## DANS NOS CLASSES

# La section dorée dans les Eléments d'Euclide

Voici une activité facile pour les classes de 1ère, autour des équations du second degré. Cette activité introduit au langage de l' "algèbre géométrique" d'Euclide, amène à faire le lien entre l'écriture algébrique d'égalités et leur interprétation géométrique.

## La section dorée:

De nombreux artistes ont utilisé, pour composer harmonieusement le plan d'un bâtiment ou d'un tableau, des dimensions dont le rapport est égal au nombre d'or. C'est déjà le cas de Phidias, l'architecte du Parthénon à Athènes; c'est en son honneur que la lettre $\Phi$ a été choisie (au début du XXème siècle ), pour désigner le nombre d'or. Euclide emploie, au livre V des Eléments une expression qu'on traduit par " partage en extrême et moyenne raison "; l'expression "section dorée" est de Léonard de Vinci.

• Le point H réalise "la section dorée" du segment [AB] si les deux parties inégales AH ( la majeure) et HB ( la mineure) qu'il définit sont telles que:
" le rapport du tout à la majeure soit égal au rapport de la majeure à la mineure "
ce que nous écrivons $\frac{AB}{AH} = \frac{AH}{HB}$


Question 1 :
Où l'on vérifie que le rapport $\frac{AB}{AH}$ ou $\frac{AH}{HB}$, appelé nombre d'or , ne dépend pas de la longueur AB:

a) Soit $AB = d$ , $AH = x$ ; écrire une équation dont x est solution.

b) Soit $\Phi = \frac{d}{x}$ Montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$ et donner la valeur exacte et une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $\Phi$.

## Le texte d'Euclide :

Le plus ancien texte qui s'interesse à la section dorée est celui des Eléments d'Euclide. Un tel partage d'un segment y est en particulier utilisé pour la construction d'un pentagone régulier. Ce problème est équivalent à la résolution d'une équation du second degré, mais comme dans la plupart des textes de l'Antiquité grecque, le problème est posé en termes géométriques. Le produit de deux grandeurs a et b est pour lui l'aire d'un rectangle de côtés a et b, le carré $a^2$ est l'aire d'un carré de côté a, la somme $ab + a^2$ est l'aire de la réunion des deux figures....

Avant de résoudre le problème, à la proposition 11 du Livre II, Euclide avait établi diverses propriétés que nous reconnaissons comme des identités algébriques ( par exemple: $a(b+c) = ab + ac$ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .....); elles sont toujours présentées dans un langage géométrique. On en étudiera un exemple: la proposition 6 du Livre II.

Dans d'autres parties de son œuvre, Euclide résout d'autres problèmes que nous reconnaissons comme des exemples de problèmes du second degré, mais on ne trouve pas d'étude systématique de ces problèmes.

Extrait de la proposition 6 ( Livre II)

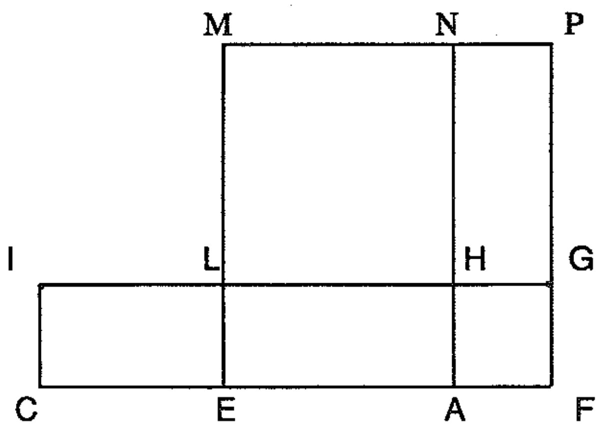
*"Qu'une certaine droite [1] AC soit coupée en deux parties égales au point E et qu'une certaine droite AF lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par CF.FA [2], pris avec le carré sur AE [3] est égal [4] au carré sur EF [3]"*

*Vocabulaire:* (1) droite signifie toujours pour Euclide segment de droite.

(2) le rectangle contenu par CF, FA : c'est le rectangle dont les côtés ont pour longueur CF et FA

(4) l'égalité des figures signifie ici l'égalité des aires de ces figures.

(3) le carré sur AE : un carré de côté AE.




La proposition énonce donc :

(r) rectangle CFGI + carré LHNM = carré EFPM

Question 2:

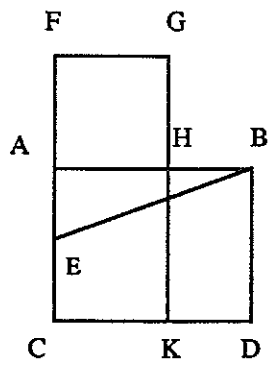
a) Démontrer la relation (r) géométriquement.

b) Poser d = AC , y = AF; traduire algébriquement la relation (r) et la vérifier.

c) Poser $a = \frac{d}{2} + y$ $b = \frac{d}{2}$

Ecrire (r) en fonction de a et b. Quelle identité remarquable reconnaît-on?

Proposition 11 (livre II)




*"Couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.*

*Soit la droite donnée AB . Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment ι estant."*

Pour mieux comprendre l'énoncé de la proposition :

Il faut déterminer la position du point H sur le segment [AB] (donné) de sorte que l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur AB ("la droite entière") et BH ("un des segments") soit égal au carré de côté AH (le "segment restant"). Euclide écrira aussi: " le rectangle contenu par AB, AH " égal au "carré sur AH"

| |
|---|
| Question 3 :<br>Montrer que ce problème équivaut à celui du partage du segment AB selon la section dorée. |

Voici la construction proposée par Euclide :

*"En effet , que le carré ABCD soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe , et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE (1) , et que le carré FH(2) soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupé en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH(3) égal au carré sur AH."*

*Vocabulaire:*

(1) Le segment CA est prolongé jusqu'en F de sorte que EF = EB

(2) Le carré FH : le carré est désigné par sa diagonale [FH], de même , les rectangles sont souvent désignés par une de leurs diagonales.

(3) Quel est le rectangle de la figure " contenu par AB, BH" ?

| |
|---|
| Question 4 : Soit d = AB; calculer en fonction de d : EB, AF, HB, puis $\frac{AB}{AH}$ et $\frac{AH}{HB}$<br>Quel type de partage du segment a-t-on réalisé? |

Et maintenant voici la démonstration d'Euclide.

*"En effet, puisque la droite AC a été coupée en deux parties égales au point E et, puisque FA lui a été ajoutée, le rectangle contenu par CF, FA, pris avec le carré sur AE, est égal au carré sur EF ( II,6) .Or EF est égal à EB. Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal au carré sur EB. Mais à celui sur EB sont égaux ceux sur BA, AE, (I, 47), car l'angle en A est droit : Donc le rectangle contenu par CF, FA avec le carré sur AE est égal à ceux sur BA, AE.Que le carré sur AE soit retranché de part et d'autre. Donc ce qui reste, le rectangle contenu par CF, FA est égal au carré sur AB. Que (* le rectangle) *AK soit retranché de part et d'autre; le reste (* le carré) FH *est donc égal à HD. Donc le rectangle contenu par AB, BH est égal au carré sur AH.*

*Donc la droite donnée AB a été coupée en H, de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH. Ce qu'il fallait faire."*

Pour mieux comprendre :

(1) Euclide renvoie à la proposition 6 du livre II étudiée à la question 2.

(2) Euclide renvoie à la proposition 47 du livre I que nous intitulons "Théorème de Pythagore". Réécrire dans le langage contemporain la phrase "Au carré sur EB sont égaux les carrés sur BA, AE ".

(3) retranché de part et d'autre de l'égalité obtenue.

Question 5:

Rédiger la démonstration en langage contemporain en réécrivant avec vos notations la suite des égalités énoncées par Euclide.

Question 6:

Commenter et comparer les démarches des deux dernières questions.

N.B. Les extraits des Eléments d'Euclide sont repris de la traduction de B. Vitrac P.U.F. Paris 1990