

CANTOR ET LES NOMBRES :

Annie Hupé

Georg Cantor est né en 1845 à Saint Petersburg dans une famille de riches commerçants. Il est l'élève de Kummer, Kronecker et Weierstrass. Si, en 1867, il soutient une thèse sur la théorie des nombres, c'est vers l'analyse qu'il se tourne ensuite, sous l'influence de Weierstrass, et il étudie plus spécialement les séries trigonométriques. " A l'occasion de recherches fines d'analyse, Cantor étudia et compara directement des ensembles infinis, introduisant à cet effet de nouveaux concepts, qui constituaient une véritable arithmétique de l'infini." (Encyclopédia Universalis. "Cantor").

Son nom reste attaché à la théorie des ensembles. Il est cependant plus exact de dire que Richard Dedekind et Georg Cantor dégagèrent conjointement cette notion abstraite d'ensemble. En effet, leur rencontre en 1872 fut suivie d'une correspondance quasi quotidienne, témoignage de la démarche, des questions, doutes et des hésitations des deux mathématiciens. (Cavaillès a publié en grande partie la traduction française de cette correspondance : Philosophie mathématique 1962 Hermann)

L'aspect sur lequel l'exposé a voulu mettre l'accent est le caractère "fatal" de la création de nombres et pour cela deux textes seront plus particulièrement utilisés.

–Le premier texte date de 1871 (il n'est traduit en français qu'en 1883). Ce mémoire s'intitule: *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques.*(Annales Mathématiques de Leipzig 1872 ; traduction française Acta Mathematica 1883) Il veut alléger les hypothèses et commence par dégager la notion de nombres réels : à toute suite de Cauchy de rationnels a est associé un nombre b qu'il nomme "limite". De façon formelle il crée l'ensemble B des éléments b ainsi obtenus. Il définit alors une addition, une multiplication et un ordre. Il peut alors réintroduire la notion de limite. Mais il n'y a plus de raison de s'arrêter là. De même qu'à partir des rationnels l'emploi de limites a créé les nombres b , dans B il construit à nouveau des nombres c (nombres de seconde espèce) qui constitueront l'ensemble C. Etc... " *la notion de nombre, si développée qu'elle soit, porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie.*"

Il est ensuite conduit à introduire P' ensemble dérivé de P : c'est l'ensemble des points d'accumulation de P (Borel reprendra ultérieurement cette notion)

–Le second texte qui date de 1883 est immédiatement traduit en français. Il insiste sur le caractère nécessaire de l'extension des nombres – Cantor va jusqu'à dire "être contraint". Dans ce texte il expose la construction des nombres transfinis toutefois il faut attendre 1897 pour que ce mot "transfini" soit employé, dans le dernier mémoire: "*Contribution à la fondation de la théorie des nombres transfinis*".