INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

7
Mai 1992

L'ISOGONOLOGIE

UN EXEMPLE DE L'UTILISATION DE L'ALGEBRE LINEAIRE EN GEOMETRIE

PAR F. RIDEAU

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

UNIVERSITE PARIS 7

L'ISOGONOLOGIE

UN EXEMPLE DE L'UTILISATION DE L'ALGEBRE LINEAIRE EN GEOMETRIE

PAR F. RIDEAU

L'isogonologie .

Dans un plan affine, si deux triangles ABC, A'B'C' sont tels que les droites menées par les sommets A, B, C, respectivement parallèles aux côtés B'C', C'A', A'B' se coupent en un même point O, réciproquement les droites menées par A', B', C', parallèlement à BC, CA, AB , se coupent en un même point O'. Les triangles ABC et A'B'C' sont appelés parallélogiques. Ils ont été étudiés par M. J. NEUBERG (*Mathesis*, 1882, p. 144, questions 150 et 1883, p. 86); puis par M. RIPERT (A.F, 1901, Ajaccio, p. 91).

On a une situation analogue dans un plan affine euclidien: Si deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C respectivement sur les côtés B'C', C'A', A'B' se coupent en un même point O, réciproquement les perpendiculaires abaissées des sommets A', B', C' respectivement sur les côtés BC, CA, AB se coupent en un même point O'. Ces triangles ont été surtout étudiés par M. LEMOINE, principal instigateur des questions actuellement connues sous le nom de *Géométrie du triangle*. (A.F, 1890 pp. 111 à 146.)

Les triangles parallélogiques et orthologiques sont des cas particuliers des triangles isogonologiques de M. DURAN-LORIGA, (A.F. 1902, Montauban, pp. 157 à 165).

Je n'ai pu lire les articles de ces illustres géomètres, mais on peut trouver trace de ces triangles dans les Exercices de Géométrie Moderne de G. Papelier et dans l'excellent ouvrage de D. Pedoe: A Course of Geometry for Colleges & Universities. C'est surtout la lecture de ce dernier livre qui m'a convaincu de rédiger une présentation moderne de ces questions, d'une part pour préciser certains points importants peut-être inconnus ou négligés de nos prédécesseurs et d'autre part pour montrer la puissance des outils fournis par l'Algèbre Linéaire même dans des problèmes de Géométrie dite élémentaire.

Dans un premier temps, je vais reprendre les démonstrations du Papelier pour bien montrer que toutes ces questions peuvent être résolues élémentairement mais aussi pour mettre en évidence leurs limites.

Regardons d'abord la situation de la parallélogie dans un plan affine.

On note δ_A , δ_B , δ_C les parallèles issues respectivement de A à B'C', de B à C'A' et de C à A'B'. De même on note $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ les parallèles issues respectivement de A' à BC, de B' à CA et de C' à AB.

Par hypothèse δ_A , δ_B , δ_C concourent en O.

Soient $a = \delta_A \cap BC$ et $a' = \delta_{A'} \cap B'C'$. Les triangles a'A'B' ont leurs côtés parallèles, ils sont donc homothétiques et par suite :

$$(1) \qquad \frac{\overline{a'B'}}{\overline{aO}} = \frac{\overline{a'A'}}{\overline{aC}} \quad .$$

De même, les triangles a'A'C' et aBO sont homothétiques et on a:

(2) $\dfrac{\overline{a'C'}}{\overline{aO}} = \dfrac{\overline{a'A'}}{\overline{aB}}$ et donc on a en divisant (1) par (2) :

(3) $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$

De même en notant les intersections suivantes:

$b = \delta_B \cap CA$; $b' = \delta_{B'} \cap C'A'$; $c = \delta_C \cap AB$; $c' = \delta_{C'} \cap A'B'$, on a :

(4) $\dfrac{\overline{b'C'}}{\overline{b'A'}} = \dfrac{\overline{bC}}{\overline{bA}}$ et $\dfrac{\overline{c'A'}}{\overline{c'B'}} = \dfrac{\overline{cA}}{\overline{cB}}$. Donc on a :

(5) $\dfrac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} \cdot \dfrac{\overline{b'C'}}{\overline{b'A'}} \cdot \dfrac{\overline{c'A'}}{\overline{c'B'}} = \dfrac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \dfrac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \dfrac{\overline{cA}}{\overline{cB}}$.

Le second membre vaut -1 d'après le théorème de Céva, donc aussi le premier et les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ sont aussi concourantes en un point O' toujours d'après le même théorème de Céva.

Mis à part le petit détail technique concernant les intersections de droites utilisées, le point fondamental oublié dans le Papelier est la signification géométrique des égalités (3) et (4) qui entrainent que les coordonnées barycentriques de O' dans le triangle A'B'C' sont égales à celles de O dans le triangle ABC. Autrement dit si f est la bijection affine transformant A en A', B en B' et C en C', alors f transforme O en O'.

On peut alors transformer la démonstration du Papelier en la rendant rigoureuse et en la complétant de la façon suivante:

Supposons d'abord que BC et B'C' ne sont pas parallèles, alors les points a et a' existent et on a les égalités (1), (2) et (3). On a donc:

$f(A) = A'$ et $f(a) = a'$ et donc $f(\delta_A) = \delta_{A'}$.

Si BC et B'C' sont parallèles, la droite δ_A parallèle à BC est transformée en une droite passant par A' et parallèle à B'C' c'est à dire à BC et on a encore $\delta_{A'} = f(\delta_A)$. On a de même: $\delta_{B'} = f(\delta_B)$ et $\delta_{C'} = f(\delta_C)$. Par suite les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$, $\delta_{C'}$ concourent au point $O' = f(O)$.

Examinons maintenant dans un plan affine euclidien la situation de deux triangles orthologiques. Elle est basée sur le lemme suivant:

Soit ABC un triangle et soient $a \in BC$, $b \in CA$ et $c \in AB$.

Soient D_a , D_b et D_c les perpendiculaires respectives en a, b, c aux côtés BC, CA et AB. Alors les droites D_a , D_b , D_c sont concourantes si et seulement si on a la relation:

(6) $\overline{aB}^2 - \overline{aC}^2 + \overline{bC}^2 - \overline{bA}^2 + \overline{cA}^2 - \overline{cB}^2 = 0$.

1) *La condition est nécessaire:* Supposons que D_a , D_b et D_c concourent en un point O. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$OB^2 = Oa^2 + aB^2$ et $OC^2 = Oa^2 + aC^2$.

Par différence on obtient:

$$OB^2 - OC^2 = \overline{aB}^2 - \overline{aC}^2 .$$

On a de même les égalités analogues:

$$OC^2 - OA^2 = \overline{bC}^2 - \overline{bA}^2 \text{ et } OA^2 - OB^2 = \overline{cA}^2 - \overline{cB}^2 .$$

Par addition , on trouve l'égalité (6).

2) *La condition est suffisante:* Supposons que l'égalité (6) soit vérifiée et soit O l'intersection de D_b et D_c . Soit a' la projection orthogonale de O sur BC. Il suffit de montrer que a = a' .D'aprés la partie nécessaire déjà démontrée du lemme, on a :

$$\overline{a'B}^2 - \overline{a'C}^2 + bC^2 - bA^2 + cA^2 - cB^2 = 0 .$$

Donc : $\overline{a'B}^2 - \overline{a'C}^2 = \overline{aB}^2 - \overline{aC}^2$, c'est à dire :

$$(\overline{a'B} - \overline{a'C})(\overline{a'B} + \overline{a'C}) = (\overline{aB} - \overline{aC})(\overline{aB} + \overline{aC}) .$$

Introduisant le milieu α de BC, on obtient :

$$\overline{CB} \,.\, 2 \,.\, \overline{a'\alpha} = \overline{CB} \,.2\,.\, \overline{a\alpha} .$$

Donc $\overline{a'\alpha} = \overline{a\alpha}$ et a = a'. Le lemme est démontré.

Venons en maintenant à la démonstration du théorème principal.

On note δ_A ,δ_B , δ_C les perpendiculaires respectives issues de A sur B'C', de B sur C'A' et de C sur A'B'. De même , on note $\delta_{A'}$,$\delta_{B'}$,$\delta_{C'}$ les perpendiculaires respectives issues de A' sur BC, de B' sur CA et de C' sur AB. Les intersections de droites suivantes existent et sont notées :

$$a = \delta_{A'} \cap BC \ ; \ b = \delta_{B'} \cap CA \ ; \ c = \delta_{C'} \cap AB .$$

$$a' = \delta_A \cap B'C' ; b' = \delta_B \cap C'A' ; c' = \delta_C \cap A'B' .$$

Par hypothèse, les droites δ_A ,$\delta_B$et δ_C concourent en O. Donc d'après le lemme : $\overline{a'B'}^2 - \overline{a'C'}^2 + \overline{b'C'}^2 - \overline{b'A'}^2 + \overline{c'A'}^2 - \overline{c'B'}^2$.

Mais il est clair qu'on a les égalités suivantes:

$\overline{a'B'}^2 - \overline{a'C'}^2 = AB'^2 - AC'^2$ car Aa' est orthogonal à B'C'.

$\overline{b'C'}^2 - \overline{b'A'}^2 = BC'^2 - BA'^2$ car Bb' est orthogonal à C'A'.

$\overline{c'A'}^2 - \overline{c'B'}^2 = CA'^2 - CB'^2$ car Cc' est orthogonal à A'B'.

En additionnant, on obtient :

$$(AB'^2 - AC'^2) + (BC'^2 - BA'^2) + (CA'^2 - CB'^2) = 0 .$$

En regroupant les termes de façon différente et en changeant de signe, on a:

$$(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0 .$$

Mais on a les égalités suivantes :

$A'B^2 - A'C^2 = \overline{aB}^2 - \overline{aC}^2$ car A'a est orthogonal à BC .

$B'C^2 - B'A^2 = \overline{bC}^2 - \overline{bA}^2$ car B'b est orthogonal à CA .

$C'A^2 - C'B^2 = \overline{cA}^2 - \overline{cB}^2$ car C'c est orthogonal à AB .

Finalement, on a :

$$\overline{aB}^2 - \overline{aC}^2 + \overline{bC}^2 - \overline{bA}^2 + \overline{cA}^2 - \overline{cB}^2 = 0 \ .$$

et d'après le lemme les droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ sont concourantes en un point O'.

Par rapport au cas de la parallélogie, cette démonstration n'est pas entièrement satisfaisante dans la mesure où elle ne montre pas le lien entre les points O et O'. Or on a le résultat surprenant suivant:

O' = f(O) où f est l'application affine transformant le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Pour le voir, il suffit de faire tourner le triangle ABC par une rotation r de centre O et d'angle droit. En fait, on montre ainsi directement le théorème sur les triangles orthologiques sans utiliser la démonstration du Papelier. On obtient ainsi un triangle $A_1B_1C_1$ et il est clair que les triangles $A_1B_1C_1$ et A'B'C' sont parallélogiques, les droites A_1O, B_1O , C_1O étant parallèles respectivement aux droites B'C', C'A' , A'B'. Il existe alors un point O' tel que les droites A'O', B'O', C'O' soient respectivement parallèles aux côtés B_1C_1, C_1A_1 , A_1B_1. Il en résulte que si g est l'application affine envoyant $A_1B_1C_1$ sur A'B'C', on a :

$$g(O) = O' .$$

Mais $f = g \circ r$ est l'application affine envoyant ABC sur A'B'C' et on a bien:

$$f(O) = (g \circ r)(O) = g(O) = O' \text{ car } r(O) = O \ .$$

On voit apparaitre ainsi le rôle de ces applications affines qui sont au coeur de cette théorie. Plus précisément , on va montrer que si f est une application affine transformant le triangle ABC en un triangle A'B'C' qui lui est parallélogique (resp. orthologique), alors f transforme tout triangle en un triangle qui lui est parallélogique (resp. orthologique). On peut parler alors d'application parallélogique ou orthologique et notre principal but sera de caractériser simplement ces applications.

Pour cela nous allons pleinement utiliser les ressources de l'algèbre linéaire et montrer ainsi leur puissance.

La parallélogie .

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel et E l'espace de ses vecteurs. Soit ϕ une forme bilinéaire non nulle sur ExE à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\phi \in \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R}).$$

Alors la fonction ρ qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le scalaire :

$$\rho(M) = \phi(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) + \phi(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A'B'})$$

est une constante $\theta(A,B,C;A',B',C')$. Autrement dit pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a :

(7) $\theta(A,B,C;A',B',C') = \phi(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) + \phi(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A'B'})$.

En effet , on a :

$\rho(M) - \rho(N) = \phi(\overrightarrow{NM} , \overrightarrow{B'C'}) + \phi(\overrightarrow{NM} , \overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{NM} , \overrightarrow{A'B'})$.

$\rho(M) - \rho(N) = \phi(\overrightarrow{NM} , \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}) = 0$.

On suppose maintenant que ϕ est antisymétrique. Alors on a:

(8) $\theta(A,B,C;A',B',C') = \theta(A',B',C';A,B,C)$.

En effet, on a :

$\theta(A,B,C;A',B',C') = \phi(\overrightarrow{AM} ,\overrightarrow{B'M} - \overrightarrow{C'M}) + \phi(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{C'M} - \overrightarrow{A'M}) + \phi(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{A'M} - \overrightarrow{B'M})$

$= \phi(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{BM} , \overrightarrow{A'M}) + \phi(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} , \overrightarrow{B'M}) + \phi(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{C'M})$

$= \phi(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{A'M}) + \phi(\overrightarrow{AC} , \overrightarrow{B'M}) + \phi(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{C'M})$

$= \phi(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{BC}) + \phi(\overrightarrow{B'M} , \overrightarrow{CA}) + \phi(\overrightarrow{C'M}, \overrightarrow{AB}) = \theta(A',B',C';A,B,C)$

compte tenu du caractère antisymétrique de ϕ.

On suppose maintenant A ,B ,C non alignés . Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et soit $\vec{f}$ sa partie linéaire. Alors on a :

(9) $\theta(A,B,C;A',B',C') = \mathrm{Trace}(\vec{f}).\phi(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$.

En effet, en prenant M = A par exemple , on a :

$\theta(A,B,C;A',B',C') = \phi(\overrightarrow{BA} , \overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{CA} , \overrightarrow{A'B'})$

$= \phi(\overrightarrow{AB} ,f(\overrightarrow{AC})) + \phi(f(\overrightarrow{AB}) , \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Trace}(\vec{f}).\phi(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$, compte tenu d'une formule de trace bien connue.

On suppose maintenant l'existence d'un point M tel que les droites AM, BM , CM soient respectivement parallèles à B'C', C'A', A'B'.

On a donc : $\phi(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \phi(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{C'A'}) = \phi(\overrightarrow{CM} , \overrightarrow{A'B'}) = 0$.

D'après (9) on a donc :

(10) $\mathrm{Trace}(\vec{f}) = 0$.

Soit $M' = f(M)$, alors on a :

$\phi(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{BC}) + \phi(\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{B'C'}) = \phi(\vec{f}(\overrightarrow{AM}) , \overrightarrow{BC}) + \phi(\overrightarrow{AM} , \vec{f}(\overrightarrow{BC}))$

$= \mathrm{Trace}(\vec{f}).\phi(\overrightarrow{AM} , \overrightarrow{BC}) = 0$ d'après (10). Il en résulte que :

$\phi(\overrightarrow{A'M'} , \overrightarrow{BC}) = 0$ et de même : $\phi(\overrightarrow{B'M'} , \overrightarrow{CA}) = \phi(\overrightarrow{C'M'} , \overrightarrow{AB}) = 0$.

Les droites A'M', B'M', C'M' sont respectivement parallèles aux droites BC, CA, AB .

En résumé, soient deux triplets (A, B, C) et (A', B', C') de points de $\mathcal{E}$ tels que A ,B ,C soient non alignés et soit f l'application affine telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Si les parallèles issues de A à B'C', de B à C'A', de C à A'B' ont un point commun M ,alors les parallèles issues de A' à BC, de B' à CA, de C' à AB concourent au point $M' = f(M)$ et on a : $\mathrm{Trace}(\vec{f}) = 0$.

Réciproquement soit f une application affine de $\mathcal{E}$ telle que (10) soit vérifiée : $\mathrm{Trace}(\vec{f}) = 0$.

Soient A,B,C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et A', B', C' leurs images respectives par f . Soit O' l'intersection des parallèles issues de A' à BC

et de B' à CA; ce point O' existe car les droites BC et CA ne sont pas parallèles. Alors $\phi(\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{BC}) = \phi(\overrightarrow{B'O'}, \overrightarrow{CA}) = 0$.
Mais compte tenu de (8), (9) et (10), on a: $\phi(\overrightarrow{C'O'}, \overrightarrow{AB}) = 0$ et la droite O'C' est parallèle à AB.
Donc si f est bijective, A', B' ,C' sont non alignés et les triangles ABC et A'B'C' sont parallélogiques. On voit donc que f transforme tout triangle en un triangle parallélogique. On dira que f est une transformation parallélogique du plan $\mathcal{E}$.
Si f n'est pas bijective et de rang 1, les points A', B', C' sont alignés et les parallèles issues de A' à BC, de B' à CA, de C' à AB concourent en O'. Quant aux parallèles issues de A à B'C', de B à C'A', de C à A'B', elles forment un faisceau de droites parallèles. Dans ce cas, on a:
$\mathrm{Trace}(\vec{f}) = \mathrm{Dét}(\vec{f}) = 0$ et par suite $\vec{f}^2 = 0$ d'après le théorème d'Hamilton-Cayley et f^2 est une application constante.
Il reste le cas où f est une application constante. Les points A',B',C' sont confondus et on peut prendre pour point O un point quelconque du plan.
<u>Exemples</u> :
1) Toute symétrie affine est parallélogique.
2)Si $\mathcal{E}$ est euclidien, toute similitude indirecte est parallélogique.
3)Si $\mathcal{E}$ est euclidien, toute similitude directe est parallélogique.

<u>L'orthologie</u> .

On suppose maintenant $\mathcal{E}$ euclidien. On remarque déjà que dans ce cas , on aurait pu traiter la parallélogie en prenant pour ϕ le produit mixte (associéà une orientation de $\mathcal{E}$). Mais regardons plutôt ce qui se passe si on choisit pour ϕ le produit scalaire définissant la structure euclidienne de $\mathcal{E}$.

(11) $$\phi(u,v) = \phi(v,u) = \langle u \mid v \rangle$$
Alors on a :
(12) $$\theta(A,B,C;A',B',C') = -\theta(A',B',C';A,B,C)$$
En effet, comme dans la démonstration de (8) on a :
$\phi(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) + \phi(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A'B'}) = \phi(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{A'M}) + \phi(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'M}) + \phi(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{C'M})$
$= -\phi(\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{BC}) - \phi(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{CA}) - \phi(\overrightarrow{C'M}, \overrightarrow{AB})$ compte tenu du caractère symétrique de ϕ . Comme précédemment, on suppose A,B,C non alignés et on note f l'application affine de $\mathcal{E}$ telle que : f(A) = A' ,f(B) = B',f(C) = C'.
Alors on a :
(13) $$\theta(A,B,C;A',B',C') = \langle (\vec{f}^* - \vec{f})(\overrightarrow{AB}) \mid \overrightarrow{AC} \rangle$$
où $\vec{f}^*$ désigne l'adjoint de $\vec{f}$ pour la structure euclidienne de $\mathcal{E}$.
En effet, en prenant M=A par exemple, on a:
$\theta(A,B,C;A',B',C') = \langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{C'A'} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{A'B'} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \mid f(\overrightarrow{AC}) \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \mid f(\overrightarrow{AB}) \rangle$

Mais par définition de l'adjoint, on a :

$$<\vec{AB}|f(\vec{AC})> = <\vec{f}^*(\vec{AB})|\vec{AC}> \text{ et (13) est vérifiée.}$$

Par suite, s'il existe un point O tel que les droites AO, BO, CO soient respectivement perpendiculaires à B'C', C'A', A'B', alors on a :

$$\theta(A,B,C;A',B',C') = 0 \text{ et d'aprés (13) } \vec{f} = \vec{f}^*$$

car $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ forment une base de **E** . Autrement dit, $\vec{f}$ est un opérateur symétrique de **E**. De plus, si O' = f(O), on a comme $\vec{f}$ est symétrique :

$<\vec{A'O'}|\vec{BC}> = <f(\vec{AO})|\vec{BC}> = <\vec{AO}|f(\vec{BC})> = <\vec{AO}|\vec{B'C'}> = 0$ et de même on a :

$$<\vec{B'O'}|\vec{CA}> = <\vec{C'O'}|\vec{AB}> = 0 .$$

Les droites A'O', B'O', C'O' sont donc respectivement perpendiculaires aux côtés BC, CA, AB .

Réciproquement, soit f une application affine de $\mathcal{E}$ telle que $\vec{f}$ soit symétrique. Soient A,B,C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et A',B',C' leurs images respectives par f. Soit O' l'intersection des perpendiculaires issues de A' à BC et de B' à CA . O' existe car BC et CA ne sont pas parallèles.On a donc : $<\vec{A'O'}|\vec{BC}> = <\vec{B'O'}|\vec{CA}> = 0$.

Mais compte tenu de (12) et (13), on a :

$$-\theta(A,B,C;A',B',C') = \theta(A',B',C';A,B,C)= <\vec{A'O'}|\vec{BC}> + <\vec{B'O'}|\vec{CA}> + <\vec{C'O'}|\vec{AB}> = 0$$

Donc $<\vec{C'O'}|\vec{AB}> = 0$ et O'C' est perpendiculaire à AB .

Par suite si f est bijective, les points A',B',C'ne sont pas alignés et les triangles ABC et A',B',C' sont orthologiques. On voit que f transforme tout triangle en un triangle orthologique . On dit alors que f est une transformation orthologique.

Si f n'est pas bijective de rang 1 par exemple,les points A',B',C' sont alignés. Les perpendiculaires issues de A' à BC, de B' à Ca, de C' à AB sont concourantes en O'. Quant aux perpendiculaires issues de A à B'C', de B à C'A', de C à A'B', elles forment un faisceau de droites parallèles.

<u>Exemples</u> :

1) les homothéties, ce qui équivaut à l'existence de l'orthocentre.

2) les affinités orthogonales .

3) les similitudes indirectes.

4) la projection orthogonale sur une droite Δ comme exemple d'application de rang 1. Dans ce cas, le point O' est appelé orthopôle de Δ par rapport au triangle ABC .

Voici une autre application de l'orthologie. Soit M un point non situé sur le cercle ABC . Les symétriques respectifs de M par rapport aux côtés BC, CA, AB forment un triangle A'B'C' orthologique au triangle ABC . Rappelons que si M est sur le cercle ABC, les points A',B',C' sont alignés sur une droite dite de Steiner et passant par l'orthocentre du triangle ABC .

Les perpendiculaires issues de A à B'C', de B à C'A', de C à A'B' concourent alors en un point M', isogonal de M par rapport au triangle ABC .
En effet, on passe du point C' au point B' par le produit $\sigma_{AC} \circ \sigma_{AB}$ des symétries orthogonales par rapport aux droites AB et AC c'est àdire par une rotation de centre A . Donc AM' est la médiatrice de B'C' et M' est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' . La droite AM est invariante par le produit des symétries orthogonales $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AM'} \circ \sigma_{AC}$.
Donc $\sigma_{AM} = \sigma_{AB} \circ \sigma_{AM'} \circ \sigma_{AC}$ et $\sigma_{AM} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AB} \circ \sigma_{AM'}$, ce qui équivaut à l'égalité entre angles orientés de droites: (AB , AM') = (AM ,AC) .
Autrement dit, les couples { AB ,AC } et { AM , AM' } ont les mêmes bissectrices. On a évidemment la même situation aux sommets B et C . Les couples { BC ,BA } et { BM , BM' } ont les mêmes bissectrices ainsi que les couples { CA , CB } et { CM , CM' } . Ceci montre le caractère symétrique de la correspondance entre M et M': M est aussi l'isogonal de M' par rapport au triangle ABC . On peut donc préciser le théorème des points isogonaux de la façon suivante :
Si M et M' sont deux points isogonaux par rapport au triangle ABC et si A', B', C' sont les symétriques respectifs de M par rapport aux côtés BC , CA , AB ,alors f(M') = M où f est l'application affine envoyant A sur A' , B sur B' et C sur C'.
En particulier, si M est le centre d'un cercle tangent aux côtés du triangle ABC, alors M = M' et M est point fixe (et on peut montrer que c'est le seul) de l'application affine .

L'isogonologie .

On suppose maintenant $\mathcal{E}$ euclidien orienté et on note [u,v] le produit mixte de deux vecteurs de E . La structure euclidienne de E induit un isomorphisme:

(14) $$\begin{cases} \mathcal{L}_2(\mathbf{E},\mathbb{R}) \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{L}(\mathbf{E}) \\ \quad \phi \longmapsto \psi \end{cases}$$

donné par :

(15) $$\phi(u,v) = \langle \psi(u) \mid v \rangle$$

Exemples :

1) Si ϕ est le produit scalaire , $\psi = \mathrm{Id}_E$.
2) Si ϕ est le produit mixte , $\psi = R$: rotation vectorielle d'angle $+ \pi/2$.

Autrement dit on a :

(16) $$[u\ ,v\ ] = \langle R(u) \mid v \rangle .$$

Notons aussi la formule simple:

(17) $$\vec{f}^{*} - \vec{f} = \mathrm{Trace}(\ \vec{f} \circ R\ ).R$$

qui se démontre en utilisant une matrice de $\vec{f}$ dans une base orthonormée de

$\mathbf{E}$.

Soit $\phi \in \mathcal{L}_2(\mathbf{E},\mathbb{R})$ et $\psi = i(\phi) \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$. Soit $\theta(A,B,C;A',B',C')$ la constante définie par (7) . On suppose A,B,C non alignés et on note f l'application affine envoyant A,B,C sur A',B',C' .On a alors :

(18) $$\theta(A,B,C;A',B',C') = \mathrm{Trace}(\psi^* \circ \vec{f} \circ R).[\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ]\ .$$

En effet, on a (en prenant M = A) :

$\theta(A,B,C;A',B',C') = \phi(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{C'A'}) + \phi(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{A'B'}) = \phi(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}) - \phi(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'B'})$

$= \langle\psi(\overrightarrow{AB})|\vec{f}(\overrightarrow{AC})\rangle - \langle\psi(\overrightarrow{AC})|\vec{f}(\overrightarrow{AB})\rangle = \langle(\vec{f}^* \circ \psi - \psi^* \circ \vec{f})(\overrightarrow{AB})|\overrightarrow{AC}\rangle$

$= \mathrm{Trace}(\psi^* \circ \vec{f} \circ R).\langle R(\overrightarrow{AB})|\overrightarrow{AC}\rangle = \mathrm{Trace}(\psi^* \circ \vec{f} \circ R).[\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ]$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbf{E}$. Les droites vectorielles $\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathbb{R}\vec{v}$ font un angle orienté de droites égal à α modulo π si et seulement si:

(19) $$\frac{[\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ]}{\langle\ \vec{u}\ |\ \vec{v}\ \rangle} = \tan(\alpha)\ .$$

On est donc amené à introduire la forme bilinéaire $\phi_\alpha \in \mathcal{L}_2(\mathbf{E},\mathbb{R})$:

(20) $$\phi_\alpha(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ) = \langle\ \vec{u}\ |\ \vec{v}\ \rangle.\sin(\alpha) - [\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ ].\cos(\alpha)\ .$$

La nullité de $\phi_\alpha(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$ équivaut donc à :

(21) $$(\mathbb{R}\vec{u}\ ,\ \mathbb{R}\vec{v}\ ) = \alpha\ (\text{modulo } \pi)\ .$$

L'endomorphisme $\psi_\alpha = i(\phi_\alpha)$ vaut donc :

(22) $$\psi_\alpha = \sin(\alpha).\mathrm{Id} - \cos(\alpha).R\ .$$

On remarque que :

$\phi_\alpha(\vec{v}\ ,\vec{u}\ ) = \langle\ \vec{v}\ |\ \vec{u}\ \rangle.\sin(\alpha) - [\ \vec{v}\ ,\ \vec{u}\ ] = \langle\ \vec{u}\ |\ \vec{v}\ \rangle.\sin(\alpha) + \cos(\alpha).[\ \vec{u}\ ,\vec{v}\ ]$

Par suite on a :

(23) $$\phi_\alpha(\vec{u}\ ,\vec{v}\ ) = -\ \phi_{-\alpha}(\vec{v}\ ,\vec{u}\ )\ .$$

De même, puisque Id est symétrique et R antisymétrique, on a :

$$\psi^*_\alpha = \sin(\alpha).\mathrm{Id} + \cos(\alpha).R \text{ et par suite :}$$

(24) $$\psi^*_\alpha = -\psi_{-\alpha}\ .$$

En notant $\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C')$ la constante associée à ϕ_α, on a d'après un calcul fait en (8):

$\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C') \quad = \phi_\alpha(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}) + \phi_\alpha(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{C'A'}) + \phi_\alpha(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{A'B'})$

$= \phi_\alpha(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{A'M}) + \phi_\alpha(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'M}) + \phi_\alpha(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{C'M})$

$= \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{BC}) + \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{CA}) + \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{C'M},\overrightarrow{AB})$ d'après (23) . Donc on a :

(25) $$\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C') = \theta_{-\alpha}(A,B,C;A',B',C')\ .$$

En supposant maintenant A,B,C non alignés, on a d'après (18) :

$$\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C') = \mathrm{Trace}(\psi^*_\alpha \circ \vec{f} \circ R).[\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ]\ .$$

Mais $\mathrm{Trace}(\psi^*_\alpha \circ \vec{f} \circ R) = \mathrm{Trace}(\vec{f} \circ R \circ \psi^*_\alpha)$

et $R \circ \psi^*_\alpha = R \circ (\sin(\alpha).\mathrm{Id} + \cos(\alpha).R) = \sin(\alpha).R - \cos(\alpha).\mathrm{Id}$.

On note $R(\alpha) = \cos(\alpha).\mathrm{Id} + \sin(\alpha).R$ la rotation vectorielle d'angle α .

On a donc : $R \circ \psi^*_\alpha = -\ R(-\alpha)$ et finalement

(26) $$\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C') = -\ \mathrm{Trace}(\vec{f} \circ R(-\alpha)\ ).[\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ]\ .$$

Donc si on a modulo π l'égalité d'angles orientés de droites :

$\alpha = (AM, B'C') = (BM,\ C'A') = (CM, A'B')$, alors on a :

$\phi_\alpha(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \phi_\alpha(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{C'A'}) = \phi_\alpha(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{A'B'})$ et d'après (26), on a :

(27) $$\mathrm{Trace}(\vec{f} \circ R(-\alpha)) = 0 .$$

De plus si $M' = f(M)$, on a :

$\phi_\alpha(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \langle\psi_\alpha(\overrightarrow{AM}) | \vec{f}(\overrightarrow{BC})\rangle = \langle(\vec{f}^* \circ \psi_\alpha)(\overrightarrow{AM}) | \overrightarrow{BC}\rangle$

Compte tenu de (17) et de (27), l'opérateur $\vec{f}^* \circ \psi_\alpha$ est symétrique .

Donc on a d'après (24) :

$\phi_\alpha(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \langle(\vec{f}^* \circ \psi_\alpha)(\overrightarrow{AM}) | \overrightarrow{BC}\rangle = \langle(\psi_\alpha^* \circ \vec{f})(\overrightarrow{AM}) | \overrightarrow{BC}\rangle = - \langle(\psi_{-\alpha} \circ \vec{f})(\overrightarrow{AM}) | \overrightarrow{BC}\rangle$

et $\phi_\alpha(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = - \phi_{-\alpha}(\vec{f}(\overrightarrow{AM}), \overrightarrow{BC}) = - \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

On a donc modulo π l'égalité d'angles de droites:

$$-\alpha = (A'M', BC) = (B'M', CA) = (C'M', AB) .$$

En résumé, soient ABC, $A'B'C'$ deux triangles de $\mathcal{E}$. Si les droites issues de A,B,C faisant respectivement le même angle α orienté de droites avec $B'C', C'A', A'B'$ concourent en M, alors les droites issues de A',B',C' faisant l'angle $-\alpha$ avec BC, CA, AB concourent en $M' = f(M)$ où f est l'application affine envoyant A,B,C sur A',B',C'.

On dit alors que $A'B'C'$ est en position α-isogonologique avec ABC. Il est clair alors que ABC est en position $-\alpha$-isogonologique avec $A'B'C'$.

Réciproquement, soit f une application affine telle que :

$$\mathrm{Trace}(\vec{f} \circ R(-\alpha)) = 0 .$$

Soient A,B,C trois points non alignés de $\mathcal{E}$ et A',B',C' leurs images respectives par f. Soit O' l'intersection des droites issues de A' et B' et faisant l'angle $-\alpha$ avec BC et CA. On a donc :

$$\phi_{-\alpha}(\overrightarrow{A'O'}, \overrightarrow{BC}) = \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{B'O'}, \overrightarrow{CA}) = 0 .$$

Donc $\theta_{-\alpha}(A',B',C';A,B,C) = \phi_{-\alpha}(\overrightarrow{C'O'}, \overrightarrow{AB}) = \theta_\alpha(A,B,C;A',B',C') = 0$ d'après (26)

Donc $(O'C', AB) = -\alpha$.

Par suite si f est bijective, f transforme tout triangle en un triangle α-isogonologique. On dit que f est α-isogonologique.

Si f est de rang 1, alors A',B',C' sont alignés et les droites issues de A',B',C' faisant l'angle $-\alpha$ avec BC, CA, AB sont concourantes. Quant aux droites issues de A,B,C et faisant l'angle α avec BC, CA, AB, elles forment un faisceu de droites parallèles .

Soit $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ la matrice de $\vec{f}$ dans une base orthonormée directe .

Alors $\mathrm{Trace}(\vec{f} \circ R(-\alpha)) = (a + d)\cos(\alpha) - (b - c)\sin(\alpha)$.

Il en résulte que si f n'est pas une similitude indirecte, ($a+d$ et $b-c$ ne sont pas simultanément nuls), alors f est α-isogonologique pour l'unique angle de droites α tel que :

(28) $$\tan(\alpha) = \frac{a + d}{b - c} .$$

Par exemple une rotation d'angle α est ($\frac{\pi}{2} + \alpha$) -isogonologique .

Si f est une similitude indirecte , f est α-isogonologique pour tout angle α Autrement dit pour tout angle α, les droites issues de A,B,C et faisant l'angle orienté α avec B'C',C'A',A'B' sont concourantes en O. Il est clair que le lieu de O quand α varie est le cercle circonscrit au triangle ABC .

En effet : α = (OA,B'C') = (OB,C'A') . Donc (OA,OB) = (B'C',C'A').

Mais (B'C',C'A') = -(BC,CA) car ABC et A'B'C' sont indirectement semblables et par suite (OA,OB) = (CA,CB) . Donc les points O,A,B,C sont cocycliques .

Il est clair par exemple que les points O correspondant aux cas parallélogiques et orthologiques sont diamétralement opposés sur le cercle ABC . Il résulte enfin de (27) que tout f α-isogonologique est de la forme $\rho_\alpha \circ g$ où ρ est une rotation d'angle α et g parallélogique .

Cette remarque permet de retrouver élémentairement les propriétés des triangles isogonologiques à partir de la parallélogie comme cela a déjà été fait pour l'orthologie.

Les Métapôles .

Soient ABC et A'B'C' deux triangles de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas indirectement semblables. Soit f l'application affine envoyant A,B,C sur A',B',C' et α son angle d'isogonologie.

On note O le point d'intersection des droites issues de A,B,C faisant l'angle orienté α ave B'C',C'A',A'B' et O' le point d'intersection des droites issues de A',B',C' et faisant l'angle $-\alpha$ avec BC,CA,AB . On sait que O' = f(O) .

O est appelé métapôle du triangle A'B'C' par rapport au triangle ABC .

O' est appelé métapôle du triangle ABC par rapport au triangle A'B'C' .

Les coordonnées angulaires respectives de O et O' dans les triangles ABC et A'B'C' sont particulièrement simples. Comme α = (AO,B'C') = (BO,C'A'), on a donc : (OA,OB) = (B'C',C'A') = -(C'A',C'B').

Les coordonnées angulaires de O dans le triangle ABC sont donc :

(OB,OC) = - (A'B',A'C'); (OC,OA) = - (B'C',B'A'); (OA,OB) = - (C'A',C'B') .

De même, les coordonnées angulaires de O' dans le triangle A'B'C' sont :

(O'B',O'C') = - (AB,AC); (O'C',OA) = - (BC,BA); (O'A',O'B') = - (CA,CB) .

Pour un angle ω quelconque, les droites issues de A,B,C et faisant l'angle ω avec B'C',C'A',A'B' ne sont pas concourantes et forment un triangle lmn avec A $\in$ mn, B $\in$ nl et C $\in$ lm . Il est clair que le triangle lmn est directement semblable au triangle A'B'C', car on a :

ω = (Bl,C'A') = (Cl,A'B'); donc : (Bl,Cl) = (A'C',A'B') et par suite :

(lm,ln) = (A'B',A'C') et de même on a :

(mn,ml) = (B'C',B'A') et (nl,nm) = (C'A',C'B') .

Quand ω varie, on obtient ainsi toute la famille des triangles circonscrits au triangle ABC et directement semblables au triangle A'B'C'. Le lieu des sommets l,m,n est particulièrement simple: En effet ,on a :
$(lm,ln) = (lC,lB) = (A'B',A'C') = (OC,OB)$ et l, O, B, C sont cocycliques. Le lieu de l est donc le cercle OBC; de même les lieux de m et n sont les cercles OCA et OAB .
Si on prend maintenant deux triangles $l_1m_1n_1$ et $l_2m_2n_2$ de la famille, ils sont directement semblables puisque chacun d'eux est directement semblable au triangle A'B'C'. En appliquant la construction classique du centre de similitude, on voit aisément que celui-ci est le point O, qui est donc un centre permanent de similitude pour les triangles lmn circonscrits au triangle ABC et directement semblables au triangle A'B'C'.
De même le métapôle O' est centre permanent de similitude des triangles circonscrits au triangle A'B'C' et directement semblables au triangle ABC.

Quelques calculs d'aire .

On remarque que si $\omega = \alpha$ angle d'isogonologie, le triangle lmn se réduit au métapôle O et son aire est nulle comme le scalaire $\theta_\alpha(A,B,C;A',B',C')$. On peut donc espérer une relation simple entre ces deux quantités.
En fait, on a:

(29) $$4.(l,m,n).(A',B',C') = \theta_\omega^2(A,B,C;A',B',C')$$

où (l,m,n) et (A',B',C') désignent les aires algébriques des triplets $\{l,m,n\}$ et $\{A',B',C'\}$. Que le second membre soit positif s'explique par le fait que les aires (l,m,n) et (A',B',C') ont le même signe puisque les triplets $\{l,m,n\}$ et $\{A',B',C'\}$ sont directement semblables.
Si on note de même l'm'n' le triangle circonscrit au triangle A'B'C' dont les côtés m'n',n'l',l'm' font l'angle $-\omega$ avec BC,CA,AB, on a aussi :

(30) $$4.(l',m',n').(A,B,C) = \theta_{-\omega}(A',B',C';A,B,C)$$

Par suite d'après (25), on a :

(31) $$(l,m,n).(A',B',C') = (l',m',n').(A,B,C)$$

On voit donc que si l,m,n sont confondus au métapôle O, les points l',m',n' sont confondus au métapôle O'. On retrouve ainsi les résultats précédents.
Il reste à démontrer la formule (29). Elle résulte du lemme suivant :
Soit ABC un triangle et soient trois droites issues respectivement de A,B,C et de vecteurs directeurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, formant un triangle lmn tel que :
$A \in mn$, $B \in nl$, $C \in lm$. Alors on a :

(32) $$2(l,m,n)[\vec{u},\vec{v}][\vec{v},\vec{w}][\vec{w},\vec{u}] = \{[\overrightarrow{AM},\vec{u}][\vec{v},\vec{w}] + [\overrightarrow{BM},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}] + [\overrightarrow{CM},w][u,v]\}^2$$

où M est un point quelconque de $\mathcal{E}$.
En effet, on a nécessairement :
$l = B + \lambda.\vec{v} = C + \mu.\vec{w}$, c'est à dire : $\overrightarrow{BC} = \lambda.\vec{v} - \mu.\vec{w}$.

Donc $[\overrightarrow{BC},\vec{w}] = \lambda[\vec{v},\vec{w}]$ et $[\overrightarrow{BC},\vec{v}] = \mu[\vec{v},\vec{w}]$ (formules de Cramer).

Finalement, on a après permutation circulaire :

$$\begin{cases} l = B + \dfrac{[\overrightarrow{BC},\vec{w}]}{[\vec{v},\vec{w}]}\vec{v} = C + \dfrac{[\overrightarrow{BC},\vec{v}]}{[\vec{v},\vec{w}]}\vec{w} \\[2ex] m = C + \dfrac{[\overrightarrow{CA},\vec{u}]}{[\vec{w},\vec{u}]}\vec{w} = A + \dfrac{[\overrightarrow{CA},\vec{w}]}{[\vec{w},\vec{u}]}\vec{u} \\[2ex] n = A + \dfrac{[\overrightarrow{AB},\vec{v}]}{[\vec{u},\vec{v}]}\vec{u} = B + \dfrac{[\overrightarrow{AB},\vec{u}]}{[\vec{u},\vec{v}]}\vec{v} \end{cases}$$

Par suite, on a:

$$\overrightarrow{lm} = \left(\frac{[\overrightarrow{CA},\vec{u}]}{[\vec{w},\vec{u}]} - \frac{[\overrightarrow{BC},\vec{v}]}{[\vec{v},\vec{w}]} \right)\vec{w} = \frac{[\overrightarrow{CA},\vec{u}][\vec{v},\vec{w}] + [\overrightarrow{CB},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{w},\vec{u}][\vec{v},\vec{w}]}\vec{w}$$

$$\overrightarrow{mn} = \left(\frac{[\overrightarrow{AB},\vec{v}]}{[\vec{u},\vec{v}]} - \frac{[\overrightarrow{CA},\vec{w}]}{[\vec{w},\vec{u}]} \right)\vec{u} = \frac{[\overrightarrow{AB},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}] + [\overrightarrow{AC},\vec{w}][\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{u},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}]}\vec{u}$$

Compte tenu de l'identité de Cramer, on a :

(33) $$[\vec{v},\vec{w}]\vec{u} + [\vec{w},\vec{u}]\vec{v} + [\vec{u},\vec{v}]\vec{w} = 0 .$$

On voit comme précédemment que la fonction ρ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

(34) $$\rho(M) = [\overrightarrow{AM},\vec{u}][\vec{v},\vec{w}] + [\overrightarrow{BM},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}] + [\overrightarrow{CM},\vec{w}][\vec{u},\vec{v}]$$

est une fonction constante et on a :

$$\overrightarrow{lm} = \frac{f(M)}{[\vec{w},\vec{u}][\vec{v},\vec{w}]}\vec{w} \qquad \text{et } \overrightarrow{mn} = \frac{f(M)}{[\vec{u},\vec{v}][\vec{w},\vec{u}]}\vec{u}$$

Par suite, comme $2.(l,m,n) = [\overrightarrow{lm},\overrightarrow{mn}]$, on a :

(35) $2.(l,m,n) = \dfrac{f(M)^2}{[\vec{v},\vec{w}][\vec{w},\vec{u}][\vec{u},\vec{v}]}$,qui n'est pas autre chose que (32) .

La formule (35) se simplifie si on suppose que : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$.

Dans ce cas, on a : $[\vec{v},\vec{w}] = [\vec{w},\vec{u}] = [\vec{u},\vec{v}]$ et on obtient :

$2.(l,m,n).[\vec{u},\vec{v}] = ([\overrightarrow{AM},\vec{u}] + [\overrightarrow{BM},\vec{v}] + [\overrightarrow{CM},\vec{w}])^2$.

Par exemple , on peut choisir : $\vec{u} = \overrightarrow{B'C'}$; $\vec{v} = \overrightarrow{C'A'}$; $\vec{w} = \overrightarrow{A'B'}$.

On a alors : $[\vec{u},\vec{v}] = [\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{C'A'}] = 2.(A',B',C')$.

Donc $4.(l,m,n)(A',B',C') = \theta_0(A,B,C;A',B',C')^2$, ce qui n'est pas autre chose que (29) pour $\omega = 0$.

Dans le cas général, on veut que les angles de droites $(\mathbb{R}u,B'C')$, $(\mathbb{R}v,C'A')$ et $(\mathbb{R}w,A'B')$ soient égaux à ω .

On peut donc choisir :

$$\begin{cases} \vec{u} = R(-\omega)(\overrightarrow{B'C'}) = \cos(\omega).\overrightarrow{B'C'} - \sin(\omega).R(\overrightarrow{B'C'}) \\ \vec{v} = R(-\omega)(\overrightarrow{C'A'}) = \cos(\omega).\overrightarrow{C'A'} - \sin(\omega).R(\overrightarrow{C'A'}) \\ \vec{w} = R(-\omega)(\overrightarrow{A'B'}) = \cos(\omega).\overrightarrow{A'B'} - \sin(\omega).R(\overrightarrow{A'B'}) \end{cases}$$

Ainsi, on a :

$[\overrightarrow{AM},\vec{u}] = \cos(\omega).[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}] - \sin(\omega).[\overrightarrow{AM},R(\overrightarrow{B'C'})]$.

Mais $[\overrightarrow{AM},R(\overrightarrow{B'C'})] = \langle R(\overrightarrow{AM})|R(\overrightarrow{B'C'})\rangle = \langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{B'C'}\rangle$.

Donc $[\overrightarrow{AM},\vec{u}] = \cos(\omega).[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'}] - \sin(\omega).\langle\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{B'C'}\rangle = -\phi_\omega(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C'})$.

De même, on a : $[\overrightarrow{BM},\vec{v}] = -\phi_\omega(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{C'A'})$ et $[\overrightarrow{CM},\vec{w}] = -\phi_\omega(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{A'B'})$.

Par suite, on a bien :

$$4.(l,m,n)(A',B',C') = \theta_\omega^2(A,B,C;A',B',C') .$$

Métapôles et Structure conforme .

En adjoignant à $\mathcal{E}$ un point à l'infini $\{\infty\}$, on obtient le plan conforme $\mathcal{E}_c$ sur lequel opère le groupe des homographies ou transformations circulaires directes.

En particulier, étant donnés deux triangles (A,B,C) et (A',B',C'), on sait qu'il existe une unique homographie g de $\mathcal{E}_c$ envoyant A,B,C respectivement sur A',B',C' . On a alors le résultat assez surprenant :

$$O' = g(O)$$

où O et O' sont les métapôles des triangles ABC et $A'B'C'$.

Pour soulager les notations dans la suite, on pose :

$$\begin{cases} A = (AB,AC) \\ B = (BC,BA) \\ C = (CA,CB) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A' = (A'B',A'C') \\ B' = (B'C',B'A') \\ C' = (C'A',C'B') \end{cases}$$

en nommant les angles orientés des côtés des deux triangles par les sommets correspondants .

Soit $M \in \mathcal{E}_c$,on note :

$\alpha = (MB,MC)$; $\beta = (MC,MA)$; $\gamma = (MA,MB)$ les coordonnées angulaires de M par rapport à ABC.

De même si $M' = g(M)$,on note :

$\alpha' = (M'B',M'C')$; $\beta' = (M'C',M'A')$; $\gamma' = (M'A',M'B')$ les coordonnées de M' par rapport à $A'B'C'$.

Pour calculer α',β',γ' en fonction α,β,γ , on va d'abord évaluer les angles orientés que font en M les cercles MBC,MCA et MAB car on sait que ces angles sont conservés par g .

Par exemple, soient MT et MU les tangentes respectives en M des cercles MAB et MBC .On a : $(MT,MU) = (MT,MB) + (MB,MC) + (MC,MU)$.

Mais $(MT,MB) = (AM,AB)$ et $(MC,MU) = (AC,AM)$.

Finalement $(MT,MU) = (MB,MC) + (AC,AB) = \alpha - A$.

Puisque g conserve les angles orientés, on a donc :

$$\alpha - A = \alpha' - A' \ ; \ \beta - B = \beta' - B' \ ; \ \gamma - C = \gamma' - C' .$$

Mais on a vu précédemment que les coordonnées angulaires respectives de O et O' étaient :

$\alpha = -A'$; $\beta = -B'$; $\gamma = -C'$ et $\alpha' = -A$; $\beta' = -B$; $\gamma' = -C$.

On a bien $\alpha - A = -A - A' = \alpha' - A'$, etc .

Par suite : $O' = g(O)$.

Si f est l'application affine envoyant A,B,C respectivement sur A',B',C', on voit donc que f et g coïncident aux points A,B,C,O .On peut donc parler de quadrangles métapôlaires, chaque point étant métapôle du triangle formé par les trois autres .Par exemple A est le métapôle du triangle B'C'O' par rapport au triangle BCO ,etc .

Comme exemple de quadrangles métapôlaires,citons la figure formée par les quadrangles ABCM' et A'B'C'M où M et M' sont isogonaux par rapport au triangle ABC et A',B',C' sont les symétriques respectifs de M par rapport aux côtés BC,CA et AB .

Bibliographie :

G.Iliovici et P.Robert; Géométrie ; Paris ; Eyrolles ; 1937 .

F.Morley and F.V.Morley ; Inversive Geometry ; New York ; Chelsea P.C ;1954 .

G.Papelier ; Exercices de Géométrie Moderne; Paris; Vuibert ; 1949 .

D.Pedoe ; A Course of Geometry; London; Cambridge U.P ; 1970 .

E.Rouché et Ch de Comberousse; Traité de Géométrie; Paris; Gauthier-Villars; 1900

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

L'isogonologie. Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie

AUTEUR :

RIDEAU François

RESUME :

L'auteur présente de manière moderne les notions liées à l'isogonologie, pour préciser certains points ignorés de ses prédécesseurs et pour montrer la puissance des outils liés à l'algèbre linéaire même dans des problèmes de géométrie élémentaire.

MOTS CLES :

Géométrie - algèbre linéaire - isogonologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1992
ISBN : 2-86612-195-3