La quadrature de l'hyperbole d'après Grégoire de Saint Vincent

Maryvonne Hallez

L'HOMME

Grégoire de Saint-Vincent est né à Bruges le 8 septembre 1584 et mort à Gand le 27 janvier 1667.

Il est élève de la Compagnie de Jésus à Bruges puis, sur les instances du jésuite Clavius[1] est envoyé au collège romain suivre des cours de philosophie, de théologie et de mathématiques. Il rencontre Galilée dont il défend vigoureusement les théories lors d'une célèbre séance au collège romain en 1611. De retour en Belgique, il est ordonné prêtre à Louvain le 23 mars 1613. De 1613 à 1625 il enseigne les mathématiquês. Là, comme à Rome, il se fait remarquer par ses brillantes capacités ; sa générosité et sa fougue lui font envisager un départ en Chine mais son supérieur préfère utiliser ses compétences en Belgique. De 1617 à 1625 le jésuite flamand s'attaque à la quadrature du cercle. Et, en 1625, il demande au général des jésuites Vitelleschi, l'autorisation de publier le résultat de ses recherches. Vitelleschi s'adresse à son conseiller Grienberger, successeur de Clavius.

A la lecture du manuscrit de Grégoire de Saint Vincent, Grienberger est émerveillé ; il écrit à Vitelleschi le 11 octobre 1627 : "Saint-Vincent est un homme prodigieux, l'égal d'Apollonius, d'Archimède et de Pappus". Dans ce remarquable manuscrit (Table des matières (200 propositions concernant ...) il fait oeuvre originale. Comme on va le voir, il prétend avoir réussi "la quadrature du cercle ..." [2].

Rien d'étonnant à ce que Grienberger pointe des lacunes dans les raisonnements concernant ce "grand problème". Eût-il modestement intitulé son manuscrit "Opus geometricum", l'imprimatur eût pu être donné quand même, mais l'auteur tenait au titre complet "Opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni Decem libris

[1]Clavius (1537-1612) célèbre professeur de mathématiques, à l'origine de la réforme des études mathématiques dans les collèges jésuites.

[2]Il est un des derniers quadrateurs; à cette époque on commence à se douter de son impossibilité; Stifel en 1544 l'avait déjà annoncé .

comprehensum"[3]. Finalement l'autorisation de publication n'est pas donnée à ce moment là par Vitelleschi et Grégoire de Saint-Vincent dut attendre 1647 pour voir son oeuvre imprimée avec le titre complet donné ci-dessus auquel il ajouta un frontispice "Problema Austriacum plus Ultra Quadratura Circuli"[4]

Ce titre nous oblige à préciser un épisode de la vie de Grégoire de Saint-Vincent: en 1628, il est envoyé à Prague pour participer à la glorification de l'Eglise catholique entreprise par la Contre-Réforme dans sa lutte contre le Protestantisme et ceci sous deux formes la diffusion du savoir mathématique et la construction d' églises baroques. En 1631, pendant le "sac de Prague" par les suédois, notre auteur perd la plupart de ses manuscrits. Il retourne dans les Flandres au collège de Gand mais découragé, affaibli par des attaques d'apoplexie il abandonne quasiment ses recherches pendant quinze ans. Mais heureusement, un de ses collègues jésuites de Prague, Rodrigue Arriaga avait pu sauver des manuscrits lors de l'attaque suédoise et les avait envoyés à Vienne où ils avaient dormi quinze ans. Nous devons avouer notre ignorance sur la manière dont Grégoire de Saint Vincent les récupère, mais en même temps que ses manuscrits notre jésuite retrouve son énergie et surveille de près leur publication sans cette fois, semble-t-il, rencontrer de difficultés. L'oeuvre est imprimée en 1647 à Anvers. Les louanges et les critiques qui suivent la publication suffisent à redonner au mathématicien l'enthousiasme nécessaire pour reprendre une activité scientifique : nous pouvons en prendre connaissance dans une publication posthume de 1668 : "Opus posthumum ad Mesolabium"[5].

---

[3]Oeuvre géométrique relative à la quadrature du cercle et aux sections du cône, comprenant dix livres
[4]Problème Autrichien
[5] mésolabe : instrument de mathématiques dû à Eratosthène formé de trois parallélogrammes mobiles sur une coulisse et qui donnait des moyennes proportionnelles et résolvait mécaniquement le problème célèbre de la duplication du cube. Grand Larousse encyclopédique.

A- La proposition 109 du Livre VI de l'Opus Geometricum.

1. La proposition de Grégoire de Saint-Vincent

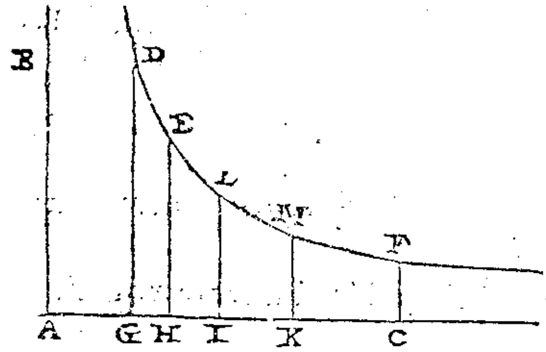
Le livre comprend 1226 pages réparties en dix livres. Les résultats qui attirent tout de suite l'intérêt des grands scientifiques de l'époque comme Huygens et Leibniz concernent les merveilleuses propriétés de l'hyperbole que l'on trouve dans le livre VI. Leibniz n'hésite pas à écrire à ce propos que Grégoire de Saint-Vincent est l'"égal de Fermat et de Descartes".

La propriété la plus fameuse, la proposition 109, qui fait l'objet du travail avec les élèves et dont nous détaillerons la démonstration est énoncée ainsi :

PROPOSITIO CIX.

SInt AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF : diuiſâque AC, vt AG AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



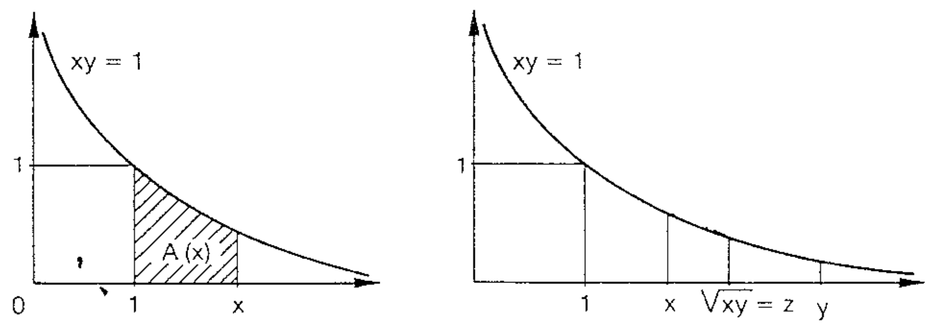
"Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF.
On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC soient proportionnels.
On trace GD, EH, LI, MK, FC parallèles à AB.
Je dis que HD, IE, KL et CM sont des segments égaux". [6]

2. La postérité de la proposition

Deux ans après la publication de l'Opus, en 1649, un autre jésuite, Alphonse de Sarasa, publie une "solution au problème du Révérend Père Marin Mersenne"[7] texte dans lequel il reprend le résultat de Grégoire de Saint-Vincent en explicitant le lien entre suite géométrique des abscisses et suite arithmétique des aires sous l'hyperbole, comme on peut le lire dans "Mathématiques au fil des âges" [8] :

"Si A(x) est l'aire hachurée sous l'hyperbole équilatère d'équation xy = 1, pour trois nombres x, y et z en progression géométrique ($z = \sqrt{xy}$) A(z) - A(x) = A(y) - A(z) ... Cette relation est celle qui permet le calcul des logarithmes. A. de Sarasa écrit :

Ces aires peuvent servir de logarithmes "



[6] le segment HD est la surface mixtiligne GHED. La traduction est de J. Dhombres.

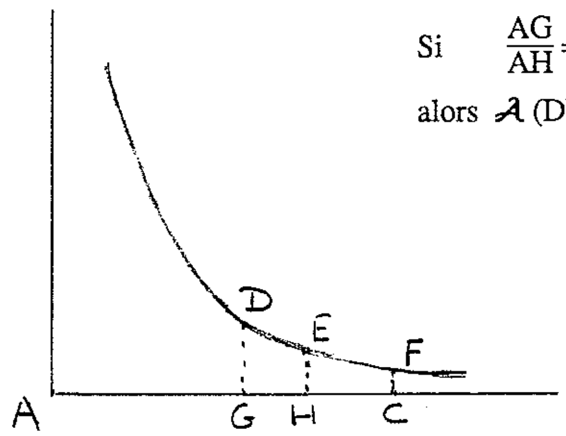
[7] Marin Mersenne (1588-1648) "grand artisan de la vie scientifique en commun, religieux de l'ordre des Minimes qui consacre sa vie à la science". Taton Histoire générale des sciences t.2 p.188.
Dans une lettre à Christian Huygens datée du 2 mai 1648, Marin Mersenne critique Grégoire de Saint-Vincent et déclare qu'il n'a pas résolu son "problème à savoir : Etant données trois grandeurs rationnelles, ou irrationnelles et deux de leur logarithmes étant aussi donnés, trouver géométriquement le logarithme de la troisième". Oeuvres complètes Huygens tome 1 p : 89.

[8] Commission Inter-IREM Epistémologie et histoire, "Mathématiques au fil des âges" Gauthier-Villars, Paris , p.188

B- Les propositions 102 à 107

Regardons maintenant comment Grégoire de Saint-Vincent aboutit à la proposition 109 citée plus haut.

1. Il démontre que si les abscisses sont en progression géométrique, alors les aires des trapèzes rectilignes sont égales ; autrement dit :



Si $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AC}$

alors $\mathcal{A}$ (DEHG) = $\mathcal{A}$(HEFC) [8]

Sa démonstration utilise le langage des proportions et la propriété suivante de l'hyperbole DEF qui est la manière habituelle à l'époque de définir l'hyperbole :

Pour toute hyperbole on a : $\frac{AG}{AH} = \frac{HE}{GD}$ (dessin ci-dessus)

2. Pour montrer l'égalité des aires mixtilignes DEHG et EHCF, il utilise la méthode grecque de quadrature qui consiste à approcher la surface curviligne ou mixtiligne à quarrer, par des polygones dont le nombre de côtés augmente suffisamment. Il apporte à cette méthode une grande innovation : il place <u>une fois pour toutes dans la proposition</u> 116 du livre II intitulé "De Progressionibus" consacré aux quantités proportionnelles <u>le double raisonnement par l'absurde</u>; il met ainsi en préalable de méthode ce que les anciens refaisaient pour chaque cas, autrement dit il "algébrise" [9] le raisonnement. Comme dans les traductions d'Euclide que nous pouvons consulter, Grégoire de Saint-Vincent représente les quantités étudiées par des lignes.

PROPOSITIO CXVI.

Corollarium.

A Duabus quantitatibus AB, CD, auferri poſsint AE, CF, æqualia, & non minora dimidio ipſarum AB, CD; & à reſiduis EB, FD rurſum auferri poſsint EG, FH, æqualia & non minora dimidio reſiduorum : ſi hoc ſemper fieri poſsit, æquales erunt quantitates AB, CD. Patet ex demonſtratione propoſitionis.

---

[8] L'équivalence logique est démontrée dans l'oeuvre par Grégoire de Saint-Vincent.

[9]cf J.Dhombres "Une algèbre des raisons au 17ème siècle; La quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent". A paraître.

Soient deux quantités AB et CD. Soit AB divisée en E, G de sorte que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, EG pas inférieure à la moitié de EB ; qu'on divise de même manière CD en F et H et soient AE et CF égales.

EG et FH égales ; que "cela puisse se faire toujours". [11]

Je dis que la toute AB [12] *est égale à la toute CD.*

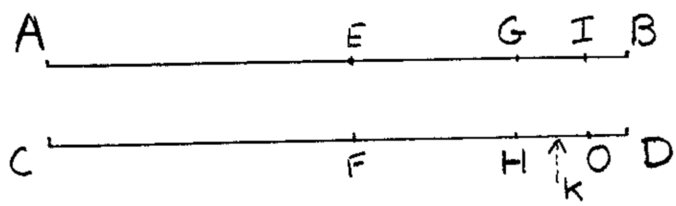
Voici la teneur du raisonnement [13], à l'aide de nos symboles d'égalité et d'inégalité pour faciliter la lecture.

Soient AB et CD les deux quantités données

$$AE = CF \quad AE > \frac{AB}{2} \qquad CF > \frac{CD}{2}$$

$$EG = FH \quad EG > \frac{EB}{2} \qquad FH > \frac{FD}{2}$$

$$GI = HO \quad GI > \frac{GB}{2} \qquad HO > \frac{HD}{2}$$



Supposons AB < CD. Alors il existe K ∈] CD [tel que CK = AB. Saint-Vincent utilise la proposition I du livre X des Eléments d'Euclide :

"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées".
On peut donc de CD retrancher des parties jusqu' à obtenir un reste plus petit que KD autrement dit il existe O tel que OD < KD donc CO > CK auquel correspond I sur [AB]. Les quantités enlevées aux deux quantités AB et CD sont par hypothèse égales: GI = HO et AI = CO .

On a AI < AB et CO (=AI) > CK (= AB) ce qui est contradictoire.

La supposition AB > CD aboutit elle aussi à une contradiction.

Conclusion AB = CD.

---

11 "hoc semper fieri possit"

12 l'expression désigne le segment [AB]

13 Dans la proposition 116 Grégoire de Saint-Vincent démontre que les quantités AB et CD sont dans le même rapport que les quantités enlevées; l'égalité est étudiée en corollaire comme cas particulier:

ACTIVITES PRELIMINAIRES AVEC LES ELEVES

Découverte des puissantes propriétés de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : on notera a, b, m_1, m_2, m_3, ... les projections orthogonales respectivement des points A, B, M_1, M_2, M_3, ...sur (x'x).

1. La propriété la plus simple

Montrez que si A appartient à $\mathcal{H}$, l'aire du triangle OAa est indépendante de l'abscisse de A et vaut $\frac{1}{2}$ unité d'aire.

2. Une propriété purement géométrique concernant les aires.

Montrez que si A et B appartiennent à $\mathcal{H}$, l'aire du triangle OAB est égale à l'aire du trapèze AabB.

Montrez qu'il en est de même pour les aires curvilignes OAB et AabB.

3. Enfin les plus étonnantes utilisant des points M_1, M_2, M_3 dont les abscisses x_1, x_2, x_3 , forment une suite géométrique.

a. Montrez que si les abscisses x_1, x_2, x_3, des points M_1, M_2, M_3 de $\mathcal{H}$ forment une suite géométrique, alors les ordonnées y_1, y_2, y_3 forment aussi une suite géométrique de raison inverse.

b. Montrez que la droite (OM_2) coupe $[M_1M_3]$ en son milieu.

c. Montrez que la tangente à $\mathcal{H}$ en M_2 est parallèle à (M_1M_3) avec $x_1=1$ $x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 = 3$; puis généralisez à une suite géométrique quelconque x_1, x_2, x_3.

d. Montrez que les trapèzes $M_1\ m_1\ m_2\ M_2$ et $M_2\ m_2\ m_3\ M_3$ ont des aires égales, d'abord pour le cas $x_1 = 1$ $x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 = 3$; puis généralisez.

4. Toutes ces propriétés ainsi que beaucoup d'autres sont énoncées par Grégoire de Saint Vincent en termes de proportions dans les 101 propositions sur l'hyperbole qui précèdent celles que nous allons lire.

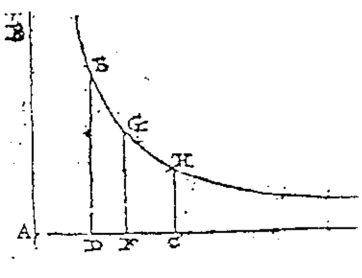
En voici un exemple:

Proposition LXXVIII

Positis denuo asymptotis AC, AB hyperbolæ EGH. Fiant AD AF, AC proportionales, ducanturq; DE, FG, CH æquidistantes AB Dico ED, GF, HC in continua esse analogia & contra.

Demonstratio.

Vt AD ad AF, sic FG ad DE; & vt AF ad AC, sic HC ad GF: sed AD, AF, AC proportionales sunt, igitur & HC, GF, ED eandem quoque continuant rationem. similiter ostendetur si ED, GF, HC asymptoto æquidistantes proportionales sint, esse AD, AF, AC quoque in continua analogia. Quod erant demonstrandum.



Soient AB, AC les asymptotes de l'hyperbole EGH. On trace DE, FG, GH parallèles à AB. Je dis que ED, GF et HC sont en analogie continue et réciproquement.

Démonstration

Comme AD est à AF ainsi FG est à DE et comme AF est à AC ainsi HC est à GF. Mais AD, AF, AC sont dans la même raison....

Ecrivez la démonstration complète en langage plus moderne en utilisant comme propriété de l'hyperbole EGH les égalités de rapports $\frac{AD}{AF} = \frac{FG}{DB}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{HC}{GF}$.

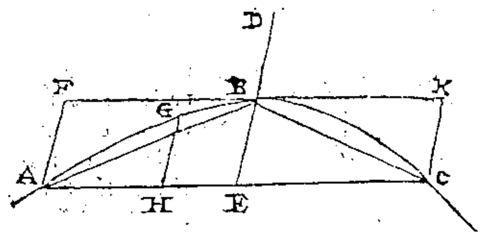
DEVOIR A FAIRE A LA MAISON

HYPERBOLÆ
PARS QVARTA
De segmentis hyperbolicis, conuexis & concauis.

tiré du livre "Problema Austriacum plus Ultra Quadratura Circuli" de Grégoire de Saint-Vincent

I Proposition 102

a. énoncé [14]



PROPOSITIO CII.

DAtæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inſcribere.

Un segment d'hyperbole [15] *étant donné, y inscrire un triangle maximal* [16].

Lisez la proposition 102 et expliquez la construction du triangle maximal inscrit dans l'arc d'hyperbole AC.

---

14 Cette traduction et les suivantes sont dues à Jean Dhombres.

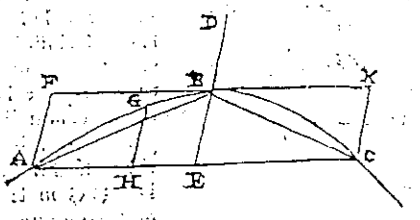
15 Dans tout le problème comme dans le texte de Grégoire de Saint-Vincent l'étude porte sur une seule branche de l'hyperbole équilatère.

16 triangle maximal a le sens de triangle d'aire maximum

b. démonstration [17]

Lisez ensuite la construction et la démonstration

Hyperbola A B C, cuius cen-
trum D, terminetur rectâ
A C, quâ diuiſâ bifariam
in E, ponatur diameter D E, oc-
currens ſectioni in B, & iungantur
A B, C B, dico triangulum A B C
eſſe maximum illorum quę hyper-
bolæ A B C inſcribi poſſunt. pona-
tur per B contingens F B, æqui-
diſtabit illa rectæ A C; ducatur
quæuis H G parallela B E,
occurrens ſectioni in G, patet G punctum eſſe infra lineam F B, adeoque G H
minorem B E. vnde triangulum A G C minus eſt triangulo A B C: triangulum igi-
tur A B C maximum eſt, datæ igitur hyperbolæ terminatæ, &c. Quod erat facien-
dum.



Construction et démonstration

Que l'hyperbole dont le centre est D soit limitée par une droite AC ; qu'on la divise en deux parties égales en E, puis qu'on pose le diamètre DE qui rencontre la section en B. Qu'on joigne AB et BC. Je dis que le triangle ABC est le plus grand de ceux qui peuvent être inscrits dans l'hyperbole ABC. Qu'on trace par B la tangente FB ; elle sera équidistante de la droite AC (proposition 16 de ce livre). Qu'on mène une droite quelconque HG parallèle à BE, rencontrant la section en G. Il est évident que le point G est au-dessous de la ligne FB, et par conséquent que GH est inférieur à BE. D'où il suit que le triangle AGC est inférieur au triangle ABC. Donc le triangle ABC est le triangle maximal. Donc, des hyperboles définies étant données, etc, ce qu'il fallait réaliser.

Que signifie le mot "équidistante" de la ligne 5 ?

Pourquoi a-t-on (FB) // (AC) ?

Quelle(s) remarque(s) pouvez-vous faire sur les lignes 7, 8 et 9 ?.

Pourquoi a-t-on GH < BE?

II **Proposition 103**

Lisez l' énoncé de la proposition 103 et sa démonstration [18]

PROPOSITIO CIII.

Iiſdem poſitis:

Dico A B C triangulum maius eſſe dimidio ſegmenti A B C.

---

17 Ce que G. de Saint Vincent appelle centre, nous le nommerons plutôt point de rencontre des asymptotes.

Le diamètre correspondant à l'arc d'hyperbole AC est le segment qui joint le centre de l'hyperbole au milieu de la corde [Ac].

18 Chez Grégoire de Saint-Vincent comme chez les Grecs un parallélogramme est nommé par une de ses diagonales.

Demonſtratio.

ERigantur ex A & C æquidiſtantes B E, occurrentes F B contingenti in F &
K; quoniam igitur tam A B C triangulum, quam [b] F E parallelogrammum, du-
plum eſt trianguli A B E, æqualia ſunt parallelogrammum F E, & triangulum A B C:
inde F C parallelogrammum duplum eſt trianguli A B C [c] ſed F C parallelo-
grammum maius eſt ſegmento A B C, (cùm F K contingens tota cadat extra ſectio-
nem;) triangulum igitur A B C, dimidium parallelogrammi F C, maius quoque eſt
dimidio ſegmenti A B C. Quod erat demonſtrandum.

Proposition 103

Même figure. Je dis que le triangle ABC est supérieur à la moitié du segment ABC.

<u>Démonstration</u>

On élève de A et C des équidistantes à BE rencontrant la tangente FB en F et K. Puisqu'aussi bien le triangle ABC que le parallélogramme FE sont le double du triangle ABE , le parallélogramme FE et le triangle ABC sont égaux. Il s'ensuit que le parallélogramme FC est le double du triangle ABC ; mais le parallélogramme FC est supérieur au segment ABC puisque la tangente FK se trouve toute entière en dehors de la section. Donc le triangle ABC, moitié du parallélogramme FC est aussi supérieur à la moitié du segment ABC. Cqfd.

a. Que signifie le "segment" ABC ? (ligne 5)

b. Jutifiez la ligne 4.

c. En nommant p l'aire du parallélogramme FC, t l'aire du triangle ABC et s l'aire du segment ABC récrivez le raisonnement de G. de Saint Vincent.

III Proposition 104

Lisez l'énoncé de la proposition

PROPOSITIO CIV.

HYperbolam A B C, cuius centrum D, ſubtendat recta A C; diuiſa bifariam à diametro D E; iunctiſque A B, C B, ac diuiſis bifariam in F & G; demittantur D F, D G, occurrentes ſectioni in H & I; iunganturque A H, H B; B I, C I.

Dico triangula A H B, B I C, æqualia eſſe.

Proposition 104

Qu'une droite AC divisée en deux parties égales par le diamètre DE, sous-tende l'hyperbole ABC dont le centre est D. Qu'on joigne AB et CB en les divisant en deux en F et G. Puis qu'on abaisse DF et DG qui rencontrent la section en H et I, et qu'on joigne AH et HB ; BI et CI. Je dis que les triangles AHB et BIC sont égaux.

a. Réalisez la figure dans un repère orthonormé $(D, \vec{i}, \vec{j})$ et précisez les coordonnées de B

b. Comparez les aires des triangles DBA et OBC à l'aide du précédent travail.

c. Que peut-on dire de la suite formée par les abscisses de H, B et I ?

   Que pouvez-vous en déduire pour les aires des triangles DHB et DBI?.

d. Achevez la démonstration de la proposition 104

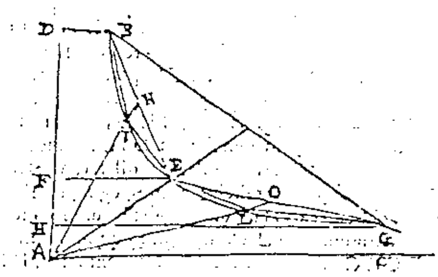
IV **Proposition 106**

Lisez l'énoncé de la proposition et le début de la démonstration.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEG, positaque ad diametrum AE ordinatim DG : ducantur DE, EG.

Dico segmenta conuexa DIE, GLE æquari.

Demonstratio.



Diuisis ED, GE bifariam in N & O; ponantur diametri AIN, ALO, iunganturque DIE, GLE: erunt igitur DIE, GLE triangula a maxima, & inter se b æqualia, maioraque dimidijs c segmentorum quibus inscribuntur. similiter si residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima, ostenditur triangula maxima segmentorum ID, IE æquari triangulis maximis segmentorum EL, LG.

Proposition 106:

Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEG et on pose DG en l'ordonnant au diamètre AE : on mène DE et EG. Je dis que les segments convexes DIE et GLE sont égaux.

On divise ED et GE en deux parties égales en N et O. On pose les diamètres AIN et ALO. On joint DIE et GLE. On aura donc les triangles DIE et GLE maximaux (Cf. proposition 102) et égaux entre eux (Cf proposition 104), plus grands que les moitiés (Cf proposition 103) des segments dans lesquels ils sont inscrits. De même, si l'on construit les triangles maximaux dans les segments restant de part et d'autre, on voit clairement que les triangles maximaux des segments ID et IE sont égaux aux triangles maximaux des segments EL et LG.

Comment pouvez-vous terminer le raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent?

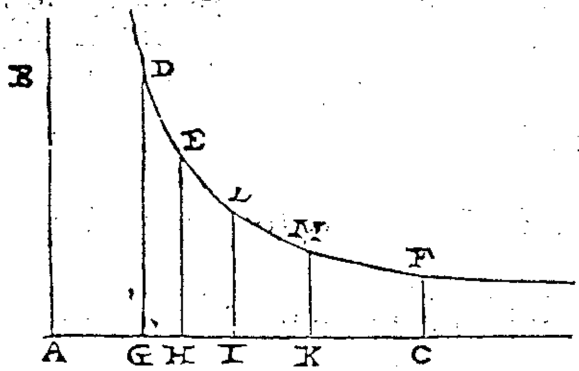
V Proposition 109

Lisez la proposition

PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF: diuiſâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



Demonſtratio.

Quoniam AG, AH, AI, &c. proportionales ſunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter ſe continuant[e] rationem; vnde DH, EI[f] ſegmenta ſunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem ſint proportione,[g] æqualia quoque ſunt ſegmenta EI, LK, MC. Conſtat igitur veritas propoſitionis.

Proposition 109:

Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF. On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC, soient en proportion continue et l'on pose GD, EH, LI, MK, FC, équidistants de AB. Je dis que HD, IE, KL, CM sont des segments égaux.

Démonstration

Puisque AG, AH, AI, etc ... sont proportionnels, DG, EH, LI, etc, sont entre eux en même raison continue (proposition 78), les segments DH et EI sont égaux (proposition 106). De même puisque EH, LI, MK, FC sont dans la même proportion, les segments EI, LK et MC sont égaux aussi (proposition 106). La proposition est ainsi démontrée.

1. Quels commentaires pouvez-vous faire sur cette proposition?
2. Construisez avec soin sur l'axe [0x) d'un repère orthormal les points G, H, J, K, C d'abscisses respectives $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9$
et D, E, L, M, F les points correspondants de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans ce repère.
Utilisez la proposition 109 pour donner une approximation par excès de l'aire curviligne délimitée par l'hyperbole, l'axe [Ox) et les droites (DG) et (FC).
3. Comment pouvez-vous améliorer cette approximation ?

COMPTE-RENDU DE L'EXPERIMENTATION

1. <u>en seconde</u>

Les élèves eurent à répondre en Travail dirigé aux questions 1, 2, 3a et 3c du paragraphe "Découvertes des propriétés de l'hyperbole" .

D'autre part dans le cadre d'un travail pluridisciplinaire (arts plastiques, mathématiques, histoire, économie, anglais, allemand) sur le Baroque et la Tchécoslovaquie, un groupe fit un résumé de la vie de Grégoire de Saint-Vincent. Un autre groupe fit un court historique de la quadrature du cercle. En classe un Travail dirigé eut pour objet l'encadrement de l'aire d'un disque et le travail se poursuivit par une approche de la "quadrature de l'hyperbole": donner une valeur approchée par excès de l'aire comprise entre une branche de l'hyperbole équilatère, l'axe (xx') et deux parallèles à (y'y) d'abscisses toutes deux positives ou toutes deux négatives.

2. <u>en première</u>

Au premier trimestre les questions 1, 2, 3 des activités préliminaires furent données en devoir à faire à la maison, après la leçon sur la résolution des équations de degré 2. La propriété de la tangente utilisée était, à ce moment là, de "toucher" l'hyperbole en un point ; déterminer la tangente revenait ainsi à préciser à quelle condition une équation de degré 2 admettait une racine double.

Le même devoir fut redonné au deuxième trimestre après la leçon sur les dérivées en préparation d'une interrogation écrite en classe. Les lectures des propositions 116 du "De Progressionibus" de Grégoire de Saint-Vincent furent faites en classe.

Enfin le devoir sur l'hyperbole tiré du texte fut donné à faire à la maison. (l'étude portait sur la demi-hyperbole équilatère dont les points ont une abscisse positive). Nous avons conclu par l'étude du tableau suivant:

A est le point d'abscisse 1, B le point d'abscisse 3, a, b leurs projections sur (x'x), x est l'abscisse du point M_1 de projection m_1 sur (x'x).

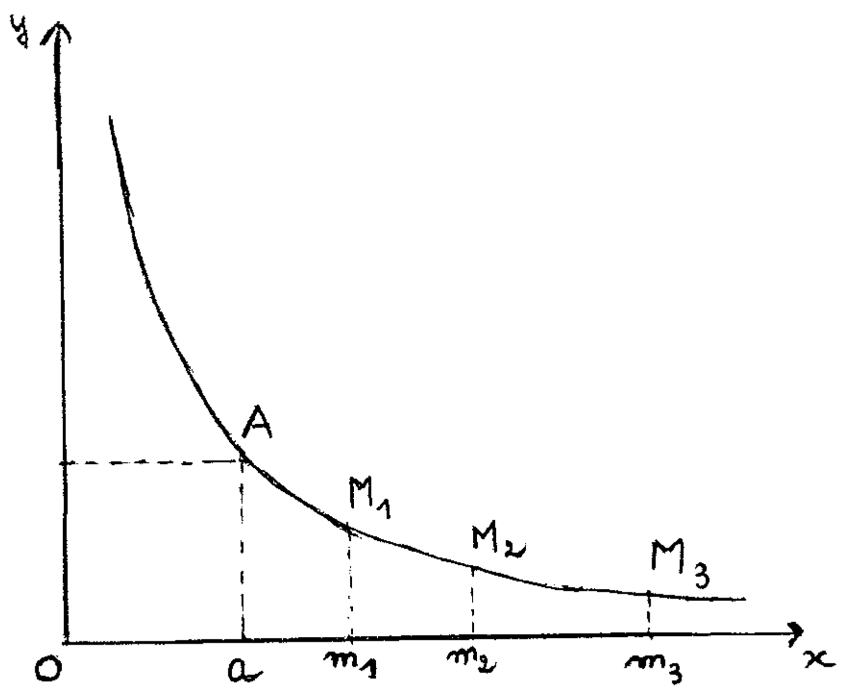
x	aire du trapèze rectiligne $AamlMl$ $\frac{x^2 - 1}{2x}$	valeur approchèe par excès de l'aire curviligne AabB
3	1,333333	1,333333
$\sqrt{3}$	0,5773502	1,1547004
$\sqrt{\sqrt{3}}$	0,278119	1,112476
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$	0,1377585	1,102068
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$	0,0687171	1,0994726
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}$	0,0343387	1,098841
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}}$	0,0171666	1,0986624

3. <u>en Terminale</u>

Les questions 1, 2, 3 sur les propriétés de l'hyperbole ainsi que le devoir sur le texte fut donné à faire à la maison. Après une correction détaillée, la comparaison des résultats du tableau ci-dessus avec la valeur de ln 3 donnée par la calculatrice et une relecture du texte, la fonction logarithme fut définie par l'égalité (1):

(1) ln x (pour $x > 1$) = aire comprise entre l'hyperbole équilatère (branche "positive"), l'axe (x'x) et les droites d'abscisses 1 et x.

Après cette définition de ln x pour $x > 1$, les élèves demandèrent d'eux-mêmes l'extension de la définition à $x = 1$ et à x compris entre 0 et 1. Ils vérifièrent l'égalité $\ln 1 = \mathcal{A}\,(AaaA) = 0$ et nous en conclûmes que la définition (1) était valable pour $x = 1$.



Puis ils eurent à répondre aux questions suivantes:

1. Démontrez que, pour tous x_1, x_2, tels que $1 < x_1 < x_2$ on a
$\mathcal{A}\,(M_1\, m_1\, m_2\, M_2) = \ln x_2 - \ln x_1$

2. Soient x_1 , x_2 , x_3 supérieurs à 1, en progression géométrique; montrez à l'aide de la proposition 109 de Grégoire de Saint-Vincent que: $\ln x_2 = \frac{1}{2} (\ln x_1 + \ln x_3)$ (a)

3. Soit $x > 1$; montrez que $\frac{1}{x}$, 1 , x forment une suite géométrique; déduisez de la proposition 109 et de la définition de lnx l'expression de l'aire limitée par l'hyperbole, (x'x) et les droites d'abscisses 1 et $\frac{1}{x}$. Comment doit-on définir $\ln \frac{1}{x}$ pour conserver l'égalité (a) si $x_1 = \frac{1}{x}$, $x_2 = 1$, $x_3 = x$.

4. Montrez que (a) reste vraie si x_1 et x_2 sont inférieurs ou égaux à 1
ou si $x_1 < 1 < x_2$
déduisez-en que $\ln x_2 = \frac{1}{2} (\ln x_1 + \ln x_3)$ pour tous x_1 , x_2 , x_3 , strictement positifs, en progression géométrique .

5. Soit $x > 0$. Montrez que 1, $\sqrt{x}$, x forment une suite géométrique
Déduisez en que $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} (\ln 1 + \ln x)$, soit $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

6. Soient a et b deux réels strictement positifs.
Montrez que $\ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b)$

7. $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\ldots, x^n$ forment une suite géométrique pour $x > 0$
Montrez que $\ln x^2 = 2 \ln x$ et $\ln x^n = n \ln x$

8. Montrer que pour tous a et b strictement positifs, on a
$\ln ab = \ln a + \ln b$