

**ILLUSTRER L'ASPECT UNIFICATEUR
ET SIMPLIFICATEUR DE L'ALGÈBRE
LINEAIRE**

Analyse comparative de deux devoirs
sur le même thème donnés en première
année d'université scientifique

Par J.L. DORIER

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ - PARIS VII

**ILLUSTRER L'ASPECT
UNIFICATEUR ET SIMPLIFICATEUR
DE L'ALGEBRE LINEAIRE.**

**Analyse comparative de deux devoirs sur le même thème
donnés en première année d'université scientifique.**

par

Jean-Luc Dorier

Institut Fourier, BP 74,
F - 38402 St Martin d'Hères Cedex.

JANVIER 1992

TABLE DES MATIERES

Introduction	p.1
A- Un premier devoir sur la formule de Gregory	p.2
B - Un deuxième devoir sur la formule de Gregory	p.4
1 - Présentation - comparaison avec le premier devoir	p.4
2 - Analyse linéaire	p.5
I.Premier problème d'interpolation : la méthode directe	p.6
II.Deuxième problème d'interpolation : la formule de Gregory	p.7
III.Résolution effective du problème d'interpolation	p.13
IV.Un dernier problème d'interpolation	p.14
3 - Analyse spécifique des commentaires	p.15
C - Conclusions - Analyse des variables didactiques -	
Nouvelles propositions	p.19
1-Le contexte dans lequel le devoir est proposé aux étudiants	p.20
2 - Les acquis d'algèbre linéaire préliminaires à l'activité proposée	p.20
3 - Les commentaires et les questions métamathématiques contenus dans l'énoncé	p.21
4 - Formulation des questions mathématiques	p.22
5 - Le contenu mathématique	p.23
6 - Quelques propositions concrètes	p.26
 <u>Annexe 1</u> : Texte du premier devoir	p.30
<u>Annexe 2</u> : Texte du deuxième devoir	p.31
<u>Annexe 3</u> : Données brutes des analyses	p.32
<u>Annexe 4</u> : Réponses des étudiants aux questions où il est demandé de comparer la méthode directe à la méthode plus élaborée	p.35

Introduction

Si on analyse la genèse des concepts d'algèbre linéaire (cf DORIER 1990(b) et (c)), on voit que la théorie axiomatique des espaces vectoriels ne s'est imposée que vers 1940, alors que les premières axiomatiques remontent à 1888 (Peano). En fait Banach, le premier, a eu, vers 1930, réellement besoin d'une approche axiomatique pour résoudre des problèmes assez complexes d'analyse fonctionnelle, alors que jusque là l'approche descriptive par $\mathbb{R}^n$ et les déterminants avait suffi. Finalement ce n'est pas la nécessité d'une situation mathématique qui a consacré l'approche axiomatique, mais un large courant de pensée au sein des mathématiques visant à unifier des théories en les regroupant selon des similitudes de structure. Les structures algébriques et l'algèbre dite "moderne" sont ainsi nées d'un besoin de réorganisation du savoir mathématique selon une approche plus systématique et rationnelle. Dans ce contexte, l'algèbre linéaire, sous son aspect "axiomatique des espaces vectoriels", est un domaine fort intéressant pour son aspect simplificateur et généralisateur. Elle permet en effet d'appliquer des méthodes et des résultats identiques dans des cadres très différents au premier abord.

Sur un plan didactique, il peut sembler intéressant de pouvoir illustrer ce point de vue et même d'en faire une variable importante sur laquelle jouer pour motiver et favoriser l'acquisition des concepts d'algèbre linéaire par des étudiants de première année d'université. En effet avec des apprenants adultes, il semble tout à fait souhaitable d'utiliser de nouveaux leviers et en particulier le "levier métamathématique" (cf ROBERT 1987), c'est-à-dire d'explicitier les méthodes utilisées et les enjeux qu'elles comportent.

Ainsi les problèmes d'interpolation polynomiale font très souvent l'objet d'exercices ou de problèmes en algèbre linéaire. En effet une interpolation polynomiale revient à trouver un polynôme de degré fixé (ou plutôt limité) vérifiant des conditions linéaires. La méthode directe consiste à résoudre un système linéaire. Mais si le degré est élevé, la résolution est peu aisée, voire inaccessible. De plus si on a à faire plusieurs interpolations du même type, on va être amené à faire beaucoup de calculs et il devient alors rentable de trouver une approche plus systématique. Or il est en général possible d'exhiber une base plus adaptée aux types de conditions de l'interpolation (polynômes de Lagrange etc...) que la base canonique, il reste alors à donner les composantes d'un polynôme sur cette base, en général facilement calculables à partir des données de l'interpolation. On obtient ainsi une formule d'interpolation, qui permet de résoudre de façon très simple toute une classe de problème d'interpolation.

Dans cet article, je me propose d'analyser deux sujets de devoirs proposés en première année d'université scientifique (à Paris et Lille) qui portent tous les deux sur l'élaboration et l'utilisation de la formule dite de Gregory, qui permet de résoudre des problèmes d'interpolation quand on connaît les valeurs d'un polynôme sur les n premiers entiers.

Je veux ainsi mieux cerner quelles sont les conditions et les contraintes pour que ce type d'activité trouve une place adéquate dans la problématique de généralisation et de simplification apportées par l'algèbre linéaire. Je ferai dans ce sens de nouvelles propositions à la fin de ce texte qui sont déjà en cours d'expérimentation.

A - Un premier devoir sur la formule de Gregory

On trouvera une analyse détaillée de ce devoir dans DORIER 1990 (a) ou (c), je vais seulement en rappeler ici les grandes lignes. En annexe 1, se trouve le texte de ce devoir.

Ce devoir représentait un peu plus du tiers (8 sur 20 dans le barème) d'un examen partiel de quatre heures. Il a été passé après une semaine d'utilisation de la méthode du pivot de Gauss et trois semaines d'enseignement d'algèbre linéaire, dans une section de DEUG A 1.

Un exercice préliminaire (le I) illustre la méthode directe d'interpolation avec quatre conditions, donc conduisant à un système de "taille" raisonnable.

L'exercice II permet pas à pas d'arriver à la formule de Gregory. Le découpage suit une logique inattaquable mais aucun commentaire dans le texte ne permet à l'étudiant de savoir où on l'emmène et à quoi les calculs des questions 1 à 3 conduisent, ni de savoir avant la dernière question à quoi sert la formule de Gregory. On peut dire que l'aspect métamathématique n'est pas pris en compte ici. C'est d'ailleurs une caractéristique de la plupart des textes de devoirs, même à un niveau plus avancé de l'université.

La dernière question permet de résoudre un problème d'interpolation très semblable au I, avec la formule de Gregory. On demande ensuite aux étudiants de comparer les deux méthodes. Bien sûr pour une seule interpolation avec seulement quatre conditions, la formule de Gregory n'est pas un investissement rentable. Pour saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'utilisation de l'algèbre linéaire, les étudiants doivent extrapoler et ne prendre l'exemple d'interpolation qui leur est donné que comme un exemple générique d'une situation variable. On peut déjà émettre des doutes sur l'éventualité d'une telle prise de conscience des étudiants dans un environnement aussi peu problématisé.

Le texte de ce problème, très représentatif de ce qui se fait à ce niveau d'enseignement, est très scolaire, l'étudiant y est conduit avec des œillères vers un but, qui risque de n'être pour lui rien de plus que la fin du devoir. L'aspect métamathématique ne sert que de prétexte et la toute dernière question paraît dans ce contexte bien incongrue.

Par ailleurs, il s'avère que les premières questions du problème, qui, jusqu'à 3), ne sont pas d'algèbre linéaire, comportent des difficultés d'ordre technique assez importantes : travail sur le degré d'un polynôme, substitution de variables, récurrence avec deux indices en jeu, discussion de cas... autant de points délicats, qui ne manqueront pas de bloquer les étudiants, surtout dans le contexte d'un examen, avec la contrainte du temps qui pèse lourd.

Enfin les étudiants ne sachant pas, au moment du partiel, le théorème sur la caractérisation des bases en dimension n , comme familles libres à n éléments, en 3) il leur faut montrer effectivement que les U_i forment une famille génératrice, ce qui complique assez sensiblement la démonstration.

J'ai analysé 72 copies. Voici, dans les grandes lignes, les résultats obtenus par les étudiants.

En 1) 86% des étudiants montrent seulement que ΔP est de degré inférieur à $(\deg P - 1)$, et concluent à l'égalité. Les 14% restant répondent correctement. On peut mesurer ici le niveau de méconnaissance de la notion de degré d'un polynôme.

En 2), si 64% des étudiants calculent correctement ΔU_k , seulement 10% trouvent correctement $\Delta^n U_k$ et $\Delta^n U_k(0)$, avec un taux de 52% de non-réponses. Les difficultés techniques ont ici très majoritairement bloqué les étudiants.

De même en 3) seulement 12% réussissent et 43% ne répondent rien.

En 4), 62% des étudiants ont abandonné, 29% montrent que Δ est linéaire et seulement 9% que $P \rightarrow \Delta^n P(0)$ l'est.

Après tant d'échec, seulement 7% des étudiants trouvent la formule de Gregory.

A ce stade, on peut donc déjà dire que ce problème est un échec massif.

A la question 5, comme la formule de Gregory est donnée dans l'énoncé, les étudiants pouvaient répondre sans avoir fait les questions précédente. En fait 55% ne répondent pas. En outre seulement 30% de ceux qui donnent une réponse, appliquent ou essaient d'appliquer la formule de Gregory, dont 10% sans aboutir ou en faisant une erreur, les 70% restant appliquent la méthode directe et résolvent un système de quatre équations linéaires en quatre inconnues comme dans I !

On ne trouve aucune réponse à la question demandant de comparer la formule de Gregory et la méthode directe.

Ainsi on voit que, outre le taux d'abstention élevé, une grosse majorité des étudiants est passé entièrement à côté du problème. A la fin, la méthode directe est encore pour eux la seule accessible. Ils n'ont pas pu comprendre la problématique qu'on voulait leur faire aborder.

Les difficultés d'ordre technique à gérer dans les premières questions sont bien sûr une première cause de cet échec et il faudrait repenser entièrement l'approche de ce type de problème dans ce sens.

Mais surtout il apparaît que la non explicitation de la problématique soulevée rend l'activité proposée entièrement opaque aux étudiants. Pour faire saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, il faudra que l'aspect métamathématique soit explicitement pris en compte dans le texte même d'un énoncé et on ne peut espérer faire entrer les étudiants dans ce type nouveau de questionnement sans bouleverser fondamentalement les habitudes de rédaction des sujets de devoirs.

B - Un deuxième devoir sur la formule de Gregory

En s'appuyant en partie sur mes analyses sur ce premier devoir, Marc Rogalski a écrit un nouveau sujet de devoir sur la formule de Gregory, dont on trouvera le texte en annexe 2.

1- Présentation - Comparaison avec le premier devoir

Ce nouveau problème se présente comme un devoir à la maison, ce qui modifie beaucoup l'approche que vont en avoir les étudiants. Tout d'abord ils vont, pour la plupart travailler en groupe, d'autant que les enseignants les y incitent dans l'introduction. En stimulant l'interaction des idées, ce travail en groupe devrait permettre une recherche plus performante, il va sans dire que l'on risque aussi une uniformisation des idées, si ce n'est générale en tous cas par sous-groupes de proximité (selon les affinités et l'organisation sociale des différents groupes de TD et de l'amphi). Ceci risque fort de donner plusieurs exemplaires peu différents de quelques rédactions types seulement. Mais il est fort probable également que quelques étudiants resteront à l'écart de ce phénomène d'osmose, produisant des rédactions entièrement originales.

La variable temps joue bien sûr également un tout autre rôle dans un devoir à la maison. Les réponses des étudiants sont en général beaucoup plus réfléchies donc aussi moins spontanées, on peut ainsi mieux tester la prégnance des erreurs, car les maladroites dues à la précipitation devraient disparaître. L'absence de temps limité permet également une interprétation plus catégorique des non réponses.

Enfin des questions plus métamathématiques, où on demande à l'étudiant son opinion sur les différentes méthodes utilisées (comme c'est le cas ici en fin de III et IV), devraient amener des réponses plus riches dans le cadre d'un travail à la maison et en petit groupe. Cette activité peut ainsi revêtir un aspect de recherche et de questionnement différent, si ce n'est plus approfondi qu'à l'habitude.

Ainsi le seul choix du devoir à la maison change déjà entièrement l'approche de la recherche et de l'utilisation de la formule de Gregory, par rapport au cas étudié plus haut.

Par ailleurs dans la structure même du devoir, on note tout d'abord que dans le deuxième sujet, le métamathématique est présent dès les premières lignes, puisqu'en guise d'introduction, on explique que le but du problème est de *faire saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire*. Un deuxième "encart" métamathématique se trouve au début du II, pour expliquer brièvement en quoi la méthode directe est défailante et quelle est la teneur de la méthode proposée. De plus il est explicitement demandé aux étudiants à la fin du III et à la fin du IV de comparer les méthodes d'interpolation proposées avec la méthode directe de résolution du système.

Enfin à propos du déroulement des questions, on voit que le calcul demandé dans le cas de 4 conditions sert seulement d'entrée dans le problème et non d'utilisation de la formule comme c'était le cas dans le premier énoncé. Il est immédiatement suivi d'un cas à 8 conditions où la méthode directe aboutit à des calculs pour le moins repoussants. Ainsi la nécessité de la formule de Gregory, en tout cas d'une nouvelle méthode, a, dès le départ un caractère concret. En outre la question II, malgré les indications fournies, est un peu moins "téléguidée" que dans le devoir précédent, c'est là aussi un avantage du choix de faire chercher "à la maison", qui permet de laisser plus d'initiative aux étudiants. Enfin la partie IV, inexistante dans la première version est une tentative de généralisation de la recherche de formules d'interpolation adaptées à des conditions initiales précises. On veut illustrer ainsi le caractère très générale de la démarche mise en place dans la recherche de la formule de Gregory.

2 - Analyse linéaire

J'ai analysé 41 copies correspondant à 87 étudiants, répartis en 2 groupes de quatre, 10 groupes de trois, 20 groupes de deux et 9 individus isolés. Ces étudiants appartenaient à quatre groupes de Travaux Dirigés, formant une seule section de DEUG de sciences première année à l'université de Lille 1.

L'enseignement dans cette section, et tout spécialement l'enseignement de l'algèbre linéaire, n'est pas réellement standard, et revêt un caractère expérimental. En particulier l'aspect métamathématique est pris explicitement en compte dans plusieurs activités faites en cours, en TD ou sous forme de devoirs. Un assez long travail sur la théorie des systèmes d'équations linéaires, à l'appui de la méthode du pivot de Gauss, sert d'entrée dans l'algèbre linéaire. Mais dès le départ plusieurs situations linéaires sont abordées (carrés magiques, suites de Fibonacci, polynômes etc...), la problématique de la simplification et de la généralisation possible avec l'algèbre linéaire est aussi très présente. Pour plus de détails on pourra consulter ROGALSKI 1990.

On trouvera en annexe 3, les résultats complets des étudiants, sous forme de tableau codé. La nomenclature des codes est donnée également dans le texte de ce qui suit (notation entre parenthèses). Le code des groupes d'étudiants, comporte une lettre qui désigne le groupe de TD, un nombre qui identifie le groupe parmi ceux du même groupe de TD et enfin un nombre entre parenthèses qui désigne le nombre d'étudiants du groupe ayant rendu le devoir.

Ainsi B3(2) désigne un binôme du deuxième groupe de TD.

Je présente maintenant mon analyse question par question
(cf. texte du devoir en annexe 2).

I - Premier problème d'interpolation : la méthode directe

Analyse a priori

Cette question est destinée à faire rentrer dans la problématique. Les étudiants ont normalement les moyens de la réussir et on ne cherche pas réellement à tester de connaissances. Simplement, on aborde la question de l'interpolation par la méthode directe (mise en équation des conditions, résolution du système) dont les étudiants possèdent tous les ingrédients, en particulier la technique de résolution d'un système linéaire par la méthode du "pivot de Gauss".

Le choix du degré 3, c'est-à-dire d'un système 4×4 , n'est pas arbitraire, il entraîne des calculs "faisables" sans trop de risques d'erreur mais qui sont déjà assez conséquents et laissent supposer les difficultés à venir dans le cas d'une augmentation du degré.

On attend donc peu d'erreurs à cette question, surtout compte tenu du fait que c'est un devoir à la maison, ce qui devrait permettre, par suppression de la contrainte du temps, d'éviter les fautes de calcul. On ne veut pas vraiment tester de connaissance mais plutôt installer la problématique en validant, sur une question simple, un savoir-faire des étudiants, qui se retrouvera ensuite en défaut sur une question un peu plus complexe. On suit ainsi un schéma tout à fait classique dans l'optique constructiviste de l'acquisition des connaissances (cf BROUSSEAU 1986, DOUADY 1986).

Résultats

De fait le taux de réussite est quasiment de 100%, au sens où tous les étudiants donnent bien le bon polynôme comme solution. J'ai toutefois relevé quelques maladroises, dont certaines sont à la limite des erreurs de raisonnement et qui, si elles n'empêchent pas vraiment les étudiants de donner la bonne réponse, reflètent néanmoins une forme d'incompréhension.

Au niveau de la résolution même du système on trouve de petites imprécisions, ainsi certains étudiants appellent système, le tableau des coefficients, alors que d'autres ne sont pas très heureux dans leurs notations (en particulier pour signifier les opérations qu'ils font sur les lignes du système), mais tous maîtrisent assez la méthode du pivot de Gauss pour arriver à résoudre correctement un système 4×4 .

La maladresse la plus répandue touche à la mise en équation du problème, ce qu'on pourrait appeler la tâche de modélisation.

En effet près du quart des étudiants distinguent, dans cette mise en équation, plusieurs cas (allant de 3 à 8) suivant le degré (voire même la valuation) du polynôme considéré (noté NCAS). Ces étudiants semblent ne pas avoir encore bien intégré la notion de degré et en particulier l'idée, très utile en algèbre linéaire, qu'il est plus simple de représenter un polynôme de degré inférieur à n qu'un polynôme de degré exactement n . C'est ici un problème de modélisation et non un problème d'algèbre linéaire qui alourdit le traitement de la question sans vraiment faire échouer les étudiants, pourtant dans un problème plus difficile ou en temps limité, cette maladresse pourrait bien s'avérer être un réel handicap.

Enfin j'ai noté une inexactitude dans la rédaction de la réponse finale dans quatre copies.

Trois étudiants, après une résolution correcte du système, annoncent quelque chose du genre: "...donc les polynômes vérifiant (...) sont de la forme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$." (noté PLU).

Ce type de maladresse me semble difficilement interprétable. Est-ce une méconnaissance des polynômes, des règles de bon français ou tout simplement un malentendu ? Je n'oserai m'avancer plus sans risquer la surinterprétation. Cependant dans une autre copie, j'ai trouvé quelque chose d'encore plus explicite qui peut peut-être nous fournir une piste.

Ces étudiants (c'est un groupe de 3) annoncent en effet : " Les polynômes sont donc de la forme $\lambda P(X)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ " (noté LIN).

Il y a ici une certaine similitude avec les cas précédents, puisque le pluriel est encore en cause, mais rien ne nous assure une parenté entre tous ces cas. Ici toutefois, il me semble que l'on peut mettre en cause une tendance de ces étudiants à universaliser la linéarité : "tout étant linéaire, il doit y avoir du linéaire dans ma réponse". C'est un genre de glissement qui a déjà été repéré à propos d'autres notions dans des travaux didactiques antérieurs. Une notion nouvelle prend un caractère dominant qui la fait appliquer à tout propos.

En guise de bilan, on peut donc dire que malgré ces quelques dérapages, cette question a parfaitement joué son rôle de porte d'accès au problème. Les étudiants abordent la question de l'interpolation avec des outils qu'ils maîtrisent bien, réalisent ainsi une première interpolation en terrain familier, mais qui leur laissent entrevoir déjà les difficultés à venir avec l'augmentation du degré, c'est-à-dire quand on introduira un saut informationnel.

II - Deuxième problème d'interpolation : la formule de Gregory

Analyse a priori

Cette question, épine dorsale du problème, commence par un nouveau problème d'interpolation portant sur 8 conditions, et utilisant un polynôme de degré au plus 7.

On commence par demander aux étudiants quel système d'équations ils sont a priori amenés à résoudre. Cette question est destinée à leur faire prendre conscience de l'ampleur de la tâche à accomplir (résoudre un système 8×8) et du risque d'erreur qu'elle comporte.

Il sera intéressant de voir jusqu'où l'explicitation des étudiants va aller : simple évocation du système à résoudre et de sa taille, écriture partielle (avec pointillés) ou complète du système, énumération ou évocation du nombre d'opérations à effectuer, voire éventuellement résolution du système!

Bien sûr, vis à vis du problème, la simple évocation du système et des risques d'erreur suffit, alors qu'une résolution explicite montrerait une incompréhension totale du message contenu dans ce devoir. Toutes les étapes intermédiaires d'explicitations ne sont pas forcément une mauvaise compréhension de ce message, mais peuvent aussi être le reflet d'une attitude scolaire vis à vis d'une question appelant une réponse sans réel contenu mathématique, en quelque sorte un effet du contrat didactique.

Ensuite on propose aux étudiants un détour par l'algèbre linéaire, en leur donnant l'idée directrice pour une deuxième méthode d'interpolation : *en utilisant pour exprimer un polynôme d'autres monômes que $1, X, \dots, X^n$, qui semblent mal adaptés à notre problème*. Suivent alors les consignes qui permettent d'arriver à la formule de Gregory.

Au moment où le devoir a été proposé, les étudiants venaient juste d'attaquer la notion d'application linéaire, le mot même n'avait pas encore été utilisé, mais ils avaient vu quelques exemples, en particulier ils savaient que la stabilité de la combinaison linéaire résulte de la stabilité de la somme et du produit externe. C'est la raison essentielle qui fait que ce qui constitue la question 1° est ainsi formulée et a été séparé du 2°. Cet état de fait n'est pourtant pas sans incidence, en particulier je me propose de regarder si les étudiants ont compris à quoi cette question servait dans le 2°, c'est-à-dire s'ils ont signalé de façon explicite l'endroit où ils ont utilisé la linéarité de Δ , dans leurs calculs ultérieurs. Ce point me semble être un bon indicateur de la compréhension globale du problème et d'une prise de distance qui est le reflet d'une bonne maîtrise de la situation.

A part ça, cette question ne devrait donc pas non plus poser de difficulté spécifique et on s'attend à un taux de réussite important, sauf peut-être quant à la reconnaissance de la possibilité de déduction de la troisième expression des deux premières, qui, là encore, montre un certain degré d'aisance dans la tâche proposée.

La question 2° est beaucoup plus délicate. On pourrait croire dans une première approche qu'on y laisse beaucoup d'initiative aux étudiants. Pourtant à y bien regarder on trouve les mêmes ingrédients que dans le découpage proposé dans la première version (les U_i forment une famille génératrice, calcul de ΔU_q , $\Delta^n U_q$ et $\Delta^n U_q(0)$, puis explicitation de la formule). Ici seulement les tâches sont seulement suggérées dans leur ensemble sans faire l'objet de questions explicites et séparées. De plus on suggère, à la fin, de copier la méthode vue en cours pour montrer la formule de Taylor, ce qui n'était pas du tout présent dans la première version, où les étudiants n'avaient aucune indication de méthode pour trouver les composantes de P sur la base des U_i .

On peut se demander s'il n'aurait pas été préférable de donner moins d'indications... Mais les difficultés d'ordre technique rencontrées par les étudiants avec la première version laissent à penser que donner moins d'indications aurait risqué de laisser les étudiants face à une entreprise de trop grande envergure et avec trop de pièges à chaque détour.

En définitive le seul fait d'avoir englobé sous une même question toutes ces tâches, vues sous un même angle, change assez radicalement, me semble-t-il, l'abord que les étudiants peuvent avoir du problème. L'approche se trouve en effet ainsi moins morcelée et plus cohérente. Ainsi les calculs, même s'ils sont pénibles et complexes, sont au moins menés dans un but que l'étudiant connaît et pour répondre à une difficulté à laquelle il a été confronté en début de question.

De plus ne faire que des suggestions laisse la possibilité aux étudiants d'envisager d'autres résolutions. Il est cependant assez certain que peu se seront engagés dans cette voie mais il sera intéressant de regarder ce qu'ont fait les quelques "aventuriers".

Au niveau des difficultés techniques, on peut reprendre l'analyse a priori de la première version. Néanmoins ici les étudiants possèdent le concept de dimension et peuvent utiliser le fait qu'une famille libre de n éléments est une base dans un espace de n éléments, ce qui leur permettra de montrer plus facilement que dans la première version, que les U_i forment une base.

On peut s'attendre outre à des erreurs sur la dimension de $P_n(\mathbb{R})$, à un oubli pur et simple de l'argument de la dimension, pour montrer que c'est une base. Toutefois ces deux erreurs me semblent peu significatives (surtout la première) et plutôt isolées que liées à un contexte d'incompréhension précis.

Pour montrer l'indépendance des U_i on peut distinguer quatre façons correctes (et pas trop longues) de s'en sortir.

Le plus rapide est, sans doute, de déduire ce résultat, du fait que les U_i sont de degrés distincts deux à deux (ce qui utilise une connaissance du cours).

On peut aussi, une fois écrite une combinaison nulle des U_i , substituer à X successivement les valeurs $0, 1 \dots n$.

La première méthode est évidemment plus simple, mais la deuxième, guère plus longue, est tout aussi valable.

On peut encore calculer le déterminant des U_i dans la base canonique en remarquant qu'il est triangulaire n'a que des "1" dans la diagonale, donc de façon immédiate qu'il vaut 1. C'est une méthode plus sophistiquée mais qui vaut les deux précédentes (elle est d'ailleurs très proche de la première).

Enfin si on reste très proche du contexte du problème, on peut appliquer Δ^n à la combinaison des U_i , puis $\Delta^{(n-1)}$ etc...et on trouve successivement que tous les coefficients sont nuls. Cette méthode a priori plus complexe peut être suggérée par le contexte et, comme elle utilise des calculs à faire par ailleurs, elle s'avère, dans ce cadre, assez économique.

Bien sûr certains essaieront, après avoir écrit qu'une combinaison des U_i vaut 0, de développer sur les puissances de X , on sait en effet que le retour à l'écriture sur la base canonique est une tendance "naturelle" (si ce n'est un automatisme) des étudiants, contre laquelle il est difficile de lutter. Cependant ici, l'impasse face à laquelle on se trouve et l'effet "devoir à la maison" devraient faire disparaître ce genre de maladresse des copies finales.

Il se peut aussi que certains étudiants essaient de montrer le caractère générateur directement, mais là encore pour les mêmes raisons, il me semble peu probable que cela apparaisse dans les copies.

Enfin, l'indication de copie de la formule de Taylor (dont la démonstration se trouve dans le cours des étudiants) suggère de calculer les coefficients en calculant les $\Delta^k P(0)$, comme on calcule les $D^k P(0)$ pour la formule de Taylor. Aussi je ne pense pas que cette étape pose de difficulté si les autres ont été résolues convenablement jusque là.

Par contre il paraît certain que quelques étudiants, même en devoir à la maison, auront baissé les bras face à l'ampleur de la tâche à effectuer dans cette question.

Résultats

Tous les pourcentages donnés dans la suite prennent le groupe comme unité, ils expriment donc le rapport du nombre de groupes vérifiant le critère sur les 41 groupes analysés.

A la question : "quel système êtes-vous a priori amenés à résoudre ?", 3 groupes d'étudiants (soit 7%) ne répondent pas... Peut-être n'ont-ils même pas décelé que c'était effectivement une question ?

6 groupes (soit 15%) se contentent d'invoquer implicitement le système 8×8 (code IMP), 4 (soit 10%) écrivent le système avec des points de suspension (code PS), 26 (soit 63%) écrivent le système en entier (code SE) et enfin un étudiant (en monôme) résout entièrement le système (code CE) et en plus sans erreur de calcul !

On voit donc que la plupart des étudiants ont compris la problématique et ont conscience de la difficulté et du risque d'erreur que comporte la méthode directe dans le cas de 8 équations, par contre beaucoup semblent rester dans une problématique essentiellement scolaire et ont le besoin d'écrire le système en entier pour donner de la consistance à leur réponse.

Remarque : plusieurs étudiants parlent d'un système 7×7 , cependant ce n'est pas semble-t-il une erreur sur la dimension de $P_7(\mathbb{R})$, mais une conséquence du fait que l'équation $P(0)=3$ donnant immédiatement $a_0=3$, n'est pas considérée comme une équation.

Tous les étudiants ont abordé la question 1°, et un seul échoue. Sa réponse est inconsistante, il se contente en effet d'écrire les égalités en croyant les avoir démontrées.

Cependant il est intéressant de noter que seuls 17 groupes (soit 41%) remarquent que la troisième égalité se déduit des deux premières (code 1), (dont trois sans le démontrer) (code 1SD). Donc 56% des groupes redémontrent la stabilité par combinaison linéaire, sans apparemment voir le lien avec la stabilité de la somme et du produit externe (code SC). Ceci est-il très significatif, étant entendu que c'est une connaissance toute nouvelle ? L'expérience semblerait l'infirmier, on peut toutefois noter que ce résultat n'a pas un caractère d'évidence aussi net qu'on pourrait le penser.

Six groupes (soit 15%) délaissent entièrement la question 2°, et trois autres groupes n'en font qu'une partie, donc n'obtiennent pas la formule de Gregory. On voit donc que même à faire "à la maison", cette question correspond à une tâche qu'un nombre non négligeable d'étudiants ne peuvent même pas entamer. Le nombre important d'étapes ajouté à une certaine complexité des calculs et à la délicate gestion des deux indices dans le calcul de $\Delta^n U_q$ peut expliquer cet état de fait.

Quatre groupes, dont trois issus d'un même groupe de TD, ne suivent pas les suggestions de l'énoncé. En fait ils adoptent tous une stratégie similaire, ce qui me laisse penser que c'est le fruit d'un travail commun ou d'une communication de résultats et non des faits indépendants (au moins pour les trois groupes du même TD). Leur méthode consiste, après avoir montré

que les U_i forment une base, à faire directement le calcul des $\Delta^n P(0)$, pour $n=0$ jusqu'à $\deg(P)$, c'est-à-dire en fait qu'au lieu de calculer d'abord les $\Delta^n U_q$, ils vont faire ces calculs implicitement dans le calcul des $\Delta^n P$ (code **DnP(0)DIR**). Du point de vue de la clarté des calculs et même de la rigueur des démonstrations, cette méthode est critiquable car elle entremêle plusieurs tâches complexes. D'ailleurs les démonstrations de ces étudiants ne sont pas entièrement complètes : il n'y a pas de récurrence, les itérations sont tout juste signalées par des pointillés. Cependant du point de vue de la compréhension globale du problème, il me semble que cette démarche paraît plus naturelle puisqu'elle suit de plus près le processus de découverte, en effet on ne calcule les $\Delta^n U_q$, que parce qu'ils s'avèrent utiles dans le calcul des coefficients de la décomposition de P sur la base des U_i et ceci n'apparaît que si on calcule $\Delta^n P(0)$. Faire les calculs dans l'autre ordre correspond à une reconstruction a posteriori pour des besoins de clarté et de rigueur. On peut dire que la démarche proposée par l'énoncé correspond à une problématique de synthèse, c'est-à-dire de reconstruction d'une démonstration, alors que celle utilisée par les étudiants est plus proche de l'analyse, c'est-à-dire de la démarche "naturelle" de découverte, au sens introduit par Aristote puis repris en particulier par Descartes (cf LÉLOUARD 1990 p174-179).

Par ailleurs cinq autres groupes, après avoir calculé ΔU_q et montré que les U_i forment une base, se dispensent du calcul des $\Delta^n U_q$ et passent tout de suite au calcul de $\Delta^n P(0)$ (code **IMP** dans la colonne **DnUk**). On voit ici un mélange entre la démarche analytique (comme plus haut) et l'effet d'une contrainte didactique qui pousse les étudiants à suivre les suggestions de l'énoncé, même si elles ne sont pas imposées.

Ceci est, me semble-t-il, important pour juger de l'autonomie de pensée des étudiants face à un problème comme celui-ci. Il peut sembler souhaitable en effet qu'ils se questionnent et prennent des initiatives, mais reculant devant le spectre de l'échec, les enseignants donnent finalement des suggestions de méthode, dont chacun sait qu'elles seront pour beaucoup suivies comme des ordres.

Ainsi dans le cas présent on peut dire que 15% des groupes ne font rien, 53% suivent (tant bien que mal) les consignes suggérées par l'énoncé à la lettre et seulement (?) 22% montrent plus ou moins d'autonomie. Il serait intéressant de voir ce qui ce passerait si on faisait moins de suggestions.

Sur un plan plus technique, le calcul de ΔU_q ne pose pas de difficultés à ceux qui l'abordent. De même le calcul de $\Delta^n U_k$, est en général correct au moins pour $n \leq k$. Deux groupes ont des difficultés en essayant de mener une récurrence double sur le couple (n,k) qui ne prend en compte que les cas où $n=k$ (code **N/K**), deux autres groupes ne parlent pas du cas $n > k$ (code **N>K**). Sur les 19 groupes ayant ainsi abordé explicitement cette question et l'ayant résolu correctement, 5 font une récurrence correcte (code **REC**), les autres se contentent d'une itération en usant de pointillés (parfois en annonçant et croyant faire une récurrence) (code **ITE**).

Cependant l'itération me semble ici être assez bien adaptée, car la formule est simple (c'est la distinction des cas qui est plus complexe), de plus ΔU_q dépend de U_{q-1} , ce qui induit une itération et enfin la démarche itérative permet de mieux voir le point de rupture quand $n=q$. A mon avis ici une récurrence ne peut être que le fait d'une contrainte didactique due à l'importance accordée à ce type de raisonnement en DEUG, mais ce n'est pas une nécessité de la situation.

Pour la démonstration de l'indépendance des U_i , on a trouvé les quatre types de démonstrations annoncées plus haut dans les proportions suivantes (pourcentages calculés sur les 34 réponses effectivement données) :

- Degrés distincts (code DEG) : 41%.
- Valeurs de x (code $x=...$) : 21%.

Notons tout de suite que deux groupes donnent ces deux arguments à la suite.

- Déterminant (code DET) : 9%.
- Application de Δ^k (code Dk) : 15%.

Un seul groupe développe la combinaison linéaire sur la base canonique sans aboutir (code LDIR).

Enfin dans deux groupes l'indépendance est annoncée sans démonstration (code ADM) et dans deux autres elle est justifiée par un argument faux (code 0).

Ainsi le taux de réussite est de 71% des groupes, ce qui n'est pas si élevé pour une question relativement simple, surtout en devoir à la maison. Mais on peut se demander s'il est juste de tenir compte dans les pourcentages des groupes n'ayant pas du tout abordé la question 2.

Ainsi si on ne regarde que les groupes ayant abordé la question 2, le taux de réussite devient de 83%, ce qui est déjà meilleur.

Par ailleurs, dans 7 copies, il n'y a pas d'argument de dimension explicite pour conclure de l'indépendance des U_i qu'ils forment une base. On peut penser que pour ces étudiants la méthode "indépendance plus dimension" est la plus disponible (si ce n'est l'unique) pour montrer qu'une famille est une base et qu'ils n'en n'ont pour l'instant intégré que l'aspect technique en oubliant la signification. Ainsi cette erreur ne pourrait être que l'effet d'une technique mal maîtrisée plutôt qu'une erreur de nature réellement conceptuelle.

Tous les groupes ayant réussi les étapes précédentes donnent la formule de Gregory en trouvant les coefficients de la décomposition de P sur la base des U_i par le calcul des $\Delta^k P(0)$. Cette dernière étape ne semble donc pas être une difficulté en elle-même.

Enfin on peut noter que 17 groupes sur 32 (soit 53%), signalent explicitement l'emploi des formules du 1^o / , ou de la linéarité s'ils connaissent le mot, dans leur calcul. Ceci prouve une assez bonne prise de conscience de la cohérence du problème, d'autant que la non explicitation ne veut pas dire la non reconnaissance de l'utilité de la linéarité dans les calculs.

Globalement on peut donc dire que cette question atteint un taux de réussite (au moins partielle) de 78%. On a relevé certaines imprécisions ou même erreurs dans le détail des étapes, mais ce pourcentage correspond aux étudiants qui ont compris grosso modo le processus de recherche et de construction de la formule de Gregory et qui sont capables d'en évaluer le prix. C'est, me semble-t-il, ce qui est le plus important par rapport à la problématique globale du devoir.

III Résolution effective du problème d'interpolation

Analyse a priori

On se trouve ici face à une tâche beaucoup plus simple que précédemment et essentiellement calculatoire. Le but est de mettre en application la formule de Gregory et du coup d'achever la question de l'interpolation.

La suggestion d'écriture en tableau permet un calcul particulièrement simple des $\Delta^k P(0)$, en utilisant la formule de récurrence : (1) $\Delta^{k+1} P(0) = \Delta(\Delta^k P(0)) = \Delta^k P(1) - \Delta^k P(0)$, qui n'était pas donnée aux étudiants, mais simplement suggérée par la notation $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$ de l'énoncé.

Résultats

De fait 76% des groupes d'étudiants remplissent correctement le tableau grâce à la formule (1) et trouvent ainsi le bon polynôme grâce à la formule de Gregory (code 1).

Un groupe d'étudiants applique correctement la formule (1) et trouve les bonnes valeurs de $\Delta^k P(0)$, mais donne un polynôme différent pour chaque valeur de k . Ces étudiants, qui font partie de ceux qui n'ont pas traité entièrement la question précédente, n'ont visiblement pas compris l'intérêt de la formule de Gregory et même pas son fonctionnement (code 0,5).

Un groupe ne répond pas à la question, alors qu'il avait répondu correctement jusque là, il semble que les étudiants n'ont pas eu le temps de finir le devoir ?...

De plus les 8 groupes restant (soit 20%) calculent l'expression de $\Delta^k P(X)$, $0 \leq k \leq 7$, pour trouver les valeurs de $\Delta^k P(0)$ (code CAL), deux font des erreurs de calcul (code CAL0). C'est bien sûr une maladresse qui rend la formule de Gregory moins efficace et qui est plus sujette à erreurs.

Enfin malgré la question sur $P(10)$ qui n'a en général pas posé de problème, 6 groupes d'étudiants tiennent à donner $P(X)$ développé sur la base canonique (code 1 dans la colonne BCAN).

Donc cette question recueille un taux de réussite important. On peut ainsi juger que pour la plupart (environ 75%) des étudiants arrivés à ce stade, on a réussi l'enjeu qui consiste à montrer que la formule de Gregory est une méthode plus adaptée et moins risquée que la méthode directe, pour les problèmes d'interpolation tels que celui proposé (quand on connaît les valeurs en les n premiers entiers, n étant assez grand). C'est d'ailleurs ce qu'attestent les commentaires des étudiants à la fin du III. En effet les 73% de groupes qui s'expriment sont tous d'accord pour dire que la formule de Gregory est plus performante que la résolution du système.

Je reviendrai plus en détail sur ces commentaires à la fin de mon analyse, en les associant à ceux de la fin du IV.

IV Un dernier problème d'interpolation

Analyse a priori

Cette dernière question propose aux étudiants un nouveau problème d'interpolation. On leur demande d'abord de le résoudre par la méthode directe. Ceci est très simple car il n'y a que quatre conditions et en plus le système est triangulaire donc quasiment résolu. Ensuite on leur demande de mettre au point une nouvelle formule permettant de calculer le polynôme en s'inspirant du II. Enfin on demande quelle méthode est la plus simple.

Le but de cette question est de montrer aux étudiants que la méthode de recherche de la formule de Gregory est générale et peut s'appliquer à d'autres types d'interpolation conduisant à de nouvelles formules. En fait la formule à trouver ici est une formule de Taylor ; d'ailleurs un groupe d'étudiants l'obtient en translatant la formule vue en cours qui se plaçait en 0.

Résultats

La résolution du système ne pose pas de problème, seuls deux étudiants ne l'ont pas abordée et deux commettent une erreur de calcul (code CAL).

Seulement 2 groupes d'étudiants distinguent plusieurs cas selon le degré du polynôme (ils avaient commis la même maladresse en I). Un groupe seulement formule sa réponse au pluriel (code PLU), alors que le groupe des étudiants mettant du linéaire partout récidive à cette question (code LIN).

La deuxième partie de la question est abordée par 30 groupes, et réussie (au moins grossièrement) par tous sauf 3 (soit 66% de réussite). Pour une dernière question de problème, on peut considérer que ce n'est pas mal du tout. Je n'ai pas relevé de difficulté spécifique qui demande que l'on s'y arrête plus longuement. Le problème ici réside plus dans l'initiative à prendre que dans une difficulté mathématique précise, ainsi les étudiants soit se sont abstenus soit ont en grosse majorité réussi, à quelques détails près.

En réponse à la question finale, les avis sur la simplicité sont partagés. La plupart extrapolent à des cas où le degré du polynôme serait plus élevé, mais le fait que le système soit triangulaire et qu'il ait fallu trouver soi-même la formule met sérieusement en concurrence les deux méthodes.

Ainsi sur les 28 groupes répondant à la question (soit 68%), 12 pensent que la méthode de Taylor est plus efficace que la méthode directe, 6 pensent le contraire et 9 pensent qu'elles se valent ou en tout cas qu'elles sont en compétition suivant les circonstances. Une réponse est trop ambiguë pour connaître la position des étudiants (D9(3)).

3 - Analyse spécifique des commentaires

On trouvera en annexe 4, les commentaires donnés par chaque groupe aux deux questions sur la comparaison des méthodes à la fin du III et du IV.

Ce type de question, où l'on demande aux étudiants d'émettre une opinion sur des méthodes, n'est pas traditionnel. Lors de mon analyse de la première version, j'avais souligné l'absence de prise en compte explicite de l'aspect métamathématique dans le sujet et le déroulement du devoir (cf. DORIER 1990(a)).

On a déjà vu que dans cette nouvelle version, il y a, dès le départ, un discours explicite visant à montrer aux étudiants "où l'on veut en venir", à quoi servent les calculs et les démonstrations qu'on leur demande, quelle est la problématique centrale du devoir. Ainsi il y a une tentative de prise en compte de l'aspect métamathématique de l'activité, on veut *faire saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire*, pour reprendre les premiers mots de l'introduction. Non seulement les commentaires au début du problème et dans la question 2, mais l'organisation même des questions, l'agencement des tâches vont dans le sens d'une meilleure problématisation de l'activité.

Néanmoins ce niveau d'explicitation n'engage que les auteurs du devoir et laisse l'étudiant dans une position passive. Aussi les deux questions à la fin du III et du IV devraient permettre d'engager de façon plus active et plus personnelle l'étudiant dans cette problématique. En lui demandant de donner son avis sur les méthodes employées, on espère non seulement son adhésion au point de vue que le problème a adopté mais aussi un avis critique et individuel.

Demander à un étudiant de donner son avis, en plus par écrit, sur des méthodes mathématiques n'est pas une habitude fréquente. C'est cependant moins inhabituel pour les étudiants testés ici, puisque c'est une des composante spécifique de l'enseignement expérimental pratiqué dans cette section de DEUG. Néanmoins il est fort probable que certains, voire beaucoup d'étudiants auront de la peine à sortir du cadre scolaire face à une question un peu atypique qui appelle une réponse qui les engage individuellement plus que d'ordinaire. On peut même prévoir que les plus irréductibles ne répondront rien, soit qu'ils ne sachent pas que dire, soit qu'ils jugent cela incongru ou inutile.

Bien sûr les réponses les plus intéressantes seront celles qui iront au delà de la simple approbation. En effet le texte du devoir ne laisse guère de doute sur le fond de la réponse attendue en fin de III (cf passage en italique en début de II). De fait on a vu plus haut que tous les étudiants s'étant exprimés ont vanté les mérites de la formule de Gregory. Ainsi nous ne pourrions pas conclure aussi aisément de cette approbation massive que le message sur l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire est bien passé. Il nous faut essayer de chercher entre les lignes et dans les quelques commentaires plus développés, des indices plus solides de ce fait.

Comme je l'ai dit plus haut 30 groupes (soit 73%) répondent à cette question. Par ailleurs seuls 4 des 11 groupes qui ne donnent pas de réponse n'avaient pas entièrement traité les questions II et III, donc pour 7 groupes, l'absence de réponse n'est pas due à un blocage antérieur. De plus ces sept groupes ont eu des notes ou appréciations globales au devoir qui représentent un spectre assez semblable au reste des étudiants, ainsi il ne semble pas que la qualité des "réponses mathématiques" antérieures ait une influence significative sur l'absence ou la présence de réponse à cette question plus métamathématique. J'ai avancé plus haut les hypothèses que ces étudiants se sont trouvés désarmés face à une question peu scolaire ou bien qu'ils n'ont pas ressenti la nécessité de répondre à une question jugée par eux incongrue ou inutile, ce fait étant en outre indépendant de leurs compétences mathématiques.

Par ailleurs on remarque que la plupart des réponses ne dépassent pas une ou deux phrases assez courtes, qui ne disent en substance rien que : "la formule de Gregory est plus simple car elle est source de moins d'erreurs". Evidemment ce type de réponses (toutes sauf 6 copies) ne permet pas de tester réellement la compréhension de la problématique par les étudiants. Mais n'était-ce pas prévisible, pour les raisons que nous avons dites plus haut ? Il faudra tirer les conséquences de ce semi-échec.

Dans les six groupes donnant des réponses un peu moins "conformes", on trouve des choses assez variées.

Un groupe signale qu'un ordinateur permettrait d'éviter les risques d'erreurs dans la méthode directe, mais il ne semble pas vraiment réaliser dans quelle mesure cette solution serait rentable (C8(2)).

Un autre groupe signale que c'est surtout pour des polynômes de haut degré que la méthode de Gregory est rentable (C2(1)). C'est une certaine preuve de la prise en compte du champ de "rentabilité" de la formule de Gregory.

Deux groupes comparent un peu plus explicitement les calculs à effectuer avec chacune des deux méthodes (A4(3) et B5(1)). Ils témoignent ainsi d'une meilleure prise de conscience du gain qualitatif apporté par la formule de Gregory.

La réponse du groupe C6(2) est particulièrement intéressante. On y décèle deux "failles". D'abord ces étudiants semblent croire que la formule de Grégory n'est qu'un ersatz pour mauvais calculateurs (catégorie à laquelle ils pensent sûrement appartenir) et qu'il suffit de s'appliquer pour que la méthode directe fonctionne sans problème. Ensuite ils sont assez gênés par le fait qu'on n'obtiennent pas P sous sa forme canonique, seule réponse réellement acceptable pour eux semble-t-il. On voit ici que la méthode de Gregory n'est reconnue comme la plus performante qu'avec des réserves. Dans un contexte moins incitatif il ne serait pas impossible que ces étudiants changent d'avis.

Enfin j'ai relevé qu'un seul groupe (D4(4)) prend en compte dans la comparaison, non seulement les calculs du III mais aussi ceux du II !

Ceci me semble montrer un manque de sens critique. En effet résoudre un système linéaire ne demande pas de connaissance préliminaire nouvelle, tandis qu'utiliser la formule de Gregory sous-entend qu'on la connaît et même qu'on travaille pour la trouver. Or cette recherche, qui est l'objet du II, n'est pas vraiment si facile et prend du temps. De plus elle demande un travail de méthodologie, qui ici est pris en charge par l'énoncé, mais dont la difficulté et la longueur est assez délicate à estimer. Il semblerait donc normal que les étudiants prennent ce travail en ligne de compte dans leur comparaison des deux méthodes. Or un seul groupe le fait et de façon très allusive : *"après avoir passé "un peu" de temps à établir cette théorie et la formule de Gregory ..."* .

Le "un peu", même entre guillemets (c'est une marque des étudiants) est ici illusoire. En effet la découverte de la formule de Gregory demande une bonne connaissance de l'algèbre linéaire et également une recherche heuristique non négligeable en difficulté et en temps. Bien sûr cette difficulté est compensée par le fait que cette formule peut servir à une multitude de calculs avec un nombre de conditions presque illimitées. Pourtant si on reste dans le cadre strict du devoir, il n'est pas du tout évident qu'elle soit rentable simplement pour une seule interpolation, même avec 8 conditions. Il me semble donc qu'une vision réellement critique de la situation aurait dû amener une position moins immédiatement approbatrice des étudiants, qui auraient dû prendre en compte le temps passé et la difficulté liée à la recherche et l'élaboration de la formule de Gregory. Ceci aurait pu ensuite être contre-balancé, en sortant du simple cadre du problème, par la prise en compte de toutes les utilisations possibles de cet outil.

Bien sûr l'absence quasi générale d'arguments dans ce sens ne peut être interprétée comme un manque massif de sens critique. Certains étudiants ont pu avoir conscience au moins partiellement de ce problème, et ne pas pouvoir ou vouloir l'exprimer.

Pourtant on verra qu'en IV, quelques étudiants soulèvent la question de la difficulté qu'il y a à obtenir la formule, ce qu'ils prennent en compte dans leur comparaison (cf. plus bas pour plus de détails). Or en IV justement, la consigne est beaucoup plus vague et la formule à trouver n'est pas donnée par l'énoncé.

Ainsi je pense qu'en II et III, tout s'est passé comme si les étudiants n'avaient pas eu conscience du travail nécessité par la recherche de la formule de Gregory, parce que l'énoncé avait pris en charge les étapes délicates de cette tâche. Le fait même que la formule soit donnée par l'énoncé a pu induire les étudiants à ne voir la tâche demandée en II que comme une justification de type scolaire de la formule (on doit montrer à son professeur qu'on sait faire une démonstration que lui connaît bien), mais en aucun cas comme une recherche effective de celle-ci (l'enjeu n'est pas de trouver la formule puisqu'on nous la donne). Ainsi dans le déroulement de la problématique, la question II (sauf le tout début) peut n'apparaître que comme une parenthèse de type scolaire, qui ne compte pas "vraiment".

Finalement il semblerait que la prise en compte de l'aspect métamathématique d'un concept ou d'une activité nécessite un changement de point de vue assez radical dans nos habitudes didactiques, si on veut que les étudiants ne soient pas seulement des spectateurs passifs qui se contentent d'acquiescer à l'argumentation de leurs enseignants. Le bouleversement à apporter

doit être global et général, on ne peut se contenter de demi-mesure, car le risque est trop grand de revenir à tout instant dans une habitude scolaire plus économique et moins dérangeante, qui annihilera la plupart des innovations faites par ailleurs.

Ici par exemple, il me semble que la question II est encore trop directive et téléguidée pour que les étudiants aient les moyens de saisir tous les aspects de la problématique de simplification apportée par l'utilisation de l'algèbre linéaire.

Ceci dit, aurait-il été possible de donner une consigne plus souple sans risquer une hécatombe ? Seule une nouvelle expérience permettra de trancher, mais je crois qu'on n'était pas très loin du but. Nous verrons en conclusion ce qu'il serait possible de tenter.

Je rappelle que 28 groupes ont répondu à la question finale du IV (soit 68%).

12 pensent que la méthode de Taylor est plus efficace que la méthode directe, 6 pensent le contraire et 9 pensent qu'elles se valent ou en tout cas qu'elles sont en compétition suivant les circonstances. Une réponse est trop ambiguë pour connaître la position des étudiants (D9(3)).

Il y a donc légèrement plus de non-réponses qu'en III, mais ceci me paraît normal vu que c'est la dernière question du problème.

Sept de ces groupes n'avaient déjà pas répondu en III (donc 64% de ceux n'ayant pas répondu en III, ne répondent pas à la fin de IV). De plus parmi ces sept groupes, quatre n'ont pas obtenu la formule de Gregory et aucun n'a traité correctement le IV. L'absence de commentaire en IV est donc due essentiellement à un blocage antérieur.

En fait seul un des groupes ne donnant pas de réponse à la fin de IV a traité le début de la question et encore de façon incorrecte, c'est la partie mathématique qui a bloqué les étudiants ici.

On peut donc dire que tous les étudiants en ayant les moyens ont répondu à la dernière question, ce qui est mieux que pour III. On peut donc supposer qu'ici l'enjeu d'une telle question semblait plus fort, à cause de la plus grande autonomie qu'avaient eu les étudiants dans la résolution de la question IV, mais aussi parce que, comme nous l'avons dit plus haut, les deux méthodes ("Taylor" et directe) sont ici moins nettement différenciables en niveaux de difficulté.

Ainsi sur l'ensemble des réponses, 43% des groupes donnent la formule de Taylor comme plus simple, 21% préfèrent la méthode directe et 32% ne tranchent pas vraiment, une réponse n'est pas interprétable (4%).

Les réponses les plus argumentées sont très nettement celles des étudiants qui ne se placent dans aucun camp.

J'ai relevé deux types principaux d'arguments :

- Sept groupes envisagent explicitement le cas où le degré du polynôme serait plus grand (A10, B7, C1, C6, D3, D8, D10). Six d'entre eux pensent que la formule de Taylor n'est plus simple que dans le cas où le degré est élevé, alors que les étudiants du dernier groupe pensent qu'elle est toujours préférable, mais encore plus performante si le degré est élevé. Il me semble

que la première position est plus adéquate. Néanmoins on peut dire que dans ces 7 groupes les étudiants ont bien compris la problématique de généralisation et n'ont fait jouer au polynôme de IV1° que le rôle d'exemple générique.

- 8 groupes prennent explicitement en compte la recherche et l'élaboration de la formule dans leur argumentation. Seul le groupe C10 pense que la recherche de cette formule donne trop de travail et qu'il est toujours plus simple de résoudre le système. A contrario seul le groupe D4, bien qu'il reconnaisse que les formules ne doivent pas toujours être faciles à trouver, pense qu'elles sont toujours préférables à la résolution du système. Les 6 autres posent comme condition que l'on connaisse la formule ("si on connaît la formule c'est plus simple que de résoudre le système"). Parmi ces 6, 3 rajoutent la condition de degré élevé (A10, B7, D8), 2 sont gênés par le fait qu'on n'obtienne pas l'écriture canonique du polynôme (A4, D7) et le dernier ne rajoute pas d'autre condition (D11).

On remarquera que les groupes C3 et C5 semblent avoir comparé les méthodes du II et du IV2° au lieu de cette dernière avec la résolution d'un système !

Dans cette dernière question où les étudiants ne disposaient que d'une consigne très mince et de la pratique des questions précédentes, il semble donc qu'une meilleure réflexion personnelle sur les méthodes employées ait été possible et en tout cas exprimable.

C - Conclusions

Analyse des variables didactiques - Nouvelles propositions

La comparaison des deux devoirs peut permettre de conclure qu'une prise en compte explicite dans l'énoncé de l'aspect métamathématique (dans les problèmes d'interpolation par la formule de Gregory) permet une meilleure réalisation des étudiants et donc, on peut l'espérer, un gain de connaissance plus important tant sur le plan qualitatif que quantitatif.

Je crois que ce point était déjà assez certain à la suite de mes premières analyses, nous en avons ici la confirmation. Ce qui me paraît important de mieux discerner ici c'est comment cet aspect métamathématique a pu être incorporé, ce qui a marché et comment on pourrait encore faire mieux.

Avant de faire une proposition d'un troisième texte, qui conduira à une nouvelle expérimentation, je propose de faire ici une analyse des variables et des contraintes didactiques intervenant dans le processus de création d'un tel sujet et dans les conditions de passage du devoir.

1 -Le contexte dans lequel le devoir est proposé aux étudiants

On a vu que l'option "devoir à la maison" contre "devoir surveillé" a conditionné beaucoup d'éléments et de façon fondamentale. Il me semble que c'est un choix fondamental, une activité "méta" demande la suppression de la contrainte du temps, nécessite une interaction entre étudiants et ne pourrait de toute façon pas survivre dans le cadre trop dirigiste d'un devoir surveillé. Cependant ceci nécessite une structure générale d'évaluation qui suppose que les devoirs à la maison entrent en compte dans le contrôle continu, autrement il y a fort à craindre que les étudiants ne s'y investissent pas.

Je pense donc que ce type de variable induit en fait, par rapport aux objectifs visés, un ensemble de contraintes, qu'il semble indispensable de satisfaire. Ainsi cette activité doit être proposée sous la forme d'un devoir à la maison, à chercher en petits groupes, et être pris en compte explicitement dans l'évaluation.

2 - Les acquis d'algèbre linéaire préliminaires à l'activité proposée

Je m'intéresse ici aux effets induits par le choix de la place du devoir dans l'organisation globale du cours d'algèbre linéaire. En effet il est certain que le travail et les connaissances antérieures des étudiants dans ce domaine ont une influence sur leur façon d'appréhender l'activité. Plus précisément il semble, pour le sujet qui nous intéresse, qu'une bonne perception de l'aspect métamathématique nécessite une maîtrise confirmée des outils mathématiques en jeu dans l'activité.

Ainsi, si je me réfère à l'expérience analysée ci-dessus, il me semble qu'il serait bon de donner ce devoir, aux étudiants, à un moment où ils connaissent mieux les applications linéaires. Ceci permettrait en effet d'éviter la séparation du II en 1°) et 2°). Les étudiants auraient alors à leur charge de décider de la prise en compte de la linéarité de Δ dans les calculs, quand elle apparaît nécessaire. Cela peut paraître un détail mais je pense que la reprise d'une question très "scolaire" (comme II-1°) est néfaste au bon déroulement du problème et va à l'encontre de la prise d'initiative des étudiants.

On peut dire qu'une prise en compte de l'aspect métamathématique nécessite avant tout une bonne dévolution du problème mathématique aux étudiants, ceux-ci doivent pouvoir être autonomes par rapport aux connaissances mathématiques nécessaires, pour être capables de faire de vrais choix, et ne pas préjuger de la qualité d'une méthode par rapport à des difficultés seulement spécifiques aux débutants.

A l'opposé, il me semble aussi qu'une proportion suffisante des connaissances mathématiques en jeu doit être relativement nouvelle pour les étudiants, afin qu'un questionnement par rapport à l'utilisation de ces connaissances soit plus disponible. Il semble en effet qu'une connaissance trop ancienne peut être plus difficilement remise en cause. Cette variable est néanmoins moins importante, dans la mesure où les devoirs à la maison sont en général en rapport direct avec les dernières notions du cours.

3 - Les commentaires et les questions métamathématiques contenus dans l'énoncé

Dans le devoir analysé au B, on a vu que le sujet commençait par une introduction posant la problématique et qu'ensuite il comprenait quelques commentaires sur les méthodes employées. Leur fonction est évidemment d'initialiser la réflexion de l'étudiant sur ce qu'il est en train ou va être amené à faire.

La rédaction de ces commentaires, leur place et leur importance sont autant de variables qui doivent être l'objet d'un soin particulier.

Il semble important d'être clair et concis, sinon l'étudiant, qui peut déjà avoir l'impression que cette "sauce" ne l'aidera pas à avoir une meilleure note, ne fera pas l'effort de déchiffrer un charabia d'initié qui ne semble pas le concerner.

Par ailleurs ces commentaires doivent être assez substantiels pour que tous les éléments du questionnement métamathématique soient accessibles, mais il ne faudrait cependant pas vendre la mèche en répondant dès le départ aux questions qu'on aimerait bien que les étudiants se posent en cours de résolution.

De même au niveau des questions métamathématiques que l'on va poser aux étudiants, des choix sont à faire. Il semble que ces questions doivent être de "vraies" questions dans lesquelles il y a un enjeu, au niveau de la réponse ou au niveau de l'argumentation. Elles doivent intervenir dans un contexte de liberté assez large, pour que la nécessité de verbalisation soit suffisamment forte. Je veux dire que la réponse doit être précédée d'une réflexion avancée que l'étudiant aura eu lors d'une activité mathématique ayant comporté des choix et des prises de position personnelles.

Il me semble en effet qu'un étudiant peut avoir assez naturellement une certaine conscience d'aspects de nature métamathématique en cours de résolution, mais ceci reste la plupart du temps implicite et non verbalisable parce que l'enjeu de la situation n'est pas assez fort. Ainsi, si on se réfère à l'analyse faite en B, à la fin du III, il est fort probable que certains étudiants avaient implicitement une opinion plus argumentée, mais, à mon avis, le contexte antérieur de résolution n'avait pas comporté assez de risque et de nécessité d'initiative personnelle pour que ces arguments soient formulables sur un simple appel de l'énoncé (ou de l'enseignant). Je pense que l'explicitation d'un argument métamathématique ne peut correspondre qu'à la justification d'un choix entièrement personnel de méthode de résolution.

On a vu que dans le IV, où ce choix était effectif, plusieurs étudiants ont en effet argumenté de façon assez fournie, alors que dans III, ils se sont contentés de reprendre succinctement les arguments de l'énoncé.

Ainsi plus encore que les choix sur les commentaires ou les questions métamathématiques, les choix sur les contenus et l'organisation des activités mathématiques sont fondamentaux pour réaliser la prise en compte de l'aspect métamathématique d'un problème.

4 - Formulation des questions mathématiques

Pour permettre aux étudiants d'avoir une position active dans le processus de prise en compte de l'aspect métamathématique, il me semble indispensable d'apporter des changements en profondeur dans l'approche classique adoptée dans les sujets d'énoncé. On a vu, avec l'analyse des commentaires au III, comment une position pas assez nette dans ce sens pouvait annuler les effets par ailleurs acquis. Il faut introduire du doute, des questions moins traditionnelles et des tâches où les étudiants ont réellement à prendre en charge la méthodologie.

Il faut cependant juger, en fonction du contexte de la classe, des limites à ne pas dépasser. Un risque en effet serait d'avoir une consigne tellement lâche que trop peu d'étudiants auraient les moyens de répondre correctement à une question.

Les choix à faire ici doivent donc permettre une bonne dévolution du problème mathématique qui permettra la prise en compte du questionnement sur les méthodes utilisées, l'étudiant ne doit pas être trop conduit par la main, mais doit par contre avoir les moyens de mener à bien la résolution avec le minimum de consignes.

Dans le cas précis de la formule de Gregory, on a vu que les deux textes analysés, variaient peu quant à la quantité d'information fournie pour la recherche de la formule, mais qu'ils se distinguaient par contre nettement par le type de formulation des questions. Le premier utilise des consignes précises, correspondant à un découpage en tâches élémentaires, le deuxième donne globalement des suggestions sur la démarche à suivre. De plus dans les deux versions, la formule est donnée dans l'énoncé. Enfin dans la deuxième version il y a une suggestion de copie de la démonstration de la formule de Taylor.

Je pense qu'aucun des deux textes ne peut encore rendre l'étudiant suffisamment autonome pour qu'il juge de l'enjeu réel de la formule de Gregory, pour les problèmes d'interpolation.

On pourrait envisager de ne pas donner la formule dans l'énoncé, en jouant par exemple sur la ressemblance avec celle de Taylor. On pourrait aussi ne pas suggérer le calcul des $\Delta^k U_p$ (que certains étudiants, malgré les suggestions de l'énoncé, n'ont d'ailleurs pas fait comme préliminaire lors de la deuxième expérimentation).

Y aurait-il un moyen de faire découvrir la base des U_k , et/ou l'opérateur Δ sans les donner dans l'énoncé ?

Même en les donnant dans l'énoncé, ne pourrait-on pas montrer la ressemblance avec la base canonique et l'opérateur de dérivation ? En effet les deux bases sont telles que chacun des opérateur Δ et D a la même matrice sur la base qui lui revient.

Par ailleurs le tableau du III pourrait être calculé plus tôt pour montrer la pertinence de Δ par rapport au problème d'interpolation.

On dispose ici d'un choix assez large dans l'organisation et l'explicitation ou non de certaines consignes.

La consigne la plus minimaliste serait de demander, en s'inspirant de la formule de Taylor et de sa démonstration de trouver une formule analogue permettant de calculer un polynôme en connaissant ses valeurs en $0, 1, \dots, \deg(P)$. Cependant il n'y a pas besoin de faire une expérimentation pour savoir qu'une telle consigne aboutirait à un échec quasi total.

Seules de nouvelles expérimentations, pourront nous montrer comment atteindre l'équilibre permettant une bonne dévolution du problème, sans entraîner un échec trop grand. La variable fixant la part d'information donnée dans la consigne visant à faire découvrir la formule de Gregory est le point essentiel qui permettra que les étudiants effectuent une tâche mathématique suffisamment autonome pour être amenés à avoir un questionnement métamathématique. Ce point est par ailleurs trop important pour qu'on puisse se permettre de risquer qu'un trop grand nombre d'étudiants échouent, à cause d'une consigne trop vague.

5 - Le contenu mathématique

A ce niveau on dispose de plusieurs variables sur lesquelles on peut jouer. On en a déjà examiné quelques-unes dans le paragraphe précédent. Je vais maintenant passer en revue celles qui restent.

Dans le I, on peut faire varier le nombre des données. Cependant cette question doit permettre aux étudiants de rentrer dans le problème et leur laisse envisager les difficultés à venir, aussi je crois que le choix de quatre valeurs correspond à la bonne mesure.

Par contre en début de II, le problème est différent, on ne veut pas que les étudiants résolvent le système, mais on veut leur faire prendre conscience de la difficulté technique qu'il y aurait à le faire. On a vu, lors de la deuxième expérimentation, que beaucoup d'étudiants ont écrit le système et ne se sont pas contentés d'en invoquer la taille. Il me semble donc qu'on pourrait augmenter encore le nombre de données pour que le saut informationnel soit encore plus net. Toutefois, à la fin, le problème sera à résoudre avec la formule de Gregory, il ne faut donc pas augmenter trop les données. Néanmoins, avec la formule de Gregory, les calculs sont très simples, même s'il y a beaucoup de données. Il me semble donc qu'on peut fixer des limites entre 8 et 15 valeurs environ. Il serait intéressant de voir si un plus grand nombre de conditions permet une meilleure prise de conscience de la simplification apportée par la formule de Gregory.

Pour la suite du II et le III, les choix sont plus au niveau de l'organisation que du contenu lui-même et ont été examinés ci-dessus.

Pour le IV, on a le choix de la formule d'interpolation, que l'on va faire trouver. Le choix fait dans la deuxième expérimentation est critiquable sur deux points essentiels.

Il est d'abord très lié au contexte de la classe. En effet, il suppose que la formule de Taylor n'a été donnée qu'en 0, ce qui est un choix bien spécifique. D'ailleurs la formule en un point "a" quelconque se déduit très facilement par translation. On a vu qu'un seul groupe d'étudiants a utilisé cette simplification. Toutefois cela pose un problème de contrat, puisque la méthode la plus simple pour résoudre la question ne consiste pas à suivre la démarche proposée et utiliser de l'algèbre linéaire, mais à translater la formule connue en 0.

De plus toutes les interpolations de type Taylor conduisent à un système linéaire triangulaire, donc la méthode directe se trouve simplifiée par les données du problème. Ce problème a d'ailleurs été bien vu par les étudiants.

Il semble donc que cet exemple, surtout en deuxième exercice, ne soit pas le mieux adapté à ce que l'on vise.

A-t-on d'autres choix de formules possibles ?

Pour répondre à cette question, il me faut en fait déterminer ici quelles sont les caractéristiques communes aux formules de Taylor et de Gregory. Dans un problème d'interpolation polynomiale, on cherche un polynôme de degré au plus n connaissant $(n+1)$ de ses valeurs, ou de ses dérivées, en certains points. Dans le cas de Taylor, on connaît les valeurs en un même point des n premières dérivées, dans celui de Gregory, on connaît les valeurs du polynôme sur les $(n+1)$ premiers entiers. Dans les deux cas, il existe un opérateur linéaire F , une base $B = (U_0, \dots, U_n)$ de $R_n[X]$ et une forme linéaire g , tels que :

- la matrice de F sur B n'a des termes non nuls que juste en dessus de la diagonale, c'est-à-dire que $F(U_0)=0$ et $F(U_k)=C_k U_{k-1}$, C_k étant un réel, $1 \leq k \leq n$. Ainsi F^k a dans la base B , une matrice dont les k premières colonnes sont nulles, et dont les suivantes n'ont que le terme juste avant le terme diagonal non nul : $a_{i,j}=0$ ssi $i \leq k$ ou $i \neq j-1$.

- $g(U_k) = 0$ sauf si $k=0$, et $g(U_0) = 1$.

Il est alors aisé de montrer que pour tout polynôme P de degré au plus n , on a :

$$P = \sum_{k=0}^n \left(\frac{g(F^k(P))}{g(F^k(U_k))} \right) U_k$$

Cette formule est une formule d'interpolation pertinente par rapport au problème quand on sait calculer facilement $g(F^k(P))$ avec les données de départ.

Ainsi, dans le cas de Taylor : F est l'opérateur dérivation, B est la base canonique et $g : P \mapsto P(a)$. Ainsi $g(F^k(P)) = P^{(k)}(a)$ et $g(F^k(U_p))=0$ si $k \neq p$ et $=1$ si $k=p$.

Dans le cas de Gregory :

- $F=\Delta : P \mapsto Q$ tel que $Q(X)=P(X+1) - P(X)$,
- $U_0=1$ et $U_k = X(X-1) \dots (X-k+1)$, $1 \leq k \leq n$.
- $g : P \mapsto g(0)$.

Ainsi $g(F^k(P)) = \Delta^k P(0)$, se calcule facilement, si on connaît $P(0), P(1), \dots, P(n)$, à l'aide par exemple d'un tableau triangulaire comme expliqué dans le III du deuxième problème (cf. annexe 2).

Il n'est bien sûr pas dans mon intention d'expliciter cette modélisation aux étudiants, ce serait changer d'objectif. Cette lecture permettra seulement de mieux voir les choix dont on dispose dans les exemples choisis.

Existe-t-il d'autres formules d'interpolation, faites sur le même moule ?

En théorie, pour tout choix de base, on peut construire un opérateur F et une forme g qui vérifient les conditions. En pratique cependant, il reste alors à voir s'ils répondent à un certain type d'interpolation. De plus en général l'opérateur F est difficilement exprimable sans la base spécifique de U_k .

Regardons par exemple ce que donne cette modélisation dans le cas d'une interpolation de type Lagrange. Dans ce cas, on connaît $(n+1)$ valeurs du polynôme en $(n+1)$ points arbitraires. On a alors la formule suivante :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n P(a_k) U_k(X) ; \quad \text{où } U_k(X) = \frac{\prod_{0 \leq i \neq k \leq n} (X - a_i)}{\prod_{0 \leq i \neq k \leq n} (a_k - a_i)}.$$

On voit donc que la base B est donnée par la formule d'interpolation. Ainsi dans le cas de Lagrange, g est telle que : $P \rightarrow P(a_0)$. Pour F on a plusieurs choix possibles, mais il n'en reste qu'un, si on impose en plus que tous les termes non nuls de la matrice de F dans la base B soient égaux à 1. On doit alors avoir $F(U_0)=0$ et $F(U_{k+1})=U_k$, $0 \leq k \leq (n-1)$. F est donc un opérateur qui change la valeur en a_k d'un polynôme pour celle en a_{k+1} et annule la valeur en a_n . On voit bien que F est intrinsèquement lié à la base des polynômes de Lagrange.

De fait ce problème ne se modélise pas très bien avec ce que j'ai dégagé pour Taylor ou Gregory.

En fait je n'ai pas vraiment trouvé d'autres problèmes d'interpolation qui se modélisent bien ainsi.

On peut bien sûr généraliser Gregory en prenant :

$F : P \rightarrow Q$ tel que $Q(X) = P(X+a) - P(X)$

$U_0=1$ et $U_k(X) = X(X-a)(X-2a) \dots (X-(k-1)a)$

$g : P \rightarrow P(b)$.

La formule ainsi obtenue permet de calculer un polynôme dont on connaît les valeurs en b , $b+a$, $b+2a$, ..., $b+na$.

Cependant, comme pour la formule de Taylor, cette nouvelle formule se déduit de la précédente par translation, et il n'est pas nécessaire de refaire une résolution complète.

Finalement il nous reste peu de choix, Taylor et Gregory, générales ou en 0.

De plus il y a aussi une contrainte, qui peut devenir une variable, qui consiste à savoir si Taylor a été fait en cours ou pas, et si oui, si la formule a été donnée en 0 seulement ou dans le cas général.

Si la formule de Taylor n'a pas été (ou a partiellement été) traitée en cours, on pourrait commencer le devoir par cette démonstration. Cela me semble être plus en accord avec l'ordre de difficulté et le degré de simplification apportée.

Sinon, on pourra se contenter de s'y référer et de ne traiter que Gregory. Cependant il paraît important que la démonstration de la formule de Taylor faite en classe ait suivi le schéma précédent pour que les étudiants puissent s'y référer.

On peut aussi, dans ce dernier cas, rajouter un problème d'interpolation de type Lagrange. Alors seule une part du schéma est conservée : la recherche d'une base adéquate. Les moyens mis en œuvre pour arriver à cette fin sont différents. En effet pour la formule de Lagrange, le problème est de trouver une base telle que les $(n+1)$ formes linéaires correspondant aux conditions d'interpolation (ie $P \rightarrow P(a_k)$) s'annulent en tous les vecteurs de la base, sauf un, en lequel elles valent 1.

Le caractère unificateur de l'algèbre linéaire sera moins mis en évidence, mais on aura encore, semble-t-il, une bonne illustration du caractère généralisateur.

6 - Quelques propositions concrètes

Je vais donner maintenant un texte d'une troisième version possible.

Le problème qui suit vous montre comment utiliser vos connaissances d'algèbre linéaire pour mettre au point des formules permettant de calculer de façon rapide un polynôme dont on connaît certaines caractéristiques. Ce type de problème, que l'on appelle l'interpolation polynomiale, peut toujours se ramener à résoudre un système d'équations linéaires (méthode directe). Les techniques que vous aurez à mettre en place sont plus "sophistiquées". Outre l'aspect purement mathématique du problème, il vous sera demandé d'expertiser les méthodes développées, c'est-à-dire en terme de coût et de rendement de juger de l'intérêt de ces "méthodes linéaires" plus sophistiquées. N'oubliez pas que dans certaines branches des mathématiques ou paramathématiques (analyse numérique, programmation linéaire...), on traite de problèmes numériques d'interpolation avec parfois une cinquantaine de conditions.

PREMIERE PARTIE

I- Pour rentrer dans le problème

Déterminer, par une méthode directe, tous les polynômes P de degré au plus trois tels que : $P(2) = 1$, $P'(2) = 5$, $P''(2) = 7$, $P'''(2) = 45$.

II- Quand on complique

On désire maintenant déterminer tous les polynômes de degré au plus 13 tels que :

$P(3) = 6$, $P'(3) = 8$, $P''(3) = 54$, $P^{(3)}(3) = 25$, $P^{(4)}(3) = 2$, $P^{(5)}(3) = 12$, $P^{(6)}(3) = 205$, $P^{(7)}(3) = -2$, $P^{(8)}(3) = 0$, $P^{(9)}(3) = -21$, $P^{(10)}(3) = -1$, $P^{(11)}(3) = 2$, $P^{(12)}(3) = 25$, $P^{(13)}(3) = 2$.

Si on appliquait la méthode directe, qu'elle est la taille du système qu'on serait amené à résoudre ?

On va maintenant essayer de trouver une autre façon de déterminer ce(s) polynôme(s).

On rappelle que $R_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n .

D désigne l'opérateur de dérivation, ainsi $P^{(k)}(3) = D^k(P)(3)$.

L'idée consiste à trouver une base de $R_n[X]$, sur laquelle les coordonnées d'un polynôme se calculent facilement à partir des $P^{(k)}(3)$, $0 \leq k \leq n$.

Grâce aux deux questions qui suivent vous arriverez à ce résultat.

1- Déterminez une base $B=(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $R_n[X]$, telle que :

- $D(U_k) = U_{k-1}$, $1 \leq k \leq n$, et $U_0 = 1$.

- $U_k(3) = 0$ si $k \neq 0$

Vérifiez qu'alors $D^p(U_k)(3) = 0$ si $k \neq p$ et $=1$ si $k=p$; $0 \leq k, p \leq n$.

2 - Il existe donc un unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_n)$ tel que $P = a_0 U_0 + \dots + a_n U_n$.

En appliquant les opérateurs D^k , à cette égalité, trouvez les valeurs des a_i .

On obtient ainsi une formule qui s'appelle la formule de Taylor

(Remarque : on peut remplacer 3 par n'importe quelle valeur).

Appliquez cette formule pour trouver le(s) polynôme(s) vérifiant les 14 conditions énumérées ci-dessus.

Quels sont les avantages et les inconvénients que vous pouvez trouver pour les deux méthodes (directe et Taylor) ?

En fonction du contexte, laquelle préféreriez-vous utiliser ?

DEUXIEME PARTIE

I- Pour rentrer dans le problème

Déterminer, par une méthode directe, tous les polynômes P de degré au plus trois tels que :

$$P(0) = 1, P(1) = 5, P(2) = 7, P(3) = 4.$$

II- Quand on complique

On désire maintenant déterminer tous les polynômes de degré au plus 9 tels que :

$$P(0) = 1, P(1) = 5, P(2) = 7, P(3) = 4, P(4) = 5, P(5) = -1, P(6) = -6, P(7) = 0, P(8) = 8, P(9) = -12.$$

Si on appliquait la méthode directe, qu'elle est la taille du système qu'on serait amené à résoudre ?

Comme dans la première partie, on va maintenant essayer de trouver une autre façon de déterminer ces polynômes.

On remarque que l'on connaît les valeurs de P en des points espacés de un en un $(0, 1, 2, 3, \dots)$, l'opérateur $\Delta : P \mapsto Q$ tel que $Q(X) = P(X+1) - P(X)$, très utilisé en interpolation semble donc pouvoir être utilisé.

En effet $\Delta P(0) = P(1) - P(0)$, $\Delta(\Delta P)(0) = \Delta P(1) - \Delta P(0) = P(2) - 2P(1) + P(0)$, ...

On va montrer ainsi que $\Delta^k P(0)$, se calcule facilement si on connaît $P(0), P(1), \dots, P(k+1)$.

Pour cela, dressez un tableau triangulaire dans lequel vous reporterez sur la première ligne les valeurs de P en $0,1,2,\dots,9$, sur la deuxième ligne, les valeurs de ΔP en $0,1,2,\dots,8$, sur la troisième les valeurs de $\Delta^2 P$ en $0,1,2,\dots,7$, etc.

En appliquant la même méthode que pour trouver la formule Taylor, mais en utilisant Δ au lieu de D , et en se plaçant en 0 plutôt que 3 (en effet 0 est le premier point où on connaît la valeur de P), trouver une formule donnant un polynôme P en fonction des valeurs des $\Delta^k P(0)$, $0 \leq k \leq \deg(P)$.

Cette formule est appelée formule de Gregory.

Appliquer-la pour trouver le(s) polynôme(s) vérifiant les 10 conditions énumérées ci-dessus.

Quels sont les avantages et les inconvénients que vous pouvez trouver pour les deux méthodes (directe et Gregory) ?

En fonction du contexte, laquelle préféreriez-vous utiliser ?

Si la formule de Taylor a été démontrée en cours, on ne gardera que la deuxième partie, avec peut-être un rappel sur Taylor.

Le nombre de conditions et les valeurs numériques dans les deux problèmes d'interpolations à 14 et 10 conditions peuvent être modifiés.

J'envisage maintenant d'expérimenter différentes versions de ce problème, dans des universités et des pays différents et de recueillir ainsi une banque des résultats substantiels permettant une meilleure validation de ce travail.

Références

BROUSSEAU 1986, *théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

DOUADY 1986, Jeu de cadres et dialectique outil-objet, in *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7 n°2, p 5-31.

DORIER 1990(a), *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire, approches historique et didactique*, Thèse de l'université Joseph Fourier de Grenoble.

DORIER 1990(b), *Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire*, Cahier DIDIREM n°6, IREM de Paris VII.

DORIER 1990(c), *Analyse de la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire*, Cahier DIDIREM n°7, IREM de Paris VII.

LELOUARD, MIRA, NICOLE 1990, Différentes formes de démonstrations chez les Grecs, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon.

ROBERT 1987, *De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire*, Cahier de didactique des mathématiques n°47, IREM de Paris VII.

ROGALSKI 1991, *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG a première année*, Cahier DIDIREM n°11, IREM de Paris VII.

Partiel de mathématiques (Durée 4 heures)

Rédiger l'algèbre et l'analyse sur des copies séparées
--

ALGÈBRE

I

Déterminer tous les polynômes R à coefficients réels de degré au plus égal à 3 tels que: $R(1)=0$, $R(2)=2$, $R(3)=10$ et $R(4)=30$.

II

Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$$

On définit de même $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta, \dots, \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$.

- 1) Si P est un polynôme de degré n quel est le degré de ΔP ?
- 2) On note $U_0, U_1, U_2, \dots, U_k$ les polynômes 1, X , $X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-k+1)$. Calculer ΔU_k pour tout entier k positif ou nul, puis $\Delta^n U_k$ pour tout couple d'entiers positifs (n, k) . On distinguera plusieurs cas suivant les positions relatives de n et k . Préciser la valeur $\Delta^n U_k(0)$ de $\Delta^n U_k$ en 0.
- 3) Montrer par récurrence sur n que tout élément P de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n est combinaison linéaire de $U_0, U_1, \dots, U_n$ (autrement dit: il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $P = \lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n$).
- 4) Montrer que les applications Δ et $P \mapsto \Delta^k P(0)$ (k entier positif ou nul) sont linéaires. En déduire la formule (dite de Gregory):

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = P(0) + \frac{U_1}{1!} \Delta P(0) + \dots + \frac{U_n}{n!} \Delta^n P(0) \quad (G)$$

- 5) Trouver le polynôme P de degré 3 qui prend les valeurs 0 en $x=0$, 2 en $x=1$, 10 en $x=2$ et 30 en $x=3$. Comparer avec le résultat du I.

III

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré 5, unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) tels que

$$P(0) = 4$$

$$\text{pgcd}(P, P') = X^2 - 3X + 2$$

ATTENTION: il sera tenu compte de la qualité de la rédaction des démonstrations.

TSVP

Devoir n° 7

A rendre la semaine du 18 mars

Le but de ce problème est de vous faire saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire. Il est recommandé de faire ce devoir à deux ou trois, de façon à en discuter entre vous.

I. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré au plus égal à 3 vérifiant $P(1)=0$, $P(2)=2$, $P(3)=10$, $P(4)=30$.

II. On veut déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 7 valant 3 en 0, 5 en 1, -1 en 2, 2 en 3, 0 en 4, 4 en 5, 0 en 6, 3 en 7.

A priori, quel système d'équations êtes-vous amené à résoudre? Plutôt que de se lancer dans cette résolution (avec un grand risque d'erreurs!), on va faire un détour par l'algèbre linéaire, en utilisant pour exprimer un polynôme, d'autres monômes que $1, X, X^2, \dots, X^n$, qui paraissent mal adaptés à notre problème.

Soit $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n .

1°/ Soit $\Delta: \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ l'application qui à un polynôme P fait correspondre le polynôme ΔP défini par $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$.

Exprimer $\Delta(P+Q)$ en fonction de ΔP et de ΔQ . Exprimer de même $\Delta(aP)$ et $\Delta(aP+bQ+cR)$.

Dans la suite on notera Δ^k l'application $\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois) et Δ^0 l'application identique de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$.

2°/ On considère les polynômes

$U_0(X)=1$, $U_1(X)=X$, $U_2(X)=X(X-1)$, $U_3(X)=X(X-1)(X-2)$,
..... $U_n(X)=X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$.

On demande, en utilisant la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$, les polynômes U_k et l'application Δ , de montrer que tout polynôme P de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire à coefficients bien définis des polynômes U_k , et précisément qu'on a

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} U_k \quad [\text{formule de Gregory}]$$

[On pourra calculer $\Delta^k U_q$ et $(\Delta^k U_q)(0)$, en distinguant selon les valeurs de k et q , puis $(\Delta^k P)(0)$, en copiant la méthode utilisée pour montrer qu'un polynôme P peut aussi s'écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P(k)(0)}{k!} X^k.]$$

III. On reprend le problème de déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 7 valant 3 en 0, 5 en 1, -1 en 2, 2 en 3, 0 en 4, 4 en 5, 0 en 6, 3 en 7. Pour cela on suggère de dresser un tableau triangulaire présentant sur la première ligne les valeurs de P aux 8 points considérés, sur la deuxième ligne les valeurs de ΔP aux 7 premiers points, sur la troisième celles de $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$ aux 6 premiers points, etc... et d'appliquer la formule de Gregory. Si on vous demande de calculer $P(10)$, est-il utile de développer P sur $1, X, X^2, \dots$?

Comparer les calculs de cette méthode à ce qu'aurait demandé comme calculs le système que vous avez proposé au début du II.

IV. 1°/ Déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 3 qui vérifient $P(2)=1$, $P'(2)=-3$, $P''(2)=6$, $P'''(2)=-24$, par la méthode de I.

2°/ Développer brièvement dans $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ la même théorie qu'en II, avec les polynômes $1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3, \dots, (X-2)^n$, et avec une application $D: \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$, à définir. En déduire une autre démonstration de la question IV.1°/. Laquelle est la plus simple?

ANNEXE 3

N° Nb	I	II-0	II-1	DUk	DnUk	lin	base	III	BCAN	com	IV1)	2)	com	NOT
A1(3)	1	PS	1	REC	REC	1	DEG	1	1		1	1	1>2	20
A2(1)	PLU	SE	VID					CAL	0	2>1	1			11
A3(1)	1	CE	1SD	1	N/K	0	X=...	1	0		1	1	2>1	18
A4(3)	1	SE	1	1	ITE	0	DEG	1	0	2>1	1	1	1<2	16
A5(2)	PLU	SE	1	1	N/K	1	DEG	1	0	2>1	1	VIT	1>2	14
A6(2)	1	IMP	1	1	N/K	0	DEG	1	0	2>1	1	1	2>1	17
A7(2)	1	SE	1SD					1	0	2>1	1			10
A8(1)	4CAS	SE	1SC	DnP(0)DIR		0	X=...	1	0		1	1	2>1	13
A9(3)	LIN	SE	1	DnP(0)DIR		0	DEG	1	1	2>1	LIN	1	2>1	15
A10(3)	1	SE	1SC	DnP(0)DIR		0	X=...	1	0	2>1	1	1	1<2	16
B1(4)	1	SE	1SC	1	ITE	1	0	CAL	0		1	0		12
B2(2)	4CAS	SE	1SC				LDIR	CAL0	0					6
B3(2)	1	SE	1	1	ITE	1	DEG	1	0	2>1	1	VIT		14
B4(2)	4CAS	SE	1	1	ITE	1	ADM	CAL0	0	2>1	1			12
B5(1)	1	IMP	1SC	1	ITE	1	0	CAL	1	2>1	1	VIT	1>2	8
B6(2)	4CAS		1SC	1	ITE	1	DET	1	0	2>1	4CAS	VIT	2>1	14
B7(3)	4CAS	SE	1SC	1	REC	0	D°/X=	1	0	2>1	1	1	1<2	14
B8(2)	3CAS	IMP	1SC	1	ITE			0,5	0	2>1	1			11
B9(2)	1	SE	1SC	1	ITE	1	0	CAL	0		1	0,5	2>1	13
B10(2)	1		1SC	1	ITE		DET	1	0	2>1	1	VIT	2>1	14
C1(2)	1	SE	1SC	1	REC	1	DEG	1	0	2>1	1	1	1<2	B
C2(1)	1	IMP	1SC	1	IMP	1	DkLB	1!	0	2>1	1			AB
C3(2)	1	SE	1SC	DnP(0)DIR		0	DK	1	0	2>1	1	1	2>1?	B
C4(1)	1	PS	1SC	1	ITE	1	X=/LB	1	1		1			AB
C5(2)	1	PS	1	REC	IMP	1	Dk	1!	0	2>1	1	1	2>1?	AB
C6(2)	1	SE	1SC	REC	IMP	0	D°LB	1!	0	2>1	1	1	1<2	MOY
C7(2)	1	SE	1	1	ITE	1	DET				CAL			MOY
C8(2)	3CAS	SE	1SC	1	IMP	0	DkLB	1	0	2>1	1	1	1>2	AB
C9(2)	4CAS		1SC	1	IMP	0	DkLB	1	0		4CAS			MOY
C10(2)	1	SE	1	1	REC	0	DEG	1	0	2>1	1	1	1>2	B
D1(2)	1	SE	1SC	DnP(0)DIR		0	D°LB	CAL	0	2>1	CAL	0	1>2	11
D2(1)	PLU	SE	1SC					CAL	1		PLU			8
D3(1)	1	IMP	1SC					1	0	2>1	1	ADM	2>1	13
D4(4)	1	SE	1	1	ITE	1	D°LB	1	0	2>1	1	1	2>1	16
D5(3)	8CAS	SE	1					1	0					8
D6(2)	3CAS	IMP	1					1	1	2>1	1	0	2>1	8
D7(1)	1	SE	1SC	1	N/K	0	DEG	1	0	2>1	1	1	1<2	18
D8(3)	1	SE	1			0	DEG	1	0	2>1	1	1	1<2	10
D9(3)	1	SE	1SC	1	ITE	0	D/X=	1	0	2>1	1	1	?	17
D10(3)	1	SE	1SC	1	REC	1	X=...	1	0	2>1	1	1	1<2	18
D11(3)	1	PS	1SD	1	ITE	1	ADM	1	0	2>1	1	1	1<2	17

Explicitation des codes

Le code désignant les groupes d'étudiants permet de connaître le groupe de TD (la lettre) et le nombre d'étudiant (nombre entre parenthèse)

Dans tous les cas un blanc est caractéristique d'une absence de réponse.

Colonne I : réponse au I.

"1" : réponse exacte

"NCAS" : réponse distinguant N de résolution selon le degré (voire la valuation) du polynôme.

"PLU" : réponse comportant un pluriel dans la réponse.

"LIN" : " (...) Les polynômes sont de la forme, $\lambda P(X)$ où $P(X) = \dots$ "

Colonne II-0 : réponse à "quel système êtes-vous a priori amenés à résoudre ?"

"CE" : calcul explicite : résolution complète du système.

"SE" : écriture du système en entier.

"PS" : écriture avec des points de suspension.

"IMP" : implicite : simple évocation du système par sa taille.

Colonne II-1 : réponses à la question II-1°/.

"1" : réponse exacte, la 3ème égalité est montrée comme conséquence des deux premières.

"1SD" : réponse exacte, L'étudiant se contente de dire, sans démonstration, que la 3ème égalité est une conséquence des deux premières.

"1SC" : réponse exacte mais la 3ème est redémontrée, indépendamment des deux autres.

"VID" : vide, suite d'égalités sans démonstration.

Colonne DUk : calcul de ΔU_k .

"1" : réponse correcte par calcul direct.

"REC" : calcul correct par une récurrence.

"IMP" : calcul seulement implicite dans la suite de la réponse.

"DnP(0) DIR" : ce code à cheval sur les deux colonnes signale les groupes n'ayant pas suivi les indications de l'énoncé et ayant calculé $\Delta^n P$ directement, le calcul des $\Delta^n U_k$ apparaît alors en cours de calcul de façon plus ou moins implicite.

Colonne DnUk : calcul de $\Delta^n U_k$ et $\Delta^n U_k(0)$.

"REC" : bonne réponse avec récurrence.

"ITE" : bonne réponse avec itération.

"N/K" : double récurrence sur n et k non effective.

"N>K" : le cas $n > k$ n'est pas envisagé.

"IMP" : calcul seulement implicite dans la suite de la réponse.

Colonne lin : signale l'explicitation de l'utilisation de la linéarité de Δ (code 1) ou non (code 0).

Colonne base : démonstration du fait que les U_i forment une base.

"DEG" ou "D°" : démonstration de l'indépendance des U_i , en disant que leurs degrés sont tous distincts.

"x=..." : en substituant les valeurs 0,1,2 etc... à X dans la combinaison linéaire nulle.

"Dk" : en appliquant Δ^n puis $\Delta^{(n-1)}$ etc... à la combinaison linéaire nulle.

"DET" : en calculant le déterminant des U_i .

"LDIR" : tentative avortée en développant la combinaison linéaire nulle sur la base canonique.

"ADM" : résultat admis.

" /LB" : seul le caractère libre est démontré, par d'argument de dimension pour conclure que c'est une base.

Colonne III : réponse à III.

"1" : réponse exacte avec utilisation de la formule de récurrence.

"1!" : idem, mais U_k est noté $X!/(X-k)!$.

"CAL" : réponse exacte avec calcul des $\Delta^n P(X)$.

"CAL0" : idem avec erreur de calcul.

"0,5" : erreur dans l'explicitation de P.

Colonne BCAN : signale une tentative de développement de P sur la base canonique.

Code 1 ou 0.

Colonne com : commentaire sur la comparaison des méthodes.

"2>1" : la formule de Gregory est mieux que la méthode directe.

Colonne IV1) : réponse à IV-1°/.

cf. Colonne I

Colonne 2) : réponse à IV-2°/.

"1" : réponse exacte.

"0,5" : réponse partiellement exacte.

"0" : réponse fausse ou mal justifiée.

"VIT" : réponse à peu près exacte mais hâtivement traitée.

ADM : formule exacte mais admise.

Colonne com : commentaire sur la comparaison des méthodes.

"2>1" : la formule de Taylor est mieux que la méthode directe.

"1>2" : la méthode directe est mieux que la formule de Taylor.

"1<>2" : chacune a son domaine de rentabilité.

Colonne NOT : note ou appréciation donnée par l'enseignant ayant corrigé le devoir.

ANNEXE 4 :

Réponses des étudiants aux questions où il est demandé de comparer la méthode directe à la méthode plus élaborée (fin de III et IV)

A1(3)

Rien.

La méthode 1 est ici plus performante, ceci est dû au fait qu'on a au départ un système déjà triangulaire.

A2(1)

Il aurait fallu beaucoup plus de calculs en résolvant le système 8×8 .

Rien.

A3(1)

Ce qui est beaucoup plus simple que le système.

Cette méthode (la 2) est vraiment très simple, elle ne nécessite pratiquement pas de calculs.

A4(3)

La méthode développée aux II et III ne demande que 28 additions à 2 ou 3 chiffres alors que la première utilise un nombre important d'additions et de multiplications à plus de 7 ou 8 chiffres. Utiliser la formule de Gregory évite donc largement les erreurs de calcul et simplifie la résolution du problème par un raisonnement mathématique simple.

La 2ème méthode est plus simple à condition d'avoir la formule, mais s'il faut considérer la recherche et la démonstration de la formule utilisée, la première méthode est préférable si ce n'est que le polynôme est exprimé de façon différente avec chaque méthode.

A5(2)

Il est plus facile d'utiliser cette formule que de la mettre sous la forme $1, X, X^2, \dots$ et il est plus facile d'utiliser cette méthode que de résoudre un système 7×7 (car les coefficients sont énormes).

Ici la méthode 1 est plus simple car on a directement un pivot qui est triangulé.

A6(2)

Les calculs sont plus simples et il y a moins de sources d'erreurs.

La deuxième solution est la plus simple car il y a moins de sources d'erreurs dans le cas où k serait plus grand.

A7(2)

Rien.

Rien.

A8(1)

Rien.

Cette méthode (la 2) est la plus simple.

A9(3)

Les calculs de cette méthode sont plus simples et on a beaucoup moins de risques d'erreur que dans la méthode proposée au début du II, où il s'agit de pivoter 7 fois.

La seconde méthode est plus simple.

A10(3)

La méthode utilisant la formule de Gregory permet en effet d'éviter de trop nombreuses erreurs de calcul.

Quand on est dans le cas d'un n petit, les méthodes sont aussi simples l'une que l'autre (mais il faut connaître la formule de Gregory pour que la 2ème soit aussi rapide que la première). Mais quand n est plus grand, la deuxième méthode est plus simple.

B1(4)

Rien.

Rien.

B2(2)

Rien les deux fois.

B3(2)

Cette méthode est de loin la plus rapide : cf le système à 7×7 , énoncé dans l'intro de II.

Rien.

B4(2)

On risque moins de faire d'erreurs avec cette méthode, en effet avec le système 8×8 , les calculs sont longs et fastidieux avec de grands risques d'erreurs.

Rien.

B5(1)

Les calculs que l'on fait par cette méthode sont moins compliqués car ils se font par des additions et des soustractions de termes et ne nécessitent aucune condition et ne permettent pratiquement aucune erreur, alors que l'autre nous oblige à manipuler des rationnels donc source de plusieurs erreurs.

De toute façon (il a arrêté les calculs) les calculs seraient plus compliqués car dans le système, c'est direct, car on ne doit que remonter ($P''' \rightarrow P$), pour trouver les différents coefficients.

B6(2)

On constate qu'avec cette méthode plus courte, on a moins de risques d'erreur qu'avec la méthode du pivot de Gauss.

La méthode avec la formule de Gregory est encore plus simple.

B7(3)

Grace à cette méthode, les calculs sont beaucoup plus simples et le résultat est presque immédiat donc plus rapide. Alors qu'avec le système même avec Gauss, les calculs sont importants, le risque d'erreur de calcul n'en est pas moindre et le fait de trouver les bons résultats improbable.

La méthode la plus simple dans ce cas-ci est la méthode du 1° en effet le système est triangulé et les coefficients sont simples. Dans le deuxième cas il faut définir une application, démontrer des propriétés, le résultat est le même, mais obtenu en plus de temps. L'algèbre linéaire simplifie lorsque le système demandé est important (plus de trois équations) et que les

coefficients sont élevés, mais dans un cas contraire Gauss est plus rapide.

B8(2)

Les calculs de cette méthode sont beaucoup plus simples que ceux qui auraient pu nous être demandés.

Rien.

B9(2)

Rien.

La méthode utilisant l'application D est la plus simple car elle donne le résultat directement alors que la 1) utilise la résolution d'un système qui est plus long et donne occasion à faire plus de faute de calcul.

B10(2)

Cette méthode demande des calculs beaucoup moins développés que la résolution du système.

La deuxième méthode est la plus simple.

C1(2)

Cette méthode est plus rapide.

Cela doit être plus rapide lorsque le degré est élevé.

C2(1)

Cette méthode est donc beaucoup plus rapide et beaucoup moins fastidieuse que la résolution d'un pivot de Gauss. Elle s'avère surtout beaucoup plus efficace dans le cas de polynômes de haut degré.

Rien.

C3(2)

Cette méthode est beaucoup plus simple que ce qu'aurait demandé comme calculs le système du II.

Cette méthode est plus simple car:

- On utilise les dérivées kèmes d'un polynôme de degré plus petit que n, k allant de 0 à n, plus simple que $P(X)$.

- On ne cherche pas les coefficients du tableau dans III

- On utilise $V(X)=1$, $V(X)=(X-X_0) \dots V(X)=(X-X_n)$, base de $P_n(\mathbb{R})$ avec X_0 donné par $P(X_0)$.

C4(1)

Cette méthode (résolution du système) aurait amené énormément plus de calculs.

Rien.

C5(2)

La formule de Gregory est beaucoup plus simple et beaucoup plus facile à utiliser que la formule développée de P.

Cette méthode est plus rapide car elle utilise :

- Les dérivées kèmes d'un polynôme de degré plus petit que n, k allant de 0 à n, plus

simple que $P(X)$.

- Pas besoin de chercher les coefficients du tableau dans III

- Choix des polynômes de la base suivant la valeur de X_0 donnée par $P(X_0) = Y_0$ dans l'énoncé :

$W(X)=1, W(X)=(X-X_0) \dots W(X)=(X-X_n)$, base de $P_n(\mathbb{R})$.

en utilisant la structure d'espace vectoriel de $P_n(\mathbb{R})$ et l'application D , on en arrive à la formule de Taylor :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X_0)}{k!} W_k$$

C6(2)

Si on résoud le système, il risque d'y avoir beaucoup d'erreurs ! Mais en faisant attention, on ne fait pas d'erreurs de calcul !!! ... Pour calculer $P(10)$, il n'est pas nécessaire de développer, on utilise la formule avec les factorielles, ce qui est moins laborieux. On n'obtient pas exactement les coefficients du polynôme cherché, car l'écriture est sous forme factorisée, mais on fait certainement beaucoup moins d'erreurs de calcul en utilisant cette méthode.

La première méthode est plus rapide car le système est déjà triangulé, mais s'il y a beaucoup de coefficients, on risque de faire beaucoup d'erreurs de calcul (surtout si c'est des grands chiffres) en remontant le pivot de Gauss. De plus on peut également faire des erreurs en dérivant simplement le polynôme. La deuxième méthode est plus rapide, de plus on fait peu de calculs, donc presque pas d'erreurs, mais pour utiliser cette méthode, il faut se souvenir de la formule. Conclusion : Si le polynôme est comme dans le 1), on utilise cette méthode car il y a peu de calculs, sinon on utilise l'autre qui ira beaucoup plus vite.

C7(2)

Rien.

Rien.

C8(2)

(...) Si le polynôme est unique, cette méthode est beaucoup plus rapide, efficace et sûre, qu'un classique tableau de coefficients avec pivot de Gauss, qui est quasi insoluble sans faire de fautes (à part sur ordinateur).

L'intérêt de la méthode est moins évident qu'en II. En effet ici on dérive. Par exemple si on donne un polynôme de degré 7 comme au II, et qu'on donne la valeur en un point "a" de la dérivée 0ème à la 7ème, on n'a pas de difficulté à trouver les coefficients, puisque la dérivée 7ème est constante. Appliquer la méthode du IV1), pour un polynôme de degré 7, n'est pas plus compliqué que pour un polynôme de degré 3. En plus on préfère généralement travailler avec la base canonique, parce que le polynôme est utilisable pour d'autres problèmes (exemples : développements limités).

C9(2)

Rien.

Rien.

C10(2)

La méthode du pivot de Gauss appliquée au système du début du II se serait avérée beaucoup plus longue et plus difficile au niveau des calculs, alors que la méthode utilisée ci-dessus ne nécessite que des calculs assez simples. On a donc un risque moins grand d'erreurs.

On trouve bien la même chose qu'au 1). Il est cependant plus rapide de calculer le système que de chercher puis démontrer une formule analogue à la formule de Gregory (ceci est dû au fait que le système est très simple).

D1(2)

Les calculs dans cette méthode sont beaucoup plus simples que ceux qu'il aurait fallu faire pour le système à 7 équations et 7 inconnues en effectuant le pivot de Gauss : trop grands coefficients à manipuler.

La méthode la plus simple ici est celle du IV-1°.

D2(1)

Rien.

Rien.

D3(1)

Cette méthode est plus rapide car la résolution du système de 8 équations à 8 inconnues serait fastidieuse.

La méthode la plus simple est celle trouvée dans 2° (surtout si le polynôme est de degré élevé).

D4(4)

Après avoir passer "un peu" de temps à établir cette théorie et la formule de Gregory, il devient très simple et très rapide de déterminer un polynôme de degré quelconque, connaissant les conditions imposées à celui-ci pour $X=0$ à n . Cette méthode est aussi plus sûre que la résolution classique d'un système comme au I.

En choisissant judicieusement la base de $P_n(\mathbb{R})$ et l'application D en fonction des valeurs connues que prend P pour des X donnés, il est très facile et rapide (avec un risque d'erreur limité) de déterminer le polynôme recherché (encore faut-il trouver l'application et la base appropriées, ce qui ne doit pas toujours être aussi simple).

D5(3)

Rien les deux fois .

D6(2)

On remarque que la méthode utilisant l'algèbre linéaire au niveau des matrices et des résolutions de systèmes d'équations est beaucoup plus risquée au point de vue calculs que cette seconde méthode que l'on peut caractériser de rapide et simple.

Cette méthode est, encore une fois, plus simple que la méthode nécessitant une matrice puisqu'il n'y a aucun calcul de dérivées.

D7(1)

Cette méthode est plus courte et source de moins d'erreurs que celle qu'on aurait utilisée en 2).

Une fois la théorie élaborée à partir de $1, X-2, \dots, (X-2)^n$, la deuxième méthode est aussi rapide voire plus rapide que la précédente qui reste cependant une solution simple puisque le système se résout très rapidement. Cette première reste peut-être d'ailleurs préférable puisqu'elle nous donne P sur $1, X, \dots, X^n$.

D8(3)

Cette méthode est beaucoup plus rapide que la résolution d'un système de 8 équation à 8 inconnues par la méthode du pivot de Gauss. Lorsque $P(X)$ aurait été trouvé par la méthode de IIa), il aurait encore fallu calculer $P(10)$.

La méthode utilisée ci-dessus apparaît comme étant la plus simple (en comparaison du pivot de Gauss), lorsque l'on possède la formule de l'application et que le degré du polynôme est élevé.

D9(3)

Les calculs de cette méthode sont plus simples que ceux demandés par la résolution du système avec un moindre risque d'erreur.

Ici les coefficients sont simples mais l'algèbre linéaire est utilisée dans des cas complexes.

D10(3)

On voit qu'ici l'algèbre linéaire est d'un grand secours, car la résolution d'un système de 7 équations à 7 inconnues demande de nombreux calculs et même avec Gauss cela est plutôt hasardeux, tandis qu'ici les calculs sont peu nombreux, cela est donc plus sûr et plus rapide.

Ici le calcul de $P(X)$ était plus simple avec le 1), car le système était triangulé donc on avait tout de suite les coefficients de P , mais s'il s'agissait comme pour le II, de trouver un polynôme de degré 7, la démonstration serait de loin la meilleure car plus rapide et plus sûre.

D11(1)

Cette méthode demande un certain nombre de calculs mais ceux-ci sont beaucoup moins lourds que si on avait dû résoudre le système.

Si l'on connaît la formule trouvée précédemment, la deuxième méthode est plus simple quoique la première ne demande pas énormément de calculs.

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Janvier 1992
ISBN : 2-86612-107-4
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05