INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

4
Oct. 1991

UN ENSEIGNEMENT DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES A DES FUTURS INSTITUTEURS-MAITRES-FORMATEURS

Par D. BUTLEN et M. PEZARD

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

U N I V E R S I T E P A R I S 7

UN ENSEIGNEMENT DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

A DES FUTURS INSTITUTEURS-MAITRES-FORMATEURS

D. BUTLEN
M. PEZARD

Nous présentons ici le compte-rendu d'un enseignement de didactique des mathématiques effectué, par Monique PEZARD et Denis BUTLEN lors d'un stage de formation de candidats à l'examen permettant de devenir Instituteur-Maître-Formateur (conseiller pédagogique) en Seine et Marne (formation de 60 heures). Nous n'avons détaillé que les enseignements de didactique des mathématiques, l'enseignement purement mathématique n'est que signalé dans ce texte. Nous avons toutefois détaillé une "entrée mathématique" à propos d'activités portant sur les interactions espace-plan. Notre but est de présenter aux stagiaires certains résultats, notions et outils de didactique des mathématiques leur permettant de réfléchir sur leur pratique, sur l'enseignement élémentaire et de contribuer à les préparer à leur future fonction de conseiller pédagogique. Cette formation n'a pas été évaluée, nous nous bornons à décrire ici, une première tentative d'enseignement, basée sur une approche explicitement didactique de formation initiale de conseiller pédagogique du premier degré ; il s'agit de donner aux stagiaires des outils théoriques, leur permettant de réfléchir, en autres, sur les pratiques d'enseignement. Nous avons d'autre part, rajouté quelques activités effectuées en formation initiale (élèves-instituteurs de l'E.N.M de Melun) dans le cadre d'un enseignement spécifique de didactique, intitulé : "Ateliers de didactique" (public volontaire, formation de 30 heures). De même, il ne nous a pas été possible d'évaluer l'impact de cet enseignement. Dans ce dernier cas, cet enseignement s'intègre donc dans une formation initiale d'instituteurs et ne s'adresse plus à un public de "maîtres expérimentés".

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

FORMATION EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DES FUTURS INSTITUTEURS-MAITRES-FORMATEURS

CHAPITRE UN : PRESENTATION DE LA FORMATION : OBJECTIFS, CONTENUS ET PUBLIC CONCERNE

1) OBJECTIFS ET CONTENUS DE LA FORMATION

Ce stage comprend deux périodes, l'une de 72 heures (trois semaines en mars 1990), l'autre de 48 heures (2semaines en novembre 1990). Le temps de chaque période est partagé entre les mathématiques et le français.
Il a pour but de fournir aux futurs I.M.F (instituteurs-maîtres-formateurs) un certain nombre d'outils théoriques : notions de didactique des mathématiques leur permettant de construire et d'analyser une séquence ou une progression sur divers thèmes mathématiques. Plus généralement, il vise à leur permettre de mieux dominer les problèmes de l'enseignement élémentaire afin de les former pour leur futur fonction de conseiller pédagogique.
Les candidats doivent passer un examen comportant trois épreuves :
- rédaction et soutenance d'un mémoire portant sur une expérience professionnelle du candidat,
- présentation de deux séquences dans leur classe sur le sujet de leur choix, une des séquences doit porter sur le français ou les mathématiques,
- une analyse de séquence menée par un élève-instituteur suivi d'un entretien avec celui-ci visant à le conseiller sur la base de sa prestation.

Nous devons lors du stage fournir aux stagiaires des outils pour réussir ces épreuves, ce contrat explique l'accent mis sur la construction et l'analyse de séquences dans ce cours.

Nous avons décidé de présenter un certain nombre de notions de didactique, à partir de l'étude de 5 thèmes mathématiques particuliers :

- 3 thèmes traités dans la 1ère période :
    - calcul écrit et calcul mental,
    - interactions entre le plan et l'espace,
    - fonctions numériques et proportionnalité.

- 2 thèmes dans la 2ème période :
    - la construction du nombre naturel, la numération (des entiers naturels),
    - les nombres décimaux.

Ce point de vue qui consiste à aborder des notions didactiques à partir de thèmes mathématiques enseignés à l'école élémentaire est délibéré . Il s'agit ici de répondre à deux soucis de formation, d'une part ancrer une réflexion de type didactique sur une pratique professionnelle d'enseignement des notions mathématiques considérées par les praticiens comme "les plus difficiles à enseigner" à l'école élémentaire ; d'autre part de combler, si nécessaire certaines lacunes mathématiques sur le sujet.
Il a été question notamment de :
- typologie des situations (dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation),
- situation didactique et a-didactique,
- contrat didactique, effets de contrat,
- variables didactiques,
- dialectique outil-objet,
- jeux de cadres et champ conceptuel,
- processus de déséquilibre-rééquilibre dans l'apprentissage d'une notion, conflit socio-cognitif,
- statut de l'institutionnalisation,
- transposition didactique.

Ces notions n'ont pas été traitées complètement, il s'agissait ici d'une présentation. Nous nous sommes attachés à les présenter comme outils pour l'analyse et la construction de leçons (dans un but de formation des instituteurs-débutants : travail des futurs I.M.F). Il nous a semblé toutefois indispensable de les institutionnaliser.
Sans avoir fait un découpage précis, nous avons traité plus particulièrement de thèmes se rattachant à la micro-didactique dans la première période (cela nous a amené à présenter les outils nécessaires à cette étude) et de thèmes plutôt "macro" dans la seconde période (en particulier dialectique outil-objet et jeux de cadres).

Les activités de ce fait ont été orientées plutôt vers l'étude et l'analyse de séquences en première période, plutôt vers l'étude et l'analyse de progressions et manuels en seconde période.

Ces différents points (sous des formes légèrement différentes) ont été également traités lors d'un cours de didactique des mathématiques, en direction d'élèves-instituteurs, intitulé : "ateliers de didactique des mathématiques" ; le volume horaire plus limité (30 heures au lieu de 60 heures) n'a pas permis toutefois une analyse aussi détaillée.

Notre expérience de formation continue et initiale des instituteurs nous a montré qu'il est indispensable également de procéder à un rappel ou à une étude de certains concepts mathématiques, il s'agit des polyèdres et des fonctions numériques, de cardinalité et des décimaux et rationnels et de procéder, à cette occasion, à une double institutionnalisation :
- une institutionnalisation de concepts mathématiques,
- une institutionnalisation de certaines notions didactiques relatives à ceux-ci (voir notamment le paragraphe sur fonctions numériques et proportionnalité).

Nous nous sommes inspirés pour construire ce cours de nombreux travaux de didacticiens ainsi que de nombreuses contributions de Professeurs d'Ecole Normale (voir bibliographie).

2) PUBLIC CONCERNE

Il s'agit de 20 instituteurs, futurs (ou déjà) candidats à l'examen permettant d'être conseiller pédagogique (CAFIMF). Ces instituteurs enseignent dans des niveaux de classe différents (de la maternelle au CM2). Une stagiaire enseigne dans une classe d'enfants handicapés (moteur ou mental).

3) CONDITIONS MATERIELLES

Outre les conditions exposées ci-dessous, signalons que pour chaque discipline, une co-intervention systématique des deux professeurs d'école normale (P.E.N) a eu lieu. Les séquences sont testées dans les classes des instituteurs (par eux-mêmes) en présence de leurs pairs et des P.E.N.

4) TYPES D'ACTIVITES

Présentation des activités :

Nous avons effectué avec les stagiaires des activités de plusieurs types, celles-ci dépendent des notions mathématiques et didactiques abordées. Sauf pour le troisième type d'activités, le travail se passe soit par petits groupes, soit individuellement ; dans tous les cas, les institutionnalisations s'appuient sur une recherche des stagiaires et se déroulent après un échange de productions et de points de vue alimentés par leurs analyses. Nous détaillerons les formes de travail dans la suite de l'exposé. Nous distinguerons plusieurs types d'activités.

1) Les activités de micro-didactique :

Nous distinguerons les activités destinées aux instituteurs et dont le but est la mise en évidence de notions didactiques, des activités dont les buts sont plutôt d'ordre mathématique.

Les stagiaires doivent faire collectivement, par petits groupes ou individuellement :

- des analyses de séquences à partir de compte-rendus écrits, à partir de films ou bien contruites et observées par les stagiaires,
- des analyses et critiques de séquences menées par des normaliens,
- des analyses de fiches de préparation,
- des analyses de productions d'élèves sur un sujet donné,
- des analyses à priori de situations didactiques.

2) Les activités de macro-didactique :

De même les stagiaires doivent faire :
- des analyses comparées de progression,
- des études et classifications de problèmes permettant de dégager certains éléments pertinents à la définition de champ conceptuel, ou à la nature des notions mises en jeu (outil / objet),
- des études de documents filmés retraçant un cursus d'enseignement,
- des constructions collectives de progressions.

3) Les apports d'informations sous la forme d'exposés des P.E.N. (tant en didactique qu'en mathématiques). Notons à ce propos que les phases d'institutionnalisation des notions didactiques restent souvent très locales, compte tenu de la présentation proposée.

Il nous a paru nécessaire d'ancrer, pour plusieurs raisons, une présentation de certaines notions didactiques sur des activités d'observation de classe :
- l'analyse de séquences d'enseignement sous-tend les épreuves de l'examen, de ce fait cette entrée motive fortement les stagiaires,
- il nous semble que la théorie des situations fournit des outils efficaces, d'abord plus faciles, du moins pour l'école élémentaire, dans ce cadre et s'avérant rapidement performants.
- L'entrée "micro" nous semble plus aisée, dans un premier temps, car elle porte sur un temps et sur des contenus limités (d'un point de vue mathématique). Il est toutefois difficile d'inférer sur une séquence limitée dans le temps, des comportements plus globaux d'enseignants.
- La "macro-didactique" n'est pour autant abandonnée, elle sera peu à peu étudiée à partir de l'étude de processus d'enseignement plus longs (multiplication, division).

Nous joignons à cet exposé les documents distribués aux stagiaires.

PREMIERE PERIODE DU STAGE
(3 semaines en mars 1990)

CHAPITRE DEUX : PREMIER THEME : CALCUL ECRIT, CALCUL MENTAL

A) AUTOUR DE LA DIVISION - TYPOLOGIE DES SITUATIONS, CONTRAT DIDACTIQUE (1ère journée)

A-1)" Le nombre le plus proche"

Cette activité a été largement décrite par Hervé Péault dans les actes du colloque des P.E.N. de Rouen de 1988 (voir (2)) et par les collègues de Bordeaux (voir la contribution de Suzy GAIRIN-CALVO, Colloque des P.E.N. d'Angers, 1987, (1)).

Il s'agit d'un jeu proposé aux stagiaires dont la règle est la suivante :

"*On a n équipes et x joueurs. Chaque joueur dispose de 10 papiers comportant les nombres de 0 à 9. Le P.E.N donne un nombre m compris entre 0 et 9x. Chaque joueur de l'équipe lève un nombre et la somme des nombres par équipe doit être la plus proche de m*".

Les stagiaires doivent trouver une stratégie gagnante, pour cela nous adoptons le dispositif décrit ci-dessous.

Il y a deux stratégies gagnantes :
- on divise le nombre m par 9 (m=9.b+r). Les b premiers joueurs lèvent le nombre 9, le joueur suivant lève le nombre r et les autres joueurs lèvent le nombre 0 (procédure n°1),
- on divise le nombre m par le nombre de joueurs (m=b'x+r'). Les r' premiers joueurs rajoutent 1 au nombre b' et les autres joueurs lèvent le nombre b'. (procédure n°2).

Le déroulement adopté diffère quelque peu de celui de Hervé Péault, à savoir :

1ère phase : les stagiaires jouent deux fois, sans concertation préalable, par équipe de 4
2ème phase : 2 jeux après concertation, les stagiaires doivent rédiger leur stratégie,
3ème phase : 2 jeux par équipe de 7 avec concertation préalable et nouvelle rédaction,
4ème phase : 2 jeux par équipe de 21 (tout le groupe d'instituteurs)
5ème phase : élaboration collective par les stagiaires d'une stratégie pour une équipe fictive de 247 joueurs ?
Dans chaque phase, les scores par équipes, le nombre de joueurs par équipe et le nombre à approcher est inscrit au tableau.
6ème phase : institutionnalisation par le P.E.N sur la base de l'observation a posteriori des production des stagiaires, des notions suivantes : dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation et de l'institutionnalisation, en s'inspirant du polycopié mis au point par l'équipe l'IREM de recherche en didactique de Bordeaux et extrait de (4) (voir pages 14 à 17, les documents de Bordeaux).

Les objectifs poursuivis par les P.E.N sont sensiblement les mêmes que ceux exposés par Hervé Péault dans (2), à savoir :

a) dégager ce qui relève de l'action, de la formulation, de la validation dans cette activité

Il nous paraît toutefois difficile d'étiqueter chaque phase en terme d'action ou de formulation ou de validation (cf Hervé Péault dans (2)) mais plutôt de parler de dialectiques de l'action, de la

formulation, de la validation. De plus c'est l'occasion de pratiquer une double institutionnalisation :
- d'une part, des notions didactiques citées ci-dessus,
- d'autre part de repréciser certaines notions mathématiques liées à la division, en particulier : définitions de la division euclidienne, de la division approchée dans D...

Enfin, il nous a paru nécessaire (cf(3)) d'étiqueter pour les instituteurs les moments où nous institutionnalisions et sur quel domaine porte le discours (didactique ou mathématique).

b) dégager parmi les variables de la situation, celles qui sont didactiques :

Notamment le nombre de joueurs de l'équipe : si celui-ci est petit, la stratégie n°2 est privilégiée, si celui-ci est élevé ou est un nombre premier, la stratégie n°1 est privilégiée (sauf pour des nombres comme 20, 25, 30...).
L'analyse des messages rédigés à chaque étape du jeu, ainsi que l'analyse a posteriori des stratégies explicitées par les stagiaires nous fait constater, comme Hervé Péault des stratégies hybrides, locales, voire "alambiquées" dans plusieurs cas (cf 2).

En fait, nous avons seulement, à ce stade, repéré ce qui relève des 4 dialectiques citées ci-dessus et souligné le rôle joué par les nombres intervenant dans la situation. Ces notions, de même que la notion de "dévolution du problème" seront reprises et feront l'objet d'un exposé dans la phase suivante.
L'institutionnalisation porte également, comme nous l'avons déjà dit, sur la notion de division euclidienne et sur le statut de"l'écriture $a=bq+r \quad o \leq r < b$".

A-2) Activité "qui dira vingt ?"

Cette activité est décrite en détail par G. Brousseau (4), il n'est pas question ici de la décrire à nouveau. C'est l'occasion de revenir sur les dialectiques de l'action, formulation, validation, sur les notions de situations didactiques et a-didactiques et de dévolution du problème. De plus, il nous a paru nécessaire de préciser, à ce stade, ce que nous entendions par "jeu".
Le déroulement comporte 3 phases :

phase n°1 : pratique du jeu par les stagiaires, découverte d'une stratégie gagnante, changement de la case d'arrivée, et du pas afin qu'ils optimisent leur stratégie et la formule en terme de division.

phase n°2 : mise au point collective d'une stratégie, réflexion sur "le sens soustractions successives" de la division, réflexion sur la démarche suivie lors de la phase précédente et sur le rôle des variables ("course à 227 avec un pas de 23").

phase n°3 : institutionnalisation didactique s'inspirant des polycopiés élaborés par Bordeaux (voir documents n°3, pages 14 à 17).

Avec les normaliens, nous avons l'habitude dans un dernier temps, d'analyser le film C.N.D.P. "*Qui dira vingt*" , afin de repréciser ces notions dans une situation de classe. (voir (6)). Ici seule une description par le PEN du film a été faite.

A-3) Analyse du compte-rendu d'une séquence du "ERMEL CM" - Introduction de la division

Il s'agit d'analyser un compte-rendu écrit d'une séquence sur la division reproduit dans Ermel - CM1 - Tome 1 - page 66. Les stagiaires ont à leur disposition le texte de la séquence (voir document n°2, pages 12 et 13) et doivent répondre aux questions posées (voir document n°1, page 11).
La mise en commun des réflexions est l'occasion pour les PEN de revenir sur certains points soulevés par l'analyse de cette séquence, notamment :

- *dévolution du problème* : dans un premier temps, il s'agit que les élèves s'approprient un problème de partage en parts égales. La dévolution semble réussie puisque certains élèves posent la division avant de déclarer qu'ils ne savent pas la faire. La maîtresse laisse aux élèves le choix du diviseur. Si cela permet de donner du sens au problème, cela amène l'absence de maîtrise d'une variable didactique qui se révèlera importante pour la suite de la séance.
- *Les variables didactiques* et l'effet du choix qui en est fait sur le déroulement de la séquence : en particulier le choix de 25 comme diviseur privilégie des procédures plus rapides dans ce cas mais non générales, notamment celle du groupe 8 qui se fonde sur la décomposition de 8295 en 95+200+8000, cela va être un obstacle à l'évolution du problème que souhaite la maîtresse : mettre en place une technique de division.
- *Les différentes procédures* mises en oeuvre par les élèves.
- *La négociation et l'évolution du contrat didactique* : quel est, au cours des différentes phases de la séquence, le problème pour la maîtresse, le problème pour les élèves. Dans un premier temps le problème pour les élèves est de trouver le nombre de paquets à faire. C'est bien ce qu'attend la maîtresse mais son but final dans cette situation est de justifier une technique de division par soustractions successives bien choisies (économique). Après la mise en commun elle change la nature du problème pour les élèves en demandant quelle est la méthode la plus simple et la plus rapide. En fait son véritable problème est d'avoir une méthode générale simple et rapide. Pour les élèves, le problème se pose avec le diviseur 25 et non dans le cas général. Une manière de poser aux élèves le problème que veut traiter la maîtresse serait de changer le diviseur ou de leur demander d'envisager n'importe quel diviseur. Il faut toutefois être prudent, on ne peut inférer à partir de cette seule séquence la nature du contrat didactique existant dans la classe, tout au plus peut-on ici, relever un risque de rupture de contrat.
- *Institutionnalisation* : la maîtresse institutionnalise le fait qu'il s'agit d'une situation de division (ce qui n'est plus reconnu par les enfants à la fin du travail), introduit le vocabulaire quotient et reste et institutionnalise la méthode des soustractions successives comme moyen de faire une division. On peut toutefois remarquer que la première phase de l'institutionnalisation est un peu faible. L'accent aurait pu être davantage mis sur l'écriture $a=bq+r$ et la signification dans cette situation de chacun des termes de cette expression.

DOCUMENT N°1 *(distribué au stagiaires)*

Questions posées à propos de l'analyse de la séquence sur la division au C.M.1 *(voir document n°2)*

ERMEL - Tome 1 - p66

1) Choix de la situation

a) Dans quelle démarche générale d'apprentissage des mathématiques cette leçon s'inscrit - elle ?
b) Quel est l'objectif de la séquence (apprentissage d'une notion, d'une technique, d'un langage...)
c) Quelles sont les variables de la situation ?

2) Organisation de la séquence

a) dévolution du problème - étude de la consigne : Que pensez-vous de la manière dont la maîtresse donne la consigne ? Comment peut-on analyser cette intervention ? A-t-elle une influence sur la suite de l'activité ?
b) quelle est l'organisation choisie par la maîtresse ? Est-elle pertinente ?
c) quelles sont les différentes phases de la séquence ? Pour chaque phase, quelles sont les interventions de la maîtresse ? Quelle est la stratégie de la maîtresse, en fonction de quel(s) objectif(s) ?

3) Comportement des élèves

a) Quelles sont les différentes productions des élèves, quelle classification peut-on envisager pour les analyser ?
b) Pourrait-on obtenir dans d'autres classes des travaux différents de ceux-ci ?

4) Quel est, au cours des différentes phases de la séquence, le problème pour la maîtresse, le problème pour les élèves ?

5) Institutionnalisation

Analysez en particulier la dernière phase de la séquence, feriez-vous le même choix que la maîtresse ?

DOCUMENT N°2 *(distribué au stagiaires)*

Compte-rendu d'une séquence d'introduction de la division au CM1. ERMEL Tome I, page 66

I. Buts

Il s'agit de la première séquence sur la division au CM 1. Elle se situe au début du deuxième trimestre de l'année scolaire. Elle a pour objet d'amener les enfants à produire différentes procédures de calcul du quotient et du reste dans une situationde division.

Dans les séquences suivantes, à partir de nouvelles situations, on privilégiera certaines de ces procédures que l'on fera évoluer progressivement jusqu'à élaborer une technique de division.

II. Organisation de la classe

La séquence que nous décrivons a duré 1 h 30. Les enfants sont par groupes.

III. Activités

DÉROULEMENT	OBSERVATIONS
La maitresse propose la situation suivante aux élèves :	
Un éditeur doit expédier 8 295 livres Comment va-t-il s'y prendre ?	
E. - Ça dépend s'il les envoie à la même personne ou pas.	
E. - De toutes façons, il faut qu'il fasse plusieurs paquets.	
E. - Oui, oui, surtout qu'à la poste les paquets ne peuvent pas dépasser 3 kilos.	
E. - On n'est pas obligé de les envoyer par la poste.	
E. - Ça risque de faire beaucoup de paquets.	
M. - Oui, et combien à votre avis ?	
E. - Ça dépend du nombre de livres qu'on met dans chaque paquet.	
M. - Est-ce qu'on peut décider de ce nombre de livres ? Combien proposez-vous ?	
Après une brève discussion, l'ensemble de la classe se met d'accord sur 25.	
M. - Vous avez désormais tous les éléments pour calculer combien l'éditeur peut expédier de paquets.	
M. - Mettez-vous au travail.	
Après 5 minutes tous les groupes semblent en difficulté.	
E. Madame, on a posé la division mais on ne sait pas la faire 8 295 | 25	Dans les différents groupes, on constate que les enfants posent une division (8 295 : 25) Ils sont très rapidement arrêtés parce qu'au CE 2 ils ont bien étudié la technique de la division par un nombre à 1 chiffre. Mais ce mécanisme est oublié, ou tout simplement pas transposable directement au cas de cette division par 25.
En 8295 combien de fois 25, en ...?	
M. - Puisqu'il en est ainsi, vous allez essayer de faire le calcul en utilisant les opérations que vous connaisez. Essayez de vous tirer d'affaire comme cela.	

Le travail de groupe qui s'ensuit dure environ 25 minutes.

La mise en commun fait apparaitre les procédures suivantes :

GROUPE 1

- On a cherché à atteindre 8295, en multipliant par un nombre de plus en plus grand.

25 x 19 = 325
25 x 25 = 625
25 x 30 = 750
25 x 40 = 1 000
25 x 80 = 2 000
25 x 100 = 2 500
25 x 280 = 7 000
25 x 385 = 9 625

Le nombre de paquets est donc compris entre 280 et 385

25 x 295 = 7 375
25 x 320 = 8 000

Nous n'avons pas eu le temps de terminer.

GROUPE 2 et 3

On a vu que si on faisait 100 p. cela correspondait à 2 500 livres

25 x 100 = 2 500 et on a cherché ce qui restait, et ainsi de suite...

8295	
- 2500	100 paquets
5795	
- 2500	100 paquets
3295	
- 2500	100 paquets
0795	
- 250	10 paquets
545	
- 250	10 paquets
295	
- 250	10 paquets
045	
- 25	1 paquet
20	331 paquets

GROUPE 4

On s'est dit que si on calculait combien ç fait 1 paquet, puis 2 paquets, puis 3 paquets e ainsi de suite, on finirait bien par trouver com bien il faut de paquets pour 8295 livres.

25	1	
50	2	(tous les résultats
75	3	intermédiaires ont été
		calculés par
800	32	les enfants)
825	33	

Là, on a vu qu'on avait les 2 premiers chif fres de 8 295, alors on a multiplié par 10.

8 250 330
8 275 331 et il reste 20 livres.

GROUPE 5

On a essayé de voir combien de fois 25 éta reproduit dans 8 295.

4 x 25 = 100
8 x 25 = 200
80 x 25 = 2 000 c'est trop petit
800 x 25 = 20 000 c'est trop grand
160 x 25 = 4 000
320 x 25 = 8 000
8 x 25 = 200 331 caisses
3 x 25 = 75

Il reste 20 livres.

GROUPE 6

- Nous nous sommes dits que pour chaqu paquet fait il y avait 25 livres de moins à expé dier.
- On a donc posé toutes ces soustractions.

8 295...	
− 25	1 paquet
8 270	
− 25	1 paquet
8 245	
− 25	1 paquet
8 220	

Ça commençait à être un peu long alors on pensé à enlever 10 paquets à la fois.

8 220	
− 250	10 paquets
7 970	
− 250	10 paquets
7 720	

Le nombre ne diminuant toujours pas très vite alors on a enlevé 2 500 (les livres de 100 paquets)

7 720	
− 2 500	100 paquets
5 220	
− 2 500	100 paquets
2 720	
− 2 500	100 paquets
220	
− 100	4 paquets
120	
− 100	4 paquets
20	

· Il reste 20 livres et on a fait en tout 331 paquets.

· Notre méthode était longue mais on y serait certainement arrivé.

GROUPE 7

· On a calculé pour un certain nombre de paquets combien cela faisait de livres.

1 000 × 25 = 25 000 trop grand
100 × 25 = 2 500 trop petit

Le nombre de paquets est compris entre 100 et 1 000.

500 × 25 = 12 500 trop grand
200 × 25 = 5 000 trop petit
400 × 25 = 10 000 trop grand

C'est compris entre 200 et 400

300 × 25 = 7 500 trop petit
350 × 25 = 8 750 trop grand
340 × 25 = 7 750 trop petit
320 × 25 = 8 000 trop petit
330 × 25 = 8 250 trop petit
340 × 25 = 8 500 trop grand

Le nombre de paquets est compris entre 330 et 340.

331 × 25 = 8 275
+ 20
8 295

GROUPE 8

Nous avons vu que 95 c'était 75 + 20, donc on peut déjà faire 3 paquets et il reste 20 livres.

· Après on a essayé de faire pareil pour 8 000 et 200 et ça marchait.

M. · Pourquoi avez-vous procédé ainsi?

Parce que 8 295 = 8 000 + 200 + 95

· On sait que 4 × 25 = 100
donc 8 × 25 = 200
16 × 25 = 400
32 × 25 = 800
320 × 25 = 8 000

On peut donc faire

320 + 8 + 3 = 331 paquets et il reste 20 livres.

Tous les travaux des 8 groupes restant affichés au tableau la maitresse questionne les enfants sur la qualité des procédures après que l'on se soit assuré que tous les résultats étaient identiques (on termine les calculs du groupe 1).

M. · A votre avis quelle est la méthode qui est à la fois la plus simple, la plus rapide.

E. · Celle du groupe 8.

M. · Pourquoi?

E. · Parce que leurs calculs sont simples et il y en a pas beaucoup, et moi je trouve que c'est bien de décomposer le nombre comme pour la multiplication.

M. · C'est exact mais en aurait-il été de même si l'on avait fait des paquets de 35.

E. · Ça aurait été plus dur.

M. · A part cette méthode donc, que pouvez-vous dire des autres?

E. · C'est sûr que c'est les groupes 2 et 3 qui sont allés plus vite, et puis c'est bien présenté.

E. · Le groupe 6 a fait pareil aussi mais c'est plus long.

E. · Les autres ils ont fait des multiplications mais un peu au hasard.

M. Vous avez donc tous trouvé le nombre de paquets et le nombre de livres restants. Est-ce que vous avez fait une division? Réponse unanime: «non».

M. · Pourtant il s'agit bien d'un problème de division (puisque vous avez tous essayé de la faire au début) et vous avez bien calculé un quotient 331 et un reste 20, quotient et reste de la division de 8 295 par 25.

M. · Alors pour moi vous avez tous fait une division - pas avec la méthode habituelle, mais en combinant les autres opérations que vous connaissiez. Ce n'est pas autre chose la division; et dès la prochaine séance nous allons voir comment à partir des soustractions successives on peut construire la technique de la division.

Documents n°3 : Polycopiés rédigés par le groupe formation en didactique de l'IREM de Bordeaux

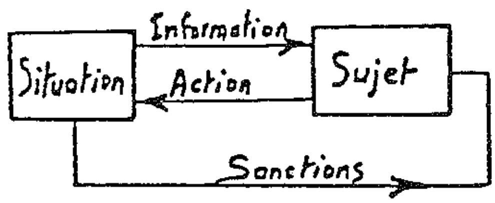
(ces documents n'ont pas été immédiatement distribués aux stagiaires, ils ont servis à rappeler certaines notions, lors de la deuxième période. De plus, ils servent depuis, de support écrit à l'institutionnalisation de ces notions pour les élèves-instituteurs)

QUELQUES MOTS CLES SUR LE PROCESSUS D'APPRENTISSAGE

Guy BROUSSEAU a établi une typologie des situations didactiques susceptibles de permettre à l'élève de construire les connaissances dont l'apprentissage est visé tout en leur donnant du sens. Il a mis en évidence un processus dialectique en quatre phases...

DIALECTIQUE DE L'ACTION

Elle consiste à placer l'enfant devant une situation, appelée situation d'action, telle -qu'elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner; -qu'il puisse agir sur elle et qu'elle lui renvoie de l'information sur son action.

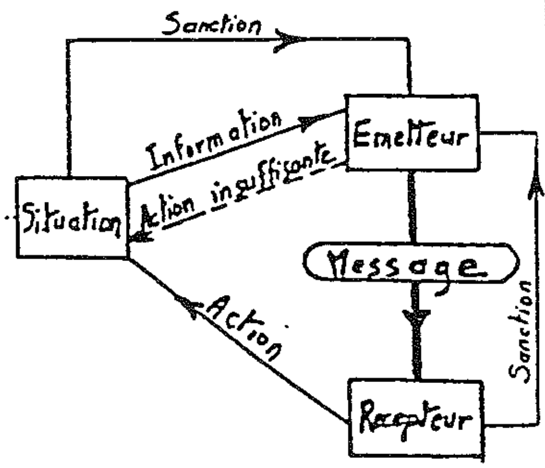


Une bonne situation d'action n'est pas uniquement une situation de manipulation libre ou selon un ordre. Elle doit permettre à l'élève de juger le résultat de son action, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître, grâce à la rétroaction (information de retour) de la part de la situation. Les informations ainsi renvoyées sont perçues par l'élève comme des sanctions ou des renforcements de son action.

Ainsi il abandonne ou améliore son modèle pour en créer un autre: la situation provoque un apprentissage par adaptation (conforme aux théories de PIAGET).

Lors d'une situation d'action, un véritable dialogue s'instaure entre l'enfant et la situation. Cette dialectique de l'action lui permet donc de se créer un modèle implicite, c'est à dire d'avoir des réactions qu'il ne peut pas encore obligatoirement formuler ni organiser en théorie.

DIALECTIQUE DE LA FORMULATION



Pour que l'élève puisse expliciter, lui même, son modèle implicite et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse s'en servir pour obtenir ou faire obtenir à quelqu'un un résultat.

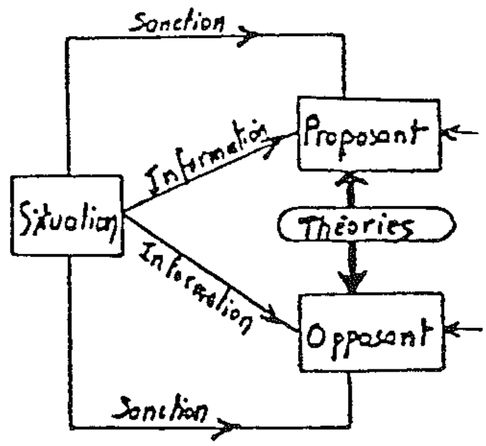
Lors de ces situations dites situations de formulation l'élève échange avec une ou plusieurs personnes des informations. Il communique ce qu'il a trouvé à un interlocuteur (ou groupe d'élèves) qui renvoie à son tour de l'information. Les deux interlocuteurs sont émetteur et récepteur et échangent des séries de messages écrits ou oraux qui sont rédigés en langage mathématique selon les possibilités de chaque émetteur.

Le résultat de cette dialectique permet donc de créer un modèle explicite qui peut être formulé à l'aide de signes et de règles connus ou nouveaux.

DIALECTIQUE DE LA VALIDATION

La validation empirique obtenue lors des phases précédentes est insuffisante. Dans cette nouvelle dialectique l'élève doit démontrer pourquoi le modèle qu'il vient de créer est valable.

Pour qu'il construise lui-même une démonstration et pour qu'elle ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse le faire dans une situation dite <u>situation de validation</u> où il doit convaincre quelqu'un d'autre. Une situation de validation est l'occasion pour un élève (proposant) de soumettre le message mathématique (modèle de la situation) comme une assertion à un interlocuteur (opposant). Le proposant doit prouver l'exactitude et la pertinence de son modèle et fournir si possible une validation sémantique et une validation syntaxique. L'opposant peut demander des explications supplémentaires, refuser celles qu'il ne comprend pas (pour en avoir d'autres) ou celles avec lesquelles il n'est pas d'accord (en justifiant son désaccord), etc...



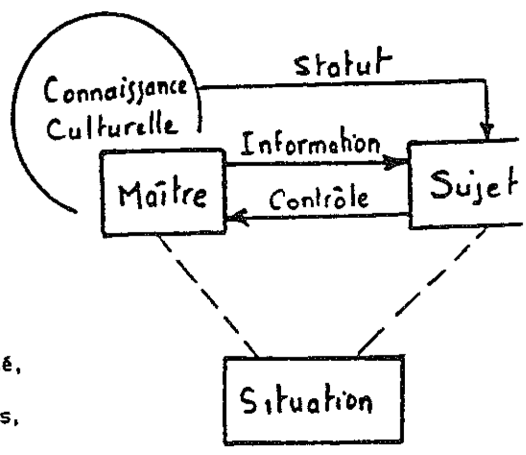
Une fois acceptée par tous, l'assertion va faire partie des <u>théorèmes</u> connus de tous et pourra servir à l'élaboration et la validation d'autres modèles.

DIALECTIQUE D'INSTITUTIONNALISATION

Une fois construite et validée, la nouvelle connaissance va faire partie du patrimoine mathématique de l'ensemble des élèves.

Les <u>situations d'institutionnalisation</u> sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation change donc le statut du savoir;

* prématurée, elle
  - interrompt la construction du sens
  - nuit à l'apprentissage espéré,
  - met le maître et l'élève en difficulté,
* tardive, elle
  - renforce les interprétations inexactes,
  - ralentit l'apprentissage,
  - gêne les applications.
* elle est en fait négociée dans une dialectique.



Après cette dernière dialectique, la connaissance est étiquetée comme quelque chose que tous les élèves doivent savoir et peuvent appliquer.

Des exercices de fonctionnement sont alors proposés.

DEVOLUTION D'UN PROBLEME

SITUATIONS A-DIDACTIQUES ("DEDIDACTIFICATION")

A -<u>Les travaux de Louis NOT</u>: "Les pédagogies de la connaissance"
col: sciences de l'homme
1979 -Privat-

Dans le livre cité en référence, Louis NOT, aprés avoir analysé et montré les insuffisances des deux sytèmes pédagogiques qui s'opposent depuis près de deux siècles:

-l'un basé sur les méthodes d'HETERO-STRUCTURATION de la connaissance du sujet (méthodes traditionnelles, magistrales etc...);

-l'autre basé sur les méthodes d'AUTO-STRUCTURATION de la connaissance du sujet (méthodes actives, de découverte, d'invention etc...);

propose une voie "médiane" en démontrant l'importance d'une éducation et d'une pédagogie fondée sur L'INTER-STRUCTURATION du sujet et du milieu dans l'organisation de la connaissance.

HETERO-STRUCTURATION	INTER-STRUCTURATION	AUTO-STRUCTURATION
"(trans)former l'élève"		"aider l'élève à se (trans)former"
- action prépondérante d'un agent extérieur		- action propre de l'élève
Ex: Modèle de SKINNER		Ex: Modèle de FREINET

<u>Citons L.NOT</u>:

"...la connaissance ne se transmet pas, et pour l'essentiel, on ne l'invente pas. La connaissance est déjà structurée sous forme de culture et, en cela, elle préexiste à l'individu et elle lui survit; tout au plus peut-il la marquer de sa griffe...Avec les méthodes traditionnelles, l'élève est pratiquement privé d'initiative et on s'efforce de lui transmettre les contenus culturels comme s'il pouvait les recevoir à travers l'action que le maître exerce sur lui. Au lieu de recevoir les contenus culturels l'élève doit les reconstruire...seulement l'enfant ne reconstruit que ce qui est à sa portée...les rapports fondamentaux dont chaque orientation pédagogique ne retient qu'un aspect, ne sont ni d'AUTO-STRUCTURATION, ni d'HETERO-STRUCTURATION, mais d'INTER-STRUCTURATION entre un sujet qui cherche à connaître et les objets de son univers naturel et culturel que cette connaissance concerne."

B -Les travaux en didactique des mathématiques:

Les dernières recherches à propos de l'enseignement des mathématiques, menées en particulier par Guy BROUSSEAU, montrent d'une manière beaucoup plus précise les différents rôles du maître et de l'élève.

En effet, le rôle (apparemment contradictoire) du maître consiste

1- à faire produire par les élèves la connaissance comme réponse raisonnable aux exigences d'une situation familière et non au seul désir du maître.

2- à transformer cette "réponse raisonnable" en "objet culturel" c'est à dire une connaissance reconnue à l'extérieur qui fera désormais partie du patrimoine mathématique de l'ensemble des élèves (cf INSTITUTIONNALISATION).

En ce qui concerne la première partie, il faut insister sur le fait que la différence est grande entre

-s'adapter à un problème que le MILIEU vous pose avec des nécessités et des obligations non arbitraires et non didactiques

-ou s'adapter au projet d'enseignement du professeur.

Il faut donc que le maître parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques qui pourraient lui permettre de produire sa réponse avec d'autres raisons que celles qui sont intrinseques au problème ("DEDIDACTIFICATION").

La résolution du problème est alors de la responsabilité de l'élève, il produit des réponses personnelles en faisant fonctionner ses connaissances ou en les modifiant suivant les exigences du milieu; il est ainsi plongé dans une SITUATION A-DIDACTIQUE.

L'activité par laquelle le maître cherche à atteindre les objectifs ci-dessus s'appele LA DEVOLUTION DU PROBLEME.(°)

En ce qui concerne la deuxième partie, il faut noter que le maître doit maintenant redépersonnaliser et redécontextualiser le savoir que l'élève a produit afin que ce dernier puisse reconnaitre dans ce qu'il a fait quelque chose qui a un caractère universel, une connaissance culturelle réutilisable.

Signalons que la tentation est grande pour le maître de court-circuiter ces deux parties et d'enseigner directement le savoir en tant qu'objet culturel en faisant l'économie de cette double manoeuvre... On présente le savoir et l'élève se l'approprie comme il peut!... (on retombe alors complètement dans l'hétéro-structuration au sens de L.NOT).

(°) La dévolution était un acte par lequel le roi - de droit divin - se départissait du pouvoir pour le remettre à une chambre. La dévolution signifie: "ce n'est plus moi qui veux, c'est vous qui devez vouloir, mais je vous donne ce droit parce que vous ne pouvez pas le prendre tout seul".

A-4) Etude du champ conceptuel de la division - un plan de progression

a) Le champ conceptuel de la division

Il s'agit d'un essai de classification de problèmes de division, à partir du document n°5 (liste d'exercices) qui suit et faisant intervenir "différentes conceptions" de la division.
Nous nous sommes inspirés de la classification ci-dessous due à G. Brousseau (voir (7)) :

Document n°4 : extraits de la thèse d'état de G.BROUSSEAU

Les conceptions de la division repérées: le champ conceptuel

Nous avons identifié les conceptions classiques suivantes au niveau primaire:

1. Les partages

La répartition globale égalisée
La répartition égalisée répétée
L'attribution régulière
L'attribution proportionnelle préparée
La distribution régulière
Le modèle unificateur (nombre de parts, valeur d'une part)
La recherche du reste.

2. Recherche du terme inconnu d'un produit

Le partage retrouvé (additions répétées)
Tâtonnements et encadrements successifs (erratiques, systématiques)
La composante d'une mesure produit (recherche directe en dimension 2, unidimensionnalisation...)
La dérivation
Le partage prolongé
L'approche euclidienne

3. La division "fraction"

Fractionnement de l'unité
La commensuration
L'estimation décimale d'un rationnel

4. L'application linéaire

La recherche du correspondant de 1
Le rapport (de mesures, scalaires...), l'invariant dans une homothétie
L'application (classe de couples, ou relation) divisé par
La recherche de l'image
La réciproque de l'application multiplicative.

5. La composition d'applications linéaires

Recherche d'une des applications composantes
L'inverse d'une application.

Les variables pertinentes identifiées par G.Brousseau sont :

Les variables pertinentes identifiées

Nous avons repéré quatre groupes de composantes contextuelles:

<u>1er groupe</u>: les nombres:
La structure mobilisée (naturels, rationnels, décimaux...)
L'expression des nombres (fractionnaire ou décimale)
La taille des nombres (inférieurs à 1, entre 1 et 2, petits nombres, grands nombres).
La fonction mathématique des nombres (cardinale, mesure, scalaire, application linéaire... etc) ces différentes fonctions engendrent des types de produits différents (cf. Brousseau 81) donc des divisions différentes (produit de cardinaux, scalaires-mesure, produit de scalaires, applications d'une homothétie de R à une mesure, composition d'applications multiplicatives... etc).

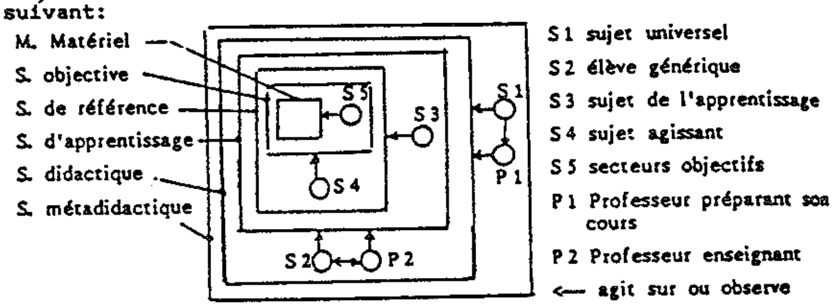
<u>2ème groupe</u>: les types de grandeurs.
Domaines physiques
Dimensions (et effets des dilatations)
Modes de définitions (grandeurs-produit, grandeurs-dérivées, grandeurs-quotient).

<u>3ème groupe</u>: la situation didactique.
La variable la plus surprenante concerne les relations "effectives/invoquées" que la situation établit entre l'élève, le maître et le milieu.
Les divers types de situations, didactiques et a-didactiques, en évidence sont les suivantes:

- situation a-didactique objective
- situation de référence a-didactique
- situation d'apprentissage "a-didactique"

- situation d'enseignement (situation didactique)
- situation métadidactique.

Elles sont emboîtées selon une relation de "situation agie" à "situation objet d'étude"; le schéma global étant le suivant:



L'élève peut s'identifier aux différentes positions épistémiques, le rôle et le sens du savoir est différent à chaque niveau, les connaissances changent de niveau et de statut au fur et à mesure de l'apprentissage. Les possibilités offertes ou non à l'élève de jouer ou de simuler les différents rôles contribuent de façon importante à la formation et à l'évocation du sens des connaissances (Brousseau (6)).

4ème groupe: les techniques de calcul enseignées précédemment.
Manipulations de "partage"
Soustractions répétées
Mise en facteur (tâtonnements, devinette...)
Encadrement systématique
Renvoi dans les naturels
Soustraction répétée poursuivie
La présentation des calculs.

Nous avons en particulier vérifié une fois de plus l'importance, pour une présentation des calculs, de laisser une certaine souplesse au déroulement en vue de la correction des erreurs et de permettre des contrôles automatiques sur la position des chiffres ou l'ordre de grandeur des résultats comme dans une abaque.

L'exposé du P.E.N qui a suivi la classification des exercices (voir document n°5, pages 21 à 24) a porté :
- sur les "conceptions de la division repérées" (voir document n°4)
- sur les 1er, 2ème et 4ème groupes de variables repérées par G. BROUSSEAU (voir document n°4).

Cela a été l'occasion d'aborder les notions de :
- jeux de cadres,
- situations de référence (à la notion de situation fondamentale de G.Brousseau, nous avons préféré celle de situation complexe de référence) et leur utilisation pour construire une progression .

b) Un exposé a suivi sur la construction d'un algorithme opératoire à partir de l'optimisation des soustractions successives, précisant la place et le rôle de certaines situations dans cet apprentissage et posant le problème du passage à l'algorithme usuel français.

DOCUMENT N°5 *(distribué aux stagiaires)* **:** exercices portant sur la notion de division, extraits de manels scolaires de l'enseignement primaire ou d'ouvrages destinés aux maîtres de ce niveau.

a) Situation de découverte
Lecture de la situation de découverte avec les élèves.

Dans les fournitures scolaires, les crayons sont livrés par boîtes de 12.

- Le cours préparatoire a commandé : 60 crayons.
- Le cours élémentaire 1 a commandé : 50 crayons.
- Le cours élémentaire 2 a commandé : 56 crayons.
- Le cours moyen 1 a commandé : 38 crayons.
- Le cours moyen 2 a commandé : 75 crayons.

Combien de paquets le directeur doit-il commander?

Pour cela, utilise les opérations que tu connais déjà : l'addition, la soustraction, la multiplication.

Consigne
Vous êtes capables de trouver le résultat car vous savez faire les additions, les soustractions et les multiplications. Cherchez comment les utiliser pour trouver la réponse à la question.

a) Situation de découverte
Chaque groupe travaille sur un des énoncés suivants.

1. Je déménage ma bibliothèque qui se compose de 140 volumes. Il m'a fallu 15 cartons pour les transporter.
2. Audrey est en classe de neige. Sa maman lui envoie des bonbons qu'elle désire partager avec ses 14 camarades. Avant de commencer le partage, elle les compte et trouve 140.
3. C'est la fête de fin d'année à l'école. Il s'agit de vendre les 140 programmes imprimés. 15 élèves sont volontaires.
4. Une coopérative scolaire récupère les vieux journaux pour les vendre. Le chiffonnier demande qu'ils soient ficelés par paquets de 15.
   Les élèves de C.M. en ont apporté 48.
   Les élèves de C.E en ont apporté 37.
   Les élèves de C.P. en ont apporté 55.
5. En début d'année, après distribution de 3 cahiers à chacun des 15 élèves de la classe, il en reste 95.

Consigne
Après avoir lu le texte et réfléchi à la question que vous pouvez vous poser, cherchez-en la réponse. Notez vos calculs et écrivez la réponse sous forme d'une égalité.

BIJOU COLLECTIONNE LES TIMBRES

Il en a déjà 130. Il désire acheter un cahier sur lequel il veut coller 8 timbres par page.

Quel est le nombre minimum de pages que doit comporter le cahier pour pouvoir contenir tous les timbres?

Pour la fête des Mères, 4 frères et sœurs ont mis la même somme d'argent. Ils disposent ainsi de 160 F.
Quelle somme chacun d'eux a-t-il versée?

LE NOUVEAU JEU D'IRIS ET CHLOÉ

Au hasard, elles tirent chacune un 1er nombre :

- Iris tire le nombre 521.
- Chloé tire le nombre 436.

Puis elles en tirent un second :

- Iris, le 14.
- Chloé, le 27.

Le jeu consiste à compter à l'envers :

- de 14 en 14 à partir de 521 pour Iris.
- de 27 en 27 à partir de 436 pour Chloé.

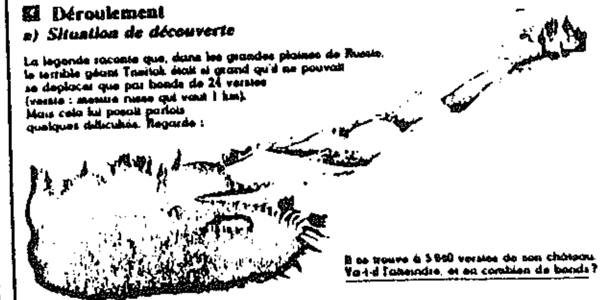
Aura gagné celle qui approchera le plus près de 0. Es

Mode de travail : G.

Matériel
Document de recherche affiché au tableau ou LE p. 98.

Déroulement
a) Situation de découverte

La legende raconte que, dans les grandes plaines de Russie, le terrible géant Tneïtok était si grand qu'il ne pouvait se déplacer que par bonds de 24 verstes (verste : mesure russe qui vaut 1 km).
Mais cela lui posait parfois quelques difficultés. Regarde :



Il se trouve à 5 960 verstes de son château.
Va-t-il l'atteindre, et en combien de bonds?

Consigne 1
Lisez l'énoncé du problème et cherchez à l'aide des renseignements qui vous sont donnés si Tneïtok va pouvoir arriver juste à la porte de son château.

La maîtresse propose la situation suivante aux élèves :

Un éditeur doit expédier 8 295 livres
Comment va-t-il s'y prendre?

5 Complète les divisions suivantes :

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
.....	66	56	36
8 513	.....	202	29
12 625	75	.....	.....
8 732	125	.....	.....

5 Le bureau de poste reçoit, pour les distribuer, des catalogues de vente par correspondance. L'étiquette, sur le carton, indique 22 kg 575 g. Un catalogue pèse 645 g.
Quel est le nombre de catalogues contenus dans le carton?

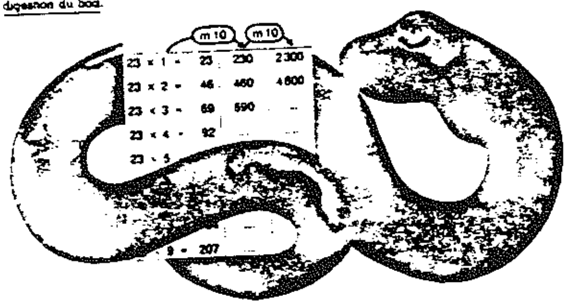
■ **Mode de travail :** [G].

■ **Matériel**
Pour [G] : une reproduction de la situation de découverte par groupe, ou [LE] p. 104.

■ **Déroulement**
a) Situation de découverte
La synthèse de l'activité 5 a montré que si on sait trouver le nombre de chiffres du quotient, il serait utile de connaitre tout de suite le nombre de centaines, de dizaines, d'unités.

Le boa avale des proies énormes et les digère lentement. Pendant sa digestion, tu vas effectuer les divisions qu'il a avalées

Utilise ce répertoire pour être le plus rapide possible et terminer les divisions avant la fin de la digestion du boa.



La course à 20 : jeu à 2 joueurs. il s'agit pour chacun des joueurs de réussir à dire "20" en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par le joueur précédant. le 1er joueur, au départ, doit dire 1 ou 2.

Dans 1000 jours quel jour de la semaine serons-nous ? Dans 1000 heures, dormirez-vous ?

Un rallye automobile est long de 1819 km, chaque automobiliste doit pointer tous les 54 km. Combien y-a-t-il de relais ? (avec ou sans la contrainte : il n'y a pas de relai après la ligne d'arrivée.).

Le jeu des pièges : matériel : une piste numérotée de 0 à 40, un pion que l'on déplace par sauts réguliers de p cases, à partir d'une case de départ $d<5$ $2<p<7$
Règle du jeu : ce jeu se joue à deux joueurs, le joueur A déplace le pion, le joueur B place des pièges sur certaines cases comprises entre 20 et 40. B marque un point à chaque fois que A tombe dans un piège.

Les problèmes proposés ont été les suivants :

Problème 1a :
Avec ses bottes de sept lieues, le petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 km.
Il part de Grenoble pour aller à Nice : Grenoble-Nice 224 km. Combien de pas va-t-il faire ?

Problème 1b :
Il part ensuite de Grenoble pour aller à Marseille (ou autres variantes au CM2) Grenoble-Marseille : 277 km.

Problème 2 :
On distribue aux enfants une pochette contenant un certain nombre d'allumettes : entre 200 et 300 (ce nombre étant inscrit sur un papier à l'intérieur de la pochette). On demande aux enfants de partager ces allumettes entre 7 personnes de façon que chacune d'elles en ait autant.

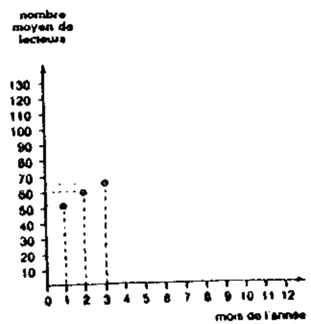
Problème 3 :
On range 273 œufs dans des boites de 12. Combien de boites peut-on remplir ?

Problème 4 :
On partage équitablement 273 billes entre 14 enfants. Combien de billes donnera-t-on à chaque enfant ?

Problème 5 :
On achète 13 albums de Lucky Luke. On paye 273 F. Combien coûte un album ?

8 Voici des informations relevées dans une bibliothèque. Complète le tableau et complète la représentation graphique de la variation de la moyenne des lecteurs suivant les différents mois de l'année.

mois	nombre de jours d'ouverture	nombre de lecteurs	nombre moyen de lecteurs par jour
janvier (1)	6	308	51
février (2)	20	1 200	60
mars (3)	21	1 352	.....
avril (4)	22	.....	75
mai (5)	18	1 811	100
juin (6)	22	1 717	.....
juillet (7)	.....	1 140	57
août (8)	21	973	.....
septembre (9)	22	.....	70
octobre (10)	21	2 123	.....
novembre (11)	.....	2 240	112
décembre (12)	20	2 100	.....



8 Les 108 enfants du centre de loisirs, accompagnés de 20 moniteurs, se rendent au cinéma. Dans la salle, chaque rangée comporte 13 fauteuils.
Combien de rangées le centre occupera-t-il ?

9 La bibliothèque municipale a prêté, au cours de l'année passée, 54 000 ouvrages. Il y a 4 500 abonnés.
Quel est, en moyenne, le nombre d'ouvrages lus par chaque abonné ?

10 Le fleuriste a acheté pour 360 F de géraniums.
Combien cela fait-il de pots ?

5 Monsieur Blanc fait un emprunt pour payer sa voiture neuve. Il doit rembourser 24 624 F en 18 mois.
Quel est le montant d'une mensualité ?

4 Pour la projection de ce soir, Claire range les 250 diapositives de la classe de neige dans des paniers qui contiennent chacun 36 diapositives.
Combien lui faudra-t-il de paniers ?

5 Le confiseur prépare des cornets de dragées pour un baptême. Il y a 23 dragées dans 100 g.
Combien fera-t-il de cornets avec 3 kg de dragées s'il en met 25 dans chacun d'eux ?

6 Le moto-cross de Vélizy a lieu sur une distance de 29 340 m. Chaque tour de circuit mesure 815 m.
Combien de tours les coureurs doivent-ils effectuer ?

7 Combien faut-il de paquets de 25 cahiers pour que les 114 élèves de l'école en ait chacun 3 ?

problèmes ....
(travail sur énoncés)

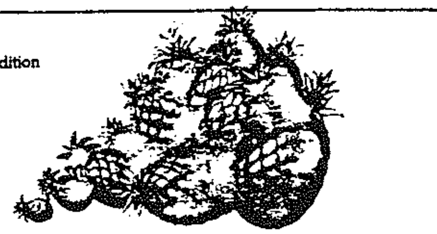
Dans cet énoncé de problème, certains mots sont absents. Retrouve-les :
Sébastien se .... à l'école à bicyclette. Il a constaté qu'il .... 5 mètres à chaque tour de ...., et il a .... qu'il fallait 1 200 tours de pédalier pour .... le trajet .... et retour de .... à la maison.

Trouve :
- La .... parcourue par .... pour aller chaque jour en classe, si à .... il déjeune à la cantine.
- La .... qu'il a .... le mois dernier.

Pour tirer au sort l'un -25- de leurs camarades les enfants utilisent souvent une comptine. Par exemple am stram gram pic et pic et colégram, bour et bour et ratatam, am stram gram. Que pensez-vous de cette façon de procéder ?

Monsieur Mathieu est responsable de l'emballage et de l'expédition des ananas cueillis à la plantation « La Belle Iloise ».
Ces ananas sont regroupés par 12 dans chaque carton.
Voici le bordereau d'envoi, rempli par monsieur Mathieu dans la semaine du 16 au 20 avril :

jours	nombre d'ananas reçus	nombre de cartons expédiés
lundi	2 984	...
mardi	1 648	...
mercredi	1 139	...
jeudi	2 728	...
vendredi	936	...



Monsieur Mathieu n'a pas eu le temps de compléter la dernière colonne.

Sachant que le 13-X-75 fut un lundi, par quel jour de la semaine a commencé l'année 1975 ?
Quel jour de la semaine fut prise la Bastille ?

Sans refaire les divisions, trouve si elles sont justes ou non :

6 325 : 45 → quotient : 242, reste : 25.
8 034 : 148 → quotient : 148, reste : 42.
403 : 21 → quotient : 19, reste : 4.
7 248 : 58 → quotient : 134, reste : 65.
6 143 : 120 → quotient : 50, reste : 143.

Reproduis et complète le tableau :

dividende	428	...	1 020	1 713
diviseur	36	42	...	9
quotient	...	38	29	...
reste	...	0	5	...

Voici des divisions. Pour chacune d'elles, on te propose 3 quotients. Trouve le bon sans poser l'opération :

436 : 25 → 17 ; 10 ; 27
6 000 : 45 → 133 ; 233 ; 33
738 : 95 → 10 ; 7 ; 5
8 732 : 112 → 77 ; 177 ; 47
840 : 22 → 68 ; 108 ; 38
3 150 : 35 → 9 ; 90 ; 900

4 Voici des égalités incomplètes. Trouve un énoncé de problème correspondant à chacune d'entre elles.

EXEMPLE : ... = (9 × 6) + 2. La fermière a rangé ses œufs dans 9 boites de 6 œufs chacune. Il lui reste 2 œufs. Combien avait-elle d'œufs pour aller au marché ?

a/ ... = (10 × 5) + 7 b/ 49 = (8 × 6) + ... c/ 25 = (7 × ...) + 4

7 Complète les divisions suivantes :

```
  2.2..  | 45           6144  | ..
- 22500  |----        - ..00  |----
   0725  | ...          134.  | 256
-   ...                - ...0
    275                  144
-   270                -  ...
                           00

  8.8.   | 74          ....  | 32
- ..00   |----               |----
  118.   | 1.6               | 128
-  ..0
   .44
-  ..4
   000
```

5 Effectue les divisions suivantes. Commence par l'encadrement. À chaque étape, écris des égalités intermédiaires, puis écris l'égalité finale :

7 238 : 42
90 690 : 436
6 000 : 73
4 832 : 125

Complète le tableau suivant :

dividende	diviseur	quotient	reste
72 608	435	...	...
2 743	85	...	...
18 714	56	...	...
13 018	120	...	...
627	42	...	...

6 Effectue les divisions suivantes (n'oublie pas de commencer par l'encadrement et de terminer en écrivant l'égalité) :

```
6 483 | 27      2 630 | 48      3 728 | 612
      |----           |----          |----
      | ...           | ...          | ...

  752 | 26      8 034 | 53     12 024 | 128
      |----           |----          |----
      | ...           |              | ...
```

B) AUTOUR DE LA MULTIPLICATION - JEUX DE CADRES - VARIABLES DIDACTIQUES - APPRENTISSAGE PAR "DESEQUILIBRE / REEQUILIBRE" - SITUATION DE COMMUNICATION

B-1) Analyse d'extraits d'une préparation de séquence introduisant les écritures multiplicatives au cours élémentaire

Il s'agit d'analyser des extraits d'une préparation d'une séquence d'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaire première année.
Une série de 7 questions permet de conduire cette analyse (voir document n°6, pages 27 à 30).
Voici le déroulement de l'analyse.

a) Recherche, par groupe de trois, des réponses aux questions 1-2 et 3

Il s'agit de la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative, la forme adoptée est une situation de communication par groupe, cette forme est justifiée par le fait que l'objectif est la production d'une écriture, d'un langage.
Les choix didactiques et les objectifs sont exposés dans le texte complet de la préparation, nous invitons le lecteur à s'y reporter.
A propos de la question 3, nous avons été amené à préciser la notion de cadre et replacer cette notion dans le cadre de la théorie d'apprentissage de Régine Douady.

Quels sont les cadres qui interviennent ?

On fait ici référence à la théorie des jeux de cadres de R. Douady.

Idée centrale : les connaissances ayant trait au concept à acquérir ne sont pas maîtrisées de la même manière dans chacun des cadres. Les connaissances les plus grandes dans un des cadres devraient amener les élèves à faire des conjectures dans les autres cadres et à leur donner des idées de procédures à tester.

Exemples de cadres :
- Réel physique
- Graphique
- Numérique
- Géométrique, informatique ...

Une situation d'apprentissage doit faire intervenir la notion dans des cadres différents. Ici on s'appuie sur 2 cadres : cadre numérique et cadre géométrique.

Remarques :

1. Un aller-retour entre ces 2 cadres sera utilisé tout au long de la construction de la technique opératoire.

2. Autres exemples d'interventions de jeux de cadres : Réel-physique / numérique : manipulations de collections pour obtenir différentes décompositions additives d'un nombre (écritures additives).

3. Découpages de rectangles, de grilles rectangulaires lors de la construction de la technique opératoire (liaison cadres physique / géométrique / numérique)...

b) la réponse aux questions 4 et 5 permet de revenir sur la notion de variable didactique et sur l'analyse de la tâche de l'élève :

"une variable didactique est une variable sur laquelle l'enseignant peut agir et dont un changement de valeur peut entraîner un changement de procédures".

Autrement dit :

> " *c'est un élément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu dans la situation*".

Les exemples sont divers :

- le matériel utilisé (ex : papier quadrillé, papier blanc en géométrie)
- le type de tâche (ex : tâche de constat ou de fabrication dans la comparaison au C.P.)
- la répartition des tâches :
  * entre enfants
  * dans le temps
- les contraintes de la tâche (ce qui est autorisé...)
- la forme du travail (individuel, par groupes...)
- la gestion du temps (le temps laissé aux élèves pour résoudre un problème permet d'éliminer des procédures trop coûteuses en temps)
- la taille des nombres

Mais : l'origine socio-professionnelle ou le sexe des élèves ne sont pas des variables didactiques.

Dans le cas de cette séquence on peut jouer sur plusieurs variables :

- les variables numériques :

Il faut prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands ($a>6$ et $b>11$) afin de placer les élèves dans une situation :

- où les techniques primitives de dénombrement ("un à un" ou paquets par paquets) sont plus laborieuses
- où la perception globale, de visu de ce nombre devient très difficile
- où l'écriture a x b devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire spatialement le nombre d'éléments de la collection.

- le choix des grilles du groupe récepteur :

Doivent être présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe émetteur mais dont les dimensions restent assez proches

  ex : pour une grille 7 x 12
  il faut prendre : 8 x 12 ; 6 x 10 ; 11 x 9 ; 7 x 11 ; 6 x 12 les deux dernières dimensions servant à signaler l'erreur classique : "oubli du carré du coin"
- des grilles ayant même nombre d'éléments que la grille de l'émetteur mais de dimensions différentes

  ex : pour 7 x 12
  prévoir des grilles : 2 x 42 ; 1 x 8
  14 x 6 ; 28 x 3 ; 42 x 2 ...
  pour 9 x 14 : 18 x 7 ; 3 x 42 ; 1 x 84 ...
  (ceci pour éliminer les messages de type "84" pour 7 x 12 ou des messages additifs)

- les contraintes de la situation (message)

le message doit :

- être court et essentiellement numérique afin d'éliminer les messages écrits en français, trop longs et souvent incompréhensibles et d'élaborer une nouvelle écriture du type a x b,
- permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille.

- les formes de travail : le travail par groupes est ici justifié par la volonté d'obtenir des productions plus riches et d'éliminer certaines erreurs par un premier filtre (effectué par les élèves du groupe).

Nous renvoyons le lecteur à la lecture du texte (en italique) de la préparation pour l'analyse de la tâche de l'élève. Notons que cette partie de l'activité peut être l'occasion de parler de l'analyse a priori et de situer celle-ci par rapport au contrat didactique.
Ainsi l'analyse a priori permet à l'enseignant d'accroître ses marges de manoeuvres et de prendre conscience de ses prises de décision lors du déroulement de la séquence (interventions de l'enseignement face à un déroulement prévu ou non) et du décalage entre prévisions et réalisations effectives.
Nous renvoyons le lecteur, sur ce point, à l'article de A. Mercier et M.H. Salin dans (4) intitulé "L'analyse a priori, outil pour l'observation".
Notons que cette analyse de la tâche de l'élève nous a semblé très difficile à obtenir de la part des instituteurs (tant confirmés que débutants), cela s'explique sans doute par un manque d'habitude de cette "tâche" et par le fait que cette activité porte justement sur le contrat didactique.
Nous renvoyons le lecteur au texte complet de la préparation pour répondre aux questions suivantes. Un accent particulier a été mis sur la nécessité de jouer sur une double définition des écritures multiplicatives. (voir (10)).

DOCUMENT N°6 *(distribué aux stagiaires)* **: extraits d'une préparation de la première séquence introduisant la notion d'écriture multiplicative au CE1** *(les phrases imprimées en italique ne font pas partie du texte distribué).*

Cette séquence s'inspire d'une situation élaborée par l'IREM de bordeaux. Elle constitue la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative.

Objectifs de la séquence :

- *introduire la notion d'écriture multiplicative d'un nombre entier natuel,*
- *donner un sens à cette écriture,*
- *renforcer la notion de nombre naturel.*

Notre choix :

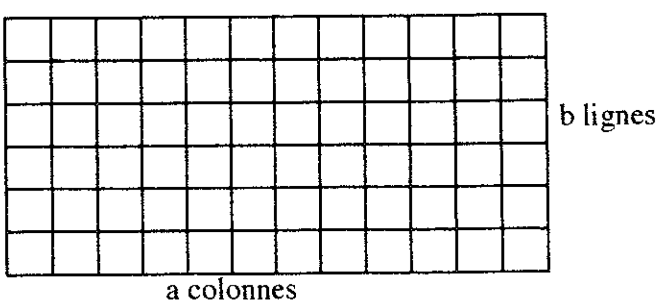
L'analyse mathématique de la notion , l'analyse des pratiques enseignantes et des manuels scolaires montrent qu'il y a deux grandes manières d'introduire cette notion :

- on peut introduire cette écriture à partir de l'addition réitérée :

$$7 \times 12 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$
$$12 \times 7 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$$

Cette méthode si elle présente l'avantage de s'appuyer sur des connaissnces acquises par les élèves sur l'addition présente par ailleurs beaucoup d'inconvénients : les facteurs a et b ne jouent pas les mêmes rôles (12 paquets de sept éléments, ce n'est pas la même chose que sept paquets de 12 éléments) ; cela peut amener certains maîtres à introduire dans un premier temps une multiplication non commutative ! Elle oblige d'autre part à introduire un vocabulaire et des notations peu commodes.

- On peut présenter l'écriture a x b comme une désignation du nombre d'éléments d'une collection organisée sous forme de grilles rectangulaire comportant a lignes et b colonnes ou bien b lignes et a colonnes.



Cette présentation si elle élimine les défauts de la première, a l'inconvénient d'être très liée à la disposition spatiale de la collection à décrire.

Nous avons adopté le principe d'une présentation dialectique de l'écriture multiplicative a x b s'appuyant sur deux cadres :
- un cadre géométrique : a x b désignera le nombre d'objet d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grilles rectangulaires,
- un cadre numérique : a x b sera une écriture plus courte de l'une des deux écritures additives réitérées ci-dessus.

Cette séquence a pour but de présenter aux élèves une situation évolutive permettant de faire le lien entre ces deux cadres et ses deux conceptions.

Présentation de la situation

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.
La classe est divisée en groupes (3 à 4 élèves) de deux types : émetteur et recepteur.
Chaque groupe jouent à la fois le rôle de récepteur et d'émetteur.
Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (déssinée sur une feuille polycopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.
Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante :
"le groupe émetteur doit envoyer un message au groupe recepteur lui permettant de retrouver le plus rapidement possible et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible et doit désigner le nombre de carreaux de la grille."

Les variables de la situation :

Les variables numériques : il est nécessaire de prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands, par exemple $a > 6$ et $b \geq 11$ afin de placer les élèves dans une situation :
- où les "techniques primitives de dénombrements" (un à un ou paquets à paquets) sont plus laborieuses,
- où l'écriture a x b devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire (spatialement) le nombre d'éléments de la collection,
- où la perception globale, de visu de ce nombre devient très difficile.

Le choix des grilles du groupe recepteur : il faut que soient présentes :
- des grilles différentes de celles du groupe récepteur, mais dont les dimensions sont assez proches de celle-ci, par exemple :
- dans le cas de la grille 7 x 12, on peut choisir des grilles de dimensions : 8 x 12 ou 6 x 10 ou 11 x 18, en particulier pour invalider les messages des élèves "ne comptant qu'une seule fois le carré du coin",
- des grilles ayant le même nombre d'éléments que la grille du groupe émetteur mais dont les dimensions sont différentes, ainsi :
- dans le cas cas d'une grille 7 x 12, il faut prévoir des grilles 42 x 2, 14 x 6, 3 x 28,
- dans le cas 9 x 14, des grilles de dimensions 18 x 7, 3 x 42...
Ceci afin d'éliminer certains messages (84 par exemple) qui ne permettent pas de trouver rapidement et surement la bonne grille.

Les contraintes de la situation : la consigne comprend certaines contraintes, indispensable au bon déroulement de la séquence, ainsi le groupe émetteur doit envoyer un message :
- court et essentiellement numérique, afin de'éliminer des messages écrits "en français, avec des phrases", trop longs et souvent incompréhensibles. Cela permettra également l'élaboration éventuelle d'une écriture permettant de désigner le cardinal de la collection,

- qui doit permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille en question,
- le message doit de plus, désigner le nombre de carreaux.

Analyse de la tâche de l'élève

Pour élaborer son message, l'émetteur doit :
- soit dénombrer un à un le nombre d'éléments de la grille et en donner une écriture "canonique",
- soit dénombrer "paquets à paquets" ce nombre et traduire cette activité par une écriture additive ou canonique. Le dénombrement peut alors prendre en compte ou non, la disposition spatiale de la collection (nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne, nombre de lignes ou de colonnes),
- soit de dénombrer le nombre d'éléments d'une ligne et d'une colonne et traduire cette activité par une écriture multiplicative ou proche de cette forme.

Analyse des messages des élèves

Nous avons constaté une grande diversité des messages produits par les élèves. Nous pouvons les classer ainsi :
- des écritures canoniques : 84 pour la grille 7-12, par exemple,
- des écritures additives :
- faisant intervenir la symétrie de la figure ou le partage en deux de celle-ci : 42 + 42,
- des écritures additives réïtérées basées :
- soit sur le nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne :
12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 ou
7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7
- soit sur une technique de dénombrement paquets à paquets :
10 + 10 + 10 +10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4 etc ...
- des écritures rendant compte de la disposition spatiale de la collection 12C 7L ou 12,7
- on peut voir apparaître des messages montrant que l'élève a déjà rencontré cette notion, par exemple : 12 fois 7 ou bien 7 fois 12 ou 12 x 7 ou encore 12 x 7 = 84.

Validation de l'activité

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.
Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison dse messages, sur le respect des contraintes de la consigne : longueur du message, caractère numérique, rapidité et facilité du décodage... Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter ces contraintes.

Déroulement de l'activité

1) Enoncé de la consigne

2) Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.

3) Phase de recherche de la part du groupe récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires au groupe émetteur s'il ne peut remplir sa tâche. L'émetteur devra alors lui renvoyer un autre message.

4) Phase de comparaison des productions : celle-ci a pour but, à partir de comparaison des messages et des difficultés rencontrées par les décodeurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type apparait) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.

- Les écritures canoniques ne seront pas retenus comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître de façon certaine la grille.
- Les écritures traduisant un comptage paquets par paquets (autres que celles s'appuyant sur le cardinal d'une ligne ou d'une colonne) également car elles imposent un travail important et peu sûr pour le groupe récepteur.
- Les écritures additives réïtéres ne satisfont pas à la contrainte de la consigne : message trop long, demandant un temps de recherche trop important pour le décodeur.

Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages prenant en compte la disposition spatiale de la collection. S'il existe des message du type 12C, 7L, il devra alors souligner que ces messages ne satisfont qu'une partie de la consigne et en particulier, ne codent pas le nombre de carreaux de la grille.Il introduira alors l'écriture 12 x 7 ou 7 x 12 comme satisfaisant à cela.
Il fera de même pour les message du type 12 fois 7 ou 7 fois 12.
S'il apparaît des messages sous forme multiplicative, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture.
Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est la plus adéquate pour répondre au problème posé.

5) Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente à partir des contraintes de la situation ne permet que de souligner un seul sens, celui s'appuyant sur la configuration de la collection.
Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et pour cela de prouver que cette écriture désigne bien un entier naturel.
Quand on pose la question aux élèves : "cette écriture désigne-t-elle un nombre ? "Il repondent souvent : "non, car on ne sait pas combien il y en a ? il faut compter ou calculer !"
Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mis en oeuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à la dispositon spatiale de la collection et à des additions réïtérées.
Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

Prolongements

1) Travail individuel rapide à partir d'une grille representée sur une feuille polycopiée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 X 21 par exemple.

2) Construction d'une grille correspondant à une écriture multiplicative donnée (sur papier quadrillé).

Il s'agit de la 1ère leçon sur la notion d'écriture multiplicative. Répondre aux questions suivantes :

1°) Déterminer les objectifs.
2°) Expliciter le choix didactique justifiant la présentation de la notion.
3°) Y-a-t-il plusieurs cadres ? Si oui, lesquels ?
4°) Déterminer les variables de la situation.
5°) Faire une analyse de la tâche de l'élève.
6°) Commenter les différentes phases du déroulement.
7°) Prolongement : quels exercices de renforcement ?

B-2) Analyse d'extraits d'une fiche de préparation (publiée dans le Journal Des Instituteurs (J.D.I) éditions Nathan) sur un problème multiplicatif : le championnat de football (niveau CM2) (voir pages 32 et 33 le document n° 7)

Le principe est le même que précédemment : il s'agit, à partir d'une fiche de préparation (le championnat de football), de répondre à certaines questions. Le but visé ici est d'analyser, dans le cadre d'une perspective constructiviste, un déroulement particulier mis au point par les auteurs pour résoudre un problème complexe multiplicatif, à savoir : "résolution d'un problème complexe, en cas d'échec, simplifications du problème, retour au problème initial".

Ce type de sujet permet d'initialiser un exposé futur sur les théories de l'apprentissage et en particulier sur le constructivisme. Il permet d'amorcer un débat sur les progressions basées sur la démarche "du simple au compliqué", et de poser le problème du "saut informationnel".
Les interventions des P.E.N s'inspirent de la brochure n°78 de l'IREM de Paris VII (voir (11)).

Après cet échange de points de vue, les P.E.N commentent une autre expérience de résolution de problème basé sur le même principe, à savoir : "résolution de problème au CM - un exemple sur le produit cartésien". (voir page 34 à 38 le document n°8 et (11)).

DOCUMENT N°7 *(distribué aux stagiaires)* **: extraits d'une fiche de préparation (publiée dans le Journal Des Instituteurs (J.D.I) du 7 mars 1988, éditions Nathan) sur un problème multiplicatif : "le championnat de football", niveau CM2.**

Objectifs
- Apprendre à résoudre un problème de combinatoire.
- Renforcer le sens de la multiplication, à partir de la résolution d'un problème multiplicatif.
- Créer, renforcer les représentations de la notion de produit.
- Enrichir la notion de nombre entier.

Présentation de la situation

Matériel

Le maître devra prévoir de distribuer aux élèves :
– une feuille polycopiée sur laquelle sera écrite la liste des équipes de 1re division du cha pionnat de football,
– une grande feuille de papier sur laquelle chaque groupe d'élèves écrira sa solution (et qui sera affichée au tableau).
Les élèves disposent de leur cahier de brouillon.

Démarche

L'activité peut être individuelle, il nous semble préférable de la traiter en groupe de 3, 4 élèves, afin de faciliter la communication entre élèves et d'obtenir des productions plus riches.

Consigne

En première division il y a 20 équipes de football, chaque équipe rencontre les autres deux fois (match aller, match retour). Combien y a-t-il de matchs disputés lors du championnat ?

Déroulement de l'activité

1re période

phase n° 1 : distribution du matériel énoncé de la consigne : le maître s'assurera que cette dernière est bien comprise (notamment le fait que les équipes se rencontrent deux fois) en suscitant des exemples (sans pour cela donner des éléments de résolution). Les élèves entament leur recherche.
Si des élèves ne produisent rien ou se lancent dans des calculs farfelus, le maître proposera de faire « un dessin », un schéma permettant d'illustrer la situation.

phase n° 2 : première mise en commun des productions

Le temps peut permettre à certains élèves ne produisant rien ou s'étant engagé dans des impasses de bénéficier de l'apport des autres groupes.

Le maître ne doit pas à ce stade privilégier une représentation ou une procédure mais au contraire dégager des pistes de recherche, conduire les élèves à clarifier (pour leurs pairs) leur démarche. A ce stade on verra sans doute apparaître les représentations et procédures explicitées ci-dessus.

Le moment permettra également d'éliminer des représentations inadéquates (par exemple des dessins figuratifs) ou des calculs faisant intervenir, au hasard, certaines données du problème (20×2 par exemple). Le rejet devra être justifié par les élèves et non imposé par le maître.

phase n° 3 : retour au travail par groupe. Les élèves devront pendant cette phase conduire à terme une méthode de résolution, transcrire celle-ci sur la grande feuille collective afin de pouvoir l'expliquer à ses camarades.

phase n° 4 : les élèves viennent exposer leur solution au tableau.
Le maître organisera cette mise en commun avec le souci.

• d'exposer les différentes méthodes de résolution ;

• de dégager les différentes représentations et de comparer leurs qualités, de montrer le lien entre représentations et procédures de résolution ;

• d'analyser les différentes erreurs (20×20, 20×2, calculs hasardeux faisant intervenir certaines données du problème...) ;

• de dégager la structure multiplicative du problème car celle-ci facilite les calculs, il montrera :

– dans le cas d'une procédure de type 1 bis (recherche exhaustive) comment on peut optimiser celle-ci pour aboutir à la procédure 1 ;

– dans le cas d'une procédure de type 2, comment on peut organiser les calculs de la somme (arbre de calcul) ;

– comment on peut calculer cette somme à l'aide d'une multiplication (voir § II).

2e période

Nous nous sommes aperçus, lorque nous avons testé ce type de situation dans des classes de CM, que certains élèves, même après la mise en commun, ne savent pas encore aborder ce type de problème. Si le cas se présente, le maître pourra, afin de familiariser ses élèves, proposer un énoncé du même type mais faisant intervenir un nombre d'équipes compris entre 5 et 10. Les élèves en « grosse difficulté » pourront alors dresser la liste de toutes les rencontres et mieux comprendre le problème.

Toutefois là encore il faudra dégager la structure multiplicative et ne pas se contenter d'une procédure de recherche exhaustive. Il nous semble préférable de commencer par un nombre important car cette variable justifiera l'optimisation des procédures et ceci même lors de la 2e période (compte tenu de l'expérience acquise précédemment).

Répondre aux questions suivantes :

1) Faire l'analyse a priori de la situation proposée. On déterminera en particulier :

a) les variables de la situation,

b) les différentes procédures de résolution, parmi celles-ci, on explicetera celles succeptibles d'être mises en oeuvre par des élèves de CM2,

c) les différentes représentations du problème,

e) les différentes erreurs possibles,

2) Que penser du découpage proposé par les auteurs ? Pour chaque phase, on analysera la stratégie du maître, en particulier à partir des consignes et des prises de décisions de l'enseignant.

3) Comment justifier ce choix ?

4) Peut-on faire un autre choix ?

RESOLUTION DE PROBLEMESAU CM :
UN EXEMPLE SURLE PRODUIT CARTESIEN

1 - OBJECTIFS

- Apprendre à résoudre un problème multiplicatif, en particulier déterminer le cardinal du produit cartésien de 3 ensembles finis A, B, C.
- Renforcer le sens de la multiplication
- Créer, renforcer, enrichir les conceptions des élèves sur la notion de produit
- Créer, enrichir les représentations et les procédures des élèves.

2 - QUELQUES REMARQUES PRELIMINAIRES

Cette fiche s'appuie sur une expérience menée à l'IREM de Paris VII sur la résolution de problèmes multiplicatifs et additifs (*), en liaison avec des activités de calcul mental.
Cette expérience a montré que :
- la prise de distance par rapport à l'algorithme écrit favorise l'émergence de nouvelles procédures de résolution et un affinement des stratégies mises en oeuvre par les élèves,
- le calcul mental est un espace de travail motivant, intensif tant au niveau individuel que collectif,
- l'approche par le biais du calcul mental, de certains problèmes (faisant intervenir des données numériques plus ou moins grandes) permet, dans certains cas, de donner du sens aux problème, aux opérations.

3 - PRESENTATION DE LA SITUATION

Nous vous proposons de faire calculer aux élèves le cardinal du produit cartésien de 3 ensembles A, B, C.

MENU

Une entrée au choix

- Carotte à l'orange
- Sardine
- Pizza
- Pamplemousse
- Friand au fromage
- Potage
- Céleri rémoulade
- Salade composée
- Oeufs durs, mayonnaise
- Betteraves et maïs
- Endives en salade
- Quiche

Un plat au choix

- Ravioli gratinés
- Poulet rôti, haricots beurre
- Steak haché, coquillettes
- Grillade de porc haricots bretons
- Hachis parmentier
- Blanquette de veau riz créole

Un dessert au choix

- Mousse au chocolat
- Pommes au four
- Compote
- Pêches au sirop
- Lait gélifié
- Flandise
- Ananas

Combien de menus différents peut-on composer, comprenant une entrée, un plat et un dessert ?

Les variables de la situation

1°) Les variables numériques

a) Le maître peut fixer le nombre d'ensembles intervenant dans le produit cartésien (ici nous proposons 3 ensembles : les entrées, les plats et les desserts). Ce nombre favorise l'émergence de telle ou telle représentation, de telle ou telle procédure de résolution. Quand il est égal à 2, ce nombre induit fortement des procédures de recherche exhaustive masquant la structure multiplicative du problème.

b) De même, le nombre d'éléments de chaque ensemble a une influence sur les procédures des élèves, nous avons défini deux domaines numériques significatifs :
- le domaine D1 : les cardinaux finis des ensembles A, B et C sont tous choisis entre 0 et 5
- le domaine D2 : les cardinaux sont compris entre 6 et 30

2°) Les variables liées au contexte

Afin de diversifier les énoncés et de ne pas lasser les élèves, le maître peut proposer différents énoncés du même problème, en voici quelques-uns :

Un marchand vend plusieurs types de jouets, ce sont :
- soit des avions, soit des bateaux, soit des autos, soit des camions,
- leur couleur peut être bleue, rouge ou blanche,
- ce sont des jouets soit à friction, soit à clés.

Combien y-a-t-il de types différents de jouets ?

Un marchand de jouets veut fabriquer des quilles :
- la tête peut être ronde ou carrée,
- elles peuvent être rouges, bleues, jaunes ouvertes,
- elles peuvent être en plastique, en bois ou en terre cuite.

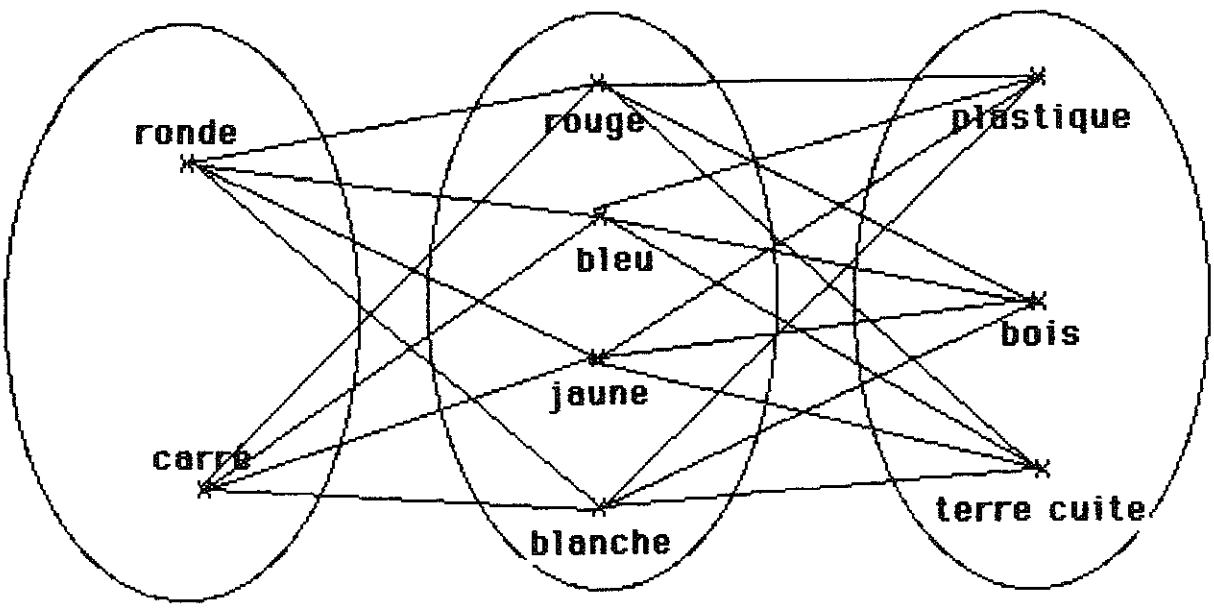
Les élèves de l'école se déguisent pour le carnaval. Ils ont le choix entre 23 chapeaux, 14 pantalons et 25 vestes différents. Combien de déguisements différents peuvent-ils composer ?

Les problèmes des jouets et des quilles font intervenir des données numériques appartenant au domaine D1, les problèmes des menus et des déguisements s'appuient sur le domaine D2.

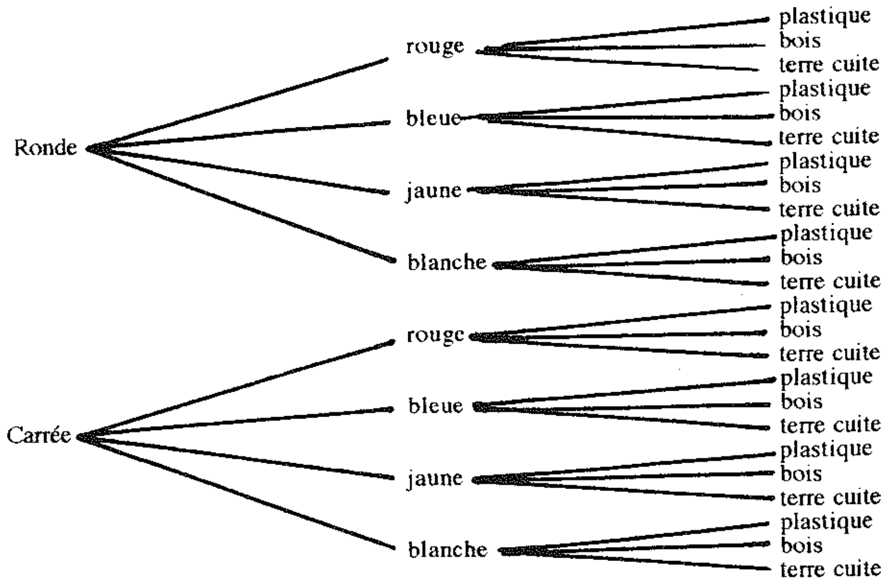
Analyse de la tâche de l'élève

Quelque soit l'énoncé proposé, l'élève est confronté à une structure multiplicative.
Il peut se donner ou élaborer une représentation adéquate de la situation, représentation pouvant dépendre du "passé scolaire" de l'enfant. On peut voir apparaître :

- des diagrammes saggitaux



- des représentations en arbre : (exemple donné pour les quilles)



- un (ou plusieurs) tableau(x) cartésien(s)

	rouge	bleue	jaune	blanche
ronde	RR	RBe	RJ	RBa
carrée	CR	CBe	CJ	CBa

	RR	RBe	RJ	RBa	CR	CBe	CJ	CBa
Plastique	RRP	RBeP	RJP	RBaP	CRP	CBeP	CJP	CBaP
bois	RRB	RBeB	RJB	RBaB	CRB	CBeB	CJB	CBaB
terre cuite	RRT	RBeT	RJT	RBaT	CRT	CBeT	CJT	CBaT

Nous voyons ici que ces représentations sont coûteuses dès que le nombre d'objets d'un ensemble devient important. De plus les représentations 2 et 3 sont difficiles à coder et à décoder. Signalons que ces codages peuvent être différents selon les élèves. Rappelons également que le but de l'activité est de dénombrer le cardinal de A x B x C, la notion de couple ou de triplet (avec ses codages) n'est en aucun cas ici un objectif d'apprentissage.

- enfin, les élèves peuvent dresser des listes exhaustives (plus ou moins bien organisées), utilisant un codage chiffré ou littéral de toutes les solutions possibles.

En voici deux exemples :

codage chiffré

ronde --> 1	rouge --> 3	plastique --> 7
carrée--> 2	bleue --> 4	bois --> 8
	jaune --> 5	terre cuite--> 9
	blanche--> 6	

la liste peut alors se traduire par :

1 3 7	1 4 7	1 5 7	1 6 7
1 3 8	1 4 8	1 5 8	1 6 8
1 3 9	1 4 9	1 5 9	1 6 9
2 3 7	2 4 7	2 5 7	2 6 7
2 3 8	2 4 8	2 5 8	2 6 8
2 3 9	2 4 9	2 5 9	2 6 9

codage littéral (reprenant le codage du tableau cartésien)

RRP RBeP RJP RBaP CRP CBeP CJP CBaP
RRB etc...

Suivant la représentation adoptée et l'état d'élaboration de cette représentation, les élèves peuvent :

- si la représentation est achevée, dénombrer, sans passer par une multiplication, le nombre de cas possibles. Il peut les dénombrer un à un ou "paquets par paquets" (cela peut alors se traduire par une addition réitérée)
- ou bien, traduire en terme de procuits (représentation achevée ou non) cette représentation. On peut alors distinguer deux types de procédures :

. une procédure ne privilégiant aucun des facteurs particuliers et se traduisant par une écriture multiplicative représentant un double produit (ici 2 x 4 x 3)

. une procédure se traduisant par deux produits effectués l'un après l'autre ici 2 x 4 = 8 et 8 x 3 = 24

4 x 3 = 12 et 2 x 12 = 24 par exemple

4 - LES OBSERVATIONS FAITES EN CM2

1°) Quand nous avons proposé à une classe de CM2 le problème des menus, nous avons constaté que les élèves se trouvaient dans un premier temps en échec. Aucun résultat correct n'a été proposé et , dans bien des cas, aucune représentation adéquate de la situation n'a été produite (et cela malgré le fait que la maîtresse ait demandé de faire un dessin).
Les élèves ne reconnaissent pas un problème multiplicatif. Dans le meilleur des cas, ils effectuent une multiplication et une addition.

Ainsi Cécile propose 13 x 12 car il y a 6 plats et 7 desserts , 12 entrées.
David propose 12 x 3 + 6 x 3 + 7 x 3 car il y a 3 types de plats (entrée, plat, dessert).
Certains élèves multiplient au hasard les données.
Les représentations elles aussi sont pauvres et peu nombreuses :

- quelques tentatives pour dresser des listes exhaustives plus ou moins bien organisées
- quelques tentatives d'arbre
- quelques dessins figuratifs.

Devant ces productions, la maîtresse a du, dans un premier temps, restreindre le problème ; la consigne est devenue :
"Combien de menus différents peut-on composer avec comme entrée les carottes à l'orange ?"
S'appuyant sur ce résultat partiel et sur les représentations alors produites, elle a pu alors revenir à la résolution du problème initial.

2°) Nous avons, d'autre part, constaté que les problèmes faisant intervenir des nombres petits (domaine D1) sont mieux réussis. Les représentations proposées par les élèves sont très diverses, elles s'appuient toutefois majoritairement sur une recherche exhaustive de tous les cas possibles organisée à partir d'un arbre. Ces procédures et représentations se traduisant, dans la plupart des cas, par un dénombrement un à un ou "paquets par paquets". Rares sont les traductions en terme d'écritures multiplicatives.

3°) Lors d'activités ultérieures sur ce type de problème et faisant intervenir des données numériques importantes (domaine D2), nous avons noté alors que les élèves résolvant correctement le problème ne s'appuient plus sur des représentations, celles-ci étant difficilement traductibles en terme de produits et très coûteuses à produire.
Ainsi, un apprentissage sur des petits nombres peut s'avérer efficace car il donne un sens au problème, il permet en particulier la production de représentations adéquates, pouvant être un support à des ébauches de résolution.
Toutefois ces représentations, permettant essentiellement d'organiser une recherche exhaustive de toutes les solutions, peuvent devenir un handicap dans le cas du domaine D2. L'élève ne pouvant plus conduire une recherche exhaustive doit appréhender la structure multiplicative de la situation. Il est donc nécessaire de dégager, quelque soit le domaine numérique, cette structure.

Cela nous conduit à proposer le déroulement ci-dessous.

5 - DEROULEMENT DES SEQUENCES

Les remarques faites ci-dessus nous amènent donc à proposer un déroulement s'appuyant sur 3 idées fondamentales :

- l'apprentissage effectué sur des "petits nombres" ne suffit pas pour amener les élèves à résoudre le même type de problème faisant intervenir des "nombres plus grands", il est donc nécessaire de présenter simultanément les deux domaines numériques afin d'exhiber les différentes procédures de résolution et de les comparer en fonction de ces domaines
- toutefois cet apprentissage semble une étape indispensable pour donner du sens au problème, à condition que celle-ci débouche sur la découverte de la structure multiplicative de la situation
- les représentations produites par les élèves sont diverses, il est indispensable de s'appuyer sur cette diversité, de comparer les différentes représentations et d'en montrer les limites.

Rappelons d'autre part que ces activités doivent être faites parallèlement à l'étude (ou la révision) de la multiplication au CM.

1°) Première phase : le problème des menus (domaine numérique D2)

Organisation du travail, matériel utilisé

- les élèves peuvent résoudre le problème par groupe de 3 ou4

- ils disposent d'une feuille polycopiée où sont inscrits les divers plats permettant de composer le repas, de cahiers de brouillon, d'une grande feuille où ils devront inscrire leur solution.

Consigne : combien de menus différents peut-on composer, comprenant une entrée, un plat et un dessert ? Représentez par un dessin ou un schéma la situation.
Si cela s'avère nécessaire, le maître pourra faire expliciter la consigne par les élèves (que veut dire par exemple "menus différents"? donnez des exemples).

Période de recherche par groupe : le maître s'attachera durant cette période à observer les productions des élèves : ébauches de solution, représentations produites, erreurs significatives...
Si un nombre important de groupes ne produisent rien où se sont engagés dans des impasses, il est nécessaire de prévoir : une première mise en commun des productions : le but de cette période est de faire bénéficier aux élèves en total échec des productions de leurs pairs. Le maître ne doit pas à ce stade privilégier une représentation ou une procédure mais au contraire dégager des pistes de recherche, conduire les élèves à clarifier, pour les autres, leur démarche. Ce moment permettra également d'éliminer des représentations inadéquates (par exemple les dessins figuratifs) ou des calculs faisant intervenir, au hasard, certaines données du problème (12 x 3 par exemple). Le rejet devra être justifié par les élèves et non imposé par le maître.

Deuxième période de recherche : cette période devrait conduire à un affinement des représentations, des procédures des élèves. Si elle ne débouche pas sur des résultats corrects, il peut s'avérer nécessaire, à ce stade, dans une seconde mise en commun, de poser une question intermédiaire afin de "débloquer la situation". Par exemple : combien de menus différents peut-on composer avec comme entrée les carottes à l'orange ?
Les élèves doivent alors résoudre ce problème intermédiaire, puis résoudre le problème général, transcrire sur la feuille collective du groupe leur solution.

troisième période : mise en commun des productions finales : les élèves viennent exposer leur solution au tableau. Le maître conduira cette phase avec le souci :

* de dégager les différentes représentations et comparer leurs qualités, de montrer le lien entre représentations et procédures de résolution ;
* d'exposer les différentes procédures de calcul des élèves, de comparer leur efficacité ;
* d'analyser les différentes erreurs des élèves (mélange de multiplication et d'addition 12 x (6 + 7) par exemple: 12 x 3 + 6 x 3 + 7 x 3, calculs "hasardeux"...
* de dégager la structure multiplicative du problème en s'appuyant :
  - sur des réponses du type 12 x 6 x 7 (rares à ce stade)
  - sur l'optimisation des procédures utilisant un produit intermédiaire 12 x (6 x 7) ou (12 x 6) x 7
  - sur l'optimisation des procédures de dénombrement de tous les cas possibles dans le cas d'une recherche exhaustive (passage d'un dénombrement un à un à un dénombrement "paquets par paquets" pouvant se traduire, dans un premier temps, par une addition réitérée puis par une écriture multiplicative).

2°) Deuxième phase : le problème des jouets (domaine D1)

Les observations faites en classe montrent que certains élèves en difficulté ne savent pas, après cette première phase, encore reconnaître et résoudre ce type de problème. Si le cas se présente, le maître pourra, afin de favoriser une "prise de sens", proposer un énoncé faisant intervenir des données numériques plus faibles (problème "des jouets" ou "des quilles"). Les élèves en difficulté pourront à ce stade élaborer plus facilement une représentation du problème ou bien conduire à terme une recherche exhaustive.
Toutefois, là encore, il faudra dégager la structure multiplicative. Il nous semble préférable de commencer par des nombres importants car cela justifie l'optimisation des procédures, même dans cette deuxième phase.
Le maître pourra ensuite proposer de résoudre mentalement ce type

3°) Troisième phase

Le maître pourra proposer des problèmes de même type (domaine D2), afin de permettre aux élèves de réinvestir leurs connaissances (le problème des déguisements par exemple).
De même, il pourra demander aux élèves d'inventer des énoncés nouveaux faisant intervenir cette structure et utilisant des données numériques fournies à l'avance.
Tout au long de l'année, au cours des séances de calcul mental, il pourra, de temps en temps, faire résoudre des probèmes de ce type, mentalement (les données ne doivent pas alors être "trop grandes").

C) AUTOUR DU CALCUL MENTAL

Ces activités s'appuient sur la recherche que nous avons effectuée à l'IREM de Paris VII sur le thème du Calcul Mental (voir (11) et (12)).

C-1) Activités de calcul mental pour et par les instituteurs :

Ce sont des exercices posés aux instituteurs ayant pour but de leur faire prendre conscience de leurs propres démarches et procédures de calcul et de leur montrer que celles-ci diffèrent et dépendent de leurs pratiques et connaissances des nombres et des opérations.

C-2) Résultats de la recherche effectuée sur le calcul mental - Le rôle de l'institutionnalisation dans le calcul mental

Il s'agit de l'exposé par le P.E.N de quelques résultats et procédures d'élèves du CP au CM2 en calcul mental et d'exemples d'acitivités. C'est l'occasion de préciser ou d'étudier les phases d'institutionnalisation lors du calcul mental (voir (11) et (12)).

C-3) Mise au point, par groupes, de scenari sur le "jeu de l'autobus" - Comparaison avec les résultats d'une expérience sur le sujet

Par groupe de quatre, les stagiaires doivent construire un scénario sur le thème du jeu de l'autobus (niveau CE2), à savoir : *"dans un autobus, il y a n personnes, à un arrêt il en monte a et il en descend b. Combien y-a-t-il de voyageurs quand l'autobus repart ?"*

Le but du scénario est d'amener, en quelques séances, les élèves de CE2 à passer d'une procédure de type "état-transformation-état" à une procédure de type "composition de transformations" (voir (11) et (12) et les actes du stage de Cahors pour une analyse plus détaillée de l'activité faite avec des instituteurs).

Nous pouvons noter trois types de scénario :

(1) - familiarisation avec le problème sur des "petits nombres" - confrontation des procédures - saut qualitatif dans les variables numériques : jeu de l'autobus avec de "grands nombres".

(2) - jeu de l'autobus avec des grands nombres - jeu de l'autobus avec des petits nombres - retour au jeu avec des grands nombres.

(3) - jeu de l'autobus avec des données portant uniquement sur le nombre de voyageurs descendant et montant (on n'indique pas l'état initial, ni l'état final dans la consigne) puis jeu de l'autobus avec "petits nombres" puis avec "grands nombres".

Signalons que dans un autre stage de formation continue, cette activité a fait l'objet d'un film, analysé ensuite par les stagiaires.

C'est l'occasion de revenir sur les notions de variables didactiques et de contrat didactique (notamment au moment de l'institutionnalisation, en particulier s'il y a insistance plus ou moins forte et prévue de la part du maître pour amener les enfants à composer).
Les P.E.N. exposent brièvement certains travaux de G. Vergnaud sur les structures additives (voir (13)) .

CHAPITRE TROIS : DEUXIEME THEME : INTERACTIONS ESPACE - PLAN

A) OBJECTIFS DES ACTIVITES

1) Mise à niveau en géométrie dans l'espace (CE - CM).

2) Présenter des exemples d'activités de ce type, pour l'école élémentaire, et illustrer les Instructions Officielles sur ce sujet (en particulier : reproduire-décrire-représenter-construire).
3) Soulever un certain nombre de problèmes liés à l'enseignement de la géométrie, notamment sur les interactions plan-espace.
4) Réinvestir les concepts didactiques déjà présentés.

Nous avons été amenés à faire une double institutionnalisation (mathématiques et didactique) sur ce sujet. Le schéma de cet enseignement est plus proche du schéma adopté "habituellement" en formation initiale et en formation continue par les auteurs. Il ne s'agit pas d'un enseignement spécifique de didactique.

B) PRESENTATION DES ACTIVITES

1) Construction de polyèdres

a) construction et tri de polyèdres quelconques

Le P.E.N distribue 5 plaques de matériel PLOT n°1 et n°2 (voir (5)) et donne la consigne suivante :

"*Assemblez ces polygones pour obtenir des solides, ne faîtes pas tous les mêmes !* "

Il laisse 30 minutes de recherche. La production des stagiaires est très peu riche. Il a fallu la compléter. Il propose alors aux stagiaires de trier les solides, à partir de critères à définir.

C'est l'occasion de repréciser les points suivants :

Remarque : on peut partir de solides quelconques (pas forcément de polyèdres), on peut adjoindre à la collection des cylindres, cônes, sphères...

Premier critère : séparer la collection en solides "qui roulent" et solides "qui ne roulent pas", les seconds, ici, seront des polyèdres.

Deuxième critère : déterminer la sous-collection des polyèdres convexes, à savoir un polyèdre répondant à la caractéristique suivante :
" *il est situé entièrement dans un des 2 demi-espaces limités par chacun des plans définis par une de ses faces* "
ou bien :
"*quelque soit la façon dont on le pose sur une surface plane, il repose sur une face entière.*"

Troisième critère : polyèdres constitués par une ou plusieurs figures de base (polygones réguliers ou non).

Si on s'intéresse à la sous-collection des polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers identiques, on peut alors considérer le quatrième critère, portant sur les relations d'incidence en chaque sommet, on distingue alors :
- les polyèdres réguliers : "*toutes les faces sont des polygones identiques réguliers, tous les sommets reçoivent le même nombre d'arêtes sous le même angle*".(*)
  exemples de polyèdres réguliers :
  - convexes: les cinq "solides de Platon" .(*)
  - non convexes les 4 "polyèdres étoilés réguliers".(*)
- les polyèdres non réguliers.

Si on s'intéresse aux polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers de plusieurs espèces, on est amené là encore à considérer le cinquième critère, portant sur les relations d'incidence en chaque sommet, on distingue alors :
- les polyèdres semi-réguliers "*tous les sommets reçoivent le même nombre de faces, se répartissant toujours de la même façon et dans le même ordre.*"

Les polyèdres semi-réguliers convexes sont au nombre de 13. Ce sont les polyèdres "d'Archimède"(*).

exemple :

- "tétaèdre tronqué constitué de 4 triangles équilatéraux et de 4 hexagones réguliers,
- "l'octaèdre tronqué" constitué de 6 carrés et 8 hexagones réguliers,
- "le cuboctaèdre" constitué de 6 carrés et 8 triangles équilatéraux,
- "le cube tronqué" constitué de 8 triangles équilatéraux et de 6 octogones réguliers,
- "les prismes semi-réguliers" constitués de 2 polygones réguliers identiques situés dans des plans parallèles reliés par des carrés, le cube est un cas particulier.
- "les antiprismes semi-réguliers" constitués de 2 polygones réguliers identiques situés dans des plans parallèles et reliés entre eux par des triangles équilaréraux.

On a ainsi commencé à construire un "arbre de tri des solides" (*).

b) construire tous les polyèdres réguliers, construire tous les deltaèdres

Le P.E.N propose une troisième consigne :

"Etudier les polyèdres convexes à une seule figure de base : le triangle équilatéral.".

Afin d'analyser les propositions des stagiaires, le P.E.N est amené à préciser la consigne, par :

"trouver une condition en termes d'angles pour construire ces polyèdres."

En fait, il est amené à énoncer la proposition :
*"il faut que la somme des angles des faces arrivant en un sommet soit inférieure strictement à 360°, ce qui peut se traduire par : $n \times 60° < 360°$
où n est le nombre de faces arrivant en un sommet"*
et à faire la mise au point suivante :

3 valeurs possibles pour n : 3, 4 et 5.
De ce fait il faut alors considérer si le nombre d'arêtes en un sommet est le même ou non. Si c'est le cas on obtient les solides réguliers à savoir :

- *le "tétraèdre régulier"*
- *l'"octaèdre régulier"*
- *l'"icosaèdre régulier".*

Sinon on obtient les autres "deltaèdres non réguliers" (*).

Cela conduit à compléter l'arbre ébauché précédemment. Afin de compléter cette étude, le P.E.N propose une autre consigne :

" étudier les polyèdres convexes à une seule figure de base et réguliers."

Les stagiaires reprenant leurs constructions déterminent cinq solides, un raisonnement sur les angles permet (au P.E.N) de démontrer que l'on a trouvé tous les polyèdres répondant à la question. Ce sont les solides de Platon.

Suit un très bref rappel historique :

- *les étrusques utilisaient des dés à jouer dodécaédriques durant le 1er millénaire avant J.C.*
- *6 siècle avant J.C. les Pythagoriciens ne connaissaient que le tétraèdre et le cube.*
- *Vers 400 ans avant J.C. (427-348 avant J.C), ces cinq solides étaient manipulés dans l'entourage de Platon, ils étaient associés à un élément naturel :*
    - *le cube est associé à la terre,*
    - *le tétraèdre au feu,*
    - *l'octaèdre à l'air,*
    - *le dodécaèdre à l'univers,*

- *l'icosaèdre enfin est associé à l'eau.*

- *Les 4 polyèdres étoilés ont été découverts plus tard.*
- *En 1619 : KEPLER découvre le petit et le grand dodécaèdre étoilés.*
- *En 1810 : POINSOT découvre le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre et leurs duals (*).*

Un bref exposé signale ensuite le principe des polyèdres duaux des précédents.

c) Trouver des patrons

On s'intéressent ensuite à l'étude de certains patrons à partir d'un document distribué au stagiaires (*) qui consiste à utiliser des réseaux à mailles triangulaires, carrées ... pour déterminer différents patrons de solides.
Il est question en particulier de : tétraèdre, octaèdre, hexaèdre, décaèdre, cube, icosaèdre, dodécaèdre...
Cette receherche se fait par groupe, chaque groupe a à rechercher un solide différent.

d) analyse des polyèdres tronqués

Le P.E.N expose ensuite quelques éléments concernant l'étude de polyèdres tronqués à partir de quelques problèmes. Voici quelques exemples de consignes (toutes n'ont pas été traitées) :

N.B : Cette activité s'inspire très largement de la brochure "Géométrie" des "Aides pédagogiques pour le CM". A.P.M.E.P. - rédigée par la COPIRELEM.

- Tétraèdre tronqué

Consigne : "*tronquer un tétraèdre de 6 cm d'arête en retirant 2 cm sur les arêtes, à partir de chaque sommet. Trouver des patrons du tétraèdre tronqué à partir de patrons du tétraèdre.*"

Cela revient à garder, pour reconstruire ces patrons, 4 hexagones et 4 triangles.

- cube tronqué

première consigne :

"*Tronquer un cube d'arête 6 cm en retirant 2 cm, sur les arêtes, à partir de chaque sommet*".

Il faut faut 6 octogones et 8 triangles équilatéraux aux emplacements n° 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Ce ne sont pas les triangles d'origine qui eux, sont rectangles isocèles.
Il existe plusieurs solutions.
Remarque : on obtient un polyèdre non régulier, en effet les arêtes ne sont pas toutes de la même longueur.

consigne n°2

"*Tronquer un cube d'arête 6 cm en retirant 3 cm sur les arêtes, à partir de chaque sommet*"

On obtient 6 carrés et 8 triangles équilatéraux, c'est un cuboctaèdre.
On peut résumer les relations d'incidences en chaque sommet sous la forme d'un tableau.

"*découper 6 carrés et 8 triangles équilatéraux de côtés de même longueurs. Assembler ces polygones selon le tableau ci-dessus.*"

(*) Une fiche est distribuée aux stagiaires comportant des définitions, des propriétés et des représentations des solides définis à cette occasion. De plus cette fiche peut comporter desexercices à effectuer pendant le cours ou d'approfondissement.

- Octaèdre tronqué

consigne : "*tronquer un octaèdre d'arête a cm en retirant a/3 cm sur les arêtes à partir de chaque sommet.*"

On obtient 8 hexagones réguliers et 6 carrés...

2°) Présentation de quelques activités au CE sur les interactions espace-plan

- Il s'agit ici de présenter et d'analyser certaines activités sur ce thème, nous nous sommes inspirés de :
  - Ermel CE
  - Aides pédagogiques pour le CE - APMEP - (7)

- Il s'agit d'activités portant sur :

  - Les ombres : le but de ces activités est de prendre conscience de la forme prise par l'ombre de différents objets ou élèves en fonction de l'heure et de la hauteur du soleil.
  - Les "points de vue" : les buts de ces activités sont les suivants :
    * prendre conscience des différents points de vue d'un assemblage d'objets quant à leurs positions relatives,
    * essayer d'imaginer d'autres points de vue que le sien,
    * coordonner différents points de vue.

    Les activités sont les suivantes :
    * disposer un assemblage de 4 objets sur une table, un objet doit en cacher un autre selon un point de vue donné; demander aux élèves de dessiner ce qu'ils voient de leur place.
    * Redistribuer les dessins obtenus, chaque élève doit retrouver la place du dessinateur.
    * Distribuer 4 vues d'un assemblage d'objets, les élèves sont divisés en quatre groupes, chaque groupe dispose d'une vue, à tour de rôle, ils doivent reconstituer l'assemblage correspondant à leur vue, ils doivent prendre en compte l'assemblage effectué par les groupes qui les précèdent; la vue de dessus devant constituer une validation.
  - Les gabarits, il s'agit de l'activité décrite dans le document n°1. Les assemblages (en légo) et le trièdre ont étés reconstitués par les stagiaires.
  - Les sections (voir (16) - Ermel CE p149 à 159).

* deux documents sont distribués aux instituteurs :
  - document n°1 : "*du passe-muraille aux projections*" - ateliers de pédagogie - scenario du film -CNDP).
- document n°2 : quelques assemblages de légo à reconstituer.

C) QUELQUES COMMENTAIRES

Nous n'avons pas jugé utile dans cet exposé de détailler davantage cette partie du cours car il s'agit ici d'un exposé plutôt d'ordre mathématique. Nous conseillons au lecteur de se reporter aux ouvrages cités en bibliographie notamment à (14) - (15) - (16) - (17) - (18).
Nous tenons toutefois à souligner que tout stage de formation continue de ce type (comme toute formation initiale) doit comprendre, si nécessaire, des apports purement mathématiques, de même il nous a paru indispensable de présenter des innovations pédagogiques. Il nous paraît, à ce jour, nécessaire de dire clairement aux stagiaires ce qui relève du mathématique, du méta-mathématique, de l'innovation ou du didactique ; bien que ces domaines soient souvent liés. Une clarification paraît indispensable et un "étiquetage" aussi précis et justifié que possible pour les stagiaires. De plus ces activités permettent d'apporter des éléments mathématiques succeptibles de construire des séquences en classe sur le sujet (voir chapitre 5). C'est l'occasion de montrer l'importance et la place prise par l'acquisition de connaissances mathématiques en vue de leur enseignement. Il s'agit ici d'un exemple d'apports supplémentaires et de

réorganisation des connaissances mathématiques ancrés et justifiés par des pratiques professionnelles.

CHAPITRE QUATRE : PRESENTATION DE CERTAINES NOTIONS DE LA DIDACTIQUE

Il a paru nécessaire, à ce stade, de présenter un exposé récapitulatif de notions didactiques. En fait, il s'agit plus d'un plan de cours que d'un cours proprement dit (un cours complet nécessite beaucoup plus de temps), deux heures lui sont consacrées.
Les auteurs se sont largement inspirés, pour présenter ces notions, des cahiers n° 5, 6 et 50 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII. (voir (4)-(9)-(20)-(21)-(22)).

Cet exposé comprend :

- un essai de définition de la didactique des mathématiques (notamment en différence avec la pédagogie et les sciences de l'éducation),

- les hypothèses cognitives retenues : constructivisme, Bruner, Vigotski, conflit socio-cognitif...,

- La conception des mathématiques des auteurs : les mathématiques sont des outils pour la résolution de problème, de plus leur maîtrise ne suffit pas à leur enseignement,

- un exposé des notions développées par G. Brousseau (dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation et de l'institutionnalisation ; situation didactique et a-didactique, dévolution de la tâche ; contrat didactique, effets et ruptures de contrat). Cet exposé s'appuie sur le document n°3.

Cet exposé en fait récapitule et organise les apports déjà effectués lors des institutionnalisations locales précédentes. Il s'appuie sur les travaux et analyses effectués auparavant par les stagiaires. Il permet d'étendre et de préciser le sens donné à ces notions .
L'accent n'a pas été mis à cette étape sur la présentation de la théorie de R.Douady : dialectique outil-objet et des jeux de cadres, nous avons plus haut expliqué ce choix.
Les activités du chapitre suivant servent de test.

CHAPITRE CINQ : MISE AU POINT COLLECTIVE ET TEST DE SEQUENCES DE GEOMETRIE

A) BUTS DE L'ACTIVITE - UN GUIDE D'ANALYSE

Nous poursuivons un double but :

- d'une part, utiliser les outils et les apports d'information fournis précédemment pour construire, par groupe de 4 ou 5 instituteurs, une séquence sur un sujet donné.
- d'autre part, utiliser un guide d'analyse (plus précis) permettant d'analyser la séquence préalablement construite et de déterminer les écarts par rapport à la préparation et les indices susceptibles d'expliquer une prise de décision (prévue ou non) du maître.

Accessoirement, nous simulions les deux épreuves du CAFIMF (examen préparé par les stagiaires).

Le dispositif adopté est le suivant :

- les instituteurs choisissent un sujet de géométrie (dans l'espace) à traiter à un niveau donné ;
- préparation d'une séquence, par groupe de 5, sur ce sujet, avec aide éventuelle, toujours limitée d'un P.E.N (quelques rectifications, apport de documents) ;
- un des stagiaires mène la séquence dans sa classe, les autres instituteurs observent (un stagiaire observe le maître, les autres les élèves). On a constitué 4 groupes, seuls 2 groupes sont observés par un P.E.N ;
- bilan rapide (20 à 30 mn) de la séquence avec le P.E.N quand cela est possible ;
- rédaction par les instituteurs d'un compte-rendu de la séquence (la préparation de la séquence doit figurer obligatoirement dans ce compte-rendu) ;
- exposé des différents compte-rendus aux autres stagiaires, discussion collective.

B) PRODUCTIONS DES INSTITUTEURS

1°) Séquences préparées

- Premier groupe : "points de vue" au CE1 : un assenblage d'objets étant posé sur une table, les élèves de la classe, doivent d'une part dessiner ce qu'il voient et d'autre part après échange des dessins, ils doivent retrouver la place occupé par l'élève ayant dessiné.
- Deuxième groupe : "points de vue" au CE2 : le sujet et le dispositif est semblable.
- Troisième groupe : gabarits au CM2 : il s'agit de déterminer sur papier quadrillé les gabarits, selon trois plans perpendiculaires d'un assemblage de cube.
- Quatrième groupe : activité de communication, les élèves disposent par groupe d'un polyèdre construit à l'aide du matériel PLOT, ils doivent rédiger un message décrivant ce solide et permettant à un autre groupe de le reconstruire.

2°) Quelques remarques

- Les idées de séquence s'inspirent largement des exemples d'activités décrites précédemment par les P.E.N.
- A ce stade il est difficile d'obtenir des traces écrites substantielles des préparations ou des commentaires (sauf pour le groupe 4)
- Chaque groupe a toutefois respecté le dispositif adopté et a essayé de faire fonctionner le guide d'analyse (voir document n° 9, page 46).
- Les deuxième et troisième groupes ont été observés par un P.E.N., on peut noter la mise au point par le deuxième groupe, à la demande du P.E.N., d'une typologie des dessins produits par les élèves.
- Une analyse détaillée des messages a été effectuée, lors du compte-rendu, par les P.E.N. pour le quatrième groupe. Les instituteurs de ce groupe n'ayant pas su le faire correctement du fait de la nouveauté du sujet mathématique et d'un manque de familiarisation avec cette tâche.
- L'ensemble des productions et des analyses nous a paru toutefois d'un assez bon niveau (une analyse plus fine de ces productions reste à faire, cette appréciation restant très intuitive).

Cette activité a permis de souligner l'importance de l'analyse a priori, permettant l'observation et préparant l'analyse a posteriori. L'étude des décalages entre préparation et déroulement effectif a permis de dégager les prises de décisions du maître et d'en déterminer des causes et effets.

DOCUMENT N° 9 : GUIDE POUR L'OBSERVATION D'UNE SEQUENCE DE MATHEMATIQUE *(distribué au stagiaires)*

1) QUEL EST L'OBJECTIF DE LA SEQUENCE ?

OBJECTIF D'APPRENTISSAGE

- d'une notion,
- d'un langage,
- d'une technique,
- d'une forme de travail,
- ...

L'APPRENTISSAGE SE FAIT-IL :

- par mise en oeuvre d'une situation problème ?
  - Où en est-on (début, en cours) ?
  - En quoi la situation prévue est-elle une situation d'apprentissage ?
  - Quels principes d'apprentissage met-elle en oeuvre ?
  - Est-elle bien adaptée, efficace pour l'objectif d'apprentissage visé ?
- Par apport d'information du maître ?

OBJECTIF DE REINVESTISSEMENT ?

- En vue d'une familiarisation par des exercices simples d'application.
- En vue d'une mise à l'épreuve dans un contexte nouveau qui nécessite la coordination d'éléments de savoir déjà appris séparément ou qui implique une partie réellement nouvelle.

OBJECTIF D'EVALUATION

ORGANISATION DIDACTIQUE DE LA SEQUENCE

En fonction de l'objectif, quelle est l'organisation de classe choisie par le maître : travail individuel, travail en groupe, situation de communication ? Est-elle pertinente ?

2) COMMENT SE SITUE LA LECON DANS LA PROGRESSION A MOYEN TERME ?

- Quel est le processus prévu pour élaborer et faire fonctionner le savoir engagé ?
- Quelles sont les étapes clés du processus et comment s'articulent-elles entre elles ?
- Quelle est l'évolution constatée des conceptions des élèves ?
- A-t-on envisagé des rectifications de parcours ?
  - Si oui, lesquelles et pour quelles raisons ?
  - Sinon pourquoi ? Par exemples, les réalisations sont conformes aux prévisions du maître ou celui-ci ne sait pas comment tenir compte des élèves.

3°) TRAVAIL DE L'ELEVE, TRAVAIL DU MAITRE

- En quoi consiste la tâche de l'élève ?
- Quelle est la consigne de travail ? Sous quelle forme est-elle donnée ? Est-elle l'objet d'une discussion la précisant ?
- Est-elle l'objet d'une négociation ?
- Cette discussion ou cette négociation débouche-t-elle sur la tâche prévue ou sur une autre ? Laquelle ?
- L'élève est-il engagé dans une activité lui posant problème ? Quel problème ? Etait-il prévu ?
- En cas de blocage de la situation, quelle est l'intervention du maître ?
- Au cours de son travail, l'élève peut-il revenir en arrière et recommencer ? Est-ce licite ?
- Prend-il ses décisions en se référant au savoir ou à un contrat entre le maître et les élèves ? Ce contrat est-il explicite ? Implicite ?
- Y-a-t-il négociation entre le maître et les élèves pour la production de ce qu'attend le maître ?
- Y-a-t-il débat de savoir ?
- Quels moyens de contrôle l'élève a-t-il sur la validité de ce qu'il fait ?
- Quel est le rôle du maître dans la validation du travail que fournit l'élève ?
- La réalisation représente-t-elle un progrès da savoir, du point de vue du maître ?

4°) GESTION DU TEMPS

- Comment est organisée la séquence :
    - selon un seul objectif ?
    - selon plusieurs sous-séquences d'objectifs différents ?
- Au cours de la séquence observée :
    - quel est le temps du maître, comment l'occupe-t-il ?
    - Quel est le temps de l'élève, comment l'occupe-t-il ?
    - Quel est le temps collectif ? Comment est-il géré, comment est-il occupé ?
- Quelles sont les variantes, et en foction de quoi sont-elles décidées, dans d'autres séances ?

CHAPITRE SIX : TROISIEME THEME : FONCTIONS NUMERIQUES ET PROPORTIONNALITE

A) OBJECTIFS DES ACTIVITES - MODALITES

Là encore, nous avons un double objectif (mathématique et didactique).

1) A partir de situations-problèmes, (voir document n° 10) dégager différents types de fonctions, enseignées ou non à l'école élémentaire :

a) Mise au point sur la notion de fonction

b) Analyse mathématique de la fonction numérique sous-jacente à chaque situation-problème :
Déterminer :

- son type (linéaire, affine,...)
- sa formule (x --> f(x))
- sa représentation graphique
- ses propriétés (liées à l'ordre, aux "écarts", à la linéarité).

2) Analyse mathématique et didactique de la notion de proportionnalité à partir de différents problèmes relevant de la linéarité (voir document n° 11).
Cette analyse est décrite dans le cahier de didactique des mathématiques n° 20 (voir (19))

3) Construction et réalisation de séquences en classe à 2 niveaux : CE et CM (voir chapitre suivant)

B) FONCTIONS NUMERIQUES

1) Situations - problèmes:

Des exemples de situations sont proposées aux instituteurs (voir document n°10).

2) Rappels et classification sur les fonctions - enseignement des fonctions

Nous n'avons pas pu mené une étude détaillée des représentations graphiques et de leur enseignement à l'école élémentaire faute de temps.

Nous ne développerons pas davantage ce point ici, nous renvoyons les lecteurs aux nombreux ouvrages traitant de ce sujet.

C) PROPORTIONNALITE

1) Situations-problèmes

Des situations sont proposées aux instituteurs (voir document n°11).

L'objectif visé est multiple :

- classer les problèmes relevant de la proportionnalité ;
- exhiber certaines images mentales ou erreurs persistantes : confusions entre multiples / nombres proportionnels - fonction croissante / fonction linéaire - soustraction / réduction ; étude du poids des coefficients de proportionnalité,
- repréciser certaines définitions et propriétés des fonctions linéaires ;
- montrer la difficulté de certains exercices relevant de la proportionnalité ou de situations linéaires ;
- évaluer le rôle joué par les variables numériques dans la reconnaissance de situations de proportionnalité et dans le choix des procédures de résolution mises en oeuvre.

Ce préalable semble indispensable à la compréhension de l'exposé qui suit (pour le public visé).

2) Exposé concernant l'enseignement de la proportionnalité

Il s'agit ici d'un exposé reprenant le cahier n°20 de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris VII- (voir (19)) : "A propos de l'enseignement de la proportionnalité". - M. Pezard.
Cet exposé comprend en particulier une analyse :
- des différentes procédures de résolution de problèmes de proportionnalité (procédure scalaire, procédure fonction...) ;
- de l'évolution de l'enseignement de cette notion ;
- des types de problèmes relevant de cette notion ;
- de quelques situations d'enseignement (agrandissement d'un puzzle, variations de la longueur de la diagonale d'un carré en fonction de la longueur d'un côté...)

DOCUMENT N° 10 : QUELQUES SITUATIONS-PROBLEMES

(document distribué aux stagiaires)

1) A la fête foraine, le tour de manège vaut 5F. Pour faciliter ses calculs, le patron s'est fait un barême de prix. Etablis toi-même ce barême. A la fin de la fête, il n'y a plus beaucoup de monde, le patron demande seulement 3,50F pour un tour. Etablis le nouveau narême de prix.

2) Un libraire expédie des revues selon un tarif dégressif :
- de 1 à 4 : 15F par revue, 5F de port,
- de 5 à 9 : 12F par revue, 10F de port,
- au delà de 10 : 10F par revue, 20F de port.

Quel est le prix d'un envoi de 2, 3, 6, 8, 10, 15, 20 revues ? Faire un graphique.

3) La reproduction des amibes : l'amibe se reproduit par simple division cellulaire : à partir d'une amibe, quel est le nombre d'amibes à la nième génération ?
Faire un graphique.

4) Dessinez différents types de rectangles de périmètre constant égal à 20 cm. On désigne par a la longueur en cm, de l'un des côtés et par b la longueur de l'autre côté. Inscrire dans un tableau les différentes valeurs trouvées. Représenter graphiquement les couples (a,b) et (a,s) où a désigne l'aire du rectangle.
Qu'observz-vous ? Pour quel rectangle l'aire est-elle la plus grande ?

5) Dessinez différents types de rectangles d'aire constante égale à 36 cm^2. On désigne par :

a la longueur en cm de l'un des côtés,
b la longueur en cm de l'autre côté,
p le périmètre en cm du rectangle.

Inscrire dans un tableau les résultats relevés. Représenter graphiquement les couples (a,b) et (a,p). Qu'observez-vous ? Pour quel rectangle le périmètre est-il minimum ?

6) Dessinez différents types de rectangles dont la diagonale est de 6cm. Représenter graphiquement les couples (a,b) (les notations sont identiques aux précédentes).

7) Pour la fête de l'école, on a décidé de confectionner des affichettes : les élèves s'adressent à 3 imprimeries différentes dont les tarifs sont les suivants :
- <u>Imprimerie n°1</u> : 5F par affichette
- <u>Imprimerie n°2</u> :
  - jusqu'à 15 affichettes : 100F
  - De 16 à 50 affichettes : 200
  - Plus de 50 affichettes : 250F
- <u>imprimerie n°3</u> : un forfait de 40F et 3F par affichette.

Dans quelle imprimerie doit-on acheter les affichettes si on en veut seulement pour quelques élèves, pour une classe entière, pour plusieurs classes, ou pour toute l'école.

8) Dans un CM2, des élèves ont mesuré la longueur d'un ressort en fonction de la masse suspendue. Voici ce qu'ils ont obtenu :

Masses (g)	0	20	50	100	200	300	400	500	700	1000
Longueur (cm)	15,5	15,5	16,2	17,3	19,3	21	23	24,8	29	34,6

9) Des élèves ont, pendant quatre semaines, pesé un jeune pigeon né dans la classe. On a, pendant le même temps, pesé un jeune faisan : voici les résultats obtenus :

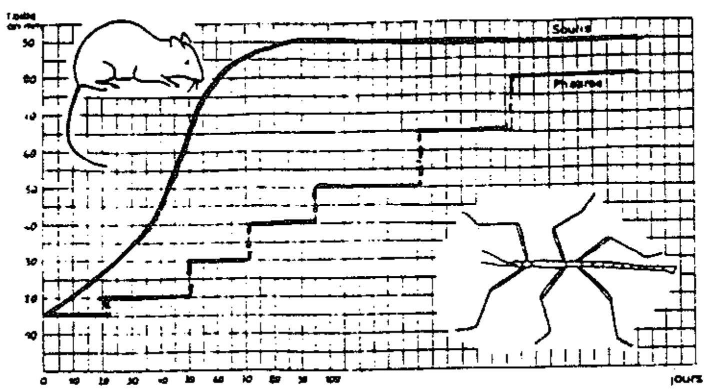
âge (jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pigeon (poids en g)	18	30	50	55	80	100	115	130	140	155	180
faisan (poids en g)	20	18	18	18	20	24	26	28	32	36	42
âge (jours)	13	15	16	18	21	22	24	26	28	30	
pigeon (poids en g)	190	200	220	230	250	260	280	300	305	305	
faisan (poids en g)	48	52	56	68	82	104	130	150	175	175	

Comparer ces deux croisances. Faire un graphique.

10) La maman d'une femme enceinte. Celui-ci l'accompagne lors des échographies, il raconte à ses camarades les changements observés. Le docteur fournit le tableau suivant :

âge du foetus en jours	15	21	23	28	30	37	40	42	45	56	60	90	120	150	180	210	240	270
taille en mm	1,5	2,5	3	4	5	10	13	15	17	25	30	170	240	310	370	420	470	510

11) Observez les graphiques ci-dessous. Les deux animaux grandissent-ils de la même façon ?
Que s'est-il passé pour le phasme âgé de 50 jours ?
Citez des animaux qui grandissent comme la souris.
Citez des animaux qui grandissent comme le phasme.



1. Repasse en rouge la courbe de croissance de la Souris et en bleu celle du Phasme.
2. Remplis le tableau suivant.

Taille en mm	à la naissance	à 25 jours	à 30 jours	à 35 jours	à 40 jours	à 45 jours	à 50 jours	à 55 jours	à 60 jours	Taille définitive
Souris										
Phasme										

DOCUMENT N° 11 : QUELQUES PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE
(distribué au stagiaires)

1) Sur une carte au 1/25000, à quelle distance sont représenté deux points distant de 375 m à vol d'oideau ?

2) Entre 0 et 20 ans, la taille est-elle proportionnelle à l'âge ?

3) Quelques questions posées à des élèves-instituteurs par l'INRP:
"12 est proportionnel à 4"
"5 et 7 sont proportionnels à 20 et 28 "
"4, 7, 11 sont proportionnels à 12, 28, 33 "
Répondre par vrai, faux, je ne sais pas.

4) Extrait d'un dictionnaire : "cette jeune fille a de belles proportions".

5) Un bloc parallélépipédique pèse 200 grammes. Combien pèse un bloc dont chaque dimension est le quart des dimensions du bloc précédent.

6) Au premier janvier 1977, le taux de la T.V.A. pour certains articles a été ramené de 20% à 17,6%. Quelle est la baisse correspondante des prix ?

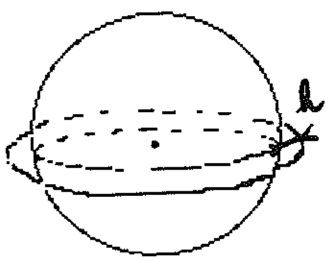
7) La déclaration d'impots prévoit un abattement de 10%, pour frais professionnels, suivi d'un abattement de 20%. Serait-il préférable de pratiquer d'abord 20% puis 10% ?

8) On établit la consommation d'une fusée propulsée par 4 réacteurs identiques. On sait qu'un réacteur consomme en moyenne 1,6 tonne de carburant par seconde. Quel temps mettra la fuée, quand ses 4 réacteurs fonctionnent, pour consommer 131,8 tonnes de carburant ?

9) Une ménagère achète à un marchand 5 kg de fraises et 3 kg de cerises pour 24,40F. Une autre achète au même marchand 7 kg de fraises et 2 kg de creises pour 28F. Quel est le prix du kg de cerises et du kg de fraises ?

10) Etudier les variations de la longueur d'un rectangle en fonction de sa largeur à aire constante.

11) La circonférence de la Terre à l'équateur est d'environ 40.000 km. On prend une corde de 40.000 km + 4m, on entoure cette corde autour de l'équateur de façon régulière (voir dessin). On appelle h la longueur de l'écartement entre la surface de le Terre et la corde. On fait la même chose avec un petit pois de longueur d'équateur 4 mm (corde de 4mm + 4 m). On appelle h' la longueur de l'écartement dans ce dernier cas. Dans chaque cas, un homme peut-il passer entre la surface et la corde ?



12) Soient A et A' deux rectangles identiques. Partager A' en 2 dans le sens de de la largeur. On obtient 2 rectangles A1 et A'1 identiques.A1 et A'1ont-ils la même forme que A ?

CHAPITRE SEPT : MISE AU POINT ET TEST DE SEQUENCES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES ET LA PROPORTIONNALITE

A) BUTS DE L'ACTIVITE - DISPOSITIF ADOPTE

Le schéma suivi est le même que celui explicité au chapitre cinq.

B) PRODUCTION DES INSTITUTEURS

1) Séquences préparées et testées

- groupe n°1 : étude de la croissance d'un foetus (CM2)
- groupe n°2 : recette de cuisine au CM2
- groupe n°3 : relations numériques au CE2, il s'agit ici, à partir de l'étude de tableaux de nombres incomplets de déterminer certaines fonctions numériques (fonctions affines ou linéaires de N dans N).

2°) Quelques remarques

- nous constatons une amélioration dans la qualité des compte-rendus (oraux sinon écrits) ;
- le groupe n°1 admet s'être senti très démuni sur cette leçon, faute de temps de préparation et par "faiblesse mathématique" ;
- le groupe n°2 confond procédure scalaire et procédure fonction dans sa préparation ;
- le groupe n°3 fait lui aussi un certain nombre d'erreurs mathématiques .
- malgré des erreurs, les analyses sont très fines (les erreurs ont été détectées après préparation). Ces erreurs ont montré la nécessité d'une analyse de la tâche et de la prise en compte des résultats de la didactique lors d'une préparation. Les groupes 2 et 3 sont observés par un P.E.N (une analyse plus fine de ces travaux serait, là encore, intéressante).

DEUXIEME PERIODE
(2 semaines en novembre 1991)

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, cette période est plutôt "consacrée à l'étude" :
- de cursus d'enseignement : comparaison et construction, présentation "d'outils didactiques" permettant ce travail (dialectique outil-objet, jeu de cadres, résultats d'expériences, de travaux de psychologie et de didactique des mathématiques).
- d'analyse de conduite de classe par des normaliens (en vue de la préparation à une épreuve de l'examen : analyse, critique et conseils à propos de la prestation d'un élève-instituteur durant une séquence de mathématiques).

De ce fait, les concepts de didactique présentés seront plutôt d'ordre macroscopique ; nous sommes revenus en particulier sur :
- la didactique outil-objet et les jeux de cadres (R. Douady),
- le contrat didactique,
- les représentations des enseignants (travaux de A. Robert et J. Robinet).

Les activités proposées sont de plusieurs types :

- comparaison de progressions sur les nombres décimaux (à partir de manuels ou de revues)
- analyse de questionnaires (entiers naturels, évaluation CE2)
- analyse de films (CNDP-INRP) présentant des séries de séquences ou des cursus d'apprentissage
- analyse de documents filmés présentant des normaliens en situation de conduite de classe
- apports d'informations sous forme d'exposés des P.E.N.

Remarque : Nous décrivons une autre présentation de certains de ces thèmes en deuxième partie, à propos d'un enseignement en formation initiale.

CHAPITRE HUIT : ENTIERS NATURELS, NUMERATION

Ce chapitre est un peu particulier, compte-tenu de l'évolution des programmes de l'école maternelle et élémentaire sur l'apprentissage du nombre (voir programme du cycle des apprentissages fondamentaux et premiers notamment).

Nous avons donc organisé notre intervention autour de cinq thèmes :
A) Le concept de nombre, que sait-on de son acquisition ? (le point de vue des psychologues et des didacticiens).
B) Savoir repérer les compétences des "élèves".
Le nombre : outil pour résoudre des problèmes.
Les procédures mises en oeuvre par les élèves et leur évolution - (le point de vue de l'INRP).
C) Rappels mathématiques sur le nombre (aspect ordinal et cardinal).
D) Les problèmes de désignation des nombres, numération.
E) Evaluation et remédiation au CE2 à propos du nombre et de la numération.

Ce thème a occupé 12 heures et donc la moitié du temps consacré à la deuxième période du stage.

A) LE CONCEPT DE NOMBRE, QUE SAIT-ON DE SON ACQUISITION ?

Il s'agit ici d'un exposé du P.E.N. s'articulant ainsi :

1) la conservation du nombre - Piaget

Partant de la constatation de M. Fayol (voir (23)) : *"les travaux menés au cours de la dernière décennie ont quelque peu bouleversé la conception de l'acquisition du nombre et de la numération telle qu'elle ressortait des recherches menées par Piaget"* ;

- présentation des expériences de Piaget (fondées essentiellement sur les notions d'invariance et de correspondance terme à terme)
- présentation du point de vue critique de M. Fayol, à propos de ces expériences de Piaget, articulé autour des 3 axes suivants : influence du contexte pragmatique, rôle du langage, différences perceptives induisant des réponses erronnées (voir (23) et document n°12)
- présentation de la relation effectuée par M. Fayol entre conservation et comptage et de sa conclusion paradoxale sur la conservation :
    - *"les différentes recherches effectuées (voir (23)) montrant d'une part l'impact massif du comptage sur la conservation (contrairement à Piaget)*
    - *d'autre part, les données empiriques (dénombrement) ne sauraient donner un fondement direct à la conservation."*

Paradoxe provenant selon M. Fayol d'une méprise : ce ne sont pas les constats empiriques qui interviennent, mais plutôt une sorte de prise de réflexion portant sur les actions et leur coordination.

2) la place de l'apprentissage de la comptine dans la construction du nombre (aspect ordinal)

- présentation des difficultés rencontrées par les enfants dans l'utilisation de la comptine (voir document n°12 et (23))
- présentation des résultats de l'enquête INRP : *"que savent les enfants en entrant au CP ?"* (voir document n°13 et (27))
- présentation des travaux de M. Fayol sur l'acquisition de la chaîne numérique verbale (voir (23)).

3) l'acquisition du nombre : les travaux de Rachel Gelman

Il s'agit de commentaires sur l'article : "les bébés et le calcul" (voir (25)).

L'idée essentielle de cet article est : l'enfant, même très jeune, dispose de toutes les "compétences" nécessaires à l'acquisition du nombre, mais se heurte à des difficultés de mise en oeuvre : (gestion simultanée des différentes composantes d'une activité de dénombrement : geste, parole, s'arrêter à temps...).

B) Le point de vue de l'I.N.R.P.

Il s'agit ici d'un mélange entre exposés magistraux des P.E.N. et travaux dirigés portant sur l'analyse de documents filmés (CNDP-INRP).

Voici le plan détaillé de ce chapitre.

1) Evolution historique des conceptions et de l'enseignement sur le nombre naturel

On peut distinguer trois périodes :

- avant 1970 (réforme "des mathématiques modernes"), l'enseignement est basé :
  - sur le conditionnement et la répétition,
  - sur le passage du concret à l'abstrait,
  - sur la primauté donnée aux algorithmes (voire aux mécanismes) par rapport au "sens" (supposé vu après).

- après 1970 : les conceptions de l'apprentissage sont influencées par le structuralisme d'où une importance donnée :
  - au matériel structuré (multibase)
  - à la découverte de la structure sous-jacente à ce matériel
  - à l'activité de l'élève

  Par contre, on peut constater que :
  - le problème disparaît
  - la plupart des manuels font un mélange entre avant et après 1970.

- Aujourd'hui : l'enseignement doit prendre en compte :
  - les idées développées par la didactique des mathématiques en particulier :
    - le nombre est un outil pour résoudre des problèmes, la résolution de problème est au centre de l'apprentissage
    - on apprend à "partir" ou même "contre" ce que l'on sait déjà, il faut donc tenir compte de ce que savent les élèves,
    - diversifier les situations d'apprentissage pour que l'enfant construise lui-même son savoir.
  - des constats empiriques :
    - le désir précoce des enfants de compter
    - une certaine "timidité"dans les classes/nombre
    - au CP, les savoirs et savoir-faire des enfants ne sont pas souvent pris en compte.

2) L'apprentissage du nombre aujourd'hui

La recherche 5-8 ans menée par l'INRP a permis la réalisation de l'ouvrage ERMEL maternelle à destination des maîtres de l'école maternelle et élémentaire. Nous renvoyons le lecteur à cet ouvrage (26) et à celui concernant le CP et CE (à paraître éditions Hatier).

Nous donnons ici le plan de l'exposé :

1 - objectifs en fin de CP
2 - les grands types de problème,
3 - une variable importante : la taille des nombres,
4 - les différentes procédures utilisées par les élèves : du comptage au calcul. Comment faire évoluer ces procédures ?
5 - le tâche de l'enseignant : démarche générale
6 - 3 grandes phases dans l'apprentissage de la désignation des nombres.

3) Etude de situations d'apprentissage (28) (29) (30)

L'exposé ci-dessus est illustré par l'analyse de documents filmés, en particulier :
- "*Contine, comptons*", cet exposé d'interviews d'élèves de maternelle est précédé de la mise au point d'un questionnaire permettant de tester les connaissances numériques des élèves de cet âge (sur la base de documents proposés aux stagiaires -E.N. de Limoges voir le document n°15)
- "*les wagons*"
- "*les matoeufs*".

C'est l'occasion de revenir sur les notions de "nombre-outil" et "nombre-objet" (référence à R. Douady), de variables didactiques, d'apprentissage différencié et de rythme (individualisé) d'apprentissage, ainsi que de régulations des apprentissages (collectives).

C) Rappels mathématiques sur le nombre

D) Différentes désignations des entiers naturels

Nous ne détaillons pas ces deux paragraphes qui sont plutôt d'ordre mathématique.Nous avons traité notamment :
- les aspects ordinal et cardinal du nombre (sans théorie !)
- la classification des systèmes de numération (cf Guittel voir(30))
- la numération : point de vue algorithmique
- le "jeu du banquier" : point de vue groupement - échange
- les "compteurs" : point de vue algorithmique
- des activités spécifiques de numération orale (voir paragraphe suivant)
- passation du film : "*Contez-nous comment vous comptez ?* (INRP- voir (32)).

E) Analyse des tests d'évaluation CE2 - Remédiation - élèves en difficulté

Nous avons traité ce point pour plusieurs raisons :
- le problème de la prise en compte de l'évaluation nationale CE2/6ème est d'actualité,
- c'est un prétexte pour réfléchir sur la construction de tests de connaissances,
- le traitement des difficultés des élèves est un sujet conflictuel où se révèlent les conceptions des enseignants, c'est donc un point de départ pour un débat (souvent passionné) sur celles-ci.

Le plan suivi est le suivant :

1) analyse du test CE2-1990 concernant la numération : travail par groupe, analyse à priori, analyse de cahiers d'élèves, comparaison entre prévisions, erreurs et procédures observées. Comment doit-on compléter le test pour tester certains savoirs et savoir-faire?

2) analyse des résultats nationaux de 1989 : quel est le profil statistique d'un élève de CE2 en difficulté ?

3) exposé du P.E.N. : que sait-on aujourd'hui des élèves en difficulté? (référence aux travaux de l'équipe de Paris VII : voir (33) et (34)).

4) analyse d'un questionnaire portant sur les conceptions des élèves de CE2 sur les mathématiques et leur apprentissage (voir document n°16)

5) mise au point de quelques exercices de remédiation sur la numération - réflexion sur la gestion de la classe associée

DOCUMENT N°12 : QUELQUES RESULTATS EXTRAITS DE "L'ENFANT ET LE NOMBRE" DE M. FAYOL *(distribué au stagiaires)*

L'ENFANT ET LE NOMBRE   M. FAYOL

LA CONSERVATION ET SES PROBLEMES

DOC. 1

Dans un deuxième temps, l'expérimentateur transvase lui-même (ou incite l'enfant à transvaser) le contenu de l'un des deux bocaux (A1 ou A2; Cf. figure 4.1) — l'autre jouant le rôle de «témoin» — dans un récipient de forme différente: soit haut et étroit (A3) soit bas et large (A4). Il demande alors au sujet d'estimer si A3 (vs A4) contient la même quantité de perles qu'A1 (vs A2). Il s'enquiert ensuite de la possibilité de fabriquer avec les perles extraites d'une part de A1 (vs A2) et d'autre part de A3 (vs A4) deux colliers de même longueur («pareils»).

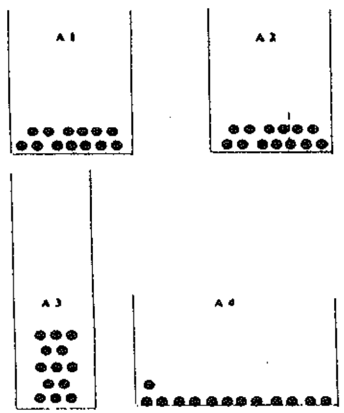


Figure 4.1. - Exemple de matériel utilisé dans les épreuves de conservation. L'expérimentateur et le sujet déposent chacun le même nombre de perles dans leurs récipients respectifs (A 1 et A 2). Le contenu de l'un des deux se trouve ensuite transvasé en A 3 ou en A 4.

DOC 3

a) «Combien y a-t-il de papillons de plus que de fleurs ?» Formulation classiquement utilisée par Piaget et ses collaborateurs et dont on sait qu'elle s'associait, à sept-huit ans encore, à un très fort taux d'échecs

b) «Chaque oiseau vient manger un ver. Combien d'oiseaux n'auront-ils pas de ver ?» Formulation qui, outre l'absence des termes relationnels «plus que» (vs «moins que»), présente un caractère moins abstrait et plus significatif.

Tableau 4.2: Pourcentage de réussite en fonction de l'âge et de la formulation de la question (d'après Hudson, 1983).

	Formulation	
	Combien de plus?	Combien n'auront pas de X?
4 ; 9 ans	.17	.83
6 ; 3 ans	25	96

DOC. 2

Siegel (1977) a étudié de manière très précise la compréhension de big / little / same number (grand / petit / même nombre) en fonction de la congruence (ou de la non congruence) entre nombre d'éléments et longueur d'une collection. Elle trouve que l'acquisition de ces termes s'effectue très progressivement sous la dépendance des opérations cognitives liées à la coordination des dimensions de longueur / densité / numérosité. Comme le montrent les données reportées au tableau 4.1, le nombre moyen d'erreurs varie en fonction de l'âge, de la congruence entre longueur et numérosité et du terme utilisé. «Little» s'associe généralement à un nombre plus élevé d'erreurs. Les sujets de 4 ans obtiennent des scores plutôt meilleurs que ceux de 3 ans mais ils se révèlent plus sensibles à l'impact de la longueur. Il s'agit là d'un résultat que nous rediscuterons.

Tableau 4.1: Nombre moyen d'erreurs en fonction de l'adjectif (BIG/LITTLE), de l'âge (3 et 4 ans) et de la congruence entre longueur et numérosité (d'après Siegel, 1977).

		CONDITIONS		
AGES	TERMES	rapport Congruence Longueur/ Numérosité	Longueur neutre/ Numérosité	Relation inverse Longueur/ Numérosité
3 ans	BIG	12.8	17.9	19.8
	LITTLE	15.6	16.8	20.7
4ans	BIG	4.55	8.83	23.5
	LITTLE	5.22	[illegible]	[illegible]

DOC. 4

Tableau 4.3: Configurations et règles reliant les propriétés spatiales aux jugements numériques. Pourcentages de réussite en fonction de l'âge (D'après Pufall et Shaw, 1972, p. 63 et 65).

	CONFIGURATIONS	REGLES	AGES 3	4	5	6
1	● ● ● ● ● ● ● 7 ● ● ● ● ● ● ● 7	REGLE 1. Longueurs et densités égales; deux nombres égaux	.42	1.00	1.00	1.00
2	● ● ● ● ● 5 ● ● ● ● ● ● 6	REGLE 2. Longueurs et densités en relation directe; deux rangées numériquement inégales	.90	.85	.95	.95
3	● ● ● ● ● ● ● 7 ● ● ● ● ● ● ● ● ● 9	REGLE 3. Longueurs égales et densités inégales; deux rangées numériquement inégales	.58	.17	.29	.63
4	● ● ● ● ● ● ● 7 ● ● ● ● ● 5		.84	.40	.43	.92
5	● ● ● ● ● ● ● 7 ● ● ● ● ● ● ● 7	REGLE 4. Longueurs et densités en relations inverses; dont la relation numérique peut être : égal ou inégal	.11	.04	.02	.10
6	● ● ● ● ● ● ● ● ● 9 ● ● ● ● ● ● ● 7		.33	.19	.46	.88
7	● ● ● ● ● 5 ● ● ● ● ● ● ● 7		.09	.90	.98	1.00

DOC. 5

Autre exemple, Greco (ibid.) demande à des sujets dont l'âge varie de quatre à huit ans de copier des configurations numériques spatiales du type de celles présentées sur la figure 4.2. Il relève quatre niveaux de conduite (Greco ibid. p.30 et suivantes):

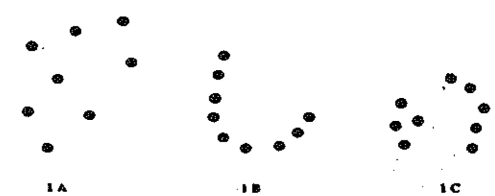


Figure 4.2 - Type de configuration utilisée par Greco (1962).

LA CONSERVATION ET SES PROBLEMES   DOC. 6   101

sujets de trois à sept ans à des épreuves de conservation portant sur des quantités non estimables du fait de leur taille. Ces auteurs raisonnent de la manière suivante: la cohérence est inhérente à la conservation en ce qui concerne les jugements de pré- et de post-transformation. Dès lors, si les sujets comprennent la conservation, ils doivent, confrontés à deux rangées de jetons, neutres relativement à la quantité — car le choix de l'une ou de l'autre comme ayant «plus» est aléatoire faute de contrôle quantitatif possible — fournir le même jugement avant et après une transformation affectant la seule apparence (Cf. figure 4.3).

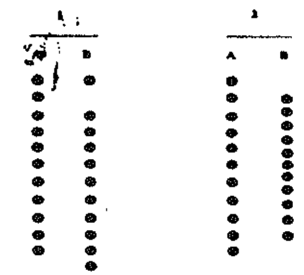


Figure 4.3 - Principe de l'expérience de Halford et Boyle (1985). Dans un premier temps (1), l'expérimentateur présente deux collections A et B trop grandes pour être dénombrées. Il demande au sujet de fournir un jugement: soit A>B soit A=B soit A<B. Dans un deuxième temps (2) l'expérimentateur modifie devant le sujet la disposition spatiale de B et demande le même jugement (A>b / A=B / A<B). On évalue ainsi la cohérence des réponses du sujet, celui-ci devant, s'il est conservant, fournir le même jugement en (1) et (2).

[redacted] Exemples de suites numériques obtenues du même enfant à partir d'essais successifs (d'après Fuson et al. ibid.).

1	2	3	4.........6	8	9	14	16	13	5	
1	2	3	4.........6	8	9	12	15	16	13	
1	2	3	4.........6	8	9	14				
1	2	3	4.........6	7	9	9				
1	2	3	4.........6	8	9	15	13	11		
1	2	3	4.........6	8	9	8	4			

stable et I conventionnelle — stable et II non conventionnelle — ni stable, III ni conventionnelle

[redacted] Moyennes et écarts-types (entre parenthèses) du dernier élément de la chaîne numérique atteint en fonction de l'âge pour un comptage sans objet à dénombrer (d'après Fuson, Richards et Briars, 1982, p. 37).

Ages	Meilleur essai	Essai avec omission
3 ; 6 à 3 ; 11	14.17 (6.51)	16.56 (6.51)
4 ; 0 à 4 ; 5	17.17 (8.71)	18.71 (8.52)
4 ; 6 à 4 ; 11	28.59 (28.19)	36.47 (26.94)
5 ; 0 à 5 ; 5	40.19 (25.76)	44.81 (23.13)
5 ; 6 à 5 ; 11	38.17 (22.44)	43 (19.64)

[redacted] Performances aux épreuves de comptage sans objets à dénombrer en fonction de la scolarisation (4 ans = sujets préscolaires; 5 ans = sujets de maternelle) et de la classe sociale (d'après Ginsburg et Russel, p. 39)

Ages	Classes sociales	
	Moyenne	Défavorisée
4 ans	19.89	15.52
5 ans	36.03	37.86

[redacted]: Exemples de séquences instables (d'après Fuson et al. 1982, p. 50-51)

Age 3 ; 10 ans

- (...) 12 14 18 19 15 19
- (...) 12 14 18 19 16 17 18
- (...) 12 14 18 18 15 17 18 19 17

Age 3 ; 6 ans

- (...) 13 19 16 13
- (...) 13 16 19
- (...) 13 16 14 16
- (...) 13 16 19 16 14 19 16 19

Age 4 ; 2 ans

- (...) 14 1619 30
- (...) 14 1619 30 40 60
- (...) 14 1619 30 31 35 38 37 39

[redacted] Pourcentage de poursuites correctes de la chaîne verbale en réponse à une "amorce" comportant un, deux, ou trois nombres (adapté d'après Fuson et al.).

Ages	Amorces		
	un nombre	deux nombres	trois nombres
3 ans	.27	.55	.48
4 ans	.68	.82	.82

[redacted] Pourcentage de sujets de différents niveaux scolaires produisant des comptages à rebours d'un type donné (d'après Fuson et al., 1982, p. 70).

▼

	Séquence à rebours					
	inférieur à 10->1	10->1	30->20	72->62	101->91	203->193
Grande section maternelle (6 ans)	.41	.44	.07	.04	.04	.00
C.P. (7 ans)	.07	.59	.10	.03	.17	.03
C.E.1 (8 ans)	.03	.30	.15	.10	.13	.15
C.E.2 (9 ans)	.00	.17	.08	.04	.21?	.13

[redacted] Performances comparées aux questions "qu'est-ce qui vient avant vs après 8?" (d'après Fuson et al. 1982, p. 73).

âges	question	
	Avant 8	Après 8
3 ; 6 ans	.13	.49
4 ; 6 ans	.57	.81

[redacted] Pourcentages de réussite au comptage de n à partir de x (d'après Fuson et al. 1982, p. 83)

	Valeur de n		
	n=2	n=5	n=8
comptage avant	.79	.45	.30
comptage à rebours	.68	.18	.13

DOCUMENT N°13 : extraits d'un article sur le nombre, J.D.I (éditions Nathan) *(distribué au stagiaires)*

dossier

Le nombre

Que savent les enfants en entrant au CP ?

Des observations récentes ont été menées auprès de jeunes enfants: les travaux de C. Meljac (*Décrire, agir et compter*, PUF, 1979), de J.P. Fischer (*Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans*, Revue de Didactique des Mathématiques, 1981); de R. Gelman (*Les bébés et le calcul*, La Recherche, 1983) ainsi que des constats faits dans le cadre de notre recherche :

1) La connaissance de la comptine numérique : la suite orale des nombres est connue à l'entrée au C.P. au-delà de 10 (90 %) souvent jusqu'à 20 (60 %) ou même plus.

2) L'utilisation de cette comptine pour dénombrer (évaluer une quantité) est une activité complexe : il ne faut pas que la comptine « aille plus vite » que les objets pointés, ceux-ci ne devant être pointés qu'une seule fois chacun le dernier mot énoncé correspondre au nombre d'objets de la collection.

Il ne suffit donc pas de connaître la comptine pour savoir dénombrer. L'activité de dénombrement (« Combien y a-t-il de jetons ? ») est moins bien réussie que la précédente.
Pour notre part nous avons établi qu'environ 70 % des élèves, à l'entrée au CP, savent dénombrer une collection comportant un élément de moins que le plus grand nombre de leur comptine (dans le domaine numérique inférieur à 20).

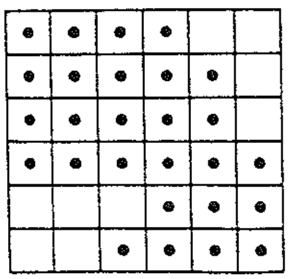
3) La lecture et l'écriture des graphies chiffrées des nombres sont fréquemment maitrisées au-delà de 5, voire de 10 pour certains élèves à l'entrée au CP.

Lecture et écriture des nombres en fonction de l'âge
(en pourcentages d'enfants qui savent lire et écrire le nombre jusqu'à...)

Âges	Rien	5	10	15	20	50	100	Et plus
4 ans	100							
4,6	Quelques graphies isolées							
5 ans		—						
5,6	50	50	30	20				
6 ans, mat.	8	92	92	32	8			
6 ans, CP		100	80	50	10			
6,6		100	100	80	80	60	10	10
7 ans		100	100	90	73	63	63	27

4) Le recours spontané au dénombrement, dans une épreuve où il n'est pas suggéré par la situation (bien qu'il soit le moyen le plus efficace), n'est pas mis en œuvre par tous les enfants de CP qui savent dénombrer. Le nombre comme « mémoire de la quantité » reste à construire pour beaucoup d'élèves.

Epreuve proposée en excercice individuel à 3 classes en début de CP (pourcentages arrondis).
Le quadrillage suivant, dont quelques cases sont occupées par des jetons, est placé devant l'enfant. Une boîte contenant des jetons (une trentaine) est placée sur une table éloignée.



Consigne : « Tu vois, j'ai un carré avec des cases (l'expérimentateur montre quelques cases du doigt), je veux mettre un jeton par case. J'ai commencé, c'est toi qui va finir. Les jetons sont dans cette boite, là-bas. Tu vas prendre juste ce qu'il te faut de jetons. *Attention*, il faut qu'il y en ait *juste assez, ni plus, ni moins*. Tu regardes bien et après tu vas chercher les jetons qu'il te faut ».
30 % des élèves réussissent cette épreuve, pour la plupart en dénombrant visiblement et 25 % apportent un jeton de plus ou un jeton de moins.

5) Des problèmes arithmétiques peuvent être résolus par les enfants préalablement à tout enseignement. Fischer souligne d'ailleurs « le rôle important que joue le comptage dans la résolution des premiers problèmes par l'enfant » (sous forme de comptage « concret » avec les doigts par exemple, de surcomptage ou de décomptage).

Voici un exemple donné par Fischer ... problème verbal : « un petit garçon a x bonbons. Et puis il mange y bonbons. Combien est-ce qu'il lui reste alors de bonbons ? »

	$x = 5$ $y = 2$	$x = 7$ $y = 2$
5,3 ans	17/32	5/32
5,9 ans	22/32	12/32
6,3 ans	31/32	18/32

Le second exemple est proposé par l'INRP pour les enfants à l'entrée au CP.
L'expérimentateur dispose de 2 cartes sur le verso desquelles sont collées des gommettes, toutes de la même couleur, 4 sur une carte, 3 sur l'autre. L'enfant peut retourner *une seule carte à la fois*, autant de fois qu'il le souhaite et doit dire ensuite combien il y a de gommettes en tout.
De 50 à 60 % des élèves ont réussi cette épreuve, soit « mentalement », soit en pointant des gommettes fictives sur la table, soit en comptant sur leurs doigts.

DOCUMENT N° 14 : EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE (d'après un document de l'I.N.R.P) *(distribué aux stagiaires)*

1 c. Évolution des objectifs et des pratiques pédagogiques des apprentissages numériques pour les 5-6 ans

Remarquons, à travers un bref historique, que les diverses instructions officielles associées à l'évolution des pratiques ont toujours, avec un certain retard il est vrai, pris en compte les résultats des recherches en mathématiques et en psychogénétique et qu'ainsi elles ont progressé.

• De 1887 à 1967

Dès sa création en 1887, l'école publique se veut « utilitaire et éducative ». Il faut assurer à l'enfant tout le « savoir pratique » dont il aura besoin dans sa vie, c'est-à-dire : **lire, écrire et compter**, comme on peut le voir dans l'extrait des instructions pédagogiques officielles de 1887. Le programme, reproduit ci-dessous, en est très exigeant.

	SECTION DES PETITS ENFANTS DE 2 A 5 ANS	SECTION DES ENFANTS DE 5 A 6 ANS
Calcul.	Familiariser l'enfant avec les termes un, deux, trois, quatre, cinq, moitié, demi ; l'exercer à compter jusqu'à 10. Calcul mental sur les dix premiers nombres.	Premiers éléments de la numération orale et écrite. Petits exercices de calcul mental. Addition et soustraction sur des nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. Étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart. Les quatre opérations sur des nombres de deux chiffres. Le mètre, le franc, le litre.

Traditionnellement, les nombres étaient présentés un à un et dans l'ordre de la comptine, d'abord de 1 à 9, puis de 10 à 19, etc.

Le modèle mathématique sous-jacent était l'axiomatique de Peano basée sur :

— l'idée de succession ;
— l'existence de nom, d'ordre et d'écriture des nombres.

Bien que dès 1923 les recommandations ministérielles préconisent un apprentissage progressif plutôt que concentrique « Mieux vaudrait moins apprendre mais bien retenir... avoir des souvenirs complets et bien ordonnés », les jeunes enfants sont des exécutants. Des bouliers de bois doivent servir de prétexte à leurs laborieuses « récitations ».

Quelques nouveautés sont introduites en 1945. Elles invitent à fonder les apprentissages « davantage sur les faits, sur l'observation personnelle ». C'est ainsi que sont introduites les « méthodes visuelles ». Chaque nombre apparaît comme étant une sorte de quantité concrétisée par une collection ayant une écriture et un nom unique. Ce sont des « constellations ». La méthode Herbiniaire-Lebert, la méthode Cuisenaire en sont des dérivés plus construits et très sophistiqués. Nous savons actuellement que certains de ces apprentissages menés de manière outrancière ont créé de graves handicaps. Ces techniques provoquèrent chez certains enfants des associations rigides et stéréotypées entre les supports utilisés et les réponses (longueur et cardinal, couleur et cardinal, etc.).

• De 1967 à 1986

Des travaux d'observation et d'expérimentation effectués dans des classes, à partir de 1967, aboutiront à la circulaire d'orientation publiée en 1977 par le Ministère. Cette circulaire affirme la prééminence de la compréhension dans les apprentissages et l'importance des « prérequis » pour l'acquisition de notions.

Le mot « nombre » n'y est même pas cité. L'accent est mis sur les activités prénumériques. Une interprétation abusive des travaux de Piaget qui lui-même ne se considérait pas comme pédagogue mais chercheur, ont fait pendant ces quinze dernières années bouder les apprentissages numériques à l'école maternelle.

En effet, c'est souvent en prenant pour prétexte ses travaux qu'on en est venu à :

— déprécier le rôle du comptage et de la suite ordinale ;
— déprécier les réussites précoces des enfants pour les activités numériques.

On se fixe alors comme objectif d'amener les enfants du niveau concret au niveau abstrait et l'on veut préparer les relations logico-mathématiques (sériation, itération, addition) relevant des fondements logiques du nombre.

Les activités proposées aux enfants sont souvent une transposition didactique de la théorie des ensembles. Bien que rigoureuses d'un point de vue mathématique, leur caractère formel interdisait la mise en place de véritables situations-problèmes adaptées aux enfants (ils n'étaient pas à même de voir le sens de leurs actions).

Partant du principe que l'usage de la comptine n'a aucune utilité avant la construction mathématique du nombre, l'usage de celui-ci était systématiquement évacué à l'école maternelle et au début du CP au profit d'apprentissages logiques (classement, rangement, correspondance terme à terme). Cette élimination des activités numériques (dénombrement, comptine, partage) était en fait un leurre puisque de toute façon certains enfants mettent en place ces compétences hors de l'école. Donc si l'on ne veut pas introduire un facteur de discrimination précoce entre les élèves, l'école doit prendre en charge ces acquisitions.

• A partir de 1986

La circulaire n° 86-046 du 30 janvier 1986 recommande de **« faire apprendre et exercer »** à l'école maternelle.

Par ailleurs, les diverses publications des spécialistes du développement cognitif citées précédemment (*cf.* p. 64) semblent réactiver l'engouement des apprentissages numériques à la maternelle.

Pour notre part, c'est l'article n°149 de R. Gelman intitulé « Les bébés et le calcul », paru dans *La recherche*, en novembre 1983, et relatant les performances de « bébés » américains qui nous a fait nous engager dans une recherche-action. Nous la menons au sein d'une équipe nationale dans le cadre de l'I.N.R.P. Elle est intitulée : « Apprentissages numériques chez les 5-8 ans et résolution de problèmes ».

Les situations d'apprentissages que nous allons proposer ici ne sauraient en rien faire état des travaux que nous avons entrepris dans ce cadre. Tout d'abord, ces recherches ne sont pas terminées et surtout la publication des résultats revient à l'équipe tout entière. Cependant, comme nous en faisons partie, nous ne pouvons pas nous défendre de ne pas en être imprégnés.

DOCUMENT N°15 : *(distribué au stagiaires)*

EN - Limoges

GRILLE: COMPÉTENCES NUMERIQUES en fin de grande section

Bilan et Perspective

A Connaissance de la comptine.

- "jusqu'à combien sais-tu compter?" [ ]
- récitation: résultat atteint 1er arrêt [ ] *

  erreurs . nombres sautés:..............................

  Y a-t-il besoin d'initier la comptine? oui | non
- redémarrage en cas de blocage oui | non

  résultat atteint 2ème arrêt [ ]
- passage de la dizaine après aide magistrale oui | non
- le maître compte et s'arrête l'enfant est-il capable de continuer? nombre arrêt inférieur à * oui | non

B Savoir compter et dénombrer. Objets à dénombrer.

- 1er niveau : 7 , 8 , 9 ?
  - Comptage — réussite : Totale [ ] / Partielle [ ] / Echec [ ]
  - "Combien y en a-t-il?" sait dénombrer oui | non

    avec recomptage [ ]

    sans recomptage [ ]
- 2ème niveau : 15 , 16 ?
  - Comptage — réussite : Totale [ ] / Partielle [ ] / Echec [ ]
  - "Combien y en a-t-il?" sait dénombrer oui | non

    avec recomptage [ ]

    sans recomptage [ ]

■ Qualité du comptage-dénombrement

	1°n	2°niveau
Visuel muet		
Visuel oral		
Moteur muet		
Moteur oral		
Pointe		
Déplace		

C Avec des dés

■ Observer un dé
(perception globale 2 à 3 secondes)

Faces reconnues:.................. Nombre limite

■ Créer une collection de cardinal donné (entre 1 et 6) oui | non

■ Comparer des cardinaux:

Trois niveaux de difficultés
A chaque tirage, une collection-témoin de cubes sera associée au nombre tiré.
Maître et élève jouent alternativement.

		R	Echec
1er niveau	$x \leq 6$		
2ème niveau	$y \leq 10$; 12		
3ème niveau	$z \leq 20$		

Observation de la méthode de comparaison des deux collections:

Utilise le nombre

Utilise une autre méthode
ex: alignement, correspondance

D Créer une collection, le cardinal étant donné.

■ 1er niveau: ■ "donne-moi 8 cubes"

Totale
réussite Partielle
Echec

Procédure non standard ....
(Si erreur: on corrige puis on fait oraliser)

■ "j'ajoute un cube: combien y en a-t-il?"

si recomptage, explications...
était-il nécessaire
de recompter?

Surcomptage **
Recomptage
Echec

** si recomptage, 2ème essai avec 6 cubes. L'enfant est-il capable de s'adapter au surcomptage?

■ 2ème niveau: ■ "donne-moi 14 cubes" réussite Totale / Partielle / Echec

Procédure non standard ....
(Si erreur: on corrige puis on fait oraliser)

■ "j'enlève un cube: combien y en a-t-il?"

si reçomptage, explications... était-il nécessaire de recompter?

Décomptage ** / Recomptage / Echec

** si recomptage, 2ème essai avec 12 cubes. L'enfant est-il capable de s'adapter au décomptage?

E Objectivation et stabilité de la performance.

■ "Rappelle-moi jusqu'à combien tu sais compter?" (a)

■ "Récite-moi une nouvelle fois les nombres que tu connais" (b)

De la comparaison de a) et b), on notera, s'il y a lieu:

sous-estimation / estimation correcte / sur-estimation

F Nombre outil.

Chaque évaluateur disposera d'une bande de papier séparée en 8 cases.

■ "Va chercher, en une seule fois, autant de cubes que de cases: pas un de plus, pas un de moins"

- 1er essai: aucune aide

réussite Totale / Partielle / Echec

-> Si réussite totale: "Comment as-tu fait?"
-> Si réussite partielle ou échec: aide magistrale puis recommencer en réduisant la bande à 7 cases.

réussite	oui	non

G Calculer.

".Prends trois cubes.
.Mets-les dans la boîte.
.Combien y a-t-il de cubes dans la boîte?
.Prends deux (autres) cubes.
.Combien as-tu de cubes en tout?"

réussite Totale / Partielle / Echec

Oralisation de la méthode: Recompte tout / Surcompte / Autre

DOCUMENT N°16 : QUESTIONNAIRE SUR LES MATHEMATIQUES *(distribué aus stagiaires).*

1) Quelles sont les matières que tu préfères à l'école?
celles que tu aimes le moins?
et à l'extérieur de l'école?
Qu'est-ce que tu fais les jours de congé?
Y a-t-il autre chose qui te plaît, que tu aimerais faire?

2) En quoi tu est fort à l'école ou hors de l'école? Qu'est-ce que tu sais bien faire?

3) Qu'est-ce que tu aimes en maths? Qu'est-ce que tu n'aimes pas? Qu'est-ce qui te paraît facile? difficile?

4) Est-ce qu'il y a des métiers où on se sert des maths?
Quel métier aimerais-tu faire plus tard?
Est-ce que tu sais quelles études il faut faire pour cela?

5) Cette année,es-tu content de toi?
es-tu content de ton travail?
as-tu fait des progrès?
Est-ce que tu comprends mieux?
Est-ce que tu travailles mieux? plus?

6) Qu'as-tu fait depuis le début de l'année en maths?
(Faire expliciter ce qui est dit ; ex : pour les problèmes, donner un exemple ; pour les opérations, dire lesquelles)

7) Qu'as-tu fait avec nous en petits groupes?
Est-ce que cela t'a aidé?
Penses-tu qu'il y a eu assez de séances? Devrait-il y en avoir plus? moins?
Penses-tu qu'il vaut mieux que l'aide soit faite par le maître de la classe ou par un autre maître?

8) Qu'est-ce qui t'a paru le plus facile? le plus difficile?
Qu'est-ce que tu as aimé le plus? le moins?

9) D'après toi, quel est le plus important à faire pour être bon en mathématiques? on peut suggérer :

- de bien écouter le maître
- de bien apprendre ses leçons
- de se faire expliquer ce qu'on n'a pas bien compris
- de faire beaucoup d'exercices ou de problèmes
- de bien tenir son cahier
- autre

10) Si tu n'as pas bien compris, que fais-tu? on peut suggérer :

- je demande au maître de réexpliquer
- je demande à un camarade
- je demande à mes parents ou à mes grands frères et grandes soeurs
- je révise le cours
- autre

11) Que fais-tu quand un camarade explique ce qu'il a trouvé, ce qu'il a fait? Est-ce que ça t'intéresse? Lui poses-tu des questions?
Est-ce que tu aimes expliquer ce que tu as trouvé?
Préfères-tu que ce soit le maître qui explique?

12) Est-ce que tu vérifies les résultats que tu trouves dans un problème en classe? pendant un contrôle?
Comment? en refaisant les calculs? en cherchant par une autre méthode? est-ce que c'est utile?

13) Comment fais-tu pour chercher un exercice de mathématiques?
est-ce que tu essaie de te souvenir de la leçon?
est-ce que tu cherches dans ton cahier?
est-ce que tu essaies de te souvenir d'un exercice que tu as déjà fait et qui lui ressemble?
est-ce que tu cherches seul ou avec des camarades?
quand tu ne trouve pas tout de suite, tu cherches pendant combien de temps?

14) Arrive-t-il qu'un problème de mathématiques ait plusieurs solutions? jamais quelquefois souvent
Arrive-t-il qu'il y ait plusieurs méthodes pour trouver la solution?
jamais quelquefois souvent

PROBLEMES

1) Fais les opérations suivantes:

63	56	108
x 38	x 52	x 29

2) Donne cinq écritures multiplicatives différentes du nombre 60

3) Dans une plantation, il y a 13 rangées de 14 sapins ; combien y- a- t-il de sapins?

4) Pierre a acheté 23 bouquets de 12 fleurs;
Combien a-t-il acheté de fleurs?
Chaque bouquet coûte 35F, combien a-t-il payé?

CHAPITRE NEUF : L'APPRENTISSAGE DES NOMBRES DECIMAUX

Ce chapitre est l'occasion, à partir de comparaison de progressions (manuels scolaires ou documents fournis par les P.E.N.), de réfléchir à nouveau sur la théorie de Régine Douady : dialectique outil-objet, jeux de cadres (voir (34)). Il nous a paru là encore nécessaire de commencer cette étude à partir d'activités mathématiques permettant de rappeler certaines notions concernant les différents catégories de nombres et leurs écritures.

A) Quelques situations sur les décimaux (voir document n°17, page 75)

Les buts de ces situations sont :
- d'exhiber certaines images mentales (notamment erronées, en particulier celles liées aux écritures, à l'ordre, à la mesure),
- de justifier certains rappels mathématiques sur les différents ensembles de nombres,
- de poser les problèmes soulevés dans le chapitre suivant.

B) Une liste (non exhaustive) de problèmes liés à l'enseignement des nombres décimaux

Nous nous sommes inspirés ici des ouvrages suivants :
- Problèmes de l'enseignement des décimaux (36), G. Brousseau

- Problèmes de didactique des décimaux (37), G. Brousseau
- L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire (38) G. et N. Brousseau
- Aides pédagogiques pour le CM - Les décimaux - APMEP (32)
- Cahier de didactique des mathématiques n° 24 - Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège - M.J. Perrin-Glorian

Les problèmes posés sont les suivants :
-1) Quelle(s) définition(s) peut-on donner d'un décimal, d'un rationnel, d'un réel...?
2) A quoi servent les nombres décimaux ?
3) Quelles sont les différentes écritures d'un décimal, d'un rationnel, d'un réel ...?
4) L'ordre dans D
5) Comment donner un sens aux opérations sur les décimaux ?
6) Quelles sont les erreurs faîtes par les élèves sur les décimaux (voir (39) (40) (41) et (42)).

Les P.E.N avec les stagiaires dressent une liste non exhaustive de problèmes à traiter lors de la mise au point d'une progression sur les décimaux afin d'amorcer la réflexion sur les différentes progressions proposées pour leur enseignement. Seules les questions 1) 2) 3) et 5) ont une réponse à ce stade.

C) Analyse comparée de progressions et manuels

Les progressions analysées sont les suivantes :
- manuel Maths et calcul Eiller - Hachette
- manuel Bati-Maths
- manuel Objectif calcul - Hatier
- manuel activités mathématiques - Nathan
- progression de R. Douady et M.J. Perrin-Glorian dans Aides pédagogiques pour le CM- tome "décimaux"
- progression de G. Zimmermann paru dans la revue : Journal Des Instituteurs, Nathan
- progression "les drapeaux" - I.N.R.P.
- progressions proposées par le numéro spécial de grand N - CM

Le but était de préciser les avantages et inconvénients de chaque progression, d'en préciser les points de vue, les cadres utilisés (fonctions numériques, repérage, mesure, fractions, partage...), de répondre aux problèmes posés en 2).

D) Etudes centrées sur la dialectique outil-objet et les jeux de cadres

Il s'agit d'une présentation par le P.E.N. de ces notions à partir des travaux effectués par R. Douady sur les décimaux (progression suivie) et en particulier de quelques temps forts :
- fractions, opérations sur les fractions en liaison avec mesure des longueurs et des aires,
- activités autour de périmètre et aire, nombres décimaux,
- agrandissement de puzzle (G. Brousseau).

"Pour mettre en évidence la dialectique outil-objet, Régine Douady analyse les différentes phases d'un apprentissage par résolution de problèmes.
L'objet d'apprentissage est fixé.
Un problème est donné. L'énoncé doit avoir du sens pour les élèves qui ont les moyens de reconnaître un bonne réponse et sont capables d'engager une action pour répondre au problème. Ces conditions sont nécessaires pour que l'élève puisse s'engager dans la résolution du problème.
Le tableau ci-dessous met en correspondance l'étape de la construction d'un savoir et le statut de la connaissance dans chaque étape.

Etape	*Remarque*	*Statut du savoir*
Construction du savoir dans un cadre donné	*L'élève sait mettre en oeuvre certaines procédures, mobilise des connaissances*	*outil explicite "ancien"*
Changement de cadre *Recherche de procédure de résolution du problème : action, formulation,justification*	 *Essais, adaptation, changement de point de vue. Formulation de conjectures* *Les conjectures sont objets de débats.* *Mise en oeuvre de procédures*	*outil implicite "nouveau"*
Explicitation *Institutionnalisation locale*	*Validation ou rejet*	*objet pour certains éléments explicités*
Institutionnalisation	*Issue du travail collectif* *Se pose le problème de l'appropriation individuelle*	*objet "nouveau"*
Familiarisation	*Exercices permettant la pratique ce de qui a été institutionnalisé*	*outil explicite*
Réinvestissement	*Dans une situation nouvelle le maître cherche à connaître le "degré de résistance", met à l'épreuve ce qui a été institutionnalisé, par ex. dans une situation complexe l'objectif sera de coordonner les savoirs appris séparément*	*outil explicite* *Le "nouveau" a pris statut d'"ancien"*

Ce schéma suppose :
- que le problème ait au moins deux cadres :
(exemple : je cherche des rectangles dont le périmètre est fixé
je cherche des nombres dont la somme est donnée),
- qu'avec le savoir de l'élève le problème ne puisse être totalement résolu directement,
- que pour avoir la réponse l'outil dont l'apprentissage est visé soit le bon."

Ce texte (en italiques), rédigé par Nicole Gaudelet est extrait des "actes du colloque Inter-IREM des P.E.N d'Angers", 1987.

DOCUMENT N° 17 : QUELQUES SITUATIONS PERMETTANT DE POSER QUELQUES PROBLEMES A PROPOS DES DECIMAUX ET DE LEUR ENSEIGNEMENT *(distribué aux stagiaires).*

1) Mesurer la longueur d'une feuille de papier de format 21 x 29,7 en prenant pour unité la largeur.
Pourquoi parle-t-on de format A4 ?
2) Vers quel nombre converge la suite définie par :
6
6,6
6,66
6,666
6,6666
6,66666
....
6,666666.....6666...
3) Ecrire autrement le nombre 9,999999.....99999....

4) indiquer par oui ou par non si le nombre considéré appartient ou non à l'ensemble correspondant :

	Naturels N	entiers Z	décimaux D	rationniels Q	réels R
1 / 3					
4 / 5					
2					
0,272					
22 / 7					
14/2					
-6,5					
144					
1,28 + 5,85					

5) Effectuer la division 19 par 28 en poursuivant après la virgule. Que remarquez-vous ? Le nombre x = 19/28 est-il rationnel, décimal ?

6) Rayer les égalités fausses :

= 3,14
1 / 3 = 0,3333
1 / 20 = 0,005

= 22 / 7
1 / 5 = 0,2
1 / 100 = 0,01

= 3,1416
2 = 1,414
4 / 3 = 2 / 1,5

1 / 2 = 0,50
11 / 33 = 222 / 666

CHAPITRE DIX : ANALYSE DE NORMALIENS EN SITUATION DE CLASSE

En fait il s'agit ici de la préparation à une épreuve de l'examen. Un élève-instituteur fait une leçon, candidat doit analyser cette leçon avec lui et lui donner, si besoin, des conseils. C'est évidemment ur application directe de ce que nous avons fait jusque là. Nous avons utilisé pour cette activité deu films tournés par Jeanne BOLON (E.N. de Versailles).

DEUXIEME PARTIE

QUELQUES ACTIVITES PROPOSEES EN FORMATION INITIALE

Nous joignons au texte précédent la liste d'une série d'activités faites lors d'un enseignement en formation initiale (30 heures), intitulé "*Ateliers de didactique*", à des élèves-instituteurs de 2ème année (cours optionnel).
Il s'agit ici donc de 10 séances de 3 heures. Certaines activités effectuées sont déjà décrites dans le cours précédent, nous présentons ici d'autres situations :
- exposés d'articles ou de travaux de didactique
- activités portant sur les jeux de cadres et sur la dialectique outil-objet
- analyse de cas : observation (type clinique) d'élèves résolvant un problème donné
- analyse de protocole
- analyse historique : évolution des programmes sur une notion
- analyse et / ou mise au point de questionnaires et de tests d'évaluation sur une notion donnée
- analyse d'erreurs à partir de travaux d'élèves sur un problème donné
- mise au point, test (séquence filmée) et comparaison de scénarios sur un apprentissage très limité (moins de 45 mn) dans le temps.

Voici la description de quelques unes de ces activités : signalons que nous nous sommes très souvent inspirés d'idées exposées par des collègues P.E.N., en particulier dans les actes des colloques INTER-IREM de la COPIRELEM.

I) EXPOSES D'ARTICLES OU DE TRAVAUX DE DIDACTIQUE

Les élèves-instituteurs doivent exposer un article ou une partie d'ouvrage devant leurs pairs, en donner une analyse personnelle et faire un compte-rendu écrit de cet exposé (ce travail intervient dans l'évaluation).
Depuis 1989, tous nos élèves-instituteurs en formation initiale (1ère et 2ème année) doivent faire un exposé (didactique ou autre, voir la liste ci-jointe, document n°1). Notons que cette activité prend beaucoup de temps (entre 1/4 et 1/5 du temps consacré à la formation) mais qu'elle s'avère très profitable à long terme. Cette expérience ayant pu être menée sur un groupe de normaliens pendant 2 années consécutives, nous constatons une très nette amélioration dans la qualité de l'exposé, dans la compréhension du sujet, dans la clarté de la présentation et dans la pertinence des remarques personnelles. Il faut toutefois tempérer cette appréciation par le fait que les élèves-instituteurs ne semblent pas toujours apprécier ce travail, ils trouvent cela difficile et prenant beaucoup de temps.
L'objectif poursuivi est multiple, en particulier nous visons un apprentissage "de la lecture" des articles de didactique, un apport d'informations sur les recherches en cours, une introduction au débat sur des sujets conflictuels (c'est le cas notamment des exposés sur les ouvrages de Nymier portant sur les conceptions des enseignants).

DOCUMENT N° 1 : LISTE DES SUJETS D'EXPOSES PROPOSES AUX ELEVES-INSTITUTEURS *(distribué aux stagiaires)*

Exposés portant sur des travaux de didactique :

- Quel est l'âge du Capitaine, revue Grand N, numéro spécial CE, IREM de Grenoble
- Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège, cahier de didactique des mathématiques n° 24 de l'IREM de Paris VII, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN
- Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté, Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Denis BUTLEN, Michèle LAGRANGE
- Calcul Mental, calcul rapide, une expérimentation du CP au CM2, brochure n°78 de l'IREM de Paris VII, Denis BUTLEN, Monique PEZARD
- A propos de l'enseignement de la proportionnalité, cahier de didactique des mathématiques n° 20 de l'IREM de Paris VII, Monique PEZARD
- La multiplication à l'école élémentaire, analyses didactiques, histoire des programmes, analyses de manuels, cahier de didactique des mathématiques n°19 de l'IREM de Paris VII, Denis BUTLEN

Exposés portant sur des travaux de psychologie :

- Les bébés et le calcul, Rachel GELMAN, La Recherche n°149, novembre 1983.
- La conservation et ses problèmes, chapitre 4 de "les enfants et le nombre", M. FAYOL.
- Les modes de relations aux mathématiques, J. NYMIER

Exposés portant sur des cursus d'enseignement (entre autres comptes-rendus d'innovations pédagogiques) :

- ERMEL Maternelle, Etude des situations proposées sous les rubriques : "des nombres pour comparer, des nombres pour mémoriser, des nombres pour partager, des nombres pour anticiper".
- Progressions proposées par "Objectif calcul" (Hatier, manuels scolaires), sur les thèmes suivants : la soustraction au CE, les décimaux au CM, la division du CE2 au CM2.
- "Construction de polyèdres tronqués", Aides pédagogiques pour le CM, tome géométrie, APMEP, revue ELEM Math VII.

- "Activités sur les pavages", Aides pédagogiques pour le CM, tome géométrie, APMEP, revue ELEM Math VII.
- "La course au trésor", Aides pédagogiques pour le CM, tome géométrie, APMEP, revue ELEM Math VII.
- "Combien de grains de riz dans un kilogramme de riz", revue Grand N, numéro spécial CM, IREM de Grenoble.
- "Fonctions numériques au CM", ERMEl CM, chapitres B1 et B2.
- "Découpages de carrés en carrés", revue "Nombres à l'école élémentaire", n°46 de l'IREM de Paris VII.

II) ACTIVITES D'ORDRE PLUTOT MATHEMATIQUE PORTANT SUR LES JEUX DE CADRES

Le but de ces activités est de faire résoudre par les élèves-instituteurs un problème pouvant avoir des solutions dans un ou plusieurs cadres mathématiques (voir (35)), de faire prendre conscience de l'existence de ces cadres et de leur rôle dans la recherche d'une solution. En voici un exemple :

"*La boîte du patissier*" : (d'après une idée de M.L. Pelletier et C. Houdement - Activités géométriques au CM - Aides pédagogiques - voir (18), voir aussi les actes du stage national de la COPIRELEM de CAHORS, 1990, (45)).

Organisation matérielle : la résolution est faite par groupe de 4, un membre du groupe est observateur, il doit noter les phases et étapes de la démarche suivie par les autres membres ainsi que les échanges effectués afin d'en faire le compte-rendu au moment de la mise en commun des travaux de groupe.

L'activité : le document (n°2) ci-joint est distribué aux élèves-instituteurs. Le temps consacré est d'environ 3 heures.

quelques remarques sur les procédures et cadres utilisés :
Nous constatons que les normaliens travaillent dans les cadres suivants :

cadre physique
cadre géométrique (sans mesure)
cadre géométrique (avec mesure)
cadre algébrique
cadre numérique

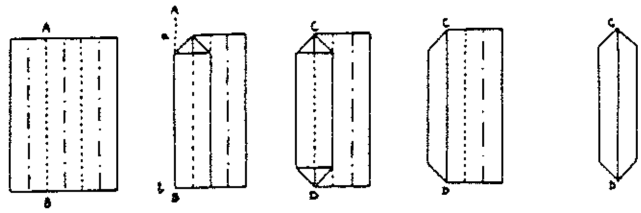
En particulier, les cadres physiques et géométriques permettent une validation et/ou une initialisation des calculs effectués soit dans le cadre algébrique, soit dans le cadre numérique.
Un certain nombre de normaliens n'arrivent pas à produire d'équations et se limitent à vérifier des hypothèses géométriques à l'aide de calculs numériques et en construisant effectivement la boîte correspondante.
Cette activité permet aux P.E.N. de dégager ou de faire dégager l'aspect outil de certaines notions mobilisées ou non par certains pour résoudre le problème. C'est l'occasion ainsi de redonner un sens au calcul algébrique ou à la résolution d'équations. On a là encore une double institutionnalisation (mathématique : calcul algébrique, équation, inconnue, proportionnalité) et didactique.

DOCUMENT N° 2 : EXTRAITS DE ACTIVITES GEOMETRIQUES AU CM. AIDES PEDAGOGIQUES POUR LE CM - COPIRELEM - APMEP

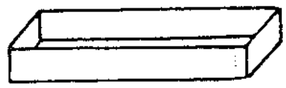
LA BOITE DU PATISSIER

Construire une boîte en suivant les indications ci-dessous :

bords réels de la feuille
pli en creux
pli en relief
par rapport à l'observateur à chaque étape.



Construire selon le même principe une boîte à fond carré. Construire la plus grande boîte possible dans une feuille de papier 21 × 29,7 à fond carré.



Indications pédagogiques

Variation d'un des paramètres :

Varation des dimensions de la feuille de papier,
— dimensions pour obtenir une boîte à fond carré de côté donné ?
— une boîte de dimensions quelconques peut-elle être obtenue ?
— peut-on utiliser une feuille quelconque ?
— comparaison des dimensions des boîtes obtenues avec une feuille 21 × 29,7, une demi-feuille, un ouart de feuille.

Variation du pliage,
— boîte à fond sans pli,
— nombre minimal de bandes pour construire une boîte ?
— constructions obtenues avec un nombre impair au départ (5 bandes).

Variation de plusieurs paramètres :

• Forme et pliage,
— peut-on réaliser une boîte plus plate ? quand on diminue de motié la hauteur, de combien augmente la surface du fond ?

• Dimensions et pliage
— relations entre les dimensions de la feuille pour obtenir une boîte à fond carré, de côté a, en fonction du nombre de bandes ?

• Forme, dimensions, pliage
— construire une boîte cubique,
— construire une boîte à dimensions données.

Autres pistes :

— constructions de couvercles,
— constructions de boîtes gigognes.

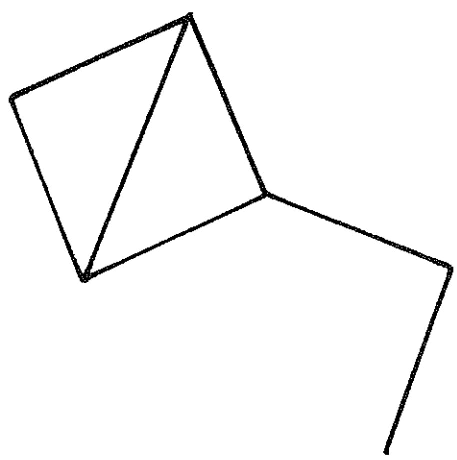
Au cours de toutes ces activités les enfants devraient pouvoir, s'ils le désirent, passer de la boîte construite à son développement plan et vice-versa par démontage ou remontage. C'est ainsi que les prévisions sur les développements peuvent être immédiatement contrôlés par montage. L'identification des éléments de la boîte sur son patron correspond bien aux objectifs du programme du CM. en ce qui concerne la passage de l'espace au plan. Notons que les techniques de pliage relèvent des Travaux Manuels.

III) ANALYSE DE SITUATIONS DE COMMUNICATION

Il s'agit ici d'activités de géométrie portant sur la construction et la reconnaissance des figures planes ou de pavages.
Le scénario est le suivant :
1) travail par groupe : chaque groupe dispose d'une figure plane (voir document n°3) ou d'un pavage (voir documents n°4), il doit rédiger un message (comportant au plus 50 mots ou 5 lignes dans le cas des pavages), sans dessin, permettant à un groupe récepteur de reproduire la figure ou de retrouver le pavage corespondant dans la série proposée. Chaque groupe joue le rôle de récepteur et d'émetteur.
2) comparaison des messages et productions, analyse des termes employés, précision du vocabulaire, définition de symétrie axiale, rotation, translation, segment...
3) analyse a posteriori du déroulement de l'activité, des interventions du P.E.N., des écarts entre productions envisagées et produites, des cheminements suivis par les groupes. Ceci est une stratégie habituelle. Pour amener les normaliens à réfléchir au déroulement qu'ils viennent de vivre, le P.E.N. les amène à analyser leurs productions mais aussi sa propre action (interventions, écarts entre prévisions et productions effectives, régularités observées au cours des années...). Cette forme de travail semble être une méthode privilégiée pour mener une double institutionnalisation. Elle comporte toutefois le risque de présenter cette forme de travail du PEN comme un modèle.
4) analyse de l'intérêt et des limites des situations de communication.

DOCUMENT N° 3 : CONSTRUCTIONS DE FIGURES PLANES, *(distribué aux stagiaires).*

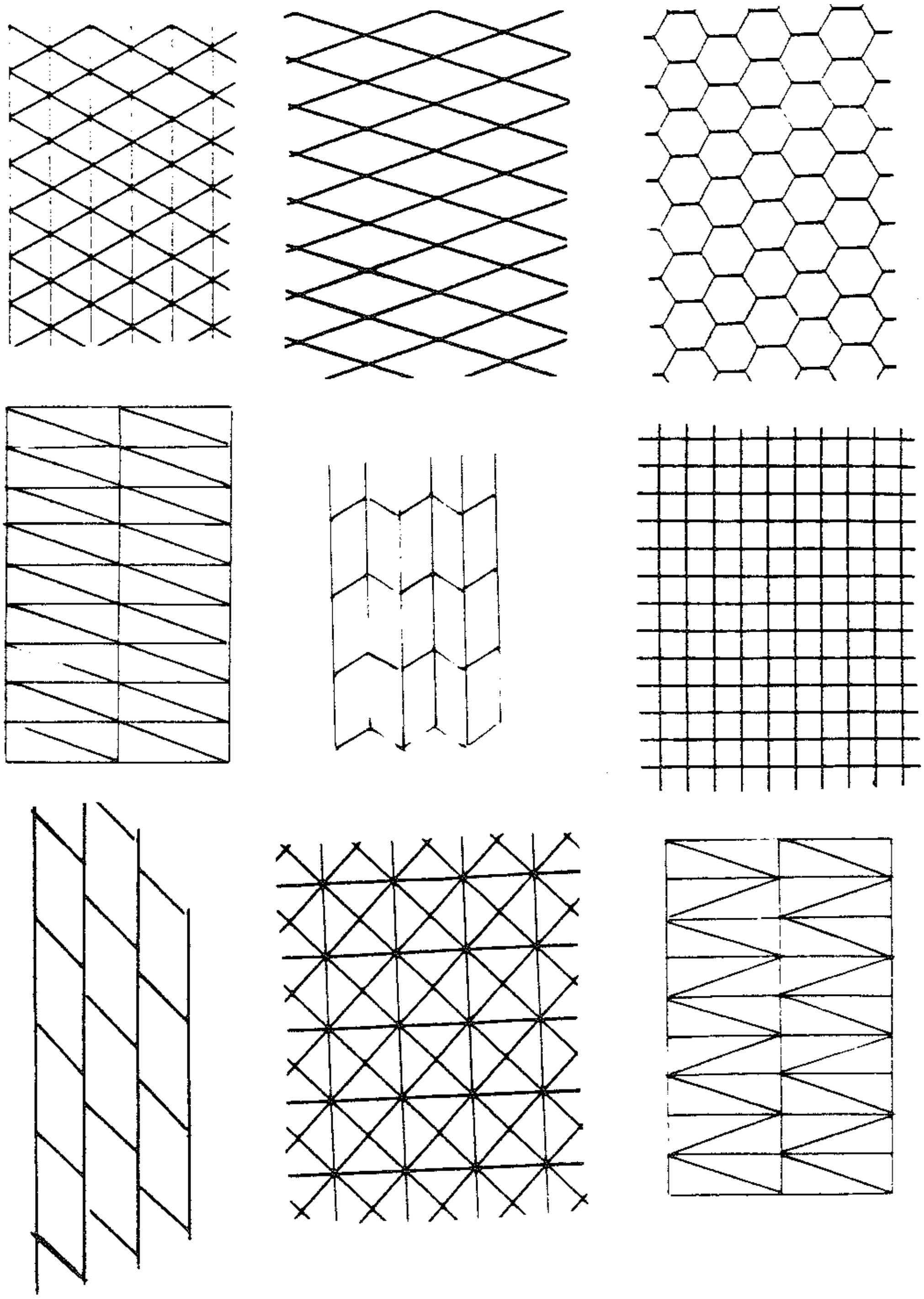
1) Ecrire un message permettant de reconstruire la figure ci-contre.

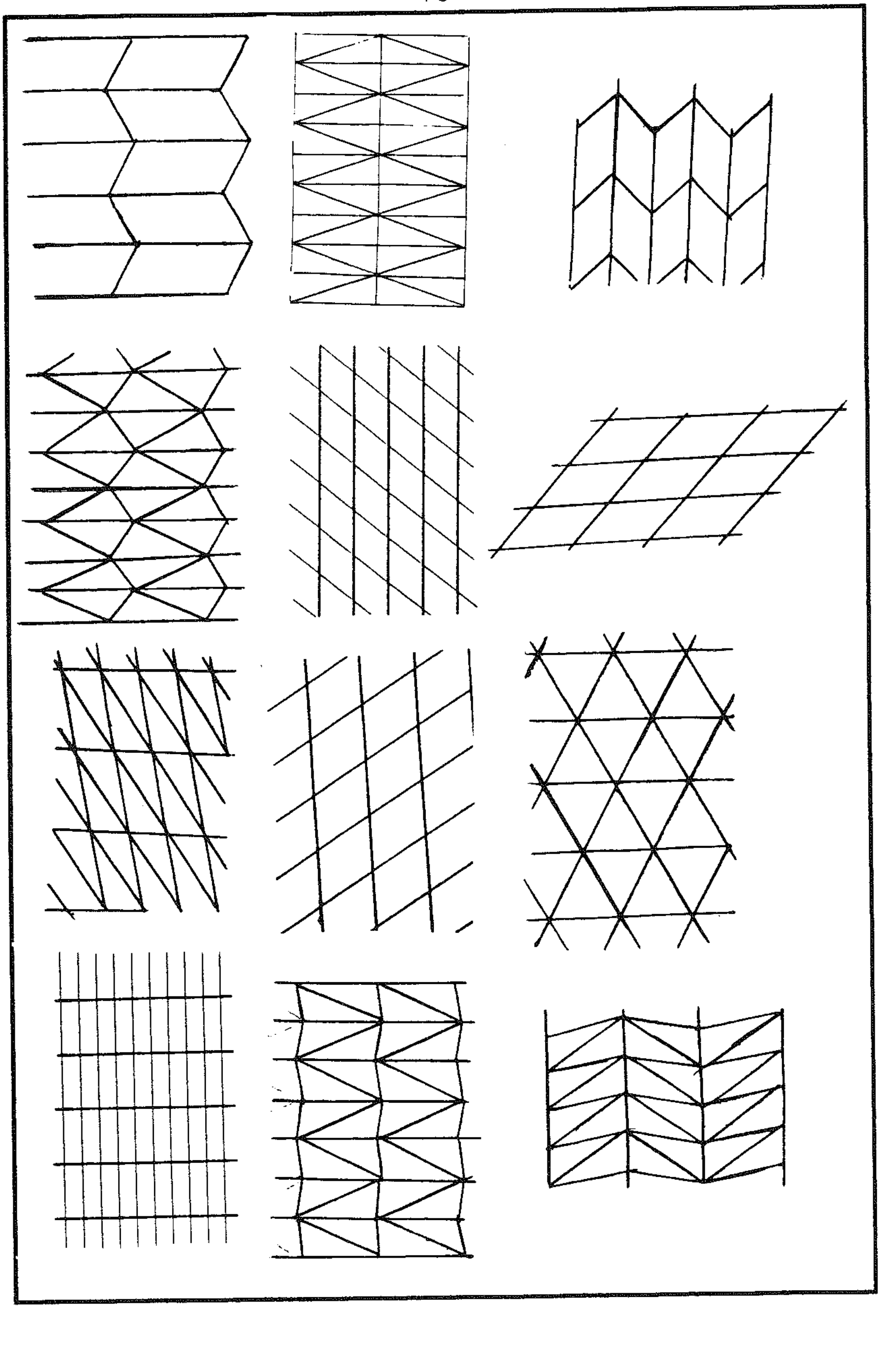


2) Dessiner un parallélogramme dont un côté mesure 5 cm et une diagonale 10 cm.
Ecrire un message sans utiliser le mot parallélogramme qui permette de le reconstruire.
Même question avec un rectangle.

3) Choisir un pavage parmi les dessins du document n°4, continuer ce pavage, en le reproduisant sur une feuille blanche non quadrillée, dont les bords sont découpés de façon irrégulière. Ecrire un message permettant au recepteur de déterminer, parmi ceux du document 4, le pavage correspondant.

DOCUMENTS N°4 : TYPES DE PAVAGES *(distibués aux stagiaires)*





IV) ANALYSE DE CAS, OBSERVATION CLINIQUE D'ELEVES

Nous proposons aux normaliens l'activité suivante :
- analyse à priori d'un problème (voir la liste de problèmes ci-jointe)
- mise au point par groupe de 2 élèves-instituteurs d'un scénario de déroulement mettant en jeu 1 adulte et 1 élève (texte précis des consignes et interventions éventuelles)
- passation, l'élève résout le problème, un normalien aide éventuellement l'élève, un autre normalien observe les deux premiers
- analyse de l'observation, étude des décalages entre l'analyse a priori et la passation effective.

Cette analyse porte à la fois sur l'élève et sur l'adulte en train de l'interroger.

Liste de problèmes observés :

- "Le championnat de football" (voir chapitre deux)
- "le problème des oeufs" (voir 40), " *dans une boite on range six oeufs, dans un carton on range six boites, dans une caisse on range six cartons. Combien y a-t-il d'oeufs dans 4 caisses, 5 cartons, 2 boites ?*
Combien faut-il de caisses, cartons et boites pour ranger 2051 oeufs ?"
- "le problème de la tirelire" (I.N.R.P)
- " le problème des allumettes" (I.N.R.P.)
- ...

V) ANALYSE ET CONSTRUCTION DE QUESTIONNAIRES

Cette activité a été faite à propos de l'étude des élèves en difficulté en mathématique et des tests d'évaluation nationaux CE2/6e.
Il s'agit de l'étude de 3 questionnaires différents :

- le premier porte sur la numération au CE2 (évaluation nationale 1989 et 1990), il s'agit d'analyser ce que permet de tester ces exercices, de prévoir les erreurs attendues (voir (43))
- le second porte sur les nombres décimaux (évaluation nationale 6e), il s'agit ici de reprendre l'analyse précédente mais aussi de compléter ce test afin de mieux tester les savoirs et savoir-faire des élèves de fin CM2 - (voir (44) et (40))
- le troisième porte sur l'analyse d'un questionnaire et des réponses correspondantes, mise au point par les auteurs lors d'une recherche sur les élèves en difficulté de CE2 (voir(34)). Cette troisième étude a deux objectifs :
  - d'une part, étudier un questionnaire de type méta-mathématique,
  - d'autre part, réfléchir sur les conceptions des élèves et des enseignants sur les mathématiques et leur enseignement.

C'est l'occasion d'un débat, parfois passionné, sur ces points.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Angers - 1987 - Contribution de S. GAIRIN-CALVO
(2) Actes du colloque des P.E.N. (Inter-Irem) de Rouen - 1988 - Contribution Hervé.PEAULT, IREM de Haute Normandie
(3) Thèse de 3ème cycle de didactique des mathématiques : une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves-instituteurs - Monique PEZARD - IREM de Paris VII.
(4) Actes de la 1ère Université d'Eté des P.E.N. - Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire - Olivet - juillet 1988 - IREM de Bordeaux
(5) Film du CNDP : "Qui dira vingt ?"
(6) ERMEL CM - apprentissages mathématiques à l'école élémentaire INRP - éditions HATIER
(7) Représentations et didactique du sens de la division - G. BROUSSEAU - extrait de Doctorat d'état : théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques - Université de Bordeaux 1
(8) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques - R.D.M. - vol. 7.2. (Recherche en Didactique des Mathématiques) - G. BROUSSEAU
(9) M. ARTIGUE et R. DOUADY : la didactique des mathématiques - note de synthèse - Revue Française de Pédagogie n°76
(10) "Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire" - thèse de 3ème cycle - université de Paris VII - IREM de Paris VII - D. BUTLEN.
(11) "Calcul mental, calcul rapide" - Brochure n°78 de l'IREM de Paris VII - Denis BUTLEN- Monique PEZARD.
(12) "Calcul mental, calcul rapide et résolutionde problèmes multiplicatifs", article de D. BUTLEN et M. PEZARD - Grand N n°47 - IREM de Grenoble
(13) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple les structures additives - G. VERGNAUD - Grand N n°38
(14) Matériel PLOT n°1 et n°2 - IREM d'Orléans
(15) "Interactions espace-plan"- actes du stage national de Cahors : "Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques"- contribution de D.BUTLEN et M.PEZARD.
(16) ERMEL CE - apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - INRP - HATIER
(17) Aides pédagogiques pour le CE - COPIRELEM - APMEP
(18) Aides pédagogiques pour le CM - COPIRELEM - Géométrie - APMEP
(19) A propos de l'enseignement de la proportionnalité - M. PEZARD - Cahier de didactique des mathématiques n°20 - IREM Paris VII
(20) Quelques concepts, quelques généralités et quelques références - Collectif - cahier de didactique des mathématiques n°5 - IREM Paris VII
(21) De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle - Régine DOUADY - cahier n°6 de didactique des mathématiques.
(22) Une introduction à la didactique des mathématiques - Aline ROBERT - cahier n°50 de didactique des mathématiques.
(23) L'enfant et le nombre - M. FAYOL
(24) "Compter à l'école maternelle. Oui. Mais..." R. BRISSIAUD - APMEP - bulletin n°
(25) "Les bébés et le calcul" - Rachel GELMAN - La recherche n°149 - novembre 1983
(26) "Apprentissages mathématiques" - ERMEL/INRP - GS de maternelle
(27) "Dossier : le nombre" - INRP - Journal des Instituteurs.
(28) "Comptine, comptons"-INRP.
(29) "Les wagons"-INRP.
(30) "Les matoeufs"-INRP.
(31) G. Guitell : " Histoire des numérations".
(32) "Contez-nous comment vous comptez"-INRP.

(33) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté - cahier de didirem n°5 - M.J. PERRIN-GLORIAN- D. BUTLEN - M. LAGRANGE - Université de Paris VII

(34) Rapport de recherche provisoire : "Essais d'analyse et de remédiation-Elèves en difficulté au CE2" - D. BUTLEN - M. PEZARD.

(35) R. Douady : jeux de cadres et dialectique outil-objet - Recherche en didactique des mathématiques n° 7 - 2 - La Pensée Sauvage.

(36) Problèmes de l'enseignement des décimaux - R.D.M. - vol.1.1 - G. BROUSSEAU

(37) Problèmes de didactique des décimaux - R.D.M. - vol. 2.1 - G. BROUSSEAU

(38) L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire - G. et N. BROUSSEAU- IREM Bordeaux - I

(39) Aides pédagogiques pour le CM - "Les décimaux" - COPIRELEM - APMEP

(40) Cahier de didactique des mathématiques n° 24 - Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège - M.J. PERRIN-GLORIAN.

(41) G. GRISVARD et F. LEONARD - Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs - Bulletin APMEP n°327-février 1981

(42) Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux : G. GRISVARD et F. LEONARD - Bulletin APMEP n°340 - septembre 1983.

(43) Evaluation nationale CE2 - livret de l'élève et du professeur - 1989

(44) Evaluation nationale 6e - livret de l'élève et du professeur - 1989

(45) Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - actes du stage national de Cahors organisé par la COPIRELEM - diffusé par l'IREM de Paris VII.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs

AUTEUR (S) :

Butlen Denis – Pezard Monique

RESUME :

Les auteurs relatent une formation effectivement réalisée pour des candidats « IMF » en ne retenant que la partie didactique de ce qu'ils ont organisé. Dans une première partie, nous présentons des activités proposées en vue de la formation en didactique des mathématiques des futurs istituteurs - maîtres -formateurs. Ces activités concernent différents thèmes mathématiques.
Dans une seconde partie, nous proposons quelques activités de formation initiale en didactique des mathématiques

MOTS CLES :

Formation en mathématiques des professeurs d'école - enseignement de la didactique

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1991
ISBN : 2-86612-156-2