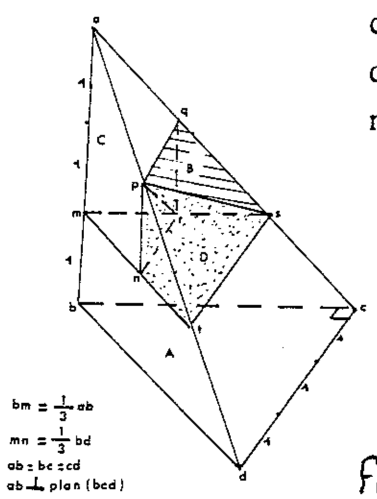


Fig. 4