BONNES VIEILLES PAGES

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 8. NOUVELLE SÉRIE. 8.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Note sur l'histoire de l'infiniment petit.

Par G. VIVANTI à Mantova.*

Introduction.

Si nous essayons de parvenir au concept d'infiniment petit au moyen de la division indéfiniment répétée d'une grandeur continue, par exemple d'un segment rectiligne, nous nous trouvons libres de premier abord de choisir entre deux formes-limites différentes, celle de segment plus petit qu'aucun assignable, et celle de point inétendu. Mais, d'une part, on ne saurait regarder un segment, si petit qu'il soit, comme le résultat final de la division, et par là comme indivisible; de l'autre, la décomposition d'une ligne en points inétendus est une chose inconcevable. On peut échapper à cette double difficulté en envisageant le point, non pas comme le resultat *dernier* de la décomposition de la ligne, mais comme l'élément *premier* capable de lui donner naissance, et en lui attribuant par là *la puissance d'engendrer le continu*. Il naît ainsi, en opposition à *l'infiniment petit ponctuel* ou *nul* et à l'infiniment petit doué d'extension (*infiniment petit déterminé* ou *actuel*), *l'infiniment petit intensif*, c'est à dire inétendu mais ayant l'aptitude à engendrer les grandeurs continues.

Avant même que les discussions sur la nature de l'élément de l'étendue eussent excité l'intérêt des mathématiciens, il s'agita entre ceux-ci une question qui n'en diffère pas essentiellement, celle de *l'angle de contingence*. Cet angle, d'après la prop. 16 du 3e livre des Éléments d'EUCLIDE, est moindre que tout angle rectiligne, c'est donc par rapport à cet angle ce que c'est qu'un infiniment petit par rapport à une grandeur finie; et l'on a longuement discuté s'il est absolument nul ou s'il a quelque grandeur.

Mais l'histoire de l'infiniment petit doit avoir égard, non-seulement aux façons diverses dont il a été conçu, mais aussi aux formes sous lesquelles il a été introduit dans l'analyse.

L'introduction de l'infiniment petit dans les mathématiques a eu lieu à une époque relativement récente, lorsque les procédés des anciens (connus plus tard sous le nom de *méthode d'exhaustion*) ne parurent plus offrir une voie assez courte et directe pour la résolution des nombreux problèmes géométriques et mécaniques auxquels donnait naissance le progrès continuel des arts et des sciences. C'est alors que naquit et se développa la *méthode des indivisibles*; mais celle-ci fut bientôt remplacée par d'autres plus parfaites, qui peuvent se grouper sous deux titres principaux: *méthode des infiniment petits* et *méthode des limites*.

* Abrégé d'un travail plus étendu paru sous le titre: *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* (Mantova, Mondovi 1894).

1

Dans cette courte note j'essaierai de tracer rapidement l'histoire de l'infiniment petit jusqu'à CAUCHY. Le plan que je suivrai résulte naturellement des considérations exposées plus haut; il me reste seulement à avertir que, quoique la question dont il s'agit ici se trouve aux bornes des mathématiques et de la philosophie, je ne dépasserai pas en général ces bornes, et je passerai sous silence, sauf quelque exception, tous ceux qui ont considéré l'infiniment petit en philosophes seulement et sans égard à son application aux mathématiques.

I. Le concept d'infiniment petit.

§ 1. *L'infiniment petit nul.* — Il est bien naturel de se demander avant tout qu'est ce que c'était l'infiniment petit pour l'inventeur du Calcul infinitésimal. Malheureusement l'examen des écrits de LEIBNIZ ne nous amène à aucune conclusion positive à ce sujet; car à côté de quelque morceaux où il nie l'existence de grandeurs infiniment petites autres que le zéro, nous en trouvons d'autres où il exprime une opinion diamétralement opposée, et d'autres encore où il se déclare incertain. On rencontre même dans ses ouvrages de jeunesse sur la dynamique le concept d'infiniment petit intensif (*conatus*), tel qu'il a été introduit dans la science par HOBBES.

On remarque la même inconséquence chez quelques-uns de ses élèves les plus illustres, tels que GRANDI et JACQUES BERNOULLI. En effet, pendant que l'un et l'autre affirment qu'on ne saurait point concevoir de quantité infinie ou infiniment petite déterminée, le premier dit qu'on doit regarder toute chose comme actuellement infinie, attendu qu'elle est indéfiniment divisible, le second observe que l'axiome que les différences de grandeurs égales sont égales n'a plus lieu en général si ces différences sont infiniment petites par rapport aux grandeurs mêmes.

WOLF aussi, qui dans son *Ontologia* écrit: *Infinite parva impossibilia sunt,* s'exprime bien moins clairement dans sa *Dissertatio algebraica,* où il semble même admettre l'existence de grandeurs infiniment petites déterminées.

D'ALEMBERT déclara le premier ouvertement la guerre aux concepts d'infini et d'infiniment petit, en soutenant que ce ne sont vraiment que des manières abrégées de s'exprimer, et que le calcul infinitésimal n'a à faire en réalité qu'à des grandeurs finies.

Son grand contemporain EULER, en partant du même principe, à savoir, qu'il n'y a pas d'autre infiniment petit que le zéro, mais ne pouvant se résoudre à nier absolument à l'infiniment petit toute existence réelle, parvint à une conclusion inattendue. Il remarqua que, pendant que la différence de deux grandeurs nulles est toujours nulle, leur rapport peut être quelconque, car $n \cdot 0 = 0$; mais, au lieu d'en déduire que le rapport de deux zéros est complètement indéterminé, il en conclut au contraire qu'on peut envisager ce rapport comme une vraie grandeur. Rien ne s'opposait donc, suivant lui, à ce qu'on regardât comme tel le rapport de deux infiniment petits, bien que ceux-ci fussent rigoureusement nuls. Il faut toutefois remarquer qu'EULER ne réussit pas à établir le calcul sur un principe si peu satisfaisant, mais dut recourir pour cela au concept de limite, ainsi qu'on le verra plus loin (II, § 4).

§ 2. *L'infiniment petit actuel.* — Il y a bien peu d'auteurs qui aient affirmé ouvertement l'existence de grandeurs différentes de zéro mais moindres qu'aucune grandeur assignable. Le plus illustre parmi eux c'est JEAN BERNOULLI, qui eut une longue discussion avec LEIBNIZ à ce sujet. Il résulte aussi de la correspondance de LEIBNIZ, que L'HOSPITAL et VARIGNON auraient admis l'infiniment petit actuel. A une époque plus récente, on peut citer FONTENELLE et POISSON, auxquels il faut peut-être ajouter LESAGE, le premier inventeur d'un télégraphe électrique; voir sa lettre publiée par LHUILIER à la fin de son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.*

§ 3. *L'angle de contingence.* — La proposition d'EUCLIDE rappelée au début avait amené les mathématiciens à regarder l'angle de contingence comme une vraie grandeur de la même nature que les angles rectilignes. Mais il s'ensuivait de là un curieux paradoxe. Un rayon mobile peut partir d'une position donnée et aller à une autre sans former jamais avec la première position un angle égal à l'angle de contingence; donc une grandeur variant continuellement peut aller d'une valeur plus petite à une plus grande sans passer nécessairement par toutes les valeurs comprises entre celles-ci. Et il y a aussi une autre difficulté. L'existence de l'angle de contingence est en contradiction avec la première proposition du dixième livre d'EUCLIDE, plus connue sous le nom de *postulatum d'Archimède*. CAMPANUS, et plus tard STIFEL et CARDAN, regardèrent comme admissible le premier des deux paralogismes (ainsi que CARDAN les appellait); quant au second, ils tentèrent de le lever en disant que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas des grandeurs homogènes et ne tombent point par conséquent sous la proposition citée. Cette idée a été accueillie par DE FOIX CANDALLA ou FLUSSATE, et ensuite aussi par CLAVIUS et par ses défenseurs.

C'est seulement dans la seconde moitié du 16e siècle, que PELETIER eut le courage de déclarer que l'angle de contingence est absolument nul. CLAVIUS combattit âprement ses conclusions, qu'il jugea même contraires à EUCLIDE, et soutint que les angles de contingence sont de vraies grandeurs, et qu'il ne sont pas tous égaux; pendant que GUIDO UBALDO DEL MONTE exprimait le même avis à l'occasion d'une question de mécanique soulevée par TARTAGLIA.

Bientôt la discussion devint générale entre les savants de l'époque, et se prolongea pendant près d'un siècle. COMMANDIN, VIÈTE, GALILÉE, VIVIANI, WALLIS se rangèrent du côté de PELETIER; HOBBES, LEIBNIZ, NEWTON de celui de CLAVIUS.

COMMANDIN démontre que l'angle de contingence est nul, en le regardant comme l'angle extérieur d'un polygone d'un nombre infini de côtés. VIÈTE apporte plusieurs raisons à l'appui de la thèse de PELETIER; il remarque entre autres que les angles de contingence sont tous égaux entre eux, et qu'ils ne peuvent pas être mesurés par des arcs de circonférence.

GALILÉE, suivi par son élève VIVIANI, s'approprie les raisonnements de VIÈTE, et insiste particulièrement sur le premier des deux paralogismes rappelés plus haut. WALLIS recueille dans deux longs opuscules tous les arguments de ses prédécesseurs; il observe en outre d'après PROCLUS, qu'on peut dans quelques cas former un angle rectiligne égal à un angle curviligne donné, et en déduit qu'on ne peut pas regarder les angles rectilignes et les angles curvilignes comme hétérogènes, de façon que la justification du deuxième paralogisme alléguée par les adversaires tombe d'elle-même.

HOBBES, ennemi déclaré de WALLIS, n'épargna point ceux de ses écrits qui se rapportent à l'angle de contingence. Il reproduisit en grande partie les raisons de CLAVIUS, en y ajoutant toutefois une remarque qui contient en germe la solution véritable de la question: c'est à dire, qu'il y a une commune mesure pour les angles de contingence, mais qu'il n'y en a pas une pour ces angles et les angles rectilignes pris ensemble; ou dans notre langage, que dans la classe de grandeurs formée par les angles rectilignes et par les angles de contingence ceux-ci sont infiniment petits par rapport à ceux-là. Cette circonstance ne pouvait pas échapper aux deux principaux fondateurs de la nouvelle analyse, LEIBNIZ et NEWTON; tous les deux en effet regardèrent l'angle de contingence comme un exemple intéressant de leurs concepts.

Enfin TACQUET et RENALDINI, deux géomètres du 17e siècle, se déclarèrent contraires en même temps à PELETIER et à CLAVIUS; ils nièrent en effet qu'on puisse appliquer aux angles les concepts d'égalité et d'inégalité, attendu que, suivant eux, l'angle n'est pas *quantitas*, mais *modus quantitatis*.

Après une si vive discussion, la question s'apaisa vers la fin du 17e siècle; parmi les auteurs peu nombreux qui en traitèrent plus tard on peut citer FONTENELLE, KARSTEN, SCORZA.

§ 4. *L'infiniment petit intensif.* — Parmi les formes différentes qu'affecte ce concept chez les divers savants, il faut en distinguer deux principales, qu'on peut nommer *forme cinématique* et *forme dynamique.* En considérant p. ex. le point comme l'élément générateur du continu, la forme cinématique se borne à remarquer le fait de la génération de la ligne par le mouvement, tandis que la forme dynamique fixe particulièrement son attention sur la *tendance* ou aptitude du point générateur à donner naissance au continu. Les deux formes doivent leur existence à deux philosophes: GIORDANO BRUNO et THOMAS HOBBES.

Déjà, avant BRUNO, NICOLAS DE CUSA avait appelé la ligne l'évolution du point. Mais c'est à BRUNO que revient l'honneur d'avoir renversé la question fondamentale d'où tire son origine le concept d'infiniment petit, en affirmant qu'on doit regarder l'élément (*minimum*) non pas comme le *dernier* résultat de la division du continu, mais comme le *premier* élément générateur de l'extension. Le *minimum* devient ainsi pour lui le fondement, non seulement de la nature, mais aussi de notre connaissance de la nature, l'instrument sans lequel rien ne peut être conçu, le point auquel toute étude doit commencer.

On ne sait pas quelle influence aient exercé ces idées sur SOVERO et CAVALIERI, les deux savants à l'oeuvre simultanée desquels est due l'introduction du concept de mouvement comme fondement de la géométrie.

SOVERO dit que la géométrie ne peut pas subsister sans le mouvement, puisque les définitions qu'on y donne ordinairement ne nous présentent point une idée claire des formes géométriques, et, ce qui est pis, ne nous assurent même pas de leur possibilité. On définit, dit-il, le cercle comme une figure, renfermée dans une ligne plane dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur nommé centre; mais n'est-il pas permis de douter de l'existence d'une telle figure? Prenons maintenant une ligne droite, et faisons-la tourner dans un plan autour de l'une de ses extrémités; on verra l'autre extrémité engendrer le cercle, et l'on sera assuré de son existence et de sa propriété caractéristique. Mais ce n'est pas tout, car le mouvement est tout aussi bien nécessaire dans la géométrie constructive que dans la géométrie spéculative, n'étant pas possible de concevoir une construction quelconque sans l'aide du mouvement.

CAVALIERI regardait lui aussi assurément les surfaces comme engendrées par le mouvement d'un ligne; il considérait p. ex. les différentes ordonnées du contour d'une surface plane comme les positions successives (*vestigia*) de la droite mobile génératrice. Malheureusement l'infiniment petit intensif, sous quelle forme qu'on le prenne, n'est pas susceptible d'être introduit dans l'analyse, où l'on a à faire seulement à des grandeurs extensives. C'est ainsi que CAVALIERI se vit obligé de fonder sa méthode des indivisibles sur un principe tout différent, celui de la division des surfaces en une infinité de droites. Mais comme il n'eut pas soin de distinguer clairement les deux points de vue, plusieurs écrivains (p. ex. GULDIN, WALLIS, TAYLOR, GRANDI, FRISI, MONTUCLA, BOSSUT, etc.) ont été amenés à lui attribuer l'opinion qu'une surface soit effectivement décomposable en une infinité de lignes. Ce malentendu lui procura bien des adversaires, et il est curieux à voir que GULDIN, tout en combattant le concept faussement attribué à CAVALIERI, s'appropriait son concept vrai de la génération des grandeurs géométriques par le mouvement. A cette même idée sont inspirés les ouvrages de BARROW et de JEAN CÉVA.

Vers cette même époque, des recherches et des expériences qui sont restées immortelles, avaient fait de GALILÉE le créateur de la dynamique scientifique. Il avait le premier fixé son attention sur un élément essentiel du mouvement, dont on n'avait pas jusqu'alors assez tenu compte, je veux dire sur la tendance du corps mobile à poursuivre son mouvement d'une façon déterminée (*momento*). HOBBES donna au concept de GALILEI une bien plus grande étendue, en faisant du *momento*, qu'il appela *conatus*, l'élément générateur, non seulement du mouvement, mais aussi de tout continu, puisque, suivant HOBBES, on peut regarder toute grandeur continue comme engendrée par le mouvement. Le *conatus* est donc un mouvement le long d'un espace et pendant un temps moindre qu'aucun assignable, il est incomparable à tout mouvement, mais deux *conatus* sont comparables entre eux. Et la vitesse est le mouvement envisagé comme la *puissance* en vertu de laquelle un point parcourt une longueur donnée dans un temps donné.

Peu après le *conatus*, sous son nom primitif de *momentum*, apparait dans les recherches mathématiques de NEWTON, qui, en regardant les grandeurs comme nées du mouvement (*fluentes*), se propose d'en calculer les variations à l'aide des vitesses (*fluxiones*) avec lesquelles elles augmentent ou diminuent, vitesses qui sont proportionnelles aux moments. Ce même concept se retrouve chez MAC-LAURIN, et aussi, sous une forme très peu différente, chez TAYLOR.

II. L'application de l'infiniment petit aux mathématiques.

§ 1. *Méthode d'exhaustion.* — Le souvenir le plus ancien de l'usage de l'infini en mathématiques c'est la quadrature du cercle d'ANTIPHON. Ce géomètre inscrivit, comme on sait, dans le cercle des polygones réguliers de 4, 8, 16, ... côtés, et affirma qu'en continuant de la sorte on parviendrait enfin à un polygone, dont les côtés, grâce à leur petitesse, se confondraient avec la circonférence. Les géomètres grecs postérieurs n'acceptèrent point, et à bon droit, cette conclusion comme rigoureuse; au contraire ils s'efforcèrent de développer les mathématiques en dehors de toute notion de l'infini. De là naquit la méthode célèbre dont EUCLIDE et ARCHIMÈDE firent un usage si étendu, et qui consiste en ce qu'on réduit l'étude d'une figure donnée à celle d'une autre de nature différente, mais dont la grandeur et la forme peuvent différer de celles de la première aussi peu que l'on veut. Au 17e siècle VALERIO, TACQUET et RENALDINI donnèrent une forme plus générale et systématique à cette méthode, qui prit le nom de *méthode d'exhaustion*.

Il est remarquable, que presque tous les principaux fondateurs de l'analyse moderne — comme KEPLER, ROBERVAL, FERMAT, WALLIS, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, JEAN BERNOULLI — ont regardé les méthodes modernes comme essentiellement identiques à celle des anciens, dont elles ne constitueraient qu'une simplification; tandis qu'au contraire depuis la moitié du 18e siècle on s'est plutôt efforcé d'en chercher et d'en éclaircir les différences. Je ne m'arrête point ici sur cette question, qui n'a peut-être pas un intérêt immédiat pour notre argument.

§ 2. *Méthode des indivisibles.* — Suivant LIBRI, LÉONARD DE VINCI aurait déterminé le centre de gravité de la pyramide en la décomposant en plans parallèles à la base. Mais le vrai précurseur de CAVALIERI c'est KEPLER, qui, pour calculer le rapport des volumes des solides, les regarde *veluti plana corporata*, comme des plans devenus corps.

La méthode de CAVALIERI s'appuie sur le principe suivant: Si deux surfaces planes sont comprises entre deux mêmes parallèles, et si l'on imagine de mener toutes les droites parallèles à celles-ci, les deux surfaces auront entre elles le même rapport que les sommes des segments de ces parallèles contenus respectivement dans l'intérieur des deux surfaces. Les deux sommes étant évidemment infinies, il s'agit en réalité de déterminer la limite du rapport des sommes des segments lorsque le nombre des parallèles croît indéfiniment. La détermination de cette limite, que CAVALIERI effectuait dans les différents cas à l'aide d'artifices spéciaux, fut rendue plus aisée et plus régulière par WALLIS, grâce à l'usage de concepts arithmétiques et à l'étude de quelques series infinies. La méthode des indivisibles, dont ROBERVAL réclamait la priorité, et dont plusieurs mathématiciens (GULDIN, TACQUET, BETTINI etc.) attaquaient les fondements, trouva une expansion rapide en Italie et à l'étranger; parmi ses adeptes on peut signaler TORRICELLI, DEGLI ANGELI, CASATI, JEAN CÉVA, GRANDI, WHITE, SCHOOTEN, WALLIS.

GRÉGOIRE DE S. VINCENT développa dans son *Opus geometricum* une méthode, qui, quoique semblable à celle de CAVALIERI dans la forme, en diffère dans le fond, parce que les démonstrations y procèdent toujours à la façon des anciens.

§ 3. *Méthode des infiniment petits.* — L'idée que le cercle est un polygone d'un nombre infini de côtés, née à une époque très ancienne, repoussée ensuite par la rigueur de la science grecque, reparaît après bien des siècles chez NICOLAS DE CUSA, STIFEL, COMMANDIN, VIÈTE; KEPLER en fait l'application à la détermination de la surface du cercle, qu'il regarde comme composé d'une infinité de triangles isoscèles égaux ayant leur sommet commun au centre. A cette même époque prenait naissance la méthode des indivisibles; mais le principe de la décomposition des surfaces en lignes était accueillie avec défiance par beaucoup d'esprits. Ce fut alors qu'on conçut l'idée de substituer aux lignes rigoureusement indivisibles, des bandes superficielles très-minces, formées par un système d'ordonnées équidistantes en nombre arbitrairement grand (ROBERVAL, PASCAL). On pouvait transformer ces bandes à contour mixtiligne, par la suppression d'une portion triangulaire, en des rectangles, dont la surface totale était égale au produit de la somme des ordonnées moins une par leur distance constante δ, et il était possible dans les cas ordinaires d'établir, qu'on peut augmenter suffisamment le nombre des ordonnées pour que la somme des triangles qu'on néglige devienne arbitrairement petite. Il est aisé de voir que le résultat ainsi obtenu ne diffère de celui qu'aurait fourni la méthode des indivisibles que par le facteur constant δ, destiné d'ailleurs à disparaître lorsqu'on calculerait le rapport de deux surfaces. Mais cette différence prenait une importance particulière de ce fait qu'elle introduisait dans le calcul une quantité δ de grandeur arbitrairement petite, c'est à dire un *infiniment petit;* car cet élément allait bientôt devenir un aide précieux pour l'étude des problèmes fondamentaux qui hantaient la pensée des savants de l'époque. Je fais allusion spécialement à la recherche des maxima et des minima et à la détermination des tangentes aux lignes courbes.

FERMAT donna la règle suivante pour la recherche des maxima et des minima d'une fonction $f(x)$. On écrit l'équation approchée (*adaequatio*) $f(x+\varepsilon) = f(x)$, ou $f(x+\varepsilon) - f(x) = 0$, on divise par ε et l'on fait ensuite $\varepsilon = 0$; l'équation ainsi obtenue donnera les valeurs cherchées de x. HUYGENS commente cette règle en disant que, si x est une valeur pour laquelle $f(x)$ est maximum ou minimum, il doit y avoir au voisinage de x deux valeurs $x-\delta$, $x+\varepsilon$ telles que $f(x+\varepsilon) = f(x-\delta)$, ou bien, en posant $x-\delta = x_1$, $\delta+\varepsilon = e$:

$$f(x_1 + e) = f(x_1),$$

et par conséquent, que les valeurs qu'on obtiendra de cette relation en y regardant e comme *infiniment petite* — c'est à dire en divisant par e et en négligeant ensuite tous les termes contenant e — rendront la fonction $f(x)$ maximum ou minimum.

L'un et l'autre appliquèrent leur règle au problème des tangentes. C'est justement ce dernier problème qui amena BARROW à la considération du *triangle caractéristique,* formé par les incréments simultanés de l'abscisse, de l'ordonnée et de l'arc. Ce triangle étant semblable à celui formé par la sous-tangente, l'ordonnée et la tangente, on peut déduire du rapport des incréments de l'ordonnée et de l'abscisse celui de l'ordonnée et de la sous-tangente, et par là mener la tangente à la courbe au point considéré. Il va sans dire qu'on doit ici aussi négliger les termes qui ne sont pas finis.

C'était donc un vrai relâchement dans la rigueur justement vantée des mathématiques qui se produisait à cette époque, et cela ne pouvait pas manquer d'éveiller des doutes dans les esprits timides. Il était reservé à notre siècle de mettre à jamais la nouvelle analyse à l'abri de toute attaque; mais LEIBNIZ sut au moins faire dépendre tout ce qu'il y avait de peu sûr dans son calcul d'un seul point, c. à. d. du lemme fondamental qu'un *infiniment petit, ajouté à une quantité finie, n'en altère pas la valeur et peut par suite être negligé.* D'ailleurs ce n'est pas là le seul titre de gloire de LEIBNIZ. C'est grâce à lui que le calcul différentiel est devenu un algoritme général, applicable dans tous les cas, directement et sans tâtonnements; c'est lui aussi qui a découvert le lien tout à fait simple existant entre le problème des quadratures et celui des tangentes, en rendant ainsi possible la création d'un vrai *calcul intégral.* La méthode leibnitienne a été exposée d'une façon systématique par L'HOSPITAL dans son *Analyse des infiniment petits,* en partant de ces deux postulats que l'auteur regarde comme évidents: qu'on peut prendre l'une pour l'autre deux quantités dont la différence est infiniment petite, et qu'on peut envisager une ligne courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés. VARIGNON, le plus illustre parmi les commentateurs de l'*Analyse,* fit de ses *Eclaircissements* un ouvrage presque original, où l'on remarque une tendance prononcée vers la méthode des limites.

On trouve aussi dans l'ouvrage de GRANDI: *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica* une exposition complète des principes du calcul infinitésimal. Enfin on doit signaler comme le premier traité de calcul intégral les *Lectiones mathematicae de calculo integralium aliisque* de JEAN BERNOULLI.

§ 4. *Méthode des limites.* — Cette méthode diffère de celles des indivisibles et des infiniment petits en ce qu'elle ne se fonde sur aucun lemme ou postulat particulier, et se sert seulement des moyens que lui fournit l'algèbre, et des théorèmes élémentaires sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

La *Vera circuli et hyperbolae quadratura* de JACQUES GREGORY, ouvrage très remarquable bien que manqué, est peut être l'essai le plus ancien sur la méthode des limites, mais c'est NEWTON qui en fit le premier un usage étendu dans ses *Principia* en la fondant sur le théorème suivant: Deux grandeurs, dont la différence devient en un temps fini moindre qu'aucune assignable, deviennent enfin égales. Plus tard, en combinant la méthode des limites avec le concept de vitesse, il créa la *méthode des fluxions,* dont j'ai déjà rappelé le principe plus haut (I, § 4), et qui a été exposée dans tous ses détails et avec ses applications par MAC-LAURIN. On peut rapprocher de celle-ci la *méthode des incréments* de TAYLOR.

Ainsi que je l'ai déjà remarqué, le traité de calcul différentiel d'EULER est fondé effectivement sur le principe des limites, bien qu'il n'en soit pas ainsi en apparence; il l'avoue lui-même dans sa préface, où il dit qu'on doit concevoir les incréments des variables comme toujours décroissants, de façon que le rapport de ses incréments tend à une certaine limite, qu'il atteint lorsque les incréments deviennent absolument nuls.

Pendant que D'ALEMBERT ouvrait la campagne contre les concepts d'infini et d'infiniment petit, LANDEN, KRAMP, ARBOGAST, et plus tard LAGRANGE, tentaient d'établir des méthodes analytiques indépendantes de ces concepts, et en 1784, l'Académie de Berlin invitait les savants de tous les pays à présenter une théorie claire et précise de ce qu'on appelle *infini* en mathématiques, et à expliquer comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'un concept contradictoire, tel que celui de *grandeur infinie*. Le prix fut adjugé à LHUILIER, qui dans son *Exposition élémentaire* s'était proposé de montrer que la *méthode des anciens, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs*. Mais l'extension qu'il présente transforme simplement la méthode des anciens dans la méthode des limites; voici en effet son théorème fondamental: *Si une quantité variable, susceptible de limite, approche d'autant plus de jouir d'une propriété, qu'elle approche d'avantage de sa limite, de manière qu'il n'y ait aucune limite à la capacité qu'elle a de jouir de cette propriété, sa limite jouit de cette propriété.* Je mentionne seulement en passant un mémoire de KARSTEN occasionné par le même concours, mais ne contenant rien de particulièrement remarquable. C'est peut-être aussi à la suite du concours de Berlin que CARNOT écrivit ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, publiées seulement en 1797. Dans cet opuscule, qui eut un grand retentissement, CARNOT s'acharne contre ceux qui voudraient remplacer la méthode leibnitienne par d'autres moins simples et directes. Il établit l'exactitude de la méthode infinitésimale en s'appuyant sur deux considérations: celle de l'indétermination des différentielles et celle de l'élision des erreurs. Le principe d'où il part est tout à fait juste, mais son procédé est susceptible d'une remarquable simplification, car l'indétermination des différentielles suffit à elle seule pour justifier pleinement la méthode de LEIBNIZ, et l'élision des erreurs n'en est qu'une conséquence. C'est ce qu'aperçut sans doute CAUCHY, qui trouva qu'il suffisait de définir l'infiniment petit d'une façon précise et convenable, pour lever tout doute sur l'exactitude de la méthode infinitésimale. Il définit donc l'infiniment petit comme une grandeur variable ayant pour limite zéro, et cela permit de démontrer immédiatement ce lemme fondamental, qui avait été jusqu'alors la pierre d'achoppement dans le grand édifice élevé par LEIBNIZ.

Ainsi les deux méthodes, déjà opposées l'une à l'autre, se fondaient enfin en une seule, qui, joignant la rigueur à la simplicité, prenait son départ d'une définition précise empruntée à la méthode des limites pour procéder ensuite suivant le langage et le mécanisme de la méthode infinitésimale.

ANTVERPIÆ, APVD IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS. ANNO M.DC.XLVII
Cum priuilegio Cæsareo et Regis Hispaniarum.