

**Courbe de lissage d'une fonction continue:
problème de mathématiques pures avec Karl Weierstrass ?
de mathématiques appliquées avec Carl Runge?**

Maryvonne Haliez

En 1885, Weierstrass, à 75 ans, publie un mémoire dans lequel il démontre que " toute fonction continue d'une ou plusieurs variables réelles peut, pour toutes les valeurs de cette (ou ces) variable réelle contenues dans un intervalle fini, être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions entières." Ce mémoire satisfait pleinement aux exigences de la communauté mathématique internationale de l'époque. Au-delà de ce résultat, j'ai mis en lumière trois motivations de cette publication;

- les préoccupations pédagogiques de Weierstrass ; dans une conférence à Berlin en 1864, il déclare que le manque de rigueur qu'il trouve dans les travaux à sa disposition lui font renoncer à faire son cours sur les séries et intégrales de Fourier.

- son admiration du travail de Fourier dont il veut rendre rigoureux les énoncés mathématiques, ne perdant jamais de vue le lien entre les mathématiques et la "compréhension des phénomènes naturels"

- son activité de recherche de théoricien des mathématiques; dans ce texte , son regard embrasse tous les résultats de l'analyse mathématique; il y travaille la définition de l'intégrale généralisée, la formulation du théorème de la moyenne. Par la généralisation qu'il tient à donner à sa démonstration, il ouvre la voie à de nouvelles théories:

la théorie de la convolution

la théorie de l'approximation

Parallèlement, Runge, qui fut l'élève de Weierstrass publie la même année une démonstration du "même" théorème qui fait appel à un très petit nombre de considérations; il se tourne ensuite vers les mathématiques "appliquées"? Dans un article de 1901, il ne s'agit plus pour lui de montrer qu'il est possible de construire une série de polynômes convergeant uniformément vers une fonction continue donnée mais d'établir les limites au-delà desquelles les procédés d'interpolation ne sont plus fiables et il décrit ce que nous appelons le "phénomène Runge".