

**LE POURQUOI ET LE COMMENT D'UNE INGENIERIE
(LA CONVERGENCE UNIFORME)**

Par J. ROBINET

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ - PARIS VII

LE POURQUOI ET LE COMMENT D'UNE INGENIERIE

(LA CONVERGENCE UNIFORME)

Ce texte a deux objectifs, l'un est d'exposer la construction d'une ingénierie visant à introduire le concept de convergence uniforme, l'autre est de montrer à l'aide de cet exemple quels sont les principes généraux qui président à la construction d'une suite de séquences visant à introduire un concept nouveau. A cette occasion, nous détaillerons les choix globaux que nous faisons pour atteindre notre but ; ces choix portent essentiellement sur :

- les contenus et la conception des activités,
- ce qui est dit par l'enseignant,
- les activités des étudiants.

Des travaux nombreux existent déjà concernant l'introduction de nouveaux concepts dans l'enseignement obligatoire, nous allons essayer de révéler les démarches qui nous ont conduits à certains choix pour la construction d'une ingénierie destinée à introduire la convergence uniforme en deuxième année de DEUG. Puis, nous montrerons comment, une fois ces choix faits, nous avons effectivement réalisé les séquences. Enfin, nous dirons brièvement comment réagissent généralement les étudiants et nous terminerons sur la "morale " qu'on peut tirer de cet exemple pour d'autres ingénieries.

NOS CHOIX

Sur les contenus , la conception et la forme des activités.

Notre préoccupation principale est que les concepts mathématiques apparaissent comme des réponses à des problèmes à la portée des étudiants, lorsque c'est possible. Ce n'est pas toujours le cas, en effet certains concepts ne peuvent pas être introduits comme réponse à un problème au niveau où ils sont introduits : calcul algébrique en quatrième , convergence en première et même en première année de DEUG (voir sur ces points les travaux de R.Douady et d'A.Robert).

Il s'agit donc pour nous de trouver un problème pour lequel le concept de convergence uniforme apparaisse comme une réponse incontournable et satisfaisante. La première idée qui vient alors est d'étudier la genèse historique du concept visé. En effet, si les mathématiciens ont introduit ce concept, c'est qu'ils en avaient besoin et cela peut nous aider à problématiser. Nous allons donc faire un peu d'histoire.

Un peu d'histoire

La convergence uniforme est née de manière assez originale, puisqu'elle apparaît dans l'histoire comme hypothèse à rajouter dans un théorème pour le rendre correct. En effet, Cauchy énonce en 1821 dans son cours à l'Ecole Royale Polytechnique le théorème suivant : "Lorsque, les termes de la série renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes des fonctions continues de x dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi dans le voisinage de cette valeur particulière fonction continue de x ." Les mathématiciens montrent assez vite que les hypothèses sont insuffisantes, en 1826 Abel donne comme contre-exemple la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$, en revanche, il faut attendre 1853 pour que Cauchy lui-même trouve la condition correcte, l'énonçant sous la forme du critère de Cauchy uniforme. Ce temps assez long entre la découverte d'un contre-exemple et l'énoncé correct de l'hypothèse supplémentaire pourrait nous faire craindre quelques

difficultés chez nos étudiants, essayons donc de cerner quels étaient à cette époque les handicaps de Cauchy.

En fait, pour que Cauchy puisse trouver la condition supplémentaire, il doit imaginer comment doivent être "proches" les fonctions pour que la continuité puisse être conservée ; or, il pouvait difficilement se poser le problème en ces termes, en effet la notion de fonction n'était pas encore très claire. Il y avait à l'époque une certaine confusion entre la fonction f et l'ensemble $\{ f(x) \mid x \text{ réel} \}$, cet ensemble lui-même n'étant pas défini de manière aussi précise qu'ici. La notion de continuité elle-même n'était pas si bien définie qu'aujourd'hui et dans la définition donnée par Cauchy, on peut voir aussi bien la définition de la continuité en un point que la définition de la continuité uniforme sur un voisinage de ce point. Une autre difficulté à laquelle se heurtait Cauchy était qu'il n'y avait pas de construction des réels et qu'il devait se contenter des intuitions fournies par les propriétés de la droite géométrique. Or, lorsqu'on doit manier des notions comme celles de "sup", cela risque fort d'être insuffisant.

Nous allons arrêter là nos considérations historiques bien qu'elles ne nous aient pas fourni un problème⁰ à la portée de nos élèves, en effet la question "Quelle condition doit-on imposer aux fonctions f_n continues en x_0 qui sont les termes d'une suite convergente au voisinage de x_0 pour que la limite f soit continue en x_0 ?" ne peut être résolue, si elle est posée aussi brutalement. Et pourtant cette étude nous a donné des renseignements intéressants, mais il nous faut en quelque sorte les "actualiser". Le problème est de définir la proximité de deux fonctions pour que le théorème soit vrai, un problème antérieur est donc de chercher à définir la notion de proximité pour les fonctions. D'autre part, cette étude nous fait dégager les notions qu'il faut relativement bien maîtriser avant de pouvoir approcher la convergence uniforme et que nous aurions pu négliger : les notions de fonction et de réel. Nous avons maintenant une idée du problème à donner à résoudre, il nous faut maintenant trouver comment le formuler pour qu'en s'appuyant sur leurs connaissances, les étudiants puissent l'aborder.

1) Appui sur du connu

Les étudiants de deuxième année de DEUG ont déjà des connaissances en analyse, et l'idée de s'appuyer sur celles-ci va orienter nos choix.

Les réels

Les étudiants ont des connaissances solides sur les propriétés algébriques des réels, mais ils ont des connaissances plus floues sur d'autres points comme la complétude ou la borne supérieure. En particulier, une écriture du type $\sup_{x \in I} |f(x)|$ est source de difficultés pour

les étudiants¹. Si nous leur posons le problème de la proximité des fonctions, nous ne pourrions pas le poser dans le cadre algébrique car les connaissances des étudiants sur la borne supérieure ne seront pas suffisantes, il va donc falloir trouver un cadre où la perception va pallier le manque de connaissances et quand il s'agit des réels on pense à la droite, donc au cadre géométrique. Plus précisément encore, il nous faut un cadre géométrique dans lequel on puisse exprimer des données algébriques et on pense alors au cadre de la géométrie analytique.

⁰Remarque : Nous venons de voir que la genèse historique fournit parfois des problèmes qui ne sont pas immédiatement adaptables aux possibilités de nos étudiants, mais il est d'autres cas où elle ne fournit pas du tout de problème car elle montre que certains concepts n'ont pas été introduits en réponse à des questions, mais pour d'autres raisons : réorganisations des connaissances par exemple (voir sur ce point le travail de genèse historique de J.L.Dorier sur les concepts d'algèbre linéaire) [1].

2 ¹Voir sur ce point les résultats énoncés dans [2].

La notion de fonction

Les étudiants en ont une conception très correcte, mais en règle générale, ils ne savent opérer sur les fonctions qu'à travers leur expression algébrique (on vient de voir qu'ils ne maîtrisent pas bien une expression du type $\sup_{x \in I} |f(x)|$) ou à travers leur représentation graphique. Cela nous conforte dans l'idée que c'est bien dans le cadre de la géométrie analytique que nous devons poser notre problème.

La notion de convergence

Les étudiants ont une conception suffisante de la convergence des suites de réels, pour pouvoir utiliser la convergence simple pour trouver des limites de suites de fonctions. Nous savons que leur conception de la convergence simple n'est pas encore parfaite² et donc qu'il nous faudra choisir des suites de fonctions dont la convergence simple est facile à prouver (à l'aide du théorème sur les suites monotones bornées ou des théorèmes algébriques (somme, produit, quotient)).

2) Utilisation de changement de cadres

Arrivées à ce point de notre réflexion, nous avons l'intention de poser le problème de proximité des fonctions dans le cas particulier de la convergence des suites de fonctions et c'est dans le cadre de la géométrie analytique que les étudiants ont le plus de capacités pour le résoudre. Mais c'est dans le cadre algébrique qu'en fin de compte nous voulons le résultat et pour enclencher les changements de cadres nécessaires, nous allons poser le problème en termes algébriques et demander immédiatement une traduction dans le cadre graphique.

3) Le problème posé doit être assez riche

Nous savons par notre étude historique que la notion de convergence uniforme n'est pas triviale, il va donc falloir que les étudiants s'investissent assez fortement dans leur travail et qu'ils sentent que les résultats établis sont importants. Pour cela, le problème doit contenir en lui-même une assez grande richesse, nous allons essayer de remplir cette condition en incluant dans l'étude suffisamment d'études d'exemples et de contre-exemples.

4) Place de la séquence par rapport au cours

Notre intention est de donner du sens au concept de convergence uniforme en le faisant construire par les étudiants eux-mêmes dans une situation où il est nécessaire, la séquence se situe donc obligatoirement avant le cours.

Travail en petits groupes

De manière générale, nous faisons travailler les étudiants par petits groupes de trois ou quatre chaque fois que nous les plaçons dans une situation problématique complexe et que plusieurs points de vue peuvent se compléter ou s'affronter. Dans la phase où il faudra "inventer" la convergence uniforme, les étudiants travailleront en petits groupes, ils y gagneront en confort, en sécurité et en inventivité. De plus la diversité de leurs connaissances permettra au groupe de s'appuyer sur des notions plus riches et plus correctes de réel, de fonction et de convergence³. Dans les phases de réinvestissement, nous demanderons aux étudiants de travailler seuls, pour pouvoir contrôler les acquis de chacun sur la nouvelle notion.

²A. Robert a montré dans sa thèse que ce qui est bien connu et imaginé, c'est la convergence des suites monotones bornées et que le reste est plus ou moins bien maîtrisé selon les étudiants.[3]

3 Voir sur ce point les travaux d'A.M. Perret-Clermont sur le conflit socio-cognitif.[4]

LA SEQUENCE

Nous allons d'abord décrire la séquence elle-même puis les commentaires que l'enseignant doit faire tout au long du déroulement de la séquence.

La séquence du côté des étudiants

Dans la première séance, nous donnons le travail suivant :
"Convergence des suites de fonctions"

Consigne 1. Tracer les graphes des fonctions $f_1, f_2, f_3, \dots, f_p, \dots, f_q, \dots$ pour les suites de fonctions données ci-dessous par leur formule algébrique. Nous vous demandons de tracer tous ces graphes parce ce que nous voudrions essayer de définir une notion de convergence pour les suites de fonctions ; nous nous intéressons donc à ce qui se passe pour les graphes lorsque n devient de plus en plus grand. Faites tous les graphes correspondants à une même suite sur un même graphique et faites un graphique par suite.

$$\underline{S_1}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

$$\underline{S_2}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

$$\underline{S_3}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

$$\underline{S_4}. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = x \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = \frac{1}{n} \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_5}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^2n}{1+x^2n}$$

$$\underline{S_6}. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) \text{ pour } x \in]-\infty, +\infty[\\ f_n(x) = nx \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = 1 \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_7}. \forall n \geq 2 \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = \frac{x}{n} \text{ pour } x \in [0, 1] \\ f_n(x) = \frac{n^2-x}{n(n^2-1)} \text{ pour } x \in]1, n^2[\\ f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]n^2, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_8}. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = nx \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -nx+2 \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_9}. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) \text{ pour } x \in]-\infty, +\infty[\\ f_n(x) = n^2x \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = n \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_{10}}. \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = n^2x \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -n^2x+2n \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$\underline{S_{11}}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

$$\underline{S_{12}}. \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$$

Lorsque chaque groupe d'étudiants a terminé les 12 graphiques (voir graphiques en annexe), il continue à travailler pour chercher la deuxième question.

Consigne 2

Elle est donnée oralement par l'enseignant.

a) Parmi toutes ces suites de fonctions, peut-on "raisonnablement" dire que certaines d'entre elles convergent ? Si oui, lesquelles et quelle est leur limite ? Justifiez vos réponses.

b) Effectuez un classement des douze suites, en regroupant celles qui vous paraissent converger de la même façon. Explicitiez vos critères de classement.

Lorsque chaque groupe a terminé, il envoie un représentant exposer ses résultats au tableau. L'enseignant juge du moment où il peut donner la consigne suivante. Les étudiants travaillent toujours en groupes.

Consigne 3

Elle est donnée oralement par l'enseignant.

Essayez de donner une définition mathématique pour chacune des notions suivantes :

1-La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

2-La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Chaque groupe propose ses formulations et l'enseignant aide en proposant des contre-exemples ou en donnant des précisions. A la fin de la séance, il propose aux étudiants de mémoriser les définitions correctes qu'ils ont trouvées. Il les accompagne d'illustrations graphiques.

Ensuite les étudiants travaillent individuellement.

Consigne 4

Essayez de donner une définition mathématique pour chacune des notions suivantes :

1-La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

2-La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'enseignant ramasse les productions des étudiants et "corrige" en faisant participer la classe, c'est-à-dire en donnant les définitions correctes sous la forme trouvée par les étudiants et en les accompagnant d'illustrations graphiques.

Pour la dernière consigne les étudiants sont de nouveau en petits groupes.

Consigne 5

Elle est donnée oralement par l'enseignant.

La propriété suivante est-elle vraie ou fausse, si elle est vraie démontrez-la, si elle est fausse donnez un contre-exemple :

"Soient des fonctions réelles f_n ($n \in \mathbb{N}$) définies sur voisinage I de x_0 , continues en x_0 , si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I , alors f est continue en x_0 ."

Lorsque tous les groupes ont trouvé un contre-exemple qu'ils ont exposé, l'enseignant donne l'énoncé correct et signale aux étudiants qu'ils vont maintenant suivre le cours sur la convergence uniforme. Les travaux dirigés qui accompagnent le cours peuvent commencer par les démonstrations concernant les douze suites déjà étudiées (voir démonstrations en annexe) et se continuer par les habituels exercices d'applications.

La séquence du côté des enseignants

Consigne 1

L'enseignant n'intervient pas dans cette phase, il circule entre les groupes pour corriger assez rapidement les erreurs de tracé qui peuvent se produire ; pour cela, il a intérêt à avoir sous les yeux un corrigé. Remarquons que cette phase, nécessaire pour que les étudiants aient bien pris conscience des évolutions des graphes, peut être allégée par l'utilisation des calechettes graphiques. L'enseignant donne la consigne suivante lorsque tous les graphiques sont tracés.

Consigne 2

Le rôle de l'enseignant est important dans cette phase. Il n'intervient qu'au moment des exposés au tableau. L'enseignant ne prend pas parti mais organise les discussions qui ne manquent pas de se produire lorsque les critères de classement diffèrent. Si une assertion fautive a l'air d'être acceptée par la classe, il doit exhiber un contre-exemple. Si une explication n'est pas claire, il peut poser des questions, mais il doit prendre garde à ne pas induire des réponses. Il ne doit pas être trop exigeant sur la formulation à ce moment pour qu'une formalisation trop précoce ne fasse pas perdre le sens. Il conclut la séance en expliquant que certaines des notions mises en évidence par les étudiants s'appellent "convergence simple" et "convergence uniforme" et cela en utilisant les critères énoncés par les étudiants. Par exemple, s'ils ont caractérisé les suites qui convergent uniformément par "ce sont les suites qui convergent sans problème en s'aplatissant", il reprend cette formulation.

Consigne 3

De nouveau le rôle de l'enseignant est primordial. Il doit en fin de séance donner des définitions correctes les plus proches possibles de celles fournies par les étudiants. Il doit, de plus, les accompagner d'illustrations graphiques qu'il commente en rapport avec les graphes des suites déjà étudiées. Finalement, il doit conclure en commentant le fait que les étudiants ont trouvé deux moyens de dire que des fonctions sont proches et qu'il y en a d'autres adaptées à d'autres problèmes (par exemple une fois, un étudiant a introduit la convergence L_1 lors de la séquence).

Consigne 4

L'enseignant donne au tableau les définitions correctes en les illustrant de graphiques.

Consigne 5

L'enseignant énonce le théorème correct et annonce le début du cours sur la convergence uniforme ; s'il aime l'histoire, il peut raconter brièvement l'histoire de ce concept, ce qui a le mérite de montrer aux étudiants comment se construisent certaines notions mathématiques.

ADEQUATION ENTRE LA SEQUENCE ET NOS INTENTIONS

Avant toute utilisation auprès d'étudiants, on peut déjà regarder si la séquence est bien conforme aux conditions que nous avons énoncées.

*Le concept est bien problématisé, il s'agit de caractériser des comportements de suite de fonctions pour pouvoir en déduire des définitions de modes de convergence. C'est un problème "théorique" qui est posé aux étudiants, la convergence uniforme n'y est pas un outil de résolution mais un outil de classement.

*La séquence s'appuie à la fois sur des connaissances des étudiants et sur leur perception. En effet, cette dernière leur permet de faire des conjectures sur les limites éventuelles des suites et leurs connaissances sur les fonctions et sur la convergence simple leur permet d'écarter un certain nombre de conjectures fausses et de justifier en partie au moins les conjectures justes.

*Toute la séquence repose sur un aller et retour continu entre le cadre graphique et le cadre algébrique, dans le cadre graphique les étudiants peuvent conjecturer mais ils doivent retourner au cadre algébrique lorsqu'ils veulent opérer des contrôles, c'est ce va et vient qui va permettre de définir la convergence simple (la convergence uniforme est très frappante sur le graphique et nous avons introduit la suite S_1 qui est perceptivement classée

avec les suites convergeant uniformément et qui est classée avec celles qui ont une bosse glissante lorsque des critères sont trouvés).

UN COMPTE RENDU RAPIDE DES COMPORTEMENTS DES ETUDIANTS

Ce qui suit n'est pas un rapport d'expérimentation, mais un résumé des comportements observés destiné à montrer ce qu'on peut attendre de cette ingénierie. Cette séquence a été observée dans 7 "classes"⁴ avec 7 enseignants différents. Nous allons donner un compte rendu global pour les phases qui se sont toujours déroulées à peu près de la même façon et nous détaillerons pour 6 groupes la phase de classement des suites.

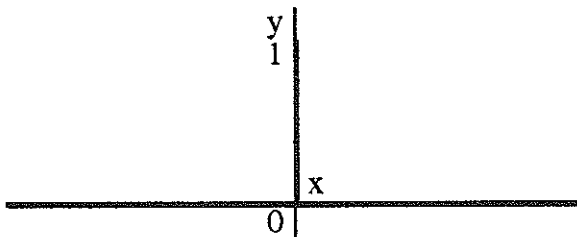
La phase d'exécution des représentations graphiques se passe toujours de la même façon, les étudiants d'un groupe se répartissent le travail, cette phase dure de 30 minutes à 1h 30 selon les calembours dont disposent les étudiants.

La phase de recherche des limites entraîne des comportements très similaires d'un groupe à l'autre :

S_1 ne pose aucun problème, elle converge tellement évidemment vers la fonction nulle que dans un premier temps aucun étudiant ne ressent le besoin d'une argumentation.

Pour S_2 la plupart des étudiants pensent qu'elle converge vers la fonction nulle, mais au moins un étudiant par groupe rechigne parce que la pente en 0 est 1 pour tout n et que la fonction nulle a une pente nulle à l'origine. Les arguments qui emportent la conviction sont du type perceptif : "Tu vois bien que les bosses s'aplatissent".

Pour S_3 , la grande majorité des étudiants donne comme limite :



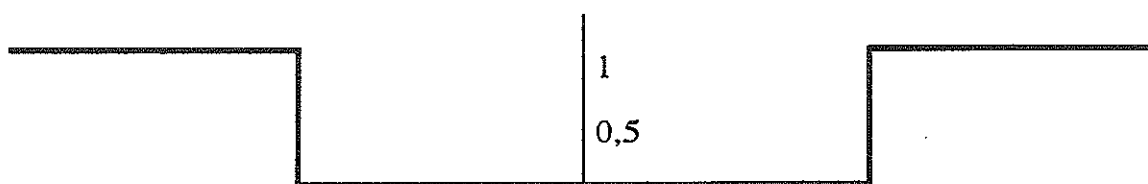
Dans plusieurs petits groupes, il se crée un consensus pour dire que c'est bien le graphe de la limite, mais dans chaque "classe" il y a quelques étudiants pour réfuter cela car "ce n'est pas une fonction" et bien que rien n'ait été imposé, ils veulent que la limite d'une suite de fonctions soit une fonction. Rappelons que le "principe de Leibniz"⁵ était couramment utilisé avant Cauchy. Du débat conduit par l'enseignant, il ressort que la limite finalement adoptée est la fonction définie par $f(x)=0$ si $x \neq 0$ et $f(0)=1$. L'argument : "la limite est ainsi car $\lim(f_n(x))=0$ si $x \neq 0$ et $\lim(f_n(0))=1$ lorsque n tend vers l'infini" ne sort que rarement pour cette suite.

Pour S_4 , il n'y a pas de discussions, pour tous la limite est la fonction nulle.

⁴Classe de mathématiques spéciales pour les classes préparatoires et groupe de TD de deuxième année de DEUG SSM pour l'Université.

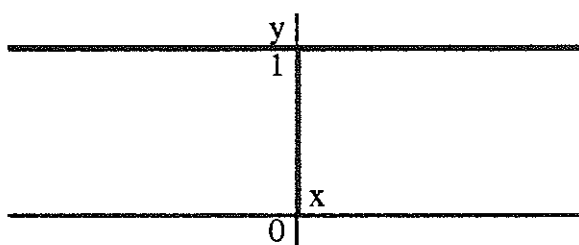
⁵On le trouve énoncé ainsi dans "L'exposition élémentaires des principes de calculs supérieurs" de L'Huilier (1786) : "Si une quantité variable susceptible de limite jouit d'une propriété, sa limite jouit de la même propriété."

Pour S_5 , il y a de nouveau de grands débats. La majorité des étudiants propose le graphe ci-dessous comme graphe de la limite.



Cette limite est très vite contestée : "ce n'est pas le graphe d'une fonction !". Certains proposent alors pour limite $f(x)=0$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x)=1$ pour $|x| > 1$. L'argument de la convergence simple apparaît alors : "Pour tout n , $f_n(1) = \frac{1}{2}$ donc à la limite $f(1) = \frac{1}{2}$ ". Cet argument emporte la conviction et la limite finalement acceptée est $f(x)=0$ pour $-1 < x < 1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(x)=1$ pour $|x| > 1$.

Pour S_6 , les discussions, lors des exposés à propos de S_3 et S_5 , ont fait évoluer les étudiants et même ceux qui avaient trouvé pour graphe de la limite le graphe ci-dessous :



donnent comme limite lors de leur exposé $f(x)=1$ pour $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

Pour S_7 , il n'y a pas de contestation, la limite est la fonction nulle, les argumentations sont fondées sur le fait que "la bosse s'aplatit".

Pour S_8 , il y a dans les petits groupes des discussions acharnées, les propositions exposées sont les suivantes :

- pour tout x , $f(x)=0$,
- pour tout $x \neq 0$, $f(x)=0$ et $f(0)=1$,
- pour tout $x \neq 0$, $f(x)=0$ et 0 et 1 pour $f(0)$,
- la suite ne converge pas.

Après discussion entre les différents groupes, c'est la fonction nulle qui est retenue avec des argumentations alliant perception et convergence simple : "Pour n'importe quel x ça tend vers 0, mais y aura toujours un n pour que la bosse soit à côté, y aura toujours une bosse. Si on dit que converger, ça veut dire que pour tout x $f_n(x)$ a une limite alors elle converge vers 0." ou encore "Plus n sera grand, plus l'intervalle où ce n'est pas nul est petit, on finira par ne plus le voir."

Pour S_9 , tous les étudiants sont unanimes pour déclarer cette suite divergente, le commentaire le plus précis est le suivant : "On a $f_n(x)=n$ et quand n croît, cela tend vers $+\infty$, ça tend vers une fonction qui n'est définie qu'en 0 par $f(0)=0$."

Pour S_{10} , les avis sont partagés et les débats acharnés aussi bien dans les petits groupes que dans les phases collectives et les argumentations trouvées pour la convergence ne convaincront pas forcément tous les étudiants (d'où l'importance de revenir sur chaque suite pour faire des démonstrations lorsque les définitions seront bien précisées). Les partisans de la divergence ont un argument percutant : "Le chapeau, il monte vers l'infini, elle diverge !". Pour les autres, c'est moins clair : " $f(0)=0$ et puis c'est la fonction nulle,

c'est défini en 0, $f(0)=0$, tout ce qui est à droite de $\frac{2}{n}$ c'est nul et $\frac{2}{n}$ tend vers 0 donc ce sera nul partout."

Pour S_{11} , cette suite est classée par tous comme divergente, mais dans la phase collective des affinements sont faits : " On peut dire limite nulle sur $] -1,1[$ et comme

$|f_n(1)| = |f_n(-1)| = \frac{1}{n}$ en -1 et 1 c'est encore 0 et ailleurs elle n'est pas définie."

Pour S_{12} , les étudiants reconnaissent le même problème que pour S_8 , et après les mêmes débats et les mêmes argumentations concluent à une limite nulle.

La phase de classement des suites prend un temps assez long à cause de l'exposé au tableau qui est nécessaire pour faire apparaître la contestation (en particulier celle de l'enseignant, si tous les étudiants laissent passer un raisonnement erroné). Donnons un tableau qui résume les résultats obtenus dans 5 des groupes après exposé de chaque sous-groupe et avant intervention de l'enseignant (sauf pour S_1) .

SUITES	GROUPE 1	GROUPE 2	GROUPE 3	GROUPE 4	GROUPE 5
S_2, S_4, S_7	Convergent naturellement.	Convergent sans problème.	Convergent uniformément, s'aplatissent régulièrement.	Les sup et les inf des fonctions tendent vers 0 lorsque n croît.	Les bornes se rapprochent d'une limite.
S_3, S_5, S_6	Convergent vers une limite non continue.	Convergent vers une limite non continue.	$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim f_n(x)$ existe, les suites convergent point par point vers une limite non continue.	Convergent vers une limite non continue.	Classées comme "les bornes sont fixes", elles sont ensuite classées avec S_8 et S_{12} .
S_8, S_{10}, S_{12}	Suites ayant une bosse qui glisse vers O_y .	Convergent sans problème à un point près où il y a un problème.	$\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim f_n(x)$ existe, les suites ont une bosse amincissante.	Les extrema n'interviennent pas pour la convergence.	x fixé, la suite $f_n(x)$ converge. (S_{10} n'est pas classée là).
S_9, S_{11}	Divergentes.	Divergentes.	Divergentes.	Divergentes.	Divergentes, y compris S_{10} .
S_1	Classée d'abord avec S_2, S_4, S_7 puis avec S_8, S_{10}, S_{12}	Classée d'abord avec S_2, S_4, S_7 puis avec S_8, S_{10}, S_{12} ¹⁰	Classée d'abord avec S_2, S_4, S_7 puis avec S_8, S_{10}, S_{12} ¹¹	Classée d'abord avec S_2, S_4, S_7 puis avec S_{10} ¹²	Classée d'abord avec S_{10} , divergente puis avec $S_3, S_5, S_6, S_8, S_{12}$ (x fixé, la suite $f_n(x)$ converge).

¹⁰Après intervention de l'enseignant.

¹¹Après intervention de l'enseignant.

¹²Après intervention de l'enseignant.

Dans cette phase, le rôle de l'enseignant est très important pour plusieurs raisons :

-La place de S_1

En effet, cette suite est souvent classée avec les suites uniformément convergentes et c'est un des effets de l'utilisation des graphes, puisque cette suite converge uniformément sur le compact où l'on étudie la fonction. Il existe des groupes où les étudiants remarquent que $\forall n, f_n(n)=1$ et souvent ont du mal à conclure, c'est le rôle de l'enseignant de les encourager à tester les critères qu'ils ont donnés pour les diverses classes de suites afin de la placer dans la classe adéquate.

A la suite de l'expérimentation, il semble qu'il vaudrait mieux demander de classer cette suite seulement une fois que le groupe-classe s'est mis d'accord sur des critères de classement, en effet cette suite permet de les tester efficacement, puisque la perception entraîne une réponse fausse et qu'il y a donc problème.

-Les énoncés des critères de classement

Les énoncés des étudiants sont parfois très vagues, par exemple "les suites S_2, S_4, S_7 convergent naturellement" s'est transformé après une demande de précision en : "les suites S_2, S_4, S_7 ont des bosses qui s'aplatissent" et l'enseignant a enchaîné en montrant qu'à cause de cette propriété, pour n assez grand, tous les graphes se trouvent dans une bande de largeur aussi petite que l'on veut autour de l'axe des x .

-La convergence simple

Dans les critères de classement, elle peut ne pas intervenir, en effet le classement le plus naturel en utilisant les représentations graphiques est le suivant :

les suites qui convergent uniformément,

les suites qui ne convergent pas uniformément car ce sont des suites de fonctions continues qui convergent vers une fonction discontinue,

les suites qui ne convergent pas uniformément parce que la borne supérieure de $|f_n - f|$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini,

les suites qui divergent.

En fait, la convergence simple est implicitement utilisée pour trier les suites convergentes et les autres, à l'exception des suites qui convergent uniformément pour lesquelles les étudiants n'éprouvent pas le besoin de montrer qu'elles convergent simplement.

C'est donc le rôle de l'enseignant de demander pourquoi telle ou telle suite a été déclarée convergente, c'est particulièrement intéressant de poser la question pour S_{10} parce qu'on s'aperçoit à cette occasion que certains se sont ralliés à la position majoritaire sans être vraiment convaincus. Pour pouvoir défendre leur point de vue, les partisans de la convergence sont obligés d'énoncer un critère convaincant pour l'enseignant. Dans un premier temps, la réponse est souvent $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ et l'enseignant demande alors comment ils ont trouvé cela et on obtient alors deux types de réponses, soit " x fixé la suite $f_n(x)$ converge vers 0" ou "pour tout x réel, la suite $f_n(x)$ converge vers 0". Dans la première formulation, il est clair que la suite $f_n(x)$ est une suite numérique, mais dans les deux cas, c'est le rôle de l'enseignant de faire remarquer que chaque suite numérique $f_n(x)$ est convergente.

-Les deux sortes de convergence

A la fin de la séance, l'enseignant doit conclure en signalant que le mode de convergence "pour tout x réel, la suite numérique $f_n(x)$ est convergente" s'appelle la convergence simple et que le mode de convergence où "les sup et les inf tendent vers 0" s'appelle la convergence uniforme (sans introduire sup et inf si les étudiants n'ont parlé que de bosses) en faisant remarquer que pour n assez grand, tous les graphes se trouvent dans une bande de largeur aussi petite que l'on veut autour de l'axe des x .

La phase suivante est individuelle, chaque étudiant doit fournir deux définitions. Donnons les résultats dans un tableau (cette phase n'a pas eu lieu dans le groupe 2 parce que l'enseignant n'a pas eu le temps de le faire après les classements de graphe et n'a pas voulu repasser cette question au début de la séance suivante. Dans le groupe 3, les étudiants n'ont pas voulu répondre individuellement et ont donné la même réponse pour tous les étudiants du groupe).

MODE DE CONVERGENCE	Nombre d'élèves Groupe 1	Nombre d'élèves Groupe 3	Nombre d'élèves Groupe 4	Nombre d'élèves Groupe 5
CONVERGENCE SIMPLE				
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$	10	8	6	2
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$	1	4	2	0
$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$	0	4	6	6
Erreurs dans la quantification : $\forall x$ mal placé, $\forall \varepsilon$ absent, etc.	0	0	4	2
Nombre de réponses presque correctes / Nombre de réponses totales	$\frac{11}{11}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{8}{10}$
CONVERGENCE UNIFORME				
$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$	3	4	8	2
$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} n \geq N \Rightarrow f_n(x) < \varepsilon$	0	8	1	2
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = 0$	0	0	2	4
$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = 0$	7	4	0	2
Pour tout ε , à partir d'un certain rang tous les graphes des f_n sont dans une bande de largeur ε autour de $x'Ox$	0	0	2	0
$\forall x \in \mathbb{R} f_n(x) < g_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$	0	0	0	1
$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$	0	0	2	0
f_n a pour limite une fonction continue	0	0	1	0
Erreurs dans la quantification : $\forall x$ mal placé, $\forall \varepsilon$ absent, etc.	1	0	0	1
Nombre de réponses presque correctes / Nombre de réponses totales	$\frac{10}{11}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{9}{10}$

Remarquons que dans les groupes 1 et 3, aucun redoublant n'a donné de définition (tous les étudiants n'ont pas accepté de nous remettre les définitions qu'ils avaient écrites) et pourtant on a quand même des réponses entièrement quantifiées, preuve s'il en faut que certains étudiants manipulent aisément le formalisme ; ce n'est pas le cas de tous, puisque 16 d'entre eux oublient " $\forall n$ " ce que nous avons compté comme une erreur vénielle.

En conclusion de cette phase, on peut voir que les étudiants de ce niveau sont capables pour la plupart d'entre eux de formaliser ce qu'ils ont trouvé. L'enseignant conclut en donnant lors de la correction toutes les définitions correctes des deux convergences avec une illustration graphique pour la convergence uniforme.

La phase de découverte de contre-exemples n'a pas été observée, mais elle ne pose pas de problème, beaucoup de contre-exemples ayant été introduits lors de la séquence et ayant été étiquetés par les étudiants comme des suites ayant une limite non continue (S_3, S_5, S_6).

La phase de démonstration des affirmations, une fois que les définitions correctes ont été données, n'a pas été observée non plus, c'est le travail habituel fait en travaux dirigés pour les premiers exercices sur la convergence uniforme. Ces démonstrations seront données en annexe.

Le cours va avoir lieu sur une notion à laquelle les étudiants doivent donner du sens parce qu'ils ont été sensibilisés sur le fait que c'est un des modes de convergence possibles pour les suites de fonctions, qu'il a des propriétés intéressantes sur les graphes et qu'il est nécessaire pour que la continuité soit conservée par passage à la limite ; de plus, ils ont des images dans la tête ce qui leur donne un "herbier" d'exemples ou de contre-exemples.

Essayons de généraliser la démarche que nous avons eu lors de la fabrication de cette séquence à toute ingénierie.

Quels choix a un enseignant lorsqu'il prépare des séquences d'enseignement ?

Tout d'abord chaque enseignant a des idées générales sur les mathématiques et sur leur enseignement qui viennent de ses diverses expériences et qui le guident de manière inconsciente⁹; nous nous intéressons, ici, aux choix conscients qu'il peut faire.

1) Choix sur les contenus et la conception des activités

-Si le cours apparaît comme une réponse à un problème qui a un sens pour les étudiants, ils sont plus motivés pour apprendre les résultats du cours et surtout, le risque de perte de sens est beaucoup moins grand. On peut donc choisir lorsque c'est possible de construire ainsi le cours mais ce n'est pas toujours possible et c'est parfois trop coûteux en temps.

-Les étudiants ne pourront démarrer seuls dans les activités que si celles-ci s'appuient sur du connu, donc s'il semble important qu'ils puissent travailler seuls (par exemple pour qu'ils puissent s'approprier une question), on peut alors choisir des activités qui débouchent sur des résultats nouveaux mais qui s'appuient sur de l'ancien bien maîtrisé.

-Les problèmes qui permettent aux étudiants d'avoir de nombreux points de vue sur une même notion sont des problèmes où cette notion apparaît dans des cadres différents (en géométrie, dans le numérique, dans le formel...). Certains problèmes sont riches et peuvent être abordés tout au long de la scolarité, par exemple, résoudre $f(x)=0$ est un de ces problèmes. Nous pensons que les étudiants ne peuvent avoir des conceptions correctes des notions mathématiques que s'ils les ont fait fonctionner dans divers cadres, le choix de problèmes qui le permettent est donc lié au degré de compétence que l'on va exiger des

⁹ Voir les textes sur les représentations métacognitives des enseignants de A.Robert et J.Robinet. [5]

étudiants sur une question donnée. C'est inutile si, par exemple, on veut seulement leur apprendre un algorithme performant pour réussir à l'examen ; il sera alors plus performant de répéter des problèmes standardisés.

2) Choix de ce qui est dit par l'enseignant

Dans cet exemple nous n'avons pas développé ce point, mais dans d'autres circonstances, cela peut être très important.

-L'enseignant peut choisir de ne parler que de mathématiques sans faire de commentaires à propos des notions en jeu.

-Nous pensons que l'enseignant peut aider à l'apprentissage des élèves par le discours qu'il peut faire sur les mathématiques et leur enseignement :

il peut replacer une notion nouvelle dans le réseau des notions connues par un commentaire historique ou épistémologique,

il peut exhiber des méthodes qui permettent de traiter des classes de problèmes (par exemple, faire remarquer aux étudiants que s'ils sèchent sur un problème se situant dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est peut-être qu'il faut passer dans le cadre numérique et donc utiliser une base),

il peut expliquer aux étudiants ce qu'il pense nécessaire pour apprendre des mathématiques, nous pensons que cet apprentissage n'est possible que si les étudiants résolvent seuls ou en groupes suffisamment de problèmes assez riches.

il peut essayer d'explicitier une partie du contrat qui régit son travail et celui de ses étudiants,

il peut essayer de structurer son cours de manière à mettre explicitement en relief (par des commentaires métamathématiques) les points importants et les liaisons avec les autres parties du cours (ce travail est fait spontanément par les très bons étudiants, mais cela aide les moins bons et fait gagner du temps à tout le monde).

3) Choix sur la forme des activités des étudiants,

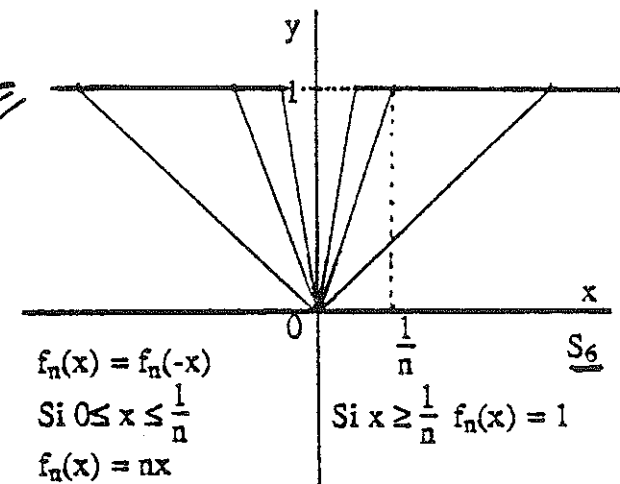
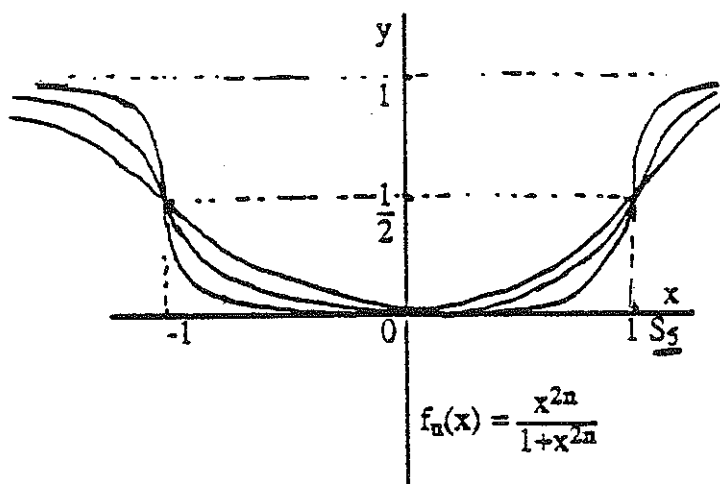
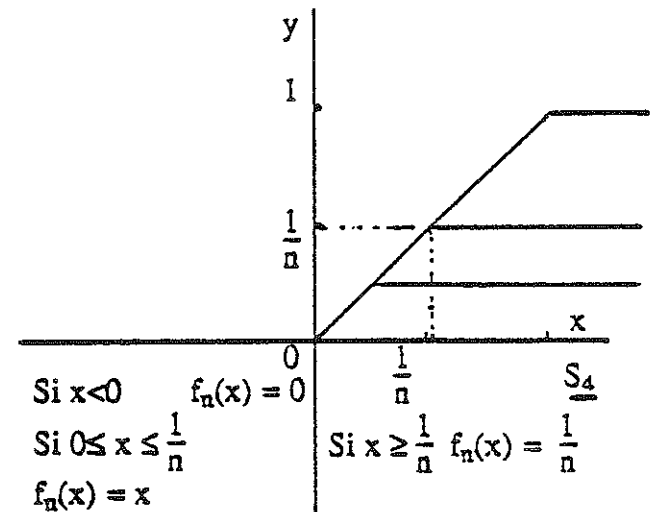
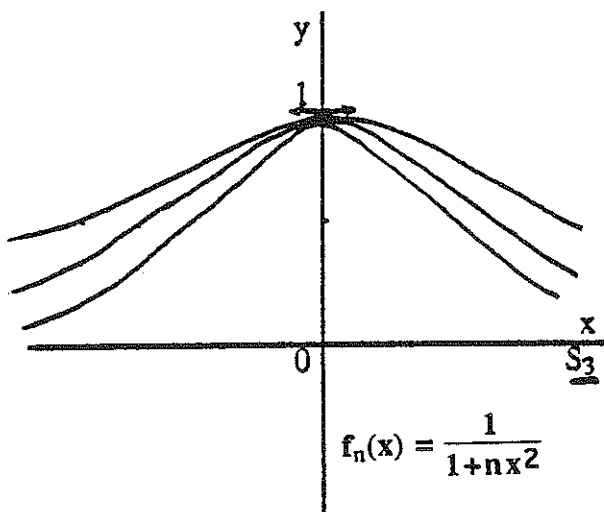
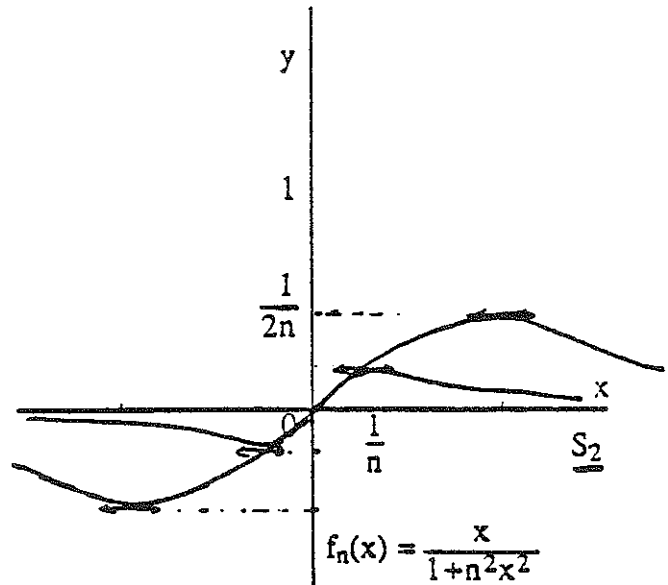
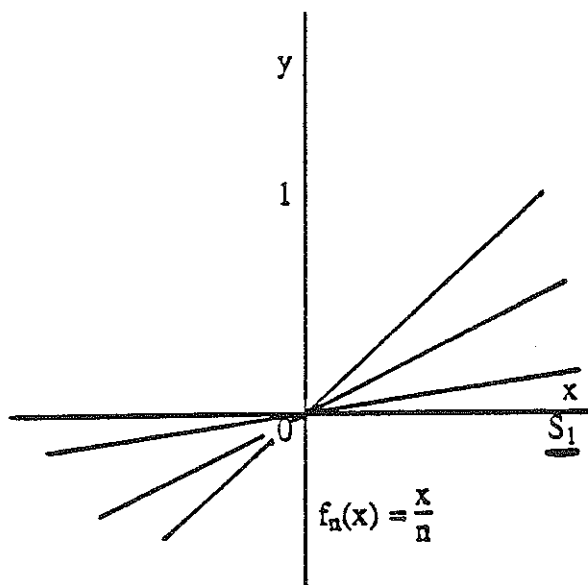
-On peut choisir de faire travailler les étudiants de manière individuelle (par exemple lors des résolutions d'exercices de renforcement pour qu'ils puissent juger de leurs compétences personnelles) ou en petits groupes (par exemple lorsqu'ils cherchent des problèmes complexes ou lorsqu'ils doivent mettre en oeuvre des méthodes diverses).

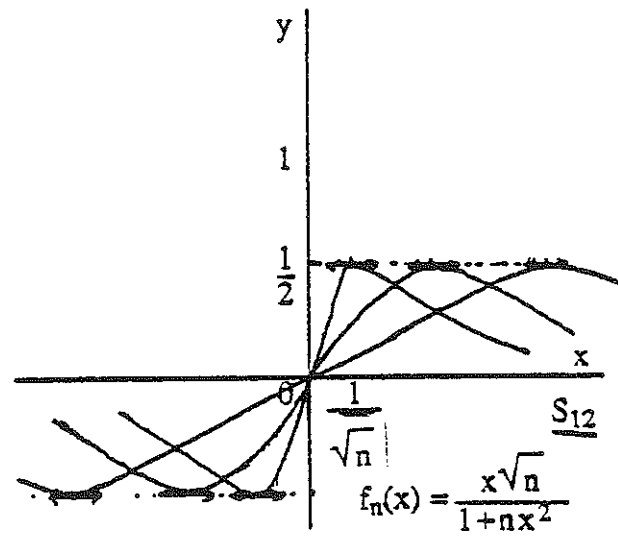
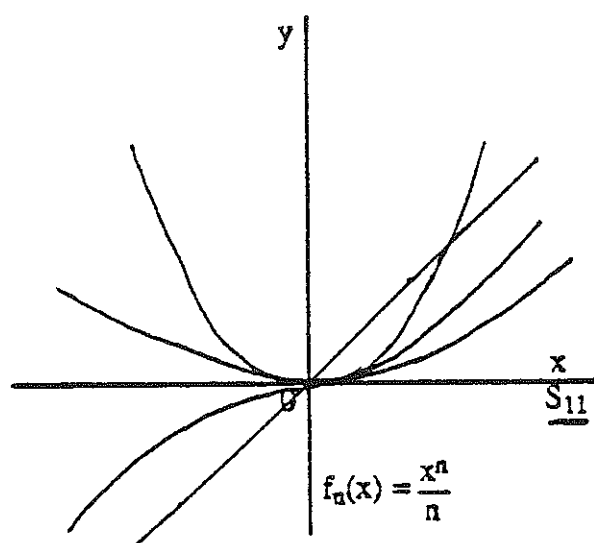
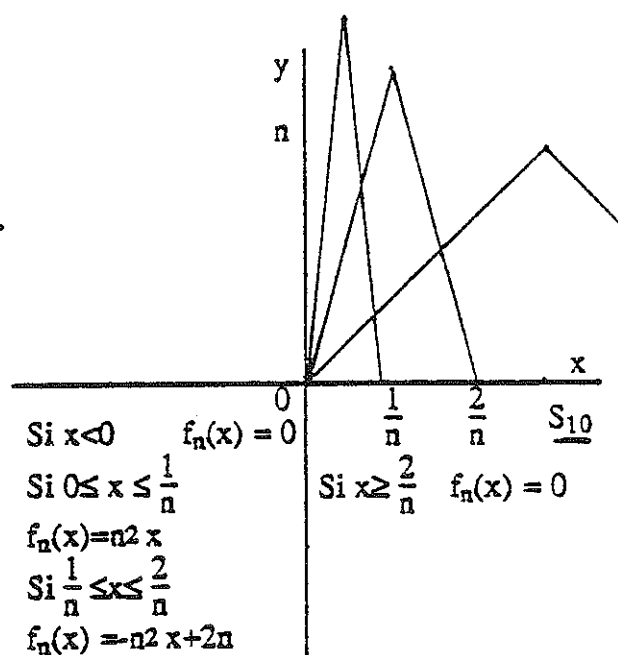
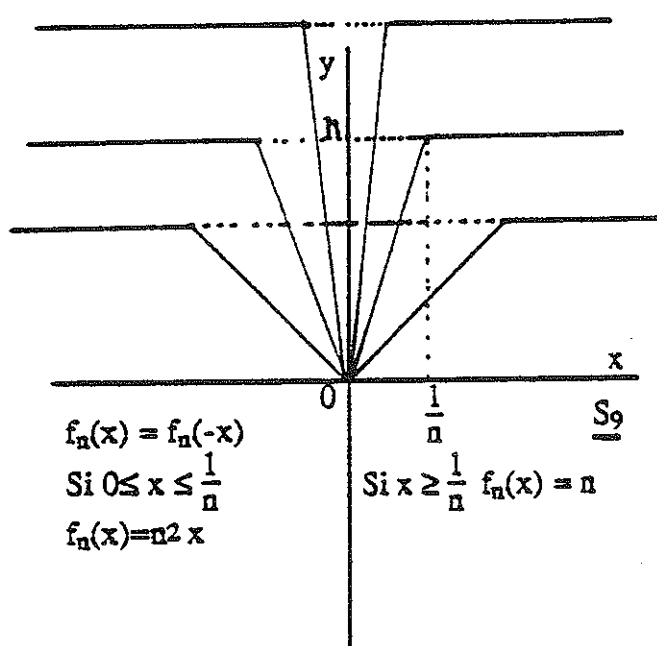
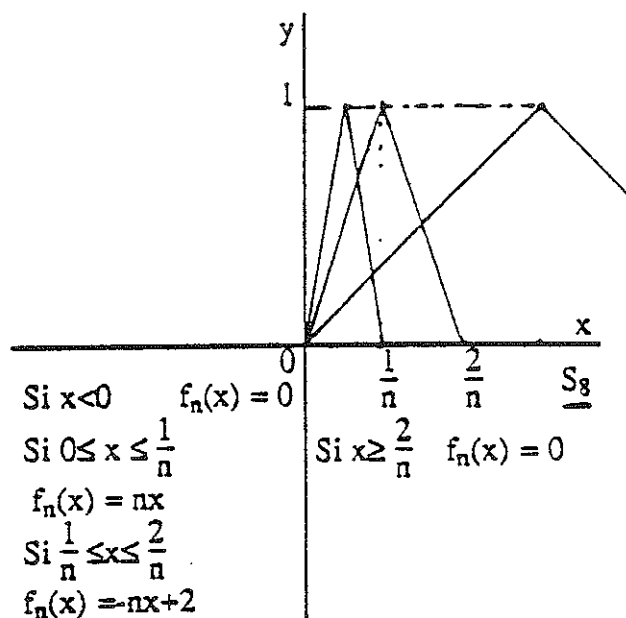
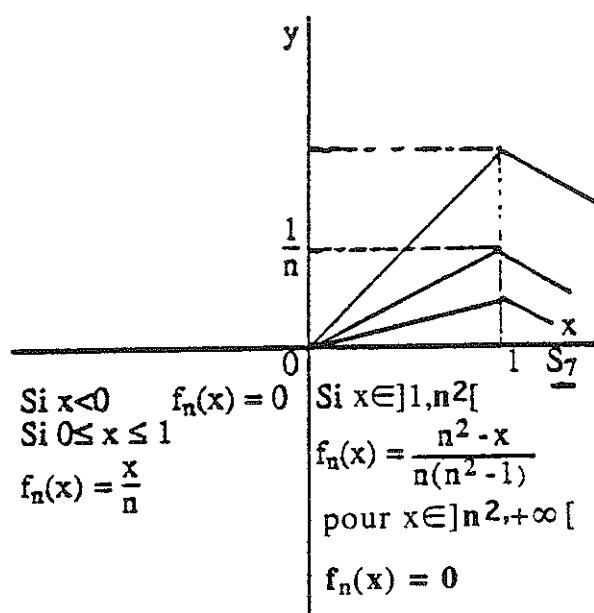
-Il existe un certain nombre de logiciels et il peut être intéressant de les utiliser, ils permettent par exemple d'avoir très vite des représentations graphiques ou de visualiser des phénomènes (rotation des plans lors de la méthode du pivot par exemple).

3) Choix sur l'évaluation,

-Il y a aussi le choix pour les formes à donner à l'évaluation. S'il n'y a comme évaluation que des résolutions d'exercices standardisés en temps limité, il est peu probable que les étudiants s'investissent dans la recherche de problèmes complexes et cela peut donc nuire à l'apprentissage. Il faut donc penser à d'autres formes possibles d'évaluation : examens partiels en temps non limité, évaluation sur projet, par exemple.

ANNEXE 1
LES DIFFERENTES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES





ANNEXE 2

LES DEMONSTRATIONS

*Suite S_1

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

Convergence simple.

Si x est un réel quelconque, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme

Calculons $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$, on trouve $+\infty$, la suite ne converge donc pas uniformément vers

0 sur $\mathbb{R}$. En revanche, si on calcule $\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)|$, on trouve $\frac{\sup(|a|, |b|)}{n}$ dont la limite est 0 lorsque n tend vers l'infini ; la suite converge donc uniformément vers la fonction nulle sur tous les compacts de $\mathbb{R}$.

*Suite S_2

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Convergence simple.

Pour x réel quelconque non nul, $f_n(x)$ a même limite que $\frac{1}{n^2x}$, donc la suite converge simplement sur tout $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle (pour tout n $f_n(0) = 0$).

Convergence uniforme.

Chaque fonction $|f_n|$ présente un maximum pour $x = \frac{1}{n}$, $|f_n(\frac{1}{n})| = \frac{2}{n}$ et donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|) = 0$, la suite converge donc uniformément vers la fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$.

*Suite S_3

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

Convergence simple.

Pour x réel quelconque non nul, $f_n(x)$ a même limite que $\frac{1}{nx^2}$, donc la suite converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle et $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(0)) = 1$. On note f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Convergence uniforme.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} \frac{1}{1+nx^2} = 1$, donc la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_4

$$\text{Si } x < 0 \quad f_n(x) = 0$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \quad f_n(x) = x$$

$$\text{Si } x \geq \frac{1}{n} \quad f_n(x) = \frac{1}{n}$$

Convergence simple.

Si x est un réel quelconque, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme.

Chaque fonction $|f_n|$ présente un maximum pour $x = \frac{1}{n}$, $|f_n(\frac{1}{n})| = \frac{1}{n}$ et donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|) = 0$, la suite converge donc uniformément vers la fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$.

*Suite S_5

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

Convergence simple.

Si $|x| < 1$, $|f_n(x)|$ a même limite que x^{2n} donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de même

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(-1)) = \frac{1}{2} \quad \text{et si } |x| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1, \text{ la suite converge}$$

simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $|x| < 1$, $f(x) = \frac{1}{2}$ pour $|x| = 1$,

$f(x) = 1$ pour $|x| > 1$.

Convergence uniforme.

Si $|x| < 1$, $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, si $|x| = 1$ $|f_n(x) - f(x)| = 0$, si $|x| > 1$,

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^{2n}}$ donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$, donc la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_6

$$f_n(x) = f_n(-x)$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \quad f_n(x) = nx$$

$$\text{Si } x \geq \frac{1}{n} \quad f_n(x) = 1$$

Convergence simple.

Pour x réel quelconque non nul, il existe un indice à partir duquel $f_n(x) = 1$ et donc

$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) = 1$, donc la suite converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle et

$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(0)) = 0$. On note f la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Convergence uniforme.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} |f_n(x) - 1| = 1$, donc la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_7

$$\text{Si } x < 0 \quad f_n(x) = 0$$

$$\text{Si } 0 \leq x \leq 1 \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

$$\text{Si } x \geq 1 \quad f_n(x) = \frac{n^2 - x}{n(n^2 - 1)}$$

Convergence simple.

Si $|x| \leq 0$, $|f_n(x)| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de même si $0 \leq |x| \leq 1$,

$$|f_n(x)| = \frac{x}{n} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

et si $|x| \geq 1$, $|f_n(x)| = \frac{n^2 - x}{n(n^2 - 1)}$ a même limite que $\frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle f .

Convergence uniforme.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1)| = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ la suite converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_8

Si $x < 0$ $f_n(x) = 0$

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ $f_n(x) = nx$

Si $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ $f_n(x) = -nx + 2$

Si $x \geq \frac{2}{n}$ $f_n(x) = 0$

Convergence simple.

Si $|x| \leq 0$, $|f_n(x)| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de même si $|x| \geq 0$, il existe un indice à partir duquel $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle f .

Convergence uniforme.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{n})| = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1$, la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_9

$f_n(x) = f_n(-x)$

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ $f_n(x) = n^2 x$

Si $x \geq \frac{1}{n}$ $f_n(x) = n$

Convergence simple.

Si $|x| > 0$, il existe un indice à partir duquel $f_n(x) = n$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$, la suite ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme.

Il n'y a pas possibilité d'une telle convergence car si la suite convergeait uniformément vers une fonction f , elle convergerait alors simplement vers f (en effet si $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$).

*Suite S_{10}

Si $x < 0$ $f_n(x) = 0$

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ $f_n(x) = n^2 x$

Si $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$ $f_n(x) = -n^2 x + 2n$

Si $x \geq \frac{2}{n}$ $f_n(x) = 0$

Convergence simple.

Si $|x| \leq 0$, $|f_n(x)| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, de même si $|x| \geq 0$, il existe un indice à partir duquel $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, la suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle f .

Convergence uniforme.

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(\frac{1}{n})| = n$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$, la suite ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

*Suite S_{11}

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

Convergence simple.

Si $|x| > 1$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$, la suite ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme.

Il n'y a pas possibilité d'une telle convergence car si la suite convergerait uniformément vers une fonction f , elle convergerait alors simplement vers f (en effet si $\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ alors } \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Remarquons que $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$, donc la suite converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

*Suite S_{12}

$$f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+n x^2}$$

Convergence simple.

Pour x réel quelconque non nul, $f_n(x)$ a même limite que $\frac{1}{\sqrt{n} x}$, donc la suite converge simplement sur tout $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle (pour tout n $f_n(0) = 0$).

Convergence uniforme.

Chaque fonction $|f_n|$ présente un maximum pour $x = \frac{1}{n}$, $|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{1}{2}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|) \neq 0, \text{ la suite ne converge donc pas uniformément sur } \mathbb{R}.$$

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] J.L.DORIER, "Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire" Cahier de Didirem n°7, publication de l'Irem Paris 7 (Paris 1990).

[2] J.ROBINET, "Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur", thèse d'état, Université Paris 7 (Paris 1984).

[3] A.ROBERT, "L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur", Recherches en didactique des mathématiques Vol. 3 n°3, Ed. La pensée sauvage (Grenoble 1983).

[4] A.N.Perret-Clermont, "La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale", Ed. Peter Lang (Berne 1979).

[5] A.ROBERT et J.ROBINET, "Les représentations métacognitives des enseignants", Cahier de Didirem n°1, publication de l'Irem Paris 7 (Paris 1989).

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. La convergence uniforme.

AUTEUR :

Robinet Jacqueline

RESUME :

Cet ouvrage a deux objectifs. L'un est l'exposition de la construction d'une ingénierie didactique pour la convergence uniforme en deuxième année de DEUG, l'autre est la présentation des principes généraux de l'ingénierie didactique même. Le deuxième objectif est atteint à l'aide de l'exemple traité. On y trouve les raisons didactiques qui déterminent le choix d'une ingénierie, le cadre théorique de référence et la méthodologie suivie. La séquence des activités conçues et les comportements des étudiants à la suite de l'expérimentation sont exposés. On porte l'attention sur les choix de l'enseignant dans la préparation d'une séquence d'enseignement.

MOTS CLES :

Convergence-didactique-ingénierie-didactique-mathématiques-méthodologie-recherche graphique-suite-travail en groupe.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Janvier 1992
ISBN : 2-86612-105-8