

**QUATRE ÉTAPES DANS L'HISTOIRE DES
NOMBRES COMPLEXES :
"QUELQUES COMMENTAIRES ÉPISTEMOLOGIQUES
ET DIDACTIQUES"**

Par M. ARTIGUE et A. DELEDICQ

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ-PARIS VII

**QUATRE ETAPES DANS L'HISTOIRE DES
NOMBRES COMPLEXES :
"QUELQUES COMMENTAIRES EPISTEMOLOGIQUES
ET DIDACTIQUES"**

Par M. ARTIGUE et A. DELEDICQ

QUATRE ETAPES DANS L'HISTOIRE DES NOMBRES COMPLEXES :
"QUELQUES COMMENTAIRES EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES".

Ce document reprend et développe l'exposé que nous avons donné au séminaire national de Didactique, en octobre 90 sous le titre : "L'histoire des nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques".

Il s'articule autour de quelques textes choisis à la fois pour leur lisibilité et leur caractère significatif :

- R. Bombelli : *Algebra* - Bologne, 1572 (reéd. Bortoletti, Milan, 1966)
- J. Wallis : *De algebra tractatus, historicus et practicus* - Londres, 1685
- A. de Moivre : *Solution analytique de certaines équations de degré trois, cinq, sept, neuf ou autres impairs, par une méthode analogue à celle de Cardan* - Philosophical Transactions n° 309, 1707. *Du partage d'un angle* - Ph. Trans. n° 374, 1722. *Miscellanea analytica* - 1730.
- L. Euler : *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* - Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1749, pp. 139-179.
- L. Euler : *Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1748 (traduction de Labey parue en 1796).
- J.R. Argand : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* - 1806. *Et Application à la démonstration d'un théorème d'analyse*, Annales de mathématiques de Gergonne, Vol. 4, 1813/14.
- L.A. Cauchy : *Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences* - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1847.
- W.R. Hamilton : *Lectures on quaternions* - Dublin, 1853.

Notre objectif n'est ni de raconter l'histoire des nombres complexes, ni d'en faire une analyse historique, mais de pointer quelques traits qui nous ont paru pertinents et capables d'éclairer les liens aujourd'hui de plus en plus explicites entre l'histoire et la didactique.

Nous avons choisi de porter notre regard sur quatre moments généralement considérés comme charnières :

- L'apparition des quantités imaginaires dans un algorithme opératoire (XVI^e siècle).
- Le fonctionnement comme outil et la rencontre des angles et des logarithmes (XVIII^e siècle).
- Les représentations géométriques (début XIX^e siècle).
- Les constructions algébriques (XIX^e siècle).

Pour chacune de ces étapes, nous avons partagé nos commentaires en trois paragraphes :

- . Une brève explication du texte et du contexte,
- . Un repérage de l'évolution du réseau des idées et des concepts,
- . Une analyse menée à travers quelques outils de théorisation didactique aujourd'hui classiques.

I - L'APPARITION DES QUANTITES IMAGINAIRES DANS UN ALGORITHME OPERATOIRE

Comme le souligne E.Cartan dans l'article sur les nombres complexes qu'il écrit pour l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées, au début de ce siècle, l'introduction des quantités imaginaires "ne s'est vraiment imposée que lorsque les travaux des algébristes italiens eurent mis en évidence un fait singulier : les racines réelles de certaines équations du troisième degré se trouvent représentées, d'après la formule dite : "Formule de Cardan" comme

résultat d'opérations effectuées sur des nombres impossibles de la forme $a+b\sqrt{-1}$ (où a et b désignent des nombres réels) sans que l'on put trouver en général pour ces racines une expression algébrique ne portant que sur des nombres réels."

I.1 - Une page de Bombelli

En fait, lorsqu'on cherche à détecter la présence de "nombres complexes" dans les textes historiques, il est bien connu qu'on ne les trouve pas là où pourrait les attendre le lecteur qui se bornerait aux programmes de nos lycées : ce n'est pas en effet à l'occasion de problèmes du second degré que sont apparus ces nombres : Au XVIème siècle, on n'avait en effet "rien à faire" des solutions imaginaires de $ax^2 + bx + c = 0$, car, à partir des travaux d'Al Hawarismi (IXème siècle) et de ses successeurs, Aboul Wafa (940-998) et Al Kahri ($\approx$ 1020), relayés par Léonard de Pise (1180-1250), on savait parfaitement résoudre tous les cas pouvant se présenter et on savait distinguer les équations ayant deux solutions, une solution ou aucune ; l'exhibition de racines imaginaires ne répondait à *aucune question* et n'avait donc aucune raison de déboucher sur quelque "connaissance" ("toute connaissance est la réponse à une question" répète Bachelard dans La formation de l'esprit scientifique - 1938).

Par contre, en ce début du XVIème siècle, on cherchait à calculer les solutions bien réelles des équations du 3ème degré, dont Scipione del Ferro connaissait, dès 1500, une technique de résolution. Connue ou redécouverte par plusieurs mathématiciens italiens, c'est Cardan qui la rendra publique comme méthode générale dans son "Ars Magna" en 1547. Bombelli, quelque dix ans plus tard, en rédigera un exposé algébrique avec les notations opérationnelles que nous allons examiner. (Son "Algebra" est parue en 1572 à Bologne - réed. Bortoletti - Milan 1966).

figure 1

METHODE POUR RESOUDRE UNE EQUATION DU 3ème DEGRE
(DEL FERRO / TARTAGLIA / CARDAN / BOMBELLI - 1500 → 1572)

(Où l'on reste dans le domaine réel)

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \underline{28} + \underline{9}x \\
 x &= \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \\
 x^3 &= \underbrace{u + v}_{\downarrow} + 3 \underbrace{\sqrt[3]{uv}}_{\downarrow} (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) \\
 u^2 - \underline{28}u + \underline{3}^3 &= 0 \\
 \underline{14}^2 - \underline{3}^3 &= 196 - 27 = 169 = \underline{13}^2 \\
 (u - \underline{14})^2 &= \underline{13}^2 \\
 u - \underline{14} &= \text{p.}\underline{13} && \text{p pour piu (+)} \\
 v - \underline{14} &= \text{m.}\underline{13} && \text{m pour meno (-)} \\
 \text{or } \underline{14} \text{ p. } \underline{13} &\text{ est le cube de } \underline{2} \text{ p. } \underline{1} \\
 \text{et } \underline{14} \text{ m. } \underline{13} &\text{ est le cube de } \underline{2} \text{ m. } \underline{1} \\
 x &= \underline{2} \text{ p. } \underline{1} + \underline{2} \text{ m. } \underline{1} = \underline{4}
 \end{aligned}$$

figure 2

(Où l'on transite dans le domaine complexe)

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \underline{104} + \underline{51} x \\
 x &= \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \\
 x^3 &= \underbrace{u + v}_{\downarrow} + 3 \underbrace{\sqrt[3]{uv}}_{\downarrow} (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}) \\
 u^2 - \underline{104} u + \underline{17}^3 &= 0 \\
 \underline{52}^2 - \underline{17}^3 &= 2704 - 4913 = -2209 = -\underline{47}^2 \\
 (u - \underline{52})^2 &= -\underline{47}^2 \\
 u - \underline{52} &= \text{p.d.m.}\underline{47} && \text{piu di meno} \\
 v - \underline{52} &= \text{m.d.m.}\underline{47} && \text{meno di meno} \\
 \text{or } \underline{52} \text{ p.d.m. } \underline{47} &\text{ est le cube de } \underline{4} \text{ p.d.m. } \underline{1} \\
 \text{et } \underline{52} \text{ m.d.m. } \underline{47} &\text{ est le cube de } \underline{4} \text{ m.d.m. } \underline{1} \\
 x &= \underline{4} \text{ p.d.m. } \underline{1} + \underline{4} \text{ m.d.m. } \underline{1} = \underline{8}
 \end{aligned}$$

La figure 1 explicite la méthode dans un cas simple où tout se déroule dans le domaine réel (tout en laissant apparaître aux endroits opportuns la notation de Bombelli, nous utilisons le codage algébrique actuel pour faciliter la compréhension - on excusera, en en comprenant l'objectif, le caractère composite de ce document).

En cherchant la solution de $x^3 = a + bx$ sous la forme $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, on est amené à résoudre une équation du second degré en u ; plus précisément, le carré de $u - \frac{a}{2}$ doit être égal à $(\frac{a}{2})^2 - (\frac{b}{3})^3$.

Lorsque $(\frac{b}{3})^3$ est supérieur à $(\frac{a}{2})^2$, le carré de $u - \frac{a}{2}$ devrait être négatif. c'est ce qui arrive, par exemple, pour $a=104$ et $b=51$ (voir la figure 2). On devrait alors prendre la racine carrée de -47^2 . Voici ce qu'en écrit alors Bombelli :

Cette sorte de racine carrée a pour algorithme des opérations fort différentes des autres et a un nom différent ; car, lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé plus de moins (piu di meno) quand il a été ajouté, et quand il a été retranché il sera appelé moins de moins (meno di meno).

Cependant, avec ces *pdm* et ces *mdm*, Bombelli effectue les calculs comme si on restait dans le domaine des nombres habituels et aboutit au résultat : $x=8$. C'est une valeur bien réelle et on peut contrôler qu'elle est effectivement racine de l'équation proposée.

La méthode de résolution n'est donc pas altérée par l'apparition d'un carré négatif, à condition de choisir certaines règles de calculs avec les écritures contenant des *pdm* et *mdm* :

piu di meno via piu di meno fa meno
meno via piu di meno fa piu di meno
 ...

Ainsi, ces règles permettent de montrer, par exemple, que

$$(4 \text{ pdm1})^3 = 52 \text{ pdm47} \quad ;$$

$$\text{en effet } (4 \text{ pdm1})^3 = 4^3 + 3.4^2.\text{pdm1} + 3.4.m + \text{mdm1}$$

$$= (64 - 12) + (\text{pdm48 mdm1}) = 52 \text{ pdm47} \quad ,$$

et donc $4 \text{ pdm1} = \sqrt[3]{52 \text{ pdm47}}$; alors, dans l'addition $4 \text{ pdm1} + 4t \text{ mdm1}$, les écritures contenant des *pdm* et *mdm* disparaissent.

I.2 - Commentaire épistémologique

Dans ce texte, donc, où l'on pouvait espérer repérer l'apparition de "nouveaux" nombres, ce ne sont pas des nombres mais des opérateurs qui apparaissent.

Le phénomène est, sur le plan calculatoire, très analogue à ce qui a pu se passer pour les nombres négatifs : ainsi les signes + et - désignent des opérations (l'addition et la soustraction) et les nombres $a+b$ et $a-b$ sont des quantités bien définies lorsque a est plus grand que b . On calcule donc très sereinement par exemple :

$$(4 + 1) + (4 - 1) = 8 \quad .$$

Et, lorsque l'on tombe sur :

$$(4 + 6) + (4 - 6)$$

on affirmera la permanence de l'*algorithme des opérations* (pour parler comme Bombelli), et on donnera encore 8 pour résultat. Mais, à aucun moment, on n'aura eu besoin de "voir" le nombre $(4 - 6)$ c'est-à-dire, pour nous, le négatif -2 . Cette volonté de ne pas introduire l'objet *isolé* (l'écriture -6 ne peut se rencontrer que si l'écriture +6 est aussi présente ailleurs afin d'assurer la signifiante du résultat) va perdurer très longtemps puisqu'on la rencontre encore chez Carnot (in *La géométrie de position* - 1803) :

De là je conclus , 1° que toute quantité négative isolée est un être de raison, et que celles qu'on rencontre dans le calcul ne sont que de simples formes algébriques, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective. 2°. Que chacune de ces formes algébriques étant

*prises, abstraction faite de son signe, n'est autre chose que la différence de deux quantités absolues, dont celle qui était la plus grande dans le cas sur lequel on a établi le raisonnement, se trouve la plus petite dans le cas auquel on veut appliquer les résultats du calcul.*¹

Dans le cas rencontré dans la résolution des équations du troisième degré, les circonstances sont analogues puisque l'on tombe sur : $(4 \text{ pdm } 1) + (4 \text{ mdm } 1)$, et les règles de calcul vont assurer l'élimination des *pdm 1* et *mdm 1*. Cependant, il faut ici rendre hommage à l'intrépidité des calculateurs du XVI^e siècle ; car si, en effet, dans le "cas négatif" cité plus haut, la soustraction avait déjà un sens (lorsque le premier terme est supérieur au second), dans le "cas imaginaire" les opérations sont *fort différentes des autres*, et il a fallu en quelque sorte "inventer" ces deux opérations et les règles de leur manipulation. Il est d'ailleurs piquant de remarquer, à ce sujet, que dans le même texte d'Argand (1806, voir § III) qui aller déboucher sur la reconnaissance de ce que pourrait être un nombre complexe, on trouve un très astucieux retour sur cet aspect opératoire ; on y voit explicité pour la première fois, l'isomorphie de $((1, i, -1, -i), \times)$ avec $(\mathbb{Z}_4, +)$ sous la forme d'une règle de calcul, joliment appelée par Argand la *règle des lignes* (voir figure 3).

¹ Cette incapacité à reconnaître un statut objectif aux nombres négatifs n'est pas universelle à cette époque ; soixante ans plus tôt Euler manipulait déjà bien la relation d'ordre avec des négatifs ; et un siècle avant, l'école anglaise semblait avoir correctement compris la bijection : nombres $\rightarrow$ droite munie d'une origine, essentiellement par la référence au temps comme variable. Voir biblio Schubring.

figure 3

La règle des "lignes", selon Argand (1806)

Or on n'écrit pas $+1.a$, $-1.a$, mais simplement $+a$, $-a$, et le signe qui précède a indique lui-même quelle espèce d'unité exprime ce nombre. On peut donc employer un moyen semblable relativement aux quantités imaginaires, en écrivant, par exemple, $\sim a$ et $\vdash a$, au lieu de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, les signes $\sim$ et $\vdash$ étant positifs et négatifs réciproques.

Pour la multiplication de ces signes, on observera que, multipliés par eux-mêmes, ils donnent $-$, et que, par conséquent, multipliés l'un par l'autre, ils donnent $+$. On peut, d'ailleurs, établir une règle unique pour tous les signes, qui s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Qu'on affecte la valeur 2 à chacun des traits droits, soit perpendiculaires, soit horizontaux, qui entrent dans les signes à multiplier, et la valeur 1 à chacun des traits courbes : on aura, pour les quatre signes, les valeurs suivantes :

$$\sim = 1,$$

$$- = 2,$$

$$\vdash = 3,$$

$$\div = 4.$$

Cela posé, on prendra la somme de la valeur de tous les facteurs, et l'on en retranchera autant de fois 4 qu'il sera nécessaire pour que le reste soit un des nombres 1, 2, 3, 4; ce reste sera la valeur du signe du produit; et pareillement, pour la division, on retranchera la somme des traits du diviseur de celle des traits du dividende, à laquelle on aura ajouté, s'il le faut, un multiple de 4, et le reste indiquera le signe du quotient. Il est à remarquer que ces opérations sont des multiplications et divisions par logarithmes; cette analogie se mettra dans un plus grand jour.

Comme $a + b(-1)$ s'écrit $a - b$

$a + b i$ s'écrirait $a \sim b$.

Alors $(a \sim b)(c \sim d) = ac \sim bc \sim ad - bd$

$$= ac - bd \sim (bc + ad).$$

A la fin du XVI^e siècle donc, lorsque les quantités imaginaires ne sont encore que des symboles-supports-du-calcul, aucun objet nouveau n'apparaît, l'équation-problème à résoudre est entièrement (évidemment) dans le champ réel et la solution trouvée est elle aussi, bien réelle. La nouveauté consiste précisément à faire fonctionner une méthode connue en forçant les conditions de son application à des circonstances inhabituelles.²

Ainsi constate-t-on, dans le cas des nombres complexes comme dans bien d'autres, la pré-séance de l'opération sur les objets, de la fonction sur l'organe, de la transformation sur les éléments transformés. Dans une perspective historique, au jeu de la dialectique outil/objet, c'est l'outil qui joue presque toujours le premier ; il semble même à l'origine de la création de l'objet, lequel se construira petit à petit par sommation des actions qui l'utilisent (voir. Piaget, pour la didactique et Felix Klein pour l'épistémologie).

I.3 - Commentaire didactique

Pour le didacticien, cette première phase de l'histoire des nombres complexes, telle qu'elle a été décrite et analysée ici, est en un certain sens rassurante, en particulier parce qu'elle met en évidence la pertinence épistémologique de certains outils ou appuis didactiques.

²On pourrait interpréter différemment un passage comme celui où Cardan (Ars magna, 1545) pose le problème suivant : "où découper un baton de 10 de long pour que le rectangle construit sur ses deux morceaux ait une aire de 40 ?". La réponse est $5 + \sqrt{-15}$. Il paraît cependant hasardeux que ce résultat puisse être considéré comme une quantité résolvant un problème réel. Le contexte de ce passage, qui explicite le parallélisme des calculs avec le cas "réel", incite plutôt à le considérer comme une justification de "l'algorithme des opérations".

En insistant sur le fait que notre analyse n'en exclue pas d'autre, nous examinerons successivement trois points :

- le rôle moteur des **déséquilibres cognitifs**,
- la distinction entre les pôles outil et objet d'un concept mathématique,
- les différences entre la logique de l'enseignement et celle de l'histoire.

a - Le rôle moteur des déséquilibres cognitifs

Comme cela a été dit, ce n'est pas, dans le cadre de la résolution des équations, le degré 2 qui va motiver le recours à des quantités imaginaires mais le degré 3 et ceci parce que la résolution des équations du second degré ne soulevait aucun problème cognitif, ne créait aucun déséquilibre.

Le déséquilibre naît, pour le troisième degré, de l'existence des formules dites de Cardan et de la reconnaissance du fait que ces formules donnent la racine réelle lorsqu'elle est unique mais perdent apparemment toute signification dans des situations où l'on sait bien par ailleurs qu'il y a des racines réelles.

De plus, la solution de ce déséquilibre, telle que nous la voyons fonctionner ici, ne passe pas par la construction es-qualité des nombres complexes, mais par des actions plus modestes : l'introduction d'un signe nouveau, l'adaptation raisonnable à ce signe des règles de calcul usuelles par une sorte de principe de permanence du calcul, le contrôle pragmatique de la validité de ce principe : on tombe bien sur la racine réelle cherchée.

On voit là fonctionner historiquement un phénomène tout à fait parallèle aux phénomènes de déséquilibration/rééquilibration identifiés comme centraux dans la construction des connaissances par la psychologie génétique. Dans la théorie constructiviste piagétienne,

la construction de connaissance résulte de processus d'interaction entre le sujet et son environnement, ces processus visant une adaptation du sujet à son environnement. Cette adaptation se produit par le double jeu de mécanismes d'assimilation et d'accommodation, assimilation si le sujet peut assez directement assimiler son vécu dans l'interaction à son organisation mentale existante, accommodation si le sujet doit modifier pour prendre en compte ce réel cette organisation.

Dans cette dynamique entre assimilation et accommodation, la notion de déséquilibre cognitif est une notion essentielle. C'est le déséquilibre cognitif issu du conflit entre les informations du réel que le sujet est capable de prendre en compte, qui contraint la réorganisation cognitive à un niveau qui le dépasse (équibration majorante).

La didactique des mathématiques a, dès ses débuts en France, intégré cette conception du développement dans ses cadres théoriques. Plus récemment, R.Douady dans sa thèse a mis en évidence que, pour le mathématicien, les conflits de convictions entre cadres de fonctionnement différents d'un même concept étaient des moteurs privilégiés de ces processus de déséquilibration/reéquilibration et elle a élaboré une structure qui vise justement à transposer et exploiter ce fait sur le plan didactique . Nous reviendrons plus précisément sur le rôle joué par l'interaction entre différents cadres dans la production mathématique dans le courant de ce texte à travers l'analyse de la construction du corps des quaternions telle qu'elle apparaît décrite par Hamilton dans la préface de "Lectures on Quaternions".

b - La distinction entre les pôles outil et objet d'un concept mathématique

Comme cela a également été souligné, ce qui apparaît sur la scène mathématique avec les travaux des algébristes italiens, ce n'est pas un objet mathématique constitué, clairement défini et légitimé, c'est un signe, et l'adaptation d'une technique existante à ce signe. Les quantités imaginaires vont se constituer autour de la notation $\sqrt{-1}$ et fonctionner d'abord, essentiellement comme des outils de l'activité mathématique. Elles auront ainsi pendant un temps le statut d'intermédiaires de calcul commodes pour résoudre des problèmes réels, intermédiaires qui n'apparaîtront jamais dans les résultats définitifs. On peut remarquer que ce statut sera aussi à un certain moment celui des infiniment petits.

Ce phénomène n'est pas propre aux nombres complexes. A l'origine de nombreux concepts mathématiques, il y a des techniques voire des méthodes qui vont faire la preuve de leur efficacité comme outils de l'activité mathématique dans un certain nombre de problèmes avant de donner lieu à des objets de savoir identifiés comme tels et étudiés pour eux mêmes.

Il est lui aussi pris en compte en didactique. Dans la théorie des situations didactiques élaborée par G.Brousseau (1986), chaque connaissance naît de l'adaptation à une situation spécifique et, en sens inverse, "chaque connaissance peut se caractériser par une ou des situations a-didactiques qui en préservent le sens". Ainsi la connaissance visée est d'abord appelée à fonctionner comme outil de résolution de problème dans l'adaptation.

Ce n'est qu'ensuite et progressivement, à travers le processus d'institutionnalisation, qu'elle prendra le statut d'objet légitime et reconnu. R.Douady centre de manière encore plus fondamentale la théorie qu'elle développe sur cette distinction entre les pôles objet et outil des concepts mathématiques via la notion de "dialectique "outil-objet".

3 - La différence entre la logique de l'enseignement et celle de l'histoire

Si l'on étudie l'introduction des nombres complexes dans l'enseignement, on remarque que la logique de l'enseignement ne se superpose pas à la logique de l'histoire que nous venons de décrire : schématiquement, on pourrait dire qu'à une "logique outil" fait place une "logique objet".

Illustrons ceci rapidement par le cas de l'enseignement secondaire. Les nombres complexes y apparaissent lors de la réforme de 1962 et l'on peut en première approche distinguer dans l'histoire de cet enseignement trois périodes : de l'introduction à la réforme des mathématiques modernes, de cette réforme à la réforme de 1983, de 1983 à nos jours (cf. annexe : programmes).

En 1962, les nombres complexes apparaissent dans le premier paragraphe de la rubrique "Arithmétique, algèbre et notions d'analyse" des programmes intitulée : "Les nombres - Extensions successives de la notion de nombre". Si l'on examine les manuels de cette première période, on constate que ce qui est mis en avant, c'est la progression logique et la continuité des méthodes dans les extensions successives de la notion de nombre. Schématiquement :

- la considération des couples d'entiers naturels, modulo une équivalence convenable, conduit aux entiers relatifs qui permettent de résoudre les équations de la forme $x+a=b$, a, b dans $\mathbb{N}$,
- la considération des couples d'entiers relatifs conduit de façon analogue aux nombres rationnels qui permettent de résoudre les équations de la forme $ax+b=c$, a dans $\mathbb{Z}^*$, b et c dans $\mathbb{Z}$
- la considération des couples de réels conduit de la même façon aux nombres complexes qui permettent de résoudre toutes les équations du second degré à coefficients réels.

Il est clair que la construction des réels échappe à cette continuité mais on voit certains auteurs prolonger en un certain sens la chaîne précédente, en établissant un parallèle entre la construction de corps, extensions algébriques de $\mathbb{Q}$, permettant de "résoudre" certaines équations (par exemple $\{a+b\sqrt{2}, a,b \in \mathbb{Q}\}$ pour $x^2=2$), et la construction des complexes à partir des réels permettant de "résoudre" l'équation $x^2+1=0$.

Avec la réforme de 1970, l'algèbre linéaire devient un contexte unificateur dominant et l'introduction des nombres complexes subit le contre-coup de cette évolution : les nombres complexes sont définis comme les matrices 2.2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ c'est à dire les matrices de similitudes vectorielles directes. Les opérations dans C sont définies par l'addition et le produit des matrices et la forme algébrique usuelle $a+ib$ n'est introduite que lorsque l'on a montré que C est un corps et un espace vectoriel de dimension 2 sur R .

La réforme de 1983, elle, voit le rejet d'un apprentissage fondé sur celui de structures générales et le souci de promouvoir une conception de l'enseignement où le moteur de l'apprentissage soit la résolution de problèmes. Les objectifs généraux des programmes précisent :

"La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus [...] L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles..."

La rédaction de la partie du programme concernant les nombres complexes est une fois de plus modifiée par ces choix globaux : ceci

se traduit d'abord par la suppression de la construction imposée par les similitudes puis, dans les programmes de 1986, par la suppression de fait de la construction explicite de l'objet :

"Aucune méthode d'introduction des nombres complexes n'est imposée ; les idées doivent être mises en valeur, mais une construction détaillée n'est pas souhaitable"

ainsi que par une insistance explicite sur le caractère outil des nombres complexes :

"Les nombres complexes, outre leur intérêt algébrique, fournissent des outils pour la trigonométrie et pour l'étude des configurations géométriques planes."

Nous voudrions cependant souligner que même si le rôle d'outil des nombres complexes est souligné, la logique de l'enseignement est bien moins profondément modifiée que l'on pourrait naïvement le penser : passées quelques considérations ou activités préliminaires, on introduit l'objet, on l'étudie en temps qu'objet de façon assez semblable (même s'il n'est pas formellement construit) puis on le fait fonctionner comme outil dans diverses situations algébriques ou géométriques adaptées à l'enseignement de ce niveau, essentiellement les mêmes que dans les programmes précédents.

II - LES QUANTITES IMAGINAIRES, OUTILS DE L'ACTIVITE MATHEMATIQUE, LA RENCONTRE DES ANGLES ET DES LOGARITHMES

Si les quantités imaginaires s'introduisent progressivement dans les calculs, ce n'est cependant pas sans hésitation. Elles n'ont pas au départ le statut de nombres mais celui d'écritures intermédiaires commodes pour les calculs. Aucune écriture comportant une racine de nombre négatif du type $52+\sqrt{-2209}$ ne doit figurer dans les résultats.

Progressivement néanmoins la confiance dans ces nouveaux objets va s'accroître dans la mesure où leur manipulation ne conduit pas à des contradictions. Cette manipulation est gérée par le principe de permanence, énoncé par Leibniz, qui consiste à appliquer simplement à ces quantités les règles du calcul sur les quantités ordinaires.

Leibniz propose même d'introduire, à côté des opérations ordinaires du calcul, l'opération de "réformation" qui consiste à transformer en quantités réelles, en se basant sur la formule du binôme, des quantités de la forme : $\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[n]{a-b\sqrt{-1}}$ (voir sa correspondance avec Huyghens, en 1675, où l'on trouve par exemple : "L'on n'aurait jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fit $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de caché là-dedans qui nous est incompréhensible").

Cet intérêt pour les quantités imaginaires va s'affirmer aussi en raison des résultats unificateurs qu'ils permettent d'obtenir. C'est le cas par exemple avec :

- Le théorème fondamental de l'algèbre qui assure qu'une équation polynomiale de degré n a exactement n racines si l'on compte ces racines avec leur ordre de multiplicité et qui ne peut s'exprimer de la sorte que si l'on inclut les racines imaginaires. Il est déjà énoncé par Girard dans son "Invention nouvelle en algèbre" parue en 1629 :

"Toutes les équations d'Algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, *excepté les incomplètes*."

(Une intuition malheureuse a pu lui faire croire que l'absence de certains coefficients de l'équation pouvait provoquer la disparition corrélative de racines !)

- L'unification des trigonométries sphériques et hyperboliques réalisée par Euler en 1740, à partir des formules qui portent aujourd'hui son nom et dans des situations où l'on observait des ressemblances apparemment inexplicables et de subtiles différences qui l'étaient tout autant.

Dans cette partie, nous nous centrerons sur un aspect de cette histoire qui nous semble particulièrement riche d'un point de vue épistémologique : la rencontre des angles et des logarithmes. Nous le ferons à travers

A) l'extension aux nombres négatifs et imaginaires de la notion de logarithme,

B) la mise en place des relations entre angles et quantités imaginaires, grâce à l'exponentielle complexe.

II-A1 Le logarithme des quantités négatives et imaginaires

Vu comme une image d'Epinal, la rencontre des complexes et des logarithmes se fait en 1702, dans une lettre de Jean Bernouilli à Leibniz :

Dans la relation différentielle

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right) dx ,$$

il ose le changement de variables $x = i \frac{t-1}{t+1}$. En intégrant alors

comme il le fait "d'habitude", il déduit que le logarithme de $\sqrt{-1}$ "devrait" être égal à $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, et donc que le logarithme de son carré (-1) devrait être égal au double, soit $\pi\sqrt{-1}$. Il retiendra de cette relation le rapprochement, sur-réaliste pour lui, entre une "quantité liée au cercle" ($\frac{dx}{1+x^2}$, dont la "somme" contient le nombre π) et un logarithme (somme de quantités liées à l'hyperbole $\frac{1}{x}$). Par contre, il oubliera, semble-t-il, la valeur du logarithme de -1 , puisqu'il entretiendra à ce sujet une correspondance avec Leibniz dans les années 1712-1713 (voir l'analyse de cette controverse dans l'article de J.L. Verley in *Fragments d'histoire des mathématiques* - brochure APMEP n°41 - 1981).

Leibniz soutient en effet que le logarithme des quantités négatives et imaginaires est nécessairement imaginaire, Jean Bernouilli qu'un nombre et son opposé ont le même logarithme.

Dans cet échange analysé par Euler en 1749, dans les *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin : de la controverse entre MM. Leibniz et Bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* Bernouilli prétend, par exemple, que le logarithme de -1 est nul. Parmi différentes argumentations, la plus forte semble être celle-ci :

Pour tout nombre positif a , on a $(-a)^2 = (a)^2$, et donc

$$\ln(-a)^2 = \ln(a)^2$$

$$2.\ln(-a) = 2.\ln(a)$$

d'où $\ln(-a) = \ln(a)$, et en particulier $\ln(-1) = \ln(1) = 0$.

II - A.2 Commentaire épistémologique

Qu'a fait Bernouilli ? Il n'a fait qu'appliquer quelques règles de calcul dont la validité n'a jamais été mise en doute par personne :

$$a = b \Rightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

$$\ln(x^2) = 2.\ln(x)$$

$$2a = 2b \Rightarrow a = b$$

Aujourd'hui, nous mettrions en cause le recours à la deuxième règle, que Bernouilli utilise pour une valeur négative de x , pour laquelle la fonction logarithme n'est pas définie. Mais justement, ce que cherchent à faire Bernouilli et Leibniz, c'est à définir $\ln(x)$ pour x négatif (ou même imaginaire). Ils appliquent donc les règles habituelles du calcul pour trouver la valeur du logarithme qui serait compatible avec elles. Ainsi Leibniz, aboutit à une conclusion différente par l'argumentation suivante :

Si on avait $\ln(-1) = \ln(1)$,
 alors on aurait $e^{\ln(-1)} = e^{\ln(1)}$,
 et donc (puisque $e^{\ln(x)} = x$) $-1 = 1$,
 ce qui est absurde.

Ainsi, pour eux, comme pour tous les mathématiciens avant et longtemps après eux, les règles du calcul algébrique sont en effet *invariables* (nous pourrions dire aujourd'hui qu'elles constituent un très solide *invariant* du concept de "calcul"). Initialement vérifiées sur les nombres naturels, leur domaine d'application s'est étendu et s'étend naturellement à tous les objets nouveaux engendrés par le jeu des opérations : accepter des objets nouveaux comme "nombres", c'était alors les intégrer dans la famille régie par les règles du calcul algébrique. C'est ce que nous pouvons appeler le *principe de permanence des propriétés algébriques*, dont la solidité restera inébranlable jusqu'au milieu du XIX^e siècle.

Afin de mieux comprendre, nous-mêmes, la nature de ce principe et son enracinement dans nos conceptions, nous proposons une analogie avec nos "règles de raisonnement logique" ; nous utilisons en effet ces règles pour faire des raisonnements portant sur tout objet dont nous avons reconnu la nature mathématique, et, dès lors que de nouveaux objets mathématiques se présentent à nous, il ne fait aucun doute que leur manipulation doit respecter ces règles logiques : accepter des

nouveaux objets comme "mathématiques", c'est exactement les intégrer dans la famille régie par les règles du raisonnement logique.

Nous pointons ici un type de rupture épistémologique tout à fait essentiel : l'inversion de préséance entre les règles et les objets sur lesquelles elles opèrent. Avant la rupture, il y a des règles (dont la permanence est donc affirmée) et le champ de leur application est progressivement étendu à d'autres objets que ceux qui les ont initialement justifiées ; après la rupture, il y a des objets définis (dont l'existence est donc affirmée) et on explicite les règles auxquelles ils sont assujettis dans la structure que l'on est en train de construire. A posteriori, on s'apercevra que le processus a finalement abouti à la mise en évidence d'une nouvelle classe d'objets, et que le champ d'application des règles n'a fait que se relativiser.

Dans notre cas, la classe d'objets qui prenait naissance est celle des *fonctions*, dont la définition allait obliger à préciser le concept de relation, et dont les règles opératoires allaient être très proches de celles des nombres tout en en étant soigneusement distinguées. L'apport essentiel d'Euler est d'avoir, en particulier, mis l'accent sur la propriété caractéristique des relations fonctionnelles en approfondissant quelques conséquences de la non-fonctionnalité³ :

Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. cela est aussi bien vrai ; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu

³ L'adjectif "fonctionnelle" et le mot "fonctionnalité" sont ici écrits avec leur sens moderne, bien qu'une "fonction", pour Euler et bien d'autres après lui, puisse être "multivoque".

qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes semblait embarrassée, ne subsistent qu'en tant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparaître toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes...

II - B.1 Angles et quantités imaginaires

La rencontre des complexes et des angles se fait chez de Moivre, entre 1707 et 1730. Cela commence par un théorème sur la résolution de certaines équations (*Solution analytique de certaines équations de degré trois, cinq, sept, neuf, ou autres impairs, par une méthode analogue à celle de Cardan - Philosophical Transactions n° 309*) qu'il donne en 1707 :

Pour n impair, l'équation :

$$ny + \frac{n^2 - 1}{2 \cdot 3} ny^3 + \frac{n^2 - 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{n^2 - 9}{4 \cdot 5} ny^5 + \dots = a$$

$$\text{a pour solution} \quad y = \frac{1}{2} \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 + 1}} - \frac{1/2}{\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 + 1}}}$$

A titre d'exemple, il résout l'équation pour n=5, $5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$ en utilisant une table de logarithmes pour la prise des racines cinquièmes.

D'autre part, si les termes de l'équation sont alternativement positifs et négatifs, la solution est :

$$y = \frac{1}{2} \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1/2}{\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}}}$$

A titre d'exemple, il résoud l'équation pour $n=5$, $5y - 20 y^3 + 16 y^5 = \frac{61}{64}$ d'abord avec une table de logarithmes, puis en écrivant :

Si l'extraction des racines semble difficile, la chose peut toujours être effectuée à l'aide d'une table de sinus de la manière suivante.

$a = \frac{61}{64} = 0,95112$ est le sinus de $72^\circ 23'$, dont la cinquième partie est $14^\circ 28'$, le sinus de $14^\circ 28'$ vaut 0,25981, qui est proche de $1/4$. Et $1/4$ est exactement la solution de l'équation.

A cette date là, il ne dit rien sur l'énigmatique remplacement de la table de logarithme par la table de sinus, associé à la même division par 5 de l'argument.

En 1722 (*Du partage d'un angle - Philosophical Transactions* n° 374), il dévoile l'"artifice" qui lui avait fait découvrir la forme de la solution :

Si $x = \cos \phi$ et $t = \cos n\phi$

alors il existe z vérifiant simultanément :

$$1 - 2t z^n + z^{2n} = 0$$

$$1 - 2x z + z^2 = 0$$

(nous avons écrit avec des cosinus ce qu'il écrivait avec des "sinus verse")

La démonstration de ce résultat tient effectivement aujourd'hui dans l'énoncé de la "formule de Moivre" $(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$; en posant $x = \cos\phi$ et $t = \cos n\phi$, on a bien alors

$$z = \cos\phi + i\sin\phi = x + \sqrt{x^2-1} \text{ solution de } 1 - 2x z + z^2 = 0, \text{ et}$$

$$z^n = \cos n\phi + i\sin n\phi = t + \sqrt{t^2-1} \text{ solution de } 1 - 2t z^n + z^{2n} = 0.$$

Ce n'est qu'en 1730 (*Miscellanea Analytica*) que de Moivre énoncera un lemme dont la forme sera la plus proche de sa formule :

Si $t = \cos A$ et $x = \cos \frac{A}{n}$, alors

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[n]{t + \sqrt{t^2 - 1}} + \frac{1/2}{\sqrt[n]{t + \sqrt{t^2 - 1}}}.$$

On est, en fait, très proche à la fois de la "formule de Moivre" et des "formules d'Euler". En effet, en posant, comme le fait De Moivre

dans sa démonstration $z = \sqrt[n]{t + \sqrt{t^2 - 1}} = (\cos A + i \sin A)^{1/n}$,

on a $x = \cos \frac{A}{n} = \frac{z + z^{-1}}{2}$, et donc $1 - 2xz + z^2 = 0$, d'où

$z = \sqrt[n]{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \cos \frac{A}{n} + i \sin \frac{A}{n}$, mais aussi $1 - 2tz^n + z^{2n} = 0$,

d'où $t = \cos A = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$.

Heureusement Euler fournira peu de temps après une démonstration beaucoup plus immédiate (*Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1748) :

A partir de la décomposition en facteurs complexes

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = 1$$

il a l'idée de développer $(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$,

et obtient

$$(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = \cos(z+y) + \sqrt{-1} \sin(z+y);$$

$$\text{puis } (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^2 = \cos 2z + \sqrt{-1} \sin 2z$$

$$\text{puis } (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n = \cos nz + \sqrt{-1} \sin nz;$$

enfin, par combinaison :

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Pour obtenir l'écriture classique de ses formules, Euler introduit alors

l'exponentielle par un de ces arguments d'analyse infinitésimale dont il a le secret :

figure 4.

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc ζ infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i , afin d'obtenir pour $i\zeta$ une valeur finie v ; nous aurons donc $n\zeta = v$, & $\zeta = \frac{v}{i}$, & par conséquent $\sin. \zeta = \frac{v}{i}$, & $\cos. \zeta = 1$; ces substitutions faites donne-

$$\text{ront } \cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \text{ \& } \sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}. \text{ Or dans le Chapitre précé-}$$

dent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{\zeta}{i}\right)^i = e^\zeta$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour ζ , d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \text{ \& } \sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1} \sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1} \sin. v$.

II - B.2 Commentaire épistémologique

Le cheminement des premiers articles de De Moivre aux textes d'Euler illustre et résume de façon exemplaire le passage du statut d'outil (de résolution d'équations) à un statut qui n'est pas encore celui d'objet complètement autonome, mais celui de *valeur* possible d'une variable (dans l'expression d'une fonction). Il s'agit bien d'un statut intermédiaire puisqu'une variable n'est pas un objet isolé ; cependant elle intervient dans un processus de calcul exactement comme un autre objet.

Dans le texte de 1707, il ne s'agit que d'un algorithme permettant de résoudre une équation particulière ; et l'intervention mystérieuse de la table des sinus dans la résolution vient de ce que les coefficients de l'équation sont les coefficients de $\cos n\alpha$ développé en puissances de $\cos \alpha$ (ce qui est possible pour n impair). Il n'empêche que ce problème permet à De Moivre d'introduire la trigonométrie là où on ne l'attendait pas et, petit à petit, de comprendre comment le partage d'un angle en ses sous-multiples se traduit algébriquement dans les équations vérifiées par leur cosinus ; et c'est l'élimination de l'inconnue (dont il ne sait pas qu'il s'agit d'une exponentielle) entre ces équations qui lui fournira "la" relation entre $\cos A$ et les $\cos \frac{A}{n}$. Cependant, comme on l'a vu, il conservera l'expression de son résultat en termes d'équations et d'algorithme de calcul, car il n'a justement pas écrit l'objet qui lui permettrait de l'exprimer en termes d'égalité de nombres.

Euler, on l'a déjà vu pour le logarithme, n'hésitera pas à utiliser des variables contenant $\sqrt{-1}$ dans les fonctions ; ainsi le fera-t-il pour l'exponentielle : dans e^z (d'ailleurs volontairement confondue avec le polynôme $(1+\frac{z}{n})^n$ pour n infiniment grand, mais ceci est une autre histoire ...) il écrit $z = \nu\sqrt{-1}$. Deux grandes avancées sont

ici simultanément en cours :

- en prenant comme argument d'une fonction ce qui n'avait qu'un statut opératoire dans le déroulement de calculs additifs et multiplicatifs, on en fait quelque chose de transportable et, donc, on lui donne le statut d'une "valeur".
- mais en se posant le problème des valeurs éventuelles du logarithme ou de l'exponentielle pour des valeurs particulières de leur variable, on progresse aussi dans l'idée de *fonction* : on s'oblige à expliciter un moyen de mettre en correspondance une valeur d'entrée et une valeur de sortie.

En 1750, se trouve donc accomplie la double rencontre des complexes avec les logarithmes et des complexes avec les angles. Ce faisant, et dans la plus grande discrétion, un autre contact s'est noué : celui des angles et des logarithmes, c'est-à-dire celui de la trigonométrie et de "l'hyperbolie". Déjà, depuis quelques dizaines d'années, les développements en série avaient laissé supposer un lien de parenté dont l'origine restait cachée. Plus tard, la grande révolution projective fera l'unité au sein de la géométrie ; l'algèbre prendra alors le relais (Laguerre montre en 1853 que l'angle euclidien de deux droites n'est, à un facteur près que le logarithme de leur rapport anharmonique), et Klein forcera la vision en termes de "transformations" (1872, le Programme d'Erlangen) au détriment de la vision en termes de "figures" : on aura enfin compris que "parler d'un angle", c'est "parler d'une rotation" (et pas d'un "coin" !).

Ce chemin, il faut le dire, c'est Euler qui l'a foulé le premier ; c'est lui qui, pour la première fois a placé les angles là où il le fallait : *en exposant* ; un angle est alors un opérateur et les ajouter c'est multiplier quelque chose, c'est composer des transformations (et le fait que le groupe engendré par ces transformations soit cyclique, expliquera la périodicité de l'exponentielle et donc la multiplicité du logarithme).

II-3 Commentaire didactique

Cette partie de l'histoire des nombres complexes mérite elle aussi un arrêt didactique. Nous nous attacherons ici plus particulièrement à deux aspects :

- l'évolution du statut des quantités imaginaires,
- le principe de permanence, à la fois dans sa fonction productrice et dans son statut d'obstacle.

a - L'évolution du statut des quantités imaginaires

Au cours de cette période les nombres complexes que nous avons vu apparaître comme signes liés à l'extension audacieuse d'une technique de résolution d'équations commencent à se constituer comme objets de l'univers mathématique. Certes, leur intérêt reste avant tout lié à leur aspect outil qui s'étend d'ailleurs au cours de cette période au delà du seul registre de la résolution d'équations, mais on ne peut leur dénier cependant le statut d'objet mathématique en formation. Par exemple :

- ils sont désignés par une appellation spécifique, celle de quantités imaginaires, un article de l'Encyclopédie Méthodique leur est consacré, ils sont associés à l'écriture $a+b\sqrt{-1}$,
- on énonce certaines de leurs propriétés et des résultats mathématiques qui les mettent en jeu de façon incontournable,
- on se pose le problème de l'extension à ces quantités imaginaires de certaines fonctions usuelles.

En revanche, on ne peut nier que leur statut mathématique est loin d'être clair. Ils sont des nombres dans la mesure où ils sont accessibles au calcul, mais des nombres qui ne peuvent être associés à des quantités, qui sont encore moins concevables que les négatifs, qui

ne peuvent exister que dans l'imagination. Certains comme Wallis dans son Algebra ont bien essayé de leur donner une certaine réalité via la géométrie mais la représentation proposée n'est pas fonctionnelle car elle ne permet pas de rendre compte de leur structure algébrique (cf. partie III). Ces nombres imaginaires sont définis comme racines paires de quantités négatives, comme expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, on admet leur stabilité par toutes les opérations usuelles finies ou infinies et ils sont gérés par un contrôle essentiellement pragmatique via le principe de permanence. Il s'agit donc d'objets symboliques qu'en termes didactiques, on pourrait qualifier d'objets symboliques préconstruits. Ceci n'empêche pas leur utilisation, le développement de la théorie qui les concerne et sa productivité. Signalons de toutes façons que, lorsque construction il y aura, dans les travaux de Cauchy et Hamilton (cf. partie IV), il ne s'agira encore que d'une construction relative, chacune des constructions supposant connus les réels qui eux ne seront vraiment construits que plus tard, au début des années 1870. En fait, bon nombre d'objets mathématiques dans l'enseignement, qu'ils soient algébriques ou géométriques fonctionnent comme des préconstruits ; tout au long de leur scolarité secondaire par exemple, les élèves utilisent les nombres réels sans savoir très précisément ce que recouvre cette dénomination. Et, pas plus que l'histoire, l'enseignement ne peut se permettre de subordonner l'introduction d'objets mathématiques à la possibilité de les définir complètement.

b = Le principe de permanence comme principe producteur et comme obstacle

Comme nous l'avons souligné, les quantités imaginaires sont gérées par le principe de permanence. La controverse des logarithmes des quantités négatives et imaginaires nous montre comment ce principe producteur va, à un moment donné, s'ériger en obstacle épistémologique

au sens défini pour cette notion par G.Bachelard. Certaines caractéristiques du phénomène méritent nous semble-t-il d'être soulignées :

1) Cet obstacle n'est pas ici constitué par une connaissance locale mais par un principe de connaissance relativement universel qui, implicitement ou explicitement, guide l'activité du mathématicien et est intimement lié à sa conception du "Calcul". Il n'est pas spécifique du champ des complexes : on le voit fonctionner de manière analogue dans divers domaines, avec des objets susceptibles de se prêter justement au calcul, par exemple les infiniment petits des débuts de l'analyse, les développements en série qui constituent l'outil de travail privilégié dans le domaine fonctionnel au XVIIIème siècle et sont traités comme des polynômes continués. Soulignons que, dans chacun des cas cités, il s'agit d'objets préconstruits qui se sont constitués à partir de techniques et se sont progressivement institutionnalisés pour des raisons d'efficacité mathématique.

2) Le principe de permanence, avant d'agir comme obstacle, fait preuve d'une productivité indéniable. Il permet d'avancer à un moment où une conceptualisation plus poussée, une construction mathématique solide, sont encore hors de portée. Cette productivité alliée à la généralité du principe contribue sans aucun doute à sa résistance comme obstacle épistémologique.

3) Le traitement de l'obstacle va se situer au niveau local : il n'aboutit ni au rejet du principe de permanence, ni à une remise en cause des quantités imaginaires. Reprenons ce qu'écrit Euler à ce propos :

Cependant, je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, et que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine que d'une seule idée peu juste ; de sorte que, dès qu'on rectifiera cette idée

toutes ces difficultés et contradictions, quelques fortes qu'elles aient pu paraître, s'évanouiront, et alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections qui ont paru irrésolubles auparavant."

"Si ces mystères n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée qui n'était pas entièrement exacte, ...

L'idée est en fait la suivante :

On suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en aperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme.

Et Euler s'attache ensuite à montrer que tout nombre, en fait réel ou imaginaire, a une infinité de logarithmes, mais que si l'on se limite aux réels positifs ce fait peut rester caché, puisque tout nombre réel a exactement un et un seul logarithme réel.

Il ne rejette donc pas le principe de permanence mais au contraire le restaure à un autre niveau.

A un premier niveau, le didacticien des mathématiques, confronté à cet épisode, se trouvera une fois de plus rassuré par la lecture qui en est faite ici. En effet, la didactique des mathématiques a incorporé depuis longtemps la notion d'obstacle épistémologique à ses cadres théoriques, la conférence donnée par G.Brousseau à la rencontre CIEAEM de Louvain la Neuve en 1976 marquant l'entrée officielle de cette notion dans le champ didactique.

Et l'on retrouve, dans la description faite, les conditions imposées aux candidats obstacles en didactique : pouvoir s'exprimer en termes de connaissance, en tant que connaissance avoir un champ de validité non restreint, produire des erreurs hors de ce champ de validité, manifester une résistance très forte. Enfin, certains des obstacles identifiés dans les recherches didactiques correspondent justement à l'utilisation abusive du principe de permanence.

En revanche, l'analyse historique qui précède conforte moins les conceptions de l'apprentissage qui ont souvent été associées un peu brutalement à la théorie des obstacles épistémologiques en didactique : apprentissage par rejet successif de conceptions erronées jusqu'à arriver à une conception idéale, définitive, enfin débarrassée de toutes les connaissances erronées qui nécessairement jalonnaient l'apprentissage visé, le rôle de l'enseignant étant de provoquer par des situations adaptées le franchissement successif des obstacles identifiés.

En effet, le principe de généralisation abusive ne peut être réduit brutalement à une forme préscientifique de fonctionnement. Il correspond à un fonctionnement naturel et producteur du mathématicien, dans certaines circonstances, nous l'avons vu ici, en particulier lorsque le niveau de conceptualisation des objets manipulés rend difficiles d'autres fonctionnements. Or, nous l'avons souligné, cette situation se rencontre fréquemment dans l'enseignement. A quel niveau doit donc se situer l'intervention didactique et que doit-elle viser ? Le principe lui-même, sûrement pas, pour des raisons de cohérence épistémologique. Ses sous-produits locaux, en les considérant comme autant d'obstacles isolés à vaincre et en oubliant ce qui les unit ? Cela semble a priori peu satisfaisant. Identifier le principe, le respecter tout en incitant à la vigilance, privilégier le contrôle ? C'est accepter l'idée qu'un tel obstacle ne peut être complètement franchi : il pourra toujours resurgir dans certains registres de fonctionnement et, ce qui caractérise l'expert, ce sont de meilleures capacités de contrôle et la possibilité de passage souple de registres de fonctionnement où l'obstacle est mal contrôlé à d'autres registres plus élaborés. Mais c'est aussi faire l'hypothèse qu'une telle action peut être intégrée à l'enseignement de façon efficace, ce qui n'a rien d'évident a priori.

La recherche didactique, à son stade de développement actuel, ne

fournit pas de réponse complètement satisfaisante à ces questions.

Soulignons enfin que le système didactique a sans doute d'autant plus de mal à gérer les problèmes posés par l'utilisation abusive du principe de permanence que, lui-même, exploite abusivement ce même principe pour forcer la continuité de l'enseignement : ainsi, jusqu'à ce que l'attention soit attirée sur les obstacles liés à l'extension du champ des nombres aux décimaux, a-t-on généralement présenté les décimaux comme des entiers avec un simple changement d'unité, en insistant sur les continuités algorithmiques et en cachant les ruptures conceptuelles.

III - LES REPRESENTATIONS GEOMETRIQUES DES QUANTITES IMAGINAIRES

A la fin du 18ème siècle, le statut des quantités imaginaires est celui que nous avons décrit dans le paragraphe précédent. Elles n'ont pas encore trouvé de sens.

Ainsi, De la Chapelle écrit, dans son "Traité des sections coniques" publié en 1765 :

Remarquez bien qu'il y a une fort grande différence entre une grandeur imaginaire & une grandeur égale à rien ou à zéro ; parce qu'une grandeur égale à rien n'est pas absurde ; il est possible qu'une quantité soit détruite par une autre, au lieu qu'une quantité imaginaire est une quantité absurde, ou qui emporte contradiction. Vous ne pourrez pas dire qu'une quantité imaginaire puisse être considérée comme zéro, c'est quelque chose de pis.

Et Euler, dans ses "Eléments d'algèbre" parus en 1768 à Saint Petersbourg écrit :

Or, puisque tous les nombres qu'il est possible d'imaginer, sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou font 0 même, il est clair qu'on ne peut pas compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, & il faut donc dire que c'est une quantité impossible.

Le tournant du 19ème siècle va constituer un moment clef de l'histoire puisque, avec les travaux indépendants de Wessel (1797), l'Abbé Buée (1805), Argand (1806), puis de Mourey (1828), Warren (1828) et enfin Gauss (1831), ces quantités imaginaires vont enfin prendre un sens et trouver ainsi une autre forme de légitimation que la simple utilité mathématique.

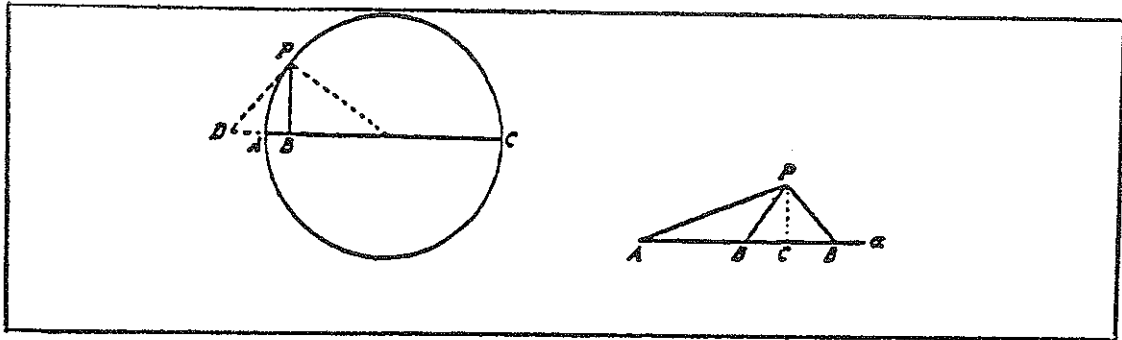
Cette prise de sens va s'effectuer, comme on le sait, dans le cadre géométrique et nous allons en décrire les caractéristiques essentielles.

III.1 - La représentation géométrique

Notons tout d'abord qu'il ne s'agit pas là du premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires. J.Wallis, déjà cité, fut un précurseur dans ce domaine puisque, dans son "Algebra", parue en 1685, il propose d'interpréter les quantités imaginaires en généralisant à l'espace le modèle additif des pertes et gains utilisé pour l'interprétation des quantités négatives. Raisonnant sur des surfaces gagnées et perdues sur la mer, il écrit, en effet :

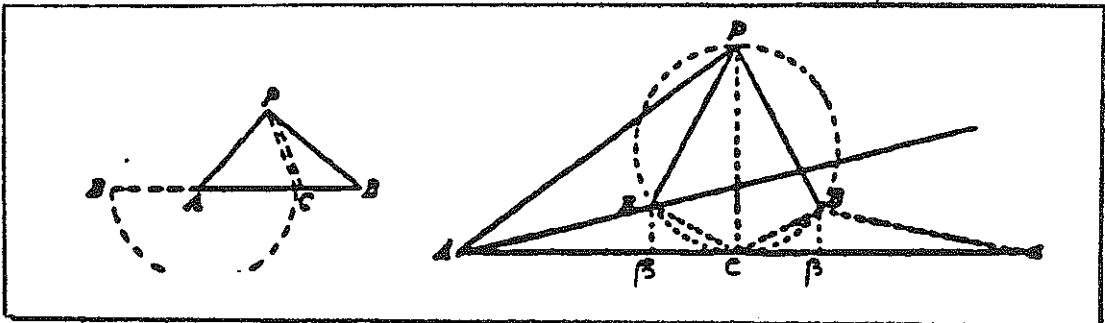
"Et maintenant, si l'on suppose que cet espace est -1600 perches, c'est à dire 1600 perches perdues, et que la forme de son étendue est carrée, n'y aura-t-il pas de côté pour ce carré ? Et, s'il y en a, quel sera-t-il ? Certainement, ce ne sera ni +40 ni -40, car le carré de l'un ou l'autre produira +1600 et non -1600. Ce sera plutôt $\sqrt{-1600}$ (la racine fictive [=supposititia] d'un carré négatif), ou ce qui revient au même $10\sqrt{-16}$, ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$."

Il propose également une construction géométrique des racines imaginaires d'une équation du second degré, se plaçant dans la situation où l'on cherche à déterminer la base AB d'un triangle APB, connaissant les longueurs de AP et PB et celle de la hauteur PC. Si, par exemple, on a : PA=20, PB=15 et PC=12, la grandeur AB est obtenue comme solution d'une équation du second degré et l'on obtient pour B deux positions B1 et B2 correspondant aux deux racines réelles de cette équation.



$$BC^2 = BP^2 - PC^2 \text{ et } (AB + BC)^2 = (AB - BC)^2 = AP^2 - PC^2$$

Si l'on inverse les valeurs de PB et PC, l'équation n'a plus de solutions réelles, ce que Wallis interprète en disant que le point B ne peut plus appartenir à la droite (AC). Si l'on accepte de sortir de cette droite, on peut encore trouver selon lui deux positions pour B, conformément au tracé suivant (dans lequel l'angle droit se situe en B et non en C).



Il généralise ensuite la construction à une équation du second degré quelconque, avec des notations analogues et conclut :

"Ces valeurs sont appelées réelles si l'angle droit est en C et imaginaires s'il est en B [...] La différence entre cette impossibilité et celle qui provient d'une équation du premier degré est la suivante : quand, dans une équation du premier degré on obtient une valeur négative, il suffit de dire que le point B demandé ne peut être sur la ligne AC donnée au delà de A, mais qu'il est en deçà à la même distance. Mais quand, dans une équation quadratique nous obtenons (non une valeur négative ce qui ramènerait au cas des équations du premier degré) une valeur imaginaire on peut dire que le point B n'est pas sur la droite AC comme prévu mais en dehors de cette droite (dans le même plan)."

Mais cette représentation ne porte en elle aucune possibilité de rendre compte des opérations sur les quantités imaginaires à l'inverse des représentations qui seront proposées au début du XIX^{ème} siècle.

Ces légitimations sont d'abord le fait de mathématiciens de second plan : Wessel est par exemple un arpenteur danois et son mémoire, publié à l'Académie du Danemark, restera quasiment inconnu pendant près d'un siècle, Argand est calculateur et son mémoire de 1806, publié à compte d'auteur, ne sera vraiment connu que suite à la réponse d'Argand à un article de Français paru dans les Annales de Gergonne en 1813, qui y fait allusion.

Elles n'emportent pas facilement l'adhésion. Comme le souligne S.Bachelard, le statut des auteurs n'explique pas à lui seul cette reconnaissance difficile, le recours effectué à la géométrie va à contre-courant du courant algébriste formel qui se développe à cette époque. Il y a revendication de légitimité pour une algèbre purement symbolique, se constituant comme extension de l'arithmétique via les diverses extensions de la notion de nombre, une science des symboles et de leur combinaison ne devant tirer sa validation que de ses principes propres et de ses règles propres. De ce point de vue, la question de l'interprétation des symboles n'est pas fondamentale et peut même constituer un obstacle à la pureté algébrique.

Cauchy adopte, à propos des quantités imaginaires, dans son cours à l'Ecole Polytechnique en 1821, un point de vue tout à fait proche de celui-là, quand il écrit :

"En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. [...] En général, on appelle quantité imaginaire

toute expression symbolique de la forme : $a + b\sqrt{-1}$, a , b désignant deux quantités réelles ; et l'on dit que deux expressions imaginaires : $a + b\sqrt{-1}$ et $a' + b'\sqrt{-1}$ sont égales entre elles, lorsqu'il y a égalité de part et d'autre, 1° entre les parties réelles a et a' , 2° entre les coefficients de $\sqrt{-1}$, savoir, b et b' . [...] Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles."

Ce n'est qu'en 1847 qu'il proclamera son adhésion à la théorie géométrique, concevant les quantités algébriques comme cas particulier de quantités géométriques, comme les quantités arithmétiques sont des cas particuliers de quantités algébriques, toutes ces quantités étant accessibles au calcul et la géométrie ayant l'avantage d'être, en l'absence de topologie constituée, le support et le véhicule des propriétés topologiques si centrales dans la théorie des fonctions de variables complexes.

En fait, avant même ce revirement, c'est l'autorité de Gauss qui permettra au point de vue géométrique de s'imposer.

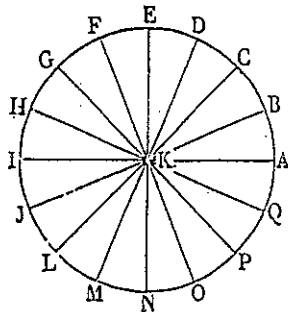
Revenons aux premières représentations. Elles sont en fait très proches, au moins techniquement, et nous ne considérerons ici que celle d'Argand.

figure 5

4. Or, si l'on prend un point fixe K (fig. 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A , ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue,

...

Fig. 1.



... En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1 , ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

...

6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$, ..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des lignes *absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction (*).

La source de son inspiration semble avoir été la recherche d'une interprétation géométrique à la proportion $1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : 1$.

Par analogie avec les nombres négatifs, Argand suggère que l'idée de ce rapport se compose :

1° de l'idée du rapport numérique dépendant des grandeurs respectives, considérées absolument ; 2° de l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent, rapport qui, dans ce cas-ci, ne peut être que l'identité ou l'opposition.

Ainsi la relation de moyenne proportionnelle : $+1 : -1 :: -1 : +1$ signifie d'une part que, au niveau des quantités absolues :

$1 : 1 :: 1 : 1$, d'autre part qu'au niveau des directions, celle de $+1$ est à celle de -1 ce que celle de -1 est à celle de $+1$.

Et alors, comme l'écrit Argand :

"Mais, puisque nous avons trouvé plus haut que les quantités négatives, qui paraissaient d'abord ne pouvoir exister que dans l'imagination, acquièrent une existence réelle, lorsque nous combinons l'idée de grandeur absolue avec celle de direction, l'analogie doit nous porter à chercher si l'on ne pourrait pas obtenir un résultat analogue, relativement à la quantité proposée. (il s'agit de la moyenne imaginaire $+1 : x :: x : -1$)

Or, s'il existe une direction d , telle que la direction positive soit à d ce que celle-ci est à la direction négative, en désignant par $1d$ l'unité prise dans la direction d , la proportion

(B) $+1 : 1d :: 1d : -1$

présentera : 1° une proportion purement mécanique $1 : 1 :: 1 : 1$; 2° une proportion ou similitude de rapports de direction, analogue à celle de la proportion (A) ; et, puisqu'on admet la vérité de cette dernière, on ne saurait se refuser à reconnaître également la légitimité de la proportion (B)."

Ensuite il nous proposera l'interprétation de l'addition en termes de mise bout à bout et de la multiplication en termes de rotation d'angle défini par l'intermédiaire de la relation de proportionnalité.

Mais comme on le voit, sur cet extrait (figure 5) de [Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques], il introduit préalablement un outil de représentation, les vecteurs (qu'il appelle *lignes dirigées*) et qui offre une clarté dans la définition que Chasles lui-même n'atteindra pas 40 ans plus tard.

III.2 - Commentaires épistémologiques

L'apport d'Argand peut évidemment s'énoncer en termes de "changement de cadre" mais il y a plus ici, puisqu'il y a *création de cadre* : le cadre vectoriel.

Avec ce cadre nouveau, Argand propose à la fois les germes d'une formalisation future et une nouvelle représentation mentale.

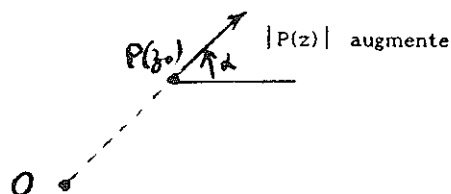
Sur ce plan de la représentation mentale il n'obtiendra pas immédiatement la notoriété méritée. Il faut dire que les mathématiciens de l'époque ne sont pas des partisans acharnés de la représentation. Ainsi Lagrange, dont la "Mécanique analytique" ne comporte aucune figure, écrit que "Les figures ne sont pas nécessaires à l'entendement que, d'ailleurs, elles contribuent souvent à troubler".

En fait, et on verra le même phénomène avec l'Algèbre Linéaire , les progrès immédiatement visibles en termes de résolution de problèmes sont toujours plus facilement acceptés et intégrés que ceux qui s'expriment d'abord en termes de représentations. Cela est à la fois assez naturel et fondé sur une prudence parfois justifiée. Dans ce cas cependant "on" aurait pu s'enthousiasmer plus vite. Par exemple, la simple lecture de la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, donnée par Argaud en 1813, montre la nature du confort introduit par cette nouvelle vision :

J'inviterai le lecteur à tracer une figure, pour suivre cette démonstration. En y appliquant les principes fondamentaux très simples rappelés ci-dessus, on verra que, à l'exception du développement (A), qui suppose un calcul algébrique, tous les autres raisonnements se font, pour ainsi dire, à vue, sans avoir besoin d'aucun effort d'attention.

Figure 6 : Le théorème fondamental de l'algèbre

$$P(z_0) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0.$$



Si $|P(z_0)|$ était minimum en z_0 , on choisirait h d'argument $\frac{\alpha}{r}$.

[si $P(z_0+h)$ s'écrit $P(z_0) + Ah^r + \dots + Zh^n$]

Alors $P(z_0-\varepsilon h)$ serait plus petit que $P(z_0)$ en module. [ε réel positif]. Donc P n'a pas de minimum en z_0 .

Il s'agit en fait du lemme essentiel de ce qui sera la démonstration

dite de Cauchy :

$\forall P \quad \forall z \quad \text{tq } P(z) \neq 0 \quad |P(z)| \text{ n'est pas minimum.}$

La compacité d'un disque de $\mathbb{C}$, suffisamment grand pour que son complémentaire dans $\mathbb{C}$ ne contienne pas de racines de P permet ensuite de conclure que $|P(z)|$ a un minimum (atteint) qui ne peut être que nul.

Pour un lecteur de la fin du XXème siècle, l'avantage d'une vision géométrique est absolument manifeste, tant sur le plan de la compréhension que sur celui de la mémorisation qui sous-tend, en fait, les étapes clés de la démonstration.

Mais il y a plus intéressant encore comme le souligne Argand lui-même dans sa "réponse à MM François et Servais", parue en 1813 dans les Annales de Gergonne :

Le second point de discussion est plus important. Sans doute, il n'est aucune vérité accessible par l'emploi de la notation des lignes dirigées, à laquelle on ne puisse aussi parvenir par la marche ordinaire; mais y parviendra-t-on plus ou moins facilement par une méthode que par l'autre? La question mérite, ce me semble, d'être examinée. C'est à l'influence des méthodes et des notations sur la marche progressive de la science que les modernes doivent leur grande supériorité sur les anciens en fait de connaissances mathématiques. Ainsi, quand il se présente une idée nouvelle en ce genre, on peut, du moins, examiner s'il n'y a point de parti à en tirer.

On voit ici explicité l'un des arguments répétitivement opposés à toute tentative d'introduction de certains concepts mathématiques : ceux qui n'apparaissent d'abord ni comme des objets, ni comme des outils ou des méthodes, mais comme des représentations.

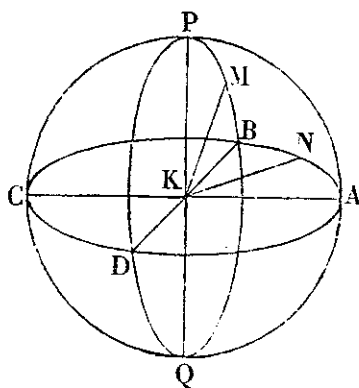
Cet argument évidemment fort dans un premier temps se résume ainsi : *Le concept nouveau n'apporte rien dans la mesure où il ne permet pas d'en faire plus qu'avant, même s'il permet de le faire autrement, plus*

simplement ou plus rapidement par exemple.

Un tel argument, ici opposé à Argand qui tente de le réfuter, aurait interdit à la géométrie analytique de se développer puisque ne démontrant rien de plus que la géométrie classique d'Euclide ; comment seraient alors apparus l'algèbre linéaire et bien d'autres chapitres des géométries modernes ?

Il est amusant de constater qu'aujourd'hui encore, cet argument est opposé strictement sous la même forme au développement de l'Analyse Non Standard ; il faut en conclure certainement, avec Bachelard encore, qu'il s'agit d'un "obstacle" récurrent au progrès de la pensée scientifique et qu'il a donc été par ailleurs une très solide base nécessaire à la dé-naïvation de cette pensée.

A la fin du même texte, Argand se lance dans un essai d'extension à l'espace, toujours en se laissant guider par l'analogie. Il s'agit donc de trouver, pour chaque ligne dirigée de l'espace (en fait, on se limite à une sphère de rayon unité) une expression algébrique comme cela a été effectué dans le plan :



Dans le plan KAB, en effet, si $KA=+1$ et $KB=\sqrt{-1}$, tout rayon KN est de la forme $p+q\sqrt{-1}$. Il faut donc trouver pour un rayon KM quelconque non situé dans ce plan une expression analogue mais non réductible à une

quantité imaginaire. Là encore, Argand fonctionne à l'analogie :

Nous avons pris, de part et d'autre du point A, sur la circonférence ABCD, deux directions opposées, affectées l'une aux angles positifs, l'autre aux angles négatifs. Or, si nous appliquons aux mêmes angles les mêmes considérations qu'aux lignes, nous serons conduit à prendre les angles imaginaires dans une direction perpendiculaire à celle qui appartient aux angles réels.

Supposons que le demi-cercle ABC tourne autour de AC, le point B décrivant le cercle BPDQ; puisqu'on a déjà

$$\text{angle } \overline{AKB} = +\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (+1),$$

$$\text{angle } \overline{AKD} = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (-1),$$

on pourra dire que

$$\text{angle } \overline{AKP} = \frac{1}{4} \sqrt{-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4};$$

d'où l'on conclura

$$\overline{KP} = i_{\frac{1}{4}} \cdot i_{\frac{1}{4}} = i_{\frac{1}{4}} \sqrt{-1} = i_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} = \left(i_{\frac{1}{4}}\right)^{\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}.$$

et obtient pour l'angle BKP l'expression $\frac{1}{4}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ qu'il affirme être complètement hétérogène aux quantités imaginaires. Cette affirmation, soulignons-le, est en contradiction flagrante avec les résultats établis par ailleurs de clôture de l'ensemble des quantités imaginaires par toutes les opérations usuelles dont l'opération puissance et plus précisément avec la valeur déjà trouvée par Euler pour l'expression : $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ à savoir : $e^{-\pi/2}$.

Ce malheureux exemple montre bien que, si on ne peut contester l'intérêt de la représentation géométrique des nombres complexes, on doit aussi voir l'aspect positif que présente la volonté de ne pas s'appuyer sur des figures (exprimé par exemple par Lagrange). Car ce refus, très solide et souvent invoqué, contient (évidemment) le germe d'une connaissance très forte, qui va se développer durant tout le

XIX^{ème} siècle. Il aboutit au concept de théorie formalisée et, donc, à la dissociation signification/formalisme.

Le phénomène n'est pas propre aux nombres complexes. Dans tous les cadres mathématiques, on voit des mathématiciens tenter des "mises en forme" symboliques détachées des significations véhiculées par les objets manipulés.

III.3 – Commentaire didactique

En ce qui concerne ce troisième épisode de l'histoire des quantités imaginaires, sur le plan didactique, nous nous centrerons sur l'analogie, un processus qui intervient de façon fondamentale dans les tentatives fructueuses et infructueuses de Wallis et Argand.

Chez Wallis, l'analogie reste une analogie de surface, elle n'atteint pas les structures et de ce fait présente un intérêt limité. En effet, il faut souligner que le modèle des pertes et gains que Wallis essaie d'adapter ici s'est imposé à propos des nombres négatifs non seulement parce qu'il permettait de donner un sens à des quantités négatives mais surtout parce qu'il permettait de rendre compte de la structure additive de $\mathbb{Z}$. Ici, ce qui est en jeu, ce n'est pas la structure additive des nombres imaginaires mais bien leur structure multiplicative et, à ce niveau, le modèle des pertes et gains n'est pas plus adapté qu'il ne l'est pour rendre compte de la structure multiplicative de $\mathbb{Z}$.

Il en est de même de la représentation géométrique proposée pour des solutions d'équations. C'est un objet local purement représentatif.

Avec le travail d'Argand, on voit apparaître une analogie qui paraît assez proche : on y trouve le même raccrochement à $\mathbb{Z}$ que chez Wallis, mais à travers une modélisation du positif et du négatif cette fois-ci adaptée à la structure multiplicative, ce qui change radicalement les

données du problème.

De plus, le travail d'Argand, par la comparaison qu'il permet du fonctionnement de deux analogies similaires met bien en évidence nous semble-t-il les caractères producteurs et les risques de l'analogie. Le passage au cadre géométrique permet une reformulation du problème des rapports de quantités associant implicitement la notion d'angle. Cette reformulation permet de faire entrer explicitement les angles dans le cas complexe.

L'analogie fonctionne sur des ressemblances formelles, des associations d'idées, mais elle est productive parce que ces ressemblances ne sont pas purement formelles. Argand se laisse porter par elle jusqu'au moment où un résultat tangible a été obtenu.

A priori, l'analogie proposée pour l'espace est de même nature et tout aussi raisonnable que celle qui a servi dans le plan et là encore, Argand se laisse porter par le jeu des associations formelles : si l'angle AKB est associé à $\frac{1}{4}*(+1)$, AKD à $\frac{1}{4}*(-1)$, il est naturel de choisir $\frac{1}{4}*(\sqrt{-1})$ pour représenter l'angle AKP. Dans le plan, le produit de deux directions se traduisant par la somme de leurs indices, la notation fonctionne formellement comme une exponentielle. Le dérapage se produit quand I_{ab} reformulé en I^{ab} est interprété comme $(I^a)^b$ puis $(I_a)^b$ pour $b=\sqrt{-1}$, alors qu'une interprétation similaire pouvait être lue de façon cohérente pour les a et b fractionnaires considérés auparavant : $(I_{1/4})^{1/2} = I_{1/8}$ donc correspond à une direction faisant un angle de $\pi/4$ avec l'axe Ox, mais $(I_{1/4})^{1/2} = (i)^{1/2}$, donc correspond à deux nombres complexes, l'un étant justement d'argument $\pi/4$.

L'analogie ici aboutit à un résultat incompatible avec des résultats connus et, cependant, on voit Argand camper sur ses positions et refuser le contrôle pragmatique ainsi possible, en récusant les démonstrations avancées :

Il existe, à la vérité, des démonstrations tendant à établir que la fonction $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut toujours être réduite à la forme $p + q\sqrt{-1}$; mais qu'il nous soit permis de remarquer sur ces démonstrations que celles qui emploient le développement en séries ne sauraient être concluantes qu'autant qu'on prouverait que p et q ont des valeurs finies. Il arrive souvent, en effet, dans l'Analyse, qu'une série qui, par sa nature, ne peut exprimer que des quantités réelles, prend une valeur, ou plutôt une forme infinie, lorsqu'elle doit représenter une quantité imaginaire; et l'on peut présumer pareillement qu'une série composée de termes de la forme $p + q\sqrt{-1}$ ou a_b peut devenir infinie, si elle doit exprimer une quantité de l'ordre a_{b_c} .

Quant aux démonstrations qui emploient les logarithmes, elles laissent aussi, ce nous semble, quelques nuages dans l'esprit, en ce qu'on n'a pas encore des notions bien précises sur les logarithmes imaginaires. Il faudrait d'ailleurs s'assurer si un même logarithme ne pourrait pas appartenir à la fois à plusieurs quantités d'ordres différents a , a_b , a_{b_c} . En outre, la multiplicité des valeurs dues aux radicaux de l'expression proposée est une autre source d'incertitude, de telle sorte qu'on pourrait parvenir, de la manière la plus rigoureuse, à réduire $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ à la forme $p + q\sqrt{-1}$, sans qu'il s'ensuivît nécessairement que cette fonction n'a pas encore d'autres valeurs de l'ordre a_{b_c} , non réductibles à cette forme (*).

Pourtant, c'est justement de ce type de contrôle que ressort l'analogie et non de contrôles logiques internes.

Une telle analyse renvoie le didacticien à la question suivante : ce processus d'analogie qui semble ici fondamental à la créativité mathématique est-il pris en compte en didactique et dans l'enseignement des mathématiques ? Si oui comment et comment son contrôle est-il géré ?

Les travaux sur l'heuristique mathématique accordent généralement une place importante à l'analogie. Dans les travaux de G.Polya, la recherche d'analogies apparaît comme un des moteurs essentiels de

l'heuristique. C'est le cas aussi dans les travaux d'A.Schoenfeld, même si ce dernier met en évidence l'impuissance des seules heuristiques générales à assurer un fonctionnement de l'analogie, efficace parce que dépassant la seule ressemblance superficielle. L'analogie est aussi à la source de théories d'apprentissage, par exemple celle développée par Dienes qui consiste à faire rencontrer à l'élève un ensemble de situations isomorphes et à faire l'hypothèse que l'élève va reconnaître la similarité des situations et identifier sa source : la structure mathématique commune dont l'enseignement est visé.

Mais il semble bien que, dans la réalité des classes, l'analogie soit loin de fonctionner conformément à ces analyses et théories. Comme le souligne G.Brousseau, c'est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est sous la responsabilité de l'élève, mais comme elle reste le plus souvent sous la responsabilité entière de l'enseignant, elle constitue plutôt un redoutable moyen de produire des effets Topaze et Jourdain.

Tout se passe comme si, tout en reconnaissant l'importance de l'analogie dans le fonctionnement cognitif d'un individu, le système didactique était impuissant à gérer convenablement et efficacement ce processus. Diverses raisons contribuent sans doute à expliquer ce phénomène et les suivantes nous semblent devoir être prises en considération :

- Le fonctionnement efficace de l'analogie nécessite une mise en relation de domaines, cadres, points de vue différents. L'enseignement usuel a plutôt tendance à trouver son économie dans le cloisonnement. Il s'agit de simplifier la tâche des élèves, d'éviter les mélanges, les confusions, la dispersion et de favoriser par un tel cloisonnement la réussite à court terme.

Les changements de registre et de cadre, lorsqu'ils interviennent sont le plus souvent préparés, suggérés voire complètement pris en charge

par l'enseignant.

Dans ces conditions, on voit mal comment l'enseignement usuel pourrait assurer la dévolution à l'élève du fonctionnement de l'analogie, et éviter son fonctionnement au contrat.

- Accepter de confier à l'élève la responsabilité du fonctionnement analogique et de s'appuyer sur un tel fonctionnement, c'est aussi accepter de prendre en charge le passé des élèves, un passé souvent informel et qui ne relève pas nécessairement de la mémoire collective de la classe. C'est accepter de voir des passés divers surgir dans la vie de la classe et l'inhomogénéité augmenter. C'est accroître l'incertitude de l'enseignant. Ceci aussi n'est pas conforme à l'économie usuelle de l'enseignement. On comprend bien que dans ces conditions, il cherche à garder le contrôle de l'analogie et choisisse le passé qu'il veut faire revivre.

- L'analogie exige un contrôle souple et externe. D'une part une "bonne analogie" est une analogie qui réussit là où d'autres qui semblaient aussi naturelles et prometteuses échouent, d'autre part, l'analogie correspond à un moment du travail mathématique où l'on se laisse porter en acceptant le risque de déraper, un moment du travail mathématique qui échappe tout particulièrement au contrôle logique interne, pour se soumettre à un contrôle pragmatique, aval. Ceci est aussi une caractéristique qui fait de l'analogie un processus que l'enseignement usuel aura du mal à intégrer. Comme l'a bien montré C.Margolinas dans sa thèse, le développement de capacités souples de contrôle pragmatique au fur et à mesure des apprentissages est une des composantes de l'activité mathématique qui n'est pas réellement prise en charge dans l'enseignement et s'oppose en un certain sens à la représentation des mathématiques comme science de la rigueur parfaite traditionnellement véhiculée par le système d'enseignement.

- En revanche, le système ne saurait bannir purement et simplement l'analogie car elle est utilisée par lui comme un moyen privilégié d'assurer au moins superficiellement la continuité dans la progression des savoirs à laquelle il est si attaché, donc à soutenir une vision où "l'art de l'enseignant" consiste en particulier à trouver les bonnes analogies.

Est-il possible de faire vivre dans le système didactique le processus analogique de façon plus conforme au rôle qu'il joue dans l'activité scientifique, et si oui à quelles conditions? Il y a là encore un champ de questions auxquelles la didactique à l'heure actuelle n'apporte pas de réponse satisfaisante.

IV - LES CONSTRUCTIONS ALGEBRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES

Au début du XIXème siècle, les nombres complexes prennent donc un "sens" effectif qui permet de les considérer plus facilement comme des "objets". En fait, la prise de sens permise par l'analogie géométrique va très vite s'élargir au cadre algébrique. il va donc être possible de donner un sens aux quantités imaginaires à l'intérieur même de leur domaine originel : l'algèbre.

Nous présenterons ici les constructions de Cauchy et de Hamilton, avant de présenter l'extension qu'en fera Hamilton en construisant le corps des quaternions.

IV-A1- La construction par les équivalences algébriques de Cauchy

Cette construction est publiée en 1848 dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences et Cauchy la motive en ces termes :

"J'avais considéré les équations imaginaires comme des formules symboliques, c'est à dire comme des formules qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces formules, ou les symboles qu'elles renferment.

Cela posé, il n'y avait plus nulle nécessité de se mettre l'esprit à la torture pour chercher à découvrir ce que pouvait représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, auquel les géomètres allemands substituent la lettre i. Ce signe ou cette lettre était, si je puis ainsi m'exprimer, un outil, un instrument de calcul dont l'introduction dans les formules permettait d'arriver plus rapidement à la solution très réelle de questions que l'on avait posées. Mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les

expressions imaginaires et la lettre i elle-même, à n'être plus que des quantités réelles."

Considérant ensuite un polynôme $\omega(x)$, il rappelle que deux polynômes $j(x)$ et $c(x)$ admettant le même reste dans la division par $\omega(x)$ sont dits équivalents suivant le module $\omega(x)$. Il propose de traduire cette équivalence par l'égalité $Rj(x) = Rc(x)$ (*) puis, pour représenter le reste, de substituer une lettre symbolique i à la variable x :

"La seule présence de la lettre i substituée à x dans la fonction entière $\varphi(x)$, indiquera que, avant de poser dans cette fonction $x=i$, on doit la réduire au reste de sa division par $\omega(x)$ et donc la formule () pourra s'écrire comme il suit : $\varphi(i) = \chi(i)$."*

Le symbole i est alors désigné comme racine symbolique de l'équation caractéristique $\omega(x) = 0$ et, de même, de l'équation $f(x)=0$ si f est multiple de ω .

Si ω est de degré n , le reste de la division de f par ω est de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$. Ce reste est nul si et seulement si tous les a_i sont nuls, ce qui revient à dire que l'équation symbolique $a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_{n-1} i^{n-1} = 0$ équivaut en réalité à : $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Comme l'écrit Cauchy :

"Une théorie nouvelle et rigoureuse des formules et des équations se déduit immédiatement des principes généraux que nous venons d'exposer."

Il suffit de considérer le polynôme ω défini par $\omega(x) = x^2 + 1$.

La formule symbolique satisfaite par i devient : $i^2 + 1 = 0$ et, deux polynômes j et c étant donnés, de restes respectifs $a+bx$ et $c+dx$ dans la division par $\omega(x)$, la formule symbolique $j(i)=c(i)$ peut encore s'écrire $a+bi=c+di$ et signifie que : $a=b$ et $c=d$.

Du calcul algébrique sur les restes, il déduit ensuite les formules

d'addition et de produit d'expressions symboliques de la forme $a+bi$, formules qui correspondent à la somme et au produit des nombres complexes.

IV-B1 - La construction de Hamilton

La construction que Hamilton développe de son côté, dans un ouvrage publié en 1837 : "Theory of conjugate functions or algebraic couples with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time", s'inscrit dans une préoccupation plus globale de recherche de fondements à l'algèbre. Il écrit dans la préface de "Lectures on Quaternions" :

"The difficulties which so many have felt in the doctrine of Negative and Imaginary Quantities in Algebra forced themselves long ago on my attention ; and although I early formed some acquaintance with various views or suggestions that had been proposed by eminent writers, for the purpose of removing or eluding these difficulties [...], yet the whole subject still appeared to me to deserve additional inquiry, and to be susceptible of a more complete elucidation. And while agreeing with those who had contended that negatives and imaginaries were not properly quantities at all, I still felt dissatisfied with any view which should not give to them, from the outset, a clear interpretation and meaning ; and wished that this should be done, for the square roots of negative without introducing considerations so expressly geometrical, as those which involve the conception of an angle."

Son point de départ est que, comme la géométrie s'est fondée comme Science de l'Espace, l'algèbre parallèlement peut trouver ses fondations comme Science du Temps (on trouve ici une perspective Kantienne, le temps fonctionnant comme idée intuitive primaire des nombres réels) :

"It early appeared to me that these ends might be attained by our consenting to regard ALGEBRA as being not mere Art, nor Language, not primarily a Science of Quantity, but rather as the Science of Order in Progression."

Cet ordre en progression est mis en correspondance avec celui du temps, mais un temps épuré comme l'est l'espace de la géométrie :

"So that the "time" here considered might be said to be abstract, ideal, or pure, like that "space" which is the object of geometry."

Dans la théorie développée, les données premières sont les dates liées par des relations d'ordre et d'égalité. Il définit ensuite des différences entre états, traduisant leur degré de diversité et elles aussi susceptibles d'égalité et de comparaisons. La notion de "saut dans le temps", acte mental, introduit celle de transition d'état. Ainsi :

"The usual identity $(B-A)+A=B$ came thus to be interpreted as signifying primarily (in the Science of Pure Time) a certain conceived connexion between the operations, of determining the difference between two moments as a relation, and of applying that difference as a step."

Les sauts dans le temps sont désignés par des minuscules et -a, abréviation de 0-a, désigne le saut opposé à a. Comme le souligne Hamilton :

"The latter notation presenting here no difficulty of interpretation, nor requiring any attempt to conceive the subtraction of a quantity from nothing, but merely the decomposition of a null step into two opposite steps."

Le rapport algébrique de deux tels sauts a et b est ensuite défini, à partir du rapport de leurs intensités respectives et du rapport de leurs directions, à la fois comme relation entre a et b et opérateur permettant de passer de b à a. C'est à ces rapports, notés par des

minuscules italiques, que correspondent les nombres algébriques et, si $b/a = a$, on a : $b=a.a$. Les opérations sur les nombres algébriques sont ensuite définies conformément à cette interprétation :

"Operations on algebraic numbers were thus made to depend (in thought) on operations of the same names on steps ; which were again conceived to involve, in their ultimate analysis, a reference to comparison of moments. These conceptions were found to conduct to results agreeing with those usually received in algebra."

Hamilton conclut ainsi sa description :

"In this view, there was not difficulty whatever, in interpreting the product of two negative numbers, as being equal to a positive number : the result expressing simply, in this view of it, that two successive reversals restore the direction of a step. And other difficulties respecting the rule of the signs appeared in like manner to fall away, more perfectly than had seemed to me to take place in any view of algebra, which made the thought of quantity (or of magnitude) the primary or fundamental conception."

L'extension aux couples de moments et de sauts dans le temps le conduit ensuite aux nombres complexes. Le seul problème qui se pose est celui du produit de deux tels couples. Hamilton ramène ce problème à celui de la multiplication externe par un seul nombre de la façon suivante :

"I was led [...] to regard every single number (a) as being a degenerate form of such a couple , namely of (a,0)."

Compte-tenu de la distributivité exigée pour le produit par rapport à l'addition et de la nécessité pour cette opération de prolonger celle déjà connue pour les nombres, il reste alors à définir le produit : $(0,a).(0,b)$.

"The spirit of the whole theory of couples led me to conceive that,

for such a product, we ought to have an expression of the form,

$$(0, a_1)(0, a_2) = (\gamma_1 a_1 a_2, \gamma_2 a_1 a_2) ;$$

The coefficients γ_1 et γ_2 being some two constants numbers, independant of the number a_1 et of the step a_2 ; which two coefficients I proposed to call the constants of multiplication. These constants might be variously assumed ; but reasons were given for adopting the following selection of values, as the basis of all subsequent operations :

$$\gamma_1 = -1 ; \gamma_2 = 0."$$

On obtient ainsi une structure dans laquelle $(0,1)^2 = (-1,0) = -1$.

Et Hamilton conclut :

"A new and (as I thought) clear interpretation was thus assigned for that well-known expression in algebra, the square root of negative unity : for it was found that we might consistently write, on the foregoing plan :

$$(0,1) = (-1,0)^{1/2} = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1} ;$$

whithout anything obscure, impossible, or imaginary, being in any way involved in the conception."

Hamilton va ensuite essayer d'étendre aux triplets cette structure algébrique.

Cette fois-ci la recherche sera laborieuse, elle durera treize ans selon l'auteur qui la décrit de façon détaillée dans cette préface, et elle conduira à la construction du corps des quaternions.

Sans rentrer dans tous les détails de cette recherche, présentons-en les principales étapes.

- Dans un premier temps, Hamilton généralise simplement la construction faite pour des couples aux triplets. Encore une fois, le seul problème rencontré est celui de la définition du produit. La conception développée par Hamilton l'amène à penser ici encore le

produit comme une loi externe et donc à introduire pour sa définition six unités différentes : trois unités des sauts notées I_1, I_2, I_3 et trois unités de nombres x_1, x_2, x_3 et à ramener la définition du produit d'un triplet de sauts par un triplet de nombres : $(mx_1+nx_2+px_3)(rI_1+sI_2+tI_3)$ à celle des 9 produits partiels : $x_i I_j$, donc à la détermination des 27 composantes de ces produits sur la base des unités de sauts.

Hamilton impose à ces produits de respecter des conditions faisant de x_1 et I_1 des opérateurs neutres ($x_1 I_1 = I_1, x_1 I_1 = I_1$), et des conditions de commutativité (ex: $x_2 x_3 = x_3 x_2$). Une certaine liberté demeure et ses choix conduisent Hamilton à une définition du produit comprenant deux constantes arbitraires b et c :

$$\begin{aligned}x &= mr + ns + pt \\ y &= ms + nr + (b - b^{-1})ns + bpt \\ z &= mt + pr + b(nt + ps) + cpt.\end{aligned}$$

Le problème auquel se heurte alors Hamilton est que, quels que soient les choix effectués, il existe des diviseurs de 0 (il suffit d'avoir par exemple : $n=bm, r=-bs$ et $t=0$). Il revient sur la définition du produit, les choix effectués à cette occasion, parvient à interpréter géométriquement l'existence de diviseurs de zéro mais n'arrive pas à trouver des choix permettant de les éviter.

Après une tentative d'extension aux n -uplets tout aussi infructueuse, bloqué, il abandonne le point de vue algébrique qui était le sien depuis le début, pour chercher son inspiration dans le cadre géométrique, reconnaissant que :

"There was, however, a motive which induced me to attach a special importance to the consideration of triplets, as distinguished from those more general sets, of which some account has been given. This was the desire to connect, in some new and useful (or at least interesting) way, calculation with geometry, through some undiscovered

extension, to space of three dimensions, of a method of construction or representation, which had been employed with success by Mr Warren [...] for operations on right lines on one plane : which method had given a species of geometrical interpretation to the usual and weell-known imaginary symbol of algebra."

Dans ce cadre géométrique, Hamilton va essayer successivement diverses définitions du produit. Citons-en deux :

- Définir le produit de deux points B et C d'une sphère de centre O, représentant les directions (OB) et (OC) sur laquelle une unité A a été choisie, en considérant le plan ABC et en utilisant dans ce plan la définition connue du produit de deux directions, par rapport à l'unité A.

Cette construction qui généralise celle effectuée en dimension 2 présente cependant divers inconvénients : indétermination du carré d'une direction, de l'inverse d'une direction (auxquelles on peut remédier en choisissant dans ce cas des grands cercles de la sphère) et surtout perte de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

"There was also the great and (as I thought) fatal objection to this method of construction, that it did not preserve the distributive principle of multiplication ; a product of sums not being equal, in it, to the sum of the products : and, on the whole, I abandoned the conjecture."

- Définir des directions en coordonnées sphériques et leur produit en multipliant les longueurs et en additionnant les angles polaires. Le Professeur Graves avec lequel Hamilton correspond régulièrement sur ce sujet, donnera une autre formulation de cette idée : considérant i comme un opérateur de rotation de 90° autour de l'axe Oz et introduisant une seconde quantité imaginaire j , opérateur de rotation de 90° dans le plan vertical de la direction considérée, il aboutit à

une expression exponentielle particulièrement simple du produit de deux directions : $re^{il}e^{jm}.r'e^{il'}e^{jm'}=rr'e^{i(l+l')}e^{j(m+m')}$.

Mais une fois de plus, les définitions proposées, pour si séduisantes qu'elles apparaissent, violent le principe de distributivité et seront de ce fait rejetées.

Hamilton est une fois de plus bloqué. C'est un retour au point de vue algébrique, mais effectué sans perdre de vue l'interprétation géométrique visée, dans une perspective de loi interne et non plus externe comme précédemment, qui sera le point de départ du déblocage. Un texte de De Morgan est, selon Hamilton, à l'origine de son revirement :

"But I wish to mention, first, that among the circumstances which assisted to prevent me from losing sight of the general subject, and from wholly abandoning the attempt to turn to some useful account these early speculations of mine, on triplets and on sets, was probably the publication of Professor De Morgan's first paper on the Foundations of Algebra, of which he sent me a copy in 1841."

Et dans ce texte, en particulier, un passage comme le suivant :

"An extension to geometry of three dimensions is not practicable until we can assign two symbols Ω and ω , such that $a+b\Omega+c\omega=a1+b1\Omega+c1\omega$ gives $a=a1$, $b=b1$, and $c=c1$; and no definite symbol of ordinary algebra will fulfil this condition." My symbols x_1 , x_2 , x_3 had not been published, nor otherwise exhibited to him ; they were designed to fulfill precisely the foregoing conditions..."

Ces vieux symboles : x_1 , x_2 , x_3 sont réécrits plus simplement : 1 , i , j , et une ligne de l'espace se trouve alors représentée par un triplet écrit : $x+iy+jz$, x , y , z correspondant à des coordonnées rectangulaires. L'analogie avec les couples et l'interprétation antérieurement proposée de i et j en termes d'opérateurs de rotation, le conduisent à poser : $i^2=j^2=-1$.

Les règles de distributivité conduisent alors pour le produit, en supposant comme il le fait, ce produit commutatif, à l'expression :

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+ij(bz+cy)$$

Il reste à déterminer le produit ij , qui a priori devrait être lui-même un triplet de la forme : $a+ib+j\gamma$.

Pour déterminer les trois coefficients, Hamilton revient à une analogie avec le plan déjà utilisée antérieurement : il considère le cas particulier du produit de deux lignes d'un plan contenant l'unité, soit l'axe Ox , et définit dans ce cas leur produit en additionnant les angles des lignes avec le vecteur unitaire de Ox . Un calcul analytique élémentaire conduit alors à une expression du produit des deux lignes égale à : $(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)$, donc correspondant exactement aux trois premiers termes de la forme générale.

Le produit ij serait-il nul ? Repérant que les points du plan considéré vérifient justement la relation $bz-cy=0$ et que le quatrième terme est en fait la somme des deux termes : $ib.jz$ et $jc.iy$, Hamilton finit par faire l'hypothèse à ses yeux plus raisonnable de la non-commutativité du produit et poser $ij=-ji=k$.

D'où l'expression générale du produit :

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz)=(ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+k(bz-cy).$$

Il est évident que ce produit n'a pas de diviseurs de zéro puisque :

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2.$$

Cette relation amène Hamilton, écrit-il, à sortir du cadre des triplets :

"This led me to conceive that perhaps instead of seeking to confine ourselves to triplets, such as $a+ib+jc$ or (a,b,c) , we ought to regard

these as only imperfect form of QUATERNIONS, such as $a+ib+jc+kd$, or (a,b,c,d) , the symbol k denoting some new sort of unit operator : and that thus my old conception of sets might receive a new and useful application."

Il reste à déterminer la valeur des produits faisant intervenir k ; ces valeurs se déduisent aisément de l'associativité et de la relation $ij=-ji$: par exemple " $k^2=ij.ij=-iijj=-i^2j^2=-(-1)(-1)=-1$ "

Hamilton donne tout de suite après dans la préface une interprétation géométrique du produit :

$$(ix+jy+kz)(ix'+jy'+kz')=-(xx'+yy'+zz')+i(yz'-y'z)+j(zx'-z'x)+k(xy'-x'y)$$

En termes modernes, on dirait que la partie réelle de ce produit est l'opposé du produit scalaire des deux vecteurs associés aux deux quaternions et que sa partie non réelle correspond à leur produit vectoriel, si l'on interprète (i,j,k) comme une base orthonormale directe. Hamilton exprime ceci dans le langage de son époque en termes de longueurs, sinus et cosinus d'angles :

"The part w", independent of ijk , in this expression for the product, represents the product of the lengths of the two factor-lines, multiplied by the cosine of the supplement of their inclinations to each other ; and the remaining part $ix''+jy''+kz''$ of the same product of the two trinomials represents a line, which is in length the product of the same two lengths, multiplied by the sine of the same inclination, while in direction it is perpendicular to the plane of the factor-lines, and is such that the rotation round the multiplier-line, from the multiplicand-line towards the product-line [...] has the same right-handed (or left-handed) character, as the rotation round the positive semiaxis of k (or of z), from the semiaxis of i (or of x), towards that of j (or of y)."

Il conclut par ces mots le récit de la découverte :

"When the conception, above described, had been so far unfolded and fixed in my mind, I felt that the new instrument for applying calculation to geometry, for which I had so long sought, was now, at least in part, attained."

IV.2 - Commentaire épistémologique

Les efforts de Cauchy et de Hamilton vont tous les deux dans le sens d'une mise en forme symbolique évacuant, finalement, l'origine méthodologique et la signification des objets considérés : il ne s'agit plus de "*quantités imaginaires*" mais d'objets algébriques qui ne sont qualifiés de "*nombres*" que parce que ce sont des objets susceptibles de calcul.

Mais il ne faut pas se tromper sur l'interprétation de ces circonstances qui préfigurent la naissance des "*mathématiques modernes*".

Car l'objectif poursuivi n'est pas une *évacuation du sens* mais bien une prise de recul par rapport à lui, une volonté de ne pas en être prisonnier.

Et de toutes façons, c'est collectivement qu'il faut observer le processus, dans la communauté des mathématiciens.

Ainsi lorsque Hamilton écrit la multiplication de couples de nombres

$$(a_1, a_2)(a_1, a_2) = (a_1a_1 - a_2a_2, a_2a_1 + a_1a_2).$$

c'est après un long discours justificatif où les a_j sont des instants, puis des différences d'instantes c'est-à-dire des durées, et où les a_i sont des "*nombres*" (c'est-à-dire des objets sans dimension : des quotients de durées) opérant sur elles.

Plus loin, lorsqu'il veut étendre les opérations algébriques aux triplets, c'est l'*analogie géométrique* qui va le guider explicitement.

figure 7

"And because I at first supposed that ij and ji were to be equal, as in the ordinary calculations of algebra, the product of two triplets appeared to take the form,

$$(a+ib+jc)(x+iy+jz) = (ax-by-cz) + i(ay+bx) + j(az+cx) + ij(bz-cy) :$$

but I did not at once see what to do with the product ij . The theory of triplets seemed to require that it should be itself a triplet, of the form,

$$ij = \alpha + i\beta + j\gamma,$$

the coefficients α, β, γ being some three constant numbers : but the question arose, how were those numbers to be determined, so as to adapt in the best way the resulting formula of multiplication to some guiding geometrical analogies."

On voit que ce qui pourra devenir une présentation formelle est, au début, largement soutenu par le sens.

Il y a, en fait, travail d'équipe : certains mathématiciens, ici Hamilton, (s'appuient sur et) génèrent du sens, d'autres l'éliminent, l'épluchent de manière à ne conserver que les invariants formels (ici se sont les algébristes de l'école anglaise, Peacock, de Morgan,...).

Comme on le sait, il arrive souvent (sinon toujours) que l'équipe artisan/formaliste soit réduite à une seule et même personne.

Chez Cauchy par exemple, on voit à la fois l'affirmation de la primauté du symbolisme et l'intérêt de sa réduction sémantique à un cadre connu, en l'occurrence le calcul des polynômes et en particulier la division euclidienne, comme on le voit dans l'extrait ci-après :

Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences - CR. Acad. XXIV p.1120.

"Cela posé, il n'y avait plus nulle nécessité de se mettre l'esprit à la torture pour chercher à découvrir ce que pouvait représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, auquel les géomètres allemands substituent la lettre i. Ce signe ou cette lettre était, si je puis ainsi m'exprimer, un outil, un instrument de calcul dont l'introduction dans les formules permettait d'arriver plus rapidement à la solution très réelle de questions que l'on avait posées. Mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires, et la lettre i elle-même, à n'être plus que des quantités réelles."

".. f(i) indique la valeur que reçoit, non pas cette fonction f(x), mais le reste de la division algébrique de f(x) par $x^2 + 1$ ".

"Dans les calculs tout se passe comme si "on substituait à x la variable symbolique i racine de $i^2 + 1 = 0$ ".

On voit bien, en tout cas, sur cet exemple des nombres complexes, que l'accession au stade formel n'est une privation de sens qu'en apparence.

Il s'agit plutôt du démantèlement d'un monopôle sémantique : tant qu'un concept n'est associé qu'à un cadre signifiant, il y a confusion entre le sens et la manipulation symbolique. C'est la multiplicité des sens qui donne le sien au formalisme, lequel n'apparaît comme invariant que si l'on donne à voir la variabilité.

IV.3 - Commentaire didactique

Nous voudrions par rapport à ce moment de l'histoire insister sur deux points :

d'une part, une fois de plus, le statut des objets mathématiques, d'autre part le rôle joué par l'interaction entre cadre algébrique et géométrique dans la construction du corps des quaternions.

a- Le statut des nombres complexes et des quaternions :

Cet épisode de l'histoire montre bien nous semble-t-il que la possibilité de représentation et de construction des nombres imaginaires apportée par la géométrie ne résoud pas vraiment aux yeux des mathématiciens de l'époque le problème du statut de ces objets : en temps qu'objets algébriques, ils se doivent de recevoir une légitimation algébrique, qu'ils soient construits à partir des réels supposés eux-mêmes "connus", comme c'est le cas chez Cauchy, ou qu'ils prennent leur place dans un édifice plus général de recherche de fondements à l'algèbre comme chez Hamilton.

De la même façon, la construction des quaternions procède au départ d'une généralisation qui se veut purement algébrique, même si comme Hamilton l'avoue par la suite, la recherche d'une telle généralisation a des motivations qui sont loin d'être uniquement algébriques, et si la recherche elle-même imbrique fortement les deux cadres.

En revanche, si les deux objets : nombres complexes et quaternions sont clairement tous deux des objets algébriques, il faut souligner nous semble-t-il qu'ils n'apparaissent pas sur la scène mathématique dans les mêmes conditions : contrairement aux nombres complexes, les quaternions arrivent directement comme objets construits, non comme technique ou outil. Et c'est ensuite qu'ils font la preuve de leur

efficacité comme outils du travail mathématique et physique, même si comme le souligne M.J.Crowe dans "A history of vector analysis", le développement de l'algèbre linéaire conduira à relativiser l'importance initialement accordée aux quaternions.

b- Les rapports entre cadre algébrique et cadre géométrique dans la construction des quaternions :

La description que fait Hamilton de sa démarche dans la préface de "Lectures on quaternions" met en évidence la complexité des rapports qu'y entretiennent cadre géométrique et cadre algébrique.

Le cadre algébrique est sans aucun doute le cadre dominant. Tout d'abord, il est le seul apparemment présent. Ceci n'empêche pas le cadre géométrique d'intervenir ponctuellement,

- avec une fonction heuristique, pour guider les choix effectués dans les coefficients déterminant le produit des unités :

"There still remained five arbitrary coefficients [...] which it seemed to be permitted to choose at pleasure : but the decomposition of a certain cubic function [26], combined with geometrical considerations, led me, for the sake of securing the reality and rectangularity of a certain system of lines and planes, to assume the three following relations between those coefficients."

- et avec une fonction d'interprétation lorsqu'intervient le problème des diviseurs de 0 :

"The foregoing reasonings respecting triplets systems were quite independent of any sort of geometrical interpretation. yet it was natural to interpret the results and I did so, by conceiving the three sets of coefficients (m,n,p) , (r,s,t) , (x,y,z) , which belonged to the three triplets in the multiplication, to be the coordinate projections, on three rectangular axes, of three right lines drawn

from a common origine [...]. And then, in the particular triplet system recently described, the formulae of [26] gave easily a simple rule for constructing the product of two lines in space. For I saw that if three fixed and rectangular lines, A , B , C , distinct from the original axes, were determined by the three following pair of ordinary equations in co-ordinates :

$$x+by=0, z=0, \text{ for line } A ;$$

$$y-bx=0, z-ax=0, \dots B ;$$

$$y-bx=0, z-a'x=0, \dots C ;$$

we might then enunciate this theorem :

"If a line L be the product of two other lines, L , L' , then on whichever of the three rectangular lines A , B , C we project the two factors L , L' , the product (in the ordinary meaning) of their two projections is equal to the product of the projections (on the same) of L and U , U being the primary unit-line $(1,0,0)$ ".

[28]. I saw also that it followed from this theorem [...], that if we considered three rectangular planes, A' , B' , C' , perpendicular respectively to the three lines A , B , C , or having for their equations, $y-bx=0$, (A') ; $x+by+az=0$, (B') ; $x+by+a'z=0$, (C') ; then every line in any one of these three fixed planes gave a nul product line, when it was multiplied by a line perpendicular to that fixed plane."

Le cadre géométrique permet ici de traduire le problème rencontré en termes d'orthogonalité de systèmes de droites et de plans, il ne fournit pas les clefs de sa résolution dans les termes où il est posé : celui du choix des 27 coefficients. Après la fuite en avant de l'extension au n -uplets, Hamilton change de cadre dominant de résolution : le problème posé est alors explicitement celui de l'extension à l'espace du produit de lignes défini dans le plan, on oublie les triplets de moments et de sauts dans le temps, pour passer à des points de l'espace, des longueurs, des angles, des opérateurs de

rotation... Encore une fois, le cadre algébrique, même s'il n'occupe plus le devant de la scène, n'est pas pour autant absent. Il joue en particulier une fonction de contrôle. Ainsi, Hamilton s'étonne de trouver des radicaux et des fractions dans l'expression des coordonnées du produit, et surtout il rejette les méthodes de construction du produit successivement proposées en arguant du fait qu'elles ne respectent pas le principe algébrique de distributivité du produit par rapport à l'addition.

L'échec de toutes ces tentatives conduit à un retour au cadre algébrique, dans la dernière phase de la recherche. Mais, encore une fois s'il fonctionne comme cadre dominant, le cadre géométrique reste présent :

- au niveau heuristique, il guide la définition du produit : le produit j^2 est posé égal à -1 car j est interprété comme opérateur de rotation dans le plan xOz , la définition du produit donnée dans le cas particulier utilisé pour le calcul de ij correspond au produit géométrique déjà inventé puis rejeté,

- au niveau interprétatif : les quaternions introduits et leur produit définis algébriquement, Hamilton revient au produit de lignes et cherche dans ce cas une interprétation géométrique du produit et c'est quand il y parvient qu'il conclut avoir gagné !

Ainsi, au cours de cette recherche, on voit se succéder les cadres dominants, mais jamais le fait qu'un cadre domine n'exclut l'autre du travail mathématique. Il assure des fonctions heuristiques dans la recherche, il guide les décisions prises, il est aussi un élément essentiel du contrôle que le chercheur exerce sur son activité, conduisant soit à invalider certaines décisions, fermer certaines pistes, soit au contraire à conforter le travail en cours, assurer que l'on est sur la bonne voie.

Ce point nous semble important d'un point de vue didactique : le jeu

de cadres n'est pas un jeu où le mathématicien, pour des raisons diverses et en particulier des raisons de blocage, change brutalement et complètement de cadre pour un temps plus ou moins long, c'est un jeu où en permanence différents cadres sont présents mais où ils jouent suivant qu'ils sont dominants ou pas des rôles différents. Il met en évidence également, une fois de plus, le rôle joué par le contrôle externe dans l'activité du mathématicien, une caractéristique épistémologique de cette activité dont le système d'enseignement a, nous l'avons déjà signalé, de grandes difficultés à assurer la transposition didactique.

REFERENCES DES TEXTES CITES

Nos remerciements vont à Jean Luc Verley qui nous a communiqué de nombreux textes, en particulier ceux utilisés dans le cadre de l'enseignement de maîtrise qu'il a assuré conjointement avec Michèle Artigue de 1987 à 1991 à l'Université Paris 7 : "Approche historique et didactique des mathématiques".

Dans l'ordre de leur entrée en scène :

E.Cartan : *Nombres complexes* - Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, Edition française, Vol.I, Tome 1, fascicule 3, Teubner - Gauthier Villars, 1908.

J.Cardan : *Ars Magna* - Nuremberg, 1545.

R. Bombelli : *Algebra* - Bologne, 1572 (reéd. Bortoletti, Milan, 1966)

L.Carnot : *La géométrie de position*, 1805.

G.Schubring : *Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs*. Petit x, n° 12 (p. 5 à 32).

J.Piaget : *L'équilibration des structures cognitives* - Ed. PUF, Paris, 1975.

G.Brousseau : *La théorisation des phénomènes didactiques* - Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1986.

R.Douady : *Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres* - Thèse d'Etat, Université Paris 7, 1984.

D.Flament : *Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires* - Thèse - EHESS, Paris, 1982.

G.W.Leibnitz : *lettre à C.Huyghens* - C.Huyghens, Oeuvres complètes, Tome VII.

A. Girard : *L'invention nouvelle en algèbre* - Amsterdam, 1629

J.Wallis : *De algebra tractatus, historicus et practicus* - Londres, 1685.

L. Euler : *De la controverse entre MM. Leibniz et Bernouilli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* - Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 1749, pp. 139-179.

J.L.Verley : *La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* - Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP n°41, 1981.

A. de Moivre : *Solution analytique de certaines équations de degré trois, cinq, sept, neuf ou autres impairs, par une méthode analogue à celle de Cardan* - Philosophical Transactions n° 309, 1707. *Du partage d'un angle* - Ph. Trans. n° 374, 1722. *Miscellanea analytica* - 1730.

L. Euler : *Introduction à l'analyse infinitésimale* - 1748 (traduction de Labey parue en 1796).

F. Klein : *Considérations comparatives sur les recherches géométriques*

modernes - Erlangen, 1872 (traduction de H. Padé en 1873, rééd. Gauthier-Villars, 1974).

G.Bachelard : *La formation de l'esprit scientifique* - Ed. J.Vrin, Paris, 1938.

G.Brousseau : *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, XXVIIIème Rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 1976.

De la Chapelle : *Traité des sections coniques*, 1765.

L. Euler : *Eléments d'Algèbre* - St Petersburg, 1768

C. Wessel : *On complex numbers , On the analytical representation of direction ; an attempt, applied chiefly to the solution of plane and spherical polygons* - Mémoires de l'Académie royale de Danemark, 1799, reproduit dans Smith, Source Book in Mathematics.

A. Q. Buée : *Mémoire sur les quantités imaginaires* - Philosophical Transactions, Londres, 1806.

J.R. Argand : *Représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* - Paris, 1806.

J.R. Argand : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* - Annales de mathématiques de Gergonne, Vol. 4, 1813/14.

C.V.Mourey : *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* - Paris, 1828.

J.Warren : *Treatise on the geometrical interpretation of the square*

roots of negative quantities - Cambridge, 1828.

C.F. Gauss : *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* - Communication à l'Académie des Sciences de Göttingue , Comm. Soc. Gott. recent. 7 (1828/1831) ,1831.

S. Bachelard : *La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIXème* - Conférences du Palais de la Découverte, ND 113, 1967.

G.Polya : *How to solve it* - Ed. Princeton University Press, 1945, traduction française : *Comment poser et résoudre un problème* - Ed. Dunod, 1957.

G.Polya : *Les mathématiques et le raisonnement plausible* - Ed. Gauthier Villars, 1958.

A.H.Schoenfeld : *Mathematical problem solving* - Ed. Academic Press, 1985.

Z.P.Dienes : *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques* - Ed. O.C.D.L., 1970.

G.Brousseau : *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7.2, pp. 33-115, 1986.

C.Margolinas : *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques* - Thèse - Grenoble 1; 1989.

L.A. Cauchy : *Leçons d'analyse, Cours à l'Ecole Polytechnique*, 1821.

L.A. Cauchy : *Mémoire sur une nouvelle théorie des imaginaires et sur les racines symboliques des équations et des équivalences* - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1847.

W.R. Hamilton : *Theory of conjugate functions or algebraic couples with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* - Trans. Irish Acad., 17, 1837.

W.R. Hamilton : *Lectures on quaternions* - Dublin, 1853.

M.J.Crowe : *A history of vector analysis - The evolution of the idea of a vectorial system* - Ed. Notre Dame, Londres, 1967.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : « quelques commentaires épistémologiques et didactiques. »

AUTEURS :

Michèle ARTIGUE
André DELEDICQ

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : février 1992
ISBN : 2-86612-108-2