

**UN PROJET LONG D'ENSEIGNEMENT
(ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE - LICENCE EN FORMATION
CONTINUÉE)**

Par A. ROBERT

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ - PARIS VII

Plan du cahier :

Conception d'un enseignement

I Questions préalables

*** sur le public**

- acquis antérieurs et cadres préférentiels (prétests dépouillés en termes de blocs s'il le faut), homogénéité ou non
- âge (possibilités méta ou non)
- motivations (hétérogènes, liens avec un certain concret, ou littéraires, ou carrières...), contrats possibles, spécificités éventuelles (échec, intérêts spécifiques ou connaissances spécifiques)

*** sur les contenus**

- quels types de concepts
- existences de méthodes pour certains secteurs (plus ou moins développables)
- grands types de problèmes, questions générales
- quelles ressources côté histoire
- quelles ressources côté informatique

*** sur les contraintes**

- le temps (présence scolaire, durée et découpage, travail individuel à la maison ou non)
- locaux (amphithéâtre, salles...)
- l'évaluation (de qui elle dépend, latitudes)
- dans quel cursus s'insère l'enseignement en question (demandes des suivants, examens ultérieurs...)

*** sur les objectifs généraux**

Ce qu'on veut obtenir à la fin, en termes d'

- outils disponibles
- outils mobilisables
- situations familières, situations de références, "herbiers" ...
- bagage culturel ...

- questions et méthodes disponibles (y compris en ce qui concerne l'environnement informatique), moyens de contrôle...

II Choix globaux (conscients)

*** sur les contenus et la conception des activités**

- organisation globale (ordre ...)
- appui sur du connu
- cours comme réponse à des questions déjà rencontrées par les étudiants
- changements de cadres dans les problèmes
- problèmes riches ou/et récurrents

*** sur ce qui est dit par l'enseignant**

- sur les contenus (épistémologie)
- sur les méthodes (plus ou moins particulières)
- sur les contrats (partie explicitée)
- pendant les cours proprement dit (structuration et commentaires métamathématiques)

*** sur les activités des étudiants**

- travail en petits groupes (à quel moment, sur quoi)
- utilisation de logiciels
- évaluation (correspondant à ce qui est demandé en séances de travail, non classique si c'est possible, projets, partiels en temps non limité, à plusieurs, etc...)

Exemples pris dans l'enseignement d'algèbre et géométrie PEGC (annexes 1 à 6).

Un exemple de projet long d'enseignement

Il s'agit d'un enseignement annuel, de niveau licence, destiné à des enseignants de collège en formation continuée (note 1), en algèbre et géométrie (espaces affines et théorie des groupes).

L'enseignement a eu lieu deux années consécutives, nous n'assurons pour notre part qu'un seul des trois ou quatre groupes d'étudiants concernés.

Nous allons décrire successivement notre analyse des spécificités du public, celles des contenus, les contraintes institutionnelles incontournables que nous avons au départ, ainsi que les objectifs généraux que nous nous sommes fixée.

Nous présenterons ensuite les choix globaux que nous avons faits avec leurs justifications (a priori) et les éléments d'évaluation que nous avons essayé de nous donner.

Des exemples tirés de la réalisation effective de l'enseignement et donc ayant été proposés effectivement aux étudiants sont joints dans le cours du texte ou en annexe.

Enfin, nous proposons au lecteur les questions (ouvertes) que nous nous sommes posée.

Voici d'ailleurs la première question : nous avons choisi de décrire nos choix globaux, en n'utilisant les documents effectivement distribués aux étudiants qu'à titre d'exemple, d'illustration de notre propos.

Est-ce suffisant pour transmettre au lecteur une bonne idée de ce que nous avons voulu faire ?

Y a-t-il moyen de faire autrement, compte tenu de la quantité de séances qui sont en jeu ?

A) Les spécificités du public

Plusieurs caractéristiques ont retenu notre attention.

* Il s'agit d'abord d'adultes, ayant donc des possibilités de réflexion sur leurs activités.

Ils peuvent donc a priori profiter de connaissances sur les mathématiques, d'un enseignement de méthodes par exemple. Ils peuvent aussi produire eux-mêmes des réflexions sur les connaissances enseignées (synthèses, méthodes

etc...).

Ils peuvent même entendre et bénéficier d'un discours sur leur propre apprentissage.

* Il s'agit d'autre part d'enseignants de collège, ils ont donc un bagage souvent important d'expériences professionnelles à ce niveau, dont on peut essayer de tirer parti.

Cependant il n'y a que très peu de rapports entre ce qu'ils enseignent et ce qu'ils acquièrent pendant la licence : on ne peut pas parler de formation professionnelle directe. Le seul enjeu officiel est l'obtention d'un diplôme (préparé dans un deuxième temps), avec l'amélioration du traitement qui peut en découler.

* Ce sont des personnes relativement âgées, ayant interrompu leurs études pendant un temps non négligeable, et ayant donc oublié beaucoup de choses en mathématiques (par manque de mise en fonctionnement en particulier). Certains éléments du programme peuvent même être complètement nouveaux pour certains d'entre eux.

De plus, la difficulté d'une nécessaire remise au travail intellectuel "gratuit", dans un cadre scolaire, sans autre enjeu que la réussite à un examen à la fin de l'année, doit être prise en compte, ainsi que toutes les autres difficultés psychologiques de cette situation.

Par exemple il n'est pas toujours agréable de sécher pour un étudiant, c'est sans doute encore moins confortable pour quelqu'un de plus âgé, qui peut même se dire qu'il a tout oublié, voire qu'il a perdu des capacités intellectuelles (rapidité, souplesse) et qui de surcroît a, d'habitude, en face de lui des élèves, vis à vis desquels il est censé tout savoir.

* Enfin, ces personnes travaillent au collège en même temps qu'elles se recyclent, elles n'ont même pas de décharge en général, et, vu leur âge, ont souvent des charges familiales non négligeables. Il y a donc une contradiction évidente, d'emblée, entre le manque de temps chronique dont elles souffrent et la fatigue qui monte vite, presque déjà sans reprendre d'études, et la nécessité de passer du temps à ce qu'on leur propose et de s'y fatiguer, ne serait-ce que pour se remettre aux activités de ce type.

B) Les spécificités du contenu

Le programme porte sur les espaces affines, affines euclidiens et les groupes.

Dans tous ces cas, il s'agit de concepts qui sont apparus "tard" chez les mathématiciens, c'est à dire après que de nombreux problèmes, pouvant mettre en jeu ces concepts, aient été résolus autrement, avec les "moyens du bord".

On peut dire que ce sont des concepts généralisateurs et formalisateurs, (cf. Robinet [1]) qui permettent d'unifier l'abord de toute une série de problèmes, sans que le passage par ce type de formalisme soit toujours "obligatoire".

Cela n'est pas sans conséquences sur l'enseignement. En effet les problèmes où le recours à ces concepts est indispensable sont assez difficiles, voire hors de portée des étudiants (problèmes dans des espaces affines généraux, de dimension infinie, théorie de Galois...). On est alors tenté de se restreindre à des problèmes plus abordables, mais où la mise en fonctionnement de ces concepts n'est pas toujours indispensable. Il peut en résulter des effets de "contrat" : on utilise les concepts non pas parce qu'on a saisi qu'ils étaient utiles, mais parce qu'on est en train de les étudier.

Nous avons cependant choisi de nous limiter à des problèmes dans des espaces affines de dimension finie (et même presque toujours deux ou trois), il y a là un choix qui peut se discuter.

De plus, tenant compte des spécificités du public concerné, nous leur exposons le questionnement ci-dessus et leur indiquons les raisons de notre choix (problèmes plus abordables).

C) Les contraintes

Les contraintes institutionnelles d'abord :

- * il n'y a que trois heures de cours-TD (note 2) par semaine (contre cinq heures pour la licence ordinaire)
- * il faut respecter une bonne partie du programme de la licence (dite d'enseignement)
- * les étudiants concernés présentent en général ensuite un concours interne

(cf. note 1)

En revanche, et nous sommes là dans un cas particulier très favorable, nous n'avons aucun lien avec aucun autre enseignement.

Les autres contraintes sont liées au public particulier, disposant de peu de temps en dehors des séances à l'université, peu susceptible d'aller en bibliothèque par exemple, avec des lieux d'habitation souvent très éloignés les uns des autres. Ainsi on ne peut espérer beaucoup de travail en commun en dehors des séances, ni même beaucoup de travail régulier (les vacances par contre sont à utiliser). Il faut rentabiliser au maximum les séances à l'université.

D) Nos objectifs généraux sur les apprentissages

- En ce qui concerne les applications affines, et surtout les différentes classifications des isométries du plan et de l'espace et leur utilisation, nous nous sommes fixée comme objectifs d'obtenir des "outils disponibles". Cela veut dire qu'il faut pouvoir proposer des problèmes où les étudiants pensent eux-mêmes à différentes manières de distinguer les isométries, ou pensent eux-mêmes à l'outil "isométrie".

Ce parti pris vient des programmes du concours interne qui est visé et de ceux du lycée, qui nécessitent une bonne "connaissance" de ces outils justement.

Cela amène à rester longtemps sur les isométries, et à y revenir (de différents points de vue) : ainsi dans presque toutes les feuilles d'exercices portant sur les groupes il y a un problème avec des isométries. Cela amène à proposer des problèmes sans indication de méthodes ou d'outil. Cela amène à proposer en contrôle (partiels ou examens) des problèmes de ce type.

- En ce qui concerne les groupes, ce sont les opérations élémentaires dans les groupes (simplification, conjugaison ...) et la connaissance d'un certain nombre de groupes finis (sous-groupes d'isométries d'une figure, groupes à deux, trois, quatre, cinq éléments...) que nous avons retenues comme devant être disponibles à la fin de l'année. Par exemple, à partir d'un certain moment, on ne donne pas d'indications dans les questions de

commutation (où la conjugaison est un outil bien adapté).

- En ce qui concerne tout le formalisme sur les espaces affines et euclidiens, nous nous sommes proposée seulement d'obtenir des mises en fonctionnement correctes, "à la demande".

De même pour les outils introduits dans la théorie des groupes (classifications, sous-groupes distingués, groupes cycliques).

- En ce qui concerne la fin du cours sur les groupes (méthode de l'orbite, groupes S_n et A_n), nous nous sommes fixée comme objectif d'obtenir des connaissances de l'ordre du "bagage culturel" (pour reprendre l'expression de D. Lehman, professeur de mathématiques à l'université Lille I). Ces connaissances seront vite oubliées dans leur détail, on n'y a pas passé suffisamment de temps, mais les étudiants savent qu'ils les ont vues à ce moment-là, peuvent y revenir, peuvent les situer...

Questions naïves : nos choix ont-ils contribué à obtenir ces objectifs ?

Dans quelle mesure ces objectifs sont-ils atteints à la fin de l'année ?

E) Nos choix globaux

On ne peut éviter une présentation linéaire de ces choix qui sont pourtant relativement imbriqués.

D'autre part pour éviter que nos propos restent trop généraux, nous donnons en annexe un certain nombre d'exemples précis, tirés des documents distribués aux étudiants.

Enfin nous ne donnons les justifications de nos choix que s'ils ne sont pas classiques, correspondant par exemple à la volonté d'adaptation à une spécificité de l'enseignement post-obligatoire.

Reste que nous n'exposons que ce dont nous sommes consciente, peut-être y a-t-il d'autres choix que nous avons faits et que nous n'avons pas repérés ; de plus il faudrait vérifier que toutes les ingénieries proposées aux étudiants relèvent bien de ces choix.

1) choix sur l'organisation globale des activités des étudiants en terme de contenus

a) appui sur du connu

Un premier levier classique sur lequel nous essayons de jouer est celui de

l'appui sur du connu, pour enclencher des questions (si ce n'est des résolutions) dans de l'inconnu

Donnons un exemple : on pose aux étudiants, avant le premier cours sur les espaces affines, la question suivante : est-ce qu'on admet toujours le théorème de Thalès au collège et si oui pourquoi ?

La réponse qu'on veut arriver à faire trouver aux étudiants est du type suivant : on admet toujours ce théorème au collège parce que les connaissances en jeu ne sont pas du niveau du collège. En effet le théorème découle du fait que $\mathbb{R}^2$ est un espace affine et qu'une projection (définie géométriquement) est affine, c'est à dire associée à une application linéaire.

Pour arriver à cela, on propose une situation (théorème de Thalès dans l'espace) où on passe d'un problème posé dans le cadre géométrique (note 3) à un problème dans le cadre algébrique, résolu facilement. Cela permet de montrer l'intérêt de ce passage du point de vue "ensemble de points" au point de vue vectoriel, cela permet aussi de faire trouver aux étudiants la réponse à la question posée et cela permet enfin d'introduire ensuite les espaces affines comme des ensembles auxquels on associe des espaces vectoriels comme on l'a fait dans le cas particulier étudié.

Le texte de la feuille d'exercices proposée effectivement aux étudiants est joint en annexe 1.

b) le cours comme réponse à des questions

Dans le même ordre d'idées, nous essayons que le cours (c'est à dire la phase d'exposition des connaissances, hors d'un contexte donné, par l'enseignant) réponde le plus possible à des questions qu'ont commencé à se poser les étudiants. C'est pour cela que souvent des TD sur une notion précèdent le cours sur la notion. C'est le cas pour l'exemple proposé ci-dessus (cf. annexe 1). Ce n'est pas toujours possible.

Pour les groupes par exemple, on a enclenché les activités sur cette partie du programme avant le cours par la constitution d'une collection de groupes (finis) déjà connus (ou qu'on pouvait construire explicitement), et par le constat de la difficulté d'en rester aux seules définitions (déjà connues) dès qu'il y avait plus de 6 éléments.

c) l'effet "changement de cadres"

Il y a un moyen privilégié pour aider à résoudre certains problèmes : c'est de faire "passer" (dans des problèmes) du connu à l'inconnu (et retour), ce sont les changements de cadres ; ainsi les premières séquences font souvent passer de l'analytique au vectoriel, car les connaissances dans le cadre analytique sont plus assurées que celles dans le cadre vectoriel.

Le problème déjà évoqué en est un exemple (cf. annexe 1).

Plus tard dans l'année on s'appuie de même sur les isométries, déjà bien étudiées, pour trouver des propriétés des groupes (étudiés de façon abstraite).

Il y a cependant des difficultés : l'analytique marche trop bien, il est dur de l'abandonner ! Les isométries par contre ne sont pas toujours assez bien connues pour servir de cadre de référence ...

d) l'utilisation des problèmes riches et/ou récurrents

Un autre moyen classique sur lequel nous avons joué est la recherche de problèmes tels que les étudiants y voient un intérêt autre que les strictes applications du cours.

Il s'agit de mettre un enjeu dans le travail des étudiants, l'enjeu "du problème posé par le problème".

Mais ces problèmes, qui accrochent les étudiants, doivent être l'occasion de mettre en fonctionnement les nouvelles connaissances, de manière peut-être indirecte.

Ce peut être des problèmes sans indication de méthodes si on veut obtenir la disponibilité (note 4) de certains outils, ou qui mélangent plusieurs points de vue pour "forcer" les changements de cadres (même si on les indique) etc...

Il s'agit souvent de problèmes "riches", qui forment un tout, pas très courts, pas trop découpés, avec un nouveau résultat à la fin par exemple.

Nous avons ainsi fait chercher les groupes d'isométries laissant invariant certaines figures simples puis chercher des quadrilatères dont on connaît seulement les groupes d'isométries qui les laissent invariants. Selon le cardinal du groupe d'isométries, on trouve un parallélogramme, un rectangle ou un losange, un carré (annexe 2).

On peut aussi utiliser de manière récurrente ou en les généralisant certains problèmes, au fur et à mesure que les nouvelles connaissances permettent de les aborder autrement.

On a traité par exemple à plusieurs reprises les symétries et projections, en vectoriel, en affine, avec un point de vue analytique, puis en euclidien.

On a aussi fait généraliser à un quadrilatère, puis à un polygone à n côtés, et enfin à un cercle, le problème suivant (abordable au collège) : étant donné un triangle et un point pris sur un côté, étudier la suite des projetés successifs de ce point sur un autre côté parallèlement au troisième côté (on recommence toujours dans le même ordre) (annexe 2).

e) une question ouverte : comment décider de la répartition du temps à passer sur l'introduction d'une notion, sur son exposition, sur les diverses mises en fonctionnement ?

Notre réponse a été parfaitement empirique, les contraintes indépendantes de nous nous ont amenée à découper le "temps" en séances de trois heures (le temps hebdomadaire passé à l'université), chaque séance étant en général consacrée à une phase donnée (introduction, cours, renforcement), le nombre de semaines imparti imposant la quantité de notions abordées.

2) choix sur ce qui est dit en classe par l'enseignant

Nous avons développé ailleurs le fait qu'il y a là une marge de manoeuvre importante : nous réfléchissons beaucoup au discours "sur les mathématiques" qu'on peut tenir en classe, et plus généralement à tout ce qui peut être dit en matière d'apprentissage ou d'explicitation des choix faits (cf. Chiocca, Josse et Robert [1]).

Voici diverses occurrences de ces explicitations que nous essayons de pratiquer tout au long de l'année, avec des éléments de justification (très idéologiques !).

Nous joignons en annexe 3 divers exemples de nos incursions programmées dans le métamathématique, dont l'introduction donnée aux étudiants.

a) explicitations sur les contenus

Nous distribuons une trame de notre enseignement, au début de chaque grande partie (espaces affines et euclidiens, groupes). Il s'agit d'un tableau présentant les concepts qui seront étudiés, les grands types de problèmes abordés dans l'année, les questions et les méthodes les plus importantes qu'on rencontrera.

La première trame est à peu près complète, la deuxième est à compléter par les étudiants eux-mêmes, ces trames sont jointes en annexe 3.

Cela permet de valoriser autre chose que le seul apprentissage des concepts, de réintroduire, de réhabiliter une compréhension un peu générale, globale, qualitative des notions, en liant concepts et problèmes, en introduisant questions et méthodes. Cela prévient aussi les étudiants de ce qui nous importe. Cette trame est utilisée en classe au moment des séances des révisions (qui sont organisées autour d'elle).

De plus chaque séance de recherche d'exercices est précédée de commentaires, préparés à l'avance et rédigés (mais oraux). L'exemple du commentaire qui précède la séance déjà évoquée est joint en annexe 3.

b) explicitations sur les méthodes

Elles concernent aussi bien les méthodes générales utilisées en mathématiques, et rencontrées au détour d'un travail en classe, que les méthodes plus spécifiques à un domaine donné, dégagées pendant le cours et signalées dans la trame.

Par exemple on est amené à insister pendant tout le début du cours sur le fait que pour démontrer que deux ensembles sont égaux, souvent on démontre deux inclusions (une des deux est souvent oubliée au début de l'année).

Ensuite on est amené à revenir souvent sur les conditions nécessaires, ou suffisantes ou les deux.

En ce qui concerne les méthodes plus particulières, on insiste par exemple sur l'efficacité de passer en vectoriel dans un problème affine sur des transformations. On insiste sur les différentes classifications des isométries du plan ou de l'espace (points fixes, ou application linéaire associée, ou retour aux différents types en affine). Insister veut dire expliciter comme méthodes, et le signaler en tant que tel à chaque fois que cela sert (ou peut servir). Ce sont des répétitions, mais au niveau

métamathématique.

On insiste aussi sur l'utilisation de l'outil "conjugaison".

Un exemple de méthodes, rédigé et distribué aux étudiants est joint en annexe 3.

Toute une partie de notre travail au moment de l'élaboration de la trame est justement de dégager les méthodes qui pourront être utilisées efficacement par les étudiants.

c) explicitations de certains éléments du "contrat"

Il s'agit de préciser au maximum ce qui reste souvent habituellement en partie implicite : voilà ce qu'on vous demandera, voilà ce que j'attends de votre travail maintenant, voilà le rôle que je donne aux erreurs, je demande qu'on retienne les exemples, les méthodes, voilà pourquoi j'insiste sur l'utilisation de méthodes...

d) explicitations pendant le cours (exposition des connaissances)

Pendant le cours proprement dit (c'est à dire la phase d'exposition des connaissances) on s'efforce toujours de structurer ce qu'on est en train de faire, on fait des commentaires avant (problématisation), après (synthèses, comparaisons,...).

On dégage les méthodes, le "à quoi ça sert" (le passage du déclaratif au procédural). L'idée est que la prise en compte d'éléments métamathématiques doit aider les étudiants et doit petit à petit passer à leur initiative.

On conçoit en effet le cours comme un moment où les étudiants peuvent percevoir les notions dans leur ensemble, avoir une idée des articulations et de tout ce qui apparaît dans un chapitre donné, surtout si on les y aide.

Cette exposition des notions hors d'un contexte précis a pour objectif de permettre ensuite les mises en fonctionnement de ces concepts comme outils. Elle doit donc contribuer en particulier à la mise en mémoire des différentes propriétés attachées à une notion, et de leurs conditions d'application respectives.

On s'efforce donc de faire figurer les plans au tableau, mettant en évidence les concepts, les propriétés abordées et leurs relations, et on laisse un moment ces plans au tableau.

C'est aussi un moment où on peut donner toutes les illustrations possibles,

graphiques, numériques etc... et utiliser schémas, dessins, figures géométriques.

Dans le même ordre d'idées, c'est un moment où on peut rassembler les exemples à la disposition des étudiants (jouer sur leur diversité), où on peut insister sur les contre-exemples et leur rôle s'il y a lieu.

3) Choix sur l'organisation des activités des étudiants

a) le travail en petits groupes (3 à 4 étudiants)

Nous proposons systématiquement aux étudiants de se mettre en petits groupes (en installant la salle en conséquence) lorsqu'il s'agit de chercher des exercices. Les feuilles d'exercices correspondantes sont distribuées au début de la séance, les corrigés succincts qui sont toujours rédigés sont distribués à la fin de la séance (ou de la séance suivante si deux séances de recherche étaient prévues).

Comme nous l'avons exposé ailleurs, nous pensons que le travail en petits groupes permet aux étudiants de mieux s'investir dans le problème, de mieux se l'approprier (surtout s'il y a une vraie question). Cela permet du coup à l'enseignant de proposer des problèmes plus difficiles. Cela permet aussi une certaine autonomie par rapport au professeur, et cela contribue à mieux gérer l'hétérogénéité (car les petits groupes sont relativement indépendants). Cela favorise enfin les acquisitions de tout ce qui s'acquiert par la communication (méthodes en particulier...) (cf. Robert et Tenaud [1], Tenaud [1]).

Soulignons que pour cela nous avons institué un certain contrat, les étudiants appellent l'enseignant quand ils ne trouvent pas, n'arrivent pas à se mettre d'accord, ou pour faire vérifier leurs résultats ou leurs méthodes. L'enseignant, s'il n'est pas sollicité, ne circule pas entre les rangs : il vient pour répondre aux questions, pas pour savoir "si ça va". Nous avons remarqué en effet dans un travail antérieur (cf. Robert et Tenaud [1]) que, si l'enseignant circule régulièrement dans les rangs, il y a deux sortes d'effets "parasites" par rapport à notre projet. D'abord si les étudiants se posent une question et que l'enseignant est "près" d'eux, ils l'appellent, sans avoir réfléchi à la question ensemble. On perd le bénéfice potentiel des discussions (voire conflits, échanges de points de

vue différents) entre étudiants. Ensuite, si l'enseignant se penche pour regarder où en sont les étudiants, ceux-ci s'interrompent, font le point pour l'enseignant, qui repart sans avoir souvent pu être d'une quelconque efficacité, puisqu'on n'avait pas besoin de lui à ce moment-là.

b) les modes de contrôle des étudiants

Nous avons fait l'hypothèse que c'est une pièce "maîtresse" du dispositif, un levier qui va compter pour savoir si les étudiants vont ou non "marcher" dans notre dispositif.

Voilà pourquoi les problèmes comportent des questions non habituelles, soit de méthodes, soit liées à l'enseignement en collège, et nécessitant donc une réflexion sur d'autres pratiques, à mettre en rapport avec le cours. Des exemples de telles questions sont donnés dans l'annexe 4.

Voilà pourquoi nous avons institué un deuxième partiel "à la maison", travail qui nécessite la mise en oeuvre d'autres qualités, de réflexion, de synthèse, sur lequel nous revenons plus en détail ci-dessous...

c) le partiel "non classique" (annexe 5)

Nous avons donc choisi de faire réaliser vers la fin de l'année aux étudiants un problème un peu plus long, un peu plus ouvert, nécessitant une petite recherche, à la maison, éventuellement rédigé à deux, comptant pour l'évaluation ; il s'agit d'échapper au temps limité, et de favoriser les qualités d'adultes spécifiques de nos étudiants.

On joue sur d'autres facteurs, notamment la nature des tâches demandées et le rapport aux documents (utilisation de documents non "parfaits", non complets, redondants...), la présentation de la production et les critères d'évaluation (soutenance orale, écrit tapé à la machine ...).

* les tâches peuvent être plus vagues et plus générales (par exemple "étudier ...", ou "démontrer les propriétés ...", ou "caractériser ...").

Le découpage en petites étapes peut alors être à la charge des étudiants.

De même on peut ne pas indiquer les outils à utiliser, et il peut du même coup y avoir à faire des choix de méthodes, point de vue, stratégie.

Il peut aussi être nécessaire de se livrer à des conjectures, pas forcément immédiates, il peut y avoir lieu de faire des essais (graphiques, numériques ...) pour se donner des idées.

Les étudiants peuvent être amenés à tenir compte de plus d'informations à la fois, tirées de chapitres disjoints.

* certaines tâches non classiques peuvent être proposées, comme des utilisations (critiques) de logiciels, des modélisations, des élaborations de problèmes, des critiques de textes déjà écrits, des synthèses, des comparaisons, des recherches bibliographiques, des analyses de textes anciens, des applications à des domaines non mathématiques, etc...

On retrouve ici des tâches que les enseignants rencontrent dans leurs activités professionnelles, on peut ainsi tenir compte de la spécificité du public.

* les tâches sont souvent plus transversales par rapport aux chapitres et au déroulement chronologique du cours que les problèmes habituels : il n'y a en particulier aucun indice externe qui mette sur la voie de l'utilisation de tel ou tel outil.

De plus les outils peuvent être utilisés de manière différente de ce qui est demandé habituellement ; on peut être amené à faire fonctionner ensemble des outils habituellement vus séparément.

* l'utilisation de documents (autres que le polycopié de cours ou le manuel habituel) nécessite de lire un texte en cherchant dedans quelque chose qui n'est pas forcément exactement ce pour quoi il a été écrit.

Les documents peuvent être incomplets, redondants, erronés, inorganisés, il faut quelquefois transformer les informations brutes.

Il y a là une démarche à la fois de critique et d'appropriation, voire même de synthèse inhabituelle, et à notre avis intéressante.

D'autre part les critères d'évaluation se déplacent. Vu le temps imparti les étudiants finissent souvent par "trouver" ce qu'ils cherchent, ils soignent alors plus la présentation, s'investissant plus dans cette trace de leurs efforts.

Question naïve : est-ce que les épreuves non classiques peuvent avoir de l'effet sur les tâches classiques (en temps limité, seul) ?

Y a-t-il des moyens pour favoriser ce transfert (demandes précises d'explicitation de démarche par exemple) ?

En conclusion, nous pouvons ajouter que cet enseignement a été effectivement réalisé deux années de suite !

Nous joignons dans la dernière annexe (annexe 6) l'intégrale des feuilles d'exercices et de problèmes proposées au cours de l'année aux étudiants, avec les commentaires correspondants ; rappelons d'une part qu'un corrigé succinct rédigé est toujours distribué aux étudiants à la fin de la séance de recherche et que les séances correspondantes sont entrecoupées de séances de cours, dont le contenu est indiqué ici en intercalaire.

Notes

Note 1 Il s'agit d'enseignants des collèges, anciens instituteurs, qui ont suivi une formation spécifique (souvent sur deux disciplines) leur permettant d'enseigner au collège, et qui complètent cette formation pour pouvoir s'inscrire à un concours de promotion interne de niveau "Baccalauréat + 4".

Note 2 cours et exercices non séparés

Note 3 Rappelons que, pour un concept fonctionnant comme outil dans un contexte donné, on appelle cadre le domaine de fonctionnement de la notion dans le problème ou le contexte considéré (cf. R. Douady [1]).

Note 4 Rappelons qu'on parle d'outil disponible pour spécifier le fait que les étudiants peuvent penser à utiliser la notion considérée dans un problème sans qu'il ait été fait mention explicite de cette utilisation dans le texte.

Note 5 Toutes les feuilles d'exercices proposées aux étudiants sont écrites, avec leurs corrigés succincts, et distribuées aux étudiants, il y a dans notre cas 13 feuilles de ce type.

De plus on propose des problèmes, à faire à la maison, dont les corrigés sont distribués lors du recueil des devoirs ; il y en a 6 ou 7.

On donne aussi aux étudiants quelques textes d'exercices, qui sont utilisés pendant les séances de cours.

Enfin les étudiants ont un polycopié de cours (qui n'a été rédigé par moi).

Bibliographie

- M. Artigue [1] (1990) L'évaluation des connaissances, in Enseigner autrement les mathématiques en deug A première année, Irem de Lyon
- A. Benezra [1] DEA en cours, Université Paris 7
- C. Chiocca, E. Josse, A. Robert [1] (1991) Analyse du discours d'accompagnement des enseignants de mathématiques en classe, soumis à publication in PME XVIII
- Commission InterIrem Université [1] (1990) Enseigner autrement les mathématiques en deug A première année, Irem de Lyon
- R. Douady [1] (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en didactique des mathématiques Vol7.2
- P. Jarraud [1] Thèse en cours
- M. Legrand [1] (1986) Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, Journées SMF de Luminy
- A. Robert [1] (1987) De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n°47
- A. Robert [2] (1988) Recherches sur l'enseignement post-obligatoire, Brochure InterIrem Université ICME VI
- A. Robert et I. Tenaud [1] Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, Recherches en didactique des mathématiques n°9.1
- J. Robinet [1] (1984) Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur, Thèse d'état, Université Paris 7
- M. Rogalski [1] (1990) Enseigner des méthodes en mathématiques, in Enseigner autrement les mathématiques en deug A première année, Irem de Lyon
- A. Schoenfeld [1] (1985) Mathematical problem solving, Academic press.
- I. Tenaud [1] (1991) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : travail en petits groupes et enseignement de méthodes, Thèse de doctorat Université de Paris 7.

Annexes

Ces annexes font partie des documents distribués aux étudiants (cf note 5).

Annexe 1 : un exemple de séquence pour préparer un cours (problème proposé avant le premier cours sur les espaces affines).

C'est aussi un exemple de mise en fonctionnement de jeux de cadres (ponctuel/analytique/vectoriel).

Il s'agit de la deuxième séance de l'année, la première ayant été consacrée à la recherche d'exercices d'algèbre linéaire (révision systématique des symétries et des projections).

La séance dure trois heures, les étudiants travaillent comme d'habitude en petits groupes.

Un corrigé succinct est distribué aux étudiants à la fin de la séance de recherche (comme pour toutes les feuilles d'exercices).

Réfléchir d'abord à quelles démonstrations de Thalès donne-t-on

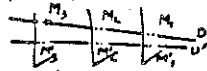
F2 I PREMIER EXERCICE aux élèves en 1er cycle ?

UNE ETUDE DE CONFIGURATION A L'AIDE DE TRANSFORMATIONS

On veut redémontrer le théorème suivant (une forme du théorème de Thalès dans l'espace):
soient P_1, P_2 et P_3 trois plans parallèles, dans $\mathbb{R}^3$, D et D' deux droites non
parallèles à P_1 qui rencontrent respectivement P_i en M_i et M'_i ($i = 1, 2, 3$) ;

Démontrer que $\frac{\overline{M_1 M_3}}{\overline{M_1 M_2}} = \frac{\overline{M'_1 M'_3}}{\overline{M'_1 M'_2}}$,

les mesures algébriques étant relatives à 2 vecteurs directeurs quelconques de D
et D' .



La première question ne sert pas directement à ce but.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ quelconque.

1°) On considère le plan P d'équation $x + y + z = 1$ et la droite passant
par $A(1, 1, 1)$ et de vecteur directeur de composantes $(1, 2, 3)$, soit D .

Montrer que D n'est pas parallèle à P .

A tout point M de $\mathbb{R}^3$ on associe le point M' défini de la manière suivante :

La parallèle à D menée par M coupe P en M' (projection sur P parallèlement à D).

Montrer qu'on a ainsi défini une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Est-elle bijective ? Quels sont ses points fixes ?

On appelle (x, y, z) les coordonnées de M et (x', y', z') celles des M' .

Exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z) . Montrer qu'on définit une application φ
de $\mathbb{R}^3$ vect. dans lui-même par $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ pour tout $\overrightarrow{MN}$ de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que φ est linéaire et l'identifier.

2°) On considère les plans P_1, P_2, P_3 d'équations respectives $x + y + z = 1$,

$2x + 2y + 2z = 7$, $-x - y - z = 3$

Montrer qu'ils sont parallèles.

Trouver 2 vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$ vect. tels qu'il existe A_i, B_i, C_i, D_i ,
dans P_i ($i = 1, 2, 3$) tels que $\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{A_3 B_3} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{C_1 D_1} = \overrightarrow{C_2 D_2} = \overrightarrow{C_3 D_3} = \vec{b}$.

Si on choisit deux autres vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{e}$ de la même façon, comparer le sev
engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, soit π , au sev engendré par $\vec{w}$ et $\vec{e}$.

L'association de π à P_1, P_2, P_3 est-elle généralisable ?

3°) a) soit Δ une droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et Q un plan non parallèle
à Δ de "plan directeur" π engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Montrer que

Δ non parallèle à $Q \iff (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ libres .

En déduire que si Δ n'est pas parallèle à Q , π et le sev $\mathbb{R}\vec{u}$ sont supplémentaires.

b) On revient au théorème visé : soient P_1, P_2, P_3 3 plans parallèles

D et D' non parallèles à P_1 , M_i et M'_i leurs intersections respectives avec P_i
($i = 1, 2, 3$).

A tout N on associe N' de la façon suivante : N' est l'intersection de D et du plan
parallèle à P_1 mené par N (projection sur D , parallèlement à P_1)

Montrer qu'on a ainsi défini une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et que l'application φ
de $\mathbb{R}^3$ vect. dans lui-même définie par $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ est linéaire : pour cela on

pourra montrer directement que φ est la projection sur $\mathbb{R} \vec{u}$ parallèlement à π , où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et π un plan directeur de P_1 .

En déduire une démonstration de l'égalité $\frac{M_1 M_3}{M_1 M_2} = \frac{M'_1 M'_3}{M'_1 M'_2}$

On retiendra de cet exercice le jeu entre les différents cadres -"affine", analytique, vectoriel- et son efficacité.

II DEUXIEME EXERCICE

ETUDE DE TRANSFORMATIONS SIMPLES

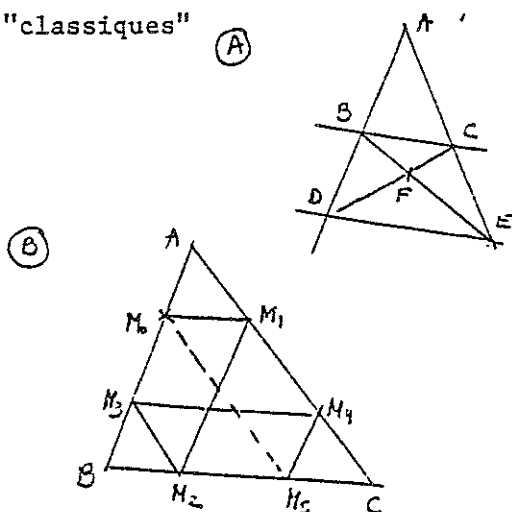
- 1°) Comment définissez-vous les homothéties de $\mathbb{R}^3$? Les translations ?
- 2°) Soit h une homothétie de centre O , de rapport k ; on note $h(M) = M'$.
Montrer qu'il existe une application linéaire $\mathcal{H}$ telle que $\mathcal{H}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$.
- 3°) Même question avec une translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- 4°) Identifier les applications h et t (nature, éléments caractéristiques).
- 5°) (Voici une autre caractérisation des homothéties et des translations). On considère une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ qui transforme toute droite D en une droite D' parallèle à D .
Est-ce qu'une telle application conserve le parallélisme ?
Montrer qu'une telle transformation est soit une homothétie, soit une translation.
On pourra raisonner sur les points invariants de la transformation f (supposer successivement que f a au moins 2 puis 1 puis 0 points invariants).

On retiendra de cet exercice l'intérêt du passage au linéaire pour composer et l'intérêt de la considération des points invariants.

III TROISIEME EXERCICE

ETUDE DE CONFIGURATIONS A L'AIDE DE TRANSFORMATIONS.

Deux "classiques"



Démontrer que si (BC) et (DE) sont parallèles, A, F , le milieu de $[BC]$ et le milieu de $[DE]$ sont alignés.
Réciproque ?

Conf. de "Thomson" ou Tourniquette...
 $(M_0 M_1) \parallel (BC), (M_1 M_2) \parallel (AB), (M_2 M_3) \parallel (AC)$ etc...

Montrer que $M_0 = M_6$

Est-ce que ça peut s'arrêter avant ?

(Il existe des généralisations à d'autres configurations que le triangle)

Annexe 2 : des problèmes riches

a) des isométries conservant une figure à la figure

b) où on joue sur divers paramètres pour développer un problème (dimension et forme des configurations)

a)

V Soit ABCD un quadrilatère convexe non aplati du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

On suppose qu'il y a exactement deux isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent ABCD invariant (globalement). Que pouvez-vous en déduire sur ABCD ?

On pourra admettre que le quadrilatère est globalement invariant si et seulement si $\{A, B, C, D\}$ est globalement invariant.

II On considère un quadrilatère ABCD convexe du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$. On appelle O l'isobarycentre des 4 points A, B, C, D.

1) On suppose qu'il y a exactement 4 isométries qui laissent les sommets du quadrilatère globalement invariants.

a) Peut-on munir l'ensemble E de ces isométries d'une structure algébrique (pour la loi de composition usuelle) ?

Précisez le plus possible a priori cette structure.

b) Peut-il y avoir une translation dans E ?

c) Que pouvez-vous dire a priori des isométries de E (points fixes, nature géométrique) ?

d) Peut-il y avoir dans E trois isométries indirectes ?

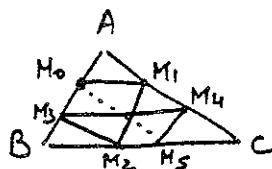
e) En déduire la description précise de chaque élément de E.

f) Donner les différentes possibilités pour le quadrilatère ABCD.

2) On suppose qu'il y a exactement 4 isométries directes qui laissent les sommets du quadrilatère invariants.

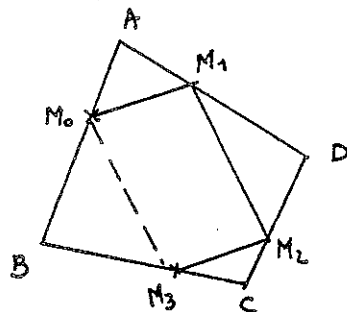
Répondre dans ce cas aux questions a), b), c), e) et f).

b)



VII Une première généralisation de la "tourniquette"

Soit ABCD un quadrilatère, et M_0 un point de $[AB]$. On projette M_0 sur (AD) parallèlement à (BD) en M_1 , puis M_1 sur (DC) parallèlement à (AC) , et on continue. En utilisant la composition des projections qui interviennent montrer que $M_4 = M_0$.



3) Dans le plan affine euclidien réel on se donne un cercle et trois de ses diamètres d_1, d_2, d_3 . Soit M_0 un point du cercle. On construit M_1 symétrique de M_0 par rapport à d_1 , M_2 symétrique de M_1 par rapport à d_2 , M_3 symétrique de M_2 par rapport à d_3 , et on continue. Démontrer qu'on retrouve M_0 après un nombre fini de symétries (on précisera le plus petit de ces nombres).

III Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un polygône à n sommets du plan affine réel et M_1 un point de $[A_1, A_2]$.

On appelle p_1 la projection sur (A_2, A_3) parallèlement à (A_1, A_3) , et p_j la projection sur (A_{j+1}, A_{j+2}) parallèlement à (A_j, A_{j+2}) .

On note M_2 le projeté de M_1 par p_1 et

$$M_{j+1} = p_j(M_j) \text{ si } 2 \leq j \leq n, \quad M_{n+k+1} = p_k(M_{n+k}) \text{ si } 1 \leq k \leq n,$$

en assimilant A_1 et A_{n+1} , A_2 et A_{n+2} .

1) Quelle est la nature de la restriction de $p_n \circ \dots \circ p_2 \circ p_1$ à la droite (A_1, A_2) selon la parité de n ?

2) En déduire, en discutant selon la parité de n et la position de M_1 , que $M_{n+1} = M_1$ ou

$$M_{n+1} \neq M_1 \text{ et } M_{2n+1} = M_1.$$

3) Que se passe-t-il si M_1 est sur la droite (A_1, A_2) à l'extérieur du segment $[A_1, A_2]$?

Annexe 3 : exemples de matériel "métamathématique"

a) un exemple de méthode rédigée et donnée aux étudiants, à la fin du cours sur les isométries affines planes (à l'occasion d'un exercice).

b) les deux trames distribuées aux étudiants au début de chaque partie du cours

c) un exemple de commentaire fait aux étudiants avant une séance d'exercices (il s'agit du commentaire qui précède la séance décrite dans l'annexe 1).

d) le texte de l'introduction qui est dite aux étudiants au début de l'année.

(a)

exercice 3 (suite). Après le cours sur les isométries affines de $\mathbb{R}^2$

Lorsqu'on a une isométrie affine $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
on étudie l'application linéaire associée $\vec{f}$: directe ou indirecte

Si $\vec{f}$ est directe, c'est soit une rotation, soit l'identité

Si $\vec{f}$ est une rotation, f est aussi une rotation, reste à en déterminer le centre (point fixe)

Si $\vec{f}$ est l'identité, f est soit une translation (si elle n'a pas de points fixes)

soit l'identité si elle a au moins un point fixe.

Si f est indirecte, c'est une symétrie (axiale)

f est soit une symétrie (par rapport à une droite) si elle a au moins un point fixe

soit une symétrie glissée si elle n'a pas de point fixe (les milieux des segments $[Mf(M)]$ déterminent l'axe, le vecteur de la translation est de direction celle de cet axe, $u = Mf(M)$ si M appartient à l'axe, ou bien $f^2 = t_{2u}$)

1) Montrer que si u est un vecteur et Δ une droite telle que $u \in \Delta$

$t_u \circ s_\Delta$ est une symétrie.

Est-ce que $t_u \circ s_\Delta = s_\Delta \circ t_u$?

2) Identifier $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}$ lorsque Δ_1 et Δ_2 sont parallèles (cf F6) puis concourantes.

Pouvez-vous énoncer une réciproque ?

3) Etudier la composée de trois symétries d'axes concourants puis parallèles. Réciproque ?

TRANSFORMATIONS SUR ESPACES AFFINES

CONCEPTS	TYPES de PROBLEMES	METHODES (ET ... QUESTIONS)
Espaces affines, sous espaces affines ...	Etude d'une transformation (affine ou aff. euclidienne) données de différentes manières	Passage de l'anne au linéaire (et retour)
Applications affines (et linéaires associées) - compositions	- Identification	Passage aux matrices et/ ou aux coordonnées (dans différentes bases - à choisir)
Applications affines particulière (translations, homothéties, symétries projections, affinités)	- Effets sur une configuration, une mesure...	Utilisation des diverses classifications de transformations et des transformations connues usuelles.
Espaces affines euclidiens	- Décomposition en produit de transformations	Recherche des points fixes (points fixes successifs s'il y a décomposition)
Matrices orthogonales	- Composition	Utilisation des compositions et décompositions "canoniques".
Isométries - points fixes, décomposition canonique, composition	- Caractérisation de divers types	Utilisations des déterminations
Classification explicite pour $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$	Etude d'une configuration à l'aide de transformations (affines euclidiennes)	"minimales" des diverses applications en cause.
Sous groupes d'isométries conservant certaines configurations planes ou de l'espace	Etude de sous ensembles { d'applications ou d'isométries	Utilisation des sg connus.
Herbier des applications	- Conservant une configuration ou une classe de configuration, ou une mesure, ...	Repérer ce qui relève de l'anne / de l'anne euclidien / du vectoriel
	- Transformant une config. En une autre etc ...	
	(Etude et utilisation de sous-groupes d'isométries.)	

TRAME INCOMPLETE (ce sera à charge des étudiants de la remplir)

CONCEPTS	TYPES de PROBLEMES	METHODES, QUESTIONS
Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes	Etudes de sg particuliers	Reconnaissance de groupes connus
Ordre d'un élément d'un groupe	Actions de groupes sur des ensembles	Stabilité par composition
groupes cycliques		Utilisation de décompositions
Sous groupes distingués		Introduction de groupes opérant sur un ensemble
groupe quotient		Dans quel ensemble se placer ?
Groupe opérant sur un ensemble orbite		Quel groupe faire agir ?
Quelques dénombrements		
"Herbier" sg d'isométries		
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$		
S_4, S_n, A_n		

©

Commentaires sur la feuille F2

On commence par réaliser avec les étudiants que, d'une manière ou d'une autre, on admet toujours "quelque chose" à propos du théorème de Thalès (en quatrième ou en troisième, et même après puisqu'on ne revient pas sur la forme déjà introduite).

Ce peut être le théorème pour λ réel (démontré pour λ entier), l'existence d'un rapport constant entre la longueur du côté adjacent à un angle donné et celle de l'hypothénuse dans un triangle rectangle d'angles donnés, ou autre.

Ensuite on essaie de classer avec eux très grossièrement les différents types de problèmes rencontrés en "géométrie" : problèmes d'incidence sur des points, droites (type alignement, parallélisme...), les mêmes problèmes mais avec introduction d'une mesure en plus (type orthogonalité, ...), problèmes sur les vecteurs, problèmes sur les coordonnées, etc... et on introduit l'idée du $\mathbb{R}^3$ (points) et du $\mathbb{R}^3$ (vecteurs).

Le premier exercice de la feuille a alors pour objet de montrer l'intérêt de l'association $\mathbb{R}^3$ (points) $\leftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ (vecteurs) pour résoudre certains problèmes de géométrie (ceux sur les points, droites ... de $\mathbb{R}^3$ (points), avec ou sans distance).

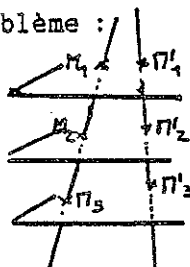
On explique par la même occasion que les concepts introduits dans le cours ne sont pas indispensables pour résoudre les problèmes qu'on va proposer, mais commodes. Et on pose le problème de fond de ce type de concepts (généralisateurs, unificateurs et formalisateurs), qui arrivent après que de nombreux problèmes aient été résolus au coup par coup par les mathématiciens, et qui ne peuvent servir de façon indispensable dans les problèmes du niveau des étudiants.

On justifie aussi le choix de se limiter à $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, en tout cas $\mathbb{R}^n$, de la même façon (existence de référents, de toutes façons les problèmes dans un espace de dimension quelconque trop difficiles).

On peut en arriver au schéma de l'exercice lui-même, qui est une démonstration de Thalès, dont on va comprendre pourquoi elle n'est pas

faisable aux élèves puisqu'elle mobilise des connaissances côté $\mathbb{R}^3$ (vecteurs) :

le problème :



$$\frac{\overline{M_1 M_2}}{\overline{M_1 M_3}} = \frac{\overline{M'_1 M'_2}}{\overline{M'_1 M'_3}}$$

1) On passe de $\mathbb{R}^3$ (points) à $\mathbb{R}^3$ (vecteurs) pour l'application "projection sur un plan parallèlement à une droite donnée", en utilisant le cadre analytique.

2) On passe de plans parallèles de $\mathbb{R}^3$ (points) à un seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (vecteurs) (plan directeur)

3) On passe de la situation géométrique initiale (trois plans parallèles, une projection sur une droite parallèlement à la direction de ces plans) à une situation dans $\mathbb{R}^3$ (vecteurs) : projecteur sur un sous-espace de dimension un (engendré par un vecteur directeur de la droite), par rapport à un sous-espace de dimension deux (supplémentaire), qui est le plan directeur des plans parallèles.

Le problème se traduit alors en

si $MN = \lambda PQ$, $\phi(MN) = \lambda \phi(PQ)$

ce qui est vrai car ϕ est linéaire.

On peut alors revenir aux élèves de troisième : ils ne savent pas qu'on modélise leur plan ou leur espace par un espace affine (autrement dit ils savent bien associer aux points des éléments de $\mathbb{R}^3$, les triplets de leurs coordonnées, mais ils ne savent pas y associer de façon systématique les vecteurs (dont les composantes sont les triplets correspondants, une origine étant fixée par exemple). D'autre part ils n'ont pas les notions d'algèbre linéaire utilisées.

Bien sûr, on pourrait faire la démonstration sans utiliser les mots d'algèbre linéaire, seulement sur les coordonnées et composantes, on voit la complication et par suite la totale inutilité...

(d)

Introduction aux étudiants

1) Le cours comprend deux grandes parties, la première qui traite d'espaces affines, espaces euclidiens, isométries et la deuxième de théorie des groupes.

Un des buts de la première partie est de donner des exemples à utiliser dans la deuxième partie.

L'autre objectif est de bien asseoir les connaissances sur les isométries de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (classifications en particulier).

Le cours sur les groupes permet d'aborder la méthode de l'orbite et de retrouver des procédés plus efficaces que ceux exposés au début de l'année pour trouver tous les groupes d'isométries conservant une figure donnée.

On base ce cours sur les groupes sur les exemples, qui sont considérés comme partie intégrante du cours.

Une première vue d'ensemble de chaque partie du cours est donnée dans une trame (plus ou moins complète) ci-jointe, distribuée au premier cours de chaque partie. On y présente les concepts abordés, les types de problèmes fréquemment proposés, un certain nombre de méthodes et de questions qu'il est intéressant et utile de se poser.

Les étudiants sont encouragés à s'approprier cette trame, et à la compléter.

Ce peut être très efficace au moment des révisions en particulier.

2) Le travail est conçu et organisé de la manière suivante :

a) Des énoncés d'exercices, de F1 à F13, sont proposés aux étudiants. Il s'agit pour ces étudiants de les chercher, si possible en petits groupes de trois à quatre, pendant les regroupements.

Le corrigé succinct est distribué à la fin de ces séances. Au cours de corrections partielles que l'enseignant peut être amené à faire, il se peut qu'on prépare le cours à venir. Les énoncés en question servent en effet selon les cas à préparer les cours qui suivront ou à mettre en fonctionnement les notions présentées avant.

b) Toutes les deux ou trois séances on consacre la séance (ou une partie de la séance) à du cours (exposition de connaissances). Ces interventions sont basées sur le polycopié de M. Mazet, les parties effectivement utilisées

sont signalées au fur et à mesure. Le polycopié est en effet plus complet que ce que l'on traite. On accorde beaucoup d'importance aux méthodes et aux exemples, ils sont considérés comme faisant partie du cours.

c) Six ou sept problèmes sont distribués dans l'année, dont quatre pendant les vacances scolaires. Ils sont à rendre deux ou trois semaines après, ils peuvent être cherchés à plusieurs, ils peuvent contribuer au développement du cours.

d) "Ce qu'il y a à savoir" n'apparaît ainsi pas seulement dans le cours stricto sensu, mais aussi dans les feuilles Fi et même dans les problèmes. Il faut veiller à le signaler à chaque fois.

e) Le contrôle des connaissances se fait de la façon suivante :

premier partiel (avec documents) en janvier (note P1)

deuxième partiel * ou en mai (sans documents)

* ou "non classique" : travail en temps non limité (deux mois), seul ou à deux, sur des sujets distribués en mars (note P2).

examen (note E)

examen de septembre (note E)

Note écrit = $\sup (E, [E + X/2]/2)$ où $X = (P1 + P2)/2$

Note finale = moyenne (note écrit, note oral).

3) Bibliographie

Il n'y a pas d'ouvrage qui corresponde exactement à ce que l'on fait.

Dans certains manuels de Terminale C, on peut trouver matière à faire fonctionner certaines connaissances introduites (le livre de Sauser, chez Ellipses, par exemple) ; de même dans certains ouvrages de DEUG, comme le "cours de mathématiques" de Mme Ferrand et M. Arnaudiès (Dunod).

Les livres de C. Tisseron (Géométries affine, projective et euclidienne, Hermann) ou celui de M. Berger (Géométrie, Cedric-Nathan) sont en revanche beaucoup plus développés que ce que l'on fait, tout comme les livres de D. Lehman (Introduction à la géométrie, PUF) ou J. Calais (théorie des groupes, PUF).

Annexe 4 : exemples de questions non habituelles posées en problème

Comment démontrer que trois points du plan sont alignés en utilisant une projection ou une symétrie ? Donner un exemple.

(tiré du problème n°1)

Comment démontrer que trois droites de $\mathbb{R}^3$ (espace affine réel) sont concourantes en utilisant l'outil barycentre ?

(tiré du problème n°3)

Quelles sont les méthodes que vous connaissez pour démontrer qu'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même (affine euclidien) est une projection orthogonale ?

On pourra discuter selon la façon dont l'application est donnée.

(tiré d'un partiel)

Annexe 5 : les textes du partiel non classique

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°1 (frises)

A l'aide des documents joints, répondre aux questions suivantes :

- 1) Qu'appelle-t-on frise, qu'appelle-t-on groupe associé à une frise ?
- 2) Quel théorème précis démontre-t-on sur ces groupes associés aux frises du plan ?
- 3) Rédiger une démonstration de ce théorème.
- 4) Résoudre les exercices 10-7, 10-18 (utiliser 10-7) et 10-14 du document en anglais.
- 5) Examiner les figures de la page 35 du texte sur le groupe des paveurs.
Par quelles isométries directes pouvez-vous reconstituer chaque figure à partir du "pavé de base" indiqué ? On ne donnera pas de démonstration.

Documents joints :

Martin Transformation Geometry (Springer Verlag) pp. 78 à 87

Texte d'un problème proposé à l'écrit du capes externe (dont on ne demande pas la solution).

Berger Géométrie Vol 1 (Cédic-Nathan) pp. 33 à 42.

Attention à la traduction de certains mots anglais

Notamment :

the symmetries of a set of points = les isométries laissant un ensemble de points invariants

the frieze group with center c = le groupe d'une frise d'axe c

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°2 (transvections, dilatations)

A l'aide des documents ci-joints, résoudre le problème proposé (on en donnera une rédaction).

Rédiger ensuite un exercice sur les transvections affines et les dilatations affines (en rédigeant aussi les démonstrations).

Documents joints :

Tisseron Géométries affine, projective, et euclidienne (Hermann) pp. 71 à 79

Lelong-Ferrand et Arnaudès, Cours de mathématiques Tome 3 (Dunod) pp. 6 à 11 et 44 à 47

Arnaudès et Fraisse, Cours de mathématiques Tome 1 (Dunod) pp. 204 à 211

19. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ sur un corps commutatif K , H un hyperplan de E .

Soit u un endomorphisme de E laissant invariant tout élément de H .

1° Montrer que, si $a \in E - H$, on peut écrire $u(a) = \gamma a + t$ où $t \in H$ et où γ est un scalaire indépendant de a .

2° On suppose $\gamma \neq 1$. Montrer que γ est valeur propre de u , que le sous-espace propre associé à γ est une droite S , supplémentaire de H . On dit alors que u est une dilatation d'hyperplan H , de droite S et de rapport γ .

Soit V un sous-espace de E . Montrer que, pour que $u(V) \subset V$, il faut et il suffit que $V \subset H$ ou $S \subset V$.

3° On suppose $\gamma = 1$. On dit alors que u est une transvection.

Soit $g(x) = 0$ une équation de H (g étant une forme linéaire). Montrer qu'il existe un vecteur unique $c \in H$ tel que, $\forall x \in E$, $u(x) = x + g(x)c$. Réciproque? Montrer que u est une bijection. Si $u \neq Id$ prouver que la droite T passant par c est indépendante de l'équation de H choisie. On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite T . Quels sont les valeurs propres de u , les sous-espaces associés?

Soit V un sous-espace de E . A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) a-t-on $u(V) \subset V$?

4° Soient u, u' deux transvections $\neq Id$ d'hyperplans respectifs H et H' , de droites respectives T et T' .

a) Montrer que $uu' = u'u \implies D \subset H'$ et $D' \subset H$.

b) A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) uu' est-il une transvection?

5° Soient r un automorphisme de E , u une transvection (resp. une dilatation). Montrer que uru^{-1} est une transvection (resp. une dilatation) dont on précisera les éléments en fonction de ceux de u .

6° Soit $\Gamma(E, H)$ le groupe des automorphismes de E laissant invariants les points de H . Montrer que l'ensemble $\Theta(E, H)$ des transvections laissant invariants les points de H est un sous-groupe commutatif distingué de $\Gamma(E, H)$, isomorphe au

groupe additif H . Montrer que le groupe quotient $\Gamma(E, H)/\Theta(E, H)$ est isomorphe au groupe multiplicatif $K - \{0\}$. (On précisera la correspondance).

7° Soit $T(E)$ le sous-groupe de $GL(E)$ engendré par les transvections de E .

a) Montrer que $T(E)$ est distingué dans $GL(E)$.

b) Montrer que, si x et y sont deux vecteurs non nuls de E , il existe un $\sigma \in T(E)$ tel que $\sigma(x) = y$.

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2
Sujet n°3 (billard polygonal)

I A l'aide des documents ci-joints, donner une rédaction personnelle du problème du billard polygonal.

Le plan d'exposition ne sera pas nécessairement celui du document.

On vous demande d'indiquer clairement les propositions que vous vous proposez de démontrer, suivies de leurs démonstrations complètes.

Il y a en effet dans le texte des manques dans les démonstrations qu'on vous demande de combler. S'il y a lieu, indiquez clairement ce que vous admettez.

Traiter complètement les cas $n = 3$ et $n = 4$ (avec des figures).

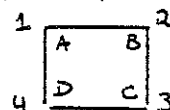
II Résoudre l'exercice ci-joint (indépendant de ce qui précède).

Documents joints :

Berger Géométrie vol 2 (Cédic Nathan) pp. 81 à 89

Exercice

On considère un carré ABCD du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$. On numérote ses sommets de 1 à 4, comme sur la figure ci-jointe :



On appelle I le groupe des isométries qui laissent les sommets du carré globalement invariants et on identifie un élément de I à une permutation de S_4 (en remplaçant chaque sommet par l'entier correspondant).

1) Est-ce que tout élément de S_4 correspond à un élément de I ?

2) Identifier géométriquement les éléments s , t , v de I correspondant aux permutations α , β , γ suivantes :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 2, 1, 4, 3 \end{pmatrix} \quad \beta \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 4, 1, 2 \end{pmatrix} \quad \gamma \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 4, 3, 2, 1 \end{pmatrix}$$

3) On appelle l_1 et l_2 les diagonales du carré, considérées comme deux segments de $\mathbb{R}^2$ et on note Δ l'ensemble $\{l_1, l_2\}$.

Montrer que I agit sur Δ par $(\phi, l_i) = \phi(l_i)$, $i = 1, 2$.

Quelle est l'orbite de l_1 dans cette action ?

Quel est le fixateur de l_1 ?

Retrouver ainsi que le nombre d'éléments de I est 8.

4) Montrer que le sous-groupe de I engendré par s , t , et v est un sous-groupe distingué de I .

5) Soit r la rotation de I d'angle $\pi/2$.

Quelle est la permutation correspondante de S_4 ? Quelle est sa signature ?

En déduire que le sous-groupe des déplacements conservant le carré, interprété comme sous-groupe de permutations des 4 sommets, n'est pas un sous-groupe du groupe alterné A_4 des permutations paires de S_4 .

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°4 (groupe d'isométries du cube)

A l'aide du polycopié et des documents ci-joints, résoudre d'abord l'exercice ci-joint.

Donner ensuite deux démonstrations différentes permettant d'obtenir le groupe des isométries du cube (une inspirée de l'exemple 4 des documents et l'autre tirée du polycopié).

On demande de rédiger chaque démonstration de la façon suivante : indiquer d'abord la suite des propositions choisies pour arriver au résultat, en dégagant bien le raisonnement adopté, puis donner les démonstrations complètes de chacune de ces propositions.

Il faut donc réaliser un découpage, laissé à l'initiative de chacun, et montrer l'enchaînement qui conduit au résultat.

Documents joints :

Arnaudiès et Fraisse Cours de mathématiques Tome 1 (Dunod) pp. 238 à 245

EXERCICE : On considère dans $\mathbb{R}^3$ (espace affine euclidien) un tétraèdre régulier MNPQ. On appelle J le groupe des isométries conservant globalement l'ensemble S des sommets du tétraèdre.

1) Montrer que J agit sur S par $(\phi, T) \mapsto \phi(T)$ si ϕ est un élément de J et T un sommet du tétraèdre.

2) A toute isométrie ϕ de J on associe la permutation de $[1, 2, 3, 4]$ définie par $\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4)$ où on identifie M, N, P et Q à 1, 2, 3 et 4.

Montrer que l'application de J dans S_4 ainsi définie est un morphisme de groupes injectif. En déduire que J est isomorphe à un sous-groupe de S_4 .

3) Préciser la nature géométrique de l'isométrie de J qui laisse M et N fixes et qui échange P et Q ? Quelle est l'image de cette isométrie dans l'isomorphisme précédent ?

En déduire que J est isomorphe à S_4 .

On rappelle que le groupe S_n est engendré par les transpositions.

4) Montrer que le sous-groupe de J formé des seules isométries directes est isomorphe au sous-groupe alterné A_4 des permutations paires de S_4 .

Annexe 6 : l'intégrale des feuilles d'exercices proposées en séances de travail et des problèmes (cf note 5)

Commentaires sur la feuille F1

Révisions sur l'algèbre linéaire.

On utilisera tout au long de l'année les projecteurs et les symétries vectorielles.

F1) SYMETRIES VECTORIELLES

On travaille dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Un élément x de E se décompose en $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in G$.

1°) On considère l'application s de E dans E définie pour tout x de E par $s(x) = x_1 - x_2$ (symétrie vectorielle par rapport à F , parallèlement à G)

Est-ce que s est vraiment définie comme cela ?

a) Montrer que s est un endomorphisme de E .

Quelles autres questions peut-on poser sur s ?

Que se passe-t-il si $F = \{0\}$, $G = \{0\}$?

b) Montrer que

$$F = \{x ; s(x) = x\} \quad \text{et} \quad G = \{x ; s(x) = -x\}$$

c) Montrer que $s^2 = \text{Id}$.

d) Ecrire une matrice de s (choisir une base dans E .)

2°) Réciproquement on considère un endomorphisme G de E tel que $G^2 = \text{Id}$, $G \neq \text{Id}$.

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant est un sous-espace vectoriel

$$\mathcal{F} = \{x ; G(x) = x\}.$$

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ suivant est un sous-espace vectoriel

$$\mathcal{G} = \{x ; G(x) = -x\}$$

c) Montrer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires.

d) Est-ce que G est une symétrie vectorielle ? Définir F et G (cf. 1)

en fonction de $\text{Ker}(G - \text{Id})$ et $\text{Ker}(G + \text{Id})$.

3°) Quels sont les éléments invariants d'une symétrie vectorielle ?

4°) Que peut-on dire des valeurs propres d'une symétrie vectorielle ? Est-elle diagonalisable ?

5°) On se place dans $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel). Donner un sev supplémentaire du sev $F = \mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ (on appelle $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ une base de $\mathbb{R}^3$); donner l'expression des 2 symétries vectorielles correspondantes. Montrer qu'elles commutent.

Quelle est leur composée ?

6°) On considère la matrice $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

Montrer que c'est la matrice d'une symétrie vectorielle que l'on caractérisera comme en 1).

PROJECTEURS VECTORIELS

On travaille dans un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E .

Un élément x de E se décompose en $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in F$, $x_2 \in G$.

1°) On considère l'application p de E dans E définie pour tout x de E par $p(x) = x_1$ (projecteur sur F parallèlement à G).

a) Montrer que p est une application linéaire ; autres questions ?

b) Montrer que $\text{Im } p = F$, $\text{ker } p = G$

c) Montrer que $p^2 = p$

d) Ecrire une matrice de p (choisir une base dans E)

2°) Réciproquement on considère une application linéaire $\mathcal{P}$ qui vérifie $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

a) Montrer que $\text{ker } \mathcal{P}$ et $\text{Im } \mathcal{P}$ sont supplémentaires

b) Montrer que $\mathcal{P}$ est le projecteur sur $(\text{Im } \mathcal{P})$ parallèlement à $(\text{ker } \mathcal{P})$.

3°) Montrer qu'une application linéaire p est un projecteur si, pour tout x de E , $x - p(x)$ appartient à $\text{ker } p$

*4°) Montrer que l'application $2p - \text{Id}$ est une symétrie si p est un projecteur

5°) Que peut-on dire des éléments invariants de p ? des valeurs propres ? p est-elle diagonalisable ?

6°) On considère l'application q définie par $q(x) = x_2$.

Que pouvez-vous dire de q ?

Montrer que $q + p = \text{Id}$

$$q \circ p = p \circ q = 0$$

7°) On considère la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$. Est-ce la matrice d'un projecteur ?

Déterminer l'image et la noyau de cette application.

F2 I PREMIER EXERCICE aux élèves en 1er cycle ?

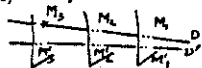
UNE ETUDE DE CONFIGURATION A L'AIDE DE TRANSFORMATIONS

On veut redémontrer le théorème suivant (une forme du théorème de Thalès dans l'espace):

soient P_1, P_2 et P_3 trois plans parallèles, dans $\mathbb{R}^3$, D et D' deux droites non parallèles à P_1 qui rencontrent respectivement P_i en M_i et M'_i ($i = 1, 2, 3$) ;

Démontrer que $\frac{M_1 M_3}{M_1 M_2} = \frac{M'_1 M'_3}{M'_1 M'_2}$,

les mesures algébriques étant relatives à 2 vecteurs directeurs quelconques de D et D'.



La première question ne sert pas directement à ce but.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ quelconque.

1°) On considère le plan P d'équation $x + y + z = 1$ et la droite passant par $A(1, 1, 1)$ et de vecteur directeur de composantes $(1, 2, 3)$, soit D.

Montrer que D n'est pas parallèle à P.

A tout point M de $\mathbb{R}^3$ on associe le point M' défini de la manière suivante :

La parallèle à D menée par M coupe P en M' (projection sur P parallèlement à D).

Montrer qu'on a ainsi défini une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Est-elle bijective ? Quels sont ses points fixes ?

On appelle (x, y, z) les coordonnées de M et (x', y', z') celles des M'.

Exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z) . Montrer qu'on définit une application φ de $\mathbb{R}^3$ vect. dans lui-même par $\varphi(\vec{MN}) = \vec{M'N'}$ pour tout $\vec{MN}$ de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que φ est linéaire et l'identifier.

2°) On considère les plans P_1, P_2, P_3 d'équations respectives $x + y + z = 1$, $2x + 2y + 2z = 7$, $-x - y - z = 3$

Montrer qu'ils sont parallèles.

Trouver 2 vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$ vect. tels qu'il existe A_1, B_1, C_1, D_1 dans P_1 ($i = 1, 2, 3$) tels que $\vec{A_1 B_1} = \vec{A_2 B_2} = \vec{A_3 B_3} = \vec{a}$ et $\vec{C_1 D_1} = \vec{C_2 D_2} = \vec{C_3 D_3} = \vec{b}$?

Si on choisit deux autres vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ de la même façon, comparer le sev engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, soit π , au sev engendré par $\vec{w}$ et $\vec{t}$.

L'association de π à P_1, P_2, P_3 est-elle généralisable ?

3°) a) soit Δ une droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et Q un plan non parallèle à Δ de "plan directeur" π engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Montrer que

Δ non parallèle à Q $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ libres.

En déduire que si Δ n'est pas parallèle à Q, π et le sev $\mathbb{R}\vec{u}$ sont supplémentaires.

b) On revient au théorème visé : soient P_1, P_2, P_3 3 plans parallèles D et D' non parallèles à P_1 , M_i et M'_i leurs intersections respectives avec P_i ($i = 1, 2, 3$).

A tout N on associe N' de la façon suivante : N' est l'intersection de D et du plan parallèle à P_1 mené par N (projection sur D, parallèlement à P_1)

Montrer qu'on a ainsi défini une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et que l'application φ de $\mathbb{R}^3$ vect. dans lui-même définie par $\varphi(\vec{AB}) = \vec{A'B'}$ est linéaire : pour cela on

pourra montrer directement que φ est la projection sur $\mathbb{R}\vec{u}$ parallèlement à π , où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et π un plan directeur de P_1 .

En déduire une démonstration de l'égalité $\frac{M_1 M_3}{M_1 M_2} = \frac{M'_1 M'_3}{M'_1 M'_2}$

On retiendra de cet exercice le jeu entre les différents cadres -"affine", analytique, vectoriel- et son efficacité.

II DEUXIEME EXERCICE

ETUDE DE TRANSFORMATIONS SIMPLES

- 1°) Comment définissez-vous les homothéties de $\mathbb{R}^3$? Les translations ?
 - 2°) Soit h une homothétie de centre O, de rapport k ; on note $h(M) = M'$. Montrer qu'il existe une application linéaire $\mathcal{H}$ telle que $\mathcal{H}(\vec{MN}) = \vec{M'N'}$.
 - 3°) Même question avec une translation t de vecteur $\vec{AB}$.
 - 4°) Identifier les applications h et t (nature, éléments caractéristiques).
 - 5°) (Voici une autre caractérisation des homothéties et des translations). On considère une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ qui transforme toute droite D en une droite D' parallèle à D.
- Est-ce qu'une telle application conserve le parallélisme ?
- Montrer qu'une telle transformation est soit une homothétie, soit une translation.
- On pourra raisonner sur les points invariants de la transformation f (supposer successivement que f a au moins 2 puis 1 puis 0 points invariants).

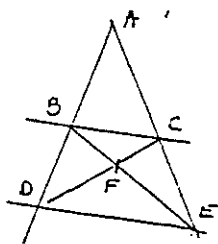
On retiendra de cet exercice l'intérêt du passage au linéaire pour composer et l'intérêt de la considération des points invariants.

III TROISIEME EXERCICE

ETUDE DE CONFIGURATIONS A L'AIDE DE TRANSFORMATIONS.

Deux "classiques"

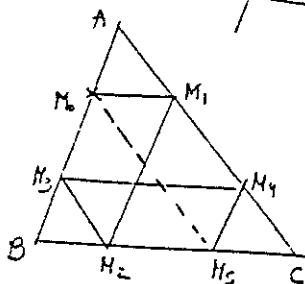
(A)



Démontrer que si (BC) et (DE) sont parallèles, A, F, le milieu de [BC] et le milieu de [DE] sont alignés.

Réciproque ?

(B)



Conf. de "Thomson" ou Tourniquette...
 $(M_0 M_1) \parallel (B C), (M_1 M_2) \parallel (A B), (M_2 M_3) \parallel (A C)$ etc...

Montrer que $M_0 = M_6$

Est-ce que ça peut s'arrêter avant ?

(Il existe des généralisations à d'autres configurations que le triangle)

.../...

Cours : ESPACES AFFINES, SOUS-ESPACES AFFINES, APPLICATIONS
AFFINES

Commentaires sur la feuille F3

Ici on commence à mettre en fonctionnement les outils et le formalisme introduits dans le cours.

De plus, on commence à remplir le catalogue des applications affines "de référence", celles qu'on devra (re)connaître (aussi bien du côté application linéaire associée que du côté affine) :

On a déjà vu

application constante $\neq$ a.l.a. 0

translation $\neq$ a.l.a. Id

homothétie $\neq$ a.l.a. kId

On complète avec les projections de $\mathbb{R}^3$ (et les symétries dans le problème 1), et on admet que les mêmes résultats sont valables dans $\mathbb{R}^2$.

Attention, ces résultats seront considérés comme faisant partie des connaissances dont on pourra se servir.

Plus précisément, on a vu dans F2 que les projections sur un plan parallèlement à une droite et sur une droite parallèlement à un plan sont affines.

Dans la feuille F3, on va étudier une réciproque, à savoir que les applications affines telles que $f^2 = f$ sont des projections (du type précédent) - si toutefois elles sont non constantes et différentes de l'identité.

On va aussi montrer que si f est affine et si c'est seulement son application linéaire associée f qui vérifie $f^2 = f$, alors f n'est pas nécessairement une projection.

Enfin on propose deux études de configuration (en I et III) qui peuvent se faire en utilisant les outils "applications affines" et en particulier symétries et projection.

(F3) ETUDE D'UNE CONFIGURATION

I. On veut résoudre le problème suivant : étant donné n points distincts du plan ($\mathbb{R}^2$, affine), $I_1, \dots, I_n$ ($n \geq 3$), construire, s'il en existe, un polygone $(A_1 A_2 \dots A_n)$ tel que les points $I_1, \dots, I_n$ soient les milieux respectifs des côtés $[A_1 A_2], \dots, [A_n A_1]$.

On étudie d'abord, avec des outils plus ou moins particuliers, les cas $n = 3$ et $n = 4$, puis on passe au cas général qui se traite bien en utilisant des applicateurs affines bien choisis.

- 1°) Soient I_1, I_2, I_3 , 3 points distincts du plan. Résoudre le problème
- a) dans le cadre analytique
 - b) en utilisant une solution géométrique
- 2°) Même question en partant de I_1, I_2, I_3, I_4 .
- 3°) Etudier le cas général (existence, unicité, construction), en utilisant des applications affines qui s'introduisent naturellement dans la situation proposée.
- 4°) Application : construire un pentagone dont on donne les milieux des côtés. Y a-t-il unicité ?

II. ETUDE D'APPLICATIONS AFFINES PARTICULIERES

1°) Réécrire le texte du premier exercice de la 2^{me} séance en utilisant les concepts d'espace affine, se affine, application affine etc... (et en se passant des coordonnées). Comment le résoudre alors ? Comparer + $\textcircled{R}$ $\textcircled{I}$ $\textcircled{C}$ + $\textcircled{E}$ $\textcircled{P}$ $\textcircled{O}$ $\textcircled{U}$ $\textcircled{S}$

2°) On considère une application affine f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, non constante. On suppose $f^2 = f$ et f différente de l'identité. Montrer que f est soit une projection sur un plan parallèlement à une droite soit une projection sur une droite parallèlement à un plan.

On pourra a) étudier $\overrightarrow{f}$

b) montrer que l'image de f est un se affine de sev directeur $\text{Im } \overrightarrow{f}$.

c) montrer que $\overrightarrow{Mf(M)}$ (ou $f(M) - M$) appartient à $\ker \overrightarrow{f}$

Pour conclure, discuter selon la dimension de $\text{Im } \overrightarrow{f}$.

A-t-on le même résultat si f affine et $\overrightarrow{f}^2 = -\overrightarrow{f}$?

3°) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère un plan P de se directeur π et une droite D qui coupe P . A tout point M on associe le point M_1 , intersection de la parallèle à D menée par M et de P , puis M' défini par $\overrightarrow{M_1 M'} = \alpha \overrightarrow{M_1 M}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$) Montrer que l'application $\varphi (M \mapsto M')$ est affine et bijective (donner $\overrightarrow{\varphi}$ et φ^{-1}). Identifier φ si $\alpha = -1$. Quels sont les points fixes de φ ? Une telle application s'appelle affinité de base P , parallèlement à D et de rapport α .

4°) $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère quelconque $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On veut étudier l'application f qui à M de coordonnées (x, y, z) associe M' (x', y', z') tel que

xx $x' = x - 3y + 3z, y' = -3x + y - 3z + 3, z' = -3x + 3y - 5z + 3.$

Montrer que f est affine.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des éléments invariants de f .

On appelle G l'ensemble $\{ \overrightarrow{MM'}, M \in \mathbb{R}^3 \}$. Déterminer G .

On appelle M_1 le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G . De la comparaison de $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M_1M'}$, déduire l'identification de f .

Reprendre systématiquement symétries, projections, affinités.

III. Reprendre l'exercice "la tourniquette" en utilisant des applications affines particulières.

=====

Cours : SOUS-ESPACES AFFINES, POSITIONS RELATIVES, PARALLELISME

Commentaires sur la feuille F4

On fait fonctionner les notions de sous-espace affine et sous-espace affine engendré, parallélisme et barycentres.

F4 I. SOUS ESPACE VECTORIELS, SOUS ESPACES AFFINES...

On se place dans $\mathbb{R}^5$ muni de sa structure affine ou vectorielle selon les cas et rapporté au repère canonique.

1°) Quelle est la nature du sous-ensemble F de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

2°) Quelle est la nature du sous ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

3°) Dans $\mathbb{R}^5$ affine, on appelle D la droite contenant le point $A(1,0,0,0,2)$ et de vecteur directeur $u(1,0,1,1,0)$.

On appelle H le sous espace affine engendré par D et le point $B(0,0,0,1,0)$.

Donner $\overrightarrow{H}$ est la dimension de H .

Est ce que H est parallèle à $\mathcal{F}$?

Montrer que $H \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ en étudiant $\overrightarrow{H} + F$.

Ecrire les équations cartésiennes de D et H .

4°) a) Donner une expression analytique du projecteur p sur F parallèlement à $\overrightarrow{H}$ (c'est à dire donner les composantes de $p(x)$ en fonction de celles de x).

b) Quels sont les points fixes de la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à H ?

c) En déduire une expression analytique de cette projection.

II. BARYCENTRES

* 1°) Soient A, B, C trois points distincts non alignés d'un plan affine.

* a) Montrer que tout point M du plan est barycentre de ces 3 points affectés de coefficients convenables.

Comment caractériser les coefficients correspondants à des points

* intérieurs au triangle ABC ?

* de la droite (AB) ?

* du segment $[AB]$

* de la parallèle à (AB) menée par C ?

* b) On considère le milieu C' de $[AB]$ et les points P et Q situés respectivement au tiers de $[BC]$ et $[AC]$ à partir de B et A .

Montrer que les droites (CC') , (BQ) et (AP) sont concourantes.

2°) Donner une démonstration du théorème de Ménélaüs dans $\mathbb{R}^2$ (affine) utilisant l'outil "barycentre".

* 3°) a) Démontrer que si la restriction d'une application affine à une droite a 2 points fixes, cette restriction est l'identité sur la droite.

Construire un énoncé analogue avec la restriction à un plan.

* b) Montrer que si une figure F de $\mathbb{R}^2$ affine, déterminée par un nombre fini de points, admet un centre de symétrie, ce point est l'isobarycentre des

.../...

points considérés.

Qu'en déduisez-vous sur l'isobarycentre des 4 sommets d'un parallélogramme .

4°) On se place dans $\mathbb{R}^2$ affine, rapporté au repère canonique.

a) On considère n points $A_1, \dots, A_n$, leur enveloppe convexe X , et l'application f de X dans $\mathbb{R}$ qui à tout point de coordonnées (x,y) de X associe $f(M) = px + qy$ (p, q réels donnés).

Démontrer que, si $a_i = f(A_i)$, pour tout M de X :

$$\inf\{a_i\} \leq f(M) \leq \sup\{a_i\}$$

$$1 \leq i \leq n \quad 1 \leq i \leq n$$

En déduire que f possède sur X un maximum et un minimum atteints.

b) Application : optimiser la forme linéaire

$$f(x,y) = 6x + 3y$$

lorsque (x,y) satisfont aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 6 \\ 4x + y \leq 4 \end{cases}$$

5°) Soit ABC un triangle de $\mathbb{R}^2$ (affine) et f l'unique transformation affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = A$

Montrer que, pour tout M , les droites (AM) , $(Bf^2(M))$, $(Cf(M))$ sont concourantes ou parallèles.

=====

Cours : BARYCENTRES

Commentaires sur la feuille F5

Cette feuille sert d'introduction aux espaces vectoriels euclidiens. Elle est conçue pour être travaillée avant le cours correspondant.

Il s'agit ici en effet d'utiliser les connaissances élémentaires sur le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ pour retrouver des propriétés des sous-espaces orthogonaux d'un sous-espace vectoriel (droite ou plan vectoriels), des projecteurs orthogonaux et surtout des symétries orthogonales (les applications linéaires correspondantes, si on ne tient pas compte du produit scalaire, ayant été revues à la première séance).

Le cours consiste ensuite à donner, en toute généralité, les définitions de produit scalaire, norme, sous-espaces orthogonaux et isométries et à généraliser et à étendre ce qu'on a pu démontré dans le cas particulier de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces orthogonaux et sur les symétries orthogonales. On expose ainsi les propriétés générales des isométries d'un espace vectoriel euclidien.

F5 ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

On munit $(\mathbb{R}^3, \text{vect.})$ du produit scalaire usuel noté $x.y$ si x et y appartiennent à $\mathbb{R}^3$.

1°) Soit l une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que le noyau de l est un plan (seu de dimension 2 ou hyperplan) de $\mathbb{R}^3$.

Réciproquement montrer que tout seu de dimension 2, H , de $\mathbb{R}^3$ est le noyau d'une forme linéaire. Que dire de toutes les formes linéaires φ telles que $H = \ker \varphi$? Montrer que, pour toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^3$, il existe un élément u de $\mathbb{R}^3$ unique tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $l(x) = u.x$.

2°) Soit F un seu de $\mathbb{R}^3$, on définit le sous-ensemble $F^\perp$ suivant

$$F^\perp = \left\{ y; y \in \mathbb{R}^3; \forall x \in F, y.x = 0 \right\}$$

 Montrer que F est un seu tel que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

3°) On suppose dans cette question que F est un seu de dimension 1 et on appelle a ($a \neq 0$) un élément engendrant F .

Montrer que $F^\perp$ est un seu de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$.

Que dire de $(F^\perp)^\perp$?

On appelle p_F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$ (projecteur orthogonal)

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $p_F(x) = \frac{(x.a)a}{(a.a)}$ et $p_{F^\perp}(x) = x - \frac{(x.a)a}{(a.a)}$

($p_{F^\perp}$ projecteur parallèlement à F sur $F^\perp$)

Montrer que $p_F(x)$ vérifie : $p_F(x)$ appartient à F et

$$\|p_F(x) - x\| = d(x, F), \text{ où } \|x\| = \sqrt{x.x}.$$

4°) On considère le seu P de $\mathbb{R}^3$ défini par

$P = \{(\alpha, \beta, \gamma); \alpha + \beta + \gamma = 0\}$. Définir un élément u tel que

$$P = \{x; x \in \mathbb{R}^3; x.u = 0\}$$

Trouver $P^\perp$, montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$ et donner une expression de $p_P(x)$ faisant intervenir l'élément u (où p_P est le projecteur sur P parallèlement à $P^\perp$).

On appelle s la symétrie par rapport à P parallèlement à $P^\perp$.

Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^3$,

$$s(x) = x - 2 \frac{(x.u)u}{u.u}$$

En déduire l'expression des coordonnées de $s(x)$ par rapport à celles de x .

5°) Soit G un seu de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $\mathbb{R}^3 = G \oplus G^\perp$.

Montrer, si s désigne la symétrie par rapport à G parallèlement à $G^\perp$ on a, pour tout x , $\|s(x)\| = \|x\|$ (on suppose que $G \neq \mathbb{R}^3$).

Réciproquement montrer qu'une application linéaire f vérifiant $f^2 = \text{Id}$ ($f \neq \text{Id}$) et, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $\|f(x)\| = \|x\|$ est une symétrie orthogonale (c'est à dire par rapport à un seu G , parallèlement au seu $G^\perp$).

6°) Montrer que, si x et y sont 2 éléments distincts de $\mathbb{R}^3$ non nuls et de même norme, il existe une unique symétrie orthogonale σ par rapport à un hyperplan telle que $\sigma(x) = y$.

.../...

7°) Soit g une application linéaire bijective qui vérifie, pour toute symétrie orthogonale $\mathcal{O}$, $g \circ \mathcal{O} = \mathcal{O} \circ g$.

Soit D un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, engendré par a ($a \neq 0$).

Montrer, en utilisant ce qui précède, que $g(D) = D$.

(On peut en déduire que g est une homothétie).

=====

Cours : ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Commentaires sur la feuille F6

Dans cette série d'exercices on utilise implicitement les propriétés de la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

Cela permet de revoir symétries (affines) orthogonales et projections (affines) orthogonales.

Le II est destiné à montrer a posteriori des avantages de l'outil vectoriel. On s'interdit ici en effet d'utiliser autre chose que ce que l'on sait dans $\mathbb{R}^3$, et cela amène à des démonstrations assez lourdes. Lorsqu'on aura la classification des isométries et la possibilité de jouer sur le passage affine/vectoriel, on reprendra ces démonstrations de manière plus rapide.

Le III est un exemple d'étude de configuration à l'aide de propriétés d'isométries.

F6 ESPACES AFFINES EUCLIDIENS (INTRODUCTION)

I. On se place dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien ; on note $d(M,N)$ la distance MN ($\|\overrightarrow{MN}\|$).
Le produit scalaire est le produit scalaire usuel.

1°) On dit que deux sous espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$ sont orthogonaux si leurs sev directeurs F et G sont orthogonaux (c'est à dire que tout élément de F est orthogonal à tout élément de G .) A-t-on nécessairement $F = G^\perp$?
Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à 2 droites distinctes et non parallèles de ce plan.
Expliquer pourquoi la définition usuelle de 2 plans orthogonaux n'est pas celle donnée ci-dessus (On commet un abus de langage, effectivement). Quelle serait la définition correcte (au sens ci-dessus) ?

2°) On appelle projection orthogonale toute projection sur un sous espace affine (de sev directeur F) parallèlement au supplémentaire orthogonal $F^\perp$ (dans $\mathbb{R}^3$ vect.).

Que peut-on dire de l'application linéaire associée ?

Montrer que, si p est une projection orthogonale sur $\mathcal{F}$, pour tout M de $\mathbb{R}^3$
 $d(M, \mathcal{F}) = \inf_{N \in \mathcal{F}} d(M,N) = d(M, p(M)).$

3°) On appelle symétrie orthogonale toute symétrie par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{H}$ parallèlement au supplémentaire orthogonal du sev directeur de $\mathcal{H}$. Que peut dire de l'application linéaire associée ? Est-ce que cette définition coïncide avec la définition utilisée au lycée ?

Etant donnés 2 points A et B de $\mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une seule symétrie orthogonale par rapport à un plan échangeant A et B .

Montrer que ce plan est l'ensemble des points équidistants de A et B (qui est donc un plan, appelé plan médiateur de $[AB]$). (dém. vous)

4°) Soient s et s' deux symétries orthogonales par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\perp$ à où a est élément de $\mathcal{F}^\perp$ ($\mathcal{F}$ sev directeur de $\mathcal{F}$).

Montrer que $s' \circ s = t_{2a}$.

5°) On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 1$.

Donner l'expression des coordonnées (x', y', z') de M' , image de $M(x, y, z)$ par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

II. On se place dans $\mathbb{R}^2$ affine euclidien.

Objectif: simplifications par procédés alternés...

1°) Montrer que toute translation se décompose en un produit de 2 symétries orthogonales par rapport à 2 droites parallèles. (où la définition des symétries orthogonales est la même qu'en I3). On appelle éventuellement axe de la symétrie la droite des points fixes.

2°) Montrer que la composée de 3 symétries orthogonales est une symétrie orthogonale si et seulement si les 3 axes sont concourants ou parallèles.

3°) Soit ABC un triangle, s_1, s_2, s_3 les symétries d'axes $(BC), (CA), (AB)$
Comparer $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ et $s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

Montrer que $s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est une symétrie glissée dont l'axe joint les pieds des

hauteurs issues de A et de C.

4°) Etude de configurations

Soient 3 cercles de même rayon ayant un point commun O et se recoupant en A, B et C.

Démontrer que le cercle circonscrit à ABC a le même rayon que les 3 cercles.

=====

Cours : ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

(F₆) Compléments (à faire avant le cours sur isométries affines).

On se place dans $\mathbb{R}^2$ (afine euclidien).

Soit D une droite et u un vecteur non orthogonal au vecteur directeur de D . On va étudier l'application $f = t_u \circ s_D$ où t_u est la translation de vecteur u et s_D la symétrie orthogonale d'axe D .

1) Montrer que f n'a pas de points fixes.

2) On appelle Δ la droite image de D par la translation $t_{u/2}$ et on appelle v le projeté de u sur $\vec{\Delta}$ (orthogonal).

Montrer que $f = t_v \circ s_{\Delta}$ (t_v translation de vecteur v , s_{Δ} symétrie orthogonale d'axe Δ).

3) Montrer que $t_v \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_v$.

4) On suppose qu'il existe une droite Δ' et un vecteur v' de $\vec{\Delta}'$ tels que $t_v \circ s_{\Delta} = t_{v'} \circ s_{\Delta'}$.

Montrer que Δ et Δ' sont parallèles, puis confondues.

Montrer que $v = v'$. Montrer enfin que Δ est la seule droite globalement invariante par f .

5) Que pouvez-vous dire du milieu de $[Mf(M)]$?

f s'appelle "symétrie glissée".

Une isométrie sans points fixes qui n'est pas une translation est une symétrie glissée.

Cours : LA DIMENSION DEUX (VECTORIEL ET AFFINE)

(F₇) Compléments sur les isométries planes (plan affine euclidien réel).

1) Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O . Déterminer les isométries suivantes (où on note $R_{X,\theta}$ la rotation de centre X et d'angle

$$\theta) : R_{B, \frac{2\pi}{3}} \circ R_{C, \frac{2\pi}{3}}, t_{\overrightarrow{BC}} \circ R_{A, \frac{2\pi}{3}}, R_{A, \frac{2\pi}{3}} \circ R_{B, \frac{\pi}{3}} \circ R_{C, \frac{\pi}{3}}, R_{A, \frac{\pi}{3}} \circ R_{O, \frac{2\pi}{3}}.$$

2) (Tiré de l'examen de septembre 1989).

Dans un plan affine euclidien E réel on repère les points par des coordonnées cartésiennes (x,y) relatives à un repère orthonormé.

On note φ la transformation de ce plan qui envoie le point de coordonnées (x,y) sur le point de coordonnées (X,Y) où $X = \frac{3x+4y+8}{5}$ $Y = \frac{4x-3y-1}{5}$.

a) Prouver que lorsque M décrit E , le milieu de $[M, \varphi(M)]$ décrit une droite dont on précisera une équation.

b) Montrer que φ est une isométrie de E dont on précisera la nature.

c) Quel est l'axe de φ ? Quelle est la composante translation dans la décomposition canonique de φ ?

φ admet-elle des points fixes ?

3) Dans le plan affine euclidien réel on se donne un cercle et trois de ses diamètres d_1, d_2, d_3 . Soit M_0 un point du cercle. On construit M_1 symétrique de M_0 par rapport à d_1 , M_2 symétrique de M_1 par rapport à d_2 , M_3 symétrique de M_2 par rapport à d_3 , et on continue. Démontrer qu'on retrouve M_0 après un nombre fini de symétries (on précisera le plus petit de ces nombres).

Commentaires sur la feuille F8 (isométries affines de $\mathbb{R}^3$)

On donne alors la feuille F8 dont les exercices II et III permettent encore d'utiliser ces rotations et de travailler sur les symétries par rapport à un plan.

Le I sert lui de révision à ce qui a été vu dans $\mathbb{R}^2$, et peut être traité à part (ou laissé à faire seuls aux étudiants, à titre de renforcement par réinvestissement).

Le cours spécifique sur $\mathbb{R}^3$ permet ensuite de préciser quelles sont toutes les isométries vectorielles et affines de $\mathbb{R}^3$.

Le problème 4 sert à réviser les isométries.

(F₈) Isométries.

(I tiré du Problème de Septembre 1989)

I. Notations : E est un plan affine euclidien. Si $M \in E$, S_M désigne la symétrie de centre M . Si M et N sont des points distincts de E , $\langle M, N \rangle$ désigne la droite passant par M et N . On considère trois points A, B, C non alignés de E et on choisit i, j, k vecteurs unitaires dirigeant respectivement les droites $\langle B, C \rangle$, $\langle C, A \rangle$, $\langle A, B \rangle$. Enfin on note α (resp. β, γ) la rotation de centre A (resp. B, C) qui envoie j (resp. k, i) sur $-k$ (resp. $-i, -j$).

1) Quel est l'effet de $\beta\alpha\gamma$ sur la droite $\langle B, C \rangle$ et sur le vecteur i ?
En déduire que $\beta\alpha\gamma$ est une symétrie S_P avec $P \in \langle B, C \rangle$.

2) Montrer de même que $\gamma\beta\alpha$ est une symétrie S_Q et $\alpha\gamma\beta$ est une symétrie S_R avec $Q \in \langle C, A \rangle$, $R \in \langle A, B \rangle$.

3) Prouver $\alpha\gamma(P) = R$, $\beta\alpha(Q) = P$, $\gamma\beta(R) = Q$. (On pourra considérer $S_R[\alpha\gamma(P)]$ ou évaluer le conjugué $(\alpha\gamma) S_P(\alpha\gamma)^{-1}$).

4) Justifier $\beta^2\alpha^2\gamma^2 = \text{Id}$. (On pourra considérer l'image du symétrique de A par rapport à $\langle B, C \rangle$, ou exprimer $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ comme produit de symétries par rapport à des droites). En déduire que $\alpha\gamma, \beta\alpha$ et $\gamma\beta$ commutent.

5) Montrer que $\alpha\gamma, \beta\alpha$ et $\gamma\beta$ sont des rotations ayant un même centre I .
Que représentent pour le triangle A, B, C les points I, P, Q, R ?

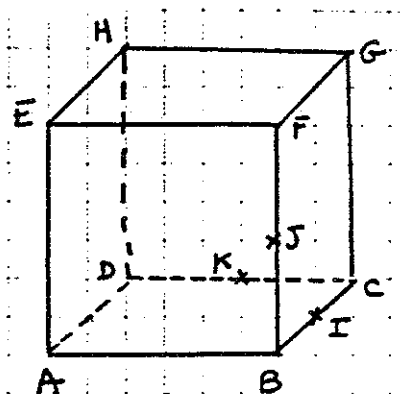
II. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui a un vecteur v de coordonnées (x, y, z) associe $f(v)$ de coordonnées (x', y', z') définies par

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ y' = \frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z \\ z' = -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z \end{cases}$$

- Montrer que f est une isométrie.
- Quel est l'ensemble $\mathcal{I}$ des éléments invariants de f ?
- Déterminer une base orthonormée directe complétant une base orthonormée de $\mathcal{I}$.
- Trouver la matrice de la restriction de f à $\mathcal{I}^\perp$ ($\mathcal{I}^\perp$ étant rapporté à la base de c)).

Identifier f complètement.

III. On considère le cube $ABCDEFGH$ (de côté de longueur a).



1) Soient I, J, K les milieux de $[BC]$, $[BF]$, $[DC]$. Montrer que ces 3 points sont dans le plan médiateur de $[AC]$; trouver l'intersection de ce plan avec les faces du cube.

2) On considère une application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, affine, qui laisse fixes I, J, K et telle que $f(A) = G$. Montrer que f est unique et que c'est une isométrie que l'on caractérisera.

3) Montrer qu'il existe une rotation g de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\frac{\pi}{2}$, telle que F et C aient comme images respectives E et G . Préciser l'axe et l'angle de g , et donner les images des sommets du cube par g .

Que pouvez-vous dire de g^2 ? g^3 ? g^4 ?

4) Montrer qu'il existe une rotation h de $\mathbb{R}^3$, d'axe (AG) , telle que E soit l'image de B . On pourra pour cela montrer que le plan EBD est orthogonal à (AG) et préciser l'intersection de ce plan et de (AG) . Donner l'angle de la rotation choisie et préciser les images des sommets du cube par h .

Montrer que le plan IJK est globalement invariant par h .

Quelles sont les images de I, J, K ?

Que peut-on dire de h^2 ? h^3 ? hg ? gh ?

5) A partir des questions 3) et 4) trouver 16 isométries laissant le cube globalement invariant.

Pouvez-vous en trouver d'autres ?

6) Est ce que f laisse le cube globalement invariant ?

Trouver diverses symétries qui laissent le cube globalement invariant (on n'essaiera pas de formaliser les démonstrations).

Commentaires sur la feuille F9 (entre les isométries et les groupes)

Ces exercices servent de transition entre les deux parties du cours (isométries et groupes).

En effet les ensembles d'isométries cherchés sont des sous-groupes, et, à partir du II, on peut utiliser très simplement cette propriété, rappelée à l'occasion du I, pour résoudre les questions posées.

Il suffit en I de faire rappeler la définition aux étudiants, ils la savent puisqu'ils ont travaillé sur des espaces vectoriels qui sont déjà des groupes !

On peut ensuite rappeler en cours, donc plus systématiquement, les premières propriétés des groupes (morphismes, sous-groupes, stabilités, exemples classiques...),

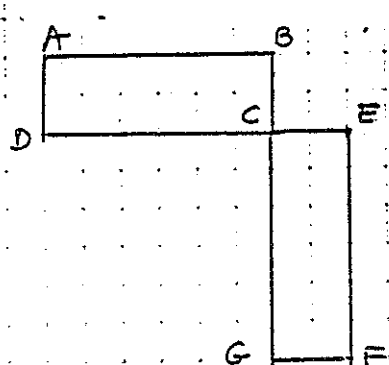
(F9) Sous-groupes d'isométries particuliers.

1. 1)a) Quelles sont toutes les isométries du plan (affine euclidien) telles que l'image d'un rectangle ABCD soit ce rectangle ?

On dit que le rectangle est conservé par l'isométrie s'il est ainsi globalement invariant.

b) Etudier l'ensemble des isométries obtenues (les composer, en chercher les inverses...)

2)



On étudie la figure ci-contre (ABCD, CEFG sont deux rectangles, $AB = CG$, $AD = CE$ et D,C,E alignés).

a) Montrer que les 2 rectangles sont "isométriques" : il existe une isométrie (au moins) telle que l'image de ABCD soit CEFG. Exhiber une telle isométrie.

b) En utilisant le 1)b) trouver toutes les isométries du plan qui "envoient" le rectangle ABCD sur le rectangle CEFG (globalement).

II. On considère dans $\mathbb{R}^3$ (affine euclidien) un tétraèdre régulier ABCD.

1) Quelles sont les rotations dont l'axe passe par un sommet du tétraèdre qui laissent le tétraèdre globalement invariant ?

2) Commencer la table de composition de ces rotations et des nouvelles transformations qui apparaissent s'il y en a. Que constatez-vous ?

3) On considère la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de [AB]. Quelle est l'image du tétraèdre par cette symétrie ?

En déduire d'autres antidéplacements qui laissent le tétraèdre globalement invariant. Est-ce que vous avez obtenu un groupe ?

4) Donner un majorant du cardinal de l'ensemble des isométries laissant invariant le tétraèdre, en utilisant le fait qu'une telle isométrie est déterminée par les images des sommets.

5) En déduire toutes les isométries laissant le tétraèdre invariant (globalement) et vérifier que ce sous-ensemble est un groupe dont le sous-ensemble

trouvé en 2) est un sous-groupe. (On n'essaiera pas d'expliciter les antidéplacements).

Commentaires sur la feuille F10 (pour commencer la collection des groupes "usuels")

Cette feuille est destinée à faire fonctionner les premières propriétés des groupes, et à constater en particulier tout ce que l'on peut faire déjà dans le cas d'un petit nombre d'éléments.

Par la suite, on demande connaître les résultats établis ici pour $n = 2, 3$ et 4 .

Les cours suivants introduisent les notions nouvelles de sous-groupe distingué et de groupe monogène (et cyclique).

Les notions de commutateurs et de sous-groupe dérivée ne sont pas faites en cours, elles peuvent être traitées en exercice (cf. feuille F12), on ne demande pas d'en savoir la définition.

Produits directs et semi-directs ne sont pas au programme.

(F₁₀) Premiers exemples de groupes.

- I. 1) Montrer que tous les groupes d'ordre 2 sont isomorphes.
2) Montrer que tous les groupes d'ordre 3 sont isomorphes.
3) Etudier les groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
4) Est ce que le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe des isométries conservant le rectangle (cf. F₉) ?

Classer tous les groupes d'ordre 4 (à un isomorphisme près).

- 5) Etudier les sous-groupes des groupes d'ordre 4.
6) Etudier la commutativité des groupes d'ordre 2, 3 et 4.

II. 1) Etudier l'ensemble des isométries du plan affine euclidien conservant un triangle équilatéral donné (structure, énumération des éléments composant cet ensemble).

- 2) Quels en sont les sous-groupes ? Y-a-t-il commutativité ?
3) Y-a-t-il un rapport entre cet ensemble et $\mathcal{S}_3$?

Commentaires sur les feuilles F11 et F12 (travail sur les groupes après les premiers cours)

Ces exercices font fonctionner les connaissances sur les groupes, la feuille F12 (II, III, IV) est difficile et non indispensable - on peut par exemple laisser les étudiants qui se sentent plus à l'aise travailler seuls sur ces exercices.

Il reste ensuite à traiter en cours la notion de groupe opérant sur et la méthode de l'orbite

On aborde aussi le groupe symétrique, mais à titre d'exemple.

On demande seulement de savoir composer les permutations, de connaître la définition des transpositions et des cycles ainsi que de savoir trouver la signature d'une permutation. Par contre on ne demande pas de connaître la décomposition en cycles.

(F_{II}) Autres exemples de groupes - groupes cycliques - groupes finis.

I. On se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

A) 1) Soient φ et ρ deux rotations ; montrer que l'isométrie conjuguée de ρ ($\varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$) est une rotation de centre $\varphi(O)$ si O est le centre de ρ .

2) Montrer que 2 rotations qui commutent ont même centre.

3) Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$ est commutatif.

B) Soit $\mathcal{F}$ une partie du plan et $I(\mathcal{F})$ l'ensemble des isométries conservant $\mathcal{F}$.

1) Montrer que $I(\mathcal{F})$ est un groupe, et que les déplacements de $I(\mathcal{F})$ en sont un sous-groupe.

2) Montrer que si C est un centre de symétrie de $\mathcal{F}$, alors, pour tout f de $I(\mathcal{F})$, $f(C)$ est aussi centre de symétrie de $\mathcal{F}$.

3) A-t-on le même résultat pour D axe de symétrie de $\mathcal{F}$ et $f(D)$?

4) Montrer que si $\mathcal{F}$ est bornée, il n'existe pas de translation dans $I(\mathcal{F})$.

5) Montrer que s'il n'existe aucune translation dans $I(\mathcal{F})$, alors toutes les rotations qui conservent $\mathcal{F}$ (s'il y en a) ont même centre.

6) Montrer que si $I(\mathcal{F})$ est fini, et si $I(\mathcal{F})$ contient au moins un anti-déplacement σ , alors on peut obtenir tous les antidéplacements à partir de σ et des déplacements de $I(\mathcal{F})$. En déduire que $\text{Card } I(\mathcal{F})$ est pair.

II. 1) On appelle frise de vecteur $\vec{u}$ une partie du plan affine euclidien, $\mathcal{F}$, telle que l'ensemble des vecteurs de translation qui conservent $\mathcal{F}$ soit $\{n\vec{u}\}$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que si une rotation conserve $\mathcal{F}$, c'est une symétrie centrale.

2) On appelle pavage de base $(\vec{u}, \vec{v})$ une partie du plan affine euclidien, soit $\mathcal{G}$, telle que l'ensemble des vecteurs de translation qui conservent $\mathcal{G}$ soit $\{n\vec{u} + p\vec{v}\}$ où n et p sont éléments de $\mathbb{Z}$. On suppose que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base. Trouver les angles des rotations du plan qui conservent $\mathcal{G}$ (s'il en existe).

III. Soit G un groupe fini d'ordre $n \geq 2$, d'élément neutre e ; on note $a, b, \dots$ des éléments de G .

1) Montrer que si n est premier, G est cyclique et commutatif.

2) Montrer que si a, b et ab sont d'ordre 2, a et b commutent.

3) Comparer l'ordre de a et a^{-1} .

4) Montrer que l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments du groupe en est un sous-groupe (le centre $Z(G)$). Que pouvez-vous dire des centres des groupes à 2, 3, 4, 5 éléments ?



IV. 5) Si G est fini d'ordre pair, il y a un élément de G différent de l'élément neutre d'ordre 2.

6) Si dans un groupe tous les éléments sont d'ordre 2 le groupe est commutatif.

(F₁₂) I. Quelques propriétés élémentaires de S_3 .

On note τ_i les transpositions de $\{1,2,3\}$ laissant fixe i ($i=1,2,3$) ;
on note σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer σ^2 , $\sigma \circ \tau_1$, $\tau_1 \circ \sigma$.

Montrer que S_3 n'est pas commutatif.

2) Donner les ordres de tous les éléments de S_3 .

3) Quels sont les sous-groupes H, K, L, M engendrés respectivement par $\tau_1, \tau_2, \sigma, \tau_3$ et σ ?

~~Montrer que HK et KH ne sont pas des sous-groupes de S_3 .~~

Montrer que H n'est pas un sous-groupe distingué de S_3 .

Montrer que L est un sous-groupe distingué de S_3 .

4) Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux sous-groupes d'un groupe $\mathcal{G}$.

a) Montrer que $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{H}\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathcal{H}$ - retrouver ainsi une partie de 3).

b) Si $\mathcal{H}\mathcal{K}$ est un sous-groupe montrer que

$$\text{card } \mathcal{H}\mathcal{K} = \frac{\text{card } \mathcal{H} \times \text{Card } \mathcal{K}}{\text{card}(\mathcal{H} \cap \mathcal{K})}$$

c) Montrer que $\mathcal{H}\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

II. Soit G un groupe ; pour tous les éléments $x, y, \dots$ de G on définit le commutateur de x et y par $[x, y] = x^{-1} y^{-1} xy$.

1) Montrer que si φ est un endomorphisme de groupes de G dans G , l'image de $[x, y]$ est $[\varphi(x), \varphi(y)]$.

2) Montrer que l'ensemble des commutateurs est invariant par tous les automorphismes de G .

3) Montrer que le sous-groupe engendré par l'ensemble des commutateurs des éléments de G est invariant par tous les automorphismes de G . En déduire que c'est un sous-groupe distingué, appelé sous-groupe dérivée de G et noté $D(G)$.

4) Quel est le sous-groupe dérivé d'un groupe commutatif ?

5) Quel est le sous-groupe dérivé de $O(2)$?

6) Montrer que $G/D(G)$ est commutatif.

7) Soient H et K deux sous-groupes distingués de G , vérifiant $H \cap K = \{e\}$. Montrer que tout élément de H commute avec tout élément K . En déduire que HK est un sous-groupe, dont on précisera l'ordre.

8) Soit H un sous-groupe distingué de G : G/H est commutatif si et seulement si $H \supset D(G)$.

III. Soit G un groupe, H un sous-groupe.

1) Montrer que si x est un élément de G , xHx^{-1} est un sous-groupe de G .

2) Montrer que le centre d'un groupe en est un sous-groupe distingué, noté $Z(G)$.

3) On considère les automorphismes de G de la forme σ_a définis par $\sigma_a(x) = axa^{-1}$ pour tout x (a est un élément de G). Montrer que l'ensemble de ces automorphismes est un sous-groupe du groupe $\text{Aut}(G)$ de tous les automorphismes de G . Montrer que ce sous-groupe noté $\text{Int}(G)$, est distingué dans $\text{Aut}(G)$.

4) Montrer que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\text{Int}(G)$.

Commentaires sur la feuille F13

En fait on va faire fonctionner cette méthode de l'orbite (calcul du nombre d'éléments d'un sous-groupe d'isométries laissant invariant une figure par introduction de l'action sur un ensemble sur lequel le groupe opère) : c'est l'objet de la feuille F13.

On fait aussi chercher dans cette feuille la structure des sous-groupes finis d'isométries de $\mathbb{R}^2$. Toutefois, on ne demande pas de retenir ce dernier résultat.

(F₁₃) - Groupes d'isométries du polygone régulier - Sous-groupes finis d'isométries de $\mathbb{R}^2$ (affine euclidien).

Cette feuille correspond exactement au polycopié de M. Mazet, de la page 286 à la page 291.

On se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$; n désigne un entier supérieur ou égal à 3 et O un point fixe du plan.

I. On considère un polygone régulier convexe à n côtés de centre $O^{(*)}$; on appelle A un de ses sommets et $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses n sommets. On cherche à décrire le groupe des isométries (resp. isométries directes) qui conservent globalement $\mathcal{S}$ - noté $\text{Isom}(\mathcal{S})$ (resp. $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$).

1) Si on note R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, montrer que le groupe engendré par R , noté $\langle R \rangle$, est un groupe cyclique d'ordre n et que $\langle R \rangle \subset \text{Isom}^+(\mathcal{S})$.

2) On fait agir $\text{Isom}^+ \mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ par $(\varphi, S) = \varphi(S)$ si S est un des sommets du polygone et φ un élément de $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$.

Vérifier qu'on a bien une action de groupe sur un ensemble.

Quelle est l'orbite de A ? Quel est le fixateur de A ?

En déduire la description de $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$.

3) Dans quel cas le polygone considéré admet-il un centre de symétrie ?

4) On appelle Δ la droite (OA) et on note S_Δ la symétrie d'axe Δ .

a) Montrer que, pour $0 < p < n$, $S_\Delta \circ R^p \circ S_\Delta = R^{-p}$.

b) En déduire que Δ est un axe de symétrie du polygone considéré.

5) Quel est le nombre d'éléments de $\text{Isom}(\mathcal{S})$?

Décrire toutes les symétries par rapport à des droites de $\text{Isom}(\mathcal{S})$. Y-a-t-il d'autres isométries indirectes conservant $\mathcal{S}$?

6) Représenter un polygone régulier à 7 côtés (resp. 8 côtés) et décrire toutes les isométries qui les conservent.

II. 1) Quelles sont les isométries directes d'ordre fini ?

2) On appelle $G(O,n)$ l'ensemble des rotations de centre O et d'angle $\frac{2p\pi}{n}$ ($p \in \mathbb{Z}$). Montrer que $G(O,n)$ est un groupe commutatif et que

$$G(O,n) = \langle R \rangle.$$

Que dire de $G(O,n)$ et $G(O',n)$ si O' est un point de $\mathbb{R}^2$ distinct de O ?

3) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par O ; on appelle $G(O,D,n)$ le groupe engendré par la symétrie d'axe D , notée S_D , et le groupe $G(O,n)$. Montrer que $G(O,D,n) = \text{Isom}(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n sommets, de centre O et dont un des sommets appartient à D .

4) Montrer que tout sous-groupe fini G du groupe des isométries directes de $\mathbb{R}^2$ est du type $G(O,n)$ (où n est l'ordre de G).
On pourra faire agir G sur $\mathbb{R}^2$ par $(\varphi, M) = \varphi(M)$ si M est un point de $\mathbb{R}^2$; on montrera que l'orbite de M est finie, et globalement invariante par tous les éléments de G ; on en déduira l'existence d'un point O laissé fixe par tous les éléments de G et on conclura.

5) Soit H un sous-groupe fini du groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$, contenant une isométrie indirecte notée φ . On appelle p l'ordre de H . On appelle H^+ l'ensemble des isométries directes de H .

a) Montrer que H^+ est un sous-groupe de H ; en déduire que H^+ est du type $G(O,n)$ - on donnera l'expression de n en fonction de p .

b) Montrer que H est engendré par φ et H^+ .

c) Montrer que φ est une symétrie par rapport à une droite D passant par O ; en déduire que H est du type $G(O,D,n)$.

6) Que pouvez-vous dire d'un sous-groupe d'isométries à 11 éléments ?
D'un sous-groupe d'isométries à 6 éléments commutatif ?

(*) On rappelle qu'un polygone régulier à n côtés est inscriptible dans un cercle de centre O , et, par définition même, qu'on passe d'un sommet au sommet suivant par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ (cf. les images des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$).

L'isobarycentre de l'ensemble de sommets est O : si n pair, comme $R(O,\pi)$ est la puissance $\left(\frac{n}{2}\right)^e$ de $R\left(O, \frac{2\pi}{n}\right)$ les sommets sont 2 à 2 diamétralement

opposés sur le cercle, ce qui permet en les associant ainsi de montrer que O est leur isobarycentre ; si n est impair, la démonstration géométrique est plus difficile ; par contre, en passant dans $\mathbb{C}$, on peut écrire directement

que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik \frac{2\pi}{n}} = 0$ (en utilisant la formule donnant la somme des n premiers

termes d'une série géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ }, et ceci implique que O est isobarycentre (pour tout n d'ailleurs).

Problèmes

Dès le premier problème, lorsque je rends les copies, les étudiants relèvent leurs erreurs sur une feuille de "suivi" qui est jointe au problème suivant et ainsi de suite. Cela permet à la fois aux étudiants de prendre conscience de certaines erreurs et de vérifier leur persistance s'il y a lieu, donc d'essayer plus consciemment de repérer et d'éliminer au moins les erreurs qui sont faites plusieurs fois.

De plus à chaque problème on signale ce qu'il y a à en retenir, tant sur le plan des connaissances strictes (nouvelles ou mises en oeuvre) que sur celui des démonstrations (outils plus ou moins efficaces) ou encore du point de vue des idées générales qui peuvent être raccrochées.

Dans le problème 1, on insiste ainsi

- * sur le caractère "procédural" de ce qu'on demandait en III (critère d'alignement et non théorème d'alignement).
- * sur les différences affine/vectoriel
 - on ne peut pas parler de f si on ne sait pas encore que f est affine
 - si $f^2 = 0$, cela ne veut pas dire que $f = 0$.
- * sur le fait que pour connaître une application affine sur une droite il suffit de connaître l'image de deux points (cf. IV).

Problème n°1

I Donner, en justifiant la réponse, un exemple d'application de $\mathbb{R}^3$ ou d'une partie de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même non affine (ou non restriction d'une application affine).

* II Etude d'une configuration par utilisation d'applications affines du plan (le théorème de Ménélaüs et une application).

A) Soit ABC un triangle et Δ une droite qui coupe en A' , B' , C' respectivement les droites $\langle BC \rangle$, $\langle AC \rangle$, et $\langle AB \rangle$. On suppose que A' , B' et C' sont distincts des sommets du triangle.

1) En utilisant une projection sur $\langle AB \rangle$ parallèlement à Δ , montrer que

$$(*) \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

2) Montrer cette égalité $(*)$ en utilisant la composition des trois homothéties de centre respectif A' , B' et C' envoyant respectivement C sur B , A sur C et B sur A .

B) Réciproquement, on se donne un triangle ABC et trois points A' , B' , C' distincts des sommets, appartenant respectivement à $\langle BC \rangle$, $\langle CA \rangle$ et $\langle AB \rangle$ et vérifiant $(*)$. Montrer que A' , B' et C' sont alignés.

C) Présenter sous forme de théorème la condition numérique obtenue ci-dessus pour caractériser l'alignement de trois points pris sur les côtés d'un triangle (théorème de Ménélaüs).

D) Soit ABC un triangle, P , Q , R trois points alignés, distincts des sommets et appartenant respectivement à $\langle BC \rangle$, $\langle CA \rangle$, $\langle AB \rangle$ et P' , Q' et R' leurs symétriques par rapport aux milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que P' , Q' et R' sont alignés.

III Comment démontrer que trois points du plan sont alignés en utilisant une projection ou une symétrie ? Donner un exemple.

IV Etude d'applications particulières.

On munit $\mathbb{R}^3$ (affine) d'un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On veut identifier l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, qui, au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z')

suivantes :

$$x' = 2y + z - 1,$$

$$y' = y,$$

$$z' = x - 2y + 1.$$

L'application est-elle affine, bijective ? Calculer f^{-1} .

Quel est l'ensemble Σ des points fixes de f ?

Déterminer $F = \{\overrightarrow{MM'}, M \in \mathbb{R}^3\}$.

On appelle M_1 le projeté de M sur Σ parallèlement à F . Comparer $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M,M'}$ et conclure.

2) Donner les coordonnées (x', y', z') de l'image M' de $M(x, y, z)$

* par la projection sur le plan P d'équation $(x + y - z = 1)$ parallèlement à la droite D passant par $A(1, 1, -1)$ et de vecteur directeur de composantes $(1, 0, -1)$,

* par la projection sur D parallèlement à P ,

* par la symétrie par rapport P à parallèlement à D ,

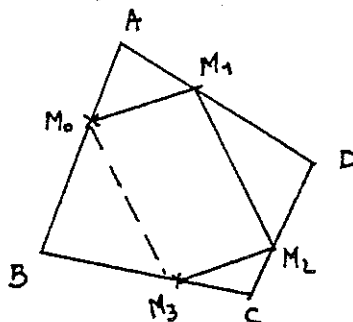
* par une homothétie de votre choix mais dont le centre n'est pas O (préciser centre, rapport et application linéaire associée).

* VI Effets des transformations affines sur certains rapports d'aires.

Montrer qu'une bijection affine conserve les rapports d'aires de parallélogrammes.

VII Une première généralisation de la "tourniquette"

Soit $ABCD$ un quadrilatère, et M_0 un point de $[AB]$. On projette M_0 sur (AD) parallèlement à (BD) en M_1 , puis M_1 sur (DC) parallèlement à (AC) , et on continue. En utilisant la composition des projections qui interviennent montrer que $M_4 = M_0$.



On pourra ne pas rédiger VI + VII

Problème n°2

I On veut déterminer toutes les applications affines f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, différentes de l'identité, qui vérifient $f^2 = \text{Id}$.

1) Montrer que les symétries (centrales, par rapport à une droite parallèlement à un plan, par rapport à un plan parallèlement à une droite) sont des applications affines involutives.

2) Réciproquement on considère une application affine f , différente de l'identité, et vérifiant $f^2 = \text{Id}$.

a) Montrer que f est bijective.

b) Montrer que l'application linéaire associée est une symétrie vectorielle par rapport à un sous-espace vectoriel noté F , parallèlement à un sous-espace vectoriel noté G (cf. exercice de la première séance).

c) Montrer que l'ensemble des points fixes de f n'est pas vide, en considérant le milieu de $[Mf(M)]$. Montrer que cet ensemble Φ est un sous-espace affine, dont on précisera le sous-espace directeur.

d) Montrer que le sous-espace affine Γ engendré par M et $f(M)$ est parallèle à G (considéré comme sous espace affine). Montrer que l'intersection de Φ et Γ n'est pas vide et la préciser.

e) En déduire que f est une symétrie au sens de 1) (on distinguera trois cas selon la dimension de F).

f) Exprimer f en fonction de la projection sur Φ parallèlement à G . Y aurait-il une autre façon de démontrer la question 2) ?

3) Soit k une bijection affine de $\mathbb{R}^3$ et f une symétrie affine de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $k \circ f \circ k^{-1}$ est une symétrie ; en préciser les éléments caractéristiques.

4) On se donne deux symétries (affines) s et s' , parallèlement au même sous-espace G et par rapport respectivement à Σ et $\Sigma + u$, où u est un élément de G . Identifier l'application $s \circ s'$.

5) On considère une application affine g de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, non constante et différente de l'identité, telle que l'application linéaire associée $\vec{g}$ vérifie

$$\vec{g}^2 = \text{Id}.$$

Montrer que si g admet un point fixe, g est une symétrie affine dont on déterminera l'ensemble des points fixes.

Est-il possible que g n'admette pas de points fixes ? Que peut-on alors dire de g ?

II Dans le plan affine réel, on considère deux points A et B et deux nombres réels α et β vérifiant $\alpha + \beta + 1 \neq 0$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout M associe le barycentre de (A, α) , (B, β) et $(M, 1)$.

Montrer que f est affine et la déterminer (on pourra étudier l'application linéaire associée et les points fixes éventuels).

★ III Une étude de configuration

1) Soit ABC un triangle, trois points A' , B' et C' respectivement sur les droites (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle.

Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si on a l'égalité suivante (théorème de Ceva)

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

On pourra utiliser l'outil barycentre pour démontrer l'égalité cherchée lorsque les droites sont concourantes.

2) Quelles sont toutes les concourances classiques dans le triangle que l'on peut ainsi retrouver ?

Montrer en particulier que les trois droites qui joignent les sommets du triangle et les points de contact du cercle inscrit dans le triangle avec les côtés opposés aux sommets sont concourantes.

On pourra ne pas rédiger III

Problème n°3

I Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^4$ rapporté à un repère orthonormé on considère le sous-ensemble H des points M dont les coordonnées vérifient

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 1$$

$$x_3 + x_4 = -1.$$

1) Montrer que cet ensemble est un sous-espace affine dont on précisera la dimension.

2) Déterminer $\vec{H}^\perp$.

3) Déterminer le sous-espace affine G engendré par les points A_0, A_1, A_2, A_3 de coordonnées respectives $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, 2, 0)$, $(2, 1, 1, -2)$ et $(0, -3, 1, 0)$. Comparer $\vec{G}$ et $\vec{H}^\perp$.

Déterminer $G \cap H$.

4) On considère l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie, pour tout point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) , par les coordonnées suivantes de f(M)

$$11x'_1 = 7x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2$$

$$11x'_2 = -8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4$$

$$11x'_3 = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 10x_4 - 10$$

$$11x'_4 = 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - x_4 - 12$$

Est-ce que f est affine ? Est-ce une isométrie ? Est-elle bijective ?

A-t-elle des points fixes ?

Identifier f le plus précisément possible.

II Comment démontrer que trois droites de $\mathbb{R}^2$ (espace affine réel) sont concourantes en utilisant l'outil barycentre ?

III Le plan affine euclidien réel est muni du repère (O, i, j) orthonormé.

On considère la droite D d'équation

$$y - 2x + 3 = 0.$$

1) Donner l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à D (c'est à dire donner les coordonnées de l'image d'un point en fonction des coordonnées de ce point).

2) On veut reconnaître l'application f qui à M de coordonnées (x, y) associe M' de coordonnées (x', y') données par

$$x' = x + 2y + 2, \quad y' = 2x + 4y - 7.$$

Cette application est-elle affine ? Est-ce une isométrie ?

A-t-elle des points fixes (à déterminer le cas échéant) ?

Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

Montrer que f peut se décomposer en le produit d'une projection orthogonale par une homothétie que l'on précisera.

3) On considère l'application g qui à M de coordonnées (x, y) associe M' de coordonnées (x', y') données par

$$x' = (-3x + 4y + 17)/5, \quad y' = (4x + 3y + 4)/5.$$

Cette application est-elle affine ? Est-ce une isométrie ?

A-t-elle des points fixes (à déterminer le cas échéant) ?

Montrer que pour tout M le milieu du segment $[Mg(M)]$ appartient à une droite fixe.

En déduire la nature de g .

Problème n°4

Première partie

I Etant donnés (A, B) et (A', B') deux couples de points distincts de $\mathbb{R}^2$ tels que $\| \overline{AB} \| = \| \overline{A'B'} \|$, montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g tels que $f(A) = g(A) = A'$ et $f(B) = g(B) = B'$. Exprimer g en fonction de f et de la symétrie orthogonale par rapport à (AB) .

II Soit (i, j) une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (espace vectoriel). On note D le sous-espace vectoriel engendré par i , $r(\theta)$ la rotation vectorielle d'angle θ , D_θ l'image de D par $r(\theta)$, et $s(\theta)$ la symétrie vectorielle orthogonale d'axe D_θ .

- 1) Donner la matrice de $s(\theta)$ dans la base (i, j) .
- 2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $s(\varphi)$ et $r(\theta)$ commutent (on pourra utiliser la conjugaison des symétries vectorielles).

III (tiré du premier partiel du certificat C_4 d'algèbre et géométrie de janvier 1990)

Dans un espace affine E on fixe un repère cartésien (O, i, j) et l'on considère la transformation φ qui envoie le point de coordonnées (x, y) sur le point de coordonnées (x', y') où:

$$\begin{aligned}x' &= 4x - 3y + 1 \\y' &= 3x - 2y + 2.\end{aligned}$$

1° φ est-elle bijective?

2° Soit $u = ai + bj$ un vecteur de $\vec{E}$. A quelles conditions sur a et b la translation T_u commute-t-elle avec φ ? Peut-on décomposer φ en $\psi \circ \tau$ où ψ admet au moins un point fixe et τ est une translation qui commute avec φ ?

3° Quelles sont les droites D de E telles que D et $\varphi(D)$ soient parallèles? Quelles sont les droites globalement invariantes par φ ?

Deuxième partie

I On se place dans $\mathbb{R}^3$ (espace affine) muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k) .

1) Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie, pour tout point de coordonnées (x, y, z) , par

$$f(x, y, z) = 1/3[(-x + 2y + 2z - 4), (2x - y + 2z + 2), (2x + 2y - z + 2)]$$

est un demi-tour.

2) On considère l'application g de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie, pour tout point de coordonnées (x, y, z) , par

$$g(x, y, z) = (-z + 1, -x, y - 2).$$

Montrer que g est un déplacement, trouver les vecteurs invariants par $\vec{g}$, en déduire la nature de g (le plus précisément possible).

II (tiré du même partiel que le III de la première partie)

Dans E espace affine euclidien de dimension 3 on considère deux droites D, Δ et une isométrie φ telle que :

- φ conserve globalement D avec son orientation
- φ conserve globalement Δ sans conserver son orientation.

1° Que peut-on dire de la restriction de $\vec{\varphi}$ à $\vec{D}$ et à $\vec{\Delta}$? En déduire que D et Δ sont orthogonales et que φ admet un point fixe A sur Δ .

2° Prouver l'existence d'un repère cartésien orthonormé (A, i, j, k) où i dirige D et j dirige Δ .

Donner l'expression de φ dans ce repère (il y a deux possibilités a priori). A quelles isométries correspondent les deux expressions trouvées?

3° Quelles précisions supplémentaires peut-on apporter si l'on suppose que D rencontre Δ (resp. ne rencontre pas Δ)?

Problème 5

I On se place dans $\mathbb{R}^2$ affine euclidien.

- 1) Trouver l'ensemble des isométries qui laissant un losange (non carré) globalement invariant.
- 2) Vérifier que c'est un groupe. Est-il commutatif ? Est-il isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

II Soit ABCD un carré du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

- 1) Déterminer toutes les isométries qui conservent le carré.
- 2) Donner l'ordre des éléments du groupe obtenu, en trouver les sous-groupes et l'élément centre.

III On considère l'ensemble Γ des points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (m, n) où m et n sont dans $\mathbb{Z}$ (un repère orthonormal étant fixé).

- 1) Caractériser les translations qui conservent globalement Γ .
- 2) Trouver toutes les isométries qui conservent globalement Γ et qui laissent O fixe (O est le point de coordonnées $(0, 0)$).
- 3) Montrer que toutes les isométries qui conservent globalement Γ peuvent s'écrire comme le composé d'une translation (cf. 1)) et d'une isométrie laissant fixe O (cf. 2)).

Une telle décomposition est-elle commutative ? Identifier complètement f .

- 4) Trouver des sous-groupes du groupe des isométries conservent globalement Γ .

Soit P un plan affine euclidien et G un sous-groupe du groupe des isométries de P . On suppose que G ne contient aucune translation autre que l'identité et l'on pose $G^+ = G \cap \text{Isom}^+(P)$.

1°) Soient α et β dans G^+ différents de l'identité. Montrer que α et β commutent (on pourra considérer $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$).

2°) En supposant $G^+ \neq \{\text{Id}\}$, prouver l'existence et l'unicité de O dans P point fixe commun à tous les éléments de G^+ .

3°) En supposant $G^+ = \{\text{Id}\}$, prouver $G = \{\text{Id}\}$ ou $G = \{\text{Id}, S\}$ où S est une symétrie par rapport à une droite.

Problème 6

I Montrer que le sous-groupe des translations est distingué dans le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ (affine euclidien).

Est-ce encore vrai dans $\mathbb{R}^3$?

II On se place dans $\mathbb{R}^2$ (vectoriel).

1) Montrer que $O^+(2)$ est un sous-groupe distingué de $O(2)$.

2) Quel est le centre de $O(2)$?

3) Trouver les éléments d'ordre fini de $O(2)$.

III On se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

1) A quelle condition une rotation et une translation commutent ?

2) A quelle condition deux symétries orthogonales par rapport à des plans commutent ?

3) A quelle condition la composée d'une rotation et d'une translation est-elle une rotation ? Y a-t-il commutativité ? On pourra utiliser la décomposition des déplacements en produits de symétries orthogonales.

4) Montrer que les rotations d'axe donné et l'identité forment un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?

5) Montrer que l'ensemble des rotations laissant fixe un point donné O forment un groupe.

Montrer que ce groupe n'est pas commutatif. On pourra chercher un exemple permettant de conclure.

IV Soit ABCD un quadrilatère convexe non aplati du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

On suppose qu'il y a exactement deux isométries de $\mathbb{R}^2$ qui laissent ABCD invariant (globalement). Que pouvez-vous en déduire sur ABCD ?

On pourra admettre que le quadrilatère est globalement invariant si et seulement si $\{A, B, C, D\}$ est globalement invariant.

V 1) Donner un exemple de groupe commutatif à six éléments.

2) Soit G un groupe non commutatif à six éléments.

a) Donner un exemple d'un tel groupe.

b) Montrer que dans G il y a au moins un élément d'ordre 2, soit a .

- c) Montrer que dans G il y a au moins un élément d'ordre 3, soit b .
- d) Montrer que les 6 éléments e, a, b, b^2, ab, ab^2 sont distincts (où e désigne l'élément neutre de G).
- e) Montrer que si $ba = ab$, le groupe serait commutatif.
- f) En déduire que $ba = ab^2$.

Donner la table du groupe G .

Que pouvez-vous en conclure sur tous les groupes à six éléments ?

Problème 7. (C4 licence PEGC, algèbre et géométrie, 1989-1990).

A) 1) Montrer que le sous-groupe alterné A_3 des permutations paires de S_3 est commutatif.

2) On se place dans le groupe des permutations (bijections) de $[1,2,3,4]$ dans lui-même, noté S_4 . Les lettres i,j,k,l désignent des entiers distincts de $[1,2,3,4]$. On note (i,j) la transposition qui échange i et j et on appelle 3-cycle toute permutation, notée (i,j,k) , qui envoie i sur j , j sur k et k sur i et qui laisse le quatrième entier fixe.

a) Montrer les égalités suivantes, où la composition des permutations est notée $\circ$:

$$(k,l) \circ (i,k) \circ (k,l) = (i,l)$$

$$(i,j) \circ (j,k) = (i,j,k)$$

$$(i,j) \circ (k,l) = (i,j,k) \circ (j,k,l).$$

b) Montrer que, si un sous-groupe distingué de S_4 contient une transposition, il les contient toutes.

c) Montrer que tout produit (différent de l'identité) d'un nombre pair de transpositions peut s'écrire comme un produit de 3-cycles.

d) Est-ce que tout produit d'un nombre pair de transpositions peut s'écrire comme produit de 3-cycles de la forme $(1,i,j)$?

e) Montrer que le centre du sous-groupe alterné A_4 de S_4 est réduit à la seule identité.

B) On considère une partie X de $\mathbb{R}^3$ affine euclidien qui admet un unique centre de symétrie, noté O . On note $\text{Isom}(X)$ le groupe des isométries qui convergent globalement X et $\text{Isom}^+(X)$ le sous-groupe des isométries directes de $\text{Isom}(X)$.

1) Montrer que la symétrie centrale S_O commute avec toutes les isométries de $\text{Isom}(X)$.

2) Montrer que toute isométrie indirecte de $\text{Isom}(X)$ peut se décomposer en $\varphi \circ S_O$, où φ est dans $\text{Isom}^+(X)$.

En déduire que, si X est un ensemble fini, $\text{Isom}(X)$ a un nombre fini d'éléments qui est un entier pair.

3) On considère l'application f de $\text{Isom}(X)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ qui, à toute isométrie ψ associe le déterminant de $\vec{\psi}$; montrer que f est un morphisme de groupes.

En déduire que le sous-groupe $\text{Isom}^+(X)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Isom}(X)$ et que le groupe quotient

$$\text{Isom}(X) / \text{Isom}^+(X)$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : Régine DOUADY
Dépôt légal : Mai 1991
ISBN : 2-86612-102-3
IREM Université Paris VII
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05