INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 5

Georg Cantor

Sur la Théorie des Ensembles

UNIVERSITE-PARIS VII

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 5

Georg Cantor

Sur la Théorie des Ensembles

Georg CANTOR

1845-1918

Sa vie, son oeuvre

Source de nombreux paradoxes depuis l'Antiquité, l'infini a toujours été un sujet de préoccupation et d'inquiétude pour les mathématiciens qui cherchaient à l'appréhender. La nécessité d'asseoir le calcul infinitésimal sur des bases solides avait conduit les mathématiciens de la première moitié du XIX^e siècle à étudier avec précision la notion de limite, mais l'étude de l'infini mathématique n'était pas abordée de front, puisqu'il intervenait seulement comme une possibilité de variation de certaines quantités finies.

À l'occasion de recherches fines d'analyse, Cantor étudia et compara directement des ensembles infinis, introduisant à cet effet de nouveaux concepts qui constituaient une véritable arithmétique de l'infini : outil puissant mais qui, sous sa forme initiale, soulevait de nombreuses difficultés logiques, la théorie de Cantor allait lui susciter de nombreux opposants ; les paradoxes apparents auxquels elle conduit ont provoqué une véritable crise des mathématiques, la « crise des fondements », qui a conduit à une profonde rénovation de la logique mathématique.

D'autres articles de cette encyclopédie (théorie des ENSEMBLES, ensembles ORDONNÉS) proposent un exposé de ces théories sous leur forme contemporaine ; on se contentera ici, en suivant de très près l'analyse de J. Cavaillès, de préciser quelle fut chez Cantor la genèse de la théorie des ensembles.

Les étapes de la création cantorienne

Georg Cantor est né à Saint-Pétersbourg, d'une famille de riches négociants d'origine israélite ; en 1856, la famille Cantor s'établit définitivement en Allemagne, à Francfort-sur-le-Main. G. Cantor termine ses études à Wiesbaden ; il étudie ensuite les mathématiques à l'université de Zurich, puis de Berlin où il est élève de Kummer, Kronecker et Weierstrass. En 1867, il soutient une thèse de théorie des nombres, mais s'oriente vite, sous l'influence de Weierstrass, vers l'analyse et plus particulièrement vers l'étude des séries trigonométriques. Un des problèmes essentiels de cette théorie était alors l'étude des ensembles de nombres réels (dits exceptionnels) tel que si une série trigonométrique converge vers 0, sauf peut-être sur un tel ensemble, tous ses coefficients sont nuls, problème lié également à la théorie de l'intégration ; Riemann et ses élèves avaient mis en évidence l'importance pour cette étude de la notion de point d'accumulation et d'ensemble dérivé.

Précisant des idées de Weierstrass, Cantor donne tout d'abord une définition rigoureuse des nombres réels en les construisant par complétion à partir des nombres rationnels, puis s'attache à décrire et à classer les ensembles exceptionnels. C'est à ce propos qu'il sera amené, dans une série de mémoires échelonnés de 1872 à 1884, tout en mettant en évidence de nombreuses propriétés topologiques de la droite et de l'espace (ensembles ouverts, fermés, parfaits...) et en abordant, le premier, le problème de la mesure, à élaborer les bases de la théorie des ensembles ; les résultats inattendus qu'il obtenait, parfois à son plus grand étonnement, pour les ensembles de nombres réels l'amenèrent alors à dégager sous forme abstraite les mécanismes qui y conduisaient. À partir de 1882, Cantor rompt complètement avec les mathématiques traditionnelles en attribuant à la théorie des ensembles un rôle unificateur et synthétique : dominer et précéder logiquement le reste des mathématiques ; il inaugurait ainsi des modes de raisonnement entièrement nouveaux.

Les conceptions de Cantor se heurtèrent dès leur publication à la défiance et même à l'hostilité déclarée de nombreux mathématiciens ; parmi ces derniers, Kronecker s'acharna tout particulièrement contre ses théories – se livrant même à des attaques personnelles extrêmement violentes contre leur auteur. Mais l'amitié de Dedekind, que Cantor avait rencontré en 1872 et avec lequel il échangera une correspondance presque quotidienne pendant de nombreuses années, rompit un peu son isolement ; ces lettres constituent un extraordinaire témoignage au jour le jour des découvertes, des préoccupations et des doutes de leur auteur. En 1884, Cantor, épuisé nerveusement par ses tentatives infructueuses pour démontrer le « théorème continu » (dont on sait, depuis quelques années seulement, qu'il est indémontrable dans le cadre de la théorie des ensembles) et par les attaques de ses détracteurs, est atteint d'une première crise nerveuse, point de départ d'une dramatique crise personnelle. Sur sa demande, il change sa chaire de mathématiques à l'université de Halle contre une chaire de philosophie et s'éloigne des mathématiques pendant quelques années.

Cependant l'œuvre de Cantor continuait à mûrir et celui-ci se remettait à publier quelques mémoires ; le dernier d'entre eux, *Contributions à la fondation de la théorie des nombres transfinis* (1897), est un exposé systématique et abstrait de l'arithmétique transfinie. Mais déjà la situation avait changé, de nombreux mathématiciens s'étant ralliés aux théories cantoriennes ; c'est alors qu'éclate, avec l'apparition de paradoxes (paradoxe de Burali-Forti, 1897 ; paradoxe de Russel, 1905), une véritable crise qui risque de mettre en péril l'édifice (cf. fondements des MATHÉMATIQUES). Lorsque Cantor meurt, le 6 janvier 1918, dans l'asile d'aliénés de Halle, l'importance de son œuvre mathématique est universellement reconnue.

La découverte des deux puissances

Le point de départ des travaux de Cantor est l'étude des quantités irrationnelles et du continu ; il a donné, avec Dedekind qui suit une autre approche, sa forme définitive à la théorie des nombres réels. En vue d'arithmétiser l'analyse, c'est-à-dire de dégager complètement la définition des nombres réels de la notion de limite, Cantor met en évidence le caractère « idéal » de la notion de nombre réel : un nombre irrationnel est défini par la donnée d'une suite fondamentale de nombres rationnels (on dit plutôt, de nos jours, suite de Cauchy) ; le continu, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels, que Cantor identifie axiomatiquement aux points d'une droite apparaît ainsi comme défini par une multitude de suites superposées de nombres rationnels.

Les premières investigations de Cantor sont relatives à la possibilité de ranger certains ensembles de nombres en une suite simple $u_1, u_2, ..., u_n$... Cantor montre que c'est le cas pour toute suite multiple (linéarisation) et pour l'ensemble des nombres rationnels, tandis que Dedekind lui communique le même résultat pour les nombres algébriques, c'est-à-dire les nombres qui sont racines d'équations à coefficients entiers. En est-il de même de l'ensemble des nombres réels ? Quelques jours après s'être posé cette question, Cantor y répond par la négative et dégage immédiatement la portée de ce résultat pour l'analyse : il existe une infinité de nombres transcendants et ces derniers ne se laissent pas ranger en une suite simple. On voit apparaître ici une démonstration d'existence qui n'est pas *effective*, en ce sens qu'elle ne permet pas concrètement de construire les nombres transcendants dont elle affirme l'existence ; pour cette raison, un mathématicien « réaliste », comme Kronecker, estime qu'une telle démonstration n'en est pas une.

Ranger des nombres en une suite simple signifie établir une correspondance biunivoque (on préfère dire de nos jours une *bijection*) avec l'ensemble des nombres entiers ; cette approche conduisit naturellement Cantor à utiliser la notion de bijection, pour comparer des ensembles de nombres, et à introduire, dès 1877, la notion d'ensembles de même puissance. En étudiant les puissances des ensembles usuels de l'analyse, Cantor a alors la stupéfaction d'obtenir des résultats qui semblent tout à fait contraires à l'intuition, comme par exemple la possiblité d'établir une bijection entre le continu à une dimension et le continu à n dimensions (« Je le vois, mais je ne le crois pas », écrit-il à Dedekind).

Des essais de classification précédents se dégagent ainsi deux types essentiels d'ensembles infinis : les ensembles que l'on peut ordonner en une suite simple, dits dénombrables, et les « continus » (il n'y a ici aucune condition topologique), chacun de ces types possédant de remarquables propriétés de stabilité. Dès 1878, Cantor est persuadé qu'il n'existe que ces deux types d'ensembles infinis de points dans $\mathbf{R}^n$ (théorème du continu), et il cherchera toute sa vie à établir ce résultat. C'est en espérant trouver dans la dérivation des ensembles un procédé de passage du continu au dénombrable qu'il sera conduit à une de ses découvertes les plus originales, la théorie des ordinaux transfinis.

La dérivation des ensembles

Les travaux de Weierstrass avaient mis en évidence l'importance de la notion de *point d'accumulation* d'un ensemble infini, c'est-à-dire de point contenant dans tout voisinage une infinité de points de l'ensemble ; tout point de l'ensemble qui n'est pas un point d'accumulation est appelé par Cantor un *point isolé*. Par définition, on appelle alors *ensemble dérivé* d'un ensemble de points E l'ensemble E' des points d'accumulation de E. Les premiers travaux de Cantor sur les ensembles exceptionnels qui interviennent dans la théorie des séries trigonométriques avaient mis en évidence l'importance de la notion d'ensemble dérivé ; en liaison avec ses recherches sur le dénombrable et le continu, il développa une théorie des ensembles de points intimement liés à des considérations fines de topologie de la droite, espérant ainsi appréhender le passage du continu au dénombrable. Nous dégagerons surtout ici les idées qui vont le conduire à l'arithmétique transfinie.

Si E est un ensemble infini, on peut former la suite de ses dérivés successifs :

$$E', E'', ..., E^{(n)}...$$

Cantor dit que E est du premier type si un de ces ensembles dérivés est constitué d'un nombre fini de points, et du second dans le cas contraire. Pour approfondir l'étude des ensembles du second type, Cantor, remarquant qu'à partir de E' chaque ensemble contient son dérivé, appelle dérivé d'ordre ∞ l'ensemble $E^{(\infty)}$ des points communs à tous les dérivés successifs de E' ; par dérivations successives de $E^{(\infty)}$, on obtient les ensembles dérivés d'ordres $\infty + 1$, $\infty + 2$, ..., $\infty + n$, ... ce qui, en considérant de nouveau l'ensemble des points communs à tous les ensembles précédents, permet de définir le dérivé d'ordre 2∞ ; le même processus permet de définir les ensembles dérivés d'ordres 3∞, ..., $n\infty$, ..., ∞^2, ..., ∞^n, ..., ∞^∞ ... Comme il l'écrit, « nous voyons ici une génération dialectique de concepts qui conduit toujours plus loin et qui, libre de toute contrainte, reste nécessaire en soi et conséquente ». Mais la synthèse cherchée entre le continu et le dénombrable est manquée car la génération des symboles ci-dessus reste prisonnière du dénombrable ; il apparaît tout d'un coup avec évidence à Cantor qu'« il faut que les symboles infinis soient autre chose que les étapes d'une génération progressive, mais les représentants d'une réalité immanente que des moyens nouveaux permettront d'atteindre, il faut s'engager dans le domaine véritable du transfini » (J. Cavaillès). Cette nécessité de l'étude directe de l'infini actuel est le point de départ de la révolution cantorienne de 1882.

La rupture avec les mathématiques traditionnelles

De 1882 à 1884, Cantor publie une série de mémoires dans lesquels il pose les bases de la théorie des ensembles abstraits, du calcul des puissances et de la théorie des ordinaux transfinis ; dans son esprit, ces concepts ne sont encore que « l'unité supérieure qui permet de considérer du même point de vue, le continu et le discontinu, de les mesurer avec une même mesure ». Deux mémoires (1894 et 1897) reprendront et systématiseront toutes ces notions dans un contexte complètement abstrait.

Il n'est pas question d'exposer ici la théorie désormais classique des nombres ordinaux et des nombres cardinaux (cf. théorie des ENSEMBLES). Cantor a mis en évidence les deux aspects de la notion usuelle de nombre d'éléments d'un ensemble fini ; le nombre est une abstraction qui émane d'un ensemble d'objets et qui se scinde, par passage aux ensembles infinis, en deux concepts distincts : « celui de la puissance [...] indépendante de l'ordre imposé à l'ensemble et celui de nombre ordinal qui est nécessairement lié à l'ordre imposé à l'ensemble ». Il ajoute : « Si je redescends de l'infini au fini, je vois avec la même clarté et la même beauté comment les deux concepts redeviennent un et se fondent dans le concept de nombre entier fini. »

Pour Cantor, « la puissance ou nombre cardinal d'un ensemble est le concept universel ou générique que l'on obtient en faisant abstraction pour l'ensemble aussi bien de la constitution de ses éléments que de toutes les relations que ces éléments ont entre eux ou avec d'autres choses, donc en particulier de l'ordre qui règne entre eux, et en ne considérant que ce qui est commun à tous les ensembles qui lui sont équivalents ». La notion de nombre ordinal est au contraire liée à l'existence d'un bon ordre ; dans la classification des ordinaux en deux espèces, on retrouve les deux modes de génération des symboles infinis de dérivation : adjonction d'un élément et « passage à la limite ». Cantor appelle ordinaux de la classe II, les ordinaux des ensembles bien ordonnés dénombrables (les ordinaux de la classe I étant les ordinaux finis) et montre que les ordinaux de la classe II forment un ensemble bien ordonné, dont la puissance est supérieure à celle du dénombrable ; il obtient donc bien ainsi un procédé de dépassement du dénombrable, mais on ne sait pas pour autant si on a ainsi obtenu la puissance du continu.

Le caractère tout à fait révolutionnaire de ses recherches est apparu avec netteté à Cantor et il a éprouvé le besoin de se justifier en arguant de la liberté de création du mathématicien : « Je ne vois vraiment pas ce qui pourrait nous retenir dans cette activité créatrice de nouveaux nombres, aussitôt qu'il apparaît que, pour le progrès de la science, l'introduction d'une nouvelle, parmi ces innombrables classes de nombres, est devenue souhaitable ou même indispensable ; [...] *sans* cette extension je ne peux plus aller de l'avant, *avec* elle j'atteins toute sorte d'inattendu. »

JEAN-LUC VERLEY

Bibliographie

G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen*, G. Olms, Hildesheim, 1962 ; *Contributions to the Founding of Transfinite Numbers*, Dover, New York, 1955.

J. CAVAILLÈS, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962 / J. W. DAUBEN, *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of Infinite*, Harvard University, Cambridge, 1979 / A. SCHOENFLIES, « Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen », in *Acta math.*, t. L, Djursholm, 1927.

Cantor inventeur de nombres

En étudiant deux exemples, celui des nombres réels et celui des nombres transfinis[1], j'ai cherché à montrer dans ce travail le caractère de nécessité irrépressible de la création de nombres par Cantor. On observe un phénomène d'une prodigieuse fécondité, comme si de génération en génération, une fois amorcé le processus créatif rien ne pouvait le contraindre à s'arrêter, et ce phénomène n'a rien d'arbitraire, il a toute la nécessité d'une loi naturelle.

Au cours de la decennie 1860-70 s'élaborent plusieurs théories des nombres réels, Weierstrass, Dedekind, y sont amenés pour préciser des questions de limites. Cantor fixe précisément le début de ses recherches dans la question suivante: après avoir démontré le théorème:

Si une série trigonométrique

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum_n a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

converge vers 0 en tout point d'un intervalle, alors les suites des coefficients a_n et b_n sont nulles

il cherche à le raffiner en affaiblissant les hypothèses. Dans un premier temps il montre que la conclusion demeure si la convergence vers 0 de la série est réalisée sauf en un nombre fini de points de l'intervalle, ensuite il s'interroge sur le cas des sous ensembles infinis.

Dans l'introduction au mémoire Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques[2] il écrit "*je suis obligé de commencer par des explications, ou plutôt par quelques simples indications destinées à mettre en lumière les diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini*".

La construction qu'il expose alors est devenue classique; notant A le système des nombres rationnels il attache à chaque suite de Cauchy de nombres rationnels "*une limite déterminée b* ". Plus loin il précise "*j'emploie en général les mots grandeur numérique, valeur et limite dans le même sens*" . Cantor insiste sur le caractère formel de cette définition "*Ces mots ne servent donc qu'à énoncer cette propriété de la série, sans exprimer d'abord autre chose*" et encore "*la grandeur numérique n'ayant d'abord en elle-même aucun objet, ne paraît que comme élément de théorèmes qui ont une certaine objectivité, de ce théorème, p. ex., que la grandeur numérique sert de limite à la série correspondante*".

Cantor identifie alors chaque rationnel à une grandeur *b*, définit l'équivalence de deux limites *b* et *b*', prolonge à l'ensemble B des nombres ainsi construits qu'il nomme nombres de 1° espèce,

---

[1] Le mot transfini est employé par Cantor à partir de 1895.

[2] Annales mathématiques de Leipzig. t.5. 1872. trad. française Acta mathematica t.2. 1883. pp.336-348.

l'addition, la multiplication et la relation d'ordre, ce qui permet de réintroduire dans B la notion de limite au sens usuel, et justifie a posteriori l'emploi qui a été fait du mot limite.

L'étape suivante est fort originale, car le procédé d'attribution d'une limite qui a donné naissance aux nombres *b* à partir des rationnels *a* peut être renouvelé, donnant naissance aux nombres *c*, nombres de 2° espèce...et ainsi de suite, on atteindra des nombres de n° espèce si bien que "*la notion de nombre, si développée qu'elle soit ici, porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie*"

Prenons un exemple: 0 est évidemment un rationnel, c'est aussi la limite de la suite des rationnels $a_n = 1/n$, donc un élément de la 1° espèce. Chacun des a_n étant lui-même limite de la suite $b_{n,i} = a_n + 1/i$ quand i tend vers l'infini, est un élément de 1° espèce; 0 est alors un nombre de 2° espèce. En répétant le même artifice il est facile d'établir que 0 est un élément de ν° espèce, l'entier ν étant choisi à volonté.

Bien que d'une certaine manière ce renouvellement du procédé n'apporte rien de nouveau: "*on peut égaler chacun des a à un b, mais non pas chacun des b à un a, on peut au contraire non seulement égaler chacun des b à un c, mais aussi chacun des c à un b....on pourra toujours égaler une grandeur numérique l à une grandeur numérique k, i,...c, b, et réciproquement*" Cantor considère comme essentiel de maintenir la distinction entre les nombres ainsi construits. Par la "*distinction formelle de grandeurs numériques d'ordre différent, j'ai seulement voulu exprimer les différentes manières de les définir...il n'y a pas de danger que l'on puisse croire que j'ai voulu étendre le domaine des nombres réels*"[3]. De manière analogue, nous savons bien sûr, que les polynômes P et P^2 ont exactement les mêmes racines, mais il importe de dire, pour la validité des théorèmes, que P en a *p* et que P^2 en a *2p*. En outre Cantor a en vue l'introduction des ensembles dérivés.

Que sont les ensembles dérivés et à quoi servent-ils? Cantor rappelle la notion de point limite (point d'accumulation[4] dans la terminologie moderne) et définit celle d'ensemble dérivé: le dérivé P' de P est l'ensemble de ses points limites. Par ν opérations on arrive à $P^{(\nu)}$, le dérivé d'ordre ν de P.

Reprenons l'exemple précédent, le dérivé de l'ensemble S_1 des points a_n est l'ensemble S_0 réduit au point 0. En appelant S_2 l'ensemble des points $b_{n,i}$ on a $S_2' = S_1$; $S_2'' = S_0$. L'ensemble S_λ des points qui permettent d'établir que 0 est un point de λ° espèce admet S_0 pour dérivé d'ordre λ. Dans ce mémoire Cantor se borne à étudier les ensembles dont un dérivé d'ordre fini est un ensemble fini, ceux ci lui fournissant le cadre adapté à son théorème sur les séries trigonométriques: la conclusion susbsiste si la convergence de la série est assurée sauf aux points d'un ensemble P dont le dérivé $P^{(\nu)}$ est un ensemble fini.

---

[3]Lettre à Dedekind du 29 décembre 1878. Traduction Cavaillès.

[4] u est un point d'accumulation de l'ensemble E si tout voisinage de u contient au moins un point de E autre que u.

Plus tard [5] il aura l'idée d'itérer la dérivation au delà du fini, en introduisant l'ensemble noté $P^{(\omega)}$, intersection étendue à tous les entiers ν des dérivés $P^{(\nu)}$. Avec $P^{(\omega)}$ et ses dérivés sucessifs s'amorce la suite des entiers transfinis, une suite de nombres infinis, bien distincts et déterminés.

A en croire Cantor lui même ce n'est pas de gaité de coeur qu'il l'a fait et qu'il s'est ainsi exposé aux blâmes . Il écrit : "*je me trouve contraint de développer cette notion de nombre....Il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la série des nombres entiers réels au delà de l'infini;...je me mets en contradiction avec les idées généralement reçues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique*". Je vais tâcher d'expliquer cette généralisation de la notion de nombre entier réel d'après l'article Fondements d'une théorie générale des ensembles[6], et de proposer des exemples.

La première classe de nombres (I), c'est à dire la suite des entiers naturels n'admettant pas de plus grand élément "*on peut imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω et qui servira à exprimer que tout l'ensemble (I) est donné ...dans sa succession naturelle.. ω sera le premier nombre entier qui suivra tous les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à tous les nombres ν*" . A l'aide du premier principe de formation, c'est à dire l'addition d'une unité à un nombre déjà formé, on obtient la suite $\omega+1, \omega+2, ... \omega+\nu$..qui a son tour n'a pas de plus grand élément. Dès que l'on a une telle suite le second principe de formation, qui a déjà servi pour créer ω "*pose un nouveau nombre...qui est défini comme immédiatement supérieur à tous ces nombres*". Nous l'appelons 2ω.

En appliquant tour à tour ces deux principes, on engendre une suite absolument illimitée de nombres. Afin d'y mettre bon ordre, c'est à dire d'y marquer des divisions, Cantor ajoute un principe de limitation et impose aux nombres de la deuxième classe (II) la condition que "*le système des nombres qui se trouvent,...avant celui qu'on considère,...soit de la même puissance que la première classe de nombres*" , c'est à dire soit un ensemble dénombrable.

Bien que seule la 2° classe de nombres puisse être décrite avec précision, parce que les seules listes que nous puissions effectivement écrire (et encore avec force points de suspension) sont des suites, la même technique s'appliquant à nouveau permet "*d'arriver toujours à de nouvelles classes de nombres et, avec elles, à toutes les puissances diverses, successivement croissantes que l'on rencontre dans la nature matérielle ou immatérielle*".

Une fois posés ces procédés de formation abstraite de nombres entiers, on peut se demander ce que signifient ces nombres. Il se trouve qu'ils expriment la notion "*du nombre des éléments d'un ensemble bien ordonné*"[7], afin d'éviter toute ambigüité sur le mot nombre j'emploie le mot ordinal

---

5 $P^{(\omega)}$ apparaît dans le mémoire Sur les ensembles infinis et linéaires de points. Annales mathématiques de Leipzig. t.17.1880. Acta mathematica t.2. 1883. p359.

6 Annales mathematiques de Leipzig. t.21 1883. Trad fr. A.M. pp.381-408.

7 Un ensemble est bien ordonné si toute partie non vide a un plus petit élément. Deux ensembles bien ordonnés ont même ordinal s'ils sont reliés par une bijection strivtement croissante.

qui n'appartient pas au vocabulaire de Cantor.

L'ensemble ℕ dans sa succession naturelle a pour nombre ordinal ω. Ordonné de la façon suivante:

$$14,\ 1,\ 2,\ ...,n,...$$

il a le même ordinal. En effet je peux écrire 14 est le premier, 1 le second, et n le (n+1)° pour tout naturel.

Ordonné ainsi:

$$2,\ 3,\ ...,n,\ ...1.$$

je peux écrire 2 est le premier, 3 le second, n le (n-1)° dés que n n'est pas 1, mais que faire de 1? L'ordinal de cet ensemble n'est pas ω mais $\omega+1$.

2ω est celui de l'ensemble formé de la suite des entiers impairs suivi de celle des entiers pairs. Quoique tous de même puissance, ces ensembles diffèrent par le nombre ordinal de leurs éléments.

"*Dans les systèmes finis la puissance s'accorde avec le nombre des éléments, parce que ces systèmes ont, dans tous les arrangements, le même nombre d'éléments. Pour les systèmes infinis au contraire, il n'avait été question jusqu'ici, ni dans mes travaux ni ailleurs, d'un nombre d'éléments défini avec précision, mais on pouvait bien leur attribuer aussi une puissance déterminée, et complètement indépendante de l'ordre de leurs éléments*". Cantor marque comme un avantage considérable cette objectivation du nombre transfini comme nombre ordinal, il écrit "*ce rapport entre le nombre des éléments d'un ensemble et le nombre démontre la réalité de ce dernier*". Il ne s'agit pas d'une création arbitraire, d'un artifice ingénieux, mais d'un objet effectivement présent dont l'étude s'impose. D'après le principe de limitation, tout nombre de la seconde classe est précédé d'un ensemble dénombrable, chaque ordinal transfini représente donc une façon de ranger l'ensemble des entiers naturels, ou une partie infinie de celui-ci, ou tout autre ensemble équipotent. Ce que Cantor exprime par le théorème: "*tout système de la puissance de la première puissance peut être dénombré par des nombres de la deuxième classe de nombres et par ces nombres seuls*".

En outre on peut toujours ranger les éléments d'un ensemble dénombrable de manière que l'ordinal de l'ensemble ainsi rangé soit un nombre de la deuxième classe donné à volonté. C'est ce que je propose d'expérimenter ici.

•Comme on a formé un ensemble d'ordinal 2ω, on forme un ensemble d'ordinal $p\omega$ (p entier non nul) en écrivant bout à bout les classes de congruences modulo p.

•L'ensemble:

$$\begin{array}{l} 1,3,5,...2p+1,... \\ 2,6,10,...2(2p+1),.... \\ 4,12,...4(2p+1)... \\ ...... \\ 2^m,2^m.3,...2^m(2p+1)... \\ .... \end{array}$$

où l'ordre des exposants de 2 est l'ordre naturel, admet pour ordinal ω^2, on peut s'en convaincre en le disposant sous forme d'un tableau carré.

•La suite des entiers premiers impairs est un ensemble de nombre ordinal ω, on la fait suivre des produits par 3 des entiers premiers supérieurs ou égaux à 3, puis des produits par 5 des entiers premiers supérieurs ou égaux à 5, et on fait toujours de même, avec la suite des produits par m (m entier premier impair) des entiers premiers supérieurs ou égaux à m. Ainsi rangés, les entiers impairs qui ont au plus 2 facteurs premiers forment un ensemble de nombre ordinal ω^2.

Reprenons cette liste et écrivons à la suite les produits par 3 de ses éléments à partir de 3.3, puis les produits par 5 des éléments à partir de 5.5, et toujours ainsi ajoutons les produits par m des éléments à partir de m.m. L'ensemble des entiers impairs ayant au plus 3 facteurs premiers est de nombre ordinal ω^3.

En procédant toujours de même on ordonne l'ensemble de tous les entiers impairs :
$A = p_1p_2..p_m$ et $B = q_1q_2...q_t$ étant décomposés en produits de facteurs premiers et ceux-ci étant écrits dans l'ordre croissant, on dira que A précède B si $m < t$ ou bien si $m = t$ et $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $...p_k < q_k$. L'ordinal de cet ensemble est ω^ω

On range ensuite les entiers pairs suivant l'ordre des puissances de 2 dans l'écriture $2^\alpha A$. Les entiers naturels forment un ensemble de nombre ordinal $\omega^{\omega+1}$ si on adopte pour α l'ordre naturel.

Mais si on range d'abord les entiers tels que α soit impair, et qu'on adopte pour α l'ordre défini précédemment l'ensemble des entiers qui s'écrivent $2^\alpha A$, avec α et A impairs, est un ensemble de nombre ordinal $\omega^{2\omega}$. Et ce n'est certes pas fini, on n'a encore classé ni 4, ni 12, ni 16..., je ne m'arrête que parce l'imagination fait défaut.

Notons que dans ce texte Cantor présente bien d'autres résultats, entr'autres une arithmétique des nombres transfinis qui rend compte des notations additive, multiplicative et exponentielle utilisées avec ω.

Quel but se proposait Cantor construisant les nombres de la classe (II) et en étudiant leur arithmétique? Il dit que c'est nécessaire au progrès de la science, pour avancer ses recherches en théorie des ensembles. Plus précisément il cherche à démontrer ce que nous nommons l'hypothèse du continu. Dès 1877 il a formulé l'hypothèse que pour les ensembles infinis linéaires (les sous ensembles infinis de $\mathbb{R}$) il n'y aurait que deux espèces de puissances: celle du dénombrable et celle du continu[8], remettant à plus tard la solution exacte de cette question. Ici, il établit (§12 et §13) que la puissance de la classe (II) est immédiatement supérieure à celle de la classe (I) et annonce qu'il espère démontrer bientôt sa conjecture à l'aide de ces nouvelles données.

Annie Hupé

[8] Contribution à la théorie des ensembles Journal de Borchardt 84. A M pp.311 à 328

Remarques sur l'édition française des mémoires de Cantor

Au début de la décennie 1880, Cantor trouve en la personne du suédois G. Mittag-Leffler un mathématicien convaincu de l'importance et de l'intérêt de ses travaux. Comme éditeur des Acta Mathematica celui - ci contribuera beaucoup à la diffusion hors d'Allemagne des idées de Cantor qui avait rencontré beaucoup d'hostilité . Charles Hermite, qui coordonnait le travail de traduction à Paris, écrit par exemple à Mittag-Leffler "*L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice, et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont susceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un intérêt actuel; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre.*" C'est une opinion très partagée: après une conversation avec Appell, il écrit encore "*le 5° mémoire, consacré presqu'en entier à exposer un système de notations, lui semble ne contenir en réalité que bien peu de choses*" . Poincaré seul se montre plus ouvert aux idées de Cantor et croit qu'elles ont de l'importance, quoiqu'il les juge "*bien prématurées dans l'état actuel de l'analyse*".

Dans sa version originale, le mémoire <u>Fondements d'une théorie générale des ensembles</u> comportait d'abondants développements philosophiques. Cantor exposait son interprétation d'un nombre infini et répondait aux objections que cette notion avait soulevées chez les mathématiciens et les philosophes. Mittag-Leffler et ses correspondants craignaient que les lecteurs français ne se montrent *absolument réfracteurs* (c'est le mot d'Hermite) aux idées de Cantor, ici encore la position de Poincaré est plus nuancée, il écrit à Mittag-Leffler: "*Ce qui rendrait la lecture de la traduction de ce beau mémoire très pénible aux Français..., c'est moins la partie philosophique qu'on serait toujours libre de passer, que le défaut d'exemples un peu concrets*" et il souhaite des aménagements qui rendraient "*ce beau travail*" accessible au lecteur français. Pour la traduction et l'édition française Mittag-Leffler obtint donc de Cantor qu'il remanie son texte de manière à faire disparaître les sections strictement philosophiques et à ne conserver que la partie mathématique ce qui explique les suppressions de paragraphes. Dans la version française, dont la traduction a été revue et corrigée par Poincaré puis par Cantor lui-même, on retrouve toutefois deux points de la discussion:

• Le §10, qui est reporté à la fin de l'article, met en valeur le thème du *continu* - thème majeur de l'oeuvre de Cantor- et donne une caractérisation du continu numérique. Cantor se démarque de Bolzano, mais il a supprimé de ce paragraphe les critiques qu'il avait formulées à l'égard de la présentation que Dedekind avait données du continu. Cantor reprochait à Dedekind de ne retenir comme caractérisque du continu que la complétude.

• Dans l'édition allemande Cantor consacre un paragraphe entier, le §8, à convaincre ses lecteurs de la *réalité* des nombres transfinis. Dans le texte français la discussion sur la réalité des nombres transfinis est évoquée au §2. Un problème de traduction se pose à ce sujet, la langue française ne disposant que d'un seul mot: *réels* là où l'allemand en a deux: *reellen* et *realen.* Le premier désigne les éléments de $\mathbb{R}$, le second exprime que les nombres considérés ne sont pas fictifs (ainsi en va-t-il aussi bien des "imaginaires" que des entiers "naturels").

La traduction des mémoires est d'ailleurs très malaisée car le vocabulaire mathématique n'était nécessairement pas élaboré, de plus, le traducteur habituel (M. l'Abbé Dargent) qui avait une formation philosophique manque de compétence en mathématiques. Pour donner un exemple, Cantor introduit (p.311 de notre traduction) une correspondance entre ensembles qu'il qualifie de *eindeutig und vollständig*; ce qu'on exprime à présent par bijective est traduit par Dargent: à sens unique. Cantor écrit encore: *Wenn ich von einer ZahlengröBe im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst,* ce que Dargent traduit: quand je parle d'une grandeur numérique dans un sens plus étendu, cela a lieu d'abord. Poincaré corrige: on rencontre une première généralisation de la notion de grandeur numérique (p.337).

Le dernier texte ici reproduit a paru dans Acta Mathematica en 1885, des désaccords étant apparus entre l'auteur et Mittag-Leffler, Cantor ne fournira plus de texte à cette revue.

Annie Hupé

Offert par l'auteur

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON | JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2:4

G. CANTOR. SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1883.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÉBRIQUES RÉELS.[1]

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 258.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

où n, a_0, a_1, ... a_n sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients a_0, a_1, ... a_n n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible; ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement à une équation de la forme (1) correspondent au plus autantde nombres algébriques réels racines de cette équation, qu'il y a d'unités dans le degré n.

Les nombres algébriques réels constituent par leur ensemble un système de nombres que nous désignerons par (ω); ainsi qu'il résulte de considérations élémentaires, ce système (ω) de nombres est de telle nature qu'il existe une infinité de nombres de (ω) dont la différence avec un nom-

[1] M. Georg Cantor ayant eu la bonté de nous promettre une série d'articles nouveaux concernant ses recherches sur la théorie des ensembles, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant d'abord ici en traduction française les principaux mémoires de M. Cantor qui se rapportent à ce sujet; ils nous paraissent en effet indispensables à l'intelligence des nouveaux qui vont suivre et que l'auteur publiera de même en français. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur. *Le rédacteur.*

bre quelconque α est moindre qu'une quantité donnée si petite qu'elle soit. Cette remarque rend d'autant plus frappante, au premier abord, la propriété suivante: *l'on peut faire correspondre un à un les nombres du système* (ω), aux nombres ν appartenant à la série des entiers positifs, suite qui sera désignée par (ν), de telle façon qu'à chaque nombre algébrique réel ω réponde un nombre entier positif déterminé ν, et qu'inversement à chaque nombre entier positif ν réponde un nombre réel algébrique ω complètement déterminé; en d'autres termes l'on peut imaginer les nombres du système (ω) rangés suivant une certaine loi en une suite infinie

$$(2) \qquad \omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_\nu, \ldots .$$

dans laquelle figurent tous les nombres de la catégorie (ω), chacun d'eux se trouvant dans la suite (2) à une place déterminée indiquée par l'indice correspondant. Une fois que l'on a trouvé une loi permettant de ranger ainsi les nombres de (ω), on en déduira d'autres de celle-là par des modifications que l'on pourra choisir à volonté; il nous suffira donc d'indiquer, comme nous le faisons dans le § 1, le mode de classement qui nous paraît reposer sur le plus petit nombre de considérations.

Pour donner une application de cette propriété du système de tous les nombres algébriques réels, j'ajoute au § 1 le § 2 dans lequel je montre que, lorsque l'on considère comme donnée sous la forme (2) une suite quelconque de nombres réels, l'on peut déterminer, dans chaque intervalle ($\alpha \ldots . \beta$) donné d'avance, des nombres η non contenus dans cette suite (2). En combinant les propositions contenues dans les §§ 1 et 2, l'on obtient ainsi une démonstration nouvelle du théorème suivant démontré pour la première fois par LIOUVILLE (Journ. de Math. réd. p. Liouville I[e] série, t. XVI, 1851): dans chaque intervalle ($\alpha \ldots . \beta$) donné d'avance il y a une infinité de nombres transcendants c'est à dire de nombres qui ne sont pas algébriques réels. De plus le théorème du § 2 donne la raison pour laquelle on ne peut pas faire correspondre un à un aux nombres entiers de la série (ν) les nombres réels formant un système continu de nombres, c'est à dire par exemple, tous les nombres réels qui sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$. Je suis ainsi arrivé à trouver d'une façon nette la différence essentielle qu'il y a entre un système continu de nombres et un système de nombres de l'espèce de celui qui est formé par l'ensemble de tous les nombres algébriques réels.

§ 1.

Revenons à l'équation (1) à laquelle satisfait un nombre algébrique réel ω et qui, d'après les suppositions faites plus haut, est une équation entièrement déterminée; appelons *hauteur* du nombre ω la somme des valeurs absolues des coefficients augmentée du nombre $n-1$, n étant le degré de l'équation; en désignant cette hauteur par N et appliquant une notation connue pour désigner les valeurs absolues des nombres, on a, par suite,

$$N = n - 1 + [a_0] + [a_1] + \dots + [a_n]. \tag{3}$$

Cette hauteur N est, par conséquent, pour chaque nombre algébrique réel, un nombre entier positif déterminée; inversement, à un nombre entier positif donné N ne correspondent qu'un nombre limité de nombres algébriques réels ayant pour hauteur N; soit $\varphi(N)$ ce nombre, l'on aura, par exemple, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$. Les nombres du système (ω), c'est à dire tous les nombres algébriques réels peuvent donc être rangés dans l'ordre suivant: on prendra comme premier nombre ω_1, le seul nombre de hauteur $N = 1$; on écrira à la suite par ordre de grandeurs croissantes les deux nombres algébriques réels de hauteur $N = 2$ et on les désignera par ω_2, ω_3; puis, à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes, on écrira les quatre nombres de hauteur $N = 3$; d'une manière générale, après que l'on aura ainsi compté et classé les nombres de la catégorie (ω) jusqu'à une hauteur déterminée $N = N_1$, on rangera à leur suite et par ordre de grandeurs croissantes les nombres réels algébriques de hauteur $N = N_1 + 1$. L'on obtient ainsi le système de tous les nombres algébriques réels sous la forme:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \dots\ \omega_\nu,\ \dots,$$

et l'on peut, en se reportant à cette classification, parler du $\nu^{\text{ième}}$ nombre algébrique réel, sans omettre aucun nombre du système (ω).

§ 2.

Lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque

$$(4) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$$

l'on peut, dans chaque intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ donné d'avance, déterminer un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite (4); il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres. Voici la démonstration de ce théorème.

Partons de l'intervalle donné d'avance $(\alpha \ldots \beta)$ et soit $\alpha < \beta$; désignons par α', β' les deux premiers nombres de la suite (4) divers entre eux, qui sont distincts de α, β et qui se trouvent dans cet intervalle, et soit $\alpha' < \beta'$; désignons de même par α'', β'', les deux premiers nombres de notre suite divers entre eux, qui se trouvent dans l'intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$ et soit $\alpha'' < \beta''$; d'après cette même loi, formons un intervalle suivant $(\alpha''' \ldots \beta''')$, et ainsi de suite. D'après cette définition, les nombres α', α'', ... sont des nombres déterminés $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots u_{k_\nu}$ de notre suite (4) dont les indices k_ν croissent constamment, et la même chose a lieu pour les nombres β', β'' ....; de plus les nombres α', α'', ... sont de grandeurs croissantes, les nombres β', β'', ... de grandeurs décroissantes; chacun des intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ... comprend tous ceux qui le suivent. L'on ne peut alors concevoir que deux cas.

Ou bien le nombre des intervalles, que l'on peut former ainsi est fini; soit $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ le dernier d'entre eux; comme dans cet intervalle se trouve au plus un nombre de la suite (4), l'on peut prendre dans cet intervalle un nombre η qui n'appartient pas à la suite (4), et le théorème est ainsi démontré dans ce cas.

Ou bien le nombre des intervalles ainsi formés est infini; alors, comme les nombres α, α', α'' .... croissent constamment sans croître à l'infini, ils ont une certaine limite α^∞; de même les nombres β, β', β'', ... qui décroissent constamment ont une certaine limite β^∞. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (ce qui se présente toujours en appliquant cette méthode au système (ω) des nombres algébriques réels), on s'assure facilement en revenant à la définition des intervalles, que le nombre $\eta = \alpha^{\infty} = \beta^{\infty}$ ne peut pas être compris dans notre suite; car si ce nombre η était compris dans notre suite, l'on aurait $\eta = u_p$, p étant un indice déterminée; mais cela n'est pas possible, car u_p ne se trouve pas dans l'intervalle $(\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$, tandis que le nombre η s'y trouve d'après sa définition. Si, au contraire $\alpha^{\infty} < \beta^{\infty}$, tout nombre η, compris dans l'intervalle $(\alpha^{\infty} \dots \beta^{\infty})$ ou égal à l'une des limites, remplit la condition voulue de ne pas appartenir à la suite (4).

Les théorèmes, que nous venons de démontrer peuvent être généralisés de différentes façons; nous n'indiquerons ici que la proposition suivante: «soit $v_1, v_2, \dots, v_\nu, \dots$ une suite finie ou infinie de nombres linéairement indépendants, c'est à dire de nombres tels qu'il n'existe entre eux aucune équation de la forme

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0,$$

les coefficients $a_1, a_2, \dots a_n$ étant des entiers qui ne sont pas tous nuls à la fois; concevons le système (Ω) de tous les nombres Ω qui peuvent être représentés par des fonctions rationnelles à coefficients entiers des nombres donnés $v_1, v_2, \dots v_\nu, \dots$; alors, dans tout intervalle $(\alpha \dots \beta)$, il y a une infinité de nombres qui ne sont pas contenus dans le système (Ω).»

En effet, l'on voit, à l'aide de considérations analogues à celles qui ont été employées dans le § 1, que les nombres de la catégorie (Ω) peuvent être rangés en une suite de la forme

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_\nu, \dots,$$

d'où résulte le théorème en question d'après la proposition démontrée § 2.

M. B. Miningerade a démontré, par une réduction aux principes de Galois, un cas très-particulier du théorème que nous venons d'indiquer, à savoir le cas dans lequel les nombres $v_1, v_2, \ldots . v_\nu$ sont en nombre fini et dans lequel le degré des fonctions rationnelles, qui servent à former les nombres de la catégorie (Ω) est donné d'avance. (Voir Math. Annalen de Clebsch et Neumann, T. III p. 497.)

Berlin, le 23 Décembre 1873.

UNE CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

MÉMOIRE DE

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Extrait du Journal de Borchardt, vol. 84.)

Si on peut faire correspondre élément par élément deux *ensembles* bien définies M et N par une opération à sens unique (et, quand on peut le faire d'une manière, on peut le faire aussi de beaucoup d'autres), convenons, pour la suite, de nous exprimer en disant que ces *ensembles* ont la même *puissance*, ou encore qu'elles sont *équivalentes.*

Nous appellerons *parties intégrantes* d'un *ensemble* toutes les autres *ensembles* M', dont les éléments sont en même temps éléments de M.

Si deux *ensembles* M et N ne sont pas de même *puissance*, ou bien M aura la même *puissance* qu'une partie intégrante de N, ou bien N la même qu'une partie intégrante de M; dans le premier cas nous appelons la *puissance* de M plus petite, dans le second nous l'appelons plus grande que la *puissance* de N.

Quand les ensembles à considérer sont finis, c. a. d. composés d'un nombre fini d'éléments, la notion de la *puissance*, comme il est facile de le voir, répond alors à celle du *nombre* dans la signification de *dénombrement* et pas conséquent aussi à celle du *nombre entier positif*, puisqu'en effet deux ensembles de cette nature n'ont la même puissance que dans l'hypothèse où le nombre de leurs éléments est le même.

Une *partie intégrante* d'un ensemble *fini* a toujours une puissance plus petite que l'ensemble lui-même; *ce fait n'a plus lieu dans les ensembles infinis, c. à. d. composés d'un nombre infini d'éléments* De cette seule circonstance, qu'un ensemble infini M est une partie intégrante d'une autre N

ou que l'on peut faire correspondre un à un les éléments de M à une partie intégrante de N, par une opération à sens unique, on ne peut aucunement conclure que sa puissance est plus petite que celle de N; cette conclusion n'est justifiée, que si l'on sait que la puissance de M n'est pas égale à celle de N; de même, N étant partie intégrante de M ou tel que ses éléments correspondent un à un à sens unique à une partie intégrante de M, cette circonstance ne suffit pas pour que la puissance de M soit plus grande que celle de N.

Pour rappeler un exemple simple, soit M la série des nombres entiers positifs ν, N la série des nombres entiers positifs pairs 2ν; N est alors une partie intégrante de M et néanmoins M et N sont de même puissance.

La série des nombres entiers positifs ν offre, comme il est facile de le montrer, la *plus petite* de toutes les puissances qui se présentent dans les *ensembles infinis.* Néanmoins la *classe* des ensembles qui ont cette plus petite puissance est *extraordinairement riche* et *étendue.* A cette classe appartiennent, par exemple, tous les ensembles que M. DEDEKIND appelle »corps finis» dans ses belles recherches sur les nombres algébriques (cf. leçons de DIRICHLET sur la théorie des nombres, deux. où troisième édit. Brunswick 1871 et 1879); de même les ensembles que j'ai considérés et que j'ai appelés »systèmes de points de la $\nu^{\text{ème}}$ espèce» (cf. Mathematische Annalen de CLEBSCH et NEUMANN, t. V, p. 129) sont de la *première* (c. a. d. de la plus petite) puissance.

Chaque ensemble se présentant comme série simplement infinie, avec le terme général a_ν, appartient évidemment à cette même *classe*; mais deplus les séries doubles et en général les séries n^{iples} avec le terme général $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n}$ (où $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ parcourent indépendamment l'un de l'autre tous les nombres entiers positifs) appartiennent aussi à cette classe. J'ai même démontré que l'ensemble (ω) de tous les nombres algébriques réels (et on pourrait ajouter: de tous les nombres algébriques complexes) peut se concevoir sous la forme d'une série avec le terme général ω_ν; c'est à dire que l'ensemble (ω), aussi bien que chacune de ses parties intégrantes infinies, a la *puissance* de la série de nombres entiers $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ (Conf. Journal de Borchardt, t. 77, pag. 258). A l'égard des *ensembles* de cette *première classe*, on a les théorèmes suivants, faciles à démontrer:

»M étant un ensemble de la *première* classe (c. a. d. de la *puissance* de la série des nombres entiers positifs), chaque partie intégrante infinie de M a la même puissance.»

»M', M'', M''' .... étant une série finie ou simplement infinie *d'ensembles,* dont chacun a la *première* puissance, l'ensemble M, qui resulte de la réunion de M', M'', M''' ...., a aussi la *première puissance.*»

Nous allons maintenant dans ce qui va suivre examiner au point de vue de leur puissance les *ensembles* qu'on appelle continus et n^{iples}. D'après un théorème, que j'ai démontré dans le § 2 du traité cité (Jour. d. Borchardt, t. 77, pag. 260) il est certain, que ces ensembles n'appartiennent pas à la première classe, c. a. d. qu'ils ont une puissance supérieure à la première.

Les recherches de RIEMANN, de HELMHOLTZ et d'autres après eux sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, partent, comme on sait, de la notion d'un *ensemble continu,* d'étendue n, et en font consister le *caractère essentiel* en ce que leurs éléments dépendent de n variables réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre, en sorte qu'à chaque élément de *l'ensemble* appartient un système de valeurs $x_1, x_2, \ldots . x_n$ admissible, et réciproquement à chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots . x_n$ admissible appartient un certain élément de *l'ensemble.*

Le plus souvent, comme il résulte de la *suite* de ces recherches, on suppose en outre *tacitement* que la correspondance des éléments de *l'ensemble* et du système de valeurs $x_1, x_2, \ldots . x_n$ posée comme base, est *continue,* en sorte qu'à chaque changement infiniment petit du système de valeurs $x_1, x_2, \ldots . x_n$ répond un changement infiniment petit de l'élément correspondant de *l'ensemble* et réciproquement, à chaque changement infiniment petit des éléments de *l'ensemble,* un changement semblable des valeurs de ses *coordonnées.*

Quant à savoir si cette supposition suffit, ou s'il faut la compléter par des conditions encore plus spéciales, pour pouvoir regarder comme *bien fondée* et *incontestable* l'idée que ces auteurs se sont faite de l'ensemble n^{iple} et continu, c'est une question que nous passerons d'abord sous silence([1]); nous avons seulement à montrer ici, que si on laisse cette supposition de côté, (ce qui arrive bien souvent dans les traités de ces auteurs), c. a. d.

([1]) La réponse à cette question à laquelle nous reviendrons dans une autre circonstance, ne me paraît donner lieu, à aucune difficulté sérieuse.

si par rapport à la correspondance entre *l'ensemble* et ses *coordonnées* on n'admet *aucune limitation*, ce caractère, considéré par les auteurs comme *essentiel* (d'après lequel un ensemble n^{iple} continue est telle qu'on peut en déterminer les éléments par n coordonnées réelles, continues, indépendantes l'une de l'autre) devient *absolument sans valeur.*

Comme notre travail le montrera, on peut même déterminer les éléments d'un *ensemble continu* d'étendue n par une *seule* coordonnée réelle et continue au moyen d'une opération à sens *unique.* Il suit de là, que si on ne fait aucune supposition par rapport à la *nature* de là *correspondance,* le *nombre* des coordonnées réelles continues et indépendantes qui peuvent servir à la détermination à sens unique des éléments d'un *ensemble continu d'étendue n,* peut être *tout nombre donnée m* et que par conséquent *on ne peut* le considérer comme *caractère invariable* d'un ensemble donné.

En me posant la question de savoir si un ensemble continu de n dimensions peut être reliée au moyen d'une opération à sens unique à un ensemble continu d'une *seule* dimension, de telle sorte qu'à chaque élément de l'une d'elles réponde un élément, et un seulement, de l'autre, il s'est trouvé *qu'une telle correspondance existe toujours.*

D'après cela une *surface continue* peut *être rapportée complètement par une opération à sens unique à une ligne continue; la même chose est vraie des corps continus et des ensembles continus géométriques à un nombre quelconque de dimensions.*

En appliquant l'expression introduite plus haut, nous pouvons donc dire que la *puissance* d'un *ensemble continu* d'étendue n et choisi à volonté est *égale* à la *puissance* d'un *ensemble* d'étendue *simple,* comme p. ex. d'un *segment de droite continue et limitée.*

§ 1.

Comme deux *ensembles continus,* d'un nombre *égal* de dimensions, peuvent, au moyen de fonctions analytiques, se rapporter l'une à l'autre complètement et à sens unique, par rapport au but que nous poursuivons (et qui est de montrer qu'on peut joindre d'une façon complète et à sens unique des ensembles continues qui n'ont pas le même nombre de dimensions) tout se ramène, comme on l'entrevoit facilement, à la démonstration du théorème suivant:

(A). »*Soient* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *n grandeurs réelles, variables, indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *et soit t une autre variable comprise dans les mêmes limites* $(0 \leqq t \leqq 1)$, *on peut faire correspondre cette grandeur t au système des n grandeurs* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *de telle sorte qu'à chaque valeur déterminée de t appartienne un système de valeurs déterminées* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *et vice versa à chaque système de valeurs déterminées* $x_1, x_2, \ldots . x_n$ *une certaine valeur de t.*»

Comme conséquence de ce théorème se présente cet autre que nous avons en vue:

(B). »*On peut faire correspondre d'une façon complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension; deux ensembles continus l'une de n, l'autre de m dimensions, n étant* $\gtreqless m$, *ont la même puissance; les éléments d'un ensemble continu à n dimensions peuvent être déterminés à sens unique par une seule coordonnée t continue et réelle; mais ils peuvent aussi être déterminés à sens unique par un système de m coordonnées continues* $t_1, t_2, \ldots . t_m$.»

§ 2.

Pour démontrer (A) nous partons de ce théorème connu que tout nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$ peut être représenté d'une manière complètement déterminée, sous la forme d'une fraction continue infinie:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_\nu, \ldots .)$$

où les α_ν sont des nombres positifs entiers rationnels.

A chaque nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$ appartient une série déterminée infinie de nombres entiers positifs α_ν et réciproquement chaque série semblable détermine un certain nombre *irrationnel* $e \gtrless {}^0_1$.

Soient maintenant $e_1, e_2, \ldots. e_n$ n grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots. 1)$, qu'on pose alors:

$$\begin{array}{l} e_1 = (\alpha_{1,1},\ \alpha_{1,2},\ \ldots.\ \alpha_{1,\nu},\ \ldots.) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\mu = (\alpha_{\mu,1},\ \alpha_{\mu,2},\ \ldots.\ \alpha_{\mu,\nu},\ \ldots.) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = (\alpha_{n,1},\ \alpha_{n,2},\ \ldots.\ \alpha_{n,\nu},\ \ldots.) \end{array}$$

ces n nombres irrationnels déterminent à sens unique un $\overline{n+1}^{\text{ème}}$ nombre irrationnel $d \gtrless {}^0_1$:

$$d = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots.\ \beta_\nu,\ \ldots.),$$

si on établit entre les nombres α et β le rapport suivant:

$$(1) \qquad \beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \qquad \left\{\begin{array}{l} \mu = 1,\ 2,\ \ldots.\ n \\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots.\ \infty \end{array}\right.$$

Mais aussi de l'autre côté si on part d'un nombre irrationnel $d \gtrless {}^0_1$, il détermine la série des β_ν et au moyen de (1) les séries des $\alpha_{\mu,\nu}$; par conséquent d détermine complètement et à sens unique le système des n nombres irrationnels $e_1, e_2, \ldots. e_n$. De cette considération résulte tout d'abord le théorème suivant:

(C). »*Soient* $e_1, e_2, \ldots. e_n$ n *grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots. 1)$ *et soit* d *une autre variable irrationnelle dans les même limites, on peut faire correspondre d'une manière complète et à sens unique cette grandeur* d *et le système des* n *grandeurs* $e_1, e_2, \ldots. e_n$.»

§ 3.

Après avoir démontré, dans le paragraphe précédent, le théorème (C), nous avons maintenant à démontrer le théorème suivant:

(D). »*Une grandeur variable* e, *qui peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots. 1)$, *peut se joindre à sens unique à une variable* x *comportant toutes les valeurs réelles, c. a. d. rationnelles et irrationnels, qui sont* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *en sorte qu'à chaque valeur irrationnelle* *de* $e \gtrless {}^{0}_{1}$ *corresponde une valeur réelle de* $x \gtreqless {}^{0}_{1}$ *et une seulement et que réciproquement à chaque valeur réelle de* x *corresponde une certaine valeur irrationnelle de* e.»

Car une fois ce théorème démontré, qu'on se représente (en l'appliquant), comme correspondantes aux $n+1$ grandeurs variables désignées dans le § 2 par $e_1, e_2, \ldots . e_n$ et d, les autres variables $x_1, x_2, \ldots . x_n$ et t, reliées aux premières par une opération à sens unique, chacune des dernières variables pouvant prendre sans restriction toutes les valeurs réelles $\geqq 0$ et $\leqq 1$. Comme nous avons établi une correspondance complète et à sens unique entre la variable d et le système des n variables $e_1, e_2, \ldots . e_n$ dans § 2, on obtient de cette manière une association complète, déterminée et à sens unique de la variable continue t et du système des n variables continues $x_1, x_2, \ldots . x_n$, ce qui démontrera la vérité du théorème (A).

Nous n'aurons donc plus à nous occuper dans la suite que de la démonstration du théorème (D); qu'on nous permette d'employer, pour plus de brièveté, un formalisme simple que nous allons d'abord faire connaître.

Nous appellerons *ensemble linéaire* de nombres réels tout ensemble bien définie de nombres réels, distincts les uns des autres, c. a. d. inégaux en sorte qu'un seul et même nombre ne se présente pas plus d'une fois comme élément dans un *ensemble linéaire.*

Les variables réelles, qui se présentent dans le cours de ce travail, sont toutes de telle nature que le *champ* de chacune d'elles, c. a. d. l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est un *ensemble linéaire* donné; nous n'appuierons donc plus dans la suite sur cette supposition que partout nous ferons tacitement.

De deux variables de cette nature a et b nous dirons qu'elles n'ont aucune liaison, si aucune des valeurs que peut prendre a n'est égale à une valeur de b c. a. d. les deux ensembles de valeurs que peuvent prendre les variables a et b, n'ont pas d'éléments communs, si on dit que a et b sont sans liaison.(1)

(1) Deux ensembles M et N ou bien n'ont aucune liaison, si elles n'ont aucun élément qui leur soit commun; ou bien elles sont reliées par un troisième ensemble déterminé P c. a. d. par l'ensemble de leurs éléments communs. Je désigne l'ensemble P par $\mathfrak{D}(M, N)$.

Si on a une série finie ou infinie a', a'', a''', ... $a^{(\nu)}$, ... de variables bien définies ou de constantes telles que $a^{(\nu)}$ et $a^{(\mu)}$ n'ont aucune liaison entre eux, on peut définir une variable a par ce caractère que son champ se compose de l'ensemble des champs de a', a'', ... $a^{(\nu)}$, ...; réciproquement une variable donnée a peut se décomposer d'après les modes les plus divers en d'autres a', a'', ... qui n'ont aucune liaison deux à deux; dans ces deux cas nous exprimons le rapport de la variable a aux variables a', a'', ... $a^{(\nu)}$, ... par la formule suivante:

$$a \equiv \{a', \ a'', \ \ldots., \ a^{(\nu)}, \ \ldots.\}$$

Cette formule exprime à la fois 1° que toute valeur que pourrait prendre une des variables $a^{(\nu)}$ est aussi une valeur qui convient à la variable a; 2° que toute valeur que peut recevoir a peut être prise aussi par une des grandeurs $a^{(\nu)}$, et par une seulement. Pour expliquer cette formule, soit par exemple φ une variable qui peut prendre toutes les valeurs rationnelles $\geqq 0$ et $\leqq 1$, e une variable qui peut prendre toutes les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots. 1)$ et enfin x une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles, rationnelles et irrationnelles $\geqq 0$ et $\leqq 1$, on a:

$$x \equiv \{\varphi, \ e\}$$

Soit a et b deux grandeurs variables de telle nature qu'on puisse les joindre l'une à l'autre d'une façon complète et à sens unique, en d'autres termes si le champ de l'une et de l'autre a la même puissance, nous appellerons a et b équivalentes l'un à l'autre et nous l'exprimerons par une des deux formules $a \sim b$ ou $b \sim a$. D'après cette définition de l'équivalence de deux grandeurs variables il suit immédiatement que $a \sim a$; et que, si $a \sim b$ et $b \sim c$, on a toujours aussi $a \sim c$.

Dans la suite du travail le théorème ci-dessous dont nous pouvons omettre la démonstration à cause de sa simplicité, trouvera son application en divers endroits:

(E). »*Soit* a', a'', ... $a^{(\nu)}$ *une série finie ou infinie de variables ou de constantes qui n'ont aucune liaison deux à deux,* b', b'', ... $b^{(\nu)}$, ... *une autre série de la même nature, si à chaque variable* $a^{(\nu)}$ *de la première série répond une variable déterminée* $b^{(\nu)}$ *de la seconde et si ces variables corres-*

pondantes sont constamment équivalentes l'une à l'autre, c. a. d. que $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, *on aura toujours aussi:* $a \sim b$,
si

$$a \equiv \{a',\ a'',\ \ldots\ a^{(\nu)},\ \ldots\}$$

et

$$b \equiv \{b',\ b'',\ \ldots\ b^{(\nu)},\ \ldots\}»$$

§ 4.

Au point où nous en sommes arrivés de notre travail, il n'y a plus qu'à démontrer le théorème (D) dans § 3. Pour cela prenons comme point de départ qu'on peut écrire tous les nombres rationnels qui sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$, sous la forme d'une série simplement infinie:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ \varphi_\nu,\ \ldots$$

avec un terme général φ_ν.

On peut le prouver de la façon la plus simple, comme il suit: $\frac{p}{q}$ étant la forme irréductible pour un nombre rationnel $\geqq 0$ et $\leqq 1$, où par conséquent p et q sont des nombres entiers non négatifs avec le plus grand commun diviseur 1, qu'on pose $p + q = N$. Dès lors à chaque nombre $\frac{p}{q}$ appartient une valeur déterminée, entière et positive de N, et réciproquement à cette valeur de N appartient toujours un *nombre fini* de quantités $\frac{p}{q}$. Si on imagine maintenant les nombres $\frac{p}{q}$ rangés dans ordre tel que ceux qui appartiennent à des valeurs plus petites de N précèdent ceux pour lesquels N a une valeur plus grande, et que de plus les nombres $\frac{p}{q}$, pour lesquels N a la même valeur se suivent les uns les autres par ordre de grandeur, les plus grands après les plus petites, chacun des nombres $\frac{p}{q}$ vient occuper une place parfaitement déterminée dans une série simplement infinie, dont le terme général sera désigné par φ_ν. Mais cette proposition peut aussi se tirer comme conclusion de ce j'ai dit ailleurs, que l'ensemble (ω) de tous les nombres réelles algébriques peut se mettre sous la forme d'une série infinie:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots . \omega_\nu, \ldots .$$

avec le terme général ω_ν; cette propriété de l'ensemble (ω) se transmet en effet à l'ensemble de tous les nombres rationnels $\geqq 0$ et $\leqq 1$, parce que cet dernier ensemble est une partie intégrante du premier (ω).

Soit maintenant e la variable quise présente dans le théorème (D) et qui peut prendre toutes les valeurs numériques réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des nombres φ_ν.

Qu'on prenne ensuite dans l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ une série quelconque infinie de nombres ε_ν *irrationnels* et soumise aux conditions qu'en général on a $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ et que $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$; soit par exemple:

$$\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}.$$

Qu'on désigne par f une variable, qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des valeurs ε_ν, par g une autre variable, qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, à l'exception des ε_ν et des φ_ν.

Nous disons que:

$$e \sim f.$$

En effet d'après la notation du § 3 on a:

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\}$$

et:

$$f \equiv \{g, \varphi_\nu\}.$$

Mais on a: $g \sim g$; $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$; nous concluons donc d'après (E) que $e \sim f$.

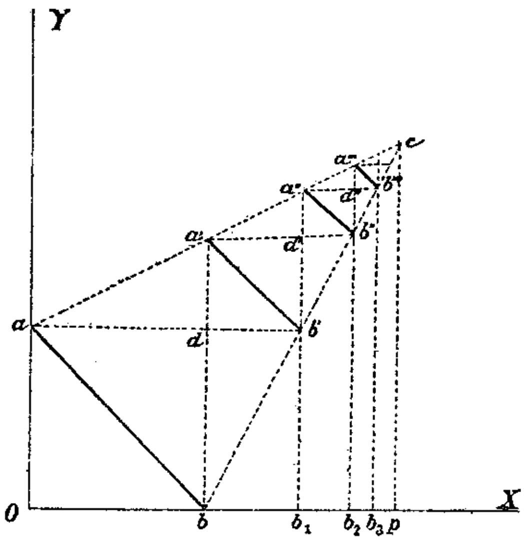
Le théorème à démontrer (D) est donc ramené au théorème suivant:

(F). »*Une variable f qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$, *à l'exception des valeurs d'une série donnée* ε_ν, *soumise aux conditions que* $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ *et que* $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$, *peut se joindre d'une façon complète et à sens unique à une variable x qui peut prendre toutes les valeurs* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$; *en d'autres termes, on a* $f \sim x$.»

§ 5.

Nous appuyons la démonstration de (F) sur les théorèmes suivants (G), (H), (J):

(G). »*Soit y une variable, qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *à l'exception seulement de* 0, *x une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \ldots . 1)$ *sans exception, on a:* $y \sim x$.»



La démonstration de ce théorème (G) se fait de la manière la plus simple en considérant la courbe ci-contre, dont les abscisses à partir de 0 représentent la grandeur x, et les ordonnées la grandeur y. Cette courbe est composée d'un nombre infini de segments de droites $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, ... $\overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}}$, ... (qui sont parallèles entre eux et deviennent infiniment petits quand ν croît à l'infini) et du point isolé c, dont ces segments se rapprochent asymptotiquement. Mais les points extrêmes a, a', ... $a^{(\nu)}$ devant être considérées comme faisant partie de la courbe, au contraire les points extrêmes b, b', ... $b^{(\nu)}$, ... doivent être regardés comme en dehors de cette courbe. Les longueurs représentées dans la figure sont:

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1; \ \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \frac{1}{2};$$

$$\overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_{\nu}} = \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

On se convainc que, tandis que l'abscisse x prend toutes les valeurs de 0 à 1, l'ordonnée y les prend aussi toutes, à l'exception seulement de la valeur 0.

Le théorème (G) étant ainsi démontré, on obtient en appliquant les formules de transformation: $y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$; $x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}$, la généralisation de (G):

(H). »*Une variable z, qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$, *où* $\alpha \gtrless \beta$, *à l'exception de la seule valeur* α, *est équivalente à une variable u qui peut prendre toutes les valeurs du même intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$ *sans exception.*»

De là nous arrivons immédiatement au théorème suivant:

(J). »*ω étant une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle* $(\alpha \ldots . \beta)$ *à l'exception des deux valeurs extrêmes α et β, u étant la même variable que dans* (H), *on a* $\omega \sim u$.»

En effet: soit γ une valeur quelconque entre α et β; qu'on introduise comme auxiliaires quatre nouvelles variables ω', ω'', u'' et z.

Supposons que z soit la même variable que dans (H), que ω' prenne toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \ldots . \gamma)$ à l'exception des deux valeurs extrêmes α et γ; qu'on donne à ω'' toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots . \beta)$ à l'exception de la seule valeur extrême β; soit enfin u'' une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \ldots . \beta)$ y compris les valeurs extrêmes.

On a alors:

$$\omega \equiv \{\omega', \omega''\}$$

$$z \equiv \{\omega', u''\}$$

Mais par suite de (H) on a $\omega'' \sim u''$; nous concluons donc que $\omega \sim z$. Mais d'après (H) on a aussi: $z \sim u$; par conséquent on a encore: $\omega \sim u$, ce qui démontre le théorème (J).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème (F) comme il suit:

En renvoyant à la signification des variables f et x dans l'enoncée de (F), nous introduisons certaines variables auxiliaires:

$$f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots .$$

et

$$x'', x^{IV}, \ldots . x^{(2\nu)} \ldots .$$

Soient: f' une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots . \varepsilon_1)$ à l'exception de la seule valeur extrême ε_1; $f^{(\nu)}$ pour $\nu > 1$ une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots . \varepsilon_\nu)$ à l'exception des deux valeurs extrêmes $\varepsilon_{\nu-1}$ et ε_ν; $x^{(2\nu)}$ une variable qui comporte toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots . \varepsilon_{2\nu})$ sans exception.

Si on joint encore aux variables $f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots .$ la quantité constante 1, toutes ces grandeurs prises ensemble ont le même champ que f, c. a. d. qu'on a:

$$f \equiv \{f', f'', \ldots . f^{(\nu)}, \ldots . 1\}$$

De même on se convainc que:

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{\mathrm{IV}}, \ldots . f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \ldots . 1\}$$

Mais par suite du théorème (J) on a:

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}; \text{ puis: } f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}; \ 1 \sim 1;$$

d'où à cause du théorème (E) § 3:

$$f \sim x.$$

§ 6.

Je vais maintenant donner une démonstration beaucoup plus courte pour le théorème (D); si je ne me suis pas borné à celle-là, cela est venu de ce que les théorèmes auxiliaires (F), (G), (H), (I), qui ont servi à une démonstration plus compliquée, ont de l'intérêt en eux-mêmes. — Nous désignons par x, comme plus haut, une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$, y compris les valeurs extrêmes; soit e une variable qui ne comporte que les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$; il faut démontrer que $x \sim e$.

Nous nous représentons, comme dans § 4, les nombres rationnels $\geqq 0$ et $\leqq 1$ sous forme de série, avec le terme général φ_ν, où ν a à parcourir la série des nombres $1, 2, 3, \ldots .$ Nous prenons ensuite dans l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ une série infinie quelconque de nombres irrationnels distincts entre eux; soit η_ν le terme général de cette série $\left(\text{p. ex: } \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$

Qu'on désigne par h une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \ldots . 1)$ à l'exception des φ_ν aussi bien que des η_ν.

D'après le formalisme adoptée dans § 3 on a alors:

$$x \equiv \{h, \eta_\nu, \varphi_\nu\} \tag{1}$$

et

$$e \equiv \{h, \eta_\nu\}$$

Nous pouvons aussi écrire la dernière formule comme il suit:

$$e \equiv \{h, \eta_{2\nu-1}, \eta_{2\nu}\} \tag{2}$$

Si maintenant nous remarquons que:

$$h \sim h; \ \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}; \ \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu}$$

et si nous appliquons aux deux formules (1) et (2) le théorème (E) § 3, nous obtenons $x \sim e$; c. q. f. d.

§ 7.

La pensée viendrait naturellement de choisir, pour la démonstration de (A) la forme de représentation des fractions *décimales* infinies au lieu des fractions *continues* que nous avons employées; il semblerait que cette méthode nous aurait conduit plus promptement au but; mais au contraire elle entraine avec elle une difficulté sur laquelle je veux attirer l'attention ici; et c'est la raison qui m'a fait renoncer dans ce travail à l'emploi des fractions décimales.

Si on a p. ex. deux variables x_1 et x_2 et qu'on pose:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots . + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \ldots .$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots . + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \ldots .$$

en supposant que les nombres α_ν, β_ν deviennent des nombres entiers $\geqq 0$ et $\leqq 9$ et ne prennent pas constamment, à partir d'un certain ν, la valeur 0 (excepté lorsque x_1 ou x_2 est égal à 0), ces expressions de x_1, x_2 seront déterminées, dans tous les cas avec une signification unique, c. a. d. x_1 et x_2 déterminent les séries infinies de nombres α_ν et β_ν, et réciproquement.

Si maintenant on tire de x_1 et x_2 un nombre:

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \dots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \dots$$

en posant:

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu;\ \gamma_{2\nu} = \beta_\nu$$

pour

$$\nu = 1,\ 2,\ \dots \infty$$

il s'établit un rapport à sens unique entre le système x_1, x_2 et la variable t; car un seul système de valeurs x_1, x_2 conduit à une valeur donnée de t. Mais la variable t, et c'est la particularité à remarquer ici, *ne prend pas toutes les valeurs de l'intervalle* $(0 \dots 1)$, elle a une variabilité restreinte, tandis que x_1 et x_2 ne sont soumis à aucune restriction dans ce même intervalle. En effet, toutes les valeurs de la somme de la série:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \dots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \dots,$$

où, à partir d'un certain $\nu > 1$, tous les $\gamma_{2\nu-1}$ ou tous $\gamma_{2\nu}$ ont la valeur zéro, doivent être considérées comme au dehors des limites de variabilité de t, parce qu'elles ramèneraient à des représentations, par fractions décimales, de x_1 ou x_2, qui sont finies et par conséquent inadmissibles.

§ 8.

Le travail que nous avions en vue étant terminé dans les paragraphes précédents, quelques remarques plus générales pourront trouver place ici, comme conclusion.

Le principe (A) et par suite le principe (B) peuvent être généralisés, de sorte que des *ensembles continus* d'un nombre *infiniment grand de dimensions ont la même puissance que les ensembles continus d'une seule dimension; toutefois cette géneralisation est essentiellement liée à l'hypothèse que les dimensions infiniment nombreuses forment elles-mêmes un ensemble de la première classe ou puissance.* Au lieu du théorème (A) on a le suivant:

(A'). »*Soit* $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, *une série simplement infinie de grandeurs variables, réelles, indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs* $\geqq 0$ *et* $\leqq 1$, *et soit* t *une autre variable avec les mêmes limites* $(0 \leqq t \leqq 1)$, *on peut faire correspondre par une opération à sens unique cette grandeur* t *au système des* $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \ldots$, *qui sont en nombre infini.*»

Ce théorème (A') se ramène, à l'aide du théorème (D) § 3, au suivant:

(C'). »*Soit* $e_1, e_2, \ldots e_\mu, \ldots$ *une série infinie de grandeurs variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle* $(0 \ldots 1)$ *et soit* d *une autre variable irrationnelle avec les mêmes limites, on peut joindre cette grandeur* d *par une opération à sens unique au système des grandeurs en nombre infini:* $e_1, e_2, \ldots e_\mu, \ldots$»

La démonstration de (C') se fait de la manière la plus simple, en appliquant le développement de la fraction continue et en posant, comme dans § 2:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots \alpha_{\mu,\nu}, \ldots)$$

pour $\mu = 1, 2, \ldots \infty$

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\lambda, \ldots)$$

et en établissant entre les nombres entiers positifs α et β le rapport:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

où:

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}.$$

En effet la fonction $\mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$, comme il est facile de le montrer, jouit de cette propriété remarquable de représenter tous les nombres entiers positifs, et chacun d'eux une fois seulement, quand μ et ν y prennent également, indépendamment l'un de l'autre toutes les valeurs positives entières.

Le théorème (A') paraît indiquer le terme jusqu'à quel on peut généraliser le théorème (A) et les conséquences qui en découlent. Et maintenant que nous avons ainsi démontré, pour un champ extraordinairement riche et étendu *d'ensembles*, la propriété de pouvoir se joindre à sens complet et unique à une droite continue ou à une partie de cette droite (en entendant par *parties d'une ligne tous les ensembles de points qui y sont contenus*) la question se pose de savoir comment se comportent, *au point de vue de leur puissance,* les différentes parties d'une ligne droite continue c. a. d. les différents ensembles de points qu'on y peut imaginer en nombre infini.

Si nous dépouillons ce problème de sa forme géométrique et si, comme il a déjà été expliqué au § 3, nous entendons par *ensemble linéaire de nombres réels* tout ensemble imaginable de quantités réelles distinctes entre elles et en nombre infini, la question se pose ainsi: *en quelles classes se devisent les ensembles linéaires, et quel est le nombre de ces classes, si on groupe dans des classes différentes les ensembles de différente puissance, et dans la même les ensembles de même puissance?* Par un procédé d'induction, dans la description duquel nous n'entrerons pas davantage, on est amené à ce théorème, que le nombre des classes d'ensembles obtenus d'après ce mode de groupement est un nombre fini et qu'il est égal à *deux*.

D'après cela les ensembles linéaires comprendraient deux classes([1]) dont la *première* contient tous les ensembles susceptibles d'être ramenés à la forme: *functio ipsius* ν (où ν parcourt tous les nombres entiers positifs); tandis que la *seconde* classe embrasse tous les ensembles reductibles à la forme: *functio ipsius* x (où x peut prendre toutes les valeurs réelles $\geqq 0$ et $\leqq 1$).

([1]) Que ces deux classes soient distinctes en réalité, c'est la conséquence immédiate du théorème démontré dans le § 2 du travail cité plus haut (Journ. d. Math. pures et appliquées t. 77, p. 260), d'après lequel, si on a une série régulière infinie $u_1, u_2, \dots u_\nu, \dots$ on peut toujours trouver dans chaque intervalle donné $(\alpha \dots\dots \beta)$ des nombres v qui ne se présentent pas dans la série proposée.

Il n'y aurait donc dans les ensembles linéaires infinies, et par conséquent aussi dans tous les autres qui s'y ramènent par une opération à sens complet et unique, que *deux espèces* de *puissances,* répondant à ces deux classes; nous remettons à plus tard la solution exacte de cette question.

Halle a. S. 11 Juillet 1877.

SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. IV pag. 139).

Dans le 72[ième] tome du Journ. de M. Borchardt je démontre un théorème ayant pour objet le décroissement des coefficients de séries trigonométriques sous certaines conditions. Dans ce qui suit je voudrais en développer la démonstration d'une manière, qui ne laisse rien à désirer par rapport à la clarté et la simplicité. C'est du dernier des théorèmes proposés ici, qu'il est question, les autres me serviront comme préparatoires.

I. *Soit:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$$

une série infinie de quantités positives, soumises aux conditions:

$$x_2 \geqq kx_1, \ x_3 \geqq k^2x_2, \ \ldots, \ x_\nu \geqq k^{\nu-1}x_{\nu-1}, \ \ldots$$

où k est une donnée positive plus grande que 1, il y a toujours des nombres réels Ω, qui ont un tel rapport avec la série donnée, que le produit $x_\nu\Omega$ diffère d'un nombre impair $2y_\nu + 1$ d'une quantité θ_ν, qui devient infiniment petite lorsque ν croît infiniment; et même la quantité Ω peut être prise dans un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ proposé d'avance à volonté.

Démonstration. Je désigne la grandeur de l'intervalle proposé $(\alpha \ldots \beta)$ par i et je suppose α et β positives toutes les deux, et on peut ramener les autres cas à celui-là. Qu'on divise l'intervalle en trois parties égales; les points de division étant γ et δ, on a:

$$\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{i}{3}.$$

Soit x_n la première des quantités infiniment croissantes x_ν, qui est plus grande que les deux quantités données $\frac{3}{(k-1)i}$ et $\frac{6}{i}$.

Prenons d'abord le nombre impair $2y_n + 1$ tel, que la fraction $\frac{2y_n+1}{x_n}$ tombe dans l'intervalle $\gamma\delta$; ce qui se peut, puisque $x_n > \frac{6}{i}$.

Puis déterminons les nombres impairs $2y_{n+1} + 1$, $2y_{n+2} + 1$, ... tels que:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &\left[2y_{n+1} + 1 - (2y_n + 1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right] \leqq 1 \\ &\left[2y_{n+2} + 1 - (2y_{n+1} + 1)\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right] \leqq 1 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left[2y_\nu + 1 - (2y_{\nu-1} + 1)\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}}\right] \leqq 1 \end{aligned}$$

A ces conditions je joins, pour faire disparaître toute ambiguité, la règle, qu'on prenne le plus petit toutes les fois qu'il y a deux nombres $2y_\nu + 1$, qui s'accommodent à la condition (A); on a alors une série complètement déterminée de nombres impairs $2y_\nu + 1$, pour $\nu \geqq n$; quant aux nombres $2y_\nu + 1$ pour $\nu < n$, nous pouvons les prendre à volonté.

Les nombres x_ν et y_ν déterminent maintenant une série infinie:

$$\text{(B)} \qquad \frac{2y_1+1}{x_1}, \quad \frac{2y_2+1}{x_2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{2y_\nu+1}{x_\nu}, \quad \ldots\ldots$$

dont le terme général s'approche infiniment d'une limite, que je nomme Ω.

En effet d'après les conditions (A) on a:

$$\left[\frac{2y_{\nu+\mu}+1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu+1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{x_{\nu+1}} + \ldots\ldots$$

et puisque la somme à droite devient infiniment petite en faisant croître ν, la même chose a lieu par rapport à la différence $\frac{2y_{\nu+\mu}+1}{x_{\nu+\mu}} - \frac{2y_\nu+1}{x_\nu}$

dans laquelle le nombre μ peut être pris à volonté. Mais on sait que cette condition étant remplie, la limite $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{2y_\nu + 1}{x_\nu}$ existe toujours. C'est cette limite que nous nommons Ω.

Des conditions (A) pour $\nu \geqq n$ on tire pour Ω la relation:

$$\left[\Omega - \frac{2y_\nu + 1}{x_\nu}\right] \leqq \frac{1}{x_{\nu+1}} + \frac{1}{x_{\nu+2}} + \dots$$

où:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} + \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \cdot \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} + \dots$$

Mais on a:

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} \leqq \frac{1}{k^\nu}, \quad \frac{x_{\nu+1}}{x_{\nu+2}} \leqq \frac{1}{k^{\nu+1}}, \quad \dots$$

On a donc aussi:

$$[\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] \leqq \frac{1}{k^\nu} + \frac{1}{k^{2\nu+1}} + \frac{1}{k^{3\nu+3}} + \dots$$

et à plus forte raison:

$$\text{(C)} \qquad [\Omega x_\nu - (2y_\nu + 1)] < \frac{1}{k^\nu - 1};$$

k étant > 1 on voit par là que la différence:

$$\theta_\nu = x_\nu \Omega - (2y_\nu + 1)$$

a pour limite zéro pour $\nu = \infty$. Donc la première partie de notre théorème est démontrée.

Il reste à faire voir, que le nombre trouvé Ω se trouve dans l'intervalle donné $(\alpha \dots \beta)$; cela résulte aussi de (C), en y faisant $\nu = n$; on a alors:

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k^n - 1)}$$

et à plus forte raison

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{1}{x_n(k - 1)}.$$

Mais nous avions pris x_n tel que $\frac{1}{x_n(k-1)} < \frac{i}{3}$; on a donc aussi:

$$\left[\Omega - \frac{2y_n + 1}{x_n}\right] < \frac{i}{3}$$

La fraction $\frac{2y_n + 1}{x_n}$ étant située dans l'intervalle $\gamma\delta$, la dernière relation montre que Ω est situé dans l'intervalle $(\alpha \ldots . \beta)$.

II. *Une série de nombres réels:*

$$c_1, c_2, \ldots . c_\nu, \ldots .$$

étant telle, que de chaque série y contenue:

$$c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots . c_{n_\nu}, \ldots .$$

l'on peut toujours enlever une troisième:

$$c_{n_{m_1}}, c_{n_{m_2}}, \ldots . c_{n_{m_\nu}}, \ldots .,$$

dont le terme général $c_{n_{m_\nu}}$ *devient infiniment petit pour* $\nu = \infty$, *on a toujours:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$$

Démonstration. En considérant une quantité positive ε quelconque, je dis que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands que ε, par rapport à leur valeur absolue, doit être *fini*; car s'il était infini il y aurait une série infinie c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, dont tous les termes seraient plus grands que ε; on ne pourrait donc pas en enlever une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, dont les termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, ce qui est contre l'hypothèse.

Il est donc clair que le nombre des termes c_ν, qui sont plus grands qu'une quantité ε, si petite qu'elle soit, est *fini*; mais de là on conclut évidemment que $\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$.

III. *Lorsque pour chaque valeur de x entre zéro et* $\frac{i}{2}$ *(i etant une quantité donnée positive) on a:*

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0,$$

on a toujours aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit. c_{n_ν} une série quelconque contenue dans la série c_ν; je ferai voir, qu'il y en a toujours une troisième $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans c_{n_ν} et telle, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0$$

Pour cela j'enlève de la série c_{n_ν} donnée l'autre $c_{n_{m_\nu}}$ à condition, que, le nombre k étant donné et > 1, on ait pour chaque valeur de ν:

$$n_{m_\nu} \geqq k^{\nu-1} n_{m_{\nu-1}}.$$

Il est clair, que cela se peut de diverses manières; prenons-en une déterminée. La série d'indices n_{m_ν} étant prise de sorte qu'on détermine d'après I une quantité Ω, située dans l'intervalle $\left(0 \ldots . \frac{i}{\pi}\right)$, et telle, que l'on ait:

$$\Omega n_{m_\nu} - (2y_\nu + 1) = \theta_\nu$$

où y_ν est entier et θ_ν devient infiniment petite pour $\nu = \infty$.

Alors la quantité $\Omega' = \Omega \frac{\pi}{2}$ est située dans l'intervalle $\left(0 \ldots . \frac{i}{2}\right)$ et l'on a:

$$\Omega' n_{m_\nu} - \frac{\pi}{2}(2y_\nu + 1) = \frac{\pi}{2}\theta_\nu.$$

D'après l'hypothèse, faite dans notre théorème, en l'appuyant sur le nombre $x = \Omega'$, on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin(\nu\Omega') = 0$$

De là on peut conclure, qu'aussi:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} \sin(n_{m_\nu}\Omega') = 0.$$

Mais on a: $\sin(n_{m_\nu}\Omega') = \pm \cos\frac{\pi}{2}\theta_\nu$, d'où l'on voit que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\theta_\nu\right) = 0.$$

θ_ν étant une quantité qui disparait pour $\nu = \infty$, on conclut que:

$$\lim_{\nu=\infty} c_{n_{m_\nu}} = 0.$$

Il y a donc dans chaque série c_{n_ν}, contenue dans la première c_ν, une troisième série $c_{n_{m_\nu}}$, contenue dans la seconde, telle que ses termes deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$. D'après le théorème II, on a donc de même:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

IV. *Lorsque pour chaque valeur de x comprise dans un intervalle donné* $(\alpha \ldots . \beta)$, *la condition:*

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x) = 0$$

est remplie, on a toujours:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0.$$

Démonstration. Soit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ et } [\beta - \alpha] = i$$

Posons:

$$a_\nu \cos \nu\gamma - b_\nu \sin \nu\gamma = c_\nu$$

$$a_\nu \sin \nu\gamma + b_\nu \cos \nu\gamma = d_\nu$$

On a:

$$a_\nu = c_\nu \cos \nu\gamma + d_\nu \sin \nu\gamma$$

$$b_\nu = - c_\nu \sin \nu\gamma + d_\nu \cos \nu\gamma;$$

d_ν devient infiniment petit pour $\nu = \infty$, par hypothèse, puisque d_ν est ce que devient l'expression $a_\nu \sin \nu x + b_\nu \cos \nu x$ pour $x = \gamma$, et que γ est une valeur située entre α et β.

De même c_ν devient aussi infiniment petit pour $\nu = \infty$; car on a, par hypothèse, pour chaque valeur de x positive et $< \frac{i}{2}$:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma + x) + b_\nu \cos \nu(\gamma + x)) = 0$$

$$\lim_{\nu=\infty} (a_\nu \sin \nu(\gamma - x) + b_\nu \cos \nu(\gamma - x)) = 0.$$

Par soustraction on en conclut:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu \sin \nu x = 0$$

pour chaque valeur positive de $x < \frac{i}{2}$.

De là on voit d'après le théorème III, que l'on a:

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0.$$

Maintenant c_ν et d_ν devenant toutes les deux infiniment petites, il en résulte la même propriété pour a_ν et b_ν.

Berlin, 21 Avril 1871.

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR

G. CANTOR

À HALLE a. S.

(Traduction d'un mém. publ. d. l. Annales math. de Leipsic t. V. p. 123.)

Je voudrais faire connaître dans ce travail une extension du théorème d'après lequel une fonction ne peut être développée que d'une seule manière en série trigonométrique.

J'ai cherché à démontrer dans le Journal de Crelle t. 72, p. 139, que deux séries trigonométriques:

$$\frac{1}{2} b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

et

$$\frac{1}{2} b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx)$$

qui, pour toutes les valeurs de x, convergent et ont la même somme, ont les mêmes coefficients; j'ai ensuite montré, dans une notice relative à ce travail, que ce théorème reste vrai, si, pour un nombre fini de valeurs de x, on renonce soit à la convergence, soit à l'égalité des sommes des deux séries.

L'extension que j'ai en vue ici consiste en ce que pour un nombre infini de valeurs de x dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$ on peut renoncer à la convergence ou à l'accord des sommes de séries, sans que le théorème cesse d'être vrai.

Mais dans ce but je suis obligé de commencer par des explications, ou plutôt par quelques simples indications destinées à mettre en lumière les diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini; je suis amené par là à donner quelques définitions, afin de rendre aussi courte que possible l'exposition du théorème en question, dont la démonstration se trouve au § 3.

§ 1.

Les nombres rationnels servent de fondement pour arriver à la notion plus étendue d'une grandeur numérique; je les désignerai sous le nom de système A, en y comprenant zéro.

On rencontre une première généralisation de la notion de grandeur numérique dans le cas où l'on a, obtenue par une loi, une série infinie de nombres rationnels:

(1) $$a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots \; a_n, \; \ldots\ldots,$$

constituée de telle sorte que la différence $a_{n+m} - a_n$ devient infiniment petite à mesure que n croit, quel que soit le nombre entier positif m, ou, en d'autres termes, qu'avec ε (positif rationnel) pris arbitrairement on a un nombre entier n_1 tel que $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, si $n \gtreqless n_1$, et si m est un nombre entier positif pris à volonté.

J'exprime ainsi cette propriété de la série (1): »La série (1) a une limite déterminée b».

Ces mots ne servent donc qu'à énoncer cette propriété de la série, sans exprimer d'abord autre chose, et de même que nous lions la série (1) avec un signe particulier b, de même on doit aussi attacher différents signes b, b', b'' à diverses séries de même espèce.

Soit une seconde série:

(1') $$a'_1, \; a'_2, \; \ldots\ldots \; a'_n, \; \ldots\ldots$$

ayant une limite déterminée b', on trouve que les deux séries (1) et (1') ont constamment une des trois relations suivantes, qui s'excluent l'une l'autre: Ou bien: 1° $a_n - a'_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ou bien: 2° $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n, reste toujours plus grand qu'une grandeur positive (rationnelle) ε, ou enfin 3° $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n reste toujours plus petit qu'une grandeur négative (rationnelle) $-\varepsilon$.

Dans le cas de la première relation, je pose: $b = b'$, dans le cas de la seconde: $b > b'$, et, dans le cas de la troisième: $b < b'$.

On trouve de même qu'une série (1), ayant une limite b, n'a avec un nombre rationnel a qu'une des trois relations suivantes. Ou bien:

1° $a_n - a$ devient infiniment petit à mesure que n augmente, ou bien: 2° $a_n - a$, à partir d'un certain n, reste toujours plus grand qu'une grandeur positive (rationnelle) ε, ou enfin 3° $a_n - a$, à partir d'un certain n, reste toujours plus petit qu'une grandeur négative (rationnelle) $-\varepsilon$.

Pour exprimer l'existence de ces rapports, nous écrivons resp.:

$$b = a, \quad b > a, \quad b < a.$$

De ces définitions et de celles qui suivent immédiatement, il résulte (et on peut démontrer rigoureusement cette conséquence) que, b étant la limite de la série (1), $b - a_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ce qui justifie par conséquent d'une manière précise la désignation de »limite de la série (1)» donnée à b.

Qu'on désigne par B l'ensemble des grandeurs numériques b.

D'après les conventions précédentes, on peut étendre les opérations élémentaires entreprises avec des nombres rationnels aux deux systèmes A et B réunis.

Soient en effet b, b', b'' trois grandeurs numériques du système B, les formules:

$$b \pm b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b''$$

servent à exprimer qu'entre les séries correspondantes aux trois nombres b, b', b'':

$$a_1, \; a_2, \; \ldots\ldots$$
$$a'_1, \; a'_2, \; \ldots\ldots$$
$$a''_1, \; a''_2, \; \ldots\ldots$$

se vérifient resp. les relations:

$$\lim\,(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0,$$

$$\lim\,(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$

$$\lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0,$$

où je n'ai plus besoin, d'après ce qui précède, d'expliquer plus longuement le sens du signe-lim. On a des définitions semblables pour les cas où un ou deux des trois nombres appartiennent au système A.

En général toute équation obtenue par un nombre fini d'opérations élémentaires

$$F(b,\ b',\ \ldots\ldots\ b^{(p)}) = 0$$

se présentera comme expression d'une relation déterminée entre les séries qui donnent naissance aux grandeurs numériques b, b', b'', ... $b^{(p)}$.[1]

Le système A a donné naissance au système B; de même les deux systèmes B et A réunis, donneront naissance, par le même procédé, à un nouveau système C.

Soit en effet une série infinie:

$$(2)\qquad b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots\ b_n,\ \ldots\ldots$$

de nombres choisis dans les systèmes A et B et n'appartenant pas tous au système A, et cette série étant constituée de telle sorte que $b_{n+m} - b_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, quel que soit d'ailleurs m (et cette condition, d'après les définitions précédentes, peut se concevoir comme quelque chose de parfaitement déterminé) je dirai que cette série a une limite déterminée c.

Les grandeurs numériques c constituent le système C.

Les définitions de l'équivalence, de l'inégalité en plus ou en moins, et celles des opérations élémentaires soit entre les grandeurs c, soit entre

---

[1] Quand on dit, par exemple, qu'une équation de $\mu^{\text{ème}}$ degré à coefficients entiers: $f(x) = 0$, a une racine réelle ω, cela signifie qu'on a une série: a_1, a_2, ... a_n, ... de la même nature que la série (1) ayant pour limite le signe ω, et jouissant en outre de la propriété:

$$\lim f(a_n) = 0.$$

ces grandeurs elles-mêmes et celles des systèmes B et A, sont analogues aux définitions données plus haut.

Tandis que les systèmes B et A sont tels qu'on peut égaler chacun des a à un b, mais non pas chacun des b à un a, on peut au contraire égaler non seulement chacun des b à un c, mais aussi chacun des c à un b.

Bien que par là les systèmes B et C puissent dans une certaine mesure être regardés comme identiques il est essentiel, dans la théorie que j'expose ici (et d'après laquelle la grandeur numérique, n'ayant d'abord en elle-même, en général, aucun objet, ne paraît que comme élément de théorèmes qui ont une certaine objectivité, de ce théorème, p. ex., que la grandeur numérique sert de limite à la série correspondante) il est essentiel, dis-je, de maintenir la distinction abstraite entre les deux systèmes B et C; aussi bien l'équivalence de deux grandeurs numériques b, b' empruntées au système B n'entraîne pas leur identité, mais exprime seulement une relation déterminée entre les séries auxquelles elles se rapportent.

Le système C et ceux qui le précèdent produisent d'une manière analogue un système D, ceux-ci à leur tour, un autre système E, et ainsi de suite; par λ de ces opérations (en considérant l'opération par laquelle on a passé de A à B comme la première) on arrive à un système L de grandeurs numériques.

Si on se rappelle la suite des définitions données pour l'équivalence et l'inégalité en plus ou en moins de ces différentes grandeurs numériques et pour les opérations élémentaires qui permettent de passer d'un système à l'autre, le même rapport aura lieu avec ceux qui précèdent, à l'exception de A, en sorte qu'on pourra toujours égaler une grandeur numérique l à une grandeur numérique k, i, ... c, b, et réciproquement.

On peut ramener à la forme d'égalités de ce genre les résultats de l'analyse (abstraction faite de quelques cas connus) bien que (je ne l'indique ici qu'en égard à ces exceptions) la notion de nombre, si développée qu'elle soit ici, porte en soi le principe d'une extension nécessaire en elle-même et absolument infinie.

Il semble légitime, étant donnée une grandeur numérique, dans le système L, de se servir de cette expression: C'est une grandeur numérique, une valeur, ou une limite, de $\lambda^{\text{ème}}$ espèce; d'où l'on voit que j'emploie en général les mots grandeur numérique, valeur et limite dans le même sens.

Une équation $F(l, l', \ldots\ldots l^{(p)}) = 0$ formée de nombres $l, l', \ldots\ldots l^{(p)}$ au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires apparaît précisément, dans la théorie en question, comme l'expression d'un rapport déterminé entre $p + 1$ séries λ fois infinies de nombres rationnels; ces séries sont produites par les séries simplement infinies qui définissent tout d'abord les grandeurs $l, l', \ldots\ldots l^{(p)}$; on les obtient en remplaçant, dans les premières, les éléments par les séries qui les définissent, en traitant de même les séries ainsi obtenues, qui en général seront doublement infinies, et en continuant ce procédé jusqu'à ce qu'on n'ait plus devant soi que des nombres rationnels.

Dans une autre circonstance je reviendrai avec plus de détail sur tous ces rapports. Ce n'est pas non plus ici le lieu d'expliquer comment les conventions et les opérations dont j'ai parlé dans ce § peuvent servir à l'analyse infinitésimale. Dans ce qui suit, en exposant le rapport des grandeurs numériques avec la géométrie de la ligne droite, je me bornerai presque exclusivement aux théorèmes nécessaires, d'où l'on peut, si je ne me trompe, déduire le reste au moyen d'une démonstration purement logique. J'indique pour le comparer aux § 1 et § 2, le 10[e] livre des Eléments d'Euclide; qui peut servir de point de comparaison en cette matière.

§ 2.

Les points d'une ligne droite sont déterminés quand, en prenant pour base une unité de mesure, on indique leurs distances, abscisses, d'un point fixe 0 de la ligne droite par le signe + ou —, suivant que le point en question se trouve dans la partie (fixée d'avance) positive ou négative de la ligne à partir de 0.

Si cette distance a avec l'unité de mesure un rapport rationnel, elle est exprimée par une grandeur numérique du système A; dans l'autre cas, si le point est connu par une construction, on peut toujours imaginer une série:

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n,\ \ldots\ldots$$

réalisant les conditions énoncées dans le § 1, et ayant avec la distance en question une relation telle que les points de la droite, auxquels se rapportent les distances $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$, se rapprochent à l'infini du point à déterminer, à mesure que n augmente.

Ce que nous exprimons, en disant: La distance du point à déterminer au point 0 est égale à b, quand b est la grandeur numérique correspondant à la série (1).

On démontre ensuite que les conditions d'équivalence et d'inégalité en plus ou en moins de distances connues concorde avec les conditions d'équivalence et d'inégalité en plus ou en moins (définies dans le § 1), des grandeurs numériques correspondantes, qui représentent ces distances.

Il suit maintenant sans difficulté que les grandeurs numériques des systèmes C, D ..... sont aussi capables de déterminer des distances connues. Mais pour achever de faire reporter le lien que nous observons entre les systèmes des grandeurs numériques définies dans le § 1 et la géométrie de la ligne droite, il faut ajouter encore un axiôme dont voici le simple énoncé: A chaque grandeur numérique appartient aussi, réciproquement, un point déterminé de la droite, dont la coordonnée est égale à cette grandeur numérique dans le sens exposé dans ce §. (1)

J'appelle ce théorème un axiôme, par ce qu'il est dans sa nature de ne pouvoir être démontré d'une façon générale.

Ce théorème sert aussi à donner supplémentairement aux grandeurs numériques une certaine objectivité, dont elles sont, toutefois, complètement indépendantes.

D'après ce qui précède, je considère un point de la droite comme déterminé, quand sa distance de 0, précédée du signe convenable, est donnée comme grandeur numérique, valeur ou limite de $\lambda^{\text{ème}}$ espèce.

---

(1) A chaque grandeur numérique appartient un point déterminé, mais à chaque point se rapportent, comme coordonnées, dans le sens ci-dessus, une quantité innombrable de grandeurs numériques égales; car, comme on l'a déjà fait entendre plus haut, il suit, de fondements purement logiques, que des points distincts ne peuvent pas répondre à des grandeurs numériques égales, et qu'un seul et même point ne peut se rapporter à des grandeurs numériques inégales, comme coordonnées.

Entrons maintenant plus pleinement dans notre sujet et considérons les relations qui se présentent, étant données des grandeurs numériques en nombre fini ou infini.

D'après ce qui précède on peut considérer les différentes grandeurs numériques comme correspondant une à une avec les différents points d'une ligne droite. Pour plus de clarté, et sans que cela soit essentiel, nous nous servirons, dans la suite, de ce mode de représentation, et, quand nous parlerons de points, nous aurons toujours en vue les valeurs par lesquelles on les obtient.

Pour plus de brièveté, j'appelle système de valeurs un nombre donné, fini ou infini, de grandeurs numériques, et système de points un nombre donné, fini ou infini, de points d'une droite. Ce qui sera dit dans la suite des systèmes de points, peut s'appliquer immédiatement, d'après ce qui a été dit, aux systèmes de valeurs.

Etant donné, dans un intervalle fini, un système de points, il y a lieu, en général, d'envisager un second système de points déduit du premier d'une certaine manière, puis un troisième déduit du deuxième de la même façon, etc.; il est nécessaire de les étudier tous si l'on veut concevoir la nature du premier.

Pour définir ces nouveaux systèmes de points, définissons d'abord la notion du: point-limite d'un système de points.

Par point-limite d'un système de points P, j'entends un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système P; il peut d'ailleurs se faire que le point-limite appartienne à ce système. Et j'appelle voisinage d'un point tout intervalle dans lequel ce point est contenu. D'après cela il est facile de démontrer qu'un système composé d'un nombre infini de points a toujours pour le moins un point-limite. Nous appelons point *isolé* de P tout point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point-limite de P.

C'est dès lors la condition déterminée de tout point de la droite par rapport à un système donné P, d'être ou de ne pas être un point-limite de ce système et on a, aussi défini en même temps que le système P, le système de ses points-limites, que je désigne par P' et que j'appelle le premier système dérivé de P.

Si le système P' n'est pas composé d'un nombre fini de points, on peut en déduire par le même procédé un autre système P'', que j'appelle le second système dérivé de P. Par ν opérations analogues on arrive à la notion du $\nu^{\text{ème}}$ système $P^{(\nu)}$ dérivé de P.

Si par exemple le système P est composé de tous les points de la droite dont les abscisses sont rationnelles et comprises entre 0 et 1 (qu'on y comprenne, ou non, les limites), le système dérivé P' se composera de tous les points de l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$, y compris les limites 0 et 1. Les systèmes suivantes P'', P''', ... ne diffèrent pas de P'. Ou bien, si la quantité P est composée des points dont les abscisses sont respect. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots$, le système P' se composera du seul point 0 et ne donnera naissance lui-même, par déduction, à aucun autre.

Il peut arriver, et c'est le cas qui nous intéresse seul ici, qu'après ν opérations le système $P^{(\nu)}$ se compose d'un nombre fini de points et par conséquent ne donne lui-même naissance, par déduction, à aucun autre système; dans ce cas nous appellerons le système primitif P de la $\nu^{\text{ème}}$ espèce; et il suit de là que P', P'', ... sont alors de la $\overline{\nu - 1}^{\text{ème}}$, de la $\overline{\nu - 2}^{\text{ème}}$ ..... espèce.

Dans cette théorie, l'ensemble de tous les systèmes d'espèce déterminée est donc considéré comme un genre particulier dans l'ensemble de tous les systèmes de points imaginables, et les systèmes de points que nous avons appelés de $\nu^{\text{ème}}$ espèce forment une espèce particulière dans ce genre.

Un seul point offre déjà un exemple d'un système de points de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, si on donne son abscisse comme grandeur numérique de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, satisfaisant à certaines conditions faciles à établir. Si en effet on décompose alors cette grandeur numérique pour obtenir les termes (de $\overline{\nu - 1}^{\text{ème}}$ espèce) de la série qui lui correspond, si on décompose ces membres eux-mêmes pour arriver aux termes (de $\overline{\nu - 2}^{\text{ème}}$ espèce) qui les constituent, et ainsi de suite, on finit par obtenir un nombre infini de nombres rationnels; et, si on se représente le système de points correspondant à ces nombres, elle sera de $\nu^{\text{ème}}$ espèce. [1]

---

[1] Je le relève expressement, que ce n'est pas toujours le cas. En général le système de points ainsi engendrée par une grandeur numérique de $\nu^{\text{ème}}$ espèce peut être d'une espèce inférieure ou supérieure à la $\nu^{\text{ème}}$ espèce ou même n'être d'aucune espèce déterminée.

§ 3.

Théorème. Si une équation ayant la forme:

$$(1) \qquad 0 = C_0 + C_1 + \ldots\ldots + C_n + \ldots\ldots$$

où $C_0 = \frac{1}{2}d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, est satisfaite pour toutes les valeurs de x, à l'exception de celles qui correspondent aux points d'un système de points P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce donnée dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, où ν désigne un nombre entier aussi grand que l'on veut, je dis qu'on aura:

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Démonstration. Dans cette démonstration, comme la suite le fera voir, en parlant de P on a en vue non-seulement le système donnée de $\nu^{\text{ème}}$ espèce des points exceptionnels dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, mais encore le système produit sur la ligne entière infinie par la répétition périodique.

Considérons maintenant la fonction:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \ldots\ldots - \frac{C_n}{nn} - \ldots\ldots$$

Il résulte de la nature d'un système P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce qu'il doit y avoir un intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$, où ne se trouve aucun point de ce système; pour toutes les valeurs de x comprises dans cet intervalle on aura donc, à cause de la convergence de notre série (1) que nous avons supposée:

$$\lim (c_n \sin nx + d_n \cos nx) = 0,$$

par conséquent, d'après un théorème connu (v. 4^e vol. de Annales math. p. 139):

$$\lim c_n = 0, \quad \lim d_n = 0.$$

La fonction F jouit donc des propriétés suivantes (v. RIEMANN, Sur le moyen de représenter une fonction par une série trigonométrique, § 8):

1° Elle reste continue pour toutes ces valeurs de x.

2° $\lim \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, si $\lim \alpha = 0$, pour toutes les valeurs de x, excepté celles qui correspondent aux points du système P.

3° On a: $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, si $\lim \alpha = 0$, pour toutes les valeurs de x sans exception.

Je vais montrer maintenant que $F(x) = cx + c'$. Pour cela je considère d'abord un intervalle quelconque $(p \ldots\ldots q)$ où il n'y a qu'un nombre fini de points du système P; soient $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$ ces points écrits d'après leur ordre de succession.

Je dis que $F(x)$ est linéaire dans l'intervalle $(p \ldots\ldots q)$; car $F(x)$, à cause des propriétés 1° et 2°, est fonction linéaire dans chacun des intervalles obtenus en divisant $(p \ldots\ldots q)$ par les points $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$; comme en effet il n'y a de points exceptionnels dans aucun de ces intervalles, les conclusions appliquées dans le mémoire (v. Journal de Borchardt, t. 72, p. 159) ont ici toute leur force; il ne reste donc à démontrer que l'identité de ces fonctions linéaires.

Je vais le faire pour deux fonctions voisines et je les choisis dans les deux intervalles $(x_0 \ldots\ldots x_1)$ et $(x_1 \ldots\ldots x_2)$.

Soit dans $(x_0 \ldots\ldots x_1)$ $\quad F(x) = kx + l$

et dans $(x_1 \ldots\ldots x_2)$ $\quad F(x) = k'x + l'$.

A cause de 1° on a $F(x_1) = kx_1 + l$; puis, pour des valeurs assez petites de α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l';$$

$$F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

On a ainsi, à cause de 3°:

$$\lim \frac{(k'-k)x_1 + l' - l + \alpha(k'-k)}{\alpha} = 0,$$

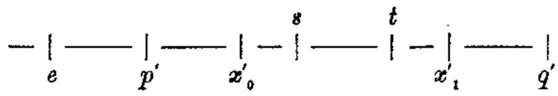
pour $\lim \alpha = 0$, ce qui n'est possible que si:

$$k = k', \quad l = l'.$$

En résumé nous pouvons énoncer le résultat suivant:

A) »Soit $(p \ldots\ldots q)$ un intervalle quelconque, où il n'y a qu'un nombre fini de points du système P, $F(x)$ sera linéaire dans cet intervalle.»

Je considère ensuite un intervalle quelconque $(p' \ldots\ldots q')$ qui ne contient qu'un nombre fini de points $x'_0, x'_1, \ldots\ldots x'_n$ du premier système dérivé P'; — et je dis d'abord que dans chacun des intervalles partiels obtenus en divisant $(p \,.\,.\,.\,.\,.\, q)$ par les points x'_0, x'_1, ..., p. ex. dans $(x'_0 \,.\,.\,.\,.\,.\, x'_1)$, la fonction $F(x)$ est linéaire



Car chacun de ces intervalles partiels contient il est vrai en général un nombre infini de points de P, en sorte que le résultat A) ne peut s'y appliquer immédiatement; mais chaque intervalle $(s \,.\,.\,.\,.\,.\, t)$ compris dans les limites de $(x'_0 \,.\,.\,.\,.\,.\, x'_1)$ ne renferme qu'un nombre fini de points de P (parce qu'autrement il y aurait encore entre x'_0 et x'_1 d'autres points du système P') et par suite la fonction est linéaire dans $(s \,.\,.\,.\,.\,.\, t)$ à cause de A). Mais comme on peut rapprocher à volonté les points extrêmes s et t des points x'_0 et x'_1, on conclut, sans façon que la fonction continue $F(x)$ est aussi linéaire dans $(x'_0 \,.\,.\,.\,.\,.\, x'_1)$.

Après l'avoir démontré pour chacun des intervalles partiels de $(p' \,.\,.\,.\,.\,.\, q')$, on obtient le résultat suivant par les mêmes raisonnements que ceux qui ont conduit au résultat A):

A') Soit $(p' \,.\,.\,.\,.\,.\, q')$ un intervalle quelconque ne renfermant qu'un nombre fini de points du système P', $F(x)$ est linéaire dans cet intervalle.

La démonstration se poursuit de la même façon. Car, étant une fois établi que $F(x)$ est fonction linéaire dans un intervalle quelconque $(p^{(k)} \,.\,.\,.\,.\,.\, q^{(k)})$, qui ne contient qu'un nombre fini de points du $k^{\text{ème}}$ système $P^{(k)}$ dérivé de P, il résulte, comme dans le passage de A) à A'), que $F(x)$ est aussi fonction linéaire dans un intervalle quelconque $(p^{(k+1)} \,.\,.\,.\,.\,.\, q^{(k+1)})$ qui ne renferme qu'un nombre fini de points du $(k+1)^{\text{ème}}$ système $P^{(k+1)}$.

Nous concluons ainsi, par un nombre fini de déductions successives, que $F(x)$ est linéaire dans tout intervalle qui ne contient qu'un nombre fini de points du système $P^{(\nu)}$. Mais le système P étant de $\nu^{\text{ème}}$ espèce, comme on l'a supposé, un intervalle $(a \,.\,.\,.\,.\,.\, b)$ pris à volonté dans la droite ne renfermera qu'un nombre fini de points de $P^{(\nu)}$. $F(x)$ est donc linéaire dans tout intervalle $(a \,.\,.\,.\,.\,.\, b)$ pris à volonté, et il suit de là, comme il est facile de le voir, que $F(x)$ prend la forme: $F(x) = cx + c'$ pour toutes les valeurs de x. Ce point étant mis en évidence, la démonstration se poursuit comme dans le travail déjà cité deux fois, à partir du moment où la forme linéaire est établie.

On peut aussi énoncer le théorème que nous avons démontré ici de la manière suivante:

»Une fonction discontinue $f(x)$, distincte de zéro ou indéterminée, pour toutes les valeurs de x correspondant aux points d'un système de points P de $\nu^{\text{ème}}$ espèce donné dans l'intervalle $[0 \ldots\ldots (2\pi)]$, mais égale à 0 pour toutes les autres valeurs de x, ne peut pas être représentée par une série trigonométrique.»

Halle, le 8 nov. 1871.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

À HALLE a. S.

I.

(Extrait des Annales mathématiques de Leipsic, vol. 15.)

Dans un mémoire publié dans le Journal de M. BORCHARDT, t. 84 j'ai démontré pour une classe très-étendue d'ensembles géométriques et arithmétiques, soit continus, soit discontinus, qu'on peut les faire correspondre sans ambiguité à des points distribués d'une façon continue ou discontinue sur un segment de droite. Ces derniers ensembles acquièrent par là une importance particulière; nous les appellerons *ensembles* ou *systêmes linéaires* de points. Les points d'un tel systême sont distribués sur un segment de droite de longueur finie ou infinie ou bien de façon à occuper tout le segment ou bien de façon à n'occuper que des parties de ce segment, et il ne paraît pas hors de propos de les étudier et de chercher à les classer; c'est ce que nous nous proposons de faire ici. En partant de divers points de vue et des principes de classification, qui s'y rattachent, nous sommes amenés à partager les ensembles de points linéaires en certaines catégories. Pour commencer par un de ces points de vue, rappelons-nous la notion de l'ensemble dérivé d'un ensemble de points donné P, telle qu'elle a été donnée dans un travail sur les séries trigonométriques (Annales math. t. 5); dans un ouvrage récemment paru de M. U. Dini (Fondamenti per la teorica d. funz. d. variabili reali, Pisa, 1878) nous voyons cette notion encore plus développée, puisqu'elle sert de point de départ à une série de généralisations remarquables de théorèmes analytiques connus. (1)

D'ailleurs cette notion de *l'ensemble dérivé* d'un ensemble donné n'est pas restreinte aux ensembles linéaires, mais elle s'applique de la même manière aux ensembles à deux, trois ou n dimensions continus ou discontinus. Comme nous le montrerons plus tard, c'est sur cette notion que repose la conception la plus claire et en même temps la plus générale d'un *ensemble continu*.

Le *dérivé* $P^{(1)}$ *d'un ensemble de points* P est en effet l'ensemble de tous les points qui jouissent de la propriété de coïncider avec un point-limite de P, peu importe d'ailleurs que ce point-limite soit en même temps un point de P, ou non.

Comme alors le *dérivé* d'un ensemble P est un nouveau ensemble déterminé $P^{(1)}$, on peut aussi chercher le *dérivé* de $P^{(1)}$, qui s'appellera le *deuxième ensemble dérivé* ou simplement le *deuxième dérivé* de P; et en continuant ainsi, on obtient le $\nu^{\text{ème}}$ *dérivé* de P, que l'on désigne par $P^{(\nu)}$.

Il peut se faire que la suite des dérivés $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... conduise à un dérivé $P^{(n)}$ composé de points qui ne se présentent qu'en nombre fini dans chaque étendue finie, en sorte que $P^{(n)}$ n'a pas de points-limites et par conséquent ne donne lieu à aucun dérivé; dans ce cas nous disons que le système de points P est du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce. Mais si la série des dérivés de P, la série $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... est infinie, nous disons que l'ensemble de points P est du deuxième genre. De là on reconnaît sans peine que si P est du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... appartiennent aussi au premier genre et sont respectivement de la $\overline{n-1}^{\text{ème}}$, de la $\overline{n-2}^{\text{ème}}$, de la $\overline{n-3}^{\text{ème}}$ espèce; qu'ensuite si P est du deuxième genre, la même conséquence s'applique à tous les dérivés $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... Il est aussi à remarquer que tous les points de $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... sont toujours aussi des points du premier dérivé

---

(1) Voir aussi: Ascoli, Nouve richerche sulla serie di Fourier. Reale Academia dei Lincei (1877—78).

$P^{(1)}$, tandis qu'un point appartenant à $P^{(1)}$ n'est pas nécessairement un point de P.

On découvre ensuite des caractères importants d'un ensemble de points P, si l'on étudie la manière dont se comporte cet ensemble par rapport à un intervalle donné continu $(\alpha \ldots \beta)$, dont les points extrèmes sont considérés comme appartenant à l'intervalle même. Il peut se faire que quelques points ou même que tous les points de cet intervalle soient en même temps des points de P, ou bien qu'aucun point de $(\alpha \ldots \beta)$ n'appartienne à P; dans ce dernier cas nous disons que P est tout entier en dehors de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P est contenu dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, en tout ou en partie, il peut se présenter un cas remarquable: c'est le cas où chaque intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, si petit qu'il soit, compris dans $(\alpha \ldots \beta)$, contient des points de P. Dans ce cas nous dirons que P est *condensé dans tout l'intervalle* $(\alpha \ldots \beta)$.

Comme exemples de systèmes de points ainsi condensés dans toute l'étendue de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, nous avons: 1° tout ensemble de points auquel appartiennent comme éléments tous les points de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; 2° l'ensemble de points composé de tous les points dont les abscisses sont des nombres rationnels; 3° le système de points composé de tous les points, qui ont pour abscisses les nombres rationnels de la forme $\pm \frac{2n+1}{2^m}$, où n et m sont des nombres entiers positifs.

De cette explication de l'expression »*condensé dans toute l'étendue d'un intervalle donné*», il résulte que, si un système de points n'est pas condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il doit nécessairement exister un intervalle $(\gamma \ldots \delta)$ compris dans le premier et où ne se trouve aucun point de P. On peut montrer aussi que, si P est condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ non seulement la même chose est vrai pour $P^{(1)}$, mais encore $P^{(1)}$ a pour points tous ceux de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$. On pourrait prendre cette propriété de $P^{(1)}$ comme point de départ de l'explication de l'expression »être condensé dans toute l'étendue d'un intervalle», puisqu'on peut dire: un système de points P est condensé dans toute l'étendue de l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ quand son premier dérivé $P^{(1)}$ renferme comme éléments tous les points de $(\alpha \ldots \beta)$.

Si P est condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il l'est aussi dans toute l'étendue d'un autre intervalle quelconque $(\alpha' \ldots \beta')$ contenu dans le premier.

Un système de points P condensé dans toute l'étendue d'un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ est nécessairement du deuxième genre; car alors $P^{(1)}$, et par suite $P^{(2)}$, $P^{(3)} \ldots$ sont aussi condensés dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ et cette suite de dérivés de P est illimitée, c. a. d. que P appartient au second genre.

De là nous concluons qu'un système de points P du premier genre n'est sûrement pas condensé dans tout un intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, quel que soit d'ailleurs cet intervalle et que, par suite, on peut toujours trouver dans $(\alpha \ldots \beta)$ un intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, qui ne renferme pas un seul point de P.

Quant à la question de savoir si réciproquement tout système de points du deuxième genre est de telle nature, qu'il y ait un intervalle dans toute l'étendue duquel il soit condensé, nous nous en occuperons plus tard. Nous arrivons maintenant à un second mode de classification des ensembles linéaires de points non moins important que le premier: il est fondé sur la considération de la *puissance*. Dans le mémoire cité plus haut (Journal de M. BORCHARDT t. 84) nous avons dit en général de deux ensembles M et N géométriques, arithmétiques ou appartenant à quelque autre catégorie bien définie, qu'ils ont *même puissance*, quand on peut les faire correspondre entre eux d'après quelque loi déterminée, de manière qu'à chaque élément de M corresponde un élément de N et, réciproquement, à chaque élément de N, un élément de M.

Suivant que deux ensembles sont de même puissance ou non, elles peuvent être placés dans une même classe ou dans des classes différentes. On peut appliquer ces règles générales spécialement aux ensembles linéaires de points que l'on partagera par conséquent en classes déterminées; les systèmes de points d'une classe sont tous de même puissance, au contraire les systèmes de points appartenant à différentes classes sont de puissance différente. Chaque système de points particulier peut être considéré comme représentant la classe à laquelle il appartient. Ici se présente en première ligne la classe des systèmes de points qui ont la même puissance que la suite naturelle des nombres: $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$ et qu'on peut, par conséquent, représenter sous forme d'une série simplement infinie, dont le terme général dépend de ν.

A cette *première* classe appartiennent par exemple tous les systèmes de points du premier genre; mais beaucoup de systèmes de points du deuxième genre font aussi partie de cette classe, par exemple: 1° le système de points composé de tous les points d'un intervalle qui ont pour abscisses des nombres rationnels (cf. Journal d. M. BORCHARDT, t. 84, p. 250); 2° le système de points composé de tous les points d'un intervalle qui ont pour abscisses des nombres algébriques (cf. Journal de M. BORCHARDT, t. 77, p. 258).

Après cela, se présente à nous une *seconde* classe de systèmes linéaires de points; cette classe est *représentée* par le système des points appartenant à un *intervalle continu*, par exemple par le système de tous les points dont les abscisses sont $\geqq 0$ et $\leqq 1$. A cette classe appartiennent par exemple:

1° Tout intervalle continu $(\alpha \ldots \beta)$.

2° Tout système de points composé de plusieurs intervalles séparés continus $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'')$, ..., en nombre fini ou infini.

3° Tout système de points obtenu en supprimant dans un intervalle continu un ensemble fini ou infini de points $u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ de la *première* classe (cf. Journal de M. BORCHARDT, t. 84, p. 254).

Nous n'examinerons pas ici, si ces deux classes sont les seules que forment les ensembles infinis et linéaires de points; mais nous voulons démontrer maintenant que ces deux classes sont distinctes en réalité; pour cela il faut d'abord montrer qu'on ne peut pas faire correspondre entre eux point pour point deux représentants quelconques de ces deux classes.

Comme représentant de la deuxième classe choisissons ici l'intervalle continu $(0 \ldots 1)$; si cet ensemble appartenait en même temps à la *première* classe, il devrait exister une série simplement infinie $u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$ composée de tous les nombres réels $\geqq 0$ et $\leqq 1$, en sorte que tout nombre situé dans cet intervalle se présenterait dans cette série à une place déterminée. Mais cette hypothèse est en contradiction avec un théorème très-général que nous avons démontré rigoureusement dans le Journal de M. BORCHARDT, t. 77, p. 260, à savoir:

»*Etant donnée une série simplement infinie*

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

de nombres réels inégaux progressant d'après une loi quelconque, on peut indiquer dans chaque intervalle proposé $(\alpha \ldots \beta)$ *un nombre* v *(et par conséquent on en peut indiquer une infinité) qui ne soit pas compris parmi les termes de cette série.»*

En égard au grand intérêt qui s'attache à ce théorème, non seulement dans la présente théorie, mais encore dans beaucoup d'autres questions d'arithmétique ou d'analyse, il ne paraît pas inutile de développer ici, en la modifiant et la simplifiant, la démonstration que nous avons donnée alors.

D'après cela, étant donnée une série

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

que nous désignerons par le symbole (u_ν) et un intervalle quelconque $(\alpha \ldots \beta)$ où $\alpha < \beta$; il s'agit de démontrer que, dans cet intervalle on peut trouver un nombre réel v, qui ne se présente pas dans (u_ν).

I. Nous remarquons d'abord que si notre ensemble (u_ν) n'est pas condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il faut que dans cet intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ il y en ait un autre $(\gamma \ldots \delta)$ dont tous les nombres n'appartiennent pas à (u_ν); on peut donc choisir pour v un nombre quelconque de l'intervalle $(\gamma \ldots \delta)$. Ce cas ne présente donc aucune difficulté et nous pouvons passer à l'autre cas plus compliqué.

II. Supposons l'ensemble (u_ν) condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$. Dans ce cas tout intervalle $(\gamma \ldots \delta)$, si petit qu'il soit, compris dans $(\alpha \ldots \beta)$ contient des nombres de notre série (u_ν). Pour montrer que néanmoins il y a dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ des nombres v qui ne se trouvent pas dans (u_ν), faisons les remarques suivantes. Comme dans notre série:

$$u_1, u_2, \ldots u_\nu, \ldots$$

il y a certainement des nombres qui se rencontrent dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, il faut qu'un de ces nombres ait le plus petit indice, qu'il soit $u_{\varkappa_1}$, et un autre l'indice immédiatement supérieur: $u_{\varkappa_2}$.

Désignons par α' le plus petit des deux nombres $u_{\varkappa_1}$, $u_{\varkappa_2}$, et le plus grand par β'.

(Ils ne peuvent être égaux entre eux, parce que nous avons supposé notre série composée de nombres inégaux.)

On a alors d'après la définition:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

puis: $x_1 < x_2$; et il faut remarquer en outre que tous les nombres u_μ de notre série pour lesquels $\mu \leqq x_2$ ne sont pas situés à l'intérieur de l'intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$ comme il ressort immédiatement de la détermination des nombres u_{x_1}, u_{x_2}. De même désignons par u_{x_3}, u_{x_4} les deux nombres de la série (u_ν) affectés des plus petits indices, que l'on rencontre situés dans les limites de l'intervalle $(\alpha' \ldots \beta')$; soit α'' le plus petit de ces nombres et β'' le plus grand.

On a alors:

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$

$$x_2 < x_3 < x_4,$$

et on reconnaît que tous les nombres u_μ de notre série pour lesquels $\mu \leqq x_4$ ne sont pas compris dans l'intérieur de l'intervalle $(\alpha'' \ldots \beta'')$.

Quand on est arrivé, en suivant toujours la même loi, à un intervalle $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$, l'intervalle suivant se tire de ce dernier, en considérant les deux premiers nombres de notre série (u_ν) (c. à d. ceux qui ont les plus petits indices) qui se rencontrent dans l'intervalle $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$; soient $u_{x_{2\nu-1}}$, $u_{x_{2\nu}}$ ces deux nombres; on désignera le plus petit d'entre eux par $\alpha^{(\nu)}$, le plus grand par $\beta^{(\nu)}$.

L'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ est alors compris dans tous les intervalles précédents et il a avec notre série (u_ν) ce rapport particulier que tous les nombres u_μ pour lesquels $\mu \overline{\gtrless} x_{2\nu}$ ne sont certainement pas compris dans cet intervalle. Comme évidemment:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots, x_{2\nu-2} < x_{2\nu-1} < x_{2\nu}, \ldots$$

et que ces nombres, en tant qu'indices, sont des nombres entiers, on a:

$$x_{2\nu} \overline{\gtrless} 2\nu$$

et par suite:

$$\nu < x_{2\nu};$$

nous pouvons donc assurer, et cela nous suffit pour ce qui doit suivre, que:

ν étant un nombre entier pris arbitrairement, la grandeur u_ν est en dehors de l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$.

Comme les nombres α', α'', α''', $\ldots$ $\alpha^{(\nu)}$, $\ldots$ augmentent constamment de grandeur et sont néanmoins renfermés dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, ils ent, d'après un théorème fondamental bien connu de la théorie des grandeurs, une limite que nous désignons par A, en sorte que:

$$A = \lim \alpha^{(\nu)} \qquad \text{pour } \nu = \infty.$$

La même chose est vraie pour les nombres β', β'', β''', $\ldots$ $\beta^{(\nu)}$, $\ldots$ qui décroissent constamment tous en restant compris dans l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$; nous désignerons leur limite par B, en sorte que:

$$B = \lim \beta^{(\nu)} \qquad \text{pour } \nu = \infty.$$

On a évidemment:

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqq B < \beta^{(\nu)}.$$

Mais il est facile de voir que le cas $A < B$ ne peut se présenter ici; autrement comme tout nombre u_ν de notre série serait en dehors de l'intervalle $(A \ldots B)$, puisque u_ν est en dehors de l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, notre série (u_ν) ne serait pas condensé dans tout l'intervalle $(\alpha \ldots \beta)$, contrairement à la supposition que nous avons faite.

Il ne reste donc que le cas $A = B$ et il est évident maintenant que le nombre: $v = A = B$ ne se présente pas dans notre série (u_ν).

Car si ce nombre était membre de notre série, soit le $\nu^{\text{ème}}$, on aurait: $v = u_\nu$.

Mais cette dernière équation n'est possible pour aucune valeur de ν, parce que v est compris dans l'intervalle $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, tandis que u_ν est en dehors de ce même intervalle.

Halle a. S. Janvier 1879.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

II.

(Extrait des Annales mathém. de Leipsic, t. 17.)

Pour faciliter, en l'abrégeant, l'exposition qui va suivre, qu'on me permette d'indiquer tout d'abord un système de notations.

Nous exprimerons par la formule $P \equiv Q$ l'identité de deux systèmes de points P et Q. Si les deux systèmes P et Q n'ont aucun élément commun nous dirons qu'ils sont *sans connexion.* Si un système P est composé de la réunion de plusieurs systèmes $P_1, P_2, P_3, \ldots$, en nombre fini ou infini, n'ayant deux à deux aucune connexion, nous écrirons:

$$P \equiv (P_1, P_2, P_3, \ldots).$$

Si tous les points d'un système P appartiennent à un autre système Q, nous dirons que P est *contenu* dans Q ou encore que P est un diviseur de Q, Q un multiple de P. Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des systèmes de points quelconques en nombre fini ou infini; ces systèmes ont un plus petit commun multiple que nous désignons par $\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$; ce plus petit commun multiple est le système composé de tous les points différents de $P_1, P_2, P_3, \ldots$ et n'ayant pas d'ailleurs d'autres points comme éléments; ces systèmes ont de même un plus grand commun diviseur que nous désignons par $\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$ et qui est le système des points communs à tous les $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Par exemple, $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots$

étant les dérivés successifs d'un système de points P (v. Art. I), nous pouvons dire que $P^{(2)}$ est diviseur de $P^{(1)}$, $P^{(3)}$ diviseur de $P^{(2)}$ aussi bien que de $P^{(1)}$, et en général $P^{(\nu)}$ diviseur de $P^{(\nu-1)}$, $P^{(\nu-2)}$, ... $P^{(1)}$; au contraire $P^{(1)}$ en général n'est pas diviseur de P; mais si P lui-même est le premier dérivé d'un système Q, $P^{(1)}$ sera diviseur de P.

Il est de plus utile d'avoir un signe qui exprime l'absence de points; nous choisissons pour cela la lettre 0; ainsi $P \equiv 0$ signifie que le système P ne contient pas un seul point, et qu'ainsi, rigoureusement parlant, ce n'est pas un vrai système. Pour en donner ici un exemple, un système de points du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce est caractérisé par $P^{(n+1)} \equiv 0$, au contraire $P^{(n)}$ est différent de 0.

Deux systèmes sont en connexion par leur plus grand commun diviseur, et si ce dernier $\equiv 0$, ils sont sans connexion.

Si deux systèmes de points P et Q ont la même puissance et appartiennent par conséquent à une même classe (art. I), nous les appelons équivalents et nous exprimons cette relation par la formule:

$$P \sim Q.$$

Si on a: $P \sim Q$; $Q \sim R$, on aura toujours aussi: $P \sim R$.

Soient ensuite $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une série de systèmes, qui pris deux à deux n'ont aucune connexion entre eux, $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ une autre série dans les mêmes conditions; soit aussi: $P_1 \sim Q_1$; $P_2 \sim Q_2$; $P_3 \sim Q_3$; ..., on aura:

$$(P_1, P_2, P_3, \ldots) \sim (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots).$$

Les systèmes de points du premier genre, comme nous venons de le voir, peuvent être caracterisés d'une manière complète par la notion du système dérivé, telle qu'elle a été développée jusqu'ici; pour ceux du second genre cette notion ne suffit plus, et il faut en donner ici une extension qui se présente comme d'elle-même quand on approfondit la question.

Remarquons que dans la série des dérivés $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... d'un système P, chaque terme est diviseur des précédents, et que par suite chaque nouveau dérivé $P^{(\nu)}$ se tire du précédent $P^{(\nu-1)}$ par l'élimination de certains points, sans qu'il s'en rencontre de nouveaux.

Si P est du deuxième genre, $P^{(1)}$ se composera de deux systèmes de points Q et R essentiellement distincts, en sorte que: $P^{(1)} \equiv (Q, R)$; l'un, Q, se compose des points de $P^{(1)}$ qui disparaissent dans la série $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... quand on a suivi cette marche assez longtemps; l'autre R comprend les points qui sont conservés dans tous les termes de la série $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ...; R est donc défini par la formule:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(1)},\ P^{(2)},\ P^{(3)},\ \ldots).$$

Mais nous avons aussi évidemment:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(2)},\ P^{(3)},\ P^{(4)},\ \ldots)$$

et en général:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)},\ P^{(n_2)},\ P^{(n_3)},\ \ldots),$$

où n_1, n_2, n_3 est une suite quelconque de nombres entiers positifs croissant à l'infini.

Désignons maintenant par le signe $P^{(\omega)}$ ce système de points R obtenu ainsi à l'aide du système P, et appelons-le le système dérivé de *P d'ordre ω*.

Désignons par $P^{(\omega+1)}$ le premier dérivé de $P^{(\omega)}$, par $P^{(\omega+n)}$ le $n^{\text{ème}}$ dérivé de $P^{(\omega)}$; $P^{(\omega)}$ aura aussi un système dérivé d'ordre ω généralement distincte de 0, et que nous appellerons $P^{(2\omega)}$. En continuant ces opérations, on arrive à des dérivés que nous désignerons conséquemment par: $P^{(n_0\omega+n_1)}$, où n_0, n_1 sont des nombres entiers positifs. Mais nous pouvons aller plus loin et former le système:

$$\mathfrak{D}(P^{(\omega)},\ P^{(2\omega)},\ P^{(3\omega)},\ \ldots)$$

qui sera désigné par le symbole $P^{(\omega^2)}$.

En répétant maintenant la même opération et en la combinant avec les précédentes, on arrive à une notion plus générale, celle du système dérivé:

$$P^{(n_0\omega^2+n_1\omega+n_2)},$$

et en poursuivant cette marche on arrive à:

$$P^{(n_0\omega^\nu+n_1\omega^{\nu-1}+\ \ldots\ +n_\nu)},$$

où n_0, n_1, ... n_ν sont des nombres entiers positifs. En continuant cette généralisation on est amené à considérer ν comme variable et à envisager le système:

$$P^{(\omega^\omega)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\omega)},\ P^{(\omega^2)},\ P^{(\omega^3)},\ \ldots).$$

On obtient successivement, en continuant de même, la notion de systèmes dérivés désignés par:

$$P^{(n\omega^\omega)},\ P^{(\omega^{\omega+1})},\ P^{(\omega^{\omega+n})},\ P^{(\omega^{n\omega})},\ P^{(\omega^{\omega^n})},\ P^{(\omega^{\omega^\omega})} \text{ etc.}$$

Nous avons ainsi une suite infinie de systèmes, qui se déduisent les uns des autres suivant une loi nécessaire et indépendamment de toute conception arbitraire.

On a, pour les systèmes de points du premier genre, comme il résulte de leur définition même:

$$P^{(\omega)} \equiv 0;$$

il est à remarquer qu'on peut démontrer aussi la réciproque: tout système de points pour lequel cette équation a lieu, est du premier genre; les systèmes du premier genre, sont donc *complètement caractérisés* par cette équation.

Il est facile d'imaginer l'exemple d'un système de points du deuxième genre, pour lequel $P^{(\omega)}$ est composé d'un point donné p. A cet effet, considérons des intervalles qui se suivent, se limitent mutuellement, et convergent en même temps vers le point p en devenant infiniment petits; prenons dans chacun de ces intervalles un système de points du premier genre, dont l'ordre croisse au delà de toute limite, quand l'intervalle correspondant se rapproche de p. La reunion de tous ces systèmes fournit l'exemple en question. Cet exemple résout en même temps la question, posée dans l'art. I, de savoir si, à un système de points du deuxième genre, doit toujours appartenir un intervalle dans toute l'étendue duquel il soit condensé; or nous voyons, par l'exemple indiqué que cela n'a pas lieu nécessairement.

On construit avec la même facilité des systèmes de points du deuxième genre, pour lesquels $P^{(\omega+n)}$ ou $P^{(2\omega)}$ ou plus généralement:

$$P^{(n_0\omega^\nu + n_1\omega^{\nu-1} + \dots + n_\nu)}$$

ce composent d'un point p déterminé d'avance.

Pour tous les systèmes analogues, il n'existe aucun intervalle dans toute l'étendue duquel ils soient condensés; de plus tous ces systèmes appartiennent à la première classe; à ce double point de vue ils ressemblent aux systèmes de points du premier genre.

Halle, mai 1880.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR
à HALLE a. S.

III.

(Extrait d'un mém. d. Annales math. de Leipsic, t. XX, p. 113.)

Dans les deux articles précédents nous nous en sommes tenus rigoureusement au sujet indiqué par notre titre, et nous nous sommes occupés exclusivement de systèmes de points linéaires, c. à d. d'ensembles de points, donnés d'après une certaine loi et appartenant à une ligne droite continue indéfinie. C'était à dessein que je m'étais borné à ce cas; en effet, d'après les résultats indiqués dans mon travail: *Contribution à la théorie des ensembles,* (Journal de BORCHARDT, t. 84, p. 242), l'on peut faire correspondre, sans ambiguité, élément par élément, des ensembles à deux, trois, ... n dimensions à des systèmes linéaires de points; et l'on peut admettre a priori que la plupart des propriétés et des relations trouvées pour les ensembles linéaires de points, peuvent se démontrer aussi, avec des modifications faciles à deviner, pour les systèmes de points contenus dans des surfaces ou des espaces continus ou dans des ensembles continus de n dimensions. Mais je voudrais maintenant exposer cette généralisation d'une manière plus précise; car elle n'est pas seulement intéressante en elle-même et au point de vue des applications qu'on en peut faire dans la théorie des fonctions, mais elle fournit encore de nouveaux points de vue pour l'étude des ensembles linéaires de points.

Pour commencer par un de ces points de vue, on peut étendre immédiatement aux systèmes de points que l'on rencontre dans des ensembles continus de n dimensions, les notions précédemment données sur les dérivés des divers ordres déterminés nous seulement par des nombres entiers finis, mais caractérisés dans certains cas par des symboles infinitaires dont la signification a été rigoureusement fixée. La notion de l'ensemble dérivé s'appuie encore ici sur celle de point-limite d'un ensemble de points donné P; et ce point-limite est défini par cette condition que, dans un espace aussi petit que l'on veut entourant ce point, il y a des points du système P autres que ce point lui-même; d'après cette définition le point-limite peut indifféremment appartenir ou ne pas appartenir au système P. M. Weierstrass a le premier enoncé d'une manière générale, et appliqué à la théorie des fonctions, le théorème suivant: tout système de points composé d'un nombre infini de points et situé dans une portion finie et continue d'un ensemble à n dimensions a au moins ùn point-limite.

L'ensemble de tous les points-limites d'un système P forme un nouveau système de points P', généralement distinct de P, et que j'appelle premier dérivé de P. On tire de là les notions des dérivés d'ordre plus élevé en reproduisant cette même opération un nombre fini ou même infini de fois. A l'égard de ces dérivés successifs se présente toujours ce fait facile à expliquer que tout dérivé, excepté le premier, est contenu dans les ensembles précédents, y compris le premier dérivé P'; tandis que le système donné P contient en général des points qui n'appartiennent pas à ses dérivés. On peut de même appliquer immédiatement aux systèmes à plusieurs dimensions la notion de la *condensàtion dans un intervalle,* que nous n'avons considérée d'abord que par rapport aux systèmes linéaires de points. Etant donné un système de points P situé dans un ensemble continu G_n à n dimensions, nous dirons que ce système est *condensé dans toute l'étendue* d'un ensemble continu partiel a contenu dans G_n, si tout ensemble a' contenu dans a et ayant le même nombre de dimensions que a renferme des points du système P.

Le premier dérivé P' (et de même tous les suivants) d'un système de points P condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu a renferme l'ensemble continu a lui-même avec tous les points de la limite du dernier; et réciproquement on peut aussi prendre cette propriété du système de points P comme point de départ pour arriver à la définition de la condensation de ce système dans toute l'étendue de l'ensemble a.

De même la notion de *puissance*, qui renferme en elle-même, comme cas particulier, la notion du nombre entier, ce fondement de la théorie des grandeurs, et que l'on pourrait considérer dans les ensembles comme le moment le plus général, cette notion, dis-je, est loin d'être restreinte aux systèmes de points linéaires; on peut bien plutôt la considérer comme un attribut de tout ensemble bien défini, quelle que soit d'ailleurs la constitution de ses éléments.

Je dis qu'un ensemble d'éléments appartenant à une sphère abstraite quelconque, est *bien défini* quand, par suite du principe logique du troisième exclu, on peut le considérer déterminé de telle façon que 1° un objet quelconque appartenant à cette sphère abstraite étant choisi, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'il appartient ou non au système en question et que 2° deux objets appartenant à l'ensemble étant donnés l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés.

En fait, on ne pourra pas généralement effectuer d'une manière sûre et précise les déterminations en question *avec les méthodes* ou *les moyens dont on dispose;* mais là n'est pas la question; il ne s'agit que de la détermination intrinsèque dont il faut tirer une détermination actuelle (extrinsèque) en perfectionnant les moyens auxiliaires, dans des cas concrets où cela sera nécessaire.

Pour éclaircir ceci, je rappelle la définition du système de tous les nombres algébriques; on peut, sans aucun doute, le concevoir être déterminé intrinsèquement si un nombre η choisi à volonté appartient ou non aux nombres algébriques; néanmoins le problème qui consiste à trouver cette détermination par rapport à un nombre donné η, est souvent, comme on le sait, un des plus difficiles; et c'est encore par exemple une question toujours indécise, et du plus haut intérêt, de savoir si le nombre π, qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, est un nombre algébrique, ou, comme c'est beaucoup plus vraisemblable, un nombre transcendant. Le même problème a été résolu il y a huit ans par M. Ch. Hermite, pour le nombre fondamental e du système naturel de logarithmes, dans le travail remarquable: »Sur la fonction exponentielle», (Paris 1874); il y démontre que le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients rationnels entiers.

Si l'on a un ensemble géométrique, dont les éléments peuvent être non-seulement des points, mais des lignes, des surfaces ou des solides, et si cet ensemble est *bien défini,* la question de sa puissance se présente encore immédiatement, et cette puissance sera ou égale à une des puissances que l'on rencontre dans des ensembles de points ou plus grande que toutes les puissances de ce genre.

Pour ce qui concerne les systèmes de points compris dans des ensembles continus de n dimensions, j'ai démontré rigoureusement (Journal de BORCHARDT, t. 84, p. 242) que leurs puissances sont les mêmes que celles des ensembles linéaires de points; ce fait peut être regardé comme une simple conséquence du théorème démontré dans ce Journal, et d'après lequel on peut faire correspondre élément par élément un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu à une dimension et par conséquent à un *continuum linéaire* droit; la question des diverses puissances dans les systèmes de points peut donc, sans rien perdre de sa généralité, se poser seulement pour les systèmes de points linéaires, comme je l'ai fait remarquer à la fin du travail cité tout à l'heure.

J'ai emprunté le mot: *puissance,* à J. STEINER qui l'a employé dans un sens tout à fait spécial, mais cependant toujours analogue, pour exprimer que deux figures, si on les fait correspondre entre elles par projection, sont dans un rapport tel qu'à chaque élément de l'une répond un élément de l'autre, et un seulement; dans la notion absolue de puissance, que l'on rencontre ici, on maintient, il est vrai, la relation réciproque à sens unique, mais on ne fait aucune restriction pour la loi de la correspondance, particulièrement en ce qui regarde la continuité et la discontinuité, en sorte qu'on attribue à deux systèmes la même puissance quand on peut d'après une loi quelconque, établir entre eux une correspondance réciproque à sens unique, et on ne peut leur attribuer la même puissance qu'à cette condition; quand les deux systèmes sont *bien definis,* on peut regarder comme *intrinsèquement* déterminée la question de savoir s'ils ont même puissance ou non; mais la solution actuelle de cette question dans les cas concrets est souvent un des problèmes les plus difficiles. Ce n'est qu'après bien des essais infructueux que j'ai pu réussir, il y a huit ans, à l'aide d'un théorème démontré dans le Journal de BORCHARDT, t. 77, p. 260, et dans l'article I du présent travail, à prouver que le *continuum linéaire* n'a pas la même puissance que la série naturelle des nombres.

La théorie des ensembles ainsi conçue, (en ne considérant que ce qui est mathématique et en laissant de côté provisoirement les autres sphères abstraites), comprend l'arithmétique, la théorie des fonctions et la géométrie; ces parties de la science sont ainsi ramenées grâce à la notion de puissance à une unité commune. Le continu et le discontinu sont ainsi considérés au même point de vue et se trouvent ramenées à une commune mesure.

La plus petite puissance que l'on puisse rencontrer généralement dans des systèmes infinis, c. à d. composés d'un nombre infini d'éléments, est la puissance de la série des nombres entiers positifs rationnels; j'ai nommé les ensembles de cette classe systèmes qu'on peut *compter* à l'infini, ou simplement systèmes dénombrables; ce qui les caractérise, c'est qu'on peut les représenter (de bien des manières) sous la forme d'une série régulière simplement infinie:

$$E_1, E_2, \ldots\ldots E_\nu, \ldots\ldots,$$

en sorte que chaque élément du système occupe une place déterminée de la série et que la série ne renferme pas d'autres membres que les éléments du système donné.

Chaque partie infinie d'un système dénombrable forme un nouveau système qu'on peut dénombrer à l'infini.

Etant donné un système fini ou infini mais dénombrable de systèmes (E), (E'), (E''), ..., dont chacun est respectivement dénombrable, le système produit par la réunion de tous les éléments de (E), (E'), (E''), ... jouira de la même propriété.

Ces deux propositions simples et faciles à prouver servent de base à l'étude des systèmes dénombrables. Aussi, l'on reconnaît, comme je l'ai déjà fait remarquer souvent, que tous les systèmes donnés sous la forme d'une série n-tiplement infinie dont le terme général est $E_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots \nu_n}$ (où $\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots \nu_n$ peuvent prendre, indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs numériques positives entières) sont des systèmes, susceptibles d'être dénombrés, c. à d. qu'on peut les représenter sous la forme de séries simplement infinies; mais à cette classe appartiennent aussi des systèmes, dont le terme général a la forme:

$$E_{\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ldots\ \nu_\mu},$$

où μ peut aussi prendre toutes les valeurs numériques positives entières; l'ensemble de tous les nombres algébriques est un exemple particulièrement remarquable de cette dernière espèce d'ensembles (V. J. de Borchardt, t. 77, p. 258). L'arithmétique et l'algèbre présentent une quantité innombrable d'exemples de cette propriété; toutefois la géométrie n'en offre pas en moindre quantité. Le *théorème* suivant qui trouve plus d'une application élégante dans la théorie des nombres et dans celle des fonctions, pourra en fournir la preuve.

Soit, dans un espace continu G_n, de n dimensions, étendu à l'infini de tous côtés, un nombre infini d'ensembles partiels (a), continus,(1) de n dimensions, séparés l'un de l'autre et ne se touchant tout au plus qu'à leurs limites; je dis que le système (a) d'ensembles partiels de cette espèce peut toujours être dénombré.

Il faut remarquer qu'ici on ne fait aucune supposition sur le partage et sur la grandeur de l'espace total des ensembles a; leur étendue peut être aussi petite qu'on voudra, et ils pourront se rapprocher indéfiniment de tout point de G_n qui ne leur appartient pas; le théorème est sans aucune exception, pourvu seulement que chaque ensemble partiel a (tous les a ayant n dimensions d'après l'hypothèse) occupe un volume total déterminé (aussi petit que l'on voudra) et que les divers a ne se rencontrent tout au plus qu'à leurs limites.

On peut démontrer ce théorème de la manière suivante: Je suppose qu'au moyen de rayons vecteurs réciproques on transforme l'espace infini, à n dimensions G_n en une figure H_n à n dimensions comprise à l'interieur d'un espace infini G_{n+1} de $n+1$ dimensions, où H_n est déterminé de telle sorte que ses points sont tous à une distance 1 d'un point fixe de l'espace G_{n+1}. (Pour le cas $n = 1$ ce sera un cercle de rayon 1; pour le cas $n = 2$, une sphère de rayon 1). A chaque ensemble partiel a de G_n à n dimensions correspond un ensemble partiel b de H_n à n

(1) Pour chaque figure continue on considère comme en faisant partie les points qui lui servent de limite.

dimensions, et d'étendue déterminée; si maintenant on peut démontrer pour le système (b) la propriété de pouvoir être dénombré, on en déduira, à cause de la correspondance réciproque à sens unique, la même propriété pour le système (a).

Le système (b) est susceptible d'être dénombré parce que le nombre des ensembles b, qui d'après leur étendue sont plus grands qu'un nombre γ donné à volonté, est nécessairement fini; car leur somme est plus petite que le nombre

$$\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

c. à d. plus petite que l'étendue de la figure H_n, dans laquelle les b sont tous compris; il suit de là que l'on peut ordonner les ensembles b, d'après la grandeur de leur étendue, en une série simplement infinie, en sorte que les plus petits suivent les plus grands et finissent par devenir infiniment petits.

Le cas $n = 1$ donne lieu au théorème suivant, qui est essentiel pour le développement de la théorie des ensembles linéaires de points: Tout ensemble *d'intervalles* ($\alpha \ldots\ldots \beta$) distincts, ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs points extrêmes, et situés sur une ligne droite indéfinie, est nécessairement un ensemble susceptible d'être dénombré; la même chose est donc vraie aussi pour le système des points extrêmes α et β, mais ne l'est pas toujours pour le dérivé du dernier ensemble de points.

Dans le cas $n = 2$, ce théorème montre que l'on peut dénombrer tout ensemble de surfaces partielles distinctes, ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs limites, et situées dans un plan indéfini; ce cas paraît avoir de l'importance dans la théorie des fonctions de variables complexes. Je remarque en même temps qu'il n'est pas difficile d'étendre ce théorème aux ensembles de surfaces partielles distinctes situées sur une surface qui recouvre le plan un nombre fini ou infini de fois.

Quant aux ensembles de points susceptibles d'être dénombrés, ils présentent un phénomène remarquable que je voudrais faire connaître dans ce qui va suivre. Considérons un système de points quelconque (M) condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu G_n à n dimensions, et jouissant de la propriété de pouvoir être dénombré, en sorte qu'on peut représenter les points appartenant à (M) sous forme de série:

$$M_1, M_2, \ldots\ldots M_\nu, \ldots\ldots;$$

prenons comme exemple, dans notre espace à trois dimensions, le système de tous les points dont les coordonnées, par rapport à un système orthogonal de coordonnées x, y, z, sont toutes trois des nombres algébriques. Imaginons le système dénombrable de points (M), enlevé de l'ensemble G_n et désignons par A l'ensemble qui reste alors; nous avons ce théorème remarquable, que: pour $n \overline{\gtrless} 2$ l'ensemble A ne cesse pas d'être continu et connexe; en d'autres termes, que: deux points quelconques N et N' de l'ensemble A peuvent toujours être réunis par une ligne continue qui appartient, avec tous ses points, à l'ensemble A, en sorte qu'elle ne contient pas un seul point du système (M).

Il suffit de reconnaître la vérité de ce théorème pour le cas $n = 2$; sa démonstration repose essentiellement sur le théorème démontré dans l'art. I, que: si on a une série régulière quelconque de grandeurs réelles:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots,$$

(parmi lesquelles il peut y en avoir qui soient égales, ce qui évidemment ne change rien au théorème), on peut trouver dans chaque intervalle $(\alpha \ldots\ldots \beta)$ donné arbitrairement, et si petit qu'on le suppose, des grandeurs réelles v, qui ne se présentent pas dans cette série.

Soit en effet G'_2 une portion continue quelconque du plan indéfini; prenons dans G'_2 le système de points (M) supposé dénombrable et condensé dans toute l'étendue de G'_2; soient enfin N et N' deux points quelconques de la portion continue G'_2, n'appartenant pas au système (M) et que nous relions d'abord l'un à l'autre par une ligne continue l comprise dans l'intérieur de G'_2, sans nous inquiéter des points (M); il faut montrer maintenant que la ligne l peut être remplacée par une autre ligne continue l', qui relie aussi l'un à l'autre les points N et N', qui est aussi comprise dans les limites de G'_2, mais qui ne contient pas un seul point du système (M).

En général il y aura sur l un nombre infini de points du système (M), en tout cas ils forment sur cette ligne une partie de (M), par conséquent aussi un système susceptible d'être dénombré.

Par suite du théorème d'arithmétique qui vient d'être mentionné, il y a donc dans chaque intervalle de la ligne l, si petit qu'il soit, des points qui n'appartiennent pas à (M). Considérons un nombre fini N_1, N_2, ... N_x, de ces points de la ligne l, tels que les segments de droites NN_1, N_1N_2, ... N_xN' soient aussi comprises en entier dans l'intérieur de G'_2. On peut toujours remplacer ces segments par des arcs de cercle ayant les mêmes points extrêmes, compris aussi dans les limites de G'_2, ne renfermant pas un seul point du système (M) et formant, par leur réunion, une ligne continue l' ayant les caractères décrits plus haut.

Il suffira de démontrer cette proposition pour un des segments, par exemple pour le premier NN_1.

Les cercles qui passent par les points N et N_1 forment un groupe continu, simplement infini; leurs centres sont sur une droite déterminée g; déterminons la position d'un de ces centres par sa distance u à un point fixe O de la droite g, cette distance étant affectée d'un signe; on peut alors en tout cas faire varier u dans un intervalle $(\alpha \,.....\, \beta)$ tel que, pour chaque cercle correspondant à un de ces u, un des deux arcs de cercle qui relient N et N_1 se trouve tout entier dans l'ensemble G'_2.

Les centres des cercles de notre groupe qui passent par les points:

$$M_1,\ M_2,\ \ldots\ldots\ M_\nu,\ \ldots\ldots$$

du système M, forment sur la droite g un système de points susceptible d'être dénombré:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots\ldots\ P_\nu,\ \ldots\ldots,$$

les valeurs correspondantes de u étant:

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_\nu,\ \ldots\ldots$$

Si on prend alors dans l'intervalle $(\alpha \,.....\, \beta)$ un nombre v qui ne soit égal à aucun u_ν (ce qu'on peut toujours faire d'après le théorème cité), on obtient, en faisant $u = v$, un cercle du groupe, sur la circonférence duquel ne se trouve pas un seul point du système (M) et qui, à cause de $\alpha < v < \beta$, nous présente un arc de cercle reliant les points N et N_1, dans les conditions demandées.

Il est donc démontré que, étant donnés deux points quelconques N et N' de l'ensemble A', qui reste de l'ensemble G'_2 après qu'on en a enlevé un système de points (M) condensé dans toute son étendue et susceptible d'être dénombré, on peut relier ces deux points par une courbe continue l' composée d'un nombre fini d'arcs de cercle, et appartenant avec tous ses points à l'ensemble A', c. à d. ne contenant pas un seul point du système (M).

Du reste on pourrait aussi, par le même moyen, relier les points N et N' par une ligne continue se développant d'après une loi analytique unique, et comprise tout entière dans l'ensemble A'.

A ces théorèmes se rattachent des considérations sur la nature de l'espace réel à trois dimensions qui doit servir de base à la description et à l'explication des phénomènes qui se présentent dans le monde réel. On sait que cet espace, soit à cause des formes qui s'y rencontrent, soit surtout à cause des mouvements qui y ont lieu, est considéré comme généralement continu. D'après les travaux publiés en même temps, mais indépendants l'un de l'autre, de Dedekind (V. l'opuscule: La continuité et les nombres irrationnels, R. Dedekind, Brunswick, 1872) et de l'auteur, cette dernière supposition consiste seulement en ce que tout point, dont les coordonnées x, y, z par rapport à un système de coordonnées rectangulaire sont fournies par des nombres réels déterminés quelconques, rationnels ou irrationnels, est considéré comme appartenant réellement à l'espace; il n'y a à cela aucune nécessité intrinsèque et il n'y faut voir qu'une construction arbitraire, quoique légitime. L'hypothèse de la continuité de l'espace n'est donc rien autre chose que la supposition, arbitraire en elle-même, de la correspondance complète, réciproque et à sens unique entre le continu purement arithmétique à trois dimensions (x, y, z) et l'espace qui sert de base au monde des phénomènes.

Nous pouvons facilement par la pensée faire abstraction de points isolés de l'espace, même quand ils sont condensés dans toute une étendue, et aboutir à la notion d'un espace discontinu à trois dimensions A, dans les conditions décrites plus haut. Quant à la question qui se présente alors, de savoir si on peut aussi imaginer un mouvement continu dans des espaces ainsi discontinus, il faut, d'après ce qui précède, y répondre affirmativement, et d'une manière absolue; car nous avons montré qu'on peut relier deux points quelconques d'une figure A par un nombre infini de lignes continues parfaitement regulières. On arrive donc à cette conséquence remarquable qu'on ne peut rien conclure immédiatement, du seul fait du mouvement continu, pour la continuité générale de l'espace à trois dimensions, tel qu'on l'a conçu pour expliquer les phénomènes du mouvement. On peut donc entreprendre l'essai d'une mécanique modifiée, applicable aux espaces de la même nature que A: grâce aux résultats de ces recherches, que l'on comparera avec les faits, on arrivera peut-être à obtenir des points d'appui réels pour l'hypothèse de la continuité générale de l'espace, tel qu'on le conçoit dans la pratique.

Berlin, le 31 Mars 1882.

SUR LES ENSEMBLES INFINIS ET LINÉAIRES DE POINTS

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

IV.

(Traduction d'un mémoire publié dans les Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, p. 51.)

Nous avons maintenant à énoncer et à démontrer divers théorèmes nouveaux qui se rattachent aux développements donnés précédemment, et qui sont à la fois intéressants en eux-mêmes et utiles pour la théorie des fonctions. Nous nous servirons de la notation suivante.

Soient plusieurs ensembles de points P_1, P_2, P_3, ... qui n'ont deux à deux aucun *point commun,* et P le système résultant de leur réunion, nous choisirons, au lieu des formules employées plus haut, (t. XVII, p. 355), la formule plus commode:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots$$

Et par conséquent, Q étant un ensemble contenu dans P et R le système qui reste quand on enlève Q de P, on pourrait écrire:

$$R \equiv P - Q.$$

Un système de points Q, que nous nous représentons dans un espace continu à n dimensions, peut être dans des conditions telles qu'aucun des points qui lui appartiennent ne soit en même temps un point-limite; nous donnerons à ce système, pour lequel

$$\mathfrak{D}(Q,\ Q') \equiv 0,$$

le nom de système de points *isolé.* Si l'on a un système de points quelconque non isolé P, on peut en tirer un système isolé Q, en enlevant de P le système $\mathfrak{D}(P,\ P')$.

On a donc:

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P,\ P')$$

et par conséquent:

$$P \stackrel{\cdot}{\equiv} Q + \mathfrak{D}(P,\ P').$$

Tout ensemble de points peut donc être composé d'un ensemble isolé Q et d'un autre ensemble R, qui est diviseur de l'ensemble dérivé P'. Si nous remarquons ensuite, ce qui a déjà été signalé souvent, que chaque dérivé supérieur d'un système P est contenu dans le dérivé précédent, nous voyons que:

$$P' - P'',\ \ P'' - P''',\ \ldots\ldots\ P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)},\ \ldots\ldots$$

sont tous des systèmes isolés.

Mais on a les décompositions, très-importantes pour ce qui doit suivre:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

et

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{à l'infini} + P^{(\omega)}.$$

Maintenant le théorème suivant est vrai pour les systèmes de points isolés:

Théorème I. Tout ensemble de points isolé peut être *dénombré,* et appartient par conséquent à la première classe.

Démonstration. Soient Q un système de points isolé quelconque compris dans un espace à n dimensions, q un point de ce système, q', q'', q''' ..... les autres points de Q.

Les distances $\overline{qq'}$, $\overline{qq''}$, $\overline{qq'''}$, ... ont une limite inférieure, que je désigne par ρ.

Soient de même ρ' la limite inférieure des distances $\overline{q'q}$, $\overline{q'q''}$, $\overline{q'q'''}$, ..., ρ'' la limite inférieure des distances $\overline{q''q}$, $\overline{q''q'}$, $\overline{q''q'''}$, ... etc.

Toutes ces grandeurs ρ, ρ', ρ'', ρ''' ..... sont distinctes de zéro, parce que Q est un ensemble isolé.

Qu'on trace, avec q comme centre, la figure à $(n-1)$ dimensions, dont les points sont à la distance $\frac{\rho}{2}$ de q; cette figure borne une sphère pleine à n dimensions, que nous désignerons par K. Qu'on forme de même une sphère pleine K' ayant pour centre le point q' et pour rayon $\frac{\rho'}{2}$, une sphère pleine K'' ayant pour centre le point q'' et pour rayon $\frac{\rho''}{2}$, etc.

Il est maintenant essentiel de remarquer que deux quelconques de ces sphères pleines, par ex. K et K' peuvent tout au plus être tangentes entre elles, mais sont d'ailleurs complètement extérieures l'une à l'autre.

Cela dérive de ce que, d'après la définition des grandeurs ρ et ρ', elles sont plus petites que $\overline{qq'}$ ou égales à $\overline{qq'}$, et que par conséquent les rayons $\frac{\rho}{2}$, $\frac{\rho'}{2}$ des deux sphères K et K' ne sont pas plus grands que la moitié de la ligne des centres $\overline{qq'}$.

Par conséquent les sphères pleines K, K', ... forment un ensemble de portions, extérieures l'une à l'autre et à n dimensions, de l'espace à n dimensions que nous avons pris pour base; mais un ensemble de cette espèce peut toujours être dénombré, comme on l'a démontré t. XX, p. 117. Par conséquent les centres q, q', q'', ... forment aussi un système susceptible d'être dénombré, c. à d. que Q peut être dénombré.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants.

Théorème II. Si le dérivé P' d'un ensemble de points P peut être dénombré, P jouit aussi de la même propriété.

Démonstration. Qu'on désigne par R le plus grand commun diviseur de P et de P', en sorte que:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P,\ P')$$

et qu'on pose:

$$P - R \equiv Q.$$

Q est alors, comme nous l'avons vu plus haut, un ensemble isolé, et par conséquent susceptible d'être dénombré d'après le théorème I.

R jouit de la même propriété, comme élément constitutif du système P', susceptible d'être dénombré, d'après l'hypothèse.

La réunion de deux systèmes susceptibles d'être dénombrés donne toujours lieu à un nouveau système qu'on peut également dénombrer; par conséquent $P \equiv Q + R$ est susceptible d'être dénombré.

Théorème III. Tout ensemble du premier genre et de la $n^{\text{ème}}$ espèce peut être dénombré.

1ère Démonstration. Le théorème est évident pour les systèmes de points d'espèce 0 qui sont évidemment des systèmes de points isolés. Mais nous allons développer complètement l'induction, en supposant le théorème vrai pour les systèmes de points de $0^{\text{ème}}$, de $1^{\text{ère}}$, de $2^{\text{ème}}$, ... de $(n-1)^{\text{ème}}$ espèce, et nous allons montrer, avec cette hypothèse, qu'il est vrai aussi pour les systèmes de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce.

Soit P un système de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce, P' sera de la $(n-1)^{\text{ème}}$ espèce; P' est donc susceptible d'être dénombré, d'après l'hypothèse, et par conséquent P l'est aussi d'après le théorème II.

2e Démonstration. P étant un système de points de la $n^{\text{ème}}$ espèce, $P^{(n)}$ sera de l'espèce 0, et par conséquent un système de points isolé. On a alors:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots\ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Tous les éléments du côté droit $(P' - P'')(P'' - P''')$, ... $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ et $P^{(n)}$ sont des ensembles isolés, par conséquent tous susceptibles d'être dénombré d'après le théorème I; le système P' formé par leur réunion, est donc susceptible d'étre dénombré et, d'après le théorème II, P le sera aussi.

Théorème IV. Tout système de points du deuxième genre, pour lequel $P^{(\omega)}$ est susceptible d'être dénombré, jouit aussi de la même propriété.

La démonstration de ce théorème ressort de la décomposition suivante:

$$P' \equiv (P' - P'') + \ldots\ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \ldots\ldots \text{ à l'infini } + P^{(\omega)}.$$

En effet comme tous les éléments de droite sont susceptibles d'être dénombrés et que l'ensemble de ces éléments est de la première puissance, on tire de là pour P' et d'après le théorème II pour P. la propriété de pouvoir être dénombré.

Si l'on désigne par α un quelconque des symboles d'infini introduits t. XVII p. 357, on a le théorème plus général:

Théorème V. Tout système de points P du deuxième genre pour lequel $P^{(\alpha)}$ est susceptible d'être dénombré, jouit aussi de la même propriété.

Ce théorème se démontre, à l'aide de l'induction complète, comme les théorèmes III et IV.

On peut aussi formuler les derniers théorèmes de la manière suivante:

P étant un système de points non-susceptible d'être dénombré, $P^{(\alpha)}$ ne le sera pas non plus, soit que α soit un nombre entier fini, ou un des symboles d'infini.

Dans leurs travaux sur certaines généralisations de théorèmes du calcul intégral, M.M. du Bois-Reymond et Harnack emploient des systèmes de points linéaires que l'on peut renfermer dans un nombre fini d'intervalles, en sorte que la somme de tous les intervalles est plus petite qu'une grandeur donnée à volonté.

Pour qu'un système de points linéaire jouisse de cette propriété, il faut évidemment qu'il ne soit condensé dans toute l'étendue d'aucun intervalle, si petit qu'il soit; cependant cette dernière condition ne paraît pas suffisante pour qu'un système de points soit tel que nous venons de le dire. En revanche nous pouvons démontrer le théorème suivant.

Théorème VI. Un système de points linéaire P contenu dans un intervalle (a, b) étant constitué de telle sorte que son ensemble dérivé P' soit susceptible d'être dénombré, on peut toujours renfermer P dans un nombre fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant aussi petite que l'on voudra.

Dans la démonstration qui va suivre nous nous servirons des théorèmes auxiliaires ci-dessous, dont le premier exprime une propriété connue des fonctions continues, et les deux autres sont le résultat de nos considérations précédentes.

Théorème auxiliaire I. Une fonction continue $\varphi(x)$ donnée dans un intervalle (c, d) de la variable continue x, et ayant à ses limites des valeurs inégales $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$, prend une fois au moins une valeur y comprise entre les limites $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$.

Théorème auxiliaire II. Un nombre infini d'intervalles, dans une droite infinie, extérieurs l'un à l'autre, et ne se rencontrant tout au plus qu'à leurs limites, est toujours susceptible d'être dénombré.

Théorème auxiliaire III. Si l'on a un ensemble de grandeurs, qui est de la première puissance:

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

on peut, dans tout intervalle proposé, trouver une grandeur v qui ne se rencontre pas parmi ces grandeurs.

Démonstration du théorème VI. Prenons, pour simplifier, l'intervalle (a, b), qui comprend P, de sorte que $a = 0$, $b = 1$; on peut facilement, par une transformation, ramener le cas général à ce cas particulier. P se trouve donc dans l'intervalle $(0, 1)$; la même chose est évidemment vraie pour P' et pour le système produit par la réunion des points de P et P' et que nous désignerons par Q.

On a:

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Nous désignons ensuite par R le système de points compris dans l'intervalle $(0, 1)$ et qui est constitué par les points restants dans cet intervalle après qu'on en a enlevé le système Q, en sorte que:

$$(0, 1) \equiv Q + R. \tag{1}$$

De ce que le système P' est susceptible d'être dénombré, comme on l'a supposé, on tire d'abord les conclusions suivantes:

1. P est aussi susceptible d'être dénombré, d'après le théorème II, par conséquent il en est de même de Q.

2. P et par conséquent P' ne sont condensés dans toute l'étendue d'aucun intervalle; car si P était condensé dans toute l'étendue de l'intervalle (i, k), tous les points de cet intervalle appartiendraient à P' et, d'après le théorème auxiliaire III, P' ne pourrait pas être dénombré. Par conséquent Q n'est condensé dans toute l'étendue d'aucun intervalle. Les valeurs des coordonnées, qui correspondent aux points du système Q, susceptible d'être dénombré, peuvent être appelées

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots \tag{2}$$

Si maintenant nous considérons le système R, on peut montrer que les valeurs des coordonnées correspondant à ses points sont situées respectivement dans l'intérieur d'une série infinie d'intervalles:

$$(3) \qquad (c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots\ldots (c_\nu, d_\nu), \ldots\ldots$$

extérieurs l'un à l'autre et compris dans l'intervalle (0, 1). Comme les valeurs intérieures à ces intervalles appartiennent seules à des points du système R, il résulte de la relation (1) que les limites c_ν et d_ν de ces intervalles correspondent à des points du système Q, et par conséquent se présentent dans la série (2).

En effet, soit r un point de R, les points de Q ne peuvent pas se rapprocher à l'infini de r, parce qu'autrement r serait point-limite de P et par conséquent appartiendrait à Q. Il doit maintenant y avoir à gauche de r un point c et à droite de r un point d, tels qu'aucun point de Q ne se trouve dans l'intervalle (c, d) et que par contre il y ait en dehors de cet intervalle, des points de Q aussi rapprochés qu'on le voudra de c et de d, au cas où c et d ne sont pas des points isolés de Q; mais comme chaque point-limite de Q appartient à Q, c et d, même dans le dernier cas, appartiennent aussi à Q. Les intervalles en nombre infini (c, d), ainsi obtenus, sont tous, évidemment, extérieurs l'un à l'autre et forment par conséquent, d'après le théorème auxiliaire II, un système susceptible d'être dénombré (3), ce qu'il fallait démontrer.

Puisque nous supposons $c_\nu < d_\nu$, la grandeur de l'intervalle (c_ν, d_ν) est:

$$= d_\nu - c_\nu.$$

La somme de toutes ces grandeurs d'intervalles s'appellera σ, en sorte que:

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma.$$

On voit a priori que $\sigma \overline{\gtrless} 1$, parce que les intervalles sont tous extérieurs l'un à l'autre et sont contenus dans l'intervalle (0, 1). Si nous pouvions prouver que $\sigma = 1$, notre théorème VI serait démontré, comme on peut s'en convaincre par une considération très-simple se rattachant au sens des intervalles (c_ν, d_ν).

Toute notre démonstration se réduit donc à prouver que l'hypothèse $\sigma < 1$ conduit à une contradiction.

Pour cela nous définissons, pour $0 < x \overline{\gtrless} 1$, une fonction $f(x)$ comme il suit: Qu'on additionne les grandeurs de tous les intervalles (c_ν, d_ν), tant que ces intervalles tombent dans les limites de l'intervalle $(0,\ x)$ et qu'on pose cette somme $= f(x)$. (On convient de ne prendre dans cette somme, d'un intervalle $(c_\nu,\ d_\nu)$ qui se trouve, en partie, en dehors de $(0,\ x)$, que la partie correspondante qui tombe dans les limites de $(0,\ x)$.)

On a évidemment:

$$f(1) = \sigma.$$

Si de plus on établit que $f(0) = 0$, il s'ensuit facilement que $f(x)$ est une fonction continue de x pour $0 \leqq x \leqq 1$.

En effet de la définition de $f(x)$ il résulte immédiatement que, x et $x + h$ étant deux valeurs distinctes de l'intervalle $(0,\ 1)$, on a pour des valeurs positives de h:

$$f(x+h) - f(x) \mathrel{\substack{> 0 \\ \leqq h}}.$$

De là on conclut la continuité de $f(x)$.

On voit alors aussitôt, en revenant à la définition de $f(x)$, que, si x et $x + h$ sont deux valeurs distinctes d'un seul et même intervalle partiel $(c_\nu,\ d_\nu)$, on a:

$$f(x+h) - f(x) = h,$$

par conséquent aussi:

$$(x+h) - f(x+h) = x - f(x).$$

Si donc on introduit la fonction

$$\varphi(x) = x - f(x),$$

$\varphi(x)$ sera aussi une fonction continue de x qui change sans diminuer de 0 à $1 - \sigma$, si x croît de 0 à 1. Ce changement se fait de telle façon que, dans les limites d'un des intervalles partiels $(c_\nu,\ d_\nu)$, la fonction continue $\varphi(x)$ conserve une valeur constante.

De là résulte pour la fonction $\varphi(x)$ cette propriété que: toutes les valeurs qu'elle prend sont épuisées par la série de valeurs:

$$(5) \qquad \varphi(u_1),\ \varphi(u_2),\ \ldots\ldots\ \varphi(u_\nu),\ \ldots\ldots$$

En effet x peut être égalé à une des valeurs u, et dans ce cas nous avons:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu).$$

Ou bien x est une valeur comprise dans un des intervalles (c_ν, d_ν); dans ce cas, à cause de la constance de $\varphi(x)$ dans un de ces intervalles, nous avons:

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu).$$

Mais maintenant, comme nous l'avons vu plus haut, les valeurs c_ν et d_ν appartiennent également à la série (2), on a par exemple:

$$c_\nu = u_\lambda.$$

Par conséquent on a aussi dans ce cas:

$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda).$$

La série (5) comprend donc toutes les valeurs que peut prendre généralement $\varphi(x)$.

Le système de valeurs, que peut prendre la fonction continue $\varphi(x)$, est par conséquent susceptible d'être dénombré.

Si maintenant $\sigma < 1$, et par suite $1 - \sigma$ distinct de zéro, la fonction continue $\varphi(x)$, d'après le théorème auxiliaire I prendrait au moins une fois toute valeur y entre 0 et $1 - \sigma$. Par conséquent, dans la série (5) qui épuise toutes les valeurs prises par la fonction $\varphi(x)$, comme on vient de le montrer, on trouverait tous les nombres possibles de l'intervalle $(0, 1 - \sigma)$, ce qui est en contradiction avec le théorème auxiliaire III. Il ne reste donc que l'hypothèse $\sigma = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Hartzbourg, 1er Septembre 1882.

FONDEMENTS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES ENSEMBLES

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Extrait d'un article des Annales mathématiques de Leipsic, t. XXI, pag. 545.)

§ 1.

Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de la notion de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent.

Je me trouve contraint de développer cette notion de nombre au point que je pourrais à peine, sans cela, avancer dans la théorie des ensembles; que cette nécessité où je me trouve placé me serve de justification ou d'excuse, si cela était nécessaire, pour avoir introduit dans mon travail un ordre d'idées qui y paraît étranger. Car il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la série des nombres entiers réels au-delà de l'infini; si hardie que paraisse cette tentative, je puis exprimer non-seulement l'espoir, mais la ferme conviction qu'avec le temps on considérera ce développement comme très-simple, très-naturelle et parfaitement accessible. En même temps je ne me dissimule pas cependant que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répondues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

Pour ce qui concerne l'infini mathématique, dans la mesure où jusqu'à présent, il a pu être employé légitimement dans la science et contribuer à ses progrès, il me semble qu'il se présente en première ligne dans le sens d'une grandeur variable, croissant au-delà de toute limite ou décroissant autant que l'on voudra, mais restant toujours finie. Je donne à cet infini le nom *d'infini improprement dit.*

Mais dans ces derniers temps il s'est formé, soit dans la géométrie, soit particulièrement dans la théorie des fonctions, un nouveau genre de notions d'infini, tout aussi légitimes; ainsi, d'après ces notions nouvelles, dans la recherche d'une fonction analytique d'une grandeur complexe variable, l'usage s'est imposé généralement de se représenter, dans le plan qui représente la variable complexe, un point unique situé dans l'infini, c. à d. infiniment éloigné, mais néanmoins déterminé, et d'examiner la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage de ce point absolument comme dans le voisinage d'un autre point quelconque; on voit alors que la fonction dans le voisinage du point infiniment éloigné, se comporte précisément de la même manière que s'il s'agissait de tout autre point placé dans le fini, en sorte qu'on est pleinement autorisé par là à se représenter l'infini, dans ce cas, comme transporté sur un point tout à fait déterminé.

Quand l'infini se présente sous une forme ainsi déterminée, je l'appelle *infini proprement dit.*

Pour comprendre ce qui va suivre, distinguons bien ces deux formes sous lesquelles s'est présenté l'infini mathématique et sous lesquelles il a contribué aux plus grands progrès dans la géométrie, dans l'analyse, et dans la physique mathématique.

Sous sa première forme *d'infini improprement dit,* il se présente comme un fini variable; sous sa seconde forme que j'appelle *l'infini proprement dit,* il se présente comme un infini absolument déterminé. Les nombres réels entiers infinis que je définirai dans la suite et auxquels j'ai été amené il y a déjà de longues années, sans m'être assuré d'y trouver des nombres concrets à sens réel,[1] n'ont absolument rien de commun avec la première de ces deux formes, l'infini improprement dit; ils ont au contraire *le même caractère de détermination* que nous trouvons, dans la théorie des fonctions analytiques, pour le point infiniment éloigné; ils appartiennent donc aux formes et aux affections *de l'infini proprement dit.* — Mais tant que le point reste isolé dans l'infini du plan de nombres complexes en face de tous les points qui sont dans le fini, nous obtenons non-seulement *un* nombre entier infini, mais une suite infinie de ces nombres bien distincts les uns des autres et ayant, soit entre eux, soit avec les nombres entiers finis, des rapports réguliers .....

Ces rapports ne sont guère de ceux que l'on peut, au fond, ramener à des rapports de nombres finis entre eux; ce phénomène a lieu sans doute, mais il ne se présente fréquemment que dans les degrés et les formes diverses de *l'infini improprement dit,* par exemple dans les fonctions d'une variable x qui deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, au cas où elles ont des numéros d'ordre finis déterminés en tendant à l'infini. Ces rapports, en fait, ne peuvent être considérés que comme une espèce de rapports du fini, ou comme pouvant s'y ramener immédiatement; les lois relatives aux *nombres entiers proprement infinis* sont par contre complètement différentes des dépendances que l'on trouve dans le fini.

Les *deux principes de formation,* à l'aide desquels on définit les nouveaux nombres infinis déterminés, comme on pourra s'en convaincre, sont tels qu'en les appliquant ensemble, on peut dépasser toutes les limites dans la formation abstraite des nombres entiers réels; mais heureusement on a d'autre part, comme nous le verrons, un *troisième* principe que j'appelle *principe d'arrêt* ou de *limitation,* et grâce auquel on peut donner certaines limites successives au procédé de formation qui est absolument sans fin; nous obtiendrons ainsi, dans la suite *absolument infinie* des nombres réels entiers, des *divisions naturelles,* que j'appellerai *classes de nombres.*

La *première classe de nombres* (I) est le système des nombres entiers finis 1, 2, 3, ... ν, ...; vient ensuite la seconde classe de nombres (II), composée de certains nombres entiers infinis α se suivant entre eux dans un ordre de succession déterminé:

---

[1] Je les ai appelés jusqu'à présent: »Symboles d'infini définis d'une façon déterminée«, v. Ann. math. t. XVII, p. 357, t. XX, p. 113, t. XXI, p. 54.

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu},$$
$$\ldots,\ \omega^{\omega},\ \ldots,\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots;$$

la seconde classe de nombres une fois définie, on arrive à la troisième, puis à la quatrième, et ainsi de suite.

L'introduction de ces nouveaux nombres entiers me paraît tout d'abord très-importante pour développer et affermir la notion de *puissance* que j'ai fait entrer dans mes travaux (J. de Borchardt, t. 77, p. 257; t. 84, p. 242) et que j'ai souvent employée dans les premiers numéros du présent travail. D'après cela, à tout système bien défini convient une puissance déterminée, et deux systèmes ont la même puissance, quand on peut établir entre elles, d'élément à élément, une correspondance réciproque à sens unique.

Dans les systèmes finis la *puissance* s'accorde avec le *nombre* des éléments, parce que ces systèmes ont, comme on sait, dans tous les arrangements, le même nombre d'éléments.

Pour les systèmes infinis au contraire, il n'avait été question généralement jusqu'ici, ni dans mes travaux ni ailleurs, d'un *nombre* d'éléments *défini avec précision,* mais on pouvait bien leur attribuer aussi une *puissance déterminée, et complètement indépendante de l'ordre de leurs éléments.*

Il fallait, comme il était facile de le faire voir, concéder la plus petite puissance des systèmes infinis aux ensembles capables d'avoir la correspondance réciproque à sens unique avec la *première* classe de nombres et ayant par suite la même puissance qu'elle. Mais jusqu'à présent on n'avait pas pour les *puissances supérieures,* une définition aussi simple et aussi naturelle.

Les classes de nombres entiers réels infinis déterminés nous apparaissent maintenant comme représentant naturellement, et sous une forme unie la *suite régulière des puissances croissantes de systèmes bien définis.* Je montre de la manière la plus précise que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ne diffère pas seulement de la puissance de la première classe, mais qu'elle est encore, en réalité, la puissance *immédiatement supérieure;* nous pouvons donc l'appeler *deuxième puissance* ou *puissance de deuxième classe.* On obtient de même, par la *troisième* classe de nombres, la définition de la *troisième puissance, ou puissance de troisième classe, etc. etc.*

§ 11.

Nous avons maintenant à montrer comment on est amené aux définitions de ces nouveaux nombres et de quelle manière on obtient, dans la suite des nombres entiers réels absolument infinie, les divisions naturelles que j'appelle *classes de nombres*. La série (I) des nombres entiers réels positifs $1, 2, 3, \ldots\ldots \nu, \ldots\ldots$ doit sa formation à la répétition et à la réunion d'unités qu'on a prises pour point de départ et qu'on considère comme égales; le nombre ν exprime un nombre fini déterminé de répétitions successives de ce genre, aussi bien que de la réunion des unités choisies en un seul tout. La formation des nombres entiers réels *finis* repose donc sur le principe de l'addition d'une unité à un nombre *déjà formé;* j'appelle *premier principe* de formation ce moment qui, comme nous le verrons bientôt, joue aussi un rôle essentiel dans la production des nombres entiers supérieurs. Le nombre des nombres ν de la classe (I), formé de cette manière, est infini et parmi tous ces nombres il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres. Il serait donc contradictoire de parler d'un nombre maximum de la classe (I); toutefois on peut d'autre part imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω, et qui *servira à exprimer que tout l'ensemble (I) est donné d'après la loi dans sa succession naturelle.* On peut même se représenter le nouveau nombre ω comme la limite vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre par là que ω sera le *premier* nombre entier qui *suivra tous* les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à *tous* les nombres ν. En associant le nombre ω avec les unités primitives on obtient à l'aide du *premier principe* de formation les nombres plus étendus:

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots\ldots\ \omega + \nu,\ \ldots\ldots;$$

comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω et qui sera le *premier* après tous les nombres obtenus jusqu'à présent ν et $\omega + \nu$; si on applique encore au nombre 2ω le premier principe de formation, on arrive à continuer comme il suit les nombres obtenus jusqu'à présent:

$$2\omega + 1,\ 2\omega + 2,\ \ldots\ldots\ 2\omega + \nu,\ \ldots\ldots$$

La fonction logique qui nous a donné les deux nombres ω et 2ω, est évidemment différente du premier principe de formation; je l'appelle *deuxième* principe de formation des nombres réels entiers et je définis mieux ce principe en disant: *Etant donné une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on pose, en s'appuyant sur ce deuxième principe de formation, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c. à d. qui est défini comme étant immédiatement supérieur à tous ces nombres.*

En appliquant et en combinant ces *deux principes* de formation on obtient donc successivement les continuations des nombres que nous avons obtenus jusqu'ici, comme il suit:

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots\ldots,\ 3\omega+\nu,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \ldots\ldots,\ \mu\omega+\nu,\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cependant nous n'en sommes pas venu à la fin, parce que parmi les nombres $\mu\omega+\nu$ il n'y en a pas non plus qui soit plus grand que tous les autres.

Le deuxième principe de formation nous permet donc d'introduire un nombre qui suit immédiatement tous les autres $\mu\omega+\nu$, et que l'on peut appeler ω^2; à ce nombre se rattacheront dans un ordre de succession déterminé:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

et l'on arrive alors évidemment, en suivant les deux principes de formation, à des nombres de la forme:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu;$$

mais alors le deuxième principe de formation nous amène à poser un nouveau nombre qui sera immédiatement supérieur à tous ces nombres et qu'on pourra désigner par ω^ω.

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est *sans fin;* en suivant les deux principes de formation on obtient toujours de nouveaux nombres et de nouvelles séries de nombres, avec une *succession parfaitement déterminée.*

On pourrait donc croire d'abord que nous allons nous perdre à l'indéfini dans cette formation de nouveaux nombres entiers infinis déterminés et que nous ne sommes pas en état *d'arrêter provisoirement* ce procédé sans fin, pour arriver par là à une *limitation semblable à celle que nous avons trouvée, en fait, dans un certain sens, par rapport à l'ancienne classe de nombres* (I); là on n'employait que le premier principe de formation et on ne pouvait pas sortir de la série (I). Mais le deuxième principe de formation ne devait pas seulement conduire au-delà du système de nombres employé jusqu'à présent; il nous apparait encore certainement comme un moyen qu'on peut combiner avec le premier principe de formation pour arriver à *pouvoir franchir toute limite* dans la formation abstraite des nombres réels entiers.

Mais si nous remarquons maintenant que tous les nombres obtenus jusqu'à présent et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition, nous verrons que cette condition, *si on la pose comme obligatoire pour tous les nombres à former immédiatement,* nous apparaît comme un *troisième* principe, qui vient s'ajouter aux deux premiers et que j'appelle *principe d'arrêt ou de limitation.* En vertu de ce principe, comme je le montrerai, la deuxième classe de nombres (II), définie par l'adjonction de ce principe, n'acquiert pas seulement une puissance plus élevée que (I), mais *précisément la puissance immédiatement supérieure,* et par conséquent la *deuxième puissance.*

La condition dont nous venons de parler et qui est remplie, comme on peut s'en convaincre immédiatement, par chacun des nombres infinis α définis jusqu'ici, est: *que le système des nombres qui se trouvent, dans la suite des nombres, avant celui qu'on considère* et à partir de 1, soit de la même puissance que la première classe de nombres (I). Prenons, par exemple, le nombre ω^ω, ceux qui le précèdent sont contenus dans la formule:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu,$$

où μ, ν_0, ν_1, ... ν_μ peuvent prendre toutes les valeurs finies positives entières, y compris zéro, et à l'exclusion de la combinaison: $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots\ldots = \nu_\mu = 0$.

Comme on le sait, ce système peut se mettre sous forme d'une série *simplement* infinie et il a par conséquent *la même puissance que (I).*

Comme alors toute suite de systèmes dont chacun est de la première puissance, donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système, qui a la même puissance que (I), il est clair qu'en continuant notre suite de nombres on arrive toujours, en fait, à avoir immédiatement de nouveaux nombres qui *remplissent réellement cette condition.*

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres (II): l'ensemble de tous les nombres α qu'on peut former à l'aide des deux principes de formation, qui se succèdent suivant un ordre déterminé:

$$\omega,\ \omega + 1,\ \ldots\ldots,\ \nu_0\omega^{\mu} + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_{\mu},\ \ldots\ldots,\ \omega^{\omega},\ \ldots$$
$$\ldots\ \omega^{\omega^{\omega}},\ \ldots\ldots,\ \alpha,\ \ldots\ldots$$

et qui sont soumis à cette condition, que tous les nombres qui précèdent le nombre α, à partir de 1, forment un système de la même puissance que la classe de nombres (I).

§ 12.

Nous avons à démontrer tout d'abord ce théorème que: *la nouvelle classe de nombres (II) a une puissance différente de celle de la première classe de nombres (I).*

Ce théorème résulte du suivant:

»*Soit* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots\ldots$ *un système quelconque de la première puissance, de divers nombres de la deuxième classe de nombres (en sorte que nous sommes autorisés à les mettre sous la forme de série simple* (α_ν)*), ou il y a un de ces nombres qui est plus grand que tous les autres, soit* γ*; ou bien, si ce n'est pas le cas, il y a un nombre déterminé* β *de la deuxième classe (II) qui ne se rencontre pas parmi les nombres* α_ν*, en sorte que* β *est plus grand que tous les* α_ν *et que par contre tout nombre entier* $\beta' < \beta$ *est inférieur en grandeur à certains nombres de la série* (α_ν)*; on peut appeler le nombre* γ *ou* β *la limite supérieure du système* (α_ν).»

La démonstration de ce théorème est fort simple: soit α_{x_2} dans la série (α_ν) le premier nombre plus grand que α_1, α_{x_3} le premier plus grand que α_{x_2}, etc.

On a alors:

$$1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots\dots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{x_2} < \alpha_{x_3} < \alpha_{x_4} < \dots\dots$$

et $\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$, dès que $\nu < x_\lambda$.

Il peut se faire maintenant que, à partir d'un certain nombre α_{x_ρ} tous les nombres qui le suivent dans la série (α_ν) soient plus petits que lui; ce nombre est alors évidemment le plus grand de tous et nous avons: $\gamma = \alpha_{x_\rho}$. Sinon, qu'on imagine le système de tous les nombres entiers plus petits que α_1, à partir de 1, qu'on ajoute immédiatement à ce système celui de tous les nombres entiers $\geqq \alpha_1$ et $< \alpha_{x_2}$, puis celui de tous les nombres $\geqq \alpha_{x_2}$ et $< \alpha_{x_3}$, et ainsi de suite; on obtiendra alors une portion déterminée de nombres successifs de nos deux premières classes de nombres; ce système de nombres est évidemment de la première puissance et par conséquent il existe (d'après la définition de (II)) un nombre déterminé β de l'ensemble (II), qui est immédiatement plus grand que ces nombres. On a donc $\beta > \alpha_{x_\lambda}$ et par conséquent aussi: $\beta > \alpha_\nu$ parce qu'on peut toujours prendre x_λ assez grand pour dépasser un ν donné et qu'alors $\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$.

On voit d'autre part que tout nombre $\beta' < \beta$ est inférieur en grandeur à certains nombres α_{x_ν}; et ainsi se trouvent démontrées toutes les parties du théorème.

De là résulte que *l'ensemble de tous les nombres de la deuxième classe de nombres (II) n'a pas la même puissance que (I);* car autrement nous pourrions concevoir tout l'ensemble (II) sous la forme d'une série simple:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\dots\ \alpha_\nu,\ \dots\dots$$

qui aurait, d'après le théorème que nous venons de démontrer, un membre maximum γ ou dont tous les membres α_ν seraient inférieurs en grandeurs à un certain nombre β de (II); dans le premier cas le nombre $\gamma + 1$ qui appartient à la classe (II), dans le second cas le nombre β bien qu'appartenant à la classe (II), ne se trouveraient pas dans la série (α_ν), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'identité des systèmes (II) et (α_ν); par conséquent la classe dé nombres (II) a une *autre puissance que la classe de nombres (I).*

Quant au fait, que la seconde des deux puissances des classes de nombres (I) et (II) suit immédiatement la première, c. à d. qu'entre les deux puissances il n'y en a pas d'autre; c'est une conséquence d'un théorème que je vais formuler et démontrer immédiatement.

Cependant, jetons d'abord un regard en arrière et rappelons-nous les moyens par lesquels nous sommes arrivés soit au développement de la notion de nombre entier réel, soit à une nouvelle puissance de systèmes bien définis, distincte de la première; il y avait *trois moments logiques* importants et qu'il faut bien distinguer l'un de l'autre. Ce sont les *deux principes de formation* définis plus haut, et *un principe d'arrêt ou de limitation* qui s'ajoute aux premiers et qui consiste en *ce qu'on ne peut entreprendre, à l'aide d'un des deux autres principes, la formation d'un nouveau nombre entier qu'à une condition nécessaire: c'est que l'ensemble de tous les nombres précédents ait la même puissance qu'une classe de nombres dont on a déjà défini toute l'étendue.* Par cette méthode, en observant ces trois principes, *on peut arriver toujours à de nouvelles classes de nombres et, avec elles, à toutes les puissances diverses, successivement croissantes que l'on rencontre dans la nature matérielle ou immatérielle;* les nouveaux nombres ainsi obtenus ont alors toujours la même précision concrète et la même réalité objective que les précédents; je ne sais donc pas, en vérité, ce qui pourrait nous empêcher de nous servir de ce moyen de formation de nouveaux nombres, quand on voit que, pour le progrès des sciences, il est indispensable d'introduire une nouvelle classe de nombres.

§ 13.

J'arrive maintenant, pour tenir ma promesse, à démontrer que les puissances de (I) et de (II) se suivent immédiatement, en sorte qu'il n'y en a *pas d'autre entre ces deux.*

Si, d'après une loi quelconque, on choisit dans l'ensemble (II) un système (α') de divers nombres α', c. à d. si on conçoit un système quelconque (α') contenu dans (II), ce système aura toujours des propriétés que l'on peut exprimer par les théorèmes suivants:

»*Parmi les nombres du système* (α') *il y en a toujours un plus petit que tous les autres.*»

»*Etant donné, en particulier, une suite de nombres de l'ensemble (II):* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\beta, \ldots\ldots$ *dont la grandeur va toujours en décroissant (en sorte que* $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$, *si* $\beta' > \beta$), *cette série doit finir nécessairement, avec un nombre fini de membres et se termine par le plus petit des nombres; la série ne peut pas être infinie.*»

Il est remarquable que ce théorème, qui est d'une évidence immédiate quand les nombres α_β sont des nombres entiers finis, peut aussi se démontrer dans le cas de nombres infinis α_β. En fait, d'après le théorème précédent que l'on déduit facilement de *la définition de la série de nombres (II)*, parmi les nombres α_ν, à ne considérer que ceux où l'indice ν est fini, il y en a un plus petit que tous les autres; soit ce nombre $= \alpha_\rho$, il est évident, qu'à cause de $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, la série α_ν et par conséquent aussi toute la série α_β doit être composée précisément de ρ membres, et par suite sera une série finie.

On arrive maintenant au théorème fondamental suivant:

»(α') *étant un système de nombres quelconque contenu dans l'ensemble (II), il ne peut se présenter que les trois cas suivants: ou bien* (α') *est un ensemble fini, c. à d. composé d'une quantité finie de nombres, ou bien* (α') *a la puissance de la première classe (I) ou enfin* (α') *a la puissance de la classe (II); il n'y a pas d'autre cas possible.*»

On peut simplement démontrer ce théorème de la manière suivante: soit Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres (III): tous les nombres α' du système (α') sont alors plus petits que Ω parce que cette série est contenue dans (II).

Nous nous représentons maintenant les nombres α' *ordonnés d'après leur grandeur:* soit α_ω le plus petit de ces nombres, $\alpha_{\omega+1}$ *le nombre immédiatement supérieur, etc., on a la série* (α') *sous forme d'une série* »*bien ordonnée*» α_β, *où* β *parcourt les nombres de notre série naturelle de nombres développée, à partir de* ω; évidemment β reste inférieur ou égal à α_β et comme $\alpha_\beta < \Omega$, on a aussi $\beta < \Omega$. Le nombre β ne peut donc pas sortir de la classe de nombres (II), mais il reste dans les limites de cette classe; il ne peut donc se présenter que trois cas: ou bien β reste au-dessous d'un nombre assignable de la série $\omega + \nu$, alors (α') est un système fini; ou bien β prend toutes les valeurs de la série $\omega + \nu$, mais reste au-dessous d'un nombre *assignable* de la série (II), et alors (α') est évidemment un système de la première puissance; ou enfin β prend des valeurs aussi grandes qu'on voudra dans (II), alors β parcourt *tous les nombres de (II);* dans ce dernier cas l'ensemble (α_β) c. à d. le système (α') a *évidemment la même puissance que (II).*

c. q. f. d.

Comme conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer, on a les suivants:

»*Etant donné un système quelconque bien défini M de la puissance de la classe de nombres (II), si on prend dans M un système partiel infini quelconque M', on peut concevoir l'ensemble M' sous forme d'une série simplement infinie, ou bien on peut faire correspondre réciproquement les deux systèmes M' et M à sens unique.*»

»*Etant donné un système bien défini quelconque M de la deuxième puissance, un système partiel M' pris dans M, et un système partiel M'' pris dans M', si on sait que le dernier système M'' peut être rapporté d'une manière réciproque, et à sens unique, au premier M, on peut toujours aussi faire correspondre le deuxième M', d'une manière réciproque et à sens unique, au premier, et par conséquent aussi au troisième.*»

J'énonce ici ce *dernier* théorème, à cause du rapport qu'il a avec ceux qui précèdent, en supposant que M a la *puissance de (II);* évidemment il est encore vrai quand M a la *puissance de (I);* mais ce qui me paraît très-*remarquable* et ce que je signale ici expressement, c'est que ce théorème est vrai d'une manière générale, quelle que soit la puissance du système M. J'y reviendrai plus au long dans un autre travail, et je ferai voir alors l'intérêt particulier qui se rattache à ce théorème général.

§ 2.

Un avantage considérable des nouveaux nombres consiste pour moi dans une notion nouvelle, qui ne s'était pas encore presentée jusqu'ici, celle *du nombre des éléments d'un ensemble infini bien ordonné;* comme cette notion est toujours exprimée par un nombre complètement déterminé de l'ensemble de nombres que nous avons développé, pourvu seulement que *l'ordre des éléments du sustème, tel que nous le définirons tout à l'heure, soit déterminé,* et comme d'autre part la notion de nombre d'éléments a une représentation objective immédiate, ce rapport entre le nombre des éléments d'un ensemble et le nombre démontre la *réalité* de ce dernier même dans les cas où il est infini et en même temps déterminé.

Par ensemble ou système bien ordonné il faut entendre tout système bien défini, où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a *un prèmier élément* du système; chaque élément (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) est suivi immédiatement d'un autre déterminé, et à chaque système arbitraire d'éléments, fini ou infini appartient un élément *déterminé,* qui les suit *immédiatement* dans la succession (pourvu que dans l'ensemble il y a des éléments qui suivent tous les éléments du système partiel considéré). Pour éclaircir soit donné un ensemble (α_ν) de la première puissance; on peut en former de différentes manières des *ensembles bien ordonnés,* par ex. les suivants:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$

$$(\alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

etc. etc.

Deux »systèmes bien ordonnés» sont dits avoir *le même nombre* (par rapport aux successions auxquelles ils ont donné lieu), quand on peut établir entre eux *une correspondance réciproque à sens unique telle,* que, E et F étant deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1 les éléments correspondants de l'autre, la position de E et F dans la succession du premier système s'accorde toujours avec la position de E_1 et F_1 dans la succession de la deuxième série, en sorte que, si E précède F dans la succession de la première série, E_1 précède aussi F_1 dans la succession de la deuxième série. Cette correspondance, si elle est possible, comme il est facile de le voir, est toujours *complètement déterminée,* et comme dans la série des nombres développée il y a toujours un nombre α, et un seul, tel que ceux qui le précèdent (à partir de 1) aient dans la succession naturelle le même nombre, on est obligé d'égaler directement à α le nombre de ces deux systèmes »bien ordonnés», quand α est un nombre infiniment grand, et de l'égaler à $\alpha - 1$, qui précède immédiatement α, quand α est un nombre entier fini. Par exemple les trois ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots)$$
$$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \ldots\ldots)$$
$$(1, 2, 3, \ldots\ldots, \nu, \ldots\ldots)$$

ayant le même nombre, celui-ci se trouve d'après notre définition égal à ω.

De même les nombres des ensembles bien ordonnés:

$$(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$
$$(\alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$
$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots\ldots, \alpha_{2\nu-2}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$

se trouvent, d'après notre définition, être respectivement égals à $\omega + 1$, $\omega + 2$, 2ω.

La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis, c'est qu'un système fini offre le même nombre d'éléments dans toutes les successions que l'on peut leur donner; au contraire un système composé d'un nombre infini d'éléments aura en général divers nombres, d'après la succession que l'on donnera à ses éléments. *La puissance d'un système est, comme nous l'avons vu, un attribut indépendant de l'ordre de ce système; mais le nombre du système nous apparaît comme un facteur dépendant, en général, d'une succession donnée des éléments, dès qu'on a à faire avec des systèmes infinis.* Cependant même dans les systèmes infinis *il y a encore un certain rapport* entre la *puissance* du système et le *nombre* de ses éléments, par rapport à une succession donnée.

Prenons d'abord un système ayant la puissance de la *première classe* et donnons aux éléments une succession déterminée quelconque, de manière à obtenir un système »bien ordonné», le nombre de ce système est toujours un nombre déterminé de la *deuxième* classe de nombres et ne peut jamais être déterminé par un nombre d'une autre classe que de la deuxième. D'autre part on peut disposer tout système de la première puissance dans un ordre de succession tel que le nombre de ce système, par rapport à cette succession, soit égal à un nombre de la deuxième classe, désigné d'avance arbitrairement. Nous pouvons encore exprimer ces théorèmes comme il suit: *tout système de la puissance de première puissance peut être dénombré par des nombres de la deuxième classe de nombres et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel que le système lui-même dans cette succession est dénombré par un nombre de la deuxième classe de nombres donné à volonté, nombre qui exprime le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

Les règles analogues s'appliquent aux systèmes de puissances plus élevées. *Ainsi tout système bien défini de la deuxième puissance peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres, et par ces nombres seuls, et on peut toujours donner aux éléments du système un ordre de succession tel, que le système lui-même dans cette succession est dénombré* (1) *par un nombre de la troisième classe de nombres donné à volonté, nombre qui détermine le nombre des éléments du système par rapport à cette succession.*

§ 3.

La notion du système bien ordonné nous apparaît comme fondamental pour toute la théorie des ensembles. Je reviendrai dans un autre travail sur cette loi fondamentale, ce me semble, très-importante par ses conséquences et remarquable surtout par sa généralité: *on peut toujours mettre tout système bien défini sous la forme d'un système bien ordonné.* Je me borne ici à démontrer comment, de la notion du système bien ordonné, on arrive de la manière la plus simple aux opérations fondamentales pour les nombres entiers, finis ou infinis déterminés, et comment les lois

(1) D'après la définition que nous venons de donner, ce que nous avons appelé, dans les premiers numéros de notre travail, systèmes dénombrables ne sont que des systèmes dénombrables *par* des nombres de la première classe (systèmes finis) ou *par* des nombres de la deuxième classe (systèmes de la première puissance).

de ces opérations se déduisent, avec une certitude évidente, de la considération intrinsèque immédiate. Soient d'abord deux systèmes bien ordonnés M et M_1, auxquels correspondent comme nombres les nombres α et β, $M + M_1$ sera un nouveau système bien ordonné; il y a donc aussi un nombre déterminé qui correspond comme nombre au système $M + M_1$ par rapport à l'ordre de succession que l'on obtient entre ses éléments; ce nombre s'appelle la somme de α et β et se désigne par $\alpha + \beta$; on voit immédiatement que, si α et β ne sont pas finis l'un et l'autre, $\alpha + \beta$ sera en général différent de $\beta + \alpha$. *La loi de commutation cesse donc d'être vraie d'une manière générale pour l'addition.* Et maintenant on arrive si simplement à la notion de la somme de plusieurs nombres donnés dans une suite déterminée, qui peut être elle-même une suite infinie déterminée, que je n'insisterai pas davantage sur ce point; je me contente donc de remarquer que la loi d'association se trouve généralement vraie. On a en particulier:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Si on prend une succession, déterminée par un nombre β, de systèmes tous égaux et également ordonnés, dans chacun desquels le nombre des éléments est égal à α, on obtient un nouveau système bien ordonné dont le nombre donne la définition du produit $\beta\alpha$, où β est le multiplicateur, α le multiplicande; ici encore il se trouve que $\beta\alpha$ diffère généralement de $\alpha\beta$, et par conséquent *la loi de commutation n'est pas vraie non plus d'une manière générale pour la multiplication des nombres.* Par contre la loi d'association s'applique aussi à la multiplication d'une manière générale, en sorte qu'on a: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Parmi les nouveaux nombres, quelques-uns se distinguent des autres par la propriété de nombres premiers; cependant il faut caractériser cette propriété d'une manière un peu plus déterminée, en entendant par nombre premier un nombre α, pour lequel la décomposition $\alpha = \beta\gamma$, où β est multiplicateur, n'est possible que si $\beta = 1$ ou $\beta = \alpha$; par contre le multiplicande aura généralement aussi pour les nombres premiers α un certain champ d'indétermination, ce qui, d'après la nature des choses, ne peut pas se modifier. Néanmoins nous montrerons dans un autre travail que la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers peut toujours avoir lieu d'une manière essentiellement unique et déterminée même au point de vue de la suite des facteurs (tant que ces facteurs ne sont pas des nombres premiers finis se présentant à côté l'un de l'autre dans le produit). On obtient par là deux espèces de nombres premiers infinis déterminés, dont la première se rapproche des nombres premiers finis, tandis que les nombres premiers de la deuxième espèce ont un tout autre caractère.

Maintenant, à l'aide de ces nouvelles données, j'espère de donner bientôt une preuve rigoureuse du théorème relatif à ce que nous avons appelé les ensembles linéaires infinis, qui se trouve prononcé à la fin de notre travail: »Une contribution à la théorie des ensembles» (Journal de BORCHARDT, t. 84, p. 257).

Dans le dernier numéro (4) du présent travail (t. XXI, p. 54), j'ai obtenu relativement aux systèmes de points P, qui sont contenus dans un ensemble continu à n dimensions, un théorème que l'on peut énoncer comme il suit, en employant les nouvelles expressions définies plus haut:

»*P étant un système de points, dont le dérivé $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, où α est un nombre entier pris à volonté dans la première ou la seconde classe, le premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ et par conséquent aussi P lui-même est un système de points de la première puissance.*»

Ce théorème peut se retourner de la manière suivante:

»*P étant un système de points dont le premier dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, il y a des nombres entiers α, appartenant à la première ou à la deuxième classe de nombres, pour lesquels $P^{(\alpha)}$ s'annule d'une manière identique, et parmi les nombres α qui offrent cette particularité, il y en a un plus petit que tous les autres.*»

Je publierai très-prochainement la démonstration de ce théorème. M. MITTAG-LEFFLER publiera ensuite un travail où il montrera comment en se fondant sur ce théorème on peut généraliser d'une manière remarquable le résultat de ses recherches et de celles de M. le Prof. WEIERSTRASS sur l'existence de fonctions analytiques à sens unique avec des positions singulières données.

§ 14.

Je vais maintenant considérer les nombres de la deuxième classe (II) et les opérations qu'on peut effectuer sur ces nombres, en me bornant à l'essentiel, et en réservant à plus tard des recherches plus profondes sur ce sujet.

J'ai défini d'une manière générale dans le § 3 les opérations de l'addition et de la multiplication et j'ai montré que pour les nombres entiers infinis, elles ne sont pas soumises en général à la loi de commutation, mais bien à la loi d'association; cela est donc vrai aussi en particulier pour les nombres de la deuxième classe de nombres. Quant à la loi de distribution, elle est vraie sous la forme suivante:

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(où $\alpha + \beta$, α, β paraissent comme multiplicateurs), comme on peut s'en convaincre immédiatement par la considération intrinsèque.

La soustraction peut être considérée à deux points de vue. Soient α et β deux nombres entiers quelconques, $\alpha < \beta$, on se convainc sans peine que l'équation: $\alpha + \xi = \beta$ admet toujours une solution et une seule, par rapport à ξ; si α et β sont des nombres de (II), ξ sera un nombre de (I) ou (II). Posons ce nombre ξ égal à $\beta - \alpha$.

Si au contraire on considère l'équation suivante:

$$\xi + \alpha = \beta$$

on voit que souvent elle n'est pas résoluble d'après ξ; ce cas, par exemple, se présente pour l'équation:

$$\xi + \omega = \omega + 1.$$

Mais même dans les cas où l'équation: $\xi + \alpha = \beta$ peut être résolue d'après ξ, il se trouve souvent qu'on peut y satisfaire par une quantité infinie de valeurs numériques de ξ; mais parmi ces solutions diverses il y en aura toujours une plus petite que toutes les autres.

Pour désigner cette plus petite racine de l'équation

$$\xi + \alpha = \beta,$$

quand elle est résoluble, choisissons le signe $\beta_{-\alpha}$ qui par conséquent diffère généralement de $\beta - \alpha$.

Si on a ensuite entre trois nombres β, α, γ, l'équation:

$$\beta = \gamma\alpha,$$

(où γ est multiplicateur), on se convainc sans peine que l'équation:

$$\beta = \xi\alpha$$

n'a pas d'autre solution, d'après ξ, que $\xi = \gamma$ et dans ce cas on désigne γ par $\frac{\beta}{\alpha}$.

On trouve au contraire que l'équation:

$$\beta = \alpha\xi$$

(où ξ est multiplicande), si elle est résoluble d'après ξ, a généralement plusieurs racines et en a même un nombre infini; mais il y en a toujours une plus petite que toutes les autres; cette racine minima satisfaisant à l'équation: $\beta = \alpha\xi$, quand cette équation est résoluble, peut se désigner par:

$$\frac{\underline{\beta}}{\alpha}.$$

Les nombres α de la deuxième classe de nombres sont de deux espèces: 1° les α précédés immédiatement dans la série par un autre nombre qui est alors α_{-1}; je les appelle nombres de la première espèce; 2° les α qui ne sont pas précédés immédiatement, dans la série, par un autre membre, pour lesquels par conséquent il n'y a pas de α_{-1}, et que j'appelle de la deuxième espèce. Les nombres ω, 2ω, $\omega^\nu + \omega$, ω^ω sont par exemple de la deuxième espèce, au contraire $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^\omega + 3$ sont de la première.

De même les nombres premiers de la deuxième classe de nombres, que j'ai définis d'une manière générale au § 3, se divisent aussi en nombres de la deuxième et en nombres de la première espèce.

Les nombres premiers de la deuxième espèce sont, suivant l'ordre où ils se présentent dans la classe de nombres (II):

$$\omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots\ldots,$$

en sorte que parmi tous les nombres de la forme:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

il n'y a qu'un nombre premier, savoir ω, de la deuxième espèce; mais qu'on ne conclue pas, de cette rareté relative des nombres premiers de la deuxième espèce, que l'ensemble de tous ces nombres a une puissance moindre que la classe de nombres (II) elle-même; il se trouve que cet ensemble a la même puissance que (II).

Les nombres premiers de la première espèce sont tout d'abord:

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots\ldots,\ \omega^\mu + 1,\ \ldots\ldots$$

Ce sont les seuls nombres premiers de la première espèce que l'on rencontre parmi les nombres que nous venons de désigner par φ; l'ensemble de tous les nombres premiers de la première espèce dans (II) a aussi la puissance de (II).

Les nombres premiers de la deuxième espèce ont une propriété qui leur donne un caractère tout à fait à part; soit η un de ces nombres premiers (de la deuxième espèce), on a toujours $\eta\alpha = \eta$, si α est un nombre quelconque plus petit que η; de là résulte que, si α et β sont deux nombres quelconques, tous deux plus petits que η, le produit $\alpha\beta$ est toujours aussi plus petit que η.

En nous bornant d'abord ici aux nombres de la deuxième classe, qui ont la forme φ, nous trouvons pour ces nombres les règles d'addition et de multiplication qui suivent.

Soit:

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_\mu$$

$$\psi = \rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda,$$

où nous supposons ν_0 et ρ_0 autres que zéro.

Addition.

1° Soit $\mu < \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2° Soit $\mu > \lambda$, on a:

$$\varphi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \ldots\ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \\ + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

3° Pour $\mu = \lambda$ on a:

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Multiplication.

1° Si ν_μ est autre que zéro, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu\rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_\lambda.$$

Si $\lambda = 0$, le dernier membre à droite est: $\nu_\mu\rho_0$.

2° Si $\nu_\mu = 0$, on a:

$$\varphi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

La décomposition d'un nombre φ en ses facteurs premiers se fait comme il suit.

Soit:

$$\varphi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \ldots\ldots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

où $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots\ldots > \mu_\sigma$ et $c_0, c_1, \ldots\ldots c_\sigma$ sont des nombres finis positifs autres que zéro, on a:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2 \ldots\ldots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma};$$

si on se représente encore $c_0, c_1, \ldots\ldots c_{\sigma-1}c_\sigma$ décomposés en facteurs premiers d'après les règles de la première classe de nombres, on a alors la décomposition de φ en facteurs premiers; car les facteurs $\omega^\tau + 1$ et ω sont eux-mêmes, comme on l'a remarqué plus haut, des nombres premiers. Cette décomposition de nombres de la forme φ en nombres premiers est déterminée, même en égard à la suite de série des facteurs, en faisant abstraction de la commutabilité des facteurs premiers dans les facteurs c et s'il est entendu que le dernier facteur doit être une puissance de ω ou égal à un et que ω ne peut être facteur qu'à la dernière place. Je reviendrai dans une autre circonstance sur la généralisation de cette décomposition en facteurs premiers, pour des nombres α pris à volonté dans la deuxième classe de nombres (II).

§ 10.

La notion du »continu» n'a pas seulement joué un rôle important dans le développement des sciences en général, elle a encore provoqué de grands partages d'opinion et, par suite, de vives discussions. Cela vient peut-être de ce que l'idée prise pour point de départ a été absolument différente chez les divers auteurs, parce qu'ils n'avaient pas la définition exacte et complète de la notion; mais peut-être aussi, et c'est ce qui me paraît le plus vraisemblable, les Grecs qui ont cherché les premiers à se rendre compte de cette idée du continu, ne l'ont pas conçue aussi claire et aussi complète qu'il aurait fallu pour empêcher les âges suivants de se partager comme il l'ont fait. Ainsi nous voyons que LEUCIPPE, DÉMOCRITE et ARISTOTE considèrent le continu comme un composé de parties divisibles à l'infini, tandis qu'EPICURE et LUCRÈCE en font un composé de leurs atomes finis; de là, ensuite, une grande discussion entre les philosophes, les uns suivant ARISTOTE, les autres EPICURE; d'autres enfin, pour rester en dehors de cette discussion, établirent, avec S. THOMAS d'AQUIN, que le continu n'est pas composé d'un nombre fini ou infini de parties, mais qu'il n'a pas de parties du tout; cette dernière opinion me semble moins une explication que l'aveu tacite qu'on n'est pas arrivé au fond de la question et qu'il vaut mieux la laisser de côté. Nous trouvons ici l'origine de cette idée scolastique du moyen-âge, qui a encore aujourd'hui ses partisans, et d'après laquelle le continu est une idée indécomposable, ou, pour parler avec d'autres auteurs, une pure intuition a priori dont on peut à peine donner une notion déterminée; on regarde comme une tentative sans fondement et on rejette en conséquence tout essai de détermination de ce mystère par l'arithmétique.

Je suis bien loin de vouloir évoquer encore une fois ces discussions, et la place me manquerait dans le cadre étroit de mon travail pour les traiter d'une manière exacte; je me vois seulement obligé de développer ici, d'une manière aussi brève que possible et seulement au point de vue de la théorie mathématique des systèmes, cette notion du continu. Mais ce travail ne m'a pas été facile, parce que, parmi les mathématiciens dont j'invoque volontiers l'autorité, aucun ne s'est occupé du continu dans le sens où j'ai à le faire ici.

En prenant pour point de départ une ou plusieurs grandeurs réelles ou complexes continues (ou, pour parler, je crois, plus exactement, des systèmes continus de grandeurs), on s'est formé du mieux qu'on a pu la notion d'un continu dépendant, avec un seul ou plusieurs sens, de ces grandeurs, c'est à dire qu'on est arrivé à la notion de fonction continue et ainsi s'est formée la théorie de ce qu'on a appelé les fonctions analytiques, comme aussi des fonctions plus générales avec leurs phénomènes les plus remarquables (comme l'impossibilité de la différentiation et d'autres semblables); mais le continu indépendant lui-même n'a été proposé par les mathématiciens que sous la forme la plus simple et n'a pas été l'objet de considérations plus profondes.

Je dois déclarer tout d'abord qu'à mon avis l'introduction de la notion de temps ou de l'idée de temps ne doit pas servir à expliquer la notion beaucoup plus primitive et plus générale du continu; le temps, à mon avis, est une idée qui suppose, pour être expliquée clairement, la notion de continuité, indépendante de celle du temps, et qui, même avec cette notion de continuité ne peut être conçue ni objectivement comme une substance, ni subjectivement comme une idée nécessaire a priori; cette idée de temps n'est qu'une idée auxiliaire et relative, servant à établir le rapport entre les divers mouvements qui ont lieu dans la nature et que nous percevons. Ainsi jamais il ne se présente dans la nature rien qui ressemble au temps objectif ou absolu et par conséquent on ne peut pas prendre le temps comme mesure du mouvement, mais au contraire on pourrait considérer le mouvement comme mesure du temps, si on n'en était empêché parce qu'on n'a rien gagné à considérer le temps comme une idée subjective nécessaire a priori.

Je suis de même convaincu qu'on ne peut pas commencer par l'idée intuitive de l'espace, pour arriver à des conclusions sur le continu, parce que l'espace et les figures qu'on y conçoit ne peuvent arriver qu'à l'aide d'un continu déjà formé d'une manière abstraite à devenir l'objet non plus seulement de considérations purement esthétiques, de spéculations philosophiques subtiles ou d'essais faits au hasard, mais de recherches mathématiques positives.

Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen des notions de nombres réels définis dans § 9, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ l'espace arithmétique plan à n dimensions G_n, c. à d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs:

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots\ldots \mid x_n),$$

où chaque x peut avoir indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. J'appellerai tout système de valeurs de ce genre un point arithmétique de G_n. La distance de deux de ces points est définie par l'expression:

$$+\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots + (x'_n - x_n)^2}$$

et par un système de points arithmétiques P contenu dans G_n on entend tout ensemble donné de points de l'espace G_n. *L'examen aboutit donc à donner une définition exacte et aussi générale que possible, quand on peut appeler l'ensemble P un continu.*

J'ai démontré dans le Journal de Borchardt, t. 84, p. 242, que tous les espaces G_n, si grand que soit le nombre de dimensions n, ont la même puissance entre eux et par suite la même puissance que le continu linéaire, et la même que l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$. La recherche et la fixation de la puissance de G_n se ramène donc à la même question, spécialisée à l'intervalle $(0 \ldots\ldots 1)$, et j'espère pouvoir bientôt y répondre en démontrant rigoureusement que la puissance cherchée n'est autre que celle de notre deuxième classe de nombres (II). De là résultera que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I) soit celle de la seconde (II). On pourra encore en tirer cette autre conséquence que l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables pouvant être représentées sous forme de série donnée infinie quelconque, n'a de même que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) et par conséquent peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres (III). Ce théorème se rapportera donc par exemple à l'ensemble de toutes les fonctions »analytiques» d'une ou de plusieurs variables, ou au système de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles que l'on peut représenter par des séries trigonométriques.

Pour arriver maintenant à la notion générale d'un continu donné dans G_n, je rappelle la notion de l'ensemble dérivé $P^{(1)}$ d'un ensemble de points P donné à volonté, telle qu'elle a été développée dans le mémoire (Ann. Math. t. V, puis t. XV, XVII, XX et XXI); elle conduit à la notion d'un dérivé $P^{(\gamma)}$, où γ peut être un nombre entier quelconque d'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

On peut maintenant partager aussi les systèmes de points P en deux classes d'après la puissance de leur premier dérivé $P^{(1)}$. Si $P^{(1)}$ a la puissance de (I), on voit, comme je l'ai déjà dit dans le § 3 de ce mémoire, qu'il y a un premier nombre entier α de la première ou de la deuxième classe de nombres (II), pour lequel $P^{(\alpha)}$ disparait. Mais si $P^{(1)}$ n'a pas la première puissance, on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer $P^{(1)}$ en deux systèmes R et S, en sorte que: $P^{(1)} = R + S$, où R et S sont de nature bien différente:

R est de la première puissance et dans des conditions telles qu'il y a toujours un premier nombre entier γ des classes de nombres (I) ou (II), pour lequel:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0. \text{ (}^1\text{)}$$

S au contraire est dans des conditions telles que l'emploi du procédé de dérivation n'y change absolument rien, en sorte que:

$$S \equiv S^{(1)}$$

et par conséquent aussi:

$$S \equiv S^{(\gamma)};$$

j'appelle ces systèmes S *ensembles parfaits de points*. Nous pouvons donc

---

(1) Ce caractère général des ensembles R a été remarqué et démontré par M. Bendixson.

dire: *quand $P^{(1)}$ n'a pas la première puissance, $P^{(1)}$ se divise à sens unique en un ensemble parfait S et un ensemble R de la première puissance.*

Les systèmes de points parfaits S ne sont pas toujours ce que nous avons appelé *condensé dans toute l'étendue;* c'est pourquoi ils ne se prêtent pas encore à la définition complète d'un continu de points, quand même on est obligé d'accorder immédiatement que le continu doit être toujours un système parfait.

Au contraire il faut encore une notion pour la joindre à celle qui précède et définir le continu: c'est la notion d'un système de points T *bien enchaîné.*

Nous disons que T est un système de points bien enchaîné, quand pour deux points quelconques t et t' de ce système, avec un nombre donné ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots\ldots t_\nu$ de T, de plusieurs manières, en sorte que les distances $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots\ldots \overline{t_\nu t'}$ soient toutes plus petites que ε.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont aussi compris, comme il est facile de le voir, sous cette notion du système de points bien enchaîné; mais je crois maintenant reconnaître aussi dans ces deux attributs »parfait» et »bien enchaîné» les caractères nécessaires et suffisants d'un continu de points et je définis par conséquent un continu de points dans G_n *un système parfaitement enchaîné. Ici ›parfait› et ›bien enchaîné› ne sont pas seulement des mots, mais des attributs du continu tout à fait généraux, caractérisés d'une manière abstraite, de la façon la plus précise, par les définitions précédentes.*

La définition que donne BOLZANO du continu (Paradoxes, § 38) n'est certainement pas exacte; elle n'exprime qu'une seule propriété du continu, qui se trouve réalisée dans les ensembles obtenues en concevant comme éloignées de G_n un système de points ›*isolé*› quelconque (cf. Ann. math. t. XXI, p. 51); elle se trouve de même réalisée dans des systèmes composés de plusieurs continus séparés; évidemment dans ces cas il n'y a pas de continu, comme le ferait croire la définition de BOLZANO: nous trouvons donc ici une faute contre le principe: on dit qu'une chose fait partie de l'essence d'une autre, quand l'une ne peut exister sans l'autre et que la présence de l'une entraîne celle de l'autre, ou que l'une ne peut ni exister ni se concevoir sans l'autre, et vice versa.

Notes.

L'ensemble de toutes les fonctions continues, et même de toutes les fonctions, susceptibles d'être intégrées, d'une ou de plusieurs variables, ne pourrait avoir, comme il me semble, que la puissance de la deuxième classe de nombres (II); cependant si on laisse de côté toutes les restrictions et qu'on considère l'ensemble de toutes les fonctions continues et discontinues d'une ou de plusieurs variables, ce système aura la puissance de la troisième classe de nombres (III).

On peut démontrer pour les systèmes parfaits ce théorème: ils n'ont jamais la puissance de (I).

Comme exemple d'un système de points parfait, qui n'est pas condensé dans toute l'étendu d'un intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels contenus dans la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots\ldots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots\ldots$$

où les coefficients c_ν peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres.

Il faut remarquer que la définition d'un continu donnée en haut est indépendante de toute considération sur ce qu'on appelle la dimension d'une figure continue; la définition en effet embrasse aussi les continus composés de parties bien enchaînées de différente dimension, comme des lignes, des surfaces, des solides, etc. Je sais bien que le mot »continu» n'a pas pris jusqu'à présent, dans les mathématiques, un sens bien arrêté; la définition que j'en donne sera donc trop étroite pour les uns, trop large pour les autres; j'espère avoir réussi à trouver le juste milieu.

D'après ma manière de concevoir les choses on ne peut entendre par continu qu'un ensemble parfait et bien enchaîné. D'après cela une étendue droite par exemple, à laquelle manque un des points-extrêmes, ou tous les deux, une surface circulaire sans limite ne sont pas des continus parfaits; j'appelle ces systèmes de points des semi-continus.

En général j'entends par semi-continu un système de points imparfait, bien enchaîné, appartenant à la seconde classe et constitué de telle sorte que deux quelconques de ses points peuvent être réunis par un continu parfait, qui est un élément constitutif du système de points. Tel est, p. ex., l'espace que j'ai désigné par A (Ann. math., t. XX, p. 119) et qui a été obtenu en éloignant de G_n un système de points quelconque de la première puissance.

Le dérivé d'un système de points bien enchaîné est toujours un continu, que le système de points bien enchaîné ait la première ou la deuxième puissance.

Si un système de points bien enchaîné est de la première puissance, je ne puis l'appeler ni un continu ni un semi-continu.

SUR DIVERS THÉORÈMES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES
DE POINTS SITUES
DANS UN ESPACE CONTINU A N DIMENSIONS.

PREMIÈRE COMMUNICATION.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

G. CANTOR.

.... M'étant proposé de vous communiquer les démonstrations de plusieurs théorèmes, que j'ai trouvés dans la théorie des ensembles, je vous prie de me permettre de commencer par les trois suivants, A, B et C dont j'ai fait mention dans le mémoire: »*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883».

Comme j'aurai à citer ce travail en divers endroits, je prendrai la liberté de le désigner par les lettres »*Gr*».

Théorème A. »Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble *parfait.*»

Théorème B. »Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel, que son *ensemble dérivé* $P^{(\alpha)}$ d'ordre α s'évanouit, alors le *premier ensemble dérivé* $P^{(1)}$ de P et *l'ensemble* P lui même sont de la *première* puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis.»

Théorème C. »P étant un ensemble de points tel, que son premier ensemble *dérivé* $P^{(1)}$ est de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels, qu'on a identiquement:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

et de tous ces nombres α il y a un qui en est le plus petit.»

Démonstration du théorème A.

D'après »*Gr.* § 10» j'appelle *ensemble parfait de points* un ensemble S tel, que son premier dérivé $S^{(1)}$ coïncide avec S lui même, en sorte que tout point s appartenant à S est un point-limite de S et qu'aussi tout point-limite s' de S est un point appartenant à S.

Soient maintenant

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_\nu, \ldots$$

les points qui constituent l'ensemble P; nous pouvons les imaginer donnés en cette forme de série (p_ν), parce que P a d'après l'hypothèse, admise dans notre théorème, la *première puissance.*

Nous admettons que chaque point p_ν de P est un *point-limite* de P et nous voulons en conclure l'existence de *points-limites* de P qui n'appartiennent pas comme *points* à P; il en suivra que P ne peut pas être un ensemble parfait, car s'il en était ainsi, non seulement chaque *point* de P devrait être un *point-limite* de P, mais aussi chaque *point-limite* de P serait nécessairement un *point appartenant* à P.

Que l'on prenne p_1 pour centre d'un ensemble continu à $(n-1)$ dimensions, lieu des points de G_n qui ont la distance $\rho_1 = 1$ de p_1; nous nommerons un tel ensemble une sphère de rayon ρ_1 et nous la désignerons ici par K_1.

De tous les points de la suite (p_ν) qui suivent p_1 soit p_{i_2} le premier qui tombe dans *l'intérieur* de la sphère K_1 (et il y en a dans l'intérieur de K_1 un nombre infini, puisque le centre p_1 est, comme nous avons admis, un *point-limite* de P); nommons σ_1 la distance des points p_1 et p_{i_2} et prenons p_{i_2} comme centre d'une *seconde* sphère K_2, dont le rayon ρ_2 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités:

$$\frac{1}{2}\sigma_1, \qquad \frac{1}{2}(\rho_1 - \sigma_1).$$

La sphère K_2 est alors située toute entière à l'intérieur de K_1 et les points:

$$p_1, p_2, \ldots, p_{i_2-1}$$

de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_2; le rayon ρ_2 de la dernière est, comme on voit, plus petit que $\frac{1}{2}$.

De même soit p_{i_3} le premier point de la suite (p_ν) de tous ceux, qui suivent p_{i_2} et qui tombent dans l'intérieur de la sphère K_2; il y en a un nombre infini, puisque p_{i_2} est supposé être point-limite de P; nous désignons la distance des points p_{i_2} et p_{i_3} par σ_2 et prenons p_{i_3} pour centre d'une troisième sphère K_3, dont le rayon ρ_3 est déterminé par la condition d'être la plus petite des deux quantités:

$$\frac{1}{2}\sigma_2, \qquad \frac{1}{2}(\rho_2 - \sigma_2);$$

la sphère K_3 est alors située tout entière à l'intérieur de K_2 et les points:

$$p_1, \; p_2, \ldots p_{i_3-1}$$

de la série (p_ν) sont situés tous en dehors de la sphère K_3; le rayon ρ_3 est évidemment plus petit que $\frac{1}{4}$.

On voit donc ici une *loi* d'après laquelle on peut former une suite infinie de sphères:

$$K_1, \; K_2, \; K_3, \ldots, K_\nu, \ldots$$

liée à une série déterminée de nombres entiers i_ν croissants avec leurs indices, de sorte que l'on a:

$$1 < i_2 < i_3 < \ldots$$

Chaque sphère K_ν est située toute entière à l'intérieur de la précédente $K_{\nu-1}$

Le centre p_{i_ν} de la sphère K_ν est défini par la condition qu'il est le premier point de la série (p_ν) de tous ceux qui suivent $p_{i_{\nu-1}}$ et qui sont situés à l'intérieur de la sphère $K_{\nu-1}$; le rayon ρ_ν de K_ν est défini par la condition d'être le plus petit des deux nombres:

$$\frac{1}{2}\sigma_{\nu-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\rho_{\nu-1} - \sigma_{\nu-1}),$$

en désignant par $\sigma_{\nu-1}$ la distance des points $p_{i_{\nu-1}}$ et p_{i_ν}.

Les points $p_1, \; p_2, \ldots p_{i_\nu-1}$ sont situés tous en dehors de la sphère K_ν; mais il y a un nombre infini de points de la série (p_ν), qui sont situés à l'intérieur de K_ν, puisque le centre p_{i_ν} est, comme nous l'avons admis, un point-limite de P. Comme on a évidemment

$$\rho_\nu < \frac{1}{2^{\nu-1}},$$

les rayons des sphères K_ν deviennent infiniment petits pour $\nu = \infty$, et puisque les sphères K_ν sont emboitées de telle sorte que K_ν est située à l'intérieur de $K_{\nu-1}$, celle-ci à l'intérieur de $K_{\nu-2}$ etc., on en conclut d'après un principe connu l'existence d'un point t, dont s'approchent indéfiniment les centres p_{i_ν} en sorte que l'on a

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i_\nu} = t;$$

le point t est donc *point-limite* de P. Mais de plus on s'assure, que t n'est pas un *point* appartenant à P; car s'il l'était, on aurait $t = p_n$ pour une certaine valeur de l'indice n, équation *impossible*, puisque t est situé à l'intérieur de la sphère K_ν, quelque grand que soit ν, quand au contraire on peut prendre ν assez grand, savoir $\nu > n$, de sorte que p_n tombe en dehors de la sphère K_ν.

Donc nous avons démontré, que P ne peut pas être un *ensemble parfait.*

Démonstration du théorème B.

α étant un nombre donné quelconque de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante:

$$(1) \qquad P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}) + P^{(\alpha)}$$

dans laquelle α' parcourt tous les nombres entiers positifs qui sont *inférieurs* à α. La vérité de cette identité (1) découle facilement de la notion générale de *l'ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ de l'ordre α.*

Lorsque α est un nombre tel, qu'il existe un autre α_{-1} qui précède α immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le *premier ensemble dérivé* de $P^{(\alpha_{-1})}$; mais lorsque α est un nombre tel (comme par exemple ω ou ω^ω ou $\omega^{\omega^\omega} + \omega^2$), qu'il n'a point de voisin qui le précède immédiatement, alors $P^{(\alpha)}$ est défini comme étant le plus grand commun diviseur de tous les ensembles dérivés $P^{(\alpha')}$, dont les ordres α' sont *inférieurs* à α.

D'après l'hypothèse admise dans notre théorème, $P^{(\alpha)}$ s'évanouit, on a donc ici:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha'} (P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)}).$$

Le nombre des valeurs de α' est ou fini ou infini selon que α appartient à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres; mais dans le dernier cas l'ensemble des valeurs de α' est de la *première* puissance (Cf. la définition de la seconde classe de nombres dans *Gr.* § 11).

Chaque terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble de points appartenant à la catégorie de ceux que j'appelle *ensembles isolés* (voir Annales math. T. 21 pag. 51). Comme je l'ai démontré au même endroit, un ensemble *infini* et *isolé* est toujours de la *première puissance.* Donc le terme

$$(P^{(\alpha')} - P^{(\alpha'+1)})$$

de notre somme est un ensemble ou fini, ou de la *première puissance.* Par là on conclut facilement que $P^{(1)}$ est aussi de la *première puissance,* donc aussi P est de la première puissance, comme on le trouve démontré à l'endroit cité tout à l'heure.

Démonstration du théorème C.

En désignant par Ω le premier nombre de la *troisième* classe de nombres, on a, quel que soit l'ensemble P, l'identité suivante:

$$P^{(1)} \equiv \sum_{\alpha} (P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)}) + P^{(\Omega)}, \tag{2}$$

où α parcourt tous les nombres entiers positifs de la *première* et de la *seconde* classe de nombres.

L'ensemble P est d'après l'hypothèse admise dans notre théorème tel, que son premier dérivé $P^{(1)}$ ait la *première puissance;* donc aussi les dérivés $P^{(\alpha)}$, qui sont tous des diviseurs de $P^{(1)}$, ont la même puissance, en tant qu'ils sont constitués par un nombre infini de points.

En nous appuyant maintenant sur le théorème A, démontré plus haut, nous concluons que la différence:

$$(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$$

ne peut pas s'annuler tant que $P^{(\alpha)}$ n'est pas zéro.

Si donc tous les dérivés $P^{(\alpha)}$ étaient *différents* de zéro, tous les termes $(P^{(\alpha)} - P^{(\alpha+1)})$ de notre somme à droite de l'équation (2) le seraient de même et comme l'ensemble de ces *termes* est de la *seconde* puissance (Cf. *Gr.* § 12), il s'ensuivrait à plus forte raison, que l'ensemble de points à droite de notre équation (2) serait d'une puissance *non inférieure* à la *seconde;* ce qui serait contraire à l'hypothèse, d'après laquelle l'ensemble $P^{(1)}$ à gauche de l'équation (2) est supposé de la *première* puissance. Donc les dérivés $P^{(\alpha)}$ ne peuvent pas être tous différents de zéro, il existe donc des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres tels que l'on a:

$$P^{(\alpha)} \equiv 0.$$

De ces nombres α il y en a un, qui est le plus petit, comme il est facile de le voir.

Dans le mémoire »*Gr.*» pag. 31, j'ai aussi indiqué une proposition se rapportant au cas où $P^{(1)}$ n'est pas de la première puissance, et qui, dans la forme où je l'ai exprimée, n'est pas tout à fait juste dans sa généralité. Comme je l'ai trouvé alors, il existe sans doute, une seule décomposition:

$$P^{(1)} = R + S,$$

où S est un ensemble parfait, mais R un ensemble de la *première* puissance. Si passant de là je dis que R est un ensemble réductible, ce n'est pas correct dans sa portée générale.

Monsieur Bendixson de Stockholm qui s'est occupé avec un succès distingué de l'examen de ma proposition, a trouvé que R est toujours tel que, pour un certain γ de la première ou de la seconde classe de nombres, on a l'équation:

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) = 0.$$

Il résulte des communications que M. Bendixson a eu l'obligeance de me faire, qu'il a retrouvé d'une manière parfaitement indépendante mes développements d'alors concernant ce sujet, et qu'il les a complétés et rectifiés dans le sens indiqué. Sur ma demande, M. Bendixson a voulu bien rédiger ses recherches pour être publiées à la suite de cette communication.

Halle, le 22 Avril 1883.

QUELQUES THEORÈMES

DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

DE POINTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle

PAR

IVAR BENDIXSON

À STOCKHOLM.

.... Dans votre travail récemment publié: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre», vous avez énoncé le théorème suivant, qui me parait devoir être rectifié dans quelques parties. Vous y dites page 31:

»Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen, so dass

$P^{(1)} \equiv R + S$, wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche $R^{(\gamma)} \equiv 0$; solche Punctmengen R nenne ich reductibel.

S dagegen ist so beschaffen, dass bei dieser Punctmenge der Ableitungsprocess gar keine Aenderung hervorbringt indem $S^{(1)} \equiv S$.

Derartige Mengen S nenne ich perfecte Punctmengen.»

Acta mathematica. 2. Imprimé 25 Août 1883.

J'ai réussi à construire un exemple, contraire à ce théorème. Avant de le formuler, je veux énoncer un théorème facile dont j'aurai besoin quelquefois dans les pages suivantes:

»Si $\mathfrak{D}(P, P') \equiv P$, P' est un ensemble parfait.»

La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté. Car chaque point de P est aussi un point de P' d'après l'hypothèse. Or P'' contient au moins tous les points de P'.

Mais P'' ne peut contenir d'autres points que P'. Il en résulte donc que

$P' \equiv P''$, c'est à dire, P' est un ensemble parfait.

c. q. f. d.

L'exemple dont j'ai parlé ci-dessus se construit ainsi:

Soit $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ un intervalle, donné sur l'axe réel, j'y mets les points suivants

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2},\ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^2},\ \ldots,\ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu},\ \ldots \quad (\nu = 1, 2 \ldots)$$

$$\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^2},\ \ldots,\ \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu},\ \ldots \quad (\nu = 2, 3 \ldots)$$

Je nomme cet ensemble $Q_{\alpha, \beta}$.

Nous voyons donc que $Q'_{\alpha, \beta} \equiv (\alpha, \beta)$, où (α, β) désigne un ensemble qui ne contient d'autres points que α et β.

Dans chaque intervalle

$$\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right),$$

je place un ensemble

$$Q_{\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^\nu},\ \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^\nu + 1}}$$

et dans chaque intervalle

$$\left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu}\right) \ldots \left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{2^{\nu+1}}\right)$$

je place un ensemble

$$Q_{\beta - \frac{\beta-\alpha}{2^\nu},\ \beta - \frac{\beta - \alpha}{2^\nu + 1}}$$

Je nomme le résultat de toutes ces opérations $Q_{S_{\alpha, \beta}}$.

Or

$$Q'_{s_{a,\beta}} \equiv Q_{a,\beta} + (\alpha, \beta)$$

et il faut que

$$Q''_{s_{a,\beta}} \equiv Q'_{a,\beta} \equiv (\alpha, \beta)$$

Avant de continuer je veux donner la définition suivante:

Par ces mots: »inscrire (ou placer) symétriquement l'étendue a dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$», je veux dire: »fixer deux points γ, δ tels que $\delta - \gamma = a$, $\gamma - \alpha = \beta - \delta$».

Prenons l'intervalle $0 \ldots 1$. Plaçons-y symétriquement l'étendue $1/2$ dans laquelle nous ne plaçons plus d'étendues. Dans chacun des intervalles $0 \ldots 1/4$ et $3/4 \ldots 1$, formés aux côtés de l'étendue inscrite, nous plaçons symétriquement une nouvelle étendue égale à $1/2 \cdot 1/4$ (et dans laquelle il ne faut plus placer d'étendues) et ainsi de suite, de sorte que nous plaçons symétriquement dans chaque intervalle nouveau une étendue, dans laquelle nous ne plaçons pas de nouvelles étendues, et qui est égale à la moitié de ce même intervalle.

Je nomme P_e l'ensemble de points formé par les points extrêmes de toutes les étendues, dans lesquelles nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues. On voit sans difficulté, que chaque point de P_e appartient aussi à P'_e. Car chaque point α_1 de P_e est entouré d'un côté par une étendue, où il n'y a pas de nouvelles étendues inscrites, c'est à dire, où il n'y a pas de points de P_e. Soit b la longueur de cette étendue et $\alpha_1 - b$, α_1 ses points extrêmes.

En construisant l'ensemble P_e nous avons placé l'étendue b symétriquement dans l'intervalle $\left(\alpha_1 - \frac{3b}{2}\right) \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$. Le point $\alpha_1 + \frac{b}{2}$ est donc un point de P_e. Dans l'intervalle $\alpha_1 \ldots \left(\alpha_1 + \frac{b}{2}\right)$ nous avons symétriquement placé l'étendue $\frac{b}{2^2}$. Il en résulte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^3}$ est un point de P_e et ainsi de suite, de sorte que $\alpha_1 + \frac{b}{2^{2\nu+1}}$ est un point de P_e pour $\nu = 1, 2 \ldots$.

Il faut donc que α_1 soit un point de P'_e.

Or $\mathfrak{D}(P_e, P'_e) \equiv P_e$, et nous savons donc que P'_e est un ensemble parfait.

Plaçons maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_2$ de l'exemple précédent (dans laquelle nous n'avons pas inscrit de nouvelles étendues) un ensemble $Q_{s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}$, comme je l'ai défini ci-dessus, nous obtenons comme résultat un ensemble P; le premier ensemble qui en est dérivé est l'exemple cherché.

On voit facilement que P' contient tous les points de P_e. Il faut donc que P'_e soit une partie intégrante de P'' c'est à dire de P'.

Nous pouvons donc mettre

$$P' \equiv P'_e + T$$

où T est formé par tous les points de P' qui tombent en dedans des étendues désignées plus haut.

Mais la partie de P' qui tombe en dedans d'une étendue quelconque $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_2$ est, comme on le voit facilement, un ensemble $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, comme je l'ai défini ci-dessus. En observant que $Q'_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, il en résulte que T' est tel, qu'il comprend au moins tous les points de P_e.

Or P'_e est une partie intégrante de T'' c'est à dire de T'. Mais T' ne peut contenir d'autres points que P'_e.

Or

$$T' \equiv P'_e.$$

Nous pouvons donc diviser P' en

$$P' \equiv T + P'_e,$$

où P'_e est parfait et T est tel que

$$T^{(\gamma)} \equiv P'_e.$$

Et il n'y a jamais un γ pour lequel

$$T^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Il s'en suit, que l'ensemble R de votre équation:

$$P' \equiv R + S$$

n'est pas toujours tel, qu'il y ait un γ pour lequel

$$R^{(\gamma)} \equiv 0.$$

En changeant de la manière suivante votre théorème, je crois pouvoir lui donner une exactitude complète:

»Si P est un ensemble de points situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, je puis toujours le diviser d'une seule manière

$$P' \equiv R + S$$

où S est un ensemble parfait et R est de la première puissance et tel qu'il existe toujours un γ, tel que

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0,$$

γ étant un de vos symboles d'infini correspondant à ce que vous avez nommé nombre de la classe (I) ou (II).

Dans les pages suivantes je montrerai la manière dont je prouve votre théorème ainsi changé. Je ne veux pourtant le traiter ici qu'en supposant, que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension, la preuve du théorème général étant tout à fait analogue.

Je veux donc prouver les théorèmes suivants:

Théorème D. [1] »*Si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$* (où γ parcourt tous vos nombres de la classe (I) et (II)).»

Théorème E. »*Si $P^{(\Omega)}$ est l'ensemble de tous les points du théorème D, $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait*» (Ω correspond au premier nombre de la classe III).

Théorème F. »*Si $P' - P^{(\Omega)} \equiv R$, R a la première puissance.*»

Théorème G. [2] »*Il existe un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que*

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0.»$$

Démonstration du théorème D.

Nous avons supposé que P' n'est pas de la première puissance. Il n'existe donc pas un γ, appartenant à vos nombres de la classe (I) ou

---

(1) Les lettres sont choisies, comme l'a souhaité M. Cantor, afin que les théorèmes puissent être plus en correspondance avec ses propres théorèmes A, B, C page 409 de ce même tome.

(2) M. Cantor m'a informé, que les théorèmes D, E, F étaient déjà trouvés par lui. Quant au théorème G, il n'y était pas encore parvenu.

(II) tel que $P^{(\gamma)} \equiv 0$.[1] Soit donc P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel et m un nombre entier positif > 1. Si l'on divise $\alpha \ldots \beta$ en m parties égales, on trouve que dans l'un au moins des intervalles

$$\left(\alpha + n\frac{\beta - \alpha}{m}\right) \ldots \left(\alpha + (n+1)\frac{\beta - \alpha}{m}\right) \qquad (n + 1 \leqq m)$$

doit tomber une partie P_1 de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que

$$P_1^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_1 \ldots \beta_1$ $(\alpha_1 < \beta_1)$ le premier intervalle où cela a lieu. Divisons maintenant l'intervalle $\alpha_1 \ldots \beta_1$ en m parties égales. Dans l'un au moins des intervalles formés

$$\left(\alpha_1 + n_1\frac{\beta_1 - \alpha_1}{m}\right) \ldots \left(\alpha_1 + (n_1 + 1)\frac{\beta_1 - \alpha_1}{m}\right)$$

doit tomber une partie P_2 de P' telle qu'il n'existe pas un γ pour lequel

$$P_2^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Soit $\alpha_2 \ldots \beta_2$ le premier intervalle de cette espèce.

Ainsi nous formons de suite α_ν, β_ν etc. *in infinitum,* de sorte qu'il tombe toujours dans chaque intervalle $\alpha_\nu \ldots \beta_\nu$ une partie P_ν de P' telle qu'il n'existe pas un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

Mais $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$; $\beta_\nu \geqq \beta_{\nu+1}$.

Les quantités α_ν ont donc une limite supérieure α_∞ et les quantités β_ν ont de même une limite inférieure β_∞.

Il faut donc que

$$\beta_\infty - \alpha_\infty < \beta_\nu - \alpha_\nu = \frac{\beta - \alpha}{m^\nu}.$$

Or $\beta_\infty = \alpha_\infty$. On voit facilement que le point $\beta_\infty = \alpha_\infty$ appartient à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

---

[1] Voir le théorème B de M. CANTOR page 409 de ce même tome.

En effet, entourez le point α_∞ d'un intervalle $(\alpha_\infty - \delta) \ldots . (\alpha_\infty + \delta)$, il existe toujours un nombre entier positif n tel que

$$\frac{\beta - \alpha}{m^\nu} < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Il en résulte que

$$\beta_\nu - \alpha_\nu < \delta \qquad \text{pour } \nu \geqq n.$$

Les points α_ν, β_ν tombent donc nécessairement dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots . \alpha_\infty + \delta$. Il en résulte qu'il tombe dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots$ $\ldots \alpha_\infty + \delta$ un ensemble P_ν tel qu'il n'y a pas un γ pour lequel

$$P_\nu^{(\gamma)} \equiv 0.$$

C'est à dire, dans l'intervalle $\alpha_\infty - \delta \ldots . \alpha_\infty + \delta$ tombent des points de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)). Comme cela a lieu pour chaque δ, α_∞ est un point de $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire de $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant tous les nombres de la classe (I) ou (II)).

Donc il y a des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$.

c. q. f. d.

En prouvant le théorème D, j'ai aussi donné la preuve d'un théorème, que vous avez énoncé dans les Annales de mathématiques pures et appliquées, Tome XV, savoir: »Quand il n'existe pas un ν, appartenant aux nombres entiers positifs, tel que $P^{(\nu)} \equiv 0$, il existe toujours un ensemble $P^{(\omega)}$ tel, qu'il appartient à la fois à tous les $P^{(\nu)}$.»

Démonstration du théorème E.

Pour prouver le théorème E, je veux commencer par prouver que $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Nous avons défini l'ensemble $P^{(\Omega)}$ l'ensemble de tous les points α_∞ qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$. Soit P' donné dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ et a un point de cet intervalle, je dis que $P^{(\Omega)}$ ne peut être égal à a.

Soient $m_1, m_2 \ldots m_\nu \ldots$ des nombres entiers positifs, tels que $m_1 < m_2 < \ldots < m_\nu < \ldots$ Dans l'intervalle $\alpha \ldots \left(a - \frac{a - \alpha}{m_1}\right)$ tombe une partie Q_1 de P' telle que $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point. Car si $Q_1^{(\Omega)}$ contenait un point a_1, ce point appartiendrait à tous les $Q_1^{(\gamma)}$, c'est à dire à tous les $P^{(\gamma)}$. Par suite le point a_1 serait un point de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Or $Q_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point.

Il en résulte que Q_1 a la première puissance ou ne contient qu'un nombre fini de points.

Maintenant on prouve de la même manière que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_1}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right)$$

tombe un ensemble Q_2 qui a la première puissance ou est fini et que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_2}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_3}\right)$$

tombe un ensemble Q_3 qui a la première puissance ou est fini, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que dans l'intervalle

$$\left(a - \frac{a-\alpha}{m_\nu}\right) \dots \left(a - \frac{a-\alpha}{m_{\nu+1}}\right) \qquad \text{pour } \nu = 1, 2 \dots n \dots$$

tombe un ensemble Q_ν qui a la première puissance ou est fini.

L'ensemble de tous ces intervalles forme un ensemble de la première puissance et dans chaque intervalle tombe un ensemble de points qui a aussi la première puissance (ou est fini).

Or la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance (ou est finie).

La partie de P' qui tombe dans l'intervalle $\alpha \dots a$ est donc de la première puissance (ou est finie).

On prouve de la même manière que la partie de P' qui tombe dans l'intervalle $a \dots \beta$ est de la première puissance (ou est finie).

Donc P' a la première puissance, (ou est fini), ce qui n'a pas lieu.

Or $P^{(\Omega)}$ ne peut se composer d'un seul point.

Maintenant nous pouvons sans difficulté prouver que $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait.

Je veux d'abord faire remarquer que tous les points de $P^{(\Omega)}$ sont des points de $(P^{(\Omega)})'$. Car s'ils ne l'étaient pas, il y aurait un point α de $P^{(\Omega)}$

tel, qu'on pourrait l'entourer d'un intervalle $(\alpha - \delta) \ldots . (\alpha + \delta)$ dans lequel aucun autre point de $P^{(\Omega)}$ ne tomberait. Soit Q la partie de P' située dans l'intervalle $(\alpha - \delta) \ldots (\alpha + \delta)$, il en résulterait que

$$Q^{(\Omega)} \equiv \alpha$$

ce qui est impossible.

Donc on ne peut entourer α d'un tel intervalle.

Or

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)},\ (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Il s'en suit que $(P^{(\Omega)})'$ est un ensemble parfait.

Mais chaque point de $(P^{(\Omega)})'$ est aussi un point de $P^{(\Omega)}$. Car si α_1 est un point de $(P^{(\Omega)})'$, il se trouve dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ des points de $P^{(\Omega)}$. C'est à dire, dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ il tombe une partie Q_1 de P' telle qu'il n'y a pas un γ pour lequel $Q_1^{(\gamma)} \equiv 0$.

Or dans chaque intervalle $\alpha_1 - \delta \ldots \alpha_1 + \delta$ tombent des points de $Q_1^{(\gamma)}$ c'est à dire de $P^{(\gamma)}$.

Il s'en suit que α_1 est un point de chaque $P^{(\gamma+1)}$ c'est à dire de chaque $P^{(\gamma)}$.

Or α_1 est un point de $P^{(\Omega)}$.

Il faut donc que

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)},\ (P^{(\Omega)})') \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

Mais de l'autre côté nous avons

$$\mathfrak{D}(P^{(\Omega)},\ (P^{(\Omega)})') \equiv P^{(\Omega)}.$$

Donc

$$P^{(\Omega)} \equiv (P^{(\Omega)})'.$$

c. q. f. d.

Démonstration du théorème F.

Posons $P' \equiv R + P^{(\Omega)}$, nous voulons prouver que R a la première puissance.

Chaque point α_1 de R est tel qu'on peut l'entourer d'un intervalle $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$, où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Car si on ne le pouvait pas, α_1 serait un point de $(P^{(\Omega)})'$ c'est à dire de $P^{(\Omega)}$, ce qui n'a pas lieu.

Cet intervalle où il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$, s'étend évidemment sur chaque côté de α jusqu'au point le plus rapproché de $P^{(\Omega)}$. A chaque point de R correspond donc un intervalle dont les points extrêmes sont des points de $P^{(\Omega)}$ et dans lequel il n'y a pas de points de $P^{(\Omega)}$. Mais le même intervalle correspond ordinairement à plusieurs points de R.

Si nous regardons tous ces intervalles differents qui n'ont pas de points communs, je sais qu'ils forment un ensemble de la première puissance (ou fini).[1] Mais dans chacun de ces intervalles est située une partie de R, qui a la première puissance (ou est finie). Car soit R_1 la partie de R qui tombe dans l'un quelconque de ces intervalles, nous savons que $R_1^{(\Omega)}$ ne contient pas un seul point, chaque point de $R_1^{(\Omega)}$ étant à la fois un point de $P^{(\Omega)}$.

Or R_1 a la première puissance (ou est fini).

Comme dans chacun des intervalles nommés tombe un ensemble de points qui a la première puissance (ou est fini) et que ces intervalles forment aussi un ensemble de la première puissance (ou fini), il en résulte que la somme de tous ces ensembles de points a la première puissance.

Mais la somme de tous les ensembles de points situés dans les intervalles nommés, c'est précisément mon ensemble R.

Donc R a la première puissance.

c. q. f. d.

Démonstration du théorème G.

Il ne nous reste maintenant qu'à démontrer que pour un certain γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), on a

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}.$$

---

[1] Voir le théorème de M. Cantor page 366 de ce même tome.

Chaque point de $P^{(\gamma)}$ appartient à P', c'est à dire à R ou à $P^{(\Omega)}$. Mais $P^{(\Omega)}$ est une partie intégrante de $P^{(\gamma)}$. Il faut donc que $P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)}$ ne contienne que des points de R. Or

$$P^{(\gamma)} - P^{(\Omega)} \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}).$$

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)});$$

De même

$$P^{(\gamma+1)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)});$$

Ou il y a maintenant un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)})$$

ou il n'y en a pas.

S'il y a un γ dans ces conditions, nous voyons que pour ce γ

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv P^{(\Omega)} + \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)}) \equiv P^{(\gamma+1)}.$$

Or $P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$.

De plus, nous savons que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\Omega)}) \equiv 0.$$

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient d'autres points que $P^{(\gamma)}$. Il s'en suit que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

Si au contraire il n'existe pas un γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)}),$$

il faut nécessairement qu'il y ait pour chaque γ des points de R qui disparaissent, quand je passe de $P^{(\gamma)}$ à $P^{(\gamma+1)}$, c'est à dire des points de R tels, qu'ils appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$.

Je peux donc ranger les points de R de telle manière qu'à chaque γ correspondent les points de R qui appartiennent à $P^{(\gamma)}$ mais non à $P^{(\gamma+1)}$. Or R a au moins la même puissance que les quantités γ, c'est à dire des nombres de la classe (II), ce qui est contraire au théorème F. [1]

---

[1] Voir le théorème de M. CANTOR page 388 de ce même tome.

Il existe donc toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma)}) \equiv \mathfrak{D}(R,\ P^{(\gamma+1)})$$

Il en résulte qu'il y a toujours un certain γ tel que

$$\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0.$$

c. q. f. d.

J'ai fait la démonstration ici en supposant que P' soit situé dans un espace continu à une seule dimension.

Le théorème G se prouve exactement de la même manière, si P' est situé dans un espace continu à n dimensions. Quant aux autres théorèmes, leur démonstration dans ce cas est entièrement analogue à la précédente et je ne crois pas nécessaire de la donner séparément.

Je puis maintenant énoncer le théorème primitif de la manière suivante:

»*Si P est un ensemble de points, situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), et tel que $P^{(\gamma)}$ est un ensemble parfait.*»

La preuve de ce théorème n'offre pas de difficulté.

Nous avons

$$P' \equiv R + P^{(\Omega)}$$

où $P^{(\Omega)}$ est parfait et R est tel que $\mathfrak{D}(R,\ R^{(\gamma)}) \equiv 0$.

Mais $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de P'. Or $R^{(\gamma)}$ ne contient que des points de $P^{(\Omega)}$.

Il s'en suit que

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\Omega)}$$

c'est à dire $P^{(\gamma)}$ *est un ensemble parfait.*

c. q. f. d.

On obtient maintenant le théorème général qui suit:

»*Si P est un ensemble quelconque de points, situés dans un espace continu à n dimensions, il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II) tel que*

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}.»$$

Car ou P' est de la première puissance (ou fini), ou il ne l'est pas. Si P' est de la première puissance (ou fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que

$$P^{(\gamma)} \equiv 0 \equiv P^{(\gamma+1)} \text{ (}^1\text{)}$$

Si P' n'est pas de la première puissance (et n'est pas fini), il existe toujours un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que $P^{(\gamma)}$ est parfait, c'est à dire

$$P^{(\gamma)} \equiv P^{(\gamma+1)}$$

c. q. f. d.

Avant de finir je veux démontrer un théorème assez remarquable.

Revenons pour cela à notre exemple P_ϵ page 417, nous voyons que P'_ϵ est un ensemble parfait, situé dans un espace continu à une seule dimension, et tel qu'il peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé de l'ensemble isolé T, situé lui aussi dans un espace à une seule dimension.

On peut prouver que:

»*Si P est un ensemble parfait, tel qu'il ne forme nulle part un espace continu et situé dans un espace continu à une dimension, l'ensemble P peut toujours être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble isolé, situé aussi dans un espace à une dimension.*»

On voit de suite que cette qualité n'appartient pas aux ensembles parfaits qui forment quelque part un espace continu.

Soit P un ensemble parfait qui ne forme nulle part un espace continu et situé dans l'intervalle $\alpha \ldots \beta$ $(\alpha < \beta)$ de l'axe réel.

Par $(\alpha \ldots \beta)$ je désigne l'ensemble de tous les points de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$.

Posons

$$(\alpha \ldots \beta) \equiv P + S$$

Si α_1 est un point de S, je peux donc l'entourer d'une étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas un seul point de P. Car si on ne le pouvait pas, α_1 serait un point de P', c'est à dire de P, ce qui n'a pas lieu.

---

(1) Voir le théorème C de M. Cantor page 409 de ce même tome.

Cette étendue $\alpha_1 - \delta_1 \ldots \alpha_1 + \delta_2$ dans laquelle il n'y a pas de points de P s'étend à chaque côté de α_1 jusqu'au point le plus rapproché de P.

Si nous regardons toutes les differentes étendues dont les points extrêmes sont des points de P, mais en dedans desquelles ne se trouve aucun point de P, je sais que ces étendues forment un ensemble de la première puissance.[1] Or l'ensemble Q formé par tous les points extrêmes de ces étendues a aussi la première puissance.

Mais comme les points extrêmes de ces étendues sont des points de P, nous savons que Q est une partie intégrante de P.

L'ensemble Q' est un ensemble parfait. Car si l'on entoure un point β_1 de Q d'un intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$, je sais qu'il y a des points de P dans cet intervalle (chaque point de Q étant point de P, c'est à dire de P'). Mais comme P n'est condensé dans aucune partie de l'intervalle $\alpha \ldots \beta$, il y a aussi dans l'intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$ une étendue, dans laquelle il n'y a pas de points de P.

Les points extrêmes de cette étendue étant des points de Q, il en résulte qu'il y a des points de Q dans chaque intervalle $\beta_1 - \delta \ldots \beta_1 + \delta$.

Or β_1 est un point de Q'.

Or chaque point de Q est aussi point de Q' c'est à dire

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv Q,$$

et alors Q' est un ensemble parfait.

Maintenant je veux prouver que $Q' \equiv P$.

Il est clair que chaque point de Q' est aussi point de P. Car Q étant une partie intégrante de P, il faut que Q' soit une partie intégrante de P', c'est à dire de P.

On prouve que chaque point de P est aussi point limite de Q, absolument comme j'ai prouvé que chaque point de Q était point limite de Q.

Or P est une partie intégrante de Q'.

Il s'en suit que

$$P \equiv Q'.$$

Si l'on inscrit maintenant dans chaque étendue $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 sont points de Q), en dedans de laquelle il ne tombe pas de points de P, un

---

[1] Voir le théorème de M. CANTOR page 366 de ce même tome.

ensemble isolé $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, comme je l'ai défini page 416, je sais que l'ensemble Q_S de tous les $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ est un ensemble de points isolés.

L'ensemble Q_S est tel que

$$Q'_S \equiv P.$$

Car Q'_S contient au moins tous les points de Q et ne peut contenir que des points de Q'. Or Q''_S contient tous les points de Q'. Il en résulte que Q'_S contient tous les points de Q'.

Or

$$Q'_S \equiv Q' \equiv P.$$

Q_S est donc l'ensemble isolé cherché.

c. q. f. d.

Il existe naturellement un nombre infini d'ensembles isolés Q_S tels que

$$Q'_S \equiv P.$$

Je puis enfin énoncer le théorème suivant dont la preuve a été donnée ici:

»Chaque ensemble parfait P qui ne forme nulle part un espace continu et qui est situé dans un espace continu à une seule dimension, peut être exprimé comme le premier ensemble dérivé d'un ensemble de la première puissance Q, dont les points sont les points extrêmes d'étendues en dedans desquelles ne tombe aucun point de P.»

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

4

STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1884.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE

DE LA PUISSANCE DES ENSEMBLES PARFAITS DE POINTS.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

G. CANTOR
à HALLE.

... Quant à mon théorème, qui exprime, que les ensembles *parfaits* de points ont tous la même puissance, savoir la puissance du *continu*, je prétends le démontrer, en me bornant d'abord aux ensembles parfaits linéaires, (1) comme il suit. Soit S un ensemble parfait de points quelconque, *qui n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle*, si petit qu'il soit; nous admettons, que S est contenu dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, dont les points extrêmes 0 et 1 appartiennent a S; il est évident que tous les autres cas, dans lesquels l'ensemble parfait n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, peuvent par projection être réduits à celui-ci.

Or, il existe d'après mes considérations dans Acta mathematica T. 2 pag. 378 un nombre infini d'intervalles distincts, tout à fait séparés l'un de l'autre, que nous nous représentons rangés suivant leur grandeurs,

(1) M. I. BENDIXSON invité par M. CANTOR à essayer de prouver ce même théorème, en a communiqué une démonstration à la séance du séminaire de l'université de Stockholm, le 21 Novembre 1883. Cette démonstration, qui a été trouvée sans que l'auteur ait eu connaissance des recherches que M. CANTOR veut bien me permettre de publier ici, a été présentée à l'Académie royale des sciences de Stockholm, le 12 Décembre 1883. Elle se trouve dans Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar. La démonstration de M. BENDIXSON embrasse le cas d'un ensemble parfait de n dimensions.
L'éditeur.

de sorte que les intervalles plus petits viennent après les plus grands; nous les désignons, dans cet ordre, par:

$$(1)\qquad (a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2), \ldots, (a_\nu \ldots b_\nu), \ldots;$$

ils sont par rapport à l'ensemble S tels que dans l'intérieur de chacun ne tombe aucun point de S, tandis que leurs points extrêmes a_ν et b_ν en concurrence avec les autres points-limites de l'ensemble de points $\{a_\nu, b_\nu\}$ appartiennent à S et le déterminent; nous désignons par g l'un quelconque de ces autres points-limites de $\{a_\nu, b_\nu\}$, par $\{g\}$ leur ensemble; nous avons:

$$(2)\qquad S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

En outre la série (1) d'intervalles est telle que l'espace entre deux d'entre eux $(a_\nu \ldots b_\nu)$ et $(a_\mu \ldots b_\mu)$ en contient toujours une infinité d'autres et que de plus, $(a_\rho \ldots b_\rho)$ étant un quelconque de ces intervalles, il y en a d'autres de la même série (1) qui se rapprochent infiniment soit du point a_ρ, soit du point b_ρ; car a_ρ et b_ρ, comme appartenant comme *points* à l'ensemble parfait S, en sont aussi des *points-limites.*

Cela établi, je prends un ensemble de la première puissance quelconque:

$$(3)\qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots,$$

ensemble de points distincts et placés tous dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, *dans toute l'étendue duquel ils sont condensés;* seulement je suppose que ces points extrêmes 0 et 1 ne se trouvent pas entre les φ_ν.

Pour citer un exemple d'un ensemble tel qu'il nous le faut ici, je rappelle la forme de série, où j'ai mis l'ensemble de tous les nombres rationnels $\geqq 0$ et $\leqq 1$ dans Acta mathematica T. 2 pag. 319 et où pour notre but il faut supprimer seulement les deux premiers termes, qui y sont 0 et 1.

Mais je tiens à ce que la série (3) soit laissée dans toute sa généralité.

Voici maintenant ce que j'avance: *l'ensemble de points* $\{\varphi_\nu\}$ *et l'ensemble d'intervalles* $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ *peuvent être associés avec un sens unique l'un à l'autre de sorte que,* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *et* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *étant deux intervalles quelconques appartenant à la série* (1), *puis* φ_{k_ν} *et* φ_{k_μ} *étant les points correspondants de la série* (3), *on a toujours le nombre* φ_{k_ν} *plus petit ou plus grand que*

φ_{k_μ} *selon que dans le segment* $(0 \ldots 1)$ *l'intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *est placé avant l'intervalle* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *ou après lui.*(1)

Une telle correspondance des deux ensembles $\{\varphi_\nu\}$ et $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ se peut faire par exemple d'après la règle suivante:

Nous associons à l'intervalle $(a_1 \ldots b_1)$ le point φ_1, à l'intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le désignons par φ_{k_2}, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1, que l'intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ avec $(a_1 \ldots b_1)$ par rapport à leur placement dans le segment $(0 \ldots 1)$; de plus nous associons à l'intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ le terme au plus petit indice, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1 et avec φ_2, que l'intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ avec les intervalles $(a_1 \ldots b_1)$ et $(a_2 \ldots b_2)$ respectivement par rapport à leur placement dans le segment $(0 \ldots 1)$.

Généralement nous associons à l'intervalle $(a_\nu \ldots b_\nu)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le nommerons φ_{k_ν}, tel, qu'il a la même relation par rapport au plus ou moins avec tous les points $\varphi_1, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_{\nu-1}}$ dont il a été déjà disposé, que l'intervalle $(a_\nu \ldots b_\nu)$ avec les intervalles correspondants $(a_1 \ldots b_1)$, $(a_2 \ldots b_2)$, $\ldots$, $(a_{\nu-1} \ldots b_{\nu-1})$ par rapport à leur placement dans le segment $(0 \ldots 1)$.

J'avance, que d'après cette règle *les points* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ *de la suite* (3) *seront successivement, quoique selon un ordre différent de la loi de la série* (3), *associés* **tous** *à des intervalles distincts de la série* (1); car à chaque relation par rapport au plus ou moins entre des points en nombre fini de la série (3) il se trouve plusieurs fois une rélation conforme par rapport à la place dans le segment $(0 \ldots 1)$ entre des intervalles en même nombre de la série (1); cela tient à ce que l'ensemble S est un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle, quelque petit qu'il soit.

Pour simplifier nous poserons:

$$\varphi_1 = \psi_1; \quad \varphi_{k_2} = \psi_2; \quad \ldots; \quad \varphi_{k_\nu} = \psi_\nu; \quad \ldots$$

Par conséquent la série suivante:

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots \tag{4}$$

(1) Il ne s'agit donc pas ici de la place ν et μ qu'occupent ces intervalles dans la série (1).

se compose absolument des mêmes éléments que la série (3); *les deux séries* (3) *et* (4) *ne diffèrent que par rapport à la succession de leurs termes.*

La série (4) de points ψ_ν a donc ce rapport remarquable avec la série (1) d'intervalles, que toutes les fois que ψ_ν est plus petit ou plus grand que ψ_μ, aussi a_ν et b_ν sont respectivement plus petits ou plus grands que a_μ et b_μ. Et je rappelle de nouveau que l'ensemble $\{\psi_\nu\}$, puisqu'il coïncide avec l'ensemble donné $\{\varphi_\nu\}$, à part la succession des termes, est condensé dans toute l'étendue du segment $(0 \ldots 1)$ et que les points extrêmes de celui-ci, 0 et 1, n'appartiennent pas à cet ensemble.

Les conséquences d'une telle association des deux ensembles $\{\psi_\nu\}$ et $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ sont maintenant, comme il est *facile* de le démontrer, les suivantes:

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2})$, $\ldots$, $(a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu})$, $\ldots$ *est une série quelconque d'intervalles appartenants à la série* (1), *qui convergent infiniment soit vers le point* a_ρ, *soit vers le point* b_ρ, *alors la série correspondante de points* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, $\ldots$, ψ_{λ_ν}, $\ldots$, *appartenants tous à la série* (4), *converge infiniment vers le point* ψ_ρ, *et réciproquement.*

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2})$, $\ldots$, $(a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu})$, $\ldots$ *est une série quelconque de la même espèce, mais telle, que ses termes convergent infiniment vers un point* g *de l'ensemble* S *(voir la formule* (2) *et la signification de* g*), alors la série correspondante* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, $\ldots$, ψ_{λ_ν}, $\ldots$ *à son tour converge infiniment vers un point déterminé du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui ne coïncide avec aucun point de la série* (3) *ou* (4) *et qui de plus est entièrement déterminé par* g*; nous désignerons ce point correspondant à* g *par* h*; réciproquement soit* h *un point quelconque du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui n'appartient pas à la série* (3) *ou* (4) *il détermine un point* g *de l'ensemble* S *différent des points* a_ν *et* b_ν*; en sorte que les deux nombres variables* g *et* h *sont des fonctions à sens unique l'une de l'autre et que les ensembles* $\{g\}$ *et* $\{h\}$ *par suite sont certainement de la même puissance.*

De là suit la démonstration du théorème en question.

Car nous avons d'après la formule (2):

$$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

Puis il est évident que:

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\varphi_{2\nu}\} + \{\varphi_{2\nu-1}\} + \{h\}.$$

Mais comme on a les formules suivantes:

$$\{a_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu}\};\ \{b_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu-1}\} \text{ et } \{g\} \sim \{h\}$$

on conclut d'après le théorème (E) des **Acta Mathematica** T. 2 p. 318 la formule:

$$S \sim (0 \dots 1)$$

c'est à dire l'ensemble parfait S a la même puissance que le segment continu $(0 \dots 1)$; ce qui était à démontrer.

... Cette démonstration a l'avantage de nous dévoiler une grande classe remarquable de fonctions *continues* d'une variable réelle x, dont les propriétés donnent lieu à des recherches intéressantes, soit en les considérant d'après la définition, qui se rattache à notre développement, *soit en tâchant de les mettre sous la forme de séries trigonométriques, qui certainement leur sont conformes, parce que ces fonctions continues ne jouissent pas d'un nombre infini de maxima et minima.*

En effet nous pouvons établir dans l'intervalle $(0 \dots 1)$ une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

Lorsque x est compris dans l'un quelconque des intervalles $(a_\nu \dots b_\nu)$ c'est à dire pour $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ $\psi(x)$ est égale à ψ_ν; lorsque x reçoit une valeur g qui s'obtient comme limite d'une série d'intervalles $(a_{\lambda_1} \dots b_{\lambda_1})$, ..., $(a_{\lambda_\nu} \dots b_{\lambda_\nu})$, ... alors on définit:

$$\psi(g) = h = \lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu}. \tag{5}$$

Certe, la fonction $\psi(x)$, d'après ce que nous avons vu, *est une fonction continue, monotone*[1] *de la variable continue x; lorsque x croît de 0 à 1, $\psi(x)$ varie d'une manière continue sans diminuer de 0 à 1; son image*

---

[1] C'est une *expression* introduite par M. Ch. Neumann (voir *Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-functionen fortschreitenden Entwickelungen.* Leipzig 1881, p. 26).

géométrique se compose d'un ensemble scalariforme de segments droits, tous parallèles à l'axe des x et de certains points interposés, qui font, que cette courbe devient un continu. Un cas particulier de ces fonctions est déjà compris dans un exemple, que j'ai mentionné dans Acta mathematica T. 2, pag. 407. En posant:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\rho}{3^\rho} + \ldots, \tag{6}$$

où les coefficients c_μ peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres, l'ensemble $\{z\}$ est un ensemble *parfait* S, situé dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à cet ensemble $\{z\}$; de plus l'ensemble $\{z\} = S$ est ici tel, qu'il n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, si petit qu'il soit; enfin on peut aussi s'assurer, que cet ensemble $S = \{z\}$ a une *grandeur* $\mathfrak{J}(S)$ (*notion* que j'expliquerai à l'instant) égale à zéro.

Ici les points, que nous avons désignés par b_ν résultent de la formule (6) pour z en prenant $c_\rho = 0$ à partir d'un certain ρ plus grand que 1, en sorte que tous les b_ν sont compris dans la formule:

$$b_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu}. \tag{7}$$

Les points a_ν résultent de la même formule pour z, en prenant c_ρ à partir d'un certain ρ toujours égal à 2, en sorte qu'en vertu de l'équation:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots$$

on a, en prenant $c_\mu = 0$, $c_{\mu+1} = c_{\mu+2} = \ldots = 2$,

$$a_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^\mu}. \tag{8}$$

Joignons maintenant la variable z à une autre y, définie par la formule:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_\rho}{2^\rho} + \ldots\right) \tag{9}$$

dans laquelle nous convenons, que les coefficients c_ρ ont la même valeur que dans (6).

Par cette liaison y devient évidemment une fonction de z, que nous appellons $\psi(z)$. Remarquons maintenant que les deux valeurs de $\psi(z)$ pour $z = a_\nu$ et pour $z = b_\nu$ deviennent égales, savoir:

$$\psi(a_\nu) = \psi(b_\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \frac{2}{2^\mu}\right).$$

De là resulte une fonction continue et monotone $\psi(x)$ de la variable continue x, définie de la manière suivante:

Pour $a_\nu < x < b_\nu$ on pose: $\psi(x) = \psi(a_\nu) = \psi(b_\nu)$, et pour $x = z$ on a $\psi(x) = y = \psi(z)$.

M. L. SCHEEFFER à Berlin a observé, que cette fonction $\psi(x)$, ainsi que beaucoup d'autres, est en contradiction avec un théorème de M. HARNACK (v. Math. Annalen Bd. 19, pag. 241, Lehrs. 5). En effet cette fonction $\psi(x)$ a sa dérivée $\psi'(x)$ égale a zéro pour toutes les valeurs de x, à l'exception de ceux, que nous avons nommées z; celles-ci constituent un ensemble parfait $\{z\}$, dont la grandeur $\mathfrak{J}(\{z\})$ est égale à zéro. Mais M. SCHEEFFER m'a aussi dit, qu'il pouvait remplacer ce théorème par un autre, qui serait exempt de doute; j'espère qu'il publiera bientôt dans les Acta ses recherches sur ce sujet aussi bien que sur diverses autres questions intéressantes, dont il s'occupe.

... Dans ce qui précède j'ai démontré, que tous les ensembles parfaits et linéaires de points, qui ne sont condensés dans aucune partie du segment, dans lequel ils sont placés, si petite qu'elle soit, sont de la même puissance que le continu linéaire.

Prenons maintenant un ensemble parfait et linéaire de points S *quelconque,* placé dans l'intervalle $(-\omega \ldots + \omega)$ je dis qu'également cet ensemble S a la puissance du continu $(0 \ldots 1)$.

En effet, comme nous avons déjà traité le cas, où l'ensemble S n'est condensé dans aucune partie continue du segment $(-\omega \ldots + \omega)$, prenons un intervalle quelconque $(c \ldots d)$, dans l'intérieur duquel S soit condensé partout. Tous les points de $(c \ldots d)$ appartiendront aussi à S, parce que S est un ensemble parfait.

L'ensemble de points $(c \ldots d)$ est un système partiel de S et S un système partiel du segment $(-\omega \ldots +\omega)$. Comme l'ensemble $(c \ldots d)$ a la même puissance que l'ensemble $(-\omega \ldots +\omega)$, on en conclut aussi, que S a la même puissance que $(-\omega \ldots +\omega)$, c'est à dire la puissance de $(0 \ldots 1)$; car on a le théorème général:

»*Étant donné un ensemble bien défini M d'une puissance quelconque, un ensemble partiel M' pris dans M et un ensemble partiel M'' pris dans M', si le dernier système M'' possède la même puissance que le premier M, l'ensemble moyen M' est aussi toujours de la même puissance que M et M''.*« (Voir Acta mathematica, T. 2, pag. 392).

Lorsqu'un ensemble P est tel, que son premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ en est diviseur, je nomme P un *ensemble fermé.*

Chaque ensemble *fermé* P d'une puissance supérieure à la première se décompose, comme nous le savons, d'une seule manière en un ensemble R de la première puissance et en un ensemble parfait S. On en conclut au moyen des théorèmes obtenus, le suivant: »*Tous les ensembles fermés de points se divisent en deux classes, les uns sont de la première puissance, les autres ont la puissance du continu arithmétique.*« Dans une prochaine communication je montrerai que cette division en deux classes a aussi lieu pour les ensembles de points *non fermés.* Par là nous arriverons à l'aide des principes du § 13 de mon mémoire dans Acta mathematica T. 2, pag. 390, à la détermination de la *puissance* du *continu arithmétique,* en démontrant qu'elle coïncide avec celle de la *deuxième classe des nombres (II).*

... Il y a une *notion* de *volume* ou de *grandeur,* qui se rapporte à tout ensemble P, situé dans un espace plan G_n à n dimensions, que cet ensemble P soit continu ou non.

Dans le cas ou P se réduit à un ensemble continu à n dimensions, ou à un système de tels ensembles, cette notion se confond avec la notion ordinaire de volume.

Lorsque P est un continu à un nombre de dimensions plus petit que n la valeur du volume devient zéro; la même chose arrive lorsque P est tel que $P^{(1)}$ a la première puissance et encore dans divers autres cas. Mais ce qui, au premier moment, paraîtra peut être étonnant, c'est que ce volume, je le désigne par $\mathfrak{J}(P)$, a quelquefois une valeur différente de zéro pour des ensembles P contenus dans G_n de l'espèce de ceux, qui ne sont condensés dans aucune partie continue à n dimensions de G_n, si petite qu'elle soit.

J'arrive à cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* $\mathfrak{J}(P)$ d'un ensemble *quelconque* P contenu dans G_n en prenant *chaque* point p, qui appartient à P ou à $P^{(1)}$, pour centre d'une sphère pleine à n dimensions au rayon ρ, que nous appellerons $K(p, \rho)$. Le plus petit multiple de tous ces sphères pleines $K(p, \rho)$ (voir la définition du plus petit multiple, Acta mathematica T. 2, pag. 357) savoir:

$$\mathfrak{M}[K(p, \rho)],$$

(où ρ est une constante) constitue pour chaque valeur de ρ un ensemble qui se compose de pièces continues à n dimensions et dont le volume se détermine d'après les règles connues au moyen d'une intégrale n-tiple.

Soit $f(\rho)$ la valeur de cette intégrale; $f(\rho)$ est une fonction continue de ρ, qui diminue avec ρ; la limite de $f(\rho)$, lorsque ρ converge vers zéro, me sert de définition du volume $\mathfrak{J}(P)$; en sorte, que nous avons:

$$\mathfrak{J}(P) = \lim_{\rho=0} f(\rho). \tag{10}$$

Je fais remarquer expressément que cette valeur du *volume* ou de la *grandeur* d'un ensemble quelconque P contenu dans un espace continu plan G_n à n dimensions est absolument dépendante de l'espace plan G_n même, duquel P est considéré comme une partie composante, et particulièrement du nombre n; de sorte que, si l'on considère *le même ensemble* P comme une partie constituante d'un autre espace continu plan H_m la valeur du volume de P par rapport à l'espace H_m est en général différente de celle, qui se rapporte au même ensemble P, considéré comme partie constitutive de G_n.

Un carré p. e. dont le côté est égal à l'unité, a sa *grandeur* égale à zéro lorsqu'il est considéré comme partie constituante de l'espace à trois dimensions, mais il a la grandeur égale à 1, lorsqu'on le regarde comme partie d'un plan à deux dimensions. Cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* m'est indispensable dans les recherches sur les *dimensions* des *ensembles continus*, que j'ai promises dans Acta mathematica T. 2, pag. 407 et que je vous enverrai plus tard pour votre journal.

En nous bornant ici aux ensembles *linéaires* de points, compris dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, le *volume* ou la *grandeur* d'un tel ensemble P se détermine facilement en suivant la méthode exposée dans Acta mathematica T. 2, pag. 378, où nous avons considéré des intervalles, désignés par $(c_\nu \ldots d_\nu)$ et liés d'après une loi manifeste à P et $P^{(1)}$ ou, comme je l'ai exprimé là, à $\mathfrak{M}(P, P^{(1)})$. Nous y avons posé:

$$\sum (d_\nu - c_\nu) = \sigma$$

où σ est une quantité déterminée positive $\leqq 1$. Or dans notre cas on se convaincra facilement, que l'on a:

$$\mathfrak{I}(P) = 1 - \sigma. \tag{11}$$

... Les ensembles linéaires parfaits de points S, qui ne sont condensés dans aucun intervalle, si petit qu'il soit, ont en général une grandeur $\mathfrak{I}(S)$ différente de zéro, mais il peuvent aussi avoir une grandeur $\mathfrak{I}(S)$ égale à zéro.

Quant à ceux, pour lesquels $\mathfrak{I}(S)$ est différent de zéro, ils peuvent être réduits par composition (addition) et à ceux pour lesquels $\mathfrak{I}(S) = 0$ et à de tels ensembles parfaits, qui non seulement sont d'une grandeur différente de zéro, mais dont toutes les parties *parfaites*, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$, ont *à leur tour* une grandeur différente de zéro.

Pour *cette dernière classe* d'ensembles parfaits linéaires il y a une démonstration très simple du théorème démontré plus haut, que leur puissance est celle du continu.

En effet prenons un tel ensemble parfait S dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et supposons que les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à S; nous établissons d'abord la série (1) d'intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, appartenant dans le sens expliqué à l'ensemble parfait S.

Soit x une grandeur quelconque > 0 et $\leqq 1$, nous désignons par S_x l'ensemble, qui est constitué par tous les points de S, qui sont situés dans l'intervalle $(0 \ldots x)$ et définissons une fonction $\varphi(x)$ par les conditions suivantes:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \mathfrak{J}(S_x) \qquad \text{pour } x > 0 \text{ et } \leqq 1.$$

Cette fonction $\varphi(x)$ est, comme on le voit sans peine, continue et monotone dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$; pour la valeur $x = 1$ elle prend la valeur $\varphi(1) = \mathfrak{J}(S) = c$, différente de zéro d'après l'hypothèse faite par rapport à S. De plus, dans chacun des intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, c'est à dire pour $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ elle conserve une valeur constante $\varphi(x) = \varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$; lorsque x est plus petit que a_ν on a toujours $\varphi(x) < \varphi(a_\nu)$, lorsque x est plus grand que b_ν on a $\varphi(x) > \varphi(b_\nu)$; *cela tient à ce* que nous avons supposé un ensemble S tel que tout ensemble partiel parfait, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$ est à son tour d'une *grandeur* différente de zéro.

La fonction continue $\varphi(x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et c; elle prend chaque valeur entre celles qui sont égales à $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$ un nombre infini de fois, savoir pour tous les x, qui sont $\leqq a_\nu$ et $\leqq b_\nu$; mais elle ne prend *qu'une seule* fois chaque valeur h de l'intervalle $(0 \ldots c)$, qui est différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, pour une valeur *distincte* g de x, où g diffère de toutes les valeurs appartenant aux intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, soit des valeurs extrêmes a_ν et b_ν soit des intermédiares.

Et puisque à chacune de ces valeurs g de x il appartient une certaine valeur $h = \varphi(g)$, différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, et vice versa, on a comme dans notre première démonstration:

$$\{g\} \sim \{h\}$$

d'où l'on conclut comme plus haut, que la puissance de S est celle du continu $(0 \ldots c)$.

... Après avoir obtenu ces résultats je suis revenu à mes recherches sur les séries trigonométriques, que j'ai publiées il y a maintenant treize ans et que j'avais laissées de côté depuis longtemps; non seulement je suis parvenu à démontrer, que le théorème Acta mathematica T. 2 pag. 348 reste juste, lorsque le système de points, que j'y ai désigné par P, est tel, que son ensemble dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, mais je possède maintenant même quelques résultats pour le cas ou $P^{(1)}$ est d'une puissance plus grande que la première; je vous les enverrai une autre fois.

Halle, 15 Novembre 1883.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Sur la Théorie des Ensembles

AUTEUR :

CANTOR, Georg

RESUME :

Les articles de Georg Cantor parus en Allemand entre 1873 et 1883 furent presque intégralement traduit en français et publiés par les soins de Mittag-Leffler dans Acta Mathematica en 1883. Les travaux de Cantor dans ces textes portent sur les séries trigonométriques, la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques, la non-dénombrabilité de l'ensemble des réels, les fondements de la théorie générale des ensembles, les nombres transfinis et la puissance des ensembles " parfaits ".

MOTS CLES :

Histoire – épistémologie - nombres réels

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1992
ISBN : 2-86612-066-3