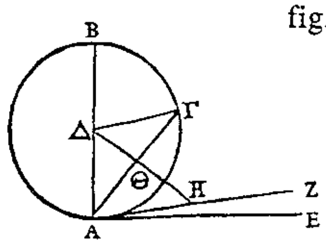
LA QUERELLE ENTRE DESCARTES ET FERMAT A PROPOS DES TANGENTES

Séminaire
"Autour de l'histoire du calcul différentiel"
(J.L. Verley)

Michèle Grégoire

Au début du XVIIème siècle, la définition d'une tangente à une courbe est encore celle des Grecs. Pour Euclide, "*une droite qui, rencontrant le cercle et prolongée ne le coupe pas, est dite être tangente au cercle.*" (c'est la définition 2 du troisième livre des *Eléments* [1]).

fig. 1



Ou bien,une tangente ou "touchante" est caractérisée par l'énoncé de la proposition 16 du livre III des *Eléments* : "(...) *dans le lieu compris entre la droite* (tangente) *et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée (...)*"; aucune autre droite ne peut "tomber" entre la courbe et la touchante, ou toute autre droite issue du même point traverse la courbe, dit-on au XVIIème siècle, pour que la notion soit applicable à des courbes plus générales . A partir de ces caractérisations et de l'idée que la tangente à une courbe a un seul point commun avec la courbe, que tous les autres points de la tangente sont "extérieurs" à cette courbe, Apollonius avait pu, au Livre I de son traité des *Coniques* , déterminer les tangentes à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole. Au livre V, qui n'est pas connu en occident au début du XVIIème siècle, Apollonius avait déterminé les normales aux coniques par des propriétés d'extremum, et les tangentes comme orthogonales aux normales. Mais les derniers livres du traité des *Coniques* ne commenceront à être étudiés et traduits que vers le milieu du XVIIème siècle[2].

Archimède a précisé la tangente à la spirale à partir d'une idée cinématique: la spirale étant définie comme résultant de deux mouvements uniformes, celui d'une droite autour d'un point fixe et celui d'un point sur la droite, la tangente est déterminée par une

1 Euclide Les Eléments, traduction B. Vitrac, PUF, Paris 1990
2 Dictionary of scientific biographies, article Apollonius

"résultante" des deux vitesses uniformes. Mais les mathématiciens du début du XVIIème siècle pas plus que les mathématiciens grecs ne connaissent de procédé général pour déterminer les tangentes aux courbes.

La Géométrie de Descartes est la première publication qui propose une méthode générale. C'est le 5 octobre 1637 que paraît à Leyde *Le Discours de la méthode* , suivi de trois essais scientifiques, *les Météores, la Dioptrique* et *la Géométrie*.[3] *La Géométrie* est un livre difficile, qui donnera lieu à de nombreuses discussions et à une abondante correspondance entre les savants de l'époque. Peu de temps après la parution de *la Géométrie* , on est encore en 1637, Fermat envoie un petit essai intitulé *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* au Père Mersenne, correspondant et confident de Descartes. Ce religieux de l'ordre des Minimes est en relation avec presque tout le monde savant de son époque. Fermat expose en peu de lignes ses propres méthodes de détermination de tangentes, en réaction aux méthodes proposées par Descartes. Descartes lui répondra, de nombreuses lettres circuleront, des désaccords éclateront, la communauté scientifique prendra parti pour l'une ou l'autre des deux méthodes, ce sera une véritable "querelle des tangentes", dont nous allons analyser les principaux arguments développés entre 1637 et 1638.

La méthode de *La Géométrie* de Descartes

Rappelons que dans le premier livre de *La Géométrie* , Descartes repère les points d'une courbe à l'aide de deux nombres positifs y et x . Une droite AG étant choisie et désignée comme diamètre de la courbe (c'est effectivement un diamètre de la courbe, si elle en admet un), M étant le projeté orthogonal du point C de la courbe sur (AG) , Descartes pose y = AM et x = CM (sic). (ce n'est donc pas encore le repère du plan que nous disons "cartésien"). L'équation de la courbe est une relation, algébrique en général, entre x et y .

Dans le livre II de *La Géométrie* , Descartes cherche à déterminer les normales aux courbes : *"c'est pourquoy je croyray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'auray généralement donné la façon de tirer des lignes droites, qui, tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. J'ose dire c'est cecy le problème le plus utile, & le plus général non seulement que je*

---

3 *La Géométrie* a été publiée en édition séparée en 1649, édition reproduite en fac-similé par Dover Press (1954). Les oeuvres complètes de Descartes ont été rassemblées et éditées par Adam et Tannery à la fin du XIXème siècle et rééditées par Vrin Je ferai référence à cette édition sous la forme : Descartes, A et T, livre..., p...

sçache, mais même que j'aye jamais désiré de sçavoir en Géométrie." [4] La normale à une courbe permet de déterminer la tangente et paraît à Descartes plus aisée à préciser que la tangente. En effet, pour la courbe la plus simple, le cercle, la normale en un point du cercle est la droite qui relie ce point au centre. D'où l'idée de Descartes d'approcher une courbe le plus étroitement possible par un cercle, centré sur la droite choisie comme diamètre[5]. Pour une courbe quelconque, Descartes considère qu'un cercle ($\mathcal{C}$) centré en un point P de l'axe (AG), passant par le point C de la courbe coupe la courbe en deux points. Si le cercle est centré sur la normale en P à la courbe, les deux points d'intersection de la courbe et du cercle ($\mathcal{C}$) sont confondus et Descartes postule que l'équation aux abscisses des points d'intersection de ($\mathcal{C}$) et de la courbe admet une racine double. C'est le principe de sa méthode. Voyons comment il l'applique (cf Annexe 1). Il procède conformément à la méthode qu'il a préconisée au livre I de *La Géométrie*, où il explique que, pour résoudre un problème de géométrie, "*on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes* [6] *qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons: ce qui se nomme une équation.*"[7]

Ainsi, pour déterminer la normale (CP) à la courbe en P il pose: $AM = y$ $CM = x$

$CP = s$ $PA = v$

donc $PM = v - y$

$CP^2 = CM^2 + MP^2$ d'où

$s^2 = x^2 + (v - y)^2$

$= x^2 + v^2 - 2vy + y^2$

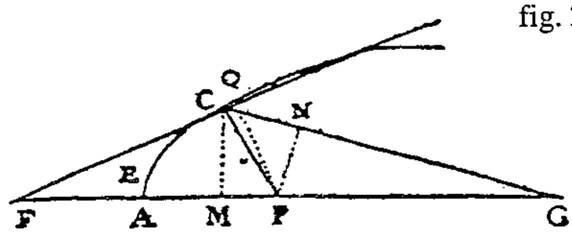


fig. 2

Il obtient les deux relations qui suivent, vérifiées par les coordonnées de tout point P de la droite (AG) : (1) $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ et $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$.

En éliminant l'une des indéterminées x ou y entre ces deux équations et une équation de la courbe, il obtient, s'il élimine par exemple x, une relation entre y, s et v qu'il considère comme une équation en y dépendant de v et de s, qu'il appelle "équation fondamentale"; c'est l'équation aux y des points d'intersection de la courbe

---

4 Descartes, A et T, livre VI, p. 413.

5 Ce n'est pas encore la notion de cercle osculateur. Cette notion et celle de courbure apparaîtra chez Newton.

6 *donner des noms aux lignes* : désigner les longueurs des segments par des lettres

7 *La Géométrie*, p. 299-300. ou A. et T., livre VI, p. 372.

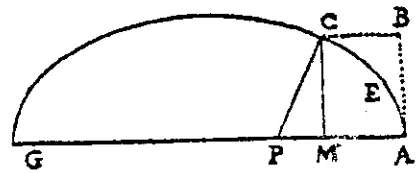
avec le cercle de centre P et passant par C. Le point P est le pied de la normale à la courbe en C si cette équation admet au moins une racine double.

Regardons l'exemple de l'ellipse, étudié par Descartes p. 343, puis repris p.347 de *La Géométrie* [8] (Annexe 1). L'équation de l'ellipse dérive de l'étude des coniques par Apollonius[9]. Si M désigne le projeté orthogonal d'un point courant C de l'ellipse sur le grand axe AG, le rapport $\frac{MC^2}{MA.\,MG}$ est constant.; Descartes désigne cette constante par le rapport $\frac{r}{q}$, où q est la longueur du grand axe AG (ou le "côté traversant" de l'ellipse). Ceci équivaut pour nous à l'équation de l'ellipse rapportée à un de ses sommets.

Avec les notations choisies par Descartes, l'équation de l'ellipse est donc

$$\frac{x^2}{y(q-y)} = \frac{r}{q} \quad \text{ou} \quad x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

fig. 3



En éliminant x entre cette équation et la relation (1), il obtient l'équation fondamentale de l'ellipse :

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \quad \text{ou}$$

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q-r} = 0 \quad \text{ou}$$

encore (2) $y^2 + \frac{qr - 2qv}{q-r}y + \frac{q(v^2 - s^2)}{q-r} = 0$

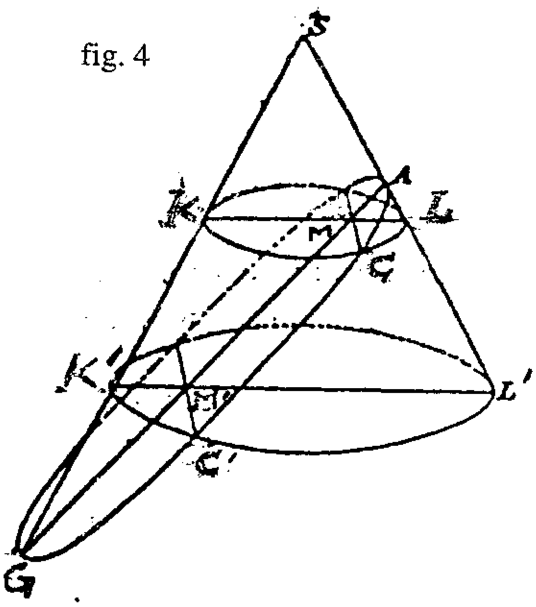
Cette équation aura une racine double e si elle peut s'écrire $(y-e)^2 = 0$ ou

---

[8] Descartes, A.T., livre VI, p. 414 à 419.

[9] Pour Apollonius, une ellipse est la section d'un cône par un plan non perpendiculaire à son axe, par exemple dans le cas où l'angle au sommet du cône est inférieur à un angle droit et où le plan de section est perpendiculaire à une génératrice du cône. Soit C et C' deux points quelconques de l'ellipse, KCL K'C'L' sont deux sections circulaires du cône perpendiculaires à l'axe. Dans les triangles rectangles KCL et K'C'L', $MC^2 = MK.\,ML$ $\quad M'C'^2 = M'K'.\,M'L'$
Les plans des deux cercles sont parallèles donc
$\frac{KM}{K'M'} = \frac{GM}{GM'}$ et $\frac{ML}{M'L'} = \frac{MA}{M'A}$ donc
$\frac{KM.\,ML}{K'M'.\,M'L'} = \frac{MA}{M'A} \times \frac{MG}{M'G}$ et $(\frac{MC}{MC'})^2 = \frac{MA.\,MG}{M'A.M'G}$.
On obtient donc:
$\frac{MC^2}{MA.\,MG} = \frac{M'C'^2}{M'A.\,M'G}$.
Le rapport $\frac{MC^2}{MA.\,MG}$ est constant pour tout point C de l'ellipse.
Nous pouvons retrouver la caractérisation de l'ellipse de centre O par la relation
$\frac{OM^2}{a^2} + \frac{CM^2}{b^2} = 1$ $\quad$ Posons OM = a - y CM = x ;
on obtient $\frac{(a-y)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, soit $x^2 = \frac{2b^2}{a}y - \frac{b^2}{a^2}y$ Posons alors q = 2a et $\frac{r}{q} = \frac{b^2}{a^2}$;
nous obtenons l'équation de Descartes.

fig. 4



(3) $y^2 - 2ey + e^2 = 0$. Par identification des coefficients entre les équations (2) et (3), Descartes obtient :

$- 2e = \dfrac{qr - 2qv}{q - r}$, c'est à dire $\dfrac{2eq - 2er + qr}{2q} = v$ ou $v = e - e\ \dfrac{r}{q} + \dfrac{r}{2}$. La comparaison des derniers coefficients peut se faire également, mais comme le remarque Descartes, elle n'apporte pas de précision supplémentaire: e étant la valeur de y (ou AM) correspondant au point C, on obtient par la dernière relation, la valeur de v qui détermine la position de P et par suite la normale (CP) à l'ellipse en C.

Ce cas est assez simple car l'équation "fondamentale" de l'ellipse est du second degré. Exprimer qu'elle admet une racine double n'entraine que peu de calculs. La méthode se complique pour des courbes dont les équations sont de degré supérieur. Le polynôme $f(y)$, qui figure dans l'équation fondamentale $f(y) = 0$, doit être identifié avec le produit de $(y - e)^2$ par un polynôme de degré convenable. On remarque de plus que cette méthode ne convient que pour des courbes algébriques, dont nous ramenons l'équation à une relation polynomiale, et non pas pour les courbes que Descartes appelle mécaniques, qui sont d'un autre type. Descartes applique sa méthode à la conchoïde de droite[10] (ou conchoïde de Nicomède). Il en déduit une construction de la normale à la conchoïde (annexe 2). Il ne donne cependant aucun élément de son calcul, ni de justification de sa construction. Le Père Rabuel, dans ses *Commentaires de la Géométrie de M. Descartes* , publiés en 1730, effectue les calculs, relativement longs, nécessaires pour ces démonstrations; nous les joignons à l'annexe 2 .

La méthode du maximum et minimum de Fermat

Fermat lit *la Géométrie* et juge bon de faire connaître ses propres méthodes de détermination des tangentes à une courbe, qu'il dit avoir mises au point depuis quelques années, sans rien avoir publié ni écrit sur le sujet. Ses méthodes découlent d'une méthode permettant la recherche d'un maximum ou d'un minimum,

---

[10] Une droite D et un point P étant donnés, on fait pivoter une droite (d) variable autour de P et à chaque point Q d'intersection de D et (d), on associe le point M de (d) tel que la mesure algébrique de QM soit constante.

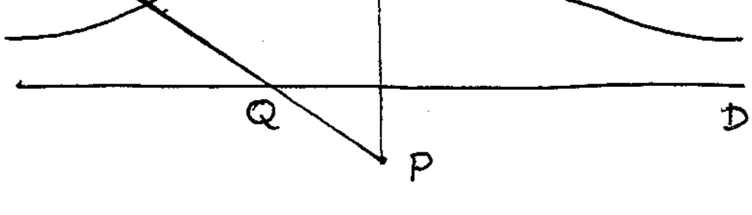


fig. 5

présentée par Fermat comme une "règle", qu'il donne sans la justifier, ni indiquer le raisonnement qui a pu le guider. C'est le premier exposé de cette règle, qu'il prétend cependant avoir mise au point dès 1629. Cette méthode a été souvent étudiée, rappelons-la cependant: S'il faut déterminer pour quelle valeur de l'inconnue a , une quantité est maximale ou minimale, on exprime cette quantité à l'aide de a ; on substitue $a+e$ à l'inconnue a ; on obtient une deuxième expression où figurent a et e ; on "adégale" [11] les deux expressions, on retranche les termes communs de part et d'autre; on divise tous les termes par e (qui se trouvait en facteur dans tous), ou par une puissance de e si c'est possible. On supprime tous les termes où figure encore e . On obtient alors une égalité (et non plus une "adégalité") qui donnera la valeur de a cherchée. (annexe 3)

Bien que Fermat ne donne, dans ce texte de 1637, aucune justification de sa méthode, nous pouvons essayer de le comprendre dans nos termes. Etant donnée une quantité exprimée en fonction de a par une expression (polynomiale) que nous notons $f(a)$, écrivons $f(a+e)$ sous la forme: $f(a+e) = f(a) + e\, g(a) + e^2 h(a) + \ldots$

L'adégalité $f(a+e) \sim f(a)$ s'écrit $f(a) + e\, g(a) + e^2 h(a) + \ldots \sim f(a)$

En appliquant la méthode, on est donc amené à résoudre l'équation $g(a) = 0$. On reconnait la propriété que si f présente un extremum en a , le premier terme du développement limité de $f(a+e)$ est nul. On voit aujourd'hui dans cette méthode une ébauche du calcul infinitésimal, alors que la méthode proposée par Descartes reste essentiellement finitiste.

---

[11] L'expression adaequare utilisée par Fermat, est reprise aux traductions latines des *Arithmétiques* de Diophante par Xylander (1532-1576) et par Bachet de Méziriac(1581-1638); elle signifierait "faire comme si c'était égal". Dans la traduction française des textes latins de Fermat, par P. Tannery, l'adégalité est désignée par le symbole $\sim$, mais Fermat n'a jamais écrit que le verbe adaequare sous ses différentes formes conjuguées, dans des relations "écrites en toutes lettres." Voici l'original latin correspondant à l'exemple traité à la première page de l'annexe 3. (Fermat, Oeuvres, t. 1, p. 133-134)

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, ſit maximum ; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, eſſe A , ergo reliqua erit B, — A , & rectang. ſub ſegmentis erit B , in A , — A^2 quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B , eſſe A , + E , ergò reliqua erit B , — , A — E, & rectang. Sub. ſegmentis erit B, in A, — , A^2 + B , in E , ^{2}E in A , — E, quod debet adæquati ſuperiori rectang. B , in A, — A^2 , demptis communibus B , in E , adæquabitur A , in E + E^2 , & omnibus per E , diviſis B , adæquabitur ^{2}A + E, elidatur E , B , æquabitur ^{2}A, igitur B , bifariam eſt dividenda , ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

C'est faire un mauvais procès à Fermat cependant de dire qu'il ne justifie aucunement sa méthode. Dans un texte ultérieur, probablement écrit dans les années 1640 à 1642, Fermat explique comment il en est venu à cette "règle" [12]. (cf. Annexe 4) L'idée qui a guidé Fermat est que, de part et d'autre d'une quantité extrémale $f(a)$, il y a deux valeurs égales $f(a_1)$ et $f(a_2)$ obtenues pour deux valeurs différentes a_1 et a_2, de la variable a , et que, plus on se rapproche de la valeur de a qui réalise un extremum, plus diminuera la différence entre a_1 et a_2 *"jusqu'à ce elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière les deux quantités* (a_1 et a_2) *devenant égales*." Fermat n'utilise pas les indices et appelle d'abord a et e les "solutions corrélatives" que je nomme a_1 et a_2 . Puis, pour des commodités de calcul il les nomme a et $a + e$. Remarquons que Fermat ne dit jamais que e est infiniment petit, ni même petit . L'idée est proche de celle de Descartes concernant les tangentes : les deux solutions a et $a+e$ sont quasiment confondues.

Signalons aussi, contrairement aux idées souvent rencontrées, que Fermat s'est préoccupé du problème réciproque: la "règle" qu'il propose est vérifiée si la quantité est extrémale, mais la quantité est-elle toujours extrémale lorsque cette "règle" est appliquée? Il répond à cette question dans une lettre de 1643 adressée à Brûlart de Saint Martin [13]. Dans cette lettre, il s'intéresse aux termes en e , e^2 , e^3 , des développements de $f(a+e)$ et de $f(a-e)$, remarque que les coefficients de e, de e^2 et des autres puissances de e sont les même (au signe près pour les puissances impaires), dans les deux développements. Sur un exemple, il vérifie que, si a prend la valeur déterminée par l'équation $g(a) = 0$, $f(a +e)$ et $f(a - e)$ sont tous les deux soit plus petits soit plus grands que $f(a)$. Dans cette lettre, il explique également comment distinguer un maximum d'un minimum, par l'étude du signe du coefficient de e^2 .

Comme on peut le lire dans l'annexe 3, Fermat "applique" sans explication la méthode du maximum et du minimum à la détermination des tangentes à une parabole: *"Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes.."* est la seule marque de transition.

---

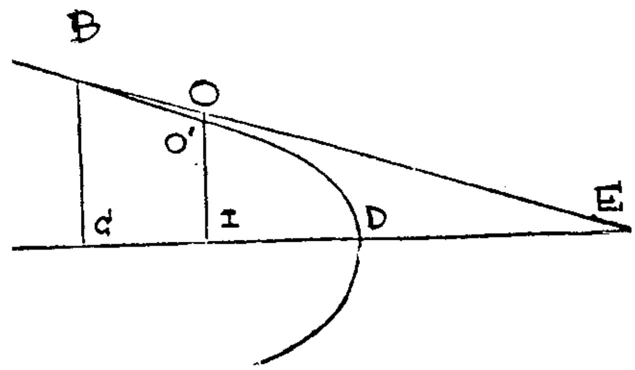
[12] Ce texte se trouve dans les *Oeuvres complètes* de Fermat, après la *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum*, t. 1, p.147 et 148 (en latin), et t. 3, p. 131-132, dans la traduction française de Tannery.

[13] Oeuvres de Fermat Supplément p. 121 et suivantes

La parabole de sommet D et d'axe (DC) est caractérisée à la manière d'Apollonius par la propriété que le rapport $\frac{CD}{BC^2}$ est constant, si B est un point courant de la parabole et si C désigne son projeté orthogonal sur l'axe.
Pour le point O' de la parabole qui se projette en I, $\frac{CD}{BC^2} = \frac{DI}{O'I^2}$. Donc $\frac{CD}{DI} = \frac{BC^2}{O'I^2}$

La tangente en B à la parabole coupe l'axe en E. La tangente est entièrement "extérieure" à la parabole, le point O de la tangente est donc extérieur à la parabole et vérifie OI > O'I.
On obtient bien l'inégalité $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, et puisque les triangles ECB et EIO sont semblables, $\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$.

fig. 6



Cette inégalité s'écrit, avec les notations choisies par Fermat, qui pose CE = a, CI = e
CD = d $\qquad \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$ ou $d(a-e)^2 > a^2(d-e)$

Fermat remplace alors, sans explication, cette inégalité par une adégalité
$d(a-e)^2 \sim a^2(d-e)$, qui après réduction, et division par e s'écrit $a^2 + de \sim 2da$

Après suppression du terme contenant encore e, il obtient $a = 2d$. Il détermine donc la position de la tangente par la valeur de la sous-tangente. La sous-tangente est double de l'ordonnée CD, résultat qui était déjà bien connu depuis Apollonius.

En quoi ce problème est-il un problème d'extremum? Fermat ne l'explique pas et nous verrons que ses contemporains, Descartes en particulier, auront du mal à le comprendre.

Nous pouvons tenter une explication, pour mieux comprendre le ressort de la méthode. Tout point O (distinct de B) de la tangente en B à la parabole est "extérieur" à la parabole, donc avec nos notations, si l'équation de la parabole est $y^2 - 2px = 0$, en tout point O, distinct de B, de la tangente en B, l'expression $y^2 - 2px$ est positive, l'ordonnée du point O étant supérieure à celle du point O' correspondant situé sur la parabole (cf fig.6). En B l'expression $y^2 - 2px$ passe donc par une valeur minimum, zéro. Dans le langage de Fermat, nous pouvons comprendre que, pour tout point O de la tangente en B à la parabole, $\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$, la différence $\frac{CD}{DI} - \frac{EC^2}{EI^2}$ est donc strictement positive. Elle s'annulle lorsque O est en B. La différence $\frac{CD}{DI} - \frac{EC^2}{EI^2}$ passe donc par un minimum lorsque O est en B. Les notions de variable et de fonction dont nous avons besoin pour cette explication ne sont pas encore dégagées à l'époque de Fermat. Il ne faut donc pas nous étonner que le point B que Fermat avait considéré comme fixé, en lequel il cherche une tangente, qui peut être déterminée par la position du point E , c'est à dire par la valeur d de la sous-tangente CE, que ce point B donc, soit soumis à un "petit déplacement", et que ce soit donc la distance EB qui varie, du point B devenu variable au point E, supposé dès lors fixe. Mais bien sûr, ces idées ne sont pas dans les écrits de Fermat . Comment appliquer la méthode proposée à une autre courbe que la parabole? On trouve juste la formule assez laconique suivante, qui donne la démarche à suivre pour déterminer les tangentes à une courbe quelconque: il faut, écrit-il, "*exprimer une propriété d'extremum à l'aide de la propriété spécifique de la courbe* ".

La querelle des tangentes

Lettre de Descartes à Mersenne. Réponse de Fermat (janvier-février 1638)

Mersenne a transmis à Descartes le texte de Fermat, *Méthode pour la Recherche du maximum et du minimum.* Descartes a dû en prendre connaissance très rapidement et l'a mal compris. Il répond à Mersenne sans doute en janvier 1638 [14]. Il pense que la méthode de Fermat pour trouver la tangente (EB) à la parabole en B, consiste à déterminer la "plus grande ligne" qu'on puisse mener du point E à un point de la parabole, et que, selon la méthode du maximum décrite par Fermat, il suffit donc d'adégaler EB et EO. Il fait donc le calcul correspondant , en ayant pris pour inconnue EC = a , EI = $a+e$ et pour données CD = d , BC = b , et la dernière adégalité $\frac{b^2}{d} + 2a$ adégalé à rien, ne lui donne donc aucun résultat (cf annexe 5). Nous pouvons remarquer l'erreur de Descartes : la longueur EB de la tangente ne réalise pas un extremum de la distance de E aux points de la parabole. Autour de B, sur la parabole se trouvent à la fois des points plus proches et des points plus éloignés de E. Descartes détermine, en fait, pour le cas où le point E est dans la concavité de la courbe (pour nous, la mesure algébrique de EC , notée a , est alors opposée à la longueur EC étudiée) le point E qui réalise la plus courte (et non pas la plus grande) distance à la courbe. Il obtient effectivement la sous-normale à la parabole, constante et égale au paramètre :

$$-a = \text{EC} = \frac{1}{2}\frac{b^2}{d}.$$

---

14 A Mersenne A et T, livre I , p. 486

Descartes reproche d'une part à Fermat de ne pas user de la règle sur le maximum et le minimum qu'il avait établie pour la détermination des tangentes ("*outre qu'il ne suit nullement sa règle, comme il paroît assez de ce que son calcul ne se rapporte point à celui que je viens de faire,...*") et il reproche d'autre part à sa règle d'être fausse puisque son calcul ne donne pas de résultat correct pour les tangentes à la parabole . Il conclut:: "*j'ose dire qu'on n'en peut trouver aucune, si bonne et si générale que la mienne, qui soit tirée d'un autre fondement.*"

La réponse de Fermat à Mersenne, de février 1638, à propos de la réaction de Descartes est très expéditive : "*J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes n'étoit pas goûtée, que même il avoit trouvé à dire à mes méthodes* ***de maximis et minimis et de tangentibus****, en quoi il avoit trouvé Mrs de Pascal et de Roberval de contraire sentiment. (...) et je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la 1ère proposition des Eléments. Peut-être que les ayant proposées nuement et sans démonstration, elles n'ont pas été entendues ou qu'elles ont paru trop aisées à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie. (....) Je ne vous enverrai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des lois si sévères à un commerce innocent...*[15]"

Lettre de Descartes contre Roberval et E. Pascal . Réponse de Fermat
(mars et mai 1638)

Le traité de Fermat ayant trouvé des défenseurs (Pascal, Roberval et d'autres), Descartes revient à la charge et pour convaincre de l'erreur de Fermat, il pense exhiber un contrexemple: d'un ton très péremptoire et, me semble-t-il, avec beaucoup de mauvaise foi, il applique à l'ellipse la méthode que Fermat a suivie pour déterminer la tangente à la parabole. Il suit strictement la méthode exposée par Fermat, cette fois, mais n'obtient pas la bonne détermination de la tangente puisqu'il utilise la même inégalité $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, qui dépend de la propriété caractéristique de la parabole et non de celle de l'ellipse. Il n'a donc pas compris le rôle joué par la "propriété spécifique de la courbe" [16].

Fermat répondra cependant aux arguments de Descartes, dans une lettre dont le destinataire n'a pas été identifié, qui est probablement encore Mersenne[17]. Il explique comment procéder de façon correcte pour le cas de l'ellipse. Il faut utiliser la propriété

15 Oeuvres de Fermat, Correspondance, tome 2, p. 132-133

16 Lettre de Descartes contre Roberval et Etienne Pascal, Adam et Tannery, livre II , p.1

17 Oeuvres de Fermat, tome 2, p. 138- 145

spécifique de l'ellipse qui est, toujours selon Apollonius, " OZ.ON est proportionnel à OD^2 ", si (ZN) est le grand axe de l'ellipse et O le projeté orthogonal d'un point D de l'ellipse sur le grand axe. Ainsi, si le point I de la tangente à l'ellipse et le point E de l'ellipse se projettent tous deux en V sur l'axe (ZN) :

$\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN} = \frac{DO^2}{VI^2}$ et comme I est extérieur à l'ellipse,

$\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN} > \frac{DO^2}{VI^2}$. Cette inégalité permet d'appliquer la méthode du minimum et d'adégaler $\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN}$ à $\frac{DO^2}{VE^2}$

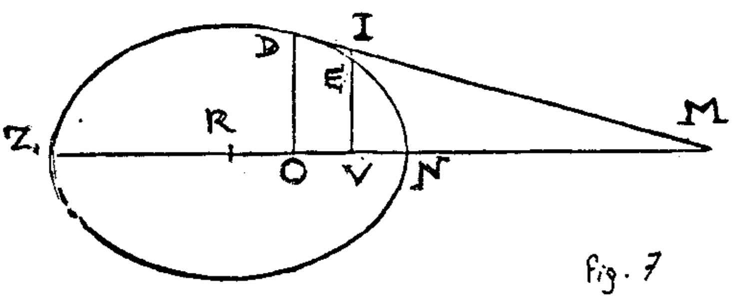


fig. 7

Fermat trouve alors que la position du point M qui précise la tangente en D est déterminée par la relation

$\frac{OZ - ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM}$ équivalente à la relation $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM}{MN}$, donnée par Apollonius.[18]

L'annexe 6 expose la méthode de recherche de tangente à l'ellipse, comme elle se trouve dans des textes ajoutés après 1638 au traité *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum.*.

Lettre de Descartes à Mersenne du 3 mai 1638

Descartes a compris le rôle que joue la "propriété spécifique" de la courbe, mais il critique encore la méthode de Fermat, qu'il ne juge toujours pas fondée. Il écrit que Fermat "*n'a trouvé sa règle qu'à tastons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes* ." [19] On rencontre ici la position de principe de l'auteur du *Discours de la Méthode*, pour qui il est moins important de trouver que de savoir pourquoi on a trouvé. Fermat et Descartes s'opposent ici, à l'image de leurs conceptions différentes des

---

18 En effet $\frac{OZ - ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM}$ entraine

$\frac{OZ - ON}{ON} + \frac{ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM} + \frac{OM}{OM}$ Soit $\frac{OZ}{ON} = \frac{2\,ZO + OM}{OM} = \frac{ZM + ZO}{NM + ON}$.

La relation $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM + ZO}{NM + ON}$ entraine $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM}{NM}$

19 Adam et Tannery, livre II, p. 123.

mathématiques. Fermat résout, souvent pour le plaisir, des problèmes variés adaptant ses méthodes au problème considéré. Descartes cherche avant tout à construire des méthodes générales et les mathématiques qu'il développe servent à valider sa méthode philosophique.

Puis il applique la méthode d'adégalisation au problème "*qu'il faille tirer d'un point E vers le cercle, une ligne droite en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande.*" C'est encore le même type de caractérisation de la tangente comme une "plus grande ligne tirée d'un point extérieur au cercle", mais sa mise en équation ne traduit pas la propriété demandée à la ligne d'être "extérieure au cercle" et la ligne BE qu'il considère ne réalise pas un maximum (sur la figure 9, EO, par exemple est plus grande que EB) ; il obtient une équation sans solution, alors que, dans son esprit, il devrait trouver la tangente menée de E au cercle. Il en conclut une fois de plus que la méthode de Fermat est incorrecte.

Mais l'étude qu'il a faite de la méthode de Fermat lui inspire une nouvelle méthode de détermination de tangentes, différente de celle de *La Géométrie* . Cette méthode revient à considérer la tangente comme une position "limite" de la sécante EBO lorsque les deux points B et O se confondent. Descartes adopte alors la méthode d'adégalisation, mais sans faire intervenir l'idée d'extremum, qui lui reste étrangère; l'adégalisation devient une façon commode et abrégée d'exprimer l'existence d'une racine double: il adégale BC et OI , qui sont effectivement égaux lorsque I et C se confondent, (cf. fig.9 et 10) et procède ensuite comme Fermat, divise par e, ne garde que les termes où ne figure plus e... Pour la tangente à la parabole Descartes mène un calcul analogue à celui de Fermat , mais qui consiste à adégaler d'emblée BC^2 et OI^2 , puis à supprimer les termes en e^2 .

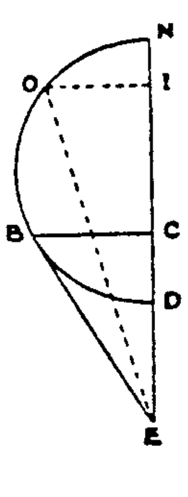


fig. 8

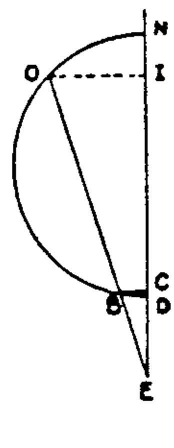


fig. 9

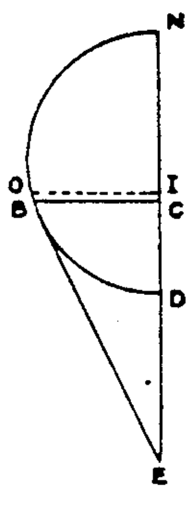


fig. 10

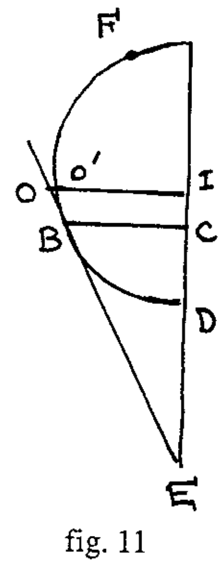


fig. 11

Les trois figures 8, 9 et 10, ci-dessus, reprises à l'appendice de la lettre du 3 mai 1638 de Descartes à Mersenne[20] montrent bien où se situe l'incompréhension de Descartes quant à la méthode développée par Fermat. Descartes pense que la méthode de Fermat, sur une figure telle que la figure 8, consiste à adégaler BC et OI , pour deux sécantes à la courbe passant par E, alors que la méthode de Fermat consiste à adégaler OI et O'I , le point O de la tangente en B et le point O' de la courbe se projetant tous deux sur l'axe en I (fig. 11).

La réponse de Fermat à Descartes (été 1638)

Cette lettre répond aux critiques et aux objections de la précédente lettre de Descartes, mais elle est, comme les autres lettres adressée à Mersenne [21]. Fermat, explicite enfin plus précisément sa méthode, son aspect de généralité et ce qui l'a guidé. (annexe 7)

Dans un premier temps, il insiste peu sur le lien avec la recherche de minimum et de maximum, mais précise bien d'emblée que sa méthode est fondée sur l'adéquation de la ligne IO avec l'appliquée IO' (dans le cas d'une figure telle que la fig. 11) et sur la propriété spécifique de la courbe vérifiée par les points O et B. Fermat peut alors appliquer sa méthode à toutes sortes de courbes, et en particulier au folium (que nous appelons folium de Descartes[22]), sur lequel celui-ci l'avait défié.

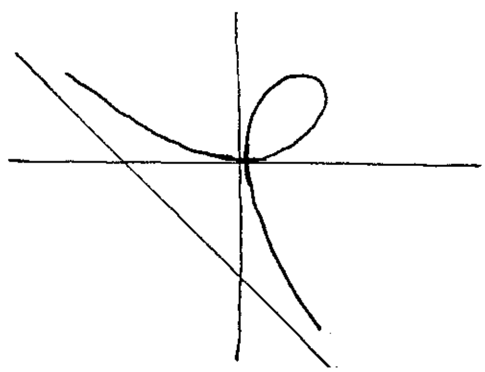
Il reprend le problème traité par Descartes " tirer d'un point extérieur à un cercle la plus grande ligne EB extérieure au cercle " à propos duquel Descartes avait de nouveau conclu à la fausseté de la méthode de Fermat. Il explique que la mise en équation du problème avait été mal faite[23] ; il aurait fallu, dit-il, chercher le point B tel que $\frac{BE}{BC}$ fût minimum.

---

20 ibid.

21 Oeuvres de Fermat, tome 2, p. 154-162.

22 Cette courbe peut être définie par l'équation $x^3 + y^3 = 3axy$ et la partie de la courbe correspondant aux x et aux y positifs a la forme d'une feuille.



23 Si l'on cherche un point M sur le cercle tel que la distance EM soit maximum, on ne peut obtenir le point de contact B d'une tangente issue de E. Un point tel que F vérifie bien sûr EF > EB . Fermat

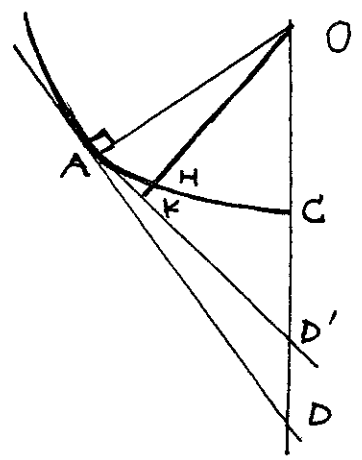
Enfin, Fermat expose la démarche qui l'a mené à sa méthode de détermination de tangentes. La première méthode à laquelle il a eu recours, vers 1630, peu après avoir mis au point la méthode pour le maximum et le minimum, consistait, écrit-il à déterminer une normale à la courbe.

Une normale à une conique en un point O réalise un extremum (local, préciserions-nous) de la distance du point O à la courbe[24]. Fermat étend cette propriété à une courbe quelconque. Descartes s'est trompé, dit-il," *en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode* ***de Maximis et Minimis*** *à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD, menée du point A donné sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. Le point A étant donné, il faut avoir recours non pas* ***ad maximam,*** *puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais* ***ad minimam****. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe.*"

Fermat donne une démonstration de la propriété pour le cas où la concavité de la courbe est tournée vers le diamètre, qui n'est cependant pas valide pour tous les cas de figures.

Si (AD) n'était pas tangente, la tangente serait (AD'), située entre (AD) et la courbe et la perpendiculaire (OK) à (AD') en O couperait la courbe en H situé entre O et K (K est sur AD'), puisque la tangente AD' est entièrement extérieure à la courbe.

Donc OH < OK et OK < OA, puisque le triangle OAK est rectangle en K.



L'inégalité OH < OA est en contradiction avec le fait que la distance OA est la plus courte distance de O à la courbe. Fermat reprend aussi le cas où O n'est pas du côté de la concavité de la courbe.

---

n'explicite cependant pas que la méthode de Descartes ne permet pas de caractériser le fait que la ligne EB est entièrement extérieure au cercle (cf. fig. 11).

[24] Ce résultat est déjà établi à la proposition 29 du livre V des *Coniques* d'Apollonius. Cependant, seuls les quatre premiers livres étaient connus au début du XVIIème siècle.

Il fait alors le calcul correspondant au minimum de la distance OA pour une parabole. Les distances d'un point à une courbes introduisent des radicaux (des "asymétries" dit-il, usant du langage de Viète), et partant, rendent le calcul difficile. Aussi a-t-il cherché une méthode "qui levât toutes ces difficultés". Il lui semble que c'est la première qu'il a proposée, qui n'introduit aucune asymétrie, "en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode". Il n'est pas plus explicite sur le lien entre recherche de tangente et recherche d'extremum.

Dans les années suivantes, à partir de 1640, Fermat étend encore la validité de sa méthode à des courbes qui ne sont pas algébriques, comme la cycloïde. Pour ces problèmes plus compliqués, il applique deux principes: on peut substituer aux ordonnées des points situés sur la courbe les ordonnées des points sur une tangente à la courbe et substituer aux arcs de courbe les longueurs correspondantes des portions de tangente. Il applique alors la méthode d'adégalité. Ces principes ne seront validés que vers 1660 dans un mémoire *Sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites* . La méthode de Fermat s'affirme plus puissante et plus générale que celle de Descartes, mais ne se présente pas sous la forme d'un algorithme systématique.

Les incompréhensions de Descartes, probablement dûes à son désir irrépressible d'établir des méthodes générales, dont les fondements soient clairement précisés, et qu'il a tenté trop rapidement de projeter sur la méthode proposée par Fermat, ont pourtant été utiles: elles ont poussé Fermat à expliciter davantage la généralité de sa méthode, et elles ont mené Descartes à une nouvelle méthode des tangentes, un peu plus simple. On remarque que ces méthodes ne font pas appel à l'idée d'infiniment petit, ni à des quantités qui tendent vers zéro. La polémique n'est pas tout à fait close....

Bibliographie

Apollonius *Les Coniques* , trad. P. Ver Eecke, réédition Blanchard, Paris , 1959

Descartes *La Géométrie* , Appendice au Discours de la Méthode, réédition Dover, New York , 1954

Descartes *Oeuvres complètes* , éditées par Adam et Tannery, Vrin , Paris, 1988

Euclide *Les Eléments* , livres 1 à 4, Traduction de B. Vitrac, PUF, Paris, 1990

Fermat *Oeuvres* , éditées par P. Tannery et C. Henry, Gauthier-Villars, Paris,1891-1912

Rabuel *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes* , Paris , 1730

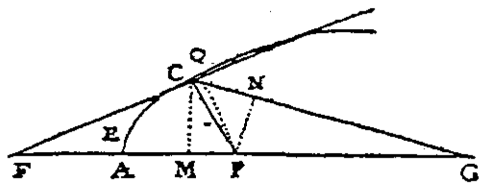
***

Clapié M. Spiesser M. *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*. IREM- MAFPEN de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse cedex

Itard J. *Essais d'histoire des mathématiques* , réunis par R. Rashed, Blanchard, Paris, 1984

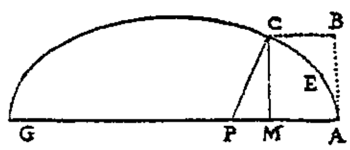
Milhaud G. *Descartes savant* , Alcan, Paris, 1921

Facon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingences, a angles droits.



Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veuille oster; oubien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

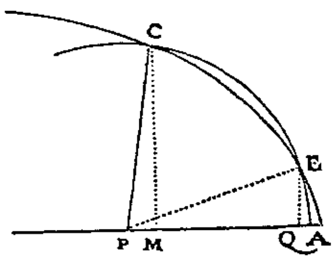
Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius.



$xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'ou ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,

$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.

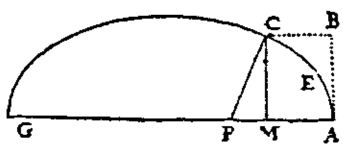
Or aprés qu'on à trouué vne telle equation , au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantités x, ou y, ou z, qui sont desia données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe , non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre. Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle couppe la ligne courbe C E, l'equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant P A & P C estre connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inesgales. Car par exemple si ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré E Q parallele a C M, les noms des quantités indeterminées x & y, conuiendront aussy bien aux lignes E Q, & Q A, qu'a C M, & M A; puis P E est esgale a P C, a cause du cercle, si bien que cherchant les lignes E Q & Q A, par P E & P A qu'on suppose comme données , on aura la mesme equation, que si on cherchoit C M & M A par P C, P A. d'où il suit euidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de telle autre quantité qu'on aura supposee , sera double en cete equation, c'est a dire qu'il y aura deux racines inesgales entre elles; & dont l'vne sera CM , l'autre E Q , si c'est x qu'on cherche; ou bien l'vne sera M A , & l'autre Q A, si c'est y. & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du mesme costé de la courbe que le point C; il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, sont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;



nes; & enfin elles font entierement efgales, s'ils font tous deux ioins en vn; c'eft a dire fi le cercle, qui paffe par C, y touche la courbe C E fans la coupper.

De plus il faut confiderer, que lorfqu'il y a deux racines efgales en vne equation, elle a neceffairement la mefme forme, que fi on multiplie par foy mefme la quantité qu'on y fuppofe eftre inconnuë moins la quantité connue qui luy eft efgale, & qu'aprés cela fi cete derniere fomme n'a pas tant de dimenfions que la precedente, on la multiplie par vne autre fomme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puiffe y auoir feparement equation entre chafcun des termes de l'vne, & chafcun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy deffus, a fçauoir $yy\frac{+qry-2qvy+qvv-qss}{q-r}$ doit auoir la mefme forme que celle qui fe produift en faifant e efgal a y, & multipliant $y-e$ par foy mefme, d'où il vient $yy-2ey+ee$, en forte qu'on peut comparer feparement chafcun de leurs termes, & dire que puifque le premier qui eft yy eft tout le mefme en l'vne qu'en l'autre, le fecond qui eft en l'vne $\frac{qry-2qvy}{q-r}$ eft efgal au fecōd de l'autre qui eft $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui eft la ligne P A, on à

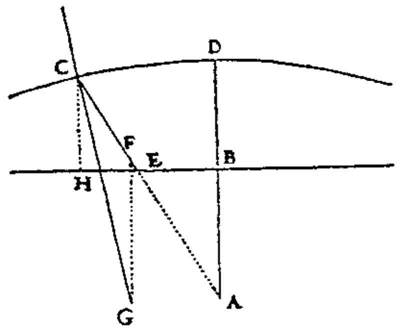


$v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiē a caufe que nous auons fuppofé e efgal a y, on a $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et ainfi on pourroit trouuer s par le troifiefme terme $ee \propto \frac{qvv-qss}{q-r}$, mais pourceque la quantité v determine affés le point P, qui eft le feul que nous cherchions, on n'a pas befoin de paffer outre.

Ie n'adiouſte point les conſtructions, par leſquelles on peut deſcrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en ſuite du calcul que ie viens d'expliquer, a cauſe qu'il eſt touſiours ayſé de les trouuer: Bienque ſouuent on ait beſoin d'vn peu d'adreſſe, pour les rendre courtes & ſimples.

Comme par exemple, ſi D C eſt la premiere conchoide des anciens, dont A ſoit le pole, & B H la regle: en ſorte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & ſont compriſes entre la courbe C D, & la droite B H, comme D B & C E, ſoient eſgales: Et qu'on veuille trouuer la ligne C G qui la couppe au point C a angles droits. On pourroit en cherchant, dans la ligne B H, le point par où cete ligne C G doit paſſer, ſelon la methode icy expliquée, s'engager dans vn calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens: Et toutefois la conſtruction, qui deuroit aprés en eſtre deduite, eſt fort ſimple. Car il ne faut que prendre C F en la ligne droite C A, & la faire eſgale à C H qui eſt perpendiculaire ſur H B: puis du point F tirer F G, parallele à B A, & eſgale à E A: au moyen de quoy on a le point G, par lequel doit paſſer C G la ligne cherchée.

Exemple de la conſtruction de ce probleſme en la conchoide.



ANNEXE 2 (suite)

Rabuel Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes Paris 1730

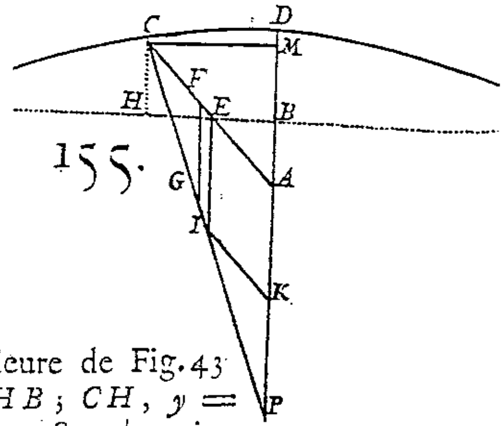


Fig. 155. 4. Soit la courbe CD, Fig. 155. la conchoïde ſuperieure de Fig. 43. Soit A le pole, BD, $a = CE$; BA, b; CM, $x = HB$; CH, $y = MB$; $AM = b + y$; BP, v; $PM = v + y$; PC, s. Son équation telle qu'elle a été trouvée, Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 3. n. 1. ſera celle-ci, $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = 0$. $xxyy = -y^4 - 2by^3 + aayy - bbyy + 2aaby + aabb$. Après cela dans le triangle rectangle CMP l'on comme auparavant $\overline{CP}^2$, $ss = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $xx + vv + 2vy + yy$; $xx = ss - vv - 2vy - yy$. Mettons cette valeur de xx à ſa place, nous aurons $y^3 + \frac{aayy - bbyy - ssyy + vvyy + 2aaby + aabb}{2v - 2b} = 0$. équation du troiſiéme degré. Maintenant pour donner à l'équation $yy - 2ey + ee = 0$ les dimenſions convenables, je la multiplie par $y + f = 0$, ce qui produit $y^3 - 2eyy + fyy + eey - 2efy + eef = 0$.

Je compare d'abord les derniers termes $eef = \frac{aabb}{2v - 2b}$: donc $f = \frac{aabb}{2vee - 2bee}$. Enſuite je viens aux troiſiémes termes $eey - 2efy = \frac{2aaby}{2v - 2b}$; je ſubſtituë pour f ſa valeur déja trouvée, & je fais $eey - \frac{2aabbey}{2vee - 2bee} = \frac{2aaby}{2v - 2b}$, ou $ee - \frac{aabb}{ve - be} = \frac{aab}{v - b}$, $v = b + \frac{aab}{ee} + \frac{aabb}{e^3} = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. La conſtruction ſe fera, Art. 6.

On a déterminé par le calcul Art. 3. n. 4. le point P, Fig. 155. d'où l'on doit tirer PC ſur le point donné C de la conchoïde à angles droits; de ſorte que la perpendiculaire, que l'on meneroit ſur PC par le point C, ſeroit tangente de la Conchoïde au point C. Et l'on a trouvé $BP = v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$, étant BD, $a = CE$; BA, b; MB, $y = CH$.

Il reſte à faire voir ici, que ſi, comme M. DESCARTES l'aſſure, on coupe ſur CA le ſegment CF égal à CH, y; & que du point F on tire FG parallele à BA & égale à EA; la droite CGP menée par les points C, G, coupe à angles droits la conchoïde DC, c'eſt-à-dire, que la droite CGP coupe l'axe AB au point P, de ſorte que BP ſoit $v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. Par le point E menez EI parallele à AB, & par le point I, IK parallele à EA.

A cauſe des paralleles AB, CH, les triangles EBA, EHC ſont équiangles; & donnent cette analogie CH, y : CE, a :: AB, b : EA, $\frac{ab}{y} = IK = FG$ ſupp. les lignes FG, EI, qui ſont paralleles à AB, ſont paralleles entr'elles; les triangles CFG, CEI ſont équiangles, & l'on a cette proportion CF, y : FG, $\frac{ab}{y}$ :: CE, a : EI, $\frac{aab}{yy} = AK$.

Les triangles CFG, IKP équiangles à cauſe des paralleles EA, IK, fourniſſent cette proportion, CF, y : FG, $\frac{ab}{y}$ :: IK, $\frac{ab}{y}$: KP, $\frac{aabb}{y^3}$.

Ainſi la ligne $BP = BA + AK + KP$ eſt $b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3} = v$.

ANNEXE 3 **Fermat** (Toulouse 1679) *Varia Opera Mathematica*
trad. Tannery 1896 Paris (p.121-123 T.3)

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum.*

Fig. 91.

Posons AC $= b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent* : $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

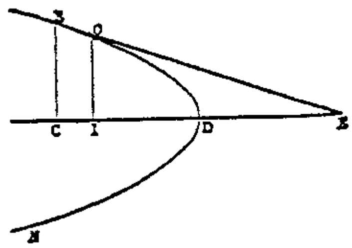
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais, $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

ANNEXE 4

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum.* Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' $\left(\text{cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que } \frac{b^2}{4}\right)$, on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

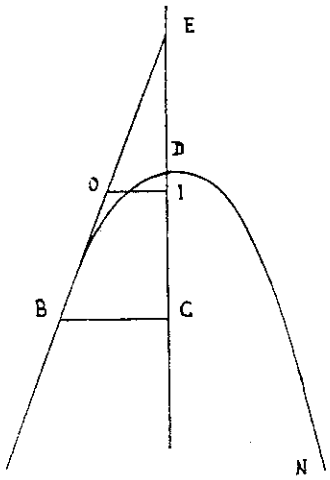
$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

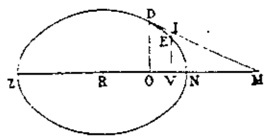
Premierement donc, ie trouue manifeſtement de l'erreur en ſa regle, & encore plus en l'exemple qu'il en donne, pour trouuer les contingentes de la parabole. Ce que ie trouue en cette ſorte. Soit B D N la parabole donnée, dont D C eſt le diametre, & que du point donné B il faille tirer la ligne droite B E, qui rencontre D C au point E, & qui ſoit la plus grande qu'on puiſſe tirer du meſme point E iuſques a la parabole : | *ſic enim proponitur quærenda maxima.* Sa regle dit : *Statuatur quilibet quæſtionis terminus eſſe A;* ie prens donc E C pour *A*, ainſi qu'il a fait; *& inueniatur maxima* (a ſçauoir B E) *in terminis ſub A gradu, vt libet, inuolutis;* ce qui ne ſe peut faire mieux qu'en cette façon : que B C ſoit *B*, le quarré de B E ſera $A\,q + B\,q$, a cauſe de l'angle droit B C E. *Ponatur rurſum idem terminus qui prius, eſſe* $A + E$: a ſçauoir, ie fais que E C eſt $A + E$ (ou bien, ſuiuant ſon exemple, $A - E$, car l'vn reuient à l'autre); *iterùmque inueniatur maxima* (a ſçauoir B E) *in terminis ſub A & E gradibus, vt libet, coefficientibus**, ce qui ne ſe peut mieux faire qu'en cette ſorte : poſons que CD ait eſté cy-deuant *D*, lors que B C eſtoit *B*, & le coſté droit de la parabole ſera $\frac{Bq}{D}$, à cauſe qu'il eſt a B C, la ligne appliquée par ordre, comme B C eſt a C D, le ſegment du diametre auquel elle eſt appliquée. C'eſt pourquoy maintenant que C E eſt $A + E$, D C eſt $D + E$; & le quarré de B C eſt $\frac{Bq \text{ in } D + Bq \text{ in } E}{D}$ qui eſtant adiouſté au quarré de C E, qui eſt $Aq + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$, il fait le quarré de B E. *Adæquentur duo homogenea maximæ æqualia :* c'eſt a dire que $Aq + Bq$ ſoit poſé eſgal a $Bq + \frac{Bq \text{ in } E}{D} + Aq + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$. *Et demptis communibus,* il reſte $\frac{Bq \text{ in } E}{D} + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$ égal à rien. *Applicentur ad E, &c.*, il vient $\frac{Bq}{D} + A \text{ bis} + E$. *Elidatur E,* il reſte $\frac{Bq}{D} + A \text{ bis}$ eſgal à rien. Ce qui ne donne point la valeur de la ligne *A*, comme aſſeure l'auteur, & par conſequent ſa regle eſt fauſſe.



ANNEXE 6	La méthode de Fermat appliquée à l' ellipse.

Pour appliquer aussi cette même méthode aux *tangentes*, je puis procéder comme suit. Soit, par exemple, l'ellipse ZDN (*fig.* 96),

Fig. 96.



d'axe ZN et de centre R. Prenons sur sa circonférence un point comme D, menons par ce point la tangente DM à l'ellipse et l'ordonnée DO. Posons, en notations algébriques, la donnée $OZ = b$ et la donnée $ON = g$; soit l'inconnue $OM = a$, en comprenant par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le point de rencontre avec la tangente.

Puisque DM est tangente à l'ellipse, si, par un point V pris *ad libitum* entre O et N, je mène IEV parallèle à DO, il est évident que la ligne IEV coupe la tangente DM et l'ellipse, soit aux points E et I. Mais, puisque DM est tangente à l'ellipse, tous ses points, sauf D, sont en dehors de l'ellipse, donc $IV > EV$ et $\frac{DO^2}{EV^2} > \frac{DO^2}{IV^2}$. Mais, d'après la propriété de l'ellipse, $\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{ZO.ON}{ZV.VN}$, et d'autre part $\frac{DO^2}{IV^2} = \frac{OM^2}{VM^2}$. Donc $\frac{ZO.ON}{ZV.VN} > \frac{OM^2}{VM^2}$.

Soit l'arbitraire $OV = e$, nous aurons

$$ZO.ON = bg, \quad ZV.VN = bg - be + ge - e^2,$$
$$OM^2 = a^2, \quad VM^2 = a^2 + e^2 - 2ae.$$

Donc $\frac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Si donc on multiplie le premier terme par le dernier et le second par le troisième, on aura

$$\underbrace{bga^2 + bge^2 - 2bgae}_{\text{produit du premier terme par le dernier}} > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Il faut donc, suivant ma méthode, comparer par adégalité ces deux produits, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e; on aura donc

$$bge - 2bga \backsim - ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Supprimant les termes où reste e,

$$-2bga \backsim - ba^2 + ga^2,$$

membres qu'il faut égaler, d'après la méthode. Transposant comme il convient, on aura $ba - ga = 2bg$.

On voit que cette solution est la même que celle d'Apollonius, car, d'après ma construction, pour trouver la tangente, il faut faire $\frac{b-g}{g} = \frac{2b}{a}$ ou $\frac{ZO - ON}{ON} = \frac{2ZO}{OM}$, tandis que, d'après celle d'Apollonius, il faut faire $\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN}$. Il est clair que ces deux constructions reviennent au même.

Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.

Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.

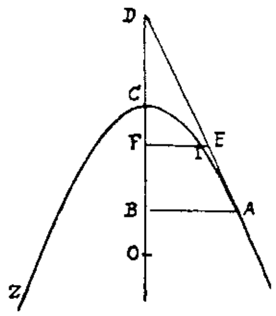
ANNEXE 7 — Lettre de Fermat à Mersenne (juin - juillet 1638)

Méthode de maximis et minimis

expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes.

La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA, de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.



Les lignes AB et BC sont données. Supposons que BA s'appelle B et que BC s'appelle D. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle A. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit E. Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$. Et de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuye à la courbe du point F : — plus grande lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite lorsque la courbe est convexe en dedans ; car la regle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe.

Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

Comme en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré ;

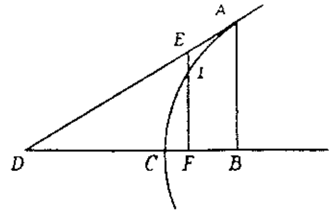
car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les appliquées à la courbe qui ont la proprieté que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par E. J'efface tout ce qui reste mêlé avec E et égalise le surplus, de sorte que par cette dernière équation, je connois la valeur de A et par conséquent la ligne BD et la tangente.

Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour nous servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes[1].

Soit la courbe convexe CA, *de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur ladite courbe, comme* A, *tirant la perpendiculaire* AB, *les deux cubes* CB *et* BA *soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme* N, *et sous les deux lignes* CB *et* BA.



Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les mêmes noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par *adéquation*, les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous N, FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE, sont en notes

$$\textit{Dcub.} - \textit{Ecub.} - \textit{Dq.}\text{ in }E.\ 3 + D\text{ in }\textit{Eq.}\ 3 +$$
$$+\frac{\textit{Bcub.}\text{ in }\textit{Acub.} - \textit{Bcub.}\text{ in }\textit{Ecub.} - \textit{Bcub.}\text{ in }\textit{Aq.}\text{ in }E.\ 3 + \textit{Bcub.}\text{ in }A\text{ in }\textit{Eq.}\ 3}{\textit{Acub.}}$$

le solide de N, CF, FE, en notes, est :

$$\frac{N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }A - N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }E - N\text{ in }B\text{ in }A\text{ in }E + N\text{ in }B\text{ in }\textit{Eq.}}{A}$$

Multipliant tout par *Acub*, il faut comparer :

$$\textit{Dc.}\text{ in }\textit{Ac.} - \textit{Ec.}\text{ in }\textit{Ac.} - \textit{Dq.}\text{ in }E\text{ in }\textit{Ac.}\ 3 + D\text{ in }\textit{Eq.}\text{ in }\textit{Ac.}\ 3$$
$$+ \textit{Bc.}\text{ in }\textit{Ac.} - \textit{Bc.}\text{ in }\textit{Ec.} - \textit{Bc.}\text{ in }\textit{Aq.}\text{ in }E.\ 3 + \textit{Bc.}\text{ in }\textit{Aq.}\text{ in }\textit{Eq.}\ 3$$

avec :

$$N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }\textit{Ac.} - N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }E\text{ in }\textit{Aq.}$$
$$- N\text{ in }B\text{ in }E\text{ in }\textit{Ac.} + N\text{ in }B\text{ in }\textit{Eq.}\text{ in }\textit{Aq.}$$

Otons les choses communes, savoir, du premier terme :

$$\textit{Dc.}\text{ in }\textit{Ac.} + \textit{Bc.}\text{ in }\textit{Ac.},$$

et du second :

$$N\text{ in }D\text{ in }B\text{ in }\textit{Ac.},$$

qui sont égaux, par la propriété de la ligne, puisque les deux cubes *Dc.* et *Bc.*, répondant aux cubes des deux lignes BC et BA, sont égaux au solide N in D in B, qui répond à celui de la ligne donnée et des deux lignes BC et BA.

Divisons le reste par E et ôtons ensuite tout ce qui se trouvera mêlé avec E ; restera enfin :

$$\textit{Dq.}\text{ in }A\text{ ter} + \textit{Bcub.}\text{ ter} \quad \text{égal} \quad \text{à} \quad N\text{ in }D\text{ in }B + N\text{ in }B\text{ in }A,$$

et ainsi nous aurons :

$$\frac{N\text{ in }D\text{ in }B = \textit{Bcub.}\text{ ter}}{\textit{Dq.}\text{ ter} = N\text{ in }B}\ \text{égal à } A,$$

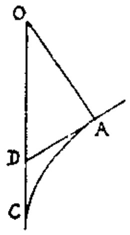
ce qu'il falloit chercher.

Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de Maximis et Minimis* peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*.

Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe :

⟨ Ce ⟩ dont la démonstration est aisée. Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe, sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.

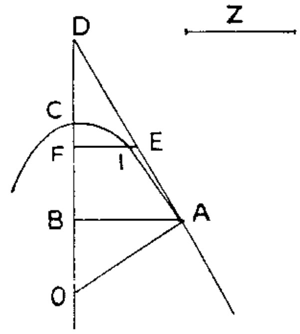


Que si la ligne CA est convexe en dehors, soit la tangente DA sur laquelle soit tirée la perpendiculaire AO, il paroit par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente[1].

Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit, par exemple, la parabole donnée CIA, *sur laquelle le point* A *soit donné. Je veux chercher le point* O, *en sorte que* OA *soit la plus courte de toutes celles qui du point* O *peuvent être menées à la parabole.*

BC, comme ci-devant, s'appellera D, et BA s'appellera B; le côté droit[1] de la figure, Z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit A. Donc le quarré OA en notes sera $Aq. + Bq.$



Prenons maintenant, au lieu de la ligne A ou OB, OF ou $A + E$. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

$$Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis } + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc, en notes, par *adéquation*, les quarrés OI et OA. Nous aurons d'un côté :

$$Aq. + Bq.,$$

et de l'autre :

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis } + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E.$$

Otons les choses communes : la comparaison restera entre :

$$Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{d'un côté, et} \quad Z \text{ in } E \quad \text{de l'autre ;}$$

car $Bq.$ est égal, par la propriété de la parabole, à Z in D.

Divisons le tout par E, et du reste ôtons le même E :

$$A \text{ bis sera égal à } Z,$$

et partant A, ou OB, sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI, ou son quarré, sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie. La raison est prise des asymmétries[1] qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur $D - E$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'oste pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2\,vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle page 342[2], — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure[3] MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,

$$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \infty x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x,$$

il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables, et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini ; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer[4]*.

Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés. Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours $D - E$, et FE, $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, je ne vois rien qui empêche qu'on ne puisse les comparer, en prenant, si vous voulez, $D - E$ pour y et $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.

On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir ; à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira*.

Je désire seulement qu'il sache que nos questions *de Maximis et Minimis* et *de Tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner. S'il désire voir l'application que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides, je la lui ferai voir, et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de *trouver le centre de gravité* |*du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole* CBA *est tournée sur son appliquée BA, et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cones de même base et de même hauteur*[1].

209 le dénominateur *A* dans la fraction est omis. — 222 *depuis 8 ou 10.* — 223 *5 ou 6.* — 223 *S'il* à la ligne. — 227 *du conoïde* dans le brouillon seul. — 220 non à la ligne.

qu'il ne s'applique pas aux équations implicites, tandis que sa méthode permet de les traiter directement, lorsqu'elles sont entières, comme dans l'exemple qu'il donne. Cf. p. 250, en éclaircissement.

1. Cf. l'éclaircissement à la lettre du 4 novembre 1636 (*t. VI*, p. 149) et les lettres de FERMAT à ROBERVAL des 23 août, 22 septembre et 4 novembre (*t. VI*, n° *573*) 1636, dans l'éd. Tan.-Henry des *Œuvres de*