LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Petersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Inſtitut de Bologne; Profeſſeur de Mathématiques au College Mazarin.*

NOUVELLE ÉDITION,

Avec de nouveaux Éléments d'Algebre, de Géométrie, de Trigonométrie rectiligne & ſphérique, de Sections coniques, de pluſieurs autres Courbes, de Calcul Différentiel & de Calcul Intégral.

Par M. l'Abbé MARIE, *de la Maiſon & Société de Sorbonne, Sous-Précepteur de Monſeigneur* LE DUC D'ANGOULÊME, *Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

A PARIS;
Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXVIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

BONNES VIEILLES PAGES

En 1740 l'abbé de LA CAILLE est en Auvergne où il effectue avec CASSINI des travaux de géodésie nécessités par l'établissement de la carte de France . C'est alors que le Collège Mazarin, à Paris, lui demande de venir enseigner les mathématiques. Avec tout le sérieux que chacun lui reconnaît, La Caille s'attèle à cette tâche et rédige les " Leçons élémentaires de mathématiques" traduites en latin, espagnol, anglais et rééditées en français de nombreuses fois au cours du XVIIIème siècle.

Les "leçons" traitent de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, de la trigonométrie, des sections coniques, du calcul différentiel, du calcul intégral, c'est à dire à peu près de l'ensemble des mathématiques enseignées à l'époque. On y relève explicitement le désir de présenter simplement les questions à étudier et d'en montrer les applications.

Nous proposons ici à la lecture, l'introduction du chapitre sur le calcul différentiel.

FIG.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

IL en eſt du Calcul Différentiel comme de l'Algebre : on ne ſauroit le définir d'une maniere intelligible pour ceux qui n'en connoiſſent pas les premiers éléments.

Newton fut le premier Inventeur de ce calcul, & perſonne n'en eût partagé la gloire avec lui, s'il eût été plus empreſſé de mettre au jour ſes découvertes.

Mais l'eſpece de myſtere dont il les enveloppa dans l'origine, donna le temps à Leibnitz de marcher à grands pas dans la même carriere. Bientôt après Jacques & Jean Bernoulli coururent ſur ſes traces; de-là cette vive conteſtation que les Géometres Allemands eurent avec les Géometres Anglois, pour ſavoir à qui de Léibnitz ou de Newton étoit dûe la principale gloire. Sans entrer dans cette diſcuſſion, nous obſerverons que d'autres Géometres avoient préludé depuis long-temps à la découverte du calcul Différentiel.

Il ne ſeroit même pas difficile de faire voir une eſpece de filiation entre ce calcul & *la Méthode d'Exhauſtion*, ſi connue des Anciens, *la Méthode des Indiviſibles*, donnée par Cavalieri, & les procédés dont Fermat, Deſcartes, Barrow & tant d'autres faiſoient uſage avant Newton. Les travaux de ces derniers Géometres ſemblent avoir ſervi d'échelons à ce grand homme.

775. Quoi qu'il en ſoit, ſuppoſons qu'une *variable* quelconque x reçoive un accroiſſement fini e, de maniere qu'après l'avoir reçu, ſon état ſoit exprimé par $x + e$. On demande quels doivent être les accroiſſements correſpondants des autres fonctions de x ?

D'abord il eſt clair que ſi x devient $x + e$, ſon quarré x^2 deviendra $x^2 + 2ex + ee$; ainſi le rapport de ces deux accroiſſements ſera $\frac{1}{2x + e}$. Mais ſi e diminue, ce rapport augmentera, & il approchera de plus en plus de celui de $\frac{1}{2x}$. Cependant il ne lui deviendra égal, qu'au moment où e s'évanouira : le rapport de $\frac{1}{2x}$ eſt donc la *limite* de ceux que les accroiſſements finis de x & de xx peuvent avoir entre eux. On trouvera de même que la limite de ceux de x & de x^n eſt $\frac{1}{nx^{n-1}}$.

776. Or le calcul différentiel a pour objet de déterminer ces limites dans tous les cas. Voyez ce que M. d'Alembert a écrit ſur cette matiere; vous y trouverez les vraies notions de ce calcul. S'il reſte encore quelques difficultés de Métaphyſique, c'eſt qu'elles ſont inſéparables des idées toujours abſtraites de limite & d'infini.

777. Voici une des applications les plus propres à faire entendre la maniere de déterminer ces limites. Soit propoſé de mener une tangente au point M de la courbe AM*m*, ou, ce qui revient au même, ſoit propoſé de déterminer la ſoutangente PT. FIG. 184.

On ſuppoſera que l'abſciſſe AP $= x$ croît d'une quantité finie P*p* $= e$; on menera l'ordonnée PM $= y$, & on déterminera l'ordonnée *mp*, en ſubſtituant $x + e$ au lieu de x dans l'équation de la courbe. Quelle que ſoit la valeur de cette ordonnée, on pourra toujours la repréſenter par $y + Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c. (P, Q, R, &c. étant des fonctions de x); on aura donc pour l'expreſſion de *rm*, accroiſſement correſpondant de l'ordonnée PM, la quantité $Pe + Qe^2 + Re^3 +$ &c.

Cela poſé, ſoient menées la ſécante SM*m*, & la ligne M*r* parallele & égale à P*p*; on aura PS $= \frac{y}{P + Qe + Re^2 +}$ &c. Rapprochons maintenant le point *p* du point P; le point *m* s'approchera du point M, & le point S du point T: mais on aura toujours PS $= \frac{y}{P + Qe + Re^2 +}$ &c. Si la quantité P*p* diminue encore & devient très-petite, il ne s'en faudra que de très-peu que *m* ne ſe confonde avec M, & que la ſécante ne devienne tangente. Mais ſi *e* s'évanouit, le rapport déja trouvé ſe réduit à $\frac{y}{P}$, PS devient PT, S*m* devient TM qui n'a plus que le point M de commun avec la courbe, & la ſoutangente eſt déterminée par cette limite.

PAR EX. Si AM*m* eſt une parabole, on ſubſtituera $x + e$ à x dans l'équation $y = \sqrt{px}$, & on aura $y = p^{\frac{1}{2}}(x+e)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}e -$ &c, qui donne $P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$; d'où $PT = \frac{\sqrt{px}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}} = 2x$, comme nous l'avons déja trouvé (669). 184.

On voit par là avec quelle promptitude cette méthode réſout le problème des tangentes, qui eſt en quelque ſorte le berceau du calcul différentiel. Mais on verra bien plus amplement dans la ſuite la conformité des réſultats de ce calcul avec ceux de l'ancienne Géométrie.

En attendant, nous remarquerons que ces quantités P*p*, ou M*r*, & *rm* que nous avons ſuppoſées diminuer de plus en plus, à meſure que le point *p* ſe rapproche du point P, ſont les éléments reſpectifs de l'abſciſſe AP & de l'ordonnée MP.

778. Ces éléments, quelque petits qu'on les ſuppoſe, conſervent entre eux le même rapport que les quantités finies auxquelles ils appartiennent; cela eſt viſible par la ſeule inſpection des triangles

ſemblables TPM & M*mr*. Et comme la limite de ce rapport n'a lieu qu'au moment où ces éléments s'evanouiſſent, on peut dire avec M. Euler, que le calcul différentiel a pour objet de faire connoître à quoi ſe réduiſent les rapports des éléments des quantités variables, lorſque ces éléments deviennent nuls.

Mais ne pouvant devenir nuls, ſans paſſer par tous les degrés poſſibles de diminution, on ſent bien qu'il doit réſulter de leur décroiſſement infini des idées un peu confuſes : car notre eſprit ne comporte pas de perception claire de ce qui tient à l'infini. Auſſi depuis ſon origine, le calcul différentiel a-t-il éprouvé beaucoup de contradictions. Il en éprouvera ſans doute encore ; mais s'il falloit répondre à toutes les chicanes d'une Métaphyſique pointilleuſe, on n'en finiroit pas. L'exiſtence même du mouvement ſeroit encore un problême, ſi on s'étoit arrêté aux difficultés que Zénon propoſoit autrefois pour la combattre.

Ce n'eſt pas au reſte que Maclaurin, dans ſon *Traité des Fluxions*, n'ait répondu à la plûpart des ſophiſmes dont quelques Auteurs ont voulu embrouiller la matiere. C'eſt un Ouvrage qu'il faut lire, quand on veut approfondir cette théorie : mais on ne peut ſe diſſimuler que pour ſuivre la marche rigoureuſe de ce ſavant homme, il faut eſſuyer bien des longueurs.

779. Si les principes dont Leibnitz eſt parti, ne ſemblent pas auſſi exacts, ils ont du moins l'avantage de conduire aux mêmes réſultats que ceux de Newton, & de ne demander, pour ainſi dire, que deux ſuppoſitions : la premiere, qu'en diminuant de plus en plus les élémens des quantités variables, on peut les réduire à des *infiniment petits*. La ſeconde, qu'il exiſte entre les infiniment petits de deux ordres différents, la même ſubordination qui eſt entre les quantités finies & leurs éléments. Ces deux ſuppoſitions, une fois admiſes, les regles du calcul ne ſouffrent plus de difficulté.

Or telle eſt la ſubordination d'une quantité infiniment petite par rapport à la quantité finie dont on la conſidere comme l'élément, qu'elle peut être négligée ſans erreur ſenſible, de même qu'on néglige une quantité finie par rapport à une quantité infinie. C'eſt ainſi, par exemple, que $\infty - 1$, & plus généralement $\infty \pm a$ ſe réduiſent à ∞. On peut donc regarder un infiniment petit du ſecond ordre, comme une quantité qui s'évanouit par rapport à un infiniment petit du premier.

Cela poſé, Leibnitz imagine qu'une variable x croiſſe ou décroiſſe d'une quantité infiniment petite, qu'il déſigne par dx, & il cherche quels doivent être les accroiſſements ou les décroiſſements reſpectifs des autres fonctions de x. Son quarré x^2, par exemple, devenant $(x \pm dx)^2 = x^2 \pm 2xdx + dxdx$, il eſt clair que $dxdx$ doit être rejeté comme un infiniment petit du ſecond ordre, & que par conſéquent la différence entre x^2 & $x^2 + 2xdx$ eſt $\pm 2xdx$. Ainſi l'accroiſſement correſpondant du quarré d'une variable quelconque eſt le produit du double de cette variable multipliée par ſon accroiſſement.

780. En général, la différence qui régne entre une quantité variable avant qu'elle ait reçu aucune altération infiniment petite, & cette même quantité après qu'elle a reçu quelque altération de ce genre, s'appelle *la différentielle* de cette quantité; ce qui a fait donner le nom de calcul différentiel, à la méthode qui détermine dans tous les cas ces différences.

Newton lui avoit donné auparavant le nom de *Calcul des Fluxions*, par une ſuite de l'idée qu'il s'étoit faite de la formation de toutes les quantités. Imaginant en effet que tout ce qui croît ou diminue dans la nature, reçoit ces accroiſſements ou ces diminutions par le mouvement d'un de ſes éléments, il appella calcul des fluxions, la méthode dont il ſe ſervoit pour déterminer les rapports de ces variations.

781. Il nomma *Fluentes* les quantités que Leibnitz appelle *variables*, & ce que nous déſignerons par dx, il le déſigna par un point mis ſur x; enſorte que dx & $\dot{x}$ ſignifient la même choſe, & que fluxion de x, ou différentielle de x ſont abſolument ſynonymes. Le ſeul avantage qu'il y ait à ſe ſervir de la lettre d, au lieu d'un point, pour marquer les différentielles ou les fluxions des variables, c'eſt qu'elle les fait mieux reconnoître parmi d'autres quantités. Il eût même été à propos d'introduire dès le commencement quelque caractere propre à marquer les différentielles, comme on en a introduit un pour marquer les radicaux. Mais à préſent que l'uſage a prévalu, toute innovation de ce genre ſeroit déplacée, outre qu'elle auroit bien peu d'utilité.

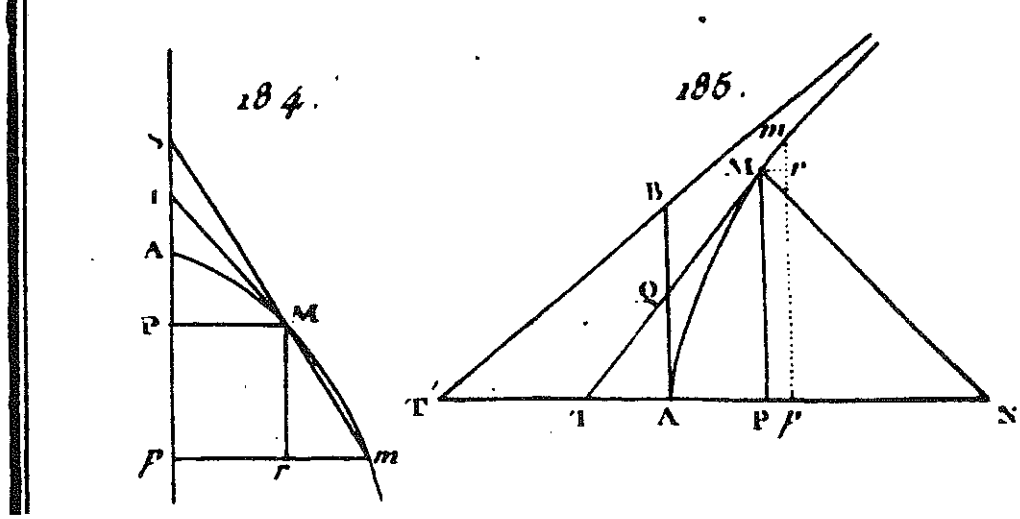
782. Ainſi que les quantités finies & variables x & y ont des différentielles dx & dy, ces différentielles à leur tour en ont auſſi. On les appelle *Différences ſecondes*, pour les diſtinguer des premieres, & on les déſigne indifféremment par ddx & ddy, ou par $\ddot{x}$ & $\ddot{y}$. Les différentielles troiſiemes ſont $dddx$ & $dddy$, ou $\dddot{x}$ & $\dddot{y}$, & ainſi de ſuite.

Pour abréger, on écrit d^2x, d^3x au lieu de ddx, $dddx$. En général, la lettre d miſe devant une quantité quelconque indique qu'il faut *différentier* cette quantité; & l'expoſant de la même lettre d annonce combien de fois de ſuite il faut procéder à la *différentiation*.

Lorſque la quantité propoſée eſt polynome, on la met entre deux parentheſes, que l'on fait précéder de la lettre d. Ainſi $d(x^2+y^2)$ indique qu'il faut différentier le binome x^2+y^2.

783. Quoique les différentielles de même degré ſoient toutes infiniment petites, il s'en faut bien qu'elles ſoient toujours égales. Et ſi on demande quel rapport peut ſe trouver entre dx & dy, dans la ſuppoſition que ces différentielles s'évanouiſſent, il eſt aiſé de faire voir qu'il y en a un. En attendant que nous enſeignions

FIG. la maniere d'en trouver l'expreſſion, ſoit $\frac{aa - xx}{a - x}$; il eſt certain que $a + x$ exprime la valeur de cette fraction, quelle que ſoit la valeur de x ; mais ſi $x = a$, la fraction ſe réduit à $\frac{0}{0}$, & le quotient devient $2a$. Voilà donc un exemple de ces ſortes de fractions dont le numérateur & le dénominateur s'évanouiſſent en même temps, & qui cependant ont des valeurs très-réelles.

784. Si on ſuppoſe infini le diviſeur d'une quantité finie quelconque a, il eſt clair que le quotient doit alors ſe réduire à zéro. On a donc $\frac{a}{\infty} = 0$; ce qui donne $a = 0 \times \infty$; d'où il ſuit que zéro multiplié par une quantité infinie peut repréſenter indifféremment toute ſorte de quantités finies ; & réciproquement, que *toute quantité finie diviſée par zéro a pour quotient l'infini*, c'eſt-à-dire, que ∞ & 0 ſervent dans le calcul différentiel, comme autant de quantités indéterminées. Ce ſont des expreſſions vagues, dont il ſemble que l'on ne s'eſt aviſé que pour éviter des circonlocutions.

Pl. 10.