DE LA METHODE PAR EXHAUSTION

GROUPE M: A.T.H.
d'après un travail de M. F. Jozeau

Dans son oeuvre, Archimède[1] utilise à plusieurs reprises une méthode de démonstration appelée méthode d'exhaustion [2] qu'il dit détenir d'Eudoxe, qui a déjà été reprise par Euclide, au Livre XII des Eléments. Archimède va la porter à un point culminant, pour le calcul des aires et des volumes.

A l'aide de cette méthode, Archimède démontre beaucoup de nouveaux résultats: entre autres, il montre que l'aire d'un segment de parabole est égale aux quatre tiers de l'aire du triangle de même base et de même sommet [3]; que le volume d'un segment de paraboloïde de révolution[4] est égal à la moitié du cylindre circonscrit. Il établit la relation entre l'aire d'un secteur de la spirale et l'aire d'un secteur circulaire. Il se servira aussi de la méthode d'exhaustion dans les recherches de centre de gravité. Archimède exploite au mieux l'ensemble des connaissances qu'Euclide avait rassemblées peu de temps avant lui.

Malgré la perte d'une part importante de ses oeuvres, on peut suivre ses découvertes au travers de certaines de ses oeuvres mathématiques et noter une progression entre le traité De la Sphère et du Cylindre et celui Des Conoïdes et des Sphéroïdes ; on peut remarquer que les résultats des Equilibres Plans I sont utilisés dans La Quadrature de la Parabole, dans les Equilibres Plans II, dans le traité de La Méthode[5], et dans Les Corps Flottants.

A partir du IXème siècle, les mathématiciens arabes vont s'attaquer au même type de problèmes. Ils connaissent et maîtrisent certains écrits d'Archimède où se trouve mise en jeu la méthode d'exhaustion, mais ils semblent ignorer une grande partie de ses oeuvres. Ils vont retrouver par des voies différentes certaines des découvertes d'Archimède, obtenir de nouveaux résultats et enrichir eux aussi la méthode d'exhaustion .

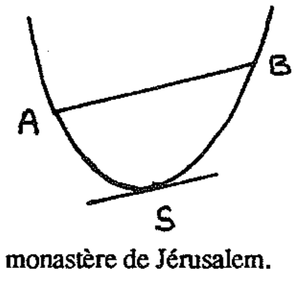
Après une courte présentation de la méthode dite d'exhaustion, telle qu'elle est développée par Euclide, nous verrons comment Archimède l'a précisée et perfectionnée, puis quels ont été les apports de deux mathématiciens arabes Ibn Qurra et Ibn al-Haytham .

---

1 Archimède est mort en 212 av. J.C. Cette date est sûre, car elle est liée à un évenement militaire et politique: la prise de Syracuse par les troupes romaines. Il est difficile actuellement de donner la date de sa naissance . Jean Tzetzes déclare, dans un vers de ses Chiliades, qu'Archimède a vécu 75 ans. Proclus dit qu'Archimède vivait au temps d'Euclide. D'autres repères sont possibles d'après les préfaces adressées à des personnages connus par ailleurs : Dosithée, Eratosthène ...

2 Nom donné par Grégoire de St Vincent au XVIIème siècle, dans son "Opus Geometricum" et qui signifie épuisement.

3 Le sommet d'un segment de parabole limité par l'arc et la corde AB est le point de cet arc dont la tangente est parallèle à la corde.



4 Un segment de paraboloïde de révolution est une portion de ce solide de révolution (engendré par une parabole tournant autour de son axe) comprise entre le plan tangent au sommet et un plan parallèle. (cf. figure)

5 Signalons que La Méthode fut retrouvée en 1906 seulement, dans un monastère de Jérusalem.

I. La méthode d'exhaustion

Voici comment est définie la méthode d'exhaustion dans l'Encyclopédie de D'Alembert, à l'article "exhaustion", rédigé par M. l'abbé de La Chapelle :

" La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; et en employant, pour le démontrer, le raisonnement par l'absurde ".

Cette méthode fut, dit Archimède, introduite par Eudoxe pour résoudre les nombreux problèmes relevant d'un calcul de nature infinitésimale (quadratures, cubatures...). Rappelons que pour les géomètres grecs, il n'est pas question d'associer des nombres aux longueurs de segments ou de courbes, aux aires des surfaces et aux volumes des solides car, incapables de trouver une unité de mesure commune aux grandeurs incommensurables, les Grecs ne mesurent pas les grandeurs géométriques mais les comparent entre elles en calculant leurs rapports.

Ainsi la méthode d'exhaustion permet de comparer, par exemple, l'aire d'une surface S à l'aire d'une surface T connue.

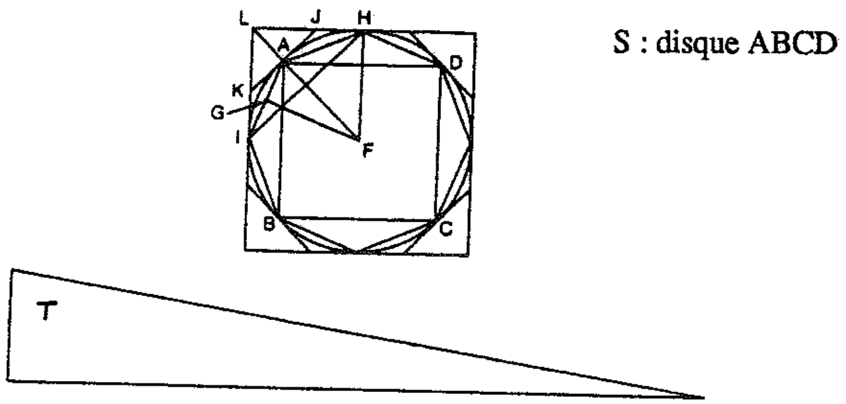


Figure extraite de La Mesure du Cercle d'Archimède

1. Principe de la méthode avant Archimède

Pour démontrer l'égalité de deux figures A et B (au sens de l'aire ou du volume), cette méthode procède indirectement en recourant à un double raisonnement par l'absurde. On démontre que chacune des deux hypothèses A > B et A < B conduit à une contradiction, on conclut donc que A = B.

Pour obtenir les contradictions, on approxime la figure curviligne A par une figure rectiligne C inscrite, de sorte que la différence entre les figures A et C soit **plus petite qu'une grandeur donnée.**

2. Fondements de la méthode

La méthode est rigoureusement fondée. Elle s'appuie sur la proposition 1 du livre X des Eléments d'Euclide: *"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées."*

La démonstration de cette proposition repose sur la définition 5 du livre V, qu'on appelle l'axiome d'Archimède ou axiome de mesurabilité : *"Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement."*

Cet axiome important s'applique aussi bien à des grandeurs incommensurables que commensurables. Le livre V des Eléments d'Euclide expose la théorie des proportions d'Eudoxe. Cette théorie est à la base de la méthode d'exhaustion. Elle présente une tentative de donner un statut aux grandeurs incommensurables, et permet de fonder la théorie de la similitude des figures. Mais elle présente une sérieuse limitation: elle ne permet pas de concevoir une raison comme une entité ou une valeur numérique. De ce fait, comme nous l'avons vu, les Grecs n'établissent que des relations entre des grandeurs. Ainsi, par exemple, alors que nous parlons de proportionalité de l'aire d'un triangle à sa base, on lit à la première proposition du Livre VI: *"Les triangles (...) qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases."* La notion de raison est difficile, elle ne se confond pas, en particulier, avec la raison d'une progression géométrique que nous retrouverons plus loin; nous nous autoriserons parfois, dans la suite, des abus de langage dans les commentaires que nous ferons sur les textes étudiés.

Rigoureuse, la méthode d'exhaustion fait cependant appel à un postulat implicite supplémentaire, que Clavius a explicité en commentaire de sa traduction latine des six premiers livres des Eléments (1574) : *"Soient trois grandeurs A, B et C dont les premières sont de même espèce. Il existe toujours une grandeur D de même espèce que C, telle que les rapports de A à B et de C à D soient égaux."* Ce postulat et souvent désigné comme l'hypothèse de la quatrième proportionnelle [6]. Celle-ci est utilisée par Euclide de façon implicite lorsqu'il démontre au livre V des propriétés opératoires des proportions et apparait, par exemple, à la proposition 12 du livre VI, que nous appelons maintenant le "théorème de Thalès".

3. Caractères de la méthode d'exhaustion

- Elle évite le recours à tout processus infini.

La géométrie grecque est finitiste, à l'image des considérations cosmologiques qui ont dominé le monde grec dont l'univers est clos. Ainsi, la méthode d'exhaustion contourne tout passage à l'infini, car l'infini soulevait des paradoxes tels que ceux de Zénon.

Par exemple, dans La Mesure du cercle, Archimède n'utilise pas la notion de polygone à un nombre infini de côtés qui coïnciderait, à la limite, avec le segment de cercle. Il augmente le nombre de côtés du polygone **jusqu'à ce que la quantité résiduelle soit aussi petite que l'on voudra,** suffisamment pour faire jouer la contradiction MAIS IL Y AURA TOUJOURS UN RESTE comme le laisse comprendre cet extrait : *" Divisons les arcs en deux parties égales et que les segments du cercle aient à la fin une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle "*

Les aires approchées n'épuisent pas exhaustivement l'aire recherchée.

- La méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de recherche.

Cette méthode est un modèle achevé de technique démonstrative. Jusqu'au XVIIIème siècle, elle sera la seule méthode légitime universelle de démonstration, pour ces questions infinitésimales. C'est une méthode d'exposition qui force l'admiration aux dépens de la compréhension. *" Ce que nous avons connu des Anciens sur ces matières, principalement d'Archimède, est assurément digne d'admiration ."* écrit le Marquis de L'Hospital en 1696.

Suffisante pour montrer, elle s'avère cependant insuffisante pour expliquer et découvrir. En effet, elle suppose que l'on connaisse **a priori** le résultat que l'on veut prouver. La recherche de celui-ci se fait par d'autres démarches intuitives ou expérimentales. Ainsi Archimède découvrira de nombreux résultats par une méthode mécanique de pesée sur un levier fictif. Ce procédé de recherche ne nous sera connu qu'après la découverte, en 1906, par

---

6 Déjà au XIème siècle, Al-Hayyam célèbre poète et mathématicien arabe avait cherché à justifier l'existence de la quatrième proportionnelle.

Heiberg du traité de La Méthode . Pour Archimède, cette pesée n'est pas une justification rigoureuse : " *La proposition qui précède n'est certes pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée."*

Les géomètres du XVIIème siecle, pour découvrir des résultats nouveaux se serviront de la méthode des indivisibles : méthode brève, directe et éclairante. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de cette méthode et de la polémique qui opposa alors les défenseurs des indivisibles, méthode des Modernes, et les adeptes de la méthode d'exhaustion, méthode des Anciens. Notons cependant que les géomètres du XVIIème siècle pensent que les Anciens possédaient une méthode de découverte, mais qu'ils la gardaient secrète. Torricelli s'en explique ainsi : "*Que cette géométrie des indivisibles soit une découverte entièrement nouvelle, je n'oserais l'affirmer. Je croirais plus volontiers que les anciens géomètres se sont servi de cette méthode dans la découverte des théorèmes les plus difficiles, bien qu'ils aient préféré une autre voie dans les démonstrations, soit pour cacher les secrets de l'art, soit pour ôter à des détracteurs jaloux l'occasion de les contredire.* " Nardi, ami de Torricelli dit : "*Il est certain que les admirateurs d'Achimède ont besoin d'expliquer sa manière oblique, parce qu'elle est longue et difficile dans les constructions et les preuves, parce qu'elle ne satisfait pas entièrement et qu'elle engendre la certitude mais non l'évidence.* "

- La méthode d'exhaustion nécessite de résoudre chaque problème cas par cas, de trouver pour chacun d'eux une procédure géométrique ad hoc.

- Cette méthode, enfin, est laborieuse et longue. Méthode indirecte, reposant sur un double raisonnement par l'absurde, elle nécessite de longs développements. Au XVIIème siècle, Wallis, à qui on reprochait de ne pas faire une démonstration à l'ancienne, rétorque: " *J'ai bien pu ne pas toujours en donner les prolixes développements ; je cherchais à m'épargner un travail pénible, à éviter l'ennui du lecteur* ".

II . Les apports d'Archimède

Bien que le schéma de démonstration reste le même que chez Euclide, Archimède le généralise à d'autres comparaisons de surfaces et de solides, et il en complexifie les éléments et les différentes étapes.

1. La notion de grandeur

Archimède apporte des précisions théoriques sur la notion de grandeur. Euclide ne définit pas ce qu'il entend par grandeur. Pour Euclide, les grandeurs peuvent être des segments de droite, des aires (limitées par des portions de droites ou des arcs de cercle), des volumes (sphère, cône, pyramide) ou des angles rectilignes. Les propriétés intuitives de ces grandeurs sont de s'additionner, de se partager, de se comparer et de satisfaire l'axiome dit d'Archimède (voir page 18).

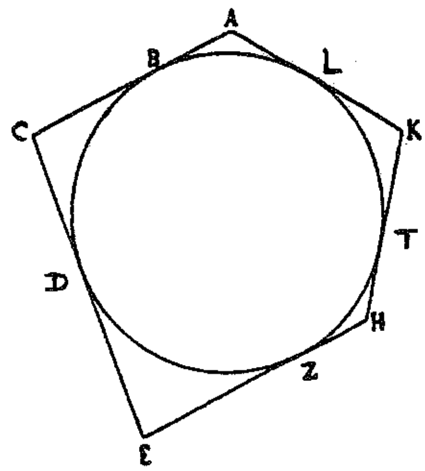
Archimède étend la notion de grandeur à des arcs de cercles, des portions de coniques, des surfaces gauches (la sphère), des poids et des durées.

2. La concavité des courbes

Archimède précise certaines notions relatives à la concavité des courbes. " *J'appelle concave dans la même direction une ligne ou une surface telle qu'ayant pris deux points quelconques sur cette ligne ou cette surface les droites qui joignent ces deux points tombent du même côté de la ligne ou de la surface* ". Il postule ensuite que " *la ligne droite est la plus courte des lignes ayant les mêmes extrémités (...) Quant aux autres lignes, lorsque, situées dans un plan, elles ont les mêmes extrémités, elles sont inégales si, étant les unes et les autres concaves dans la même direction, l'une d'elles est entièrement comprise entre une autre et la droite ayant les mêmes extrémités, ou est en partie comprise et en partie commune; et la ligne comprise est la plus petite.* "

Dans les Eléments d'Euclide on avait seulement *"Le tout est plus grand que la partie"*, ce qui ne lui permettait pas de comparer des lignes droites et des lignes courbes. Archimède peut le faire, comme le montre l'exemple de la proposition 1 du Livre I De La Sphère et du Cylindre : " *Si un polygone est circonscrit à un cercle, le périmètre du polygone circonscrit est plus grand que la circonférence du cercle.*" En voici la démonstration:

Circonscrivons un polygone au cercle donné ci-dessous ; je dis que le périmètre de ce polygone est plus grand que la circonférence de ce cercle. En effet, puisque la somme de BA, AL est plus grande que l'arc BL , parce que ces droites comprennent un arc ayant les mêmes extrémités, il en est aussi de même pour la somme de DC, CB, plus grande que l'arc DB ; pour la somme de LK, KT, plus grande que l'arc LT et pour la somme de ZH, HT, plus grande que l'arc ZT ; enfin pour la somme de DE, EZ, plus grande que l'arc DZ. Par conséquent, le périmètre entier du polygone est plus grand que la circonférence du cercle."



3. L'axiome d'Archimède ou de mesurabilité.

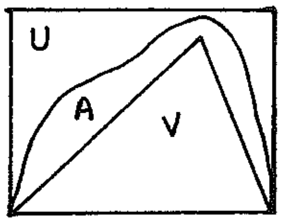
Archimède énonce cet axiome dans plusieurs de ses écrits : " *Parmi les lignes, surfaces et solides inégaux, le plus grand excède le plus petit d'une grandeur telle qu'étant ajoutée à elle-même, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec l'une et l'autre des premières.* " Remarquons que cet axiome n'était pas donné sous cette forme chez Euclide (voir page 18).

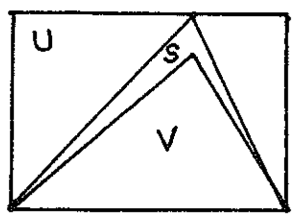
4. Usage des figures inscrites et circonscrites.

Archimède utilise à la fois une figure inscrite et une figure circonscrite. Le raisonnement procède en deux étapes.

- On construit les figures U et V, encadrant à la fois la figure A inconnue et la figure S connue, et telles que la différence V-U soit aussi petite que l'on veut, suffisamment petite pour aboutir aux contradictions nécessaires à la deuxième étape du raisonnement.
- Après un **double raisonnement par l'absurde,** on conclut que A est égale à S.

Les exemples étudiés dans la partie suivante mettront en évidence l'usage des figures inscrites et circonscrites.





5. Apparition des "sommes intégrales"

Archimède, comme le montrent les exemples de la partie IV, utilise à plusieurs reprises une suite de polygones inscrits et circonscrits dont les aires constituent une suite géométrique convergente. Pour calculer la mesure de la grandeur inscrite, Archimède utilise une méthode consistant à calculer la somme des n premiers termes d'une série, mais il évite de calculer la somme de ce qui serait pour nous la série infinie.

III. Utilisation des figures inscrites et circonscrites

La Mesure du cercle

Le résultat est semblable à celui de la proposition 2 du livre XII d'Euclide mais il s'en différencie par la démonstration qui fait apparaître un encadrement du cercle par des polygones inscrits et circonscrits. Les énoncés se présentent différemment :

Pour Euclide : " *Les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diamètres* " (annexe 1)

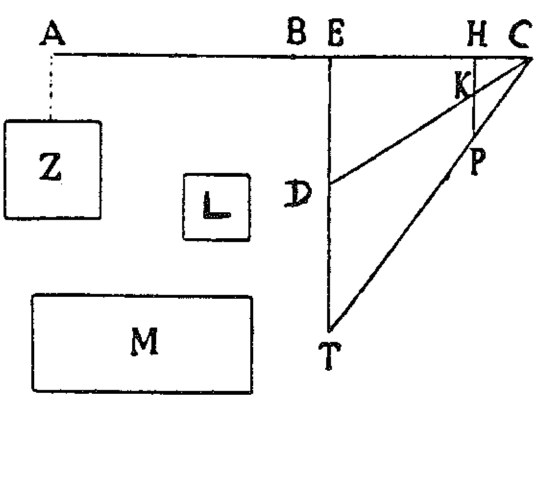
Pour Archimède : " *Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base égale au périmètre du cercle*" (annexe 2)

La Quadrature de la parabole

Le traité commence ainsi : " *Archimède à Dosithée, Prospérité ! (...) aucun de mes prédécesseurs n'a encore que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et parabole, chose que nous avons trouvé maintenant.. (...) Je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique, puis telles que je les ai établies par la géométrie.* "

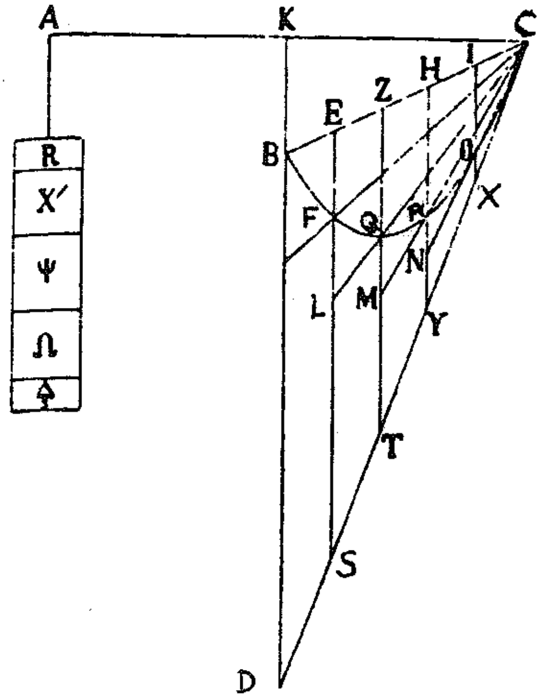
Décrivons rapidement la méthode qu'il appelle mécanique. Dans les propositions 6 à 13, Archimède imagine un levier fictif ayant un point fixe autour duquel sont opérées des pesées fictives de trapèzes et de surfaces de forme non précisée, permettant d'équilibrer le levier.

Lisons, par exemple la proposition 13 : "*Soit de nouveau un levier AC, le point B étant placé en son milieu, et un trapèze KDTP ayant ses côtés DK, TP dirigés vers le point C, et ses côtés DT, KP perpendiculaires à la droite BC. Que le trapèze soit suspendu au levier aux points E, H, et qu'une aire Z, suspendue au point A, fasse équilibre au trapèze DKTP dans la position qu'il occupe maintenant. De plus, que le rapport du trapèze DKTP à une aire L soit le même que celui de AB à BE, et que le rapport de ce trapèze à une aire M soit le même que celui de AB à BH. Dès lors on démontrera, de la même manière que précédemment, que l'aire Z est plus grande que l'aire L et plus petite que l'aire M .*"



Dans les propositions suivantes, 14, 15, 16, l'utilisation des figures inscrites et circonscrites, encadrant le segment de parabole, est bien mise en évidence. Ici, il s'agit de trapèzes (voir le texte en annexe 3). Voici le principe de la démonstration:

Archimède partage BC en segments égaux qui permettent de construire des trapèzes inscrits dans le segment de parabole et d'autres circonscrits à ce segment. Dans les propositions 14 et 15, Archimède montre que l'aire du triangle BDC est inférieure à 3 fois l'aire des trapèzes inscrits. (Il imagine, pour la démonstration, une balance dont le triangle BDC serait l'un des poids et les aires des trapèzes, l'autre poids). Puis à la proposition 16 intervient le double raisonnement par l'absurde.



Archimède suppose d'abord que l'aire du segment BQC est supérieure au tiers de l'aire du triangle BDC. Il choisit un partage de BC assez fin pour que la figure rectiligne inscrite diffère du segment d'une quantité inférieure à la différence

$\mathcal{A}$ (BQC) $- \frac{1}{3}\mathcal{A}$ (BDC). Il aboutit alors à une absurdité. Il suppose ensuite que l'aire du segment est inférieure au tiers de celle du triangle. Il montre aussi que l'on aboutit à une absurdité; d'où la conclusion : l'aire du segment de parabole est le tiers de celle du triangle BDC.

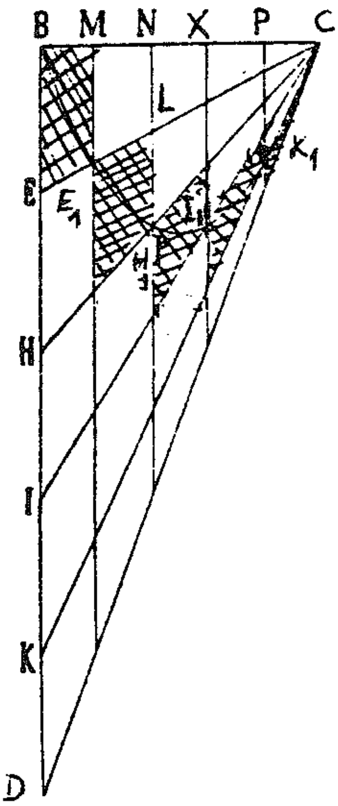
Décrivons maintenant la démarche de la première partie de la proposition 16, où Archimède montre, par un raisonnement par l'absurde, que l'aire A du segment de parabole BCQ n'est pas supérieure au tiers Z de l'aire du triangle BDC.

L'hypothèse de ce raisonnement par l'absurde est $A > Z$; il suppose donc l'existence d'un excédent e, égal à A-Z. D'après le lemme énoncé dans son introduction, il existe un entier n non nul tel que $n \times e > 3Z$. Il est donc possible de choisir une aire S telle que $S < e$ et telle que $nS = 3Z$.

Considérons alors un triangle BCE d'aire S. Les triangles BCE et BCD ont la même hauteur BC ; ils sont entre eux comme leurs bases BE et BD, donc $n \times BE = BD$. Archimède divise alors BD à l'aide de cette mesure BE, en n segments égaux (par exemple BE, EH, HI, IK, KD). Il trace les segments CE, CH... qui coupent la parabole en E_1, H_1, I_1,... Par ces points, il trace des parallèles au diamètre qui partagent BC en n segments égaux par exemple BM, MN, NX, XP et PC. Puisque

$S < e$, c'est à dire $S < A - Z$ on obtient

$Z + S < A$ (i)



Il remarque d'autre part que la somme des aires hachurées sur la figure ci-contre est égale à l'aire de BCD c'est à dire à S (il montre, en utilisant la méthode des aires, que par exemple, les trapèzes ML et LF ont même aire). La somme de ces aires hachurées représente par ailleurs la différence entre l'aire de la figure circonscrite et celle de la figure inscrite. L'aire A-S est donc inférieure à l'aire des trapèzes non hachurés NE_1, XH_1, PI_1 et du triangle PK_1C, situés dans le segment de parabole étudié. Avec l'inégalité (i), on obtient $Z < NE_1 + XH_1 + PI_1 + PK_1C$.

Or $Z = \frac{1}{3} BDC$ Il obtient l' inégalité : $BDG < 3 (NE_1 + XH_1 + PI_1 + PK_1C)$

Cette dernière inégalité est impossible, car la proposition 14 a prouvé l'inégalité contraire. Donc l'hypothèse $A > Z$ est à rejeter.

Remarquons que le résultat d'Archimède est équivalent à celui qu'on obtient en calculant l'aire $\mathcal{A}$ du segment de parabole avec l'outil du calcul intégral, de la façon suivante :

$\mathcal{A} = \frac{1}{A^2} \int_0^a Y dY$ où A désigne l'aire de BCD, et $A = nY$, si Y désigne l'aire de BEC.

IV. Utilisation des "sommes intégrales"

Regardons de près quelques exemples, où Archimède calcule des sommes de termes de progressions géométriques.

La Quadrature de la parabole par la "méthode géométrique"

Nous nous intéressons ici à la méthode qu'Archimède appelle géométrique, c'est à dire aux raisonnements tenus aux propositions 23 et 24 de La Quadrature de la parabole (voir l'annexe 4). L'utilisation de la sommation d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$ apparait clairement dans la proposition 23: *"Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre* [7], *la somme de toutes ces grandeurs, augmentées du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande ."* Cette proposition montre donc que, si les A_i représentent les grandeurs successives,

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + ... + A_n + \frac{1}{3} A_n = \frac{4}{3} A_1$$

Remarquons que, lorsque le nombre de termes de la série augmente, le reste $\frac{1}{3} A_n$ (ou $\frac{1}{3} \times (\frac{1}{4})^{n-1} A_1$), devient aussi petit que l'on veut.

Reprenons son raisonnement.

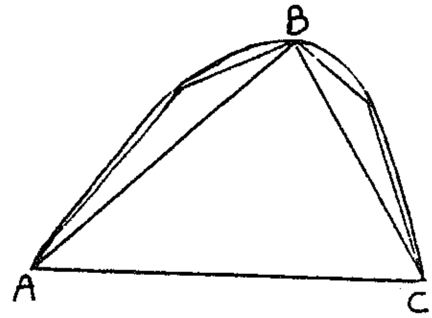
Soit S l'aire du segment de parabole ABC, de sommet B, et K une aire équivalente aux quatre tiers de celle du triangle ABC.

- Supposons $S > K$ et posons $e = S - K$.

D'après le corollaire de la proposition 20 (annexe 4), lorsque le polygone inscrit (dont l'aire est P, et qui est formé par additions successives de triangles dont les aires forment une

7 Nous dirions que la raison est $\frac{1}{4}$

suite de raison $\frac{1}{4}$), aura un nombre suffisant de côtés, on aura " la somme des segments restants " inférieure à e, donc $S - P < e$ ou $S - P < S - K$ d'où $K < P$. On aurait donc $P > \frac{4}{3} A$; ceci est impossible car, d'après la proposition 23, $P < \frac{4}{3} A$;
donc la supposition $S > K$ est fausse.



- Supposons $S < K$ et posons $K-S = e$. Soit Z l'aire du triangle ABC, puis $H = \frac{1}{4} Z$, $Q = \frac{1}{4} H$ etc. On définit ainsi des aires, jusqu'à ce que la dernière aire I soit inférieure à e .
Or, par la proposition 23 :

$Z + H + Q + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z = K$ donc $K - (Z+H+Q+I) < I < e$

or $K-S = e$; donc $Z+H+Q+I > S$. Ceci est impossible d'après la proposition 22, donc la supposition $S < K$ est fausse.

On conclut que $S = K$. On remarque qu'Archimède ne parle pas en termes de limite. C'est la double réduction à l'absurde, présente dans la proposition 24, qui assure le résultat qui, pour nous, s'exprimerait en termes de limite.

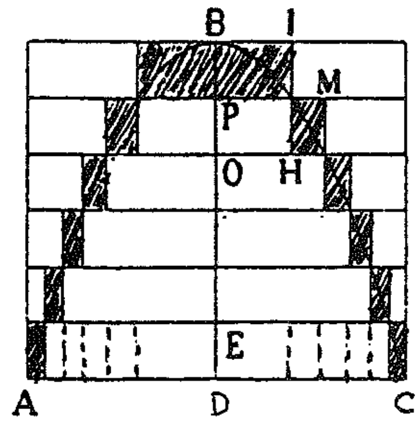
Volume du segment de paraboloïde

On retrouve un calcul de somme de série pour le volume du segment de paraboloïde de révolution. (Traité des Conoïdes et des Sphéroïdes, propositions 21 et suivantes)

Pour sa démonstration, Archimède utilise des inégalités (1) que nous exprimons ainsi :

$$h + 2h + 3h + ... + nh > \frac{1}{2} n^2 h \quad \text{et} \quad h + 2h + 3h + ... + (n-1)h < \frac{1}{2} n^2 h$$

Il inscrit et circonscrit des cylindres autour du segment de paraboloïde de révolution comme l'indique la figure ci-dessous. Les n cylindres circonscrits ont la même hauteur h. Donc $n h = BD$. Archimède remarque que *"la figure circonscrite excède celle qui est inscrite d'un cylindre ayant le cercle décrit autour du diamètre AC comme base et la droite ED comme axe"*, donc la différence entre la figure inscrite et la circonscrite peut être rendue aussi petite que l'on veut. Nous verrons plus loin que Ibn al-Haytham procède différemment. Soit un cône K valant une fois et demie le cône dont la base est le disque de diamètre AC et dont l'axe est BD. En se servant des inégalités (1) et de la remarque ci-dessus, Archimède met en place un raisonnement par double réduction à l'absurde.



Suggérons la démarche :

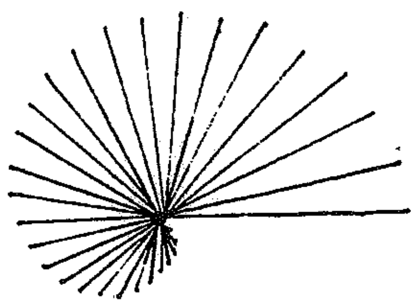
Il suppose d'abord que le segment de paraboloïde est plus grand que le cône K, et montre que le cylindre entier, dont l'axe est DB est plus grand que le double de la figure circonscrite, ce qui est impossible. Il suppose ensuite que le segment de paraboloïde est plus petit que le cône K, et montre que le cylindre entier, dont l'axe est DB est plus petit que le double de la figure circonscrite, ce qui est impossible. Il peut maintenant en conclure que le cylindre entier est égal au double du segment de paraboloïde et que le segment ABC est égal aux trois demis du cône ABC.

Le résultat obtenu dans cet exemple est équivalent à celui qu'on obtient par un calcul intégral moderne du type $\int_0^a x\,dx$.

A l'image de ce qu'il avait obtenu pour l'aire du cercle ou du segment de parabole, Archimède étudie la **raison** du segment de paraboloïde au cylindre entier circonscrit ; il **n'évalue pas** le volume du segment de paraboloïde.

Remarquons que sa méthode, quant à l'idée d'encadrer le segment de paraboloïde, est très proche de celle que l'on utilise en classe de lycée pour évaluer, par exemple, le volume d'une sphère.

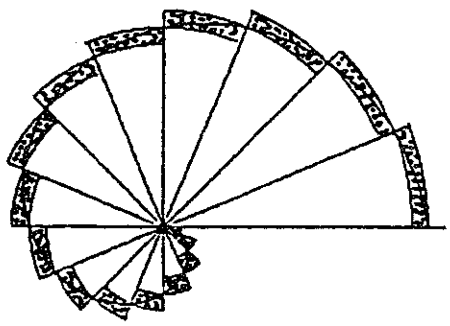
L'aire d'une portion de spirale

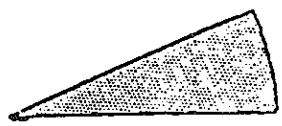


Pour déterminer, dans le traité Des spirales, l'aire de la première révolution de la spirale, Archimède utilise encore une méthode analogue (Des spirales, propositions 21 et suivantes, voir l'annexe 5).

La spirale est décrite comme composée de deux mouvements [8]. Le premier est le mouvement uniforme d'une demi-droite autour de son origine, l'autre, le mouvement uniforme d'un point sur la demi-droite, à partir de l'origine.

Comment trouver l'aire de la première révolution ? La première révolution de la spirale est découpée par n secteurs angulaires égaux. Comme l'illustre la figure ci-dessous, son aire est donc encadrée par deux sommes de secteurs circulaires. La différence entre les deux figures inscrite et circonscrite est égale à un secteur du grand disque. On peut donc rendre l'excèdent plus petit que toute aire donnée à l'avance.





La proposition 21 énonce:

"Si l'on prend l'aire comprise entre une spirale décrite en première révolution et entre la première droite à l'origine de la révolution, il est possible de lui circonscrire une figure plane et de lui en inscrire une autre qui soient composées de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède la figure inscrite d'une aire moindre que toute aire donnée."

Archimède établit à la proposition 24 que :

"L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle".

Le raisonnement qu'utilise Archimède est semblable à ceux décrits dans les exemples précedents. Il repose sur des relations équivalentes à celles que nous écrivons :

$$(n+1)^2\, a^2 + (a + 2a + 3a + ... + na) = 3\,[\, a^2 + (2a)^2 + ... + (na)^2\,]$$

---

[8] Une définition cinématique des courbes est très rare chez les mathématiciens grecs.

$n^3 < 3\ [1^2 + b\ 2^2 + ... + (n-1)^2]$
$n^3 > 3\ [1^2 + b\ 2^2 + ... + (n-1)^2]$

Comme à l'exemple 1, l'intégrale équivalente est du type : $\int_0^a x^2\,dx$

V. Les apports de Thabit ibn Qurra et de Ibn al-Haytham

Dans le monde grec, comme le souligne par exemple Eutocius (VIème siècle après J.C.), Archimède n'eut pas de successeur véritable. Ce sont les mathématiciens arabes du IXème siècle qui, les premiers, prolongèrent les résultats d'Archimède. Ces mathématiciens connaissaient la pensée grecque, ils disposaient de certaines oeuvres des mathématiciens grecs, ils traduisirent les Eléments d'Euclide, La Mesure du cercle d'Archimède; Thabit ibn-Qurra (836-901) est le traducteur des livres V à VII des Coniques d'Apollonius[9], et du traité d'Archimède De la sphère et du cylindre. Dans ces livres, comme nous l'avons vu ci-dessus, la méthode d'exhaustion apparaît sans le recours aux "sommes intégrales", qui figurent dans d'autres traités dont les mathématiciens arabes ignoraient vraisemblablement l'existence. Ils réussirent, non seulement à maîtriser la méthode d'exhaustion, mais à redécouvrir par des moyens nouveaux certains résultats donnés par Archimède. Nous noterons dans les travaux de Thabit ibn-Qurra et de Ibn al-Haytham (965-1041), appelé Alhazen par ses traducteurs latins, des méthodes originales et même des résultats qui ne se trouvent pas dans l'oeuvre d'Archimède.

Nous ne disposons malheureusement pas encore de traduction des oeuvres concernant cette étude . Ce n'est que par l'intermédiaire des lectures de A.Youschkevitch, de R. Rashed, et d'un groupe d'étudiants marocains de l'IREM de Rouen, que nous nous y référons.

1. La redécouverte des "sommes intégrales"

Les mathématiciens arabes redécouvrent ces sommes en les introduisant d'une façon différente. Nous allons le voir sur l'exemple de la quadrature de la parabole par Thabit ibn-Qurra, dans son Livre sur la mesure de la section conique appelée parabole (Kitab fi masahat qat al-mahrut alladi yusamma al mukafi). Il y retrouve le résultat qu'Archimède avait démontré en considérant le segment de parabole comme la somme d'une série géométrique dont les sommes partielles sont des aires de polygones inscrits (cf. p. 24). Son calcul est équivalent à ceui de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$.

Son procédé consiste à diviser l'intervalle d'étude en parties inégales. Le calcul de l'intégrale évoquée ci-dessus, en subdivisant l'intervalle [0, a] en n parties égales aurait exigé la sommation de la série $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}$. Thabit ibn-Qurra élimine cette difficulté à l'aide d'une idée ingénieuse: il subdivise l'intervalle [0, a] en n parties, telles que les abscisses des points de la subdivision soient proportionnelles à la suite des carrés des entiers, $1^2, 2^2, 3^2$, et que la somme des n parties soit égale à a. Ainsi les valeurs de $\sqrt{x}$ deviennent des nombres entiers. Sa méthode consiste dans un premier temps à établir quinze lemmes arithmétiques, où, entre autres, il calcule les sommes:

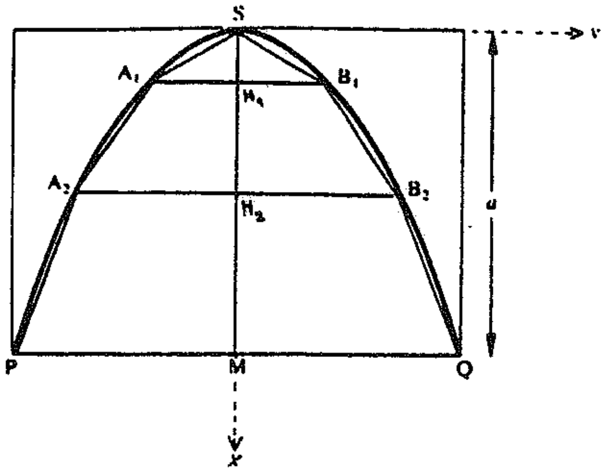
---

[9] Cette oeuvre de première importance ne nous est parvenue que grâce à cette traduction arabe

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] \times 2n$$

Voici une description sommaire de la démonstration, en termes modernes. Thabit ibn-Qurra définit la parabole, suivant la tradition d'Apollonius et d'Archimède, par une propriété correspondant à l'équation $y^2 = px$. Nous décrivons le calcul, en suivant l'interprétation de la Brochure "Découvrir les mathématiques arabes" de l'IREM de Rouen, dans le cas d'un segment "droit" de parabole (la corde est perpendiculaire à l'axe) ; mais le calcul est mené dans la cas général.

Soit SPMQ le segment de parabole. Posons SM = a.



Puisque $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, on peut diviser SM à l'aide des points $H_1, H_2, \ldots$, tels que:

$SH_1 = \frac{a}{n^2}$ $H_1H_2 = \frac{3a}{n^2}$ $H_2H_3 = \frac{5a}{n^2}$ etc...

$H_{n-1}M = \frac{(2n-1)a}{n^2}$. Notons $f(x) = \sqrt{px}$; les bases des trapèzes inscrits dans le segment de parabole vérifient:

$$A_1B_1 = 2\,f\left(\frac{a}{n^2}\right) = 2\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

$$A_2B_2 = 2\,f\left(\frac{a}{n^2}+\frac{3a}{n^2}\right) = 4\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

....

* L'aire S_n du polygone inscrit dans la parabole peut être évaluée en additionnant l'aire s_n du triangle A_1SB_1 et les aires des trapèzes $A_2\,A_1\,B_1\,B_2$, ...:

$$S_n = \frac{1}{2}A_1B_1 \times SH_1 + \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2)\,H_1H_2 + \ldots$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n} \times (\,1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2\,)$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n} \times \frac{4n^3 - n}{3}$$ (en utilisant l'expression de la somme des carrés des entiers impairs).

* L'aire R du rectangle circonscrit à la parabole vaut: $R = a \times f(a) = a \times 2\sqrt{ap}$. Donc $\frac{2}{3}R - S_n = \frac{a\sqrt{ap}}{3n^2}$. Cette différence, qui pour Ibn-Qurra est égale à $\frac{n}{3}$ fois l'aire s_n du triangle A_1SB_1 peut être rendue plus petite que toute aire arbitrairement donnée, à condition que le nombre n de subdivisions soit assez grand.

* D'autre part, la différence $S - S_n$ entre l'aire S du segment de parabole et l'aire S_n du polygone inscrit peut également être rendue aussi petite que l'on veut. C'est toujours à l'aide de la proposition 1 du Livre X des <u>Eléments</u> d'Euclide, qu'Ibn-Qurra obtient ces résultats. [10]

---

[10] Signalons que, dans un autre ouvrage <u>Sur le calcul des paraboloïdes</u>, Ibn-Qurra généralise la proposition 1 du Livre X, en énonçant à peu près: "si on soustrait de la plus grande de deux grandeurs données une partie dont le rapport à cette grandeur ne soit pas plus petit que $\frac{a}{b}<1$; et que l'on soustrait de nouveau du reste une partie qui

* Les deux hypothèses $S > \frac{2}{3}R$ et $S < \frac{2}{3}R$ aboutissent à des contradictions; Ibn-Qurra en conclut donc que $S = \frac{2}{3}R$, c'est à dire S est égal aux quatre tiers de l'aire du triangle SPQ.

2. La mesure du paraboloïde de révolution par Ibn al-Haytham

Ibn al-Haytham reprend l'ensemble des études précédentes, et en particulier l'étude du paraboloïde de révolution déjà faite par Ibn-Qurra. Cependant Ibn al-Haytham améliore les démonstrations en réduisant le nombre de lemmes nécessaires. Comme ses prédécesseurs, il étudie le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un segment de parabole autour de son axe (paraboloïde de première espèce), mais également du solide engendré par la révolution d'un segment de parabole autour d'une "ordonnée" (c'est à dire une perpendiculaire à l'axe de la parabole), qu'Ibn al-Haytham appelle paraboloïde de deuxième espèce.

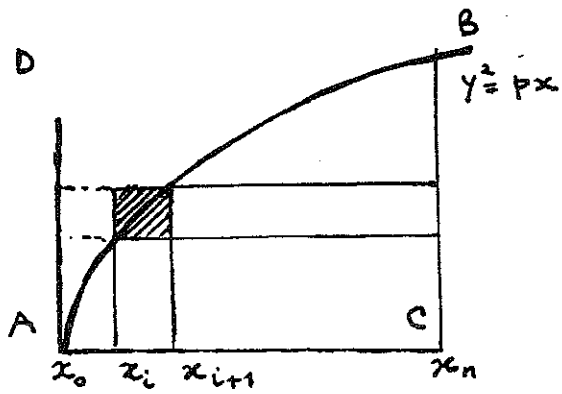
A l'occasion de ces calculs il obtient des résultats intéressants, donnant les sommes de puissances entières des premiers entiers successifs. Notons par exemple, ce résultat nouveau, obtenu par induction:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = n\left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n(n+1) - \frac{1}{3}\right)$$

Volume du segment de paraboloïde de première espèce

Comme Archimède, Ibn al-Haytham inscrit et circonscrit des cylindres autour du segment de paraboloïde. Il divise le segment AC en n segments égaux (que nous désignons par $[x_i , x_{i+1}]$, pour i variant de 0 à n-1). Si on désigne par V le volume du cylindre de base le cercle de rayon AD et de hauteur AC, par I_n la somme des volumes des n cylindres inscrits dans le paraboloïde et C_n la somme des volumes des n cylindres circonscrits, Ibn al-Haytham établit que

$I_n < \frac{1}{2}V$ et que $C_n > \frac{1}{2}V$.



Sa démarche diffère ensuite de celle d'Archimède. Si on augmente le nombre des points de subdivision, en ajoutant les milieux de chacun des petits segments, on obtient une nouvelle subdivision comportant deux fois plus de petits segments, et il montre que, si d désigne la différence $C_n - I_n$, la nouvelle différence $C_{2n} - I_{2n}$ est égale à $\frac{d}{2}$. La différence $C_n - I_n$ peut donc être rendue aussi petite qu'on le veut.

Enfin , pour montrer que le volume du segment de paraboloïde est égal à $\frac{1}{2}$ V , Ibn al-Haytham emprunte la voie traditionnelle du double raisonnement par l'absurde.

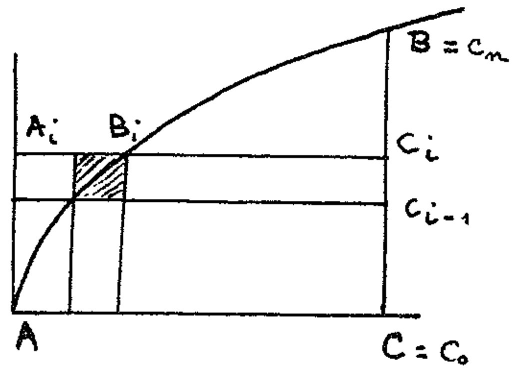
Volume du paraboloïde de deuxième espèce.

Ce paraboloïde est obtenu en faisant tourner le segment de parabole ABC autour de "l'ordonnée" BC.

---

a même rapport avec ce reste et ainsi de suite, on obtient, lorsqu'on poursuit ce procédé un certain nombre de fois, un reste plus petit que la plus petite des deux grandeurs données." (Youschkevitch, p. 128) On retrouve chez Ibn al-Haytham cette même généralisation.

Ibn al-Haytham subdivise le segment BC de longueur b en n intervalles égaux, de longueur h (nous nommons ces intervalles $[c_i\, c_{i+1}]$). Le nombre n d'intervalles est une puissance de 2 . Traduisons son calcul dans un système de coordonnées où l'équation de la parabole est $x = ky^2$ et où les coordonnées d'un point M_i de la parabole sont x_i et y_i, le rayon r_i d'un cylindre est $r_i = k\,(b^2 - y_i^2) = k\,h^2\,(n^2 - i^2)$



Avec les mêmes notations qu'au dessus, on obtient

$$I_n = \sum_{i=1}^{n-1} \pi\ k^2\ h^5\ (n^2 - i^2)^2$$

$$\text{et } C_n = \sum_{i=0}^{n-1} \pi\ k^2\ h^5\ (n^2 - i^2)^2$$

L'encadrement suivant , obtenu par Ibn al-Haytham à l'aide de ses calculs sur les sommes de puissances:

$$\sum_{k=1}^{n} [(n+1)^2 - k^2]^2 < \frac{8}{15}(n+1)\,(n+1)^4 < \sum_{k=0}^{n} [(n+1)^2 - k^2]^2$$

permet de montrer que $I_n < \frac{8}{15} V < C_n$.

Puis, par un double raisonnement par l'absurde, Ibn al-Haytham montre que le volume du paraboloïde est égal aux huit quinzièmes du volume du cylindre circonscrit.

Nous pouvons noter que son calcul équivaut à celui d'une intégrale du type $\int_0^a t^4\, dt$

Il est intéressant de remarquer qu' Ibn al-Haytham conclut son traité par une réflexion sur la méthode qu'il a suivie. Il craint que le lecteur n'attache d'importance dans la preuve qu'à la réduction à l'absurde et que le contenu du raisonnement ne lui échappe. Il a choisi d'élucider "la cause grâce à laquelle s'est parfaitement réalisée la démonstration". Citons le commentaire de R. Rashed: "Il s'agit de déterminer avec rigueur la principale raison qui fait que le volume du paraboloïde est égal à $\frac{8}{15}$ V,(...) et égal à cette valeur seulement. (...) L'idée est la suivante: $\frac{8}{15}$ V est le plus petit majorant de l'ensemble des valeurs de la suite monotone croissante (I_n) et le plus grand minorant de l'ensemble des valeurs de la suite décroissante (C_n) ; et elle est la seule valeur qui possède cette propriété. Ibn al-Haytham n'a certes pas formulé son idée dans de tels termes mais tout est présent pour qu'une telle traduction soit permise."[11] R. Rashed, qui signale de plus que Ibn al- Haytham s'intéresse à la variation des petits solides représentant les différences entre les cylindres inscrits et circonscrits (hachurés sur la figure), quand le nombre des points de la subdivision augmente indéfiniment, pense que l'on trouve là une pensée franchement infinitésimale.

Toujours selon l'étude de R. Rashed, la méthode d'Ibn al-Haytham est une version infléchie de la méthode d'exhaustion: " Ibn al-Haytham a jugé, sans ambiguïté aucune, que cette méthode est à la fois apodictique et heuristique", qu'elle permet aussi bien de prouver que de découvrir un résultat.

11 R. Rashed, p. 205

Conclusion

Nous avons suivi l'évolution de la méthode d'exhaustion d'Euclide à Ibn al-Haytham. Cette méthode procède toujours par un double raisonnement par l'absurde et elle est fondée sur l'axiome dit "d'Archimède". De processus purement géométriques, elle glisse peu à peu, chez Archimède, vers des processus plus numériques. Cette évolution est encore plus marquée chez les mathématiciens arabes, qui enrichissent les procédés de calcul. La méthode devient plus arithmétique chez Ibn al-Haytham, qui utilise de nombreuses relations sur les puissances d'entiers consécutifs, pour les déterminations de volumes. De plus, il nous livre ses réflexions sur la nature de cette méthode.

La méthode d'exhaustion subira des évolutions diverses au cours des siècles suivants. Par exemple, on pourra voir chez Stevin un abandon progressif du recours à la double réduction par l'absurde, et une mise en forme d'un processus plus général. Par la suite, des techniques arithmétiques seront développées, par Roberval, Wallis.... Dans une autre direction, Grégoire de Saint Vincent s'autorisera l'extension à l'infini du polygone inscrit pour épuiser la surface du segment de parabole... Malgré les inconvénients qui sont reprochés à la méthode d'exhaustion (elle est longue, laborieuse, peu éclairante...), et malgré l'apparition d'autres méthodes (les indivisibles, le calcul différentiel de Newton et celui de Leibniz - certes contestés quant à leurs fondements-), cette méthode d'exhaustion reste, jusqu'à une époque tardive, la seule méthode légitime de démonstration, la méthode de référence par excellence; Legendre, dans ses Eléments de Géométrie, à la fin du XVIIIème siècle, y a encore recours pour le volume de la pyramide.

Bibliographie

Aragnol A. et alii Mathématiques en Méditerranée, Edisud- Musées de Marseille, Aix en Provence, 1988

Archimède L'Oeuvre complète, Traduction P.Ver Eecke, 1921, réédition Blanchard, Paris, 1961

Boyer C.B. The history of the calculus and its conceptual development, Dover, New York, 1949

Dhombres J. Nombre, mesure et continu, Cedic, Nathan, Paris, 1978

Euclide Les Eléments, traduction de Peyrard, 1819, réédition Blanchard, 1966

Heath T. L. A History of greek Mathematics, Dover, New York, 1981

IREM de Rouen Découvrir les mathématiques arabes, sous la responsabilité d'E. Hébert, 1988-89 BP 27 Mt Saint Aignan 76130

Le Goff J.P. De la méthode dite d'exhaustion in "La démonstration mathématique dans l'histoire", Actes du 7ème colloque inter-Irem d'épistémologie et d'histoire des mathématiques publié par l'Irem de Lyon, 1990 Université Claude Bernard 43 Bd du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex

Rashed R. Ibn al-Haytham et la mesure du Paraboloïde, in Journal for the History of Arabic Science, vol. 5, 1981

Youschkevitch A.P. Les mathématiques arabes, trad. de M. Cazenave et K. Jaouiche, Vrin, Paris, 1976

ANNEXE 1

LA MESURE DU CERCLE

1.

Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle[1].

Que le cercle ΑΒΓΔ soit au triangle Ε comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

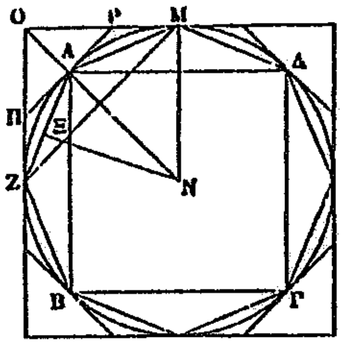


Fig. 61.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré ΑΓ et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle[2]. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre Ν et abaissons la perpendiculaire ΝΞ. ΝΞ sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle. Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle[1]. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle Ε, ce qui est absurde.

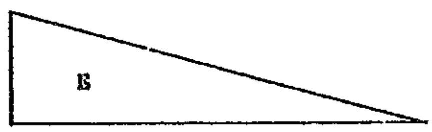


Fig. 62.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle Ε ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points (sc. de division). L'angle ΟΑΡ est donc droit[3] ; ΟΡ est par conséquent supérieur à ΜΡ, du moment que ΡΜ est égal à ΡΑ, et le triangle ΡΟΠ est plus grand que la moitié de la figure ΟΖΑΜ[4]. Qu'il reste donc des segments tels que ΠΖΑ, dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle Ε et celle du cercle ΑΒΓΔ[4]. La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle Ε, ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que ΝΑ est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle[5]. Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle Ε.

ANNEXE 2

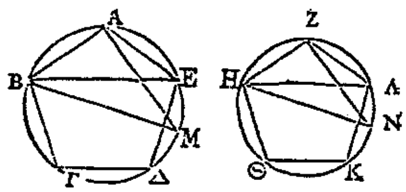
LE DOUZIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les quarrés des diamètres.

Soient les cercles ABΓΔE, ZHΘKΛ; soient dans ces cercles les polygones semblables ABΓΔE, ZHΘKΛ, et que les diamètres de ces cercles soient BM, HN; je dis que le quarré de BM est au quarré de HN comme le polygone ABΓΔE est au polygone ZHΘKΛ.

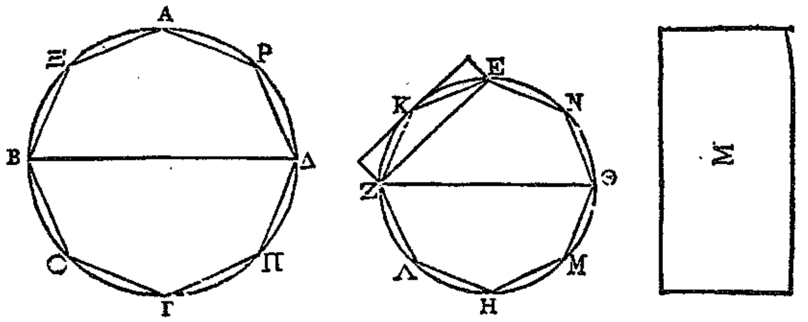


Car joignons BE, AM, HΛ, ZN. Puisque le polygone ABΓΔE est semblable au polygone ZHΘKΛ, que l'angle BAE est égal à l'angle HZΛ (déf. 1. 6), et que BA est à AE comme HZ est à ZΛ, les deux triangles BAE, HZΛ ont un angle égal à un angle; savoir, l'angle BAE égal à l'angle HZΛ, et les côtés, placés autour de ces angles, proportionnels; les triangles ABE, ZHΛ sont donc équiangles (6. 6); l'angle AEB est donc égal à l'angle ZΛH. Mais l'angle AEB est égal à l'angle AMB (21. 3), car ces angles sont appuyés sur le même arc, et l'angle ZΛH est aussi égal à l'angle ZNH; l'angle AMB est donc égal à l'angle ZNH. Mais l'angle droit BAM est égal à l'angle droit HZN (31. 3); l'angle restant est donc égal à l'angle restant; les deux triangles ABM, ZHN sont donc équiangles; BM est donc à HN comme BA est à HZ (4. 6). Mais la raison du quarré de BM au quarré de HN est double de la raison BM à HN (20. 6), et la raison du polygone ABΓΔE au polygone ZHΘKΛ est double de la raison de BA à HZ; le quarré de BM est donc au quarré de HN comme le polygone ABΓΔE est au polygone ZHΘKΛ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, et que leurs diamètres soient ΒΔ, ΖΘ; je dis que le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ.



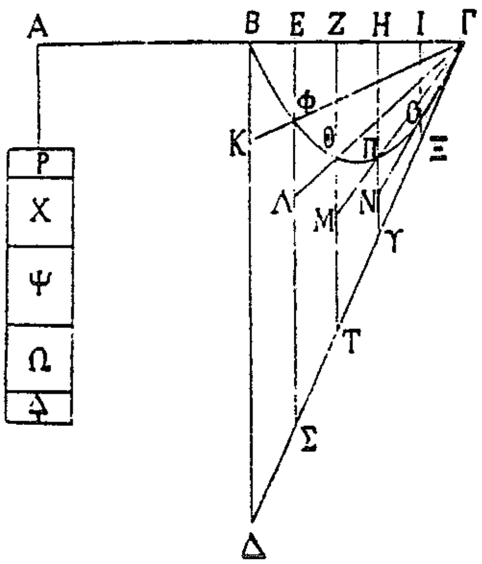
Car si le quarré de ΒΔ n'est pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ, le quarré ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle ΕΖΗΘ décrivons le quarré ΕΖΗΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ, parce que, si par les points Ε, Ζ, Η, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré ΕΖΗΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit ΕΖΗΘ est donc plus grand que la moitié du cercle ΕΖΗΘ. Partageons les arcs ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ en deux parties égales aux points Κ, Λ, Μ, Ν, et joignons ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. Chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΜΗΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points Κ, Λ, Μ, Ν nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle EZHΘ placés sur les droites EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle EZHΘ sur la surface Σ; le polygone restant EKZΛHMΘN sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ABΓΔ un polygone AΞBOΓΠΔP semblable au polygone EKZΛHMΘN; le quarré de BΔ sera au quarré de ZΘ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN (1. 12). Mais le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à la surface Σ; le cercle ABΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone AΞBOΓΠΔP est au polygone EKZΛHMΘN; donc, par permutation, le cercle ABΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone EKZΛHMΘN. Mais le cercle ABΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone EKZΛHMΘN. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de BΔ n'est donc point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ZΘ n'est point au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Car si cela est possible, que le quarré de BΔ soit au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ZΘ sera au quarré de BΔ comme la surface Σ est au cercle ABΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ; le quarré de ZΘ est donc au quarré de BΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface plus petite que le cercle ABΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de BΔ n'est donc pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande que le cercle EZHΘ. Mais on a démontré que le quarré de BΔ n'est point au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus petite que le cercle EZHΘ; le quarré de BΔ est donc au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ. Donc, etc.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

PROPOSITION XIV

Soit ΒΘΓ un segment délimité par une droite et par une parabole. Soit, dans un premier cas, la droite ΒΓ perpendiculaire au diamètre. Menons, par le point Β, la droite ΒΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ ; le triangle ΒΓΔ sera donc rectangle. Partageons la droite ΒΓ en autant de parties égales qu'on voudra : ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΙΓ ; menons, par les points de division, les parallèles au diamètre ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, et relions au point Γ, par des droites que nous prolongeons, les points où ces parallèles coupent la parabole. Dès lors, je dis que le triangle ΒΔΓ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ et du triangle ΞΙΓ, et qu'il est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ΖΦ, ΗΦ, ΙΠ et du triangle ΙΟΓ.

En effet, menons la droite ΑΒΓ ; découpons-en une droite ΑΒ égale à la droite ΒΓ, et imaginons que ΑΓ soit un levier, dont le milieu est le point Β, et qui soit suspendu au point Β. Suspendons aussi le triangle ΒΔΓ au levier aux points Β, Γ, et suspendons à l'autre partie du levier, au point Α, des aires Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ̦. Que l'aire Ρ fasse équilibre au trapèze ΔΕ tel qu'il est placé, l'aire Χ au trapèze ΖΣ, l'aire Ψ au trapèze ΤΗ, l'aire Ω au trapèze ΥΙ, et l'aire Δ̦ au triangle ΞΙΓ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre, en sorte que le triangle ΒΔΓ sera triple de l'aire ΡΧΨΩΔ̦ (1). De plus, puisque ΒΓΘ est un segment délimité par une droite et par une parabole, que la droite ΒΔ a été menée du point Β parallèlement au diamètre, que la droite ΓΔ a été menée du point Γ tangentiellement à la parabole en Γ, et qu'une autre droite ΣΕ a aussi été menée parallèlement au diamètre, le rapport de ΒΓ à ΒΕ sera le même que celui de ΣΕ à ΕΦ (2) ; en sorte que le rapport de ΒΑ à ΒΕ sera aussi le même que celui du trapèze ΔΕ au trapèze ΚΕ (3). On démontrerait, de la même manière, que le rapport de ΑΒ à ΒΖ est le même que celui du trapèze ΣΖ au



1. Voir proposition VI.

2. On a, en vertu de la proposition V : $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{BE}} = \frac{\Phi\Sigma}{\mathrm{E}\Phi}$, d'où : $\frac{\mathrm{BE}+\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{E}\Phi+\Phi\Sigma}{\mathrm{E}\Phi}$, ou, comme le texte : $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{BE}} = \frac{\Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{E}\Phi}$.

3. Les trapèzes étant entre eux comme leurs aires :
$\frac{\text{trap. } \Delta\mathrm{E}}{\text{trap. } \mathrm{KE}} = \frac{\mathrm{BE} \times \frac{1}{2}[\mathrm{B}\Delta + \Sigma\mathrm{E}]}{\mathrm{BE} \times \frac{1}{2}[\mathrm{BK} + \mathrm{E}\Phi]} = \frac{\mathrm{B}\Delta + \Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{BK} + \mathrm{E}\Phi}$. Or, par similitude de triangles : $\frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{BK}} = \frac{\Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{E}\Phi}$; donc : $\frac{\mathrm{B}\Delta + \Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{BK} + \mathrm{E}\Phi} = \frac{\Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{E}\Phi}$, d'où : $\frac{\text{trap. } \Delta\mathrm{E}}{\text{trap. } \mathrm{KE}} = \frac{\Sigma\mathrm{E}}{\mathrm{E}\Phi}$, et, comparant avec la relation de la note précédente, en observant que $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma}$, il vient, comme le texte : $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}} = \frac{\text{trapèze } \Delta\mathrm{E}}{\text{trapèze } \mathrm{KE}}$.

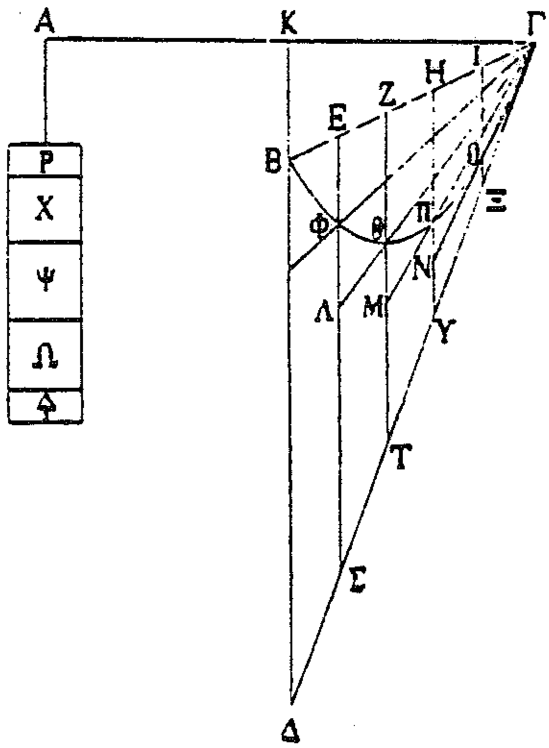
trapèze ΛZ, que son rapport à BH est le même que celui du trapèze TH au trapèze MH, et que son rapport à BI est le même que celui du trapèze YI au trapèze NI. Dès lors, puisque l'on a un trapèze ΔE, ayant les angles placés aux points B et E droits et les côtés dirigés vers le point Γ, tandis qu'une aire P, suspendue au levier au point A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant, et que le trapèze ΔE est au trapèze KE comme BA est à BE, il s'ensuit que l'aire KE est plus grande que l'aire P ; car cela a été démontré (1). D'autre part, on a de nouveau un trapèze ZΣ, ayant les angles situés en Z et E droits et la droite ΣT dirigée vers le point Γ, tandis qu'une aire X, suspendue au levier en A, fait équilibre à ce trapèze dans la position qu'il occupe maintenant ; de plus, le trapèze ZΣ est au trapèze ZΦ comme AB est à BE, et le trapèze ZΣ est au trapèze ΛZ comme AB est à BZ. En conséquence, l'aire X sera plus petite que le trapèze ΛZ et plus grande que le trapèze ZΦ ; car cela a été démontré aussi (2). Enfin, pour les mêmes raisons, l'aire Ψ sera plus petite que le trapèze MH et plus grande que le trapèze ΘH ; l'aire Ω sera plus petite que le trapèze NOIH et plus grande que le trapèze ΠI, et, de même (3) encore, l'aire Δ̣ sera plus petite que le triangle ΞΓ et plus grande que le triangle ΓIO. Dès lors, puisque le trapèze KE est plus grand que l'aire P, le trapèze ΛZ plus grand que l'aire X, le trapèze MH plus grand que l'aire Ψ, le trapèze NI plus grand que l'aire Ω, et le triangle ΞIΓ plus grand que l'aire Δ̣, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, est plus grand que l'aire PXΨΩΔ̣. Or, l'aire PXΨΩΔ̣ est la troisième partie du triangle BΓΔ ; par conséquent, il est évident que le triangle BΓΔ est plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes KE, ΛZ, MH, NI et du triangle ΞIΓ. D'un autre côté, puisque le trapèze ZΦ est plus petit que l'aire X, le trapèze ΘH plus petit que l'aire Ψ, le trapèze IΠ plus petit que l'aire Ω, et le triangle IOΓ plus petit que l'aire Δ̣, il est clair que l'ensemble des aires, que nous venons de dire, sera aussi plus petit que l'aire Δ̣ΩΨX. Donc, il est évident que le triangle BΔΓ est plus grand que le triple de l'ensemble des trapèzes ΦZ, ΘH, IΠ et du

1. Voir proposition X.
2. Voir proposition XII.
3. Voir proposition VIII.

triangle $I\Gamma O$, et qu'il est plus petit que le triple des aires désignées en premier lieu (1).

PROPOSITION XV

Soit de nouveau un segment $B\Theta\Gamma$ délimité par une droite et par une parabole, et que la droite $B\Gamma$ ne soit plus perpendiculaire au diamètre. Dès lors, il faut nécessairement qu'un angle obtus soit formé avec la droite $B\Gamma$, soit par la droite menée du point B parallèlement au diamètre du côté du segment, soit par la droite menée du point Γ. Que la droite formant l'angle obtus soit celle qui est située du côté du point B. Du point B, menons la droite $B\Delta$ parallèle au diamètre, et du point Γ, la droite $\Gamma\Delta$ tangente à la parabole en Γ. Divisons la droite $B\Gamma$ en autant de parties égales qu'on voudra : BE, EZ, ZH, HI, $I\Gamma$; des points E, Z, H, I, menons les droites $E\Sigma$, ZT, HY, $I\Xi$, et, des points où ces dernières coupent la parabole, menons, vers le point Γ, les droites de jonction que nous prolongeons. Je dis que, maintenant encore, le triangle $B\Delta\Gamma$ est plus petit que le triple des trapèzes $B\Phi$,



1. On aura, en vertu des propositions VIII et XII :
$\sum$ trapèzes $(KE, \Lambda Z, MH, NI)$ + triangle $\Xi I\Gamma >$ aire $(P + X + \Psi + \Omega + \Delta)$, et $\sum$ trapèzes $(Z\Phi, \Theta H, I\Pi)$ + triangle $IO\Gamma <$ aire $(X + \Psi + \Omega + \Delta)$. Or, en vertu de la proposition VI, on a : aire $(P + X + \Psi + \Omega + \Delta) = \frac{1}{3}$ triangle $B\Gamma\Delta$; donc :
triangle $B\Gamma\Delta = 3$ aires $(P + X + \Psi + \Omega + \Delta)$, et triangle $B\Gamma\Delta > 3$ aires $(X + \Psi + \Omega + \Delta)$,
d'où, par substitution des valeurs précédentes, il vient, comme dans le texte :
triangle $B\Delta\Gamma < 3\,[\sum$ trapèzes $(KE, \Lambda Z, MH, NI)$ + triangle $\Xi I\Gamma]$, et triangle $B\Delta\Gamma >$ $3\,[\sum$ trapèzes $(Z\Phi, \Theta H, I\Pi)$ + triangle $IO\Gamma]$.

ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ, augmentés du triangle ΓΙΞ, et qu'il est plus grand que le triple des trapèzes ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ, augmentés du triangle ΓΟΙ.

Prolongeons la droite ΔΒ de l'autre côté ([1]). Ayant mené perpendiculairement la droite ΓΚ, prenons la droite ΑΚ égale à la droite ΓΚ. Imaginons de nouveau que ΑΓ est un levier, dont le milieu est le point Κ, et qu'il est suspendu au point Κ. Suspendons le triangle ΓΚΔ, tel qu'il est disposé maintenant, à la moitié du levier, aux points Γ et Κ, et suspendons à l'autre partie du levier, au point Α, des aires Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ̨. Que l'aire Ρ fasse équilibre au trapèze ΔΕ tel qu'il est placé maintenant, l'aire Χ au trapèze ΖΣ, l'aire Ψ au trapèze ΤΗ, l'aire Ω au trapèze ΤΙ, et l'aire Δ̨ au triangle ΓΙΞ. Dès lors, l'un ensemble fera équilibre à l'autre ; en sorte que le triangle ΔΒΓ sera triple de l'aire ΡΧΨΩΔ̨ ([2]). On démontrerait, comme précédemment ([3]), que le trapèze ΒΦ est plus grand que l'aire Ρ ; que le trapèze ΘΕ est plus grand que l'aire Χ, et que le trapèze ΖΦ est plus petit ; que le trapèze ΜΗ est plus grand que l'aire Ψ, et que le trapèze ΗΘ est plus petit ; que le trapèze ΝΙ est plus grand que l'aire Ω, et que le trapèze ΠΙ est plus petit ; que le triangle ΞΙΓ est plus grand que l'aire Δ̨, et que le triangle ΓΙΟ est plus petit. En conséquence, la proposition est évidente.

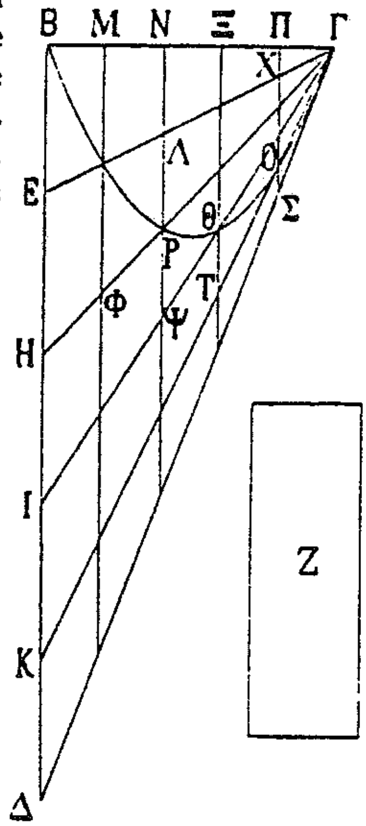
PROPOSITION XVI

Soit de nouveau un segment ΒΘΓ délimité par une droite et par une parabole. Par le point Β, menons la droite ΒΔ parallèle au diamètre, et, par le point Γ, la droite ΓΔ tangente à la parabole au point Γ. Soit une aire Ζ la troisième partie du triangle ΒΔΓ. Dès lors, je dis que le segment ΒΓΘ est équivalent à l'aire Ζ.

En effet, s'il n'est pas équivalent, il est plus grand ou plus petit. Qu'il soit d'abord plus grand, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont

1. C'est-à-dire de l'autre côté du segment.
2. Voir proposition VII.
3. Voir proposition XIV, et, subsidiairement, les propositions IX, XI et XIII, au lieu des propositions VIII, X et XII qui visent les cas particuliers du triangle rectangle et du trapèze à angles droits.

le segment dépasse l'aire Z, ajouté à lui-même [1], sera plus grand que le triangle ΒΓΔ [2]. Au reste, il est possible de choisir une certaine aire qui, plus petite que cet excédent, soit une portion du triangle ΒΔΓ. Soit donc ΒΓΕ un triangle, plus petit que l'excédent en question, et qui soit une portion du triangle ΒΔΓ ; il en résulte que la droite ΒΕ sera une portion adéquate de la droite ΒΔ [3]. Dès lors, divisons la droite ΒΔ dans la mesure de cette portion. Soient Η, Ι, Κ les points de division, et menons les droites qui relient les points Η, Ι, Κ au point Γ ; ces droites coupent la parabole, parce que la droite ΓΔ lui est tangente au point Γ. Par les points où ces droites coupent la parabole, menons les droites ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ parallèlement au diamètre ; elles seront elles-mêmes parallèles à ΒΔ [4]. En conséquence, puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excédent dont le segment ΒΘΓ dépasse l'aire Z, il est évident que l'ensemble de l'aire Z et du triangle ΒΓΕ sera plus petit que le segment. De plus, les trapèzes ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ et le triangle ΓΟΣ, au travers desquels passe la parabole, valent le triangle ΒΓΕ ; car le trapèze ΜΕ est commun, et le trapèze ΜΛ équivaut au trapèze ΦΛ, le trapèze ΛΞ au trapèze ΘΡ, le trapèze ΧΞ au trapèze ΟΘ, et le triangle ΓΧΠ au triangle ΓΟΣ [5]. Donc, l'aire Z sera plus petite que l'ensemble des trapèzes ΜΛ, ΞΡ,



1. C'est-à-dire ajouté continuellement à lui-même.
2. Voir le lemme invoqué par Archimède dans son introduction adressée à Dosithée.
3. Car, les triangles ΒΓΕ, ΒΓΔ ont même hauteur et sont entre eux comme les bases.
4. Car, ΒΔ a été mené par le point Β parallèlement au diamètre du segment.
5. La droite ΒΔ, ayant été divisée en parties égales, le faisceau qui relie les points de division au point Γ divise les parallèles à ΒΔ en parties égales, d'où équivalence des trapèzes de même rang, ayant même hauteur et côtés parallèles égaux, et équivalence des triangles ΓΧΠ, ΓΟΣ, ayant même hauteur et bases égales. Dès lors, on a, comme le texte : trap. ΜΕ + trap. ΦΛ + trap. ΘΡ + trap. ΘΟ + triangle ΓΟΣ = triangle ΒΕΓ.

ΠΘ et du triangle ΠΟΓ (1). Or, le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Ζ; par conséquent, le triangle ΒΔΓ sera plus petit que le triple de l'ensemble des trapèzes ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ et du triangle ΠΟΓ ; ce qui est impossible, car il a été démontré qu'il est plus grand que le triple (2). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus grand que l'aire Ζ.

D'autre part, je dis qu'il n'est pas plus petit. Et, en effet, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, l'excédent dont l'aire Ζ dépasse le segment ΒΘΓ, ajouté à lui-même, sera aussi plus grand que le triangle ΒΔΓ, et il est possible de choisir une certaine aire, plus petite que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ. Soit donc ΒΓΕ le triangle, plus petit que cet excédent, qui soit une portion du triangle ΒΔΓ, et que les autres constructions soient les mêmes que les précédentes. En conséquence, puisque le triangle ΒΓΕ est plus petit que l'excédent dont l'aire Ζ dépasse le segment ΒΘΓ, l'ensemble du triangle ΒΕΓ et du segment ΒΘΓ est moindre que l'aire Ζ. Or, l'aire Ζ est aussi moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; car le triangle ΒΔΓ est triple de l'aire Ζ, et il est plus petit que le triple des aires que nous venons de dire, comme on l'a démontré à la proposition précédente. Donc, l'ensemble du triangle ΒΓΕ et du segment ΒΘΓ sera moindre que l'ensemble des quadrilatères ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ et du triangle ΓΠΣ ; en sorte que, si nous retranchons le segment commun, le triangle ΓΒΕ sera moindre que les aires restantes ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que le triangle ΒΕΓ équivaut aux trapèzes ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, augmentés du triangle ΓΟΣ ; ce qui est plus grand que les aires restantes (3). Donc, le segment ΒΘΓ n'est pas plus petit que l'aire Ζ. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus grand ; par conséquent, le segment équivaut à l'aire Ζ.

1. Par hypothèse, triangle ΒΓΕ < segment ΒΘΓ — aire Ζ, d'où, en présence de la relation de la note précédente et de la relation évidente : ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ > segt ΒΘΓ, on aura: ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ + ΘΟ + ΓΟΣ < ΜΕ + ΝΦ + ΞΨ + ΠΤ + ΠΣΓ — aire Ζ, d'où : aire Ζ < (ΝΦ — ΦΛ) + (ΞΨ — ΟΡ) + (ΠΤ — ΘΟ) + (ΠΣΓ — ΓΟΣ), ou, comme le texte : aire Ζ < ΜΛ + ΞΡ + ΠΘ + triangle ΠΟΓ.

2. Par hypothèse : aire Ζ = $\frac{1}{3}$ triangle ΒΔΓ, d'où, en présence de la relation de la note précédente : triangle ΒΔΓ < 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ] ; ce qui est absurde, car, en vertu des propositions XIV et XV, on a : triangle ΒΔΓ > 3[ΜΛ + ΡΞ + ΘΠ + ΠΟΓ].

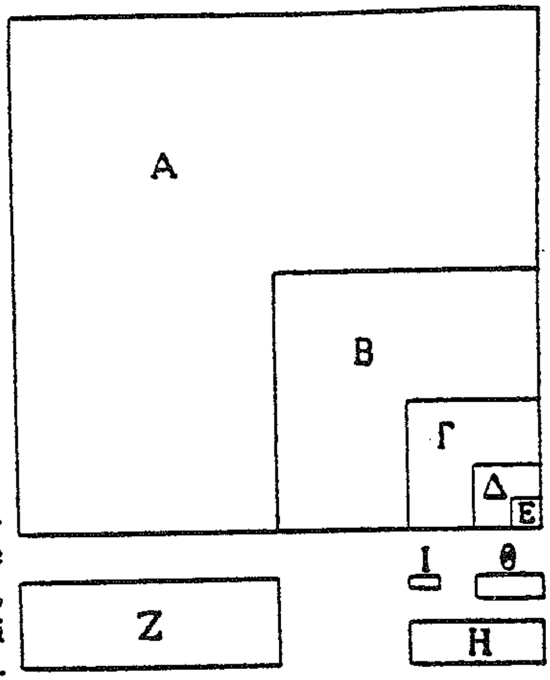
3. La seconde partie de la démonstration se résume comme suit :

On a, en 2de hypothèse : triangle ΒΓΕ < aire Ζ — segment ΒΘΓ. Or, on a posé : aire Ζ = $\frac{1}{3}$ triangle ΒΔΓ, et on a, en vertu des propositions XIV et XV :
triangle ΒΔΓ < 3[ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ] ; donc, comme le texte :
triangle ΒΓΕ + segment ΒΘΓ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ, d'où :
triangle ΒΓΕ < ΕΜ + ΦΝ + ΨΞ + ΠΤ + ΓΠΣ — segment ΒΘΓ ; ce qui est impossible, car on a vu (1re partie de la démonstration) que : triangle ΒΕΓ = ΜΕ + ΦΛ + ΘΡ +

PROPOSITION XXIII

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E.



Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ, et l'ensemble de I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l'ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ. Or, l'ensemble de Z,H,Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A (1).

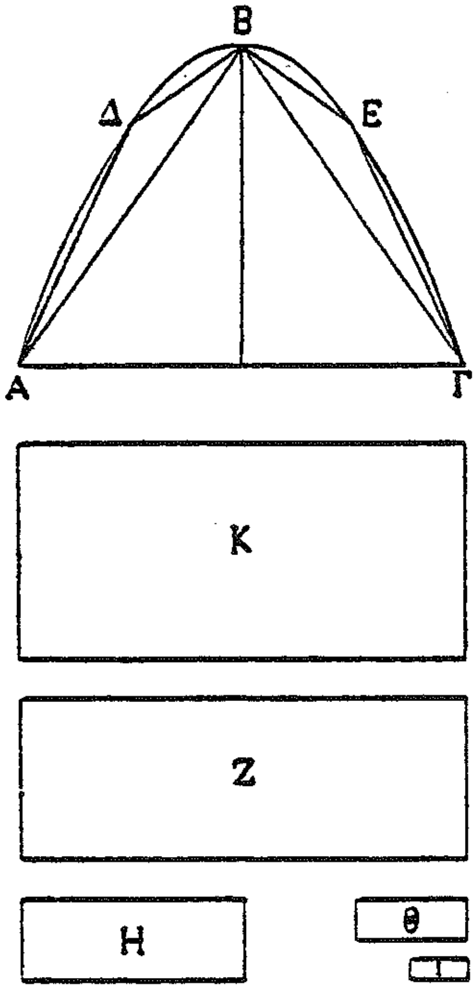
1. Les grandeurs A, B, Γ, Δ, E étant en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$, on aura : $B=\frac{1}{4}A$. Or, on pose : $Z=\frac{1}{3}B$; donc : $B+Z=(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})A=\frac{1}{3}A$. On aura de même : $H+\Gamma=\frac{1}{3}B$, $\Theta+\Delta=\frac{1}{3}\Gamma$, et $I+E=\frac{1}{3}\Delta$; d'où : $B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta+I=\frac{1}{3}(A+B+\Gamma+\Delta)$. Or, on a posé : $Z=\frac{1}{3}B$, $H=\frac{1}{3}\Gamma$, et $\Theta=\frac{1}{3}\Delta$; donc : $Z+H+\Theta=\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient : $B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}(B+\Gamma+\Delta)+I=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\Gamma+\Delta$, ou $B+\Gamma+\Delta+E+I=\frac{1}{3}A$, d'où, ajoutant A de part et d'autre, et observant que l'on a posé $I=\frac{1}{3}E$, il vient, comme le texte : $A+B+\Gamma+\Delta+E+\frac{1}{3}E=\frac{4}{3}A$.

Algébriquement, la somme d'une progression décroissante par quotient s'obte-

PROPOSITION XXIV

Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

En effet, soit ΑΔΒΕΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit ΑΒΓ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire Κ équivalente aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment ΑΔΒΕΓ. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment ΑΔΒΕΓ soit d'abord plus grand que l'aire Κ, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, comme il a été dit (1), et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment ΑΔΒΕΓ dépasse l'aire Κ (2) ; en



nant en retranchant du premier terme le produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison, on aurait aussitôt : $S = \frac{A - \frac{1}{4}E}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$, d'où : $S + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

1. C'est-à-dire, comme il a été dit à la proposition XXI.
2. Voir proposition XX, corollaire.

sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ΑΒΓ est d'abord quadruple des triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ [1], qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande [2]. Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire [3] ; par conséquent, le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas plus grand que l'aire K.

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle ΑΒΓ, une aire H équivalente au quart de l'aire Z, et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté du tiers de l'aire I, vaut les quatre tiers de l'aire Z [4].

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté de la troisième partie de l'aire I [5]. Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, Θ, I d'une aire plus petite que l'aire I, et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I, il est évident que l'ensemble des aires Z, H, Θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment [6]. En conséquence, le segment ΑΔΒΕΓ n'est pas plus petit que l'aire K. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus

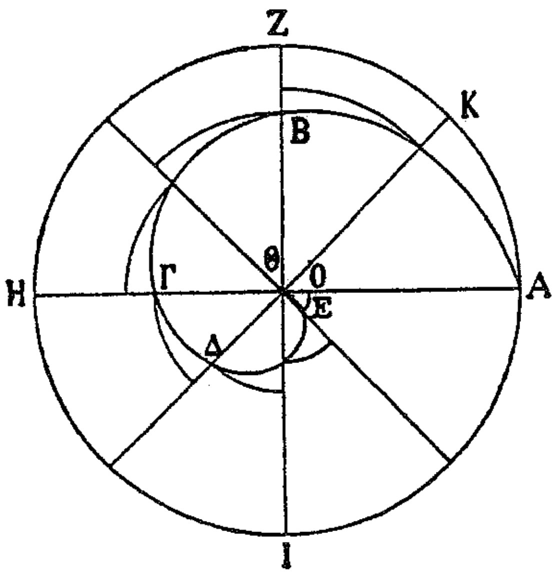
1. Voir proposition XXI.
2. Voir proposition XXIII et note.
3. Par hypothèse : $K = \frac{4}{3}$ triangle ΑΒΓ, et triangle ΑΒΓ est la plus grande aire.
4. Voir proposition XXIII. On aura : $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z$.
5. On a posé : $K = \frac{4}{3} Z$; donc, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$.
6. L'égalité de la note précédente donne : $K - (Z + H + \Theta + I) = \frac{1}{3} I < I$. D'autre part, en 2[de] hypothèse, on a : aire $K >$ segt ΑΔΒΕΓ, et aire $K -$ segt ΑΔΒΕΓ $> I$, d'où, comparant avec la 1[re] inégalité, on a, à fortiori : $K - (Z + H + \Theta + I) < K -$ segment ΑΔΒΕΓ, ou, comme le texte : $Z + H + \Theta + I >$ segment ΑΔΒΕΓ ; relation impossible. En effet, la proposition XXII a démontré que l'on a : $Z + H + \Theta + I <$ segment ΑΔΒΕΓ.

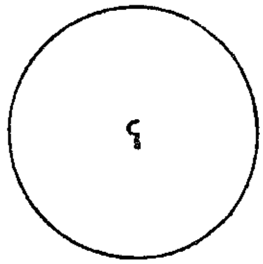
grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle ΑΒΓ ; donc, le segment ΑΔΒΕΓ vaut aussi les quatre tiers du triangle ΑΒΓ.

PROPOSITION XXIV

L'aire comprise entre la spirale décrite en première révolution et la première des droites en position initiale de révolution est équivalente au tiers du premier cercle [1].

Soit une spirale décrite en première révolution sur laquelle on a l'arc ΑΒΓΔΕΘ. Soit le point Θ l'origine de la spirale, ΘΑ la première des droites en position initiale de révolution et ΑΚΖΗΙ le premier cercle dont le tiers est le cercle placé en ϛ. On doit démontrer que l'aire que nous venons de dire est équivalente au cercle ϛ.





En effet, si elle ne lui est pas équivalente, elle est soit plus grande soit plus petite. Qu'elle soit d'abord plus petite, s'il se peut. Or, il est possible de circonscrire à l'aire comprise entre la spirale ΑΒΓΔΕΘ et la droite ΑΘ une figure plane, composée de secteurs semblables, de manière que la figure circonscrite excède l'aire de moins que l'excédent du cercle ϛ sur la dite aire [2]. Circonscrivons-la donc, et soit ΘΑΚ le plus grand et ΘΕΟ le plus petit des secteurs dont se compose la dite figure. Dès lors, il est évident que la figure circonscrite est plus petite que le cercle ϛ [3]. Prolongeons maintenant les droites qui forment

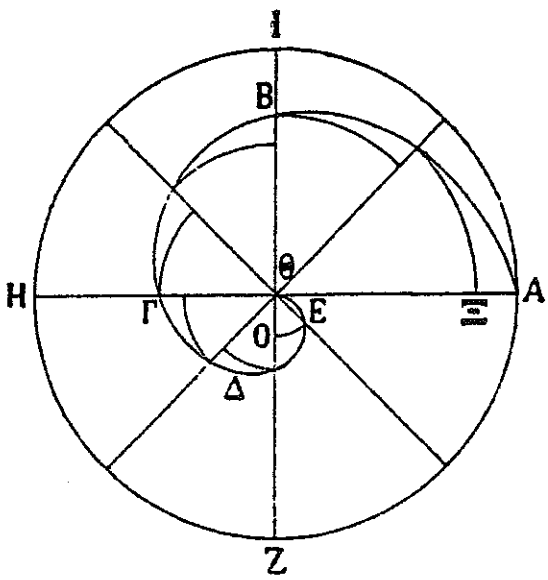
1. Proposition déjà mentionnée dans le préambule.
2. Voir proposition XXI, corollaire.
3. Par hypothèse première : fig. circonscrite — aire spirale $<$ cercle ϛ — aire spirale, d'où : fig. circonscrite $<$ cercle ϛ.

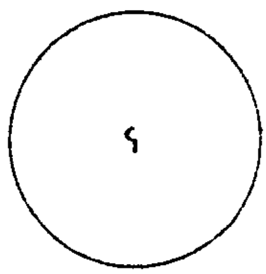
des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la circonférence du cercle. On a donc certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE ([1]), et dont la plus petite est égale à l'excédent ([2]). De plus, on a d'autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle, en même nombre que les précédentes, toutes égales à la plus grande de celles-ci, et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur que sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande. Il s'ensuit que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera moindre que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur ; car cela a été démontré ([3]). Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales entre elles et égales à la plus grande équivaut au cercle AZHI ; tandis que l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur équivaut à la figure circonscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus petit que le triple de la figure circonscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ ([4]) ; donc le cercle ϛ est plus petit que la figure circonscrite. Or, il n'est pas plus petit, mais plus grand ([5]) ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus petite que l'aire ϛ.

Au reste, elle n'est pas plus grande. En effet, qu'elle soit plus grande, s'il se peut. Il est donc de nouveau possible d'inscrire une figure dans l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ, de manière que la dite aire dépasse la figure inscrite de moins de l'excédent de la dite aire sur le cercle ϛ ([6]). Inscrivons-la donc, et soit ΘPΞ le plus grand et OΘE le plus petit des secteurs dont se compose la figure inscrite. Il est évident que, dès lors, la figure inscrite sera plus grande que le cercle ϛ ([7]). Prolongeons maintenant les droites qui forment des angles égaux en Θ jusqu'à leur rencontre avec la

1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.
4. Par hypothèse.
5. Par hypothèse première.
6. Voir proposition XXI, corollaire.
7. Par hypothèse seconde : aire spirale — fig. inscrite $<$ aire spirale — cercle ϛ, d'où : figure inscrite $>$ cercle ϛ.

circonférence du cercle. On a donc de nouveau certaines droites menées du point Θ à la rencontre de la spirale, se dépassant l'une l'autre d'une même grandeur, dont la plus grande est ΘA, la plus petite ΘE [1], et dont la plus petite est égale à l'excédent [2]. De plus, on a certaines autres droites menées du point Θ à la rencontre de la circonférence du cercle AZHI, en même nombre que les précédentes, égales chacune à la plus grande de celles-ci ; et l'on a construit sur toutes des secteurs semblables, tant sur celles qui sont égales entre elles et égales à la plus grande, que sur celles qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur. Il en résulte que l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande sera plus grand que le triple de l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande ; car cela a été démontré [3]. Or, l'ensemble des secteurs construits sur les droites égales à la plus grande est équivalent au cercle AZHI, et l'ensemble des secteurs construits sur les droites qui se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur, à moins du secteur construit sur la plus grande, est équivalent à la figure inscrite ; par conséquent, le cercle AZHI est plus grand que le triple de la figure inscrite. Or, ce cercle est le triple du cercle ϛ ; donc le cercle ϛ est plus grand que

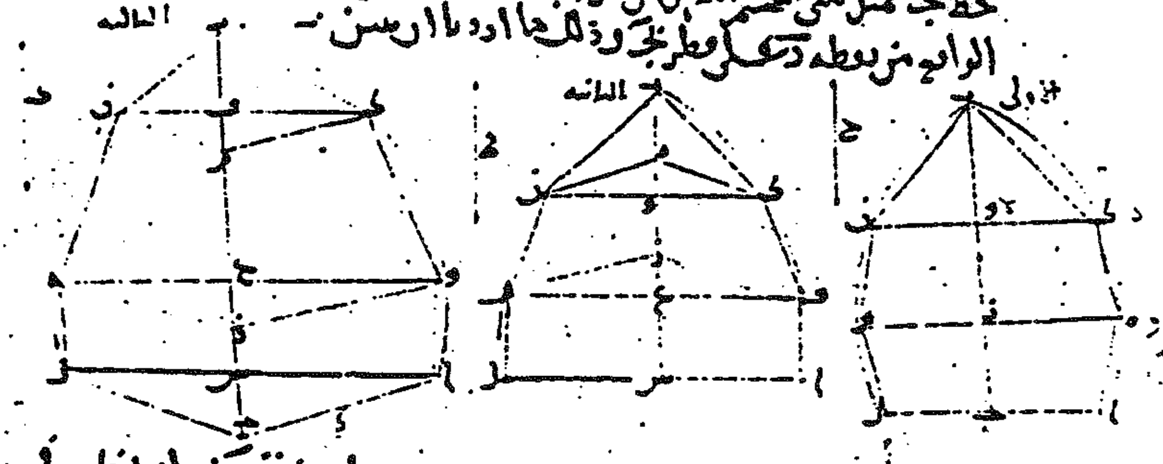




1. Voir proposition XII.
2. Voir proposition I.
3. Voir proposition X, corollaire.

la figure inscrite. Or, il n'est pas plus grand, mais plus petit ; par conséquent, l'aire comprise entre la spirale ABΓΔEΘ et la droite AΘ n'est pas plus grande que le cercle ϛ ; elle lui est donc équivalente.

دهمز وبين الصوره الثالثه ولمساحه المجسم الذي عليه امضا دهمز وفي الصوره الثالثه
الذي هو اما فصله معين مجسم واما فصلة مخروط احوف واما المجتمع من ضرب يح في الدايره
التي قطرها الى العمود مساو للاسطوانه التي قاعدتها الدايره التي قطرها الى وارتفاعها خ فيكون
المجسم الذي عليه د فيه الذي هو في الصوره الثانيه مخروط احوف وفي الصوره الثالثه اما
معين مجسم واما مخروط احوف ومجسما دهمز ور مثلها اللذان هما في الصوره الثانيه فصلتا
مخروطين احوفين وهما في الصوره الثالثه اما فصلتا معين مجسمين واما فصلتا مخروطين
احوفين واما احدهما فصلة مخروط احوف والاخر فصلة معين مجسم مع مثلي المجسم المجتمع من ضرب
يح في الدايره التي قطرها دب مساو لنصف الاسطوانه التي قاعدتها الدايره التي قطرها ال
وارتفاعها يح او المخروط الاحوف المستدير الذي ذكرنا مع فصلتي المخروطين الاحوفين مساو
للمجسم الذي يحدث اذا اداره شكل حا ود من الصوره الثانيه اذا كان الخط الثابت يح وكذلك
ايضا حال المعين المجسم او المخروط الاحوف من الصوره الثالثه مع فصلي المعينين المجسمين
منها او المخروطا الاحوفين او المجسمين اللذين احدهما معين مجسم والاخر مخروط احوف فالمجسم
الذي يحدث اذا ابتدء خط خ وادير سائر اضلاع شكل حا وزب من موضعه حتى يعود
الى ذلك الموضع اعظم من نصف الاسطوانه التي قاعدتها الدايره التي قطرها الى وارتفاعها
خط يح بمثل مثلي المجسم الكاين من ضرب يح في الدايره التي قطرها دق الذي هو العمود
الواقع من نقطه د على قطر ح وذلك ما اردنا ان نبين



كح اذا كانت فيه مكافيه معتدله الراس معلومه ومجسم معلوم فقد يمكن ان نخط في
البسيط المحيط بالقبه دواير موازيه لقاعده ذلك البسيط تكون متى اخرجت من
الخطوط المحيطه بها خطوط تنزل الى سهم القبه قسمته اقساما تكون نسبتها بعضها
الى بعض اذا اخذت على الولا كنسبة اعداد افراد متوالية مبتدية من الواحد

Ibn al-Haytham (965-1041)

Volume du paraboloïde