INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

81

JUILLET 91

LA PRATIQUE DE MEMOIRES ETUDIANTS EN DEUG SSM PREMIERE ANNEE

L'EXPERIENCE DE LILLE 1

PIERRE JARRAUD

Objectif : présenter des travaux différents

sujet : pratique de mémoires étudiants

niveau : Deug SSM 1

public : Etudiants et enseignants

UNIVERSITE-PARIS VII

LA PRATIQUE DE MEMOIRES ETUDIANTS
EN DEUG SSM PREMIÈRE ANNÉE

L'expérience de Lille

Pierre Jarraud
Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques 45-46 5ème Etage 75252 Paris Cedex05

28 juin 1991

Sommaire

INTRODUCTION

Dans une étude précédente [JA] nous avons essayé de chercher quelles étaient les représentations des étudiants sur l'apprentissage scientifique en première année de DEUG SSM et d'évaluer si les expériences de rénovation pédagogique étudiées avaient une influence sur ces représentations.

Nous allons maintenant regarder plus en détail une des innovations essentielles de l'expérience de rénovation de pédagogique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois (Lille1): la pratique de mémoires étudiants.

Il s'agit d'un type de travail différent du travail scolaire habituel par un certain nombre d'aspects (travail en petit groupe, en temps non limité, tâche moins guidée, évaluation et validation différentes) et donc a priori susceptible d'influencer la façon de travailler et d'apprendre des étudiants et par suite, éventuellement, leurs représentations.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DES DOCUMENTS ANALYSÉS

I Pourquoi des mémoires :

Depuis quelques années et spécialement depuis la mise en place des nouveaux DEUG en 1984, on assiste à la création, dans certains premiers cycles, de la pratique de mémoires étudiants. Cette tendance se renforcera sans doute avec la réforme prévue des premiers cycles et le plan de contractualisation des universités.

Un premier bilan a été fait lors d'une table ronde sur ce sujet à Rennes en novembre 1987 ([REN])[1] et on en trouvera un plus récent dans la brochure "Enseigner les Mathématiques autrement en Deug première année" ([ENS]).

A Paris 6 (Pierre et Marie Curie) l'ERCS (Enseignement de Recherche et Communication Scientifique) développé par Serge Wilhem correspond à des préoccupations voisines.

D'après les initiateurs de ces expériences (cf les interventions de Marc Rogalski dans [REN] et [ENS] ou de Gérard Rauzy dans [RA]) les buts recherchés sont :

---

[1] Les exemples cités dans [REN] sont outre celui de Lille 1 qui fait l'objet de cette étude

celui de Marseille-Luminy en mathématique,

celui de Marseille 1, pluri-disciplinaire,

celui de l'IUT de Sceaux (département "Gestion Entreprises Administration") qui pratique, à la rentrée, des *jeux d'entreprises*.

de façon interdisciplinaire :

de développer l'autonomie et l'initiative des étudiants, de favoriser le travail personnel (dont on a tant parlé dans [JA][2]).

de valoriser les acquis des étudiants et de les aider à s'orienter (dans le cas d'un mémoire de début d'année).

d'encourager le travail en équipe (contrairement à la tradition de travail individuel) en instituant une validation en fin d'année de ce type de travail.

de donner l'occasion d'un travail de durée assez longue et non limitée, sur un sujet aussi ouvert que possible.

de rompre avec l'irresponsabilité scolaire: le groupe d'étudiants qui prépare un mémoire doit gérer son temps, sa façon de travailler et dans une grande mesure le contenu du mémoire, et non répondre en temps limité à des questions étroitement délimitées par l'enseignant.

plus spécifiquement pour l'enseignement de mathématiques (cf Marc Rogalski in [ENS]) :

d'ouvrir des perspectives sur les mathématiques en montrant qu'elles ne sont pas une discipline isolée, magnifique citadelle de la raison pure...

de mettre en valeur les applications des mathématiques dans les autres

---

[2]On peut d'ailleurs penser que, face à l'augmentation du nombre des étudiants dans les premiers cycles et aux difficultés d'encadrement qui en résultent, la tentation existera de développer ce type d'enseignement dans l'espoir (pour nous illusoire...) de faire des "économies" de personnel enseignant.

disciplines scientifiques ou dans la vie courante.

de développer la pratique de la modélisation mathématique...

de changer les représentations des étudiants (le terme est employé explicitement par Marc Rogalski dans [ENS] p 235) pour mieux favoriser l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

II Les mémoires de Lille 1 :

1 Pourquoi Lille ?

Une première raison est la demande explicite de Marc Rogalski d'une évaluation de cette pratique. Il a été l'initiateur de l'expérience de Lille 1 dans le cadre d'un contrat de recherche de rénovation pédagogique du ministère de l'Education Nationale[3]. Il est toujours responsable de l'une des sections expérimentales de Lille 1.

Une autre raison est que cette pratique fait partie d'une stratégie d'ensemble de rénovation pédagogique, en est même une composante importante[4] et semble a priori susceptible de changer la façon de travailler des étudiants et leurs représentations des mathématiques.

Des arguments de commodité non négligeables ont aussi joué: les étudiants de M.R. sont habitués à répondre à des questionnaires, la coopération de l'équipe enseignante[5] était nécessaire pour l'étude et la distance raisonnable Paris-Lille permettait d'aller sur place si besoin était (pour des interviews par exemple).

---

[3]J'ai participé à ce contrat.

[4]Faute de présenter l'ensemble de cette stratégie de rénovation pédagogique nous ne discuterons pas le point de savoir si la pratique des mémoires en est une composante bien intégrée ou si elle est "plaquée" dans l'expérience.

[5]C'était le cas à Lille et je tiens à remercier les collègues de Lille pour non seulement leur collaboration mais aussi leur aide et les nombreuses indications qu'ils ont pu me fournir sous une forme ou une autre; ces indications sont citées dans le texte sous la référence [CP]. Nous abrégerons le nom de Marc Rogalski en M.R.

2 Les sujets:

Chaque thème est décrit en une page dans une brochure (certains sujets sont reproduits en annexe). Les étudiants ont une semaine pour déterminer le choix de leur sujet et la composition du groupe (3 à 4 étudiants). Une bibliographie leur est éventuellement fournie. Elle consiste en articles de revues de vulgarisation.

Au bout d'une quinzaine de jours chaque groupe est reçu par un enseignant responsable de son thème pour "aider à cadrer le sujet" et -éventuellement- débloquer une situation.

Il est demandé de ne pas dépasser 10-15 pages et l'accent est mis sur la qualité de la rédaction et de la présentation.

En 1988-89: il y avait 18 sujets[6], tous n'ont pas été pris:

---

[6]Liste en 88-89:
* La datation par le carbone 14.
* Diverses méthodes de résolution de l'équation du 3ème degré.
* Le nombre 6174... et quelques jeux sur les entiers.
* Comment se servait-on d'un astrolabe?
* Détermination de tous les carrés magiques 3x3 à coefficients entiers ≥ 0.
* Comment votre calculette calcule-t-elle tg x, sin x, log x, ... ?
* Quelques fractions continues remarquables.
* Autour de la formule de Machin: le calcul de π par des séries d'arctg.
* Les mathématiques et le médecin légiste.
* Les nombres algébriques et les nombres transcendants.
* Comment calculait-on les logarithmes... avant les ordinateurs?
* Comment calculer le taux d'intérêt réel que vous cache votre banquier, en résolvant une équation par approximations successives?
* Comparaison de différentes méthodes de résolution d'équations numériques.
* A propos des sommes $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$.
* On peut découper une pomme en un nombre fini de morceaux, recoller différemment les morceaux et obtenir ... la lune!
* Une population, un circuit électrique, la ruine des joueurs... une même méthode mathématique.
* Quelques propriétés de la suite de Fibonacci.
* Calcul numérique avec l'algorithme de Borchard.
* Optimisation d'un coût de transport.

Et en physique:

La télédétection.
Symétries et cristaux.
L'appareil photographique.
Le télescope et la lunette astronomique.

certains ont été beaucoup pris (et ce "succès" a été confirmé sur plusieurs années): datation par le carbone 14, étude de l'équation du troisième degré, médecin légiste,

d'autres ont été pris moins fréquemment: astrolabe, étude de l'évolution d'une population, la ruine des joueurs....

certains n'ont pas été pris les premières années (mais ont été pris ensuite) : autour de la formule de Machin, quelques propriétés de la suite de Fibonacci.

Quelques thèmes ont été fournis par les étudiants eux-mêmes: mathématiques chinoises, Gauss "prince des mathématiciens", jeu de loto, la suite logistique et le chaos. Leur faible nombre ne permet pas de juger de façon certaine mais une première impression est que ces sujets semblent moins réussis que ceux fournis par les enseignants, le côté anecdotique l'ayant emporté sur l'étude de fond ou le sujet étant hors de portée des étudiants.

Des thèmes de physique chimie ont été introduits ensuite (88-89): télédétection, appareil photo, lunette astronomique. Nous en reparlerons au moment de la présentation des résultats du dépouillement du questionnaire sur les mémoires, mais il semble que l'aspect pratique, acquisition d'une nouvelle connaissance, ait joué et ait prévalu sur l'aspect mise en application et approfondissement des notions acquises en cours de physique.

Il n'y a pas eu (à part une brève présentation au premier cours en début d'année) de discours explicite de M.R sur la place du mémoire dans l'enseignement de mathématique de l'année.

CHAPITRE 2
MÉTHODOLOGIE

I Méthodologie générale.

Notre stratégie d'étude est classique. Nous avions prévu:

a) l'analyse des productions écrites (les mémoires tels que remis aux enseignants),

b) des observations d'étudiants pendant l'élaboration du mémoire.

c) l'élaboration et le dépouillement de questionnaires portant sur le travail des étudiants et sur leur représentation des mathématiques et cela, avant, pendant et après le mémoire.

d) le passage de tests (pour les étudiants considérés et pour des étudiants témoins) pour essayer d'évaluer s'il y avait eu transfert vers les exercices de mathématiques "traditionnelles".

On trouvera la présentation des résultats du a) ci-après.

Pour ce qui concerne les questionnaires, il y en a eu plusieurs dépouillés par M.R. ou moi-même et on pourra lire ci-dessous un certains nombres de conclusions (ou d'hypothèses) qui s'en dégagent. Malgré le soutien actif de l'équipe pédagogique de Lille, il a fallu tenir compte de la difficulté bien classique à avoir un taux de retour raisonnable (questionnaires anonymes et en fin d'année). De plus les effectifs, relativement faibles, d'étudiants ayant choisi un sujet donné rendent difficile des comparaisons entre les différents sujets. Nous donnons le dépouillement d'un tel questionnaire en document à la fin.

Pour ce qui concerne les tests, une première tentative en fin de deuxième année a été un échec par manque de réponses exploitables. Nous avons réagi avec une deuxième tentative en début de deuxième année. Les conditions étaient un peu modifiées puisque l'on testait un acquis plus durable (ayant résisté à l'oubli des vacances) mais grâce à l'enthousiasme de début d'année (et en présentant le test comme un devoir de révision...) on pouvait espérer un meilleur taux de retour. Ce fut effectivement le cas même si nous n'eûmes pas le niveau escompté. La validité statistique est sujette à caution mais comme les indications qui semblent s'en dégager vont dans le sens de nos autres observations nous les donnons en document pour information.

Nous avons dû renoncer au point b) après un déplacement à Lille : l'observation d'une réunion de préparation du mémoire étudiants-enseignants n'a pas été très fructueuse, car les étudiants n'avaient pas encore effectivement commencé à travailler sur le mémoire; les groupes étaient constitués sur le papier mais le travail en groupe, long à mettre en place[7] n'avait pas débuté. L'absence de locaux permettant le travail en groupes sur le campus ne facilitait pas l'observation d'étudiants pendant qu'ils se consacraient au mémoire[8]. Enfin l'absence de soutenance orale ne permettait pas une rencontre en fin de travail.

---

[7]Le dépouillement de certains mémoires comporte des indications indiquant que le travail de groupe n'a pas réellement eu lieu.

[8]Et d'ailleurs auraient-ils eu envie de dire "nous travaillerons sur le mémoire tel jour à telle heure" en présence d'un enseignant muni d'un magnétophone?

A chaque fois, les résultats sont peu tranchés, pas forcément significatifs isolément mais leur regroupement fait un faisceau de présomptions qui facilite ou oriente le dépouillement des productions écrites qui reste l'essentiel de ce travail.

II Grille d'analyse.

Comme l'indique la copie d'écran de la base de données que nous avons utilisée pour le dépouillement[9], nous avons retenu un certain nombre de caractéristiques pour analyser les productions effectives des étudiants :

```
Vues   Modif.   Impr/fichier   Enreg.   Recherche   Fiche
STRUCTURE
Titre                                        Année          Numéro
Auteurs                                                     nombre
Présentation              'notes sur 5                      longueur     'pages
graphiques             importance graphiques
illustrations          importance dessins
calculs                importance calculs
calcul sur machine
programme d'ordinateur
exemples
Biblio indiquée                   'Documents utilisés
doc 1
doc 2
doc 3
ecriture

'comparaison à l'analyse a priori
comp
comp2
comp3


'Activités

conjecture      laquelle
nouvelles questions
changement de cadre        lequel
applications
lien avec ens
preuves longues
questions ouvertes

ressemblance avec un cours
présentation devoir             rédaction devoir
travail en groupe        explications

autonomie

Lig: 001   Col: 010
```

---

[9]Reflex™ de Borland™.

1 Qualité globale des mémoires.

⇒ **analyse de la présentation**, avec évaluation chiffrée[10] pour pouvoir comparer les mémoires entre eux et avoir à la fin une indication du niveau de présentation.

⇒ **recherche de la présence d'erreurs** : il y en a eu effectivement (les enseignants ont éventuellement aidé les étudiants sur leur demande mais n'ont pas controlé leur travail au fur et à mesure, le contenu de la production finale est donc de l'entière responsabilité des étudiants).

2 Interprétation et respect par les étudiants du contrat, inférence avec une autonomie éventuelle.

⇒ **analyse de la longueur** : le sujet prévoyait une longueur de 10 à 15 pages, or beaucoup de mémoires, et surtout les "meilleurs" en divers sens du terme ont dépassé (et de beaucoup, jusqu'à 50 pages) cette longueur : doit-on considérer qu'il y a rupture de contrat[11] ?

⇒ recherche de la **présence** et de l'**importance** des **illustrations non graphiques**, liée à la prise d'autonomie et au souci de présentation : cela va du dépouillement ascétique d'un devoir à la profusion de photos ou à des illustrations de type BD (un exemple pour le médecin légiste)

----

[10]Nous avons aussi mis, à la fin, une note à chaque mémoire. Dans certains cas nous avons pu la comparer à la note effectivement mise par les enseignants de Lille. Les deux notes sont voisines ce qui prouve que les objectifs visés par les collègues lillois et nos critères sont voisins.

[11]L'avis de M.R. est que non ("au contraire" ajoute-t-il). L'équipe enseignante n'y attachait pas d'importance mais avait donné un chiffre à titre purement indicatif.

⇒ recherche de la **présence** et de l'**importance** des **graphiques** (pour savoir s'il y a tentative de changement de cadre, la représentation graphique nous semblant un outil important d'aide au raisonnement). Ce point n'est pas forcément probant car les graphiques étaient parfois demandés explicitement (ou du moins indispensables pour la résolution de certaines équations) dans le sujet du mémoire.

3 Forme du mémoire.

⇒ recherche de **traces de travail effectif de groupe.**

Pour les mémoires manuscrits une indication d'un travail de groupe de la rédaction peut être la présence de plusieurs écritures mais c'est assez primitif comme indication et l'étude des différences de style est trop hasardeuse pour être concluante. On notera que parfois une indication est donnée par les étudiants eux-mêmes qui indiquent : "rédaction de ...." (on peut d'ailleurs se demander dans ce cas si l'indication est due à un souci d'honnêteté et traduit un réel travail de groupe ou si révélant des tensions dans le groupe, elle ne traduit pas plutôt des difficultés à travailler en groupe).

⇒ **ressemblance du mémoire avec un cours, un devoir.**

Il s'agit d'avoir un indice sur le degré d'autonomie qu'ont acquis les étudiants. L'appréciation peut être faussée par la présentation (sur des copies doubles ou petite brochure, écriture à la main ou traitement de texte).

4 Présence d'activités non classiques.

⇒ **présence et importance des calculs sur machine** (calculatrice ou micro-ordinateur).

⇒ **présence et nature de bibliographie.**

Signalons maintenant les questions transversales auxquelles nous aurions bien aimé avoir une réponse (surtout positive...) dans la mesure où pour nous elles indiqueraient une rupture par rapport aux activités mathématiques habituelles :

⇒ dans quelle mesure les étudiants ont-ils eu à utiliser des changements de cadre de façon autonome et efficace pour la résolution ?

⇒ y a-t-il eu activité de conjecture? les étudiants se sont-ils posé d'autres questions que celles de l'énoncé (individuellement ou au niveau du groupe) ?

⇒ en fin de compte, y a-t-il eu prise d'autonomie et sur quel type d'activité?

Bien sûr ces questions sont plus imbriquées qu'on ne le voudrait et les réponses sont aussi très liées au sujet du mémoire.

Les réponses obtenues ne dépendant pas assez du comportement des étudiants, nous n'avons pas retenu d'autres questions qui semblaient naturelles comme

⇒ la présence d'une **activité de modélisation** (la modélisation était, le cas échéant, dans l'énoncé)

⇒ la présence d'une **activité de validation** (l'absence était générale).

Remarquons enfin que les réponses à ces questions étant souvent difficilement numériquement quantifiables, la base de données a plus servi comme outil d'élaboration de fiches d'observation que comme instrument d'analyse statistique.

CHAPITRE 3
LES PRINCIPAUX RÉSULTATS

I Les sujets retenus, présentation.

Pour avoir des échantillons de taille raisonnable (représentatifs?) et ne pas parler de cas isolés nous avons décidé d'étudier plus spécialement les sujets les plus fréquemment pris (et ce sur deux années[12]) :

Résolution de l'équation du troisième degré par diverses méthodes : 13 mémoires correspondant aux travail de 40 étudiants.

Le médecin légiste : 9 mémoires, préparés par 31 étudiants.

Datation par la carbone 14 : 12 mémoires préparés par 33 étudiants.

Cela représente un nombre raisonnable de mémoires et d'étudiants mais cela a aussi pour inconvénient de restreindre l'étude aux sujets les plus faciles à aborder du point de vue des étudiants, éliminant ainsi les sujets les plus originaux (de mon point de vue). Le sujet et les mathématiques qu'il implique ont certainement une influence sur l'analyse et ses résultats. Les sujets sont reproduits en annexe.

La datation par le carbone 14.

Comme le titre l'indique il s'agit d'étudier le procédé de datation d'objets anciens provenant d'organismes ayant été vivants (ossements, végé-

---

[12]Nous avons dépouillé les années 1987-88 et 1988-89. On dispose maintenant (juin 1991) d'un plus grand choix, notamment d'un nombre plus important de mémoires sur l'astrolabe et l'on peut pressentir une certaine évolution.

taux, ...) par dosage de l'isotope radioactif C^{14} dont le renouvellement n'est plus assuré après la mort de l'organisme.

Le travail mathématique demandé était

un travail de modélisation avec diverses hypothèses sur l'évolution du taux de C^{14} dans l'atmosphère.

la résolution des équations différentielles obtenues.

Les documents fournis étaient deux photocopies d'articles et le conseil d'utiliser des livres de physique ou chimie et des encyclopédies.

Il n'était demandé explicitement dans le sujet ni présentation de la méthode ni discussion de la validité (mais cela a été souvent fait par les étudiants).

Diverses méthodes de résolution de l'équation du troisième degré.

Le sujet prévoyait (outre la réduction à la forme réduite) 5 points :

Discussion du nombre de racines réelles dans le cas où les coefficients sont réels.

Méthode de Cardan.

Méthodes trigonométriques (avec suggestion de l'écriture d'un programme sur une calculatrice).

Méthode de Tschirnhaus.

Extension de la méthode précédente (au cas du degré 4 bien sûr mais des étudiants emportés par leur élan ont parlé de généraliser à n quelconque!).

La bibliographie comportait un article de J.P.Kahane et des livres de cours ou des encyclopédies. Le lien avec l'évolution historique de l'algèbre, notamment la création des nombres complexes et la résolution des équations polynomiales n'était pas évoqué (et les étudiants n'en ont pas parlé..).

Les mathématiques et le médecin légiste.

Il s'agit d'étudier la loi de refroidissement d'un cadavre pour en déduire l'heure présumée de la mort.

L'équation différentielle donnant la loi horaire de la température du corps était donnée (donc le travail de modélisation était fait) par contre la résolution mathématique du problème demandait l'emploi de méthodes numériques pour trouver "l'heure de la mort" et l'écriture d'un petit programme était explicitement demandé.

L'introduction d'un réfrigérateur permettait de réintroduire une part de modélisation.

Il n'était pas explicitement demandé de discussion de la validité des résultats.

Documents fournis : pas d'indication, aller à la morgue !

II Quelques constats.

1 Qualité globale des mémoires.

Présentation.

Premier constat, et sans équivoque, alors que les lamentations des enseignants sur les problèmes de rédaction sont universelles, la présentation est de bonne à remarquable.

Notes sur 5 (en tenant compte des moyens à la disposition des étudiants, le texte n'est jamais en $\TeX$ et les courbes ne sont pas tracées au traceur) :

		Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre de mémoires		12	13	9	34
notes	2	1			1
	3	2	5	2	9
	4	4	5	2	11
	5	5	3	5	13
Moyennes		4,1	3,8	4,3	4,1

Mode de réalisation :

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre de mémoires	12	13	9	34
écrit à la main	4	10	5	19
mixte	1		1	2
tapé à la machine	7	3	3	13

Il y a évidemment une majorité de mémoires écrits à la main (l'université ne fournissait pas d'aide dans ce domaine[13]), majorité très forte dans le cas de l'équation du 3ème degré, le carbone 14 faisant exception : cela corrobore l'impression que l'un des critères de choix de l'étude de la résolution de l'équation du 3ème degré était sa "facilité" (au moins apparente): pas besoin de machine, peu de recherche de documentation.

Présence d'erreurs.

Comme nous l'avons déjà dit, il y a eu des erreurs, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il n'y a pas eu contrôle par les enseignants responsables avant la présentation du mémoire (comme cela est le cas pour un mémoire de thèse). Ces erreurs ne sont pas nombreuses mais sont de plusieurs ordres :

mathématique, dans la résolution du problème (le plus souvent[14]) ou auparavant dans la modélisation,

plus théorique : comme la généralisation de la méthode de Tschirnhaus à la résolution des équations algébriques de degré $n \geq 5$,

anecdotique comme la confusion entre médecin légiste et libéral (qui inciterait plutôt à se poser la question de l'insertion de certains

---

[13]Nous avons rangé dans la même rubrique textes dactylographiés et textes saisis sur traitements de textes car il nous a semblé que ce qui importait c'était l'abandon de l'outil habituel pour les devoirs : le stylo).

[14]Les erreurs les plus fréquentes concernent la résolution trigonométrique de l'équation du troisième degré, notamment la partie utilisant les fonctions hyperboliques. La lecture des mémoires donne de précieuses indications sur les lacunes de certains étudiants ou sur leurs difficultés par exemple quand ils passent beaucoup de temps sur des problèmes (qui nous paraissent) simples.

étudiants dans la société) ou l'étudiant qui se borne à utiliser le réfrigérateur pour conserver les cadavres (au lieu de s'en servir pour déterminer la constante de refroidissement du corps).

Parallèlement à la présence d'erreurs, on note aussi un certain manque de rigueur, notamment dans la validité des méthodes d'approximation numérique pour la résolution de certaines équations[15].

2 Interprétation et respect par les étudiants du contrat, inférence avec une autonomie éventuelle.

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets	Note de présentation(/5)
nombre: tous	12	13	9	34	4,1
moins de 20 pages	6	3	1	10	3,7
20 à 29 pages	5	3	5	13	4,1
30 à 39 pages	1	5	2	8	4,2
40 pages ou plus		2	1	3	4,5
longueur moyenne	20	29	25	25	

Les 15 pages demandées sont donc en général dépassées. Y-a-t-il rupture du contrat? Comme nous l'avons dit plus haut, nous ne le pensons pas : si les 15 pages demandées permettaient de traiter le sujet au sens étroit du terme, elles étaient insuffisantes pour faire, par exemple, un rappel historique, une discussion de la validité de la méthode ou pour insérer de nombreux graphiques ou illustrations. Cette impression est renforcée par la

---

[15]Question d'ailleurs difficile, penser à la convergence de la méthode de Newton!

répartition de la longueur moyenne des mémoires en fonction du sujet.

On notera que, comme on pouvait s'y attendre la qualité de la présentation augmente avec le longueur (par contre elle ne paraît pas dépendre de l'utilisation d'un traitement de textes).

Présence et importance des illustrations non graphiques[16].

Illustrations :

		Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre de mémoires		12	13	9	34
illustrations	oui	9	1	1	11
	non	3	12	8	23

La présence d'illustrations n'est pas en soi un critère de qualité mais on peut la considérer comme un indice de prise de distance par rapport aux devoirs où il n'y en a pas. Un mémoire sur le médecin légiste est très joliment illustré dans le style BD. Le cas du carbone 14 est un peu différent : il y avait des illustrations dans la bibliographie, notamment un schéma expliquant le cycle du carbone 14 (que nous ne classons pas à graphique) et des photos de compteurs Geiger et on les retrouve dans les mémoires. Ce critère de prise de distance aux devoirs me paraît donc appeler une réponse globalement négative. On peut se demander si cette prise de distance peut être spontanée et un discours de type métamathématique (que M.R. envisage) permettrait peut-être une évolution.

---

[16]nous voulons dire par là : qui ne sont pas des graphiques au sens mathématique du terme, en ce sens un dessin, une photographie sont bien sûr des illustrations non graphiques.

Graphiques :

		Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre de mémoires		12	13	9	34
graphiques	oui	12	9	9	30
	non	0	4	0	4

Contrairement à celle des illustrations la présence des graphiques est massive : il est vrai que la résolution de certaines équations nécessitait le recours à des graphiques. Le passage du cadre analytique au cadre graphique existe mais il n'est pas le fait d'un choix des étudiants mais plutôt la conséquence d'une nécessité imposée par les sujets : c'est déjà un aspect positif (encouragé par des interventions[17] de type métamathématique pendant l'année) que d'avoir su reconnaître que le problème demande un graphique pour être résolu et d'avoir su le mettre en oeuvre.

3 Forme du mémoire.

Recherche de traces de travail effectif de groupe.

On l'a dit, faute d'interviews des étudiants ou d'une tentative d'analyse du style pour essayer de savoir s'il y a eu plusieurs rédacteurs, on en est réduit à des indications marginales comme

la présence de plusieurs écritures (à la main ou à la machine), c'est effectivement le cas 6 fois (sur 13) pour l'équation du 3ème degré, 3 fois (sur 9) pour le médecin légiste et 4 fois (sur 12) pour le carbone 14

---

[17]On peut se demander s'il n'y a pas eu en conséquence l'effet d'un certain désir de faire plaisir.

(il est vrai que la plus grande proportion de devoirs dactylographiés limite la probabilité de plusieurs écritures),

le nombre de signataires (un mémoire a été fait par un étudiant seul),

des remarques (peu fréquentes) des étudiants soit *neutres* comme : mémoire de X, Y, Z.... rédigé par X, programme informatique de Y soit indiquant sans doute des *tensions au sein du groupe* : sur la couverture on lit "X,Y,Z" et sur la page de garde " recherche de documentation, rédaction, mise en page, résolution du problème mathématique, mise en oeuvre du programme informatique de X et Y" . Qu'a donc fait Z ?

Un renseignement est aussi le nombre d'étudiants par mémoire :

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre: tous	12	13	9	34
un auteur	0	1	0	1
deux auteurs	4	2	1	7
trois auteurs	7	4	3	14
quatre auteurs	1	5	5	11

(il manque un mémoire, non signé).

Le dépouillement de la partie des questionnaires portant sur les mémoires montre qu'une majorité d'étudiants a apprécié le travail en groupe et le classe parmi les bénéfices de l'expérience.

Ressemblance du mémoire avec un cours, un devoir.

Nous cherchions surtout des indices de prise de distance vis à vis des productions habituelles des étudiants.

En ce qui concerne la **présentation** (et en laissant délibérément l'aspect utilisation d'un traitement de textes qui est sans doute plus une question de moyens que de volonté), nous avons distingué la présentation de type "mémoire" (petit fascicule agrafé) et "devoir" (des copies doubles imbriquées). Il y a des différences très nettes entre les différentes productions des étudiants.

Style de la présentation :

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre : tous	12	13	9	34
mémoire	9	8	6	23
intermédiaire	2	1		3
devoir	1	4	3	8

Nous avons ensuite étudié la **rédaction**. Selon les mémoires il s'agit d'une réponse linéaire aux questions du sujet (classé à "devoir") ou au contraire ("mémoire") il s'agit d'un exposition structurée avec introduction , la partie mathématique séparée (éventuellement en deux volets : modélisation, résolution).

Style de la rédaction :

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
nombre : tous	12	13	9	34
mémoire	8	6	9	23
intermédiaire	4	5		9
devoir ou cours		2		2

Le constat semble clair : le contrat est en général tenu, l'aspect mémoire l'emporte largement, la seule résistance se trouvant dans le sujet le plus voisin du cours (l'équation du troisième degré).

Notons une rupture avec le style classique dans une rédaction de type BD et des illustrations humoristiques dans quelques mémoires. Le médecin légiste avec des sous-titres comme "l'affaire Lataite" , "Minuit l'heure du crime ? Pas si sûr !" en a principalement fourni le prétexte.

4 Présence d'activités non classiques.

Calculs sur machine.

Les calculs sur machine (calculatrice programmable ou micro-ordinateur) étaient

demandés explicitement pour le médecin légiste (résolution approchée d'une équation),

suggérés dans le cas de l'équation du troisième degré[18],

absents dans l'énoncé du mémoire sur le carbone 14 mais utiles pour la résolution de certaines équations (donc l'absence de programme a

---

[18]Ce sujet présentait d'ailleurs une particularité : le calcul sur machine était demandé dans le paragraphe sur la résolution trigonométrique de l'équation et en général les étudiants ont transcrit dans un programme la discussion mathématique:

"si $4p^3+27q^2<0$ les racines réelles sont ....,

si $4p^3+27q^2=0$ ...."

délaissant d'une part les racines imaginaires (que ce type de programme pouvait facilement donner) et d'autre part la résolution numérique par une méthode de type Newton de loin la plus performante pour obtenir une valeur approchée mais qui pose le problème de savoir quelle racine on obtient s'il y en a plusieurs. On ne trouve de méthodes numériques que dans 2 mémoires sur 12.

pour corollaire qu'aucun effort d'application de la théorie n'a été fait). Il faut remarquer aussi que la bibliographie fournissait des courbes ou des tables prêtes à l'emploi et d'une précision "meilleure" que le résultat du modèle assez simplifié proposé dans le mémoire.

Il n'est donc pas étonnant que le **taux de présence de programmes** sur machine soit élevé (certains étudiants ont fourni outre le listing une disquette ou une bande contenant les programmes). Ils ont été faits soit sur des calculatrices programmables dans leur langage machine propre (et alors difficilement lisibles) soit dans un langage plus évolué comme Basic ou Pascal (ce qui permet de mieux apprécier la structure du programme).

Nombre de programmes :

Médecin légiste :	9 programmes sur 9 mémoires.
Equation du troisième degré :	8 programmes sur 13 mémoires.
Carbone 14 :	5 programmes sur 12 mémoires.

On note aussi la présence de courbes obtenues sur machine mais rarement de listings de résultats.

Concernant les applications numériques, on en note :

8 fois dans les 13 mémoires sur l'équation du 3ème degré,

2 fois sur les 9 mémoires du médecin légiste,

1 seule sur les 12 mémoires consacrés au carbone 14.

Disons cependant que, lorsque le sujet s'y prêtait (exemple du calcul du taux d'intérêt), on trouve de plus nombreux exemples explicitement traités.

Présence et nature de la bibliographie.

	Carbone 14	Equation 3ème degré	Médecin Légiste	Tous sujets
(nombre) tous	12	13	9	34
avec	6	6	4	16
sans	6	7	5	18

Le nombre de mémoires sans bibliographie me paraît important et me semble aller dans le sens d'une prise d'autonomie réduite : ce n'est pas l'habitude d'indiquer la bibliographie en DEUG. Soit les étudiants ne se sont pas écartés de la bibliographie indiquée et n'ont pas jugé utile de la mentionner, soit ils ont eu recours à d'autres sources et ne les ont pas communiquées pour que les enseignants n'aillent pas comparer. Là aussi M.R. a provoqué et constaté une évolution dans les mémoires remis cette année où la bibliographie figure systématiquement.

Nature de la bibliographie utilisée.

Il y a deux composantes

l'une commune à tous les sujets comprenant encyclopédies (Universalis ou Larousse) et revues scientifiques grand public (la Recherche, Sciences et Vie,...),

l'autre dépendant du sujet :

Carbone 14 : livres ou revues d'histoire ou d'archéologie.

Equation du 3ème degré : cours de maths ou d'histoire des maths.

Médecin légiste : revues ou cours de médecine[19]

---

[19]Signalons que des étudiants sont allés interviewer un médecin légiste en

Autres indices.

Nous signalons dans cette rubrique des indices, dépendant du sujet[20], qui nous ont paru indiquer (par leur présence ou leur absence selon le cas) qu'il y avait ou non prise d'autonomie. Donnons quelques exemples.

Equation du troisième degré :

L'étude de l'évolution historique (non demandée mais qui me paraît importante car c'est le principal intérêt du sujet, qui résout une équation du 3ème degré par la méthode de Cardan[21]) est abordée 7 fois sur 13, par contre le dénouement du problème de la résolution n'est évoqué que 2 fois et, horresco referens, deux fois on propose une généralisation de la méthode au cas $n \geq 5$!

On trouve deux fois une méthode (peu connue) due à Lagrange et non mentionnée dans l'énoncé mais suggérée dans la bibliographie remise aux étudiants. L'interprétation est donc à double face : soit on peut considérer que 2 groupes d'étudiants ont pris une certaine initiative par rapport au sujet, soit on peut penser que les autres s'en sont tenus strictement au sujet en ignorant les plus de la bibliographie.

---

exercice.

[20]Le plus joli étant pour le sujet "Gauss, Prince des Mathématiciens" un groupe de jeunes maghrébins allant demander de l'aide à un curé pour traduire le "Disquisitionnes Arithmeticae".

[21]Il est d'ailleurs amusant de noter que pas un étudiant ne signale que si l'équation admet 3 racines réelles comme $X (X-1) (X-3) = 0$ la méthode ne permet pas d'obtenir effectivement les racines car il faut extraire des racines cubiques complexes.

Médecin légiste.

Outre le recours déjà cité à un médecin légiste et à deux revues de médecine, il faut signaler la présence dans un certain nombre de mémoires (mais pas dans tous) de la discussion méthodologique de l'estimation de l'heure de la mort par l'étude du refroidissement et de la présentation d'autres méthodes (soit de type scientifique comme étude des restes d'aliments dans le tube digestif... soit de type policier comme les différents recoupements possibles)[22].

Carbone 14.

Comme pour le médecin légiste un certain nombre d'étudiants prennent un peu de distance, discutent la méthode de datation par le carbone 14, en présentent d'autres (comme la dendrochronologie) et montrent comment l'utilisation combinée de plusieurs méthodes permet d'arriver à un meilleur résultat.

Un élément traduisant une certaine prise d'autonomie me semble être la présence dans la bibliographie de livres ou d'articles de revue en anglais. Un autre indice est -dans les réponses au questionnaire où l'on demandait aux étudiants les raisons de choix de ce sujet- le fait qu'un certain nombre d'étudiants ont choisi ce sujet par intérêt pour l'histoire ou l'archéologie plutôt qu'à cause du contenu mathématique.

---

[22]On retrouve aussi cette discussion de la pertinence du modèle dans des mémoires sur l'évolution des populations de baleines.

Les questions transversales :

Changements de cadre.

Nous considérons uniquement les changements de cadre mathématique (notre étude est centrée sur les mathématiques) et ignorons par exemple, dans le mémoire sur la datation par le carbone 14, le recours à d'autres méthodes comme la dendrochronologie (même s'il y a un feedback sur les maths en nécessitant des courbes de correction, cela n'intervient pas dans le processus mathématique de résolution).

Il faut séparer deux aspects, l'existence des changements de cadre et l'appréciation que nous portons sur leur qualité (autonomie, efficacité). En ce qui concerne l'existence, les étudiants ont eu effectivement à gérer des changements de cadre (étude graphique[23] du nombre de solutions de l'équation du troisième degré, ou de l'évolution du taux de carbone 14 en fonction du temps, recours à l'algèbre linéaire dans la méthode de Tschirnhaus, recours à des méthodes numériques pour les deux autres sujets considérés). En ce qui concerne le deuxième point il faut être plus réservé : les changements cités étaient soit indiqués dans le sujet soit incontournables[24] (quand on ne sait pas résoudre "exactement" une équation il faut bien avoir recours à une méthode numérique approchée, de même pour l'équation du

---

[23]Ce qui fait d'ailleurs que $4p^3+27q^2$ apparaît dans la discussion mais pas comme un discriminant, notion qui était sans doute trop dure pour des étudiants de DEUG 1.

[24]Mais dans ce cas il ne faut pas en sous-estimer la difficulté pour les étudiants : ce n'est pas parce qu'un "professionnel" sait qu'il n'y a qu'une seule solution (qu'il connaît bien) qu'un "débutant" va la trouver facilement.

3ème degré la méthode algébrique d'étude du nombre de solutions réelles était hors de portée des étudiants). On peut remarquer que la résolution numérique approchée des équations du 3ème degré n'est abordée que 2 fois, c'est peu, surtout quand on donne un programme de résolution sur machine!

D'autre part les sujets retenus ne se prêtaient pas à un recours à des méthodes géométriques et les sujets retenus pour cette étude guidaient assez bien les étudiants sur la conduite mathématique[25]. Des sujets comme l'astrolabe laissaient une plus grande liberté (mathématique).

Enfin, concernant la question de l'efficacité, les problèmes mathématiques sousjacents aux mémoires ont été résolus de façon efficace, avec les moyens fournis ou suggérés par l'énoncé ; il n'était ni facile ni nécessaire de recourir à d'autres procédés. Ce point est d'ailleurs un point important à prendre en compte dans l'élaboration et le choix des sujets de mémoires.

Activité de conjecture.

Les sujets retenus ne se prêtaient guère à une activité de conjecture: l'équation du troisième degré a été étudiée depuis un certain temps et (il me semble qu') il est difficile d'avoir des idées nouvelles ou de se poser de nouvelles questions sur le sujet.

Les textes de présentation des thèmes de mémoires fournis aux étudiants étaient d'ailleurs assez précis et le travail était plutôt axé sur la recherche de documents, leur étude et leur présentation. Il ne s'agit pas d'un travail de recherche, d'une thèse!

---

[25]On a d'ailleurs déjà indiqué que c'était probablement une raison de choix d'un tel sujet.

Les productions écrites ne présentent pas d'indication volontaire par les étudiants de discussions ou de dissensions sur le contenu du mémoire. Le fait que certains mémoires ne soient signés que d'un ou deux étudiants (au lieu de 3 ou 4 comme demandé) n'est pas significatif car la possibilité de groupes de 2 (voire 1) étudiants était admise.

Prise d'autonomie.

Pour évaluer cette prise d'autonomie nous disposons des productions écrites mais aussi des réponses des étudiants à divers questionnaires (voir par exemple à la fin).

Un premier facteur a été la durée du travail, seulement partiellement compensée par des allégements du travail habituel qui a obligé les étudiants à **gérer leur temps**. Il n'était plus possible de s'en tenir à "l'expédition des affaires courantes" qui est souvent de mise.

Un deuxième facteur a été le **travail en groupe** qui d'après les questionnaires a été fréquent et est à considérer comme un bénéfice des mémoires : il a fallu apprendre à exprimer ses idées, à discuter, à se mettre d'accord et ce beaucoup plus que pour faire un devoir.

Le **travail de rédaction** a été aussi l'occasion pour certains d'une prise d'autonomie : le sujet n'imposait pas de plan (même si souvent un plan naturel en découlait) ; la présence d'un plan structuré, d'une introduction historique, d'une discussion des diverses méthodes ou la présentation d'autres méthodes a été, pour certains étudiants, l'occasion d'une prise d'autonomie.

Comme le travail était remis pour évaluation aux enseignants sans autre interaction que la concertation initiale les étudiants ont été sensibles à l'**effort de rigueur** nécessaire. Certains l'ont mené à bien, d'autres ont commis des erreurs mais tous ont fait un gros effort de présentation.

Dans d'autres domaines la prise d'autonomie est moins évidente : la bibliographie est d'abord celle indiquée dans le texte de présentation[26]. Un tic amusant est à noter : dans la présentation de la méthode de Cardan, le sujet indiquait "... on trouve trop ou trop peu de racines, en apparence, ..." . Il est significatif que l'on retrouve l'expression "trop de racines" dans les mémoires alors qu'une bonne rédaction (au sens mathématique) doit faire attention à ne pas introduire de racines parasites (quand on élève au cube) et non se contenter de regarder après coup si le nombre obtenu est conforme à ce que l'on attend[27].

De même les exemples d'application non explicitement demandés sont peu fréquents (et dans le mémoire sur l'astrolabe on trouve la théorie et un astrolabe mais pas de mode d'emploi[28]) .

---

[26]C'est de façon anecdotique très sensible sur les illustrations : on retrouve les mêmes photos ou graphiques dans de nombreux mémoires.

[27]Citons un mémoire de bonne qualité par ailleurs, chapitre V "comparaison des méthodes résolvant l'équation cubique",

La méthode de Cardan paraît assez lourde..... nous trouvons trop de solutions ce qui entraîne que nous devons retenir les solutions qui vérifient $y*z = -p/3$, d'où de nombreux calculs.

[28]Les modes d'emploi sont apparus cette année.

PRÉSENTATION DES DOCUMENTS JOINTS

Les deux premiers document joints, évoqués dans le chapitre 2, auraient dû faire partie du corps de ce travail. Nous ne les avons pas inclus par souci de rigueur: la taille des échantillons fait que les incertitudes statistiques sont souvent supérieures aux différences constatées. La pleine coopération des collègues de l'Université de Lille dont nous avons bénéficié, ne nous permet pas[29] d'envisager de recommencer ce travail avec un meilleur échantillon, c'est pourquoi on trouvera ci-dessous :

1 le dépouillement d'un questionnaire, passé en fin de première année, sur l'enseignement des mémoires tel que l'ont ressenti les étudiants.

Cette étude[30] ne reflète que le point de vue des étudiants, l'impression de changement (ou de non-changement) dû au mémoire telle qu'ils la ressentent et non la réalité profonde de ce changement telle que nous essayons de l'appréhender par ailleurs avec d'autres moyens.

Même si elle ne répond pas pleinement à nos interrogations ni aux dessins des initiateurs du projet, l'impression est néanmoins importante car elle fait partie de la représentation des mathématiques et de leur apprentissage qu'ont les étudiants.

Les étudiants n'ont pas l'impression d'être des élèves différents, il

---

[29]A moins d'envisager une prise en charge institutionnelle !

[30]Pour la commodité du lecteur nous reproduisons ici les conclusions des deux documents.

n'ont pas conscience d'un changement d'identité, même si en fait il y a changement non directement perceptible.

Majoritairement les étudiants sont contents, ils ont l'impression d'avoir appris quelque chose en plus de l'enseignement traditionnel, certains en ont retiré un surcroit d'intérêt pour l'enseignement classique, mais peu évoquent un éventuel transfert vers celui-ci. Ce n'était d'ailleurs peut-être pas pour eux un enjeu de la pratique des mémoires.

2 le dépouillement d'un test proposé (en début d'année) comme devoir de révision à tous les étudiants de seconde année de DEUG SSM A de Lille pour essayer d'évaluer les influences de la pratique des mémoires sur l'apprentissage des mathématiques.

On constate que les différences constatées sont faibles et que quand il en y a, elles sont plutôt à l'avantage dês étudiants n'ayant pas fait de mémoires. Cela ne met nullement en cause l'intérêt de la réalisation de mémoires: le test était très classique, sur le cours de première année. On peut penser que certains étudiants ont pu compenser une note d'examen faible par une bonne réussite au mémoire, leur passage en seconde année était mérité mais leur aptitude à résoudre un problème "scolaire" pas forcément augmentée. Par contre le travail d'élaboration et de rédaction du mémoire sera sans doute utile ultérieurement dans la vie active (comme pour rédiger un rapport) mais, cela, nous ne savons pas le mesurer. Une indication en ce sens pourrait être vue dans la note de rédaction qui est meilleure pour les étudiants avec mémoire.

Une autre remarque est que le clivage est plus net entre la section PC et les sections MP qu'entre avec et sans mémoire. Ce n'est pas une surprise car la réussite en mathématiques est un élément de choix important entre les filières MP et PC.

Les deux documents suivants sont la reproduction de deux mémoires[31] pour donner une idée de la qualité des productions obtenues. Par souci d'économie, nous avons retenu deux mémoires relativement brefs (ce qui se traduit entre autre par une part moins importante des graphiques et des illustrations).

3 le premier a pour sujet "Les mathématiques et le médecin légiste"[32]

4 le second a pour sujet "l'astrolabe"[33] et permet d'avoir une idée d'un mémoire plus original que ceux étudiés.

---

[31]A la demande de M.R. nous avons masqué les noms des étudiants.

[32]C'est celui où il y a la confusion déja citée médecin légiste - médecin libéral.

[33]Il était accompagné d'un magnifique astrolabe en cuivre gravé réalisé pour la latitude de Lille, ... et conservé par les étudiants. La photocopie rend très mal la qualité du travail.

CONCLUSION

Quelques remarques sur la méthodologie d'abord, elle laisse certainement à désirer : nous n'avons pas réussi à avoir de preuves probantes qu'il se passait quelque chose (ou qu'il ne se passait rien), peut-être faute d'imagination dans le déroulement de l'investigation mais aussi à cause des contraintes de collecte des renseignements (et pourtant, le soutien de l'équipe de Lille nous était acquis).

Il y a de toute façon un paradoxe à chercher des traces conventionnelles d'un enseignement qui ne l'est pas, le bénéfice peut très bien - il doit - être ailleurs.

Il faut bien avouer une certaine déception : il n'y a pas de miracle, sauf sur le point de la présentation qui dans de nombreux cas est impressionnante. Un autre aspect positif, déjà en partie connu, qui semble acquis est le travail en groupe dont A.Robert et I.Tenaud [RO] et [TE] ont montré qu'il était plutôt favorable à des transferts (pour mettre des idées en commun il faut les préciser, les formaliser, l'émulation peut avoir un rôle en révélant à un étudiant des possibilités qu'il ignorait).

En ce qui concerne la partie plus particulièrement mathématique, on n'arrive pas à voir le transfert, les étudiants n'ont pas la sensation d'avoir changé leur représentation des mathématiques. On peut se demander si le seuil nécessaire à ce transfert a été atteint, mais est-il accessible?

Est-il plausible d'atteindre des objectifs concernant des mathématiques conventionnelles avec des techniques non conventionnelles[34] ? Le même problème se pose avec d'autres pratiques comme l'histoire des mathématiques.

La question me semble être là : on a constaté une production de travail fort importante, impressionnante, à l'occasion des mémoires, dans un type d'activité qui ne peut qu'être ultérieurement utile dans la vie active (recherche de documents, synthèse, rédaction, ...), la pratique des mémoires est fondamentale dans la formation de futurs scientifiques, même si on n'en voit pas l'effet sur les épreuves classiques : on peut se demander si ce ne sont pas précisément ces épreuves classiques (qu'on continue à utiliser par routine et parce qu'il n'est pas facile d'en organiser de nouvelles) qui ne sont pas bien adaptées à la validation d'études scientifiques. La pratique pluridisciplinaire de ces mémoires et le travail en groupe à l'occasion de la préparation en sont d'ailleurs l'illustration : il ne s'agit pas, seulement, d'apprendre des maths ou de la physique, mais aussi d'apprendre à travailler. Un bénéfice peut être aussi la diminution de l'inhibition fréquente d'un étudiant devant des documents nouveaux.

Une étude de M.R. [CP] sur le devenir des étudiants en seconde année de DEUG SSM A (non rénovée) montre que le taux d'obtention (éventuellement en trois ans) du DEUG est sensiblement plus élevé pour les étudiants de la

---

[34]Inversement Michèle Artigue a montré que si l'on organisait des enseignements de type nouveau il fallait aussi mettre sur pied un contrôle des connaissances, une validation adaptés. Voir aussi le texte "Aspects Didactiques" d'Aline Robert in [ENS].

section "rénovée"[35] que pour les autres. Le meilleur succès de première année n'est donc pas dû à un éventuel "laxisme" et a bien une réalité qui dure l'année suivante.

L'influence indirecte d'une note de mémoire en générale supérieure à la note d'écrit ne semble pas avoir faussé la comparaison. D'après une étude réalisée par une collègue de Lille [CP] cela n'a pas déplacé la seuil de réussite : les étudiants reçus avec mémoire l'auraient été sans (éventuellement après repêchage).

C'est pourquoi je m'enhardirai à faire quelques suggestions d'utilisation de la pratique des mémoires :

elle doit être interdisciplinaire (c'est déjà fait à Lille),

il faut dans la définition des sujets être le moins directif possible pour développer et valoriser l'initiative et l'indépendance des étudiants, qu'il y ait effectivement un travail de recherche.

il serait bon de prévoir un contrôle a posteriori avec discussion avec les étudiants, peut-être sous forme d'une soutenance, d'une part parce que dans certains cas il y a des erreurs de fond dans les mémoires , d'autre part parce qu'il est positif que les étudiants justifient certains de leurs parti-pris de rédaction et aussi parce que l'oral est un parent pauvre de notre enseignement.

ce contrôle a posteriori pourrait aussi être l'occasion d'expliciter et de mettre en valeur ce qui a été acquis pendant l'élaboration du

---

[35]Bien sûr l'enseignement de cette section n'est pas seulement rénové par la pratique de mémoires et d'autres facteurs contribuent aussi à cette amélioration.

mémoire et peut être ensuite réutilisé.

le recours à des tâches plus classiques est envisageable pour favoriser ce transfert. Mais il convient d'être prudent : l'exemple de Lille montre que les étudiants ont peu apprécié les sujets les plus proches des mathématiques classiques: très peu de ces sujets ont été choisis.

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

[CP] Communication personnelle.

[ENS] "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année."
"Principes et réalisations"
CI2U (Commission Inter-Irem Université) Novembre 1990

[JA] P.Jarraud :
"Innovation pédagogique et représentations des étudiants"
Cahier DIDIREM n°8 juin 1990

[RA] G.Rauzy
Gazette des Mathématiciens 1984

[REN] Actes du colloque :
"Rénovation des premiers cycles universitaires : le rôle des mathématiques"
CI2U et Université de Rennes 1 Juin 1988

[RO] A.Robert et I.Tenaud :
"Travail en petits groupes dans l'enseignement post-obligatoire"
Bulletin APMEP 370 pp 479-485

[TE] I.Tenaud :
"Une expérience de l'enseignement de la géométrie en terminale C :
Enseignement de méthodes et travail en petits groupes"
Thèse de l'Université Paris 7 1991

Document 1

QUESTIONNAIRE DE MAI 1990 SUR LES MÉMOIRES

Il s'agit du questionnaire de fin d'année universitaire. Il est anonyme. Il est long de 7 pages et porte sur plusieurs sujets: utilisation du dessin en mathématiques, algèbre linéaire, opinion sur certains thèmes de l'enseignement, méthodes de travail, assiduité, mémoires, enseignement de méthodes et renseignements personnels. Les questions concernant les mémoires sont les suivantes:

F. Les mémoires:

F.1 Quel sujet de mémoire aviez-vous choisi?

....

Pourquoi parmi les sujets proposés aviez-vous choisi celui-ci?

....

....

....

F.2 L'éventail des sujets proposés était:

Mathématiques:

trop restreint ☐	suffisant ☐	trop vaste ☐	? ☐

Physique:

trop restreint ☐	suffisant ☐	trop vaste ☐	? ☐

F.3 (a) En comptant tout (réflexion, recherche de documents, travail avec vos coéquipiers, rédaction, présentation...) combien de temps avez-vous consacré à ce mémoire?

....

....

(b) Essayez de préciser la répartition du temps entre les différentes activités.

....

....

F.4 L'élaboration de ce mémoire a-t-elle modifié:

(a) votre façon de travailler pour l'enseignement habituel?

beaucoup ☐	un peu ☐	pas du tout ☐	? ☐

(b) votre façon de travailler pendant l'élaboration du mémoire?

beaucoup ☐	un peu ☐	pas du tout ☐	? ☐

(c) votre conception de la discipline du mémoire (maths, physique,...)?

beaucoup ☐	un peu ☐	pas du tout ☐	? ☐

(d) votre conception de l'appentissage de cette discipline?

beaucoup ☐	un peu ☐	pas du tout ☐	? ☐

(e) Pourriez-vous préciser en quoi? (pour chacune des quatre questions)

....

....

....

F.5 En dehors du fait que cela comptait dans le contrôle continu, quel bénéfice pensez-vous avoir tiré de votre travail de mémoire?

....

....

....

Nous avons eu 72 réponses sur 120 étudiants (107 présents à l'examen):

pour les **sujets mathématiques**:

8 comment se servait-on d'un astrolabe?

16 la datation par le carbone 14,

5 les diverses méthodes de résolution de l'équation du 3ème degré,

8 les mathématiques et le médecin légiste,

6 le problème de l'optimisation des coûts de transport,

et 6 regroupés sous la rubrique "divers maths" (2 pour les jeux mathématiques, 1 pour les groupes et 3 pour noeuds et polynômes)

pour les **sujets de physique**:

15 la lunette astronomique,

7 l'appareil photographique,

et pour la **chimie**:

1 thermodynamique chimique. Nous avons supprimé cette dernière réponse, son isolement la rendant difficilement exploitable.

Le dépouillement porte donc sur 71 réponses.

Nous présentons ci-dessous l'essentiel des résultats soit sous forme de commentaires, sous forme de tableaux récapitulatifs, triés par sujet de mémoire (ces sujets ont été présentés ci-dessus)[1]. Nous indiquons alors en **gras** (et selon le tableau) le pourcentage de réponses relatif à la ligne ou la moyenne et en petits caractères le nombre effectif de réponses (la prudence étant de rigueur pour la comparaison de pourcentages quand les nombres considérés sont petits). Des graphiques essaient d'illustrer ces tableaux et d'en rendre la lecture moins fastidieuse. Les pourcentages ont été systématiquement arrondis à l'entier le plus voisin et certaines réponses sont absentes: on ne s'étonnera pas de trouver des sommes de pourcentages différentes de 100%!

Raison du choix du sujet (plusieurs raisons ont pu être citées):

La raison la plus souvent citée est l'intérêt pour le sujet (26 citations), les étudiants ont d'abord saisi l'occasion d'appendre quelque chose sur un sujet qui les intéressait (le terme "avoir de nouvelles connaissances" est employé explicitement). L'originalité du sujet est aussi évoquée (8 fois) et la curiosité figure aussi (4 fois). Le fait d'avoir une application des mathématiques en dehors du domaine habituel est cité 7 fois, l'aspect multidisciplinaire[2] l'est 5 fois; ce n'est pas beau-

----

[1]Nous avons retenu la classification par sujets car la dichotomie sujet de physique-sujet de mathématique aurait été trop grossière comme on pourra s'en rendre compte sur les exemples suivants.

[2]Mais, au niveau du DEUG, et pour les étudiants, est-ce très différent de l'idée d'"application"?

coup, les initiateurs du projet étaient sans doute plus intéressés par cet aspect que les étudiants.

D'autres facteurs ont joué: le travail en groupe fait que le sujet n'a pas été choisi par l'étudiant lui-même ou résulte d'une procédure par élimination (8 fois), la facilité (pour ne pas passer -perdre?- trop de temps au mémoire au moment du partiel): 6 fois.

Enfin, et de façon anecdotique (1 ou 2 fois pour chaque): le dégoût des maths, l'intérêt pour les maths, l'intérêt pour la physique, la présence de programmation, l'utilité dans la vie pratique, le rapprochement avec la vie professionnelle.

Eventail des sujets:

Le choix de sujets de mathématiques est jugé suffisant par 63 étudiants, trop vaste par 7 et trop restreint par un seul: l'expérience dure depuis plusieurs années et le choix offert est apprécié.

Pour ce qui est des sujets de physique (introduits cette année là) les réponses sont plus partagées: 30 (sur 71) trouvent le choix suffisant mais 39 le trouvent trop restreint, le pourcentage d'insatisfaction étant particulièrement élevé chez les preneurs de sujet physique (lunette astronomique: 60%, appareil photographique: 71% contre 37% seulement dans le cas de l'astrolabe).

Temps passé.

Cette question n'était pas facile et il n'y a eu que 65 réponses donnant une moyenne de 47 heures (la fourchette variant de 10 à 100). La répartition est illustrée sur le graphe ci-contre.

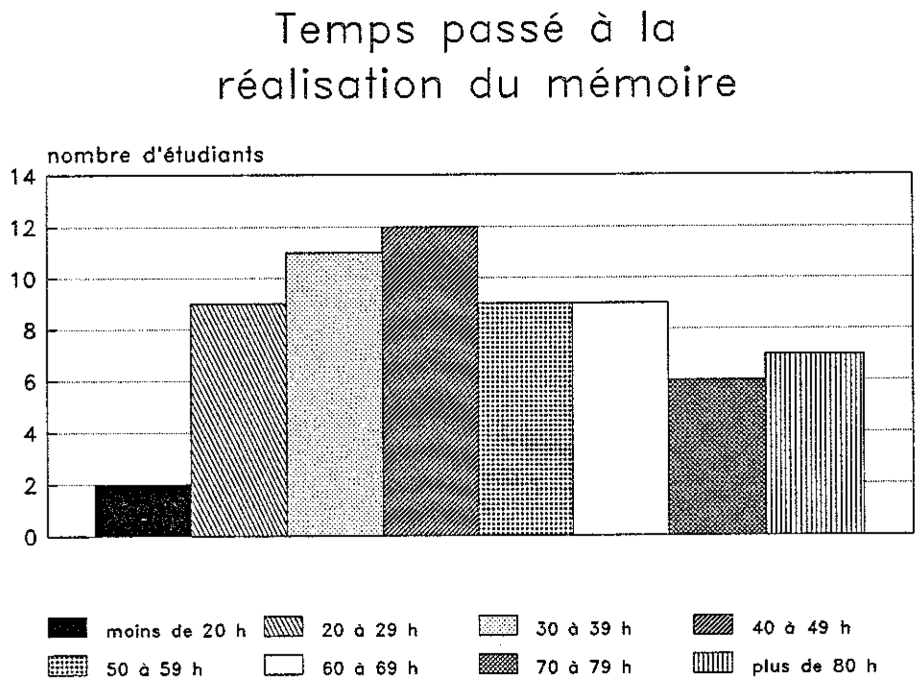
La question suivante demandait d'estimer la **répartition du temps** entre les différentes activités. C'est plus difficile et le nombre de réponses est faible (moins de 40), les moyennes (calculées sur le nombre de réponses effectives) sont pour les activités les plus souvent citées:

Recherche des documents: 12 heures,

Discussion avec les autres étudiants du groupe et mise au point: 16

heures,

Rédaction: 14 heures, 5 dépassent 25 heures ce qui n'est pas étonnant en regard de la qualité de présentation de certains mémoires mais fait quand même beaucoup si l'on pense qu'il s'agit du travail de 2 à 4 étudiants.



Nous donnons ensuite, sous forme de tableaux et de graphes où nous séparons les différents sujets[3], le dépouillement des questions concernant les modifications de façon de travailler et de la conception de la discipline, suivi d'une étude de corrélation entre ces changements et le temps passé à la réalisation du mémoire.

----

[3]Il nous a semblé que le choix d'un sujet, étant donnée la variété de ceux qui étaient proposés, était révélateur d'un état d'esprit de l'étudiant, voir le dépouillement du "questionnaire principal".

Changement de la façon de travailler pour l'enseignement habituel

		beaucoup		assez		pas beaucoup		pas du tout	
astrolabe	8	13	1	25	2	13	1	50	4
carbone 14	16	6	1	38	6	19	3	31	5
éq. 3ème degré	5	20	1	20	1	20	1	40	2
médecin légiste	8	0	0	38	3	13	1	50	4
transports	6	0	0	50	3	17	1	33	2
divers maths	6	33	2	17	1	17	1	33	2
lunette	15	33	5	20	3	13	2	27	4
photo	7	0	0	57	4	29	2	0	0
Tous	71	14	10	32	23	17	12	32	23

Même si ce n'est pas majoritaire, il y a donc eu pour un nombre assez important d'étudiants un changement de la façon de travailler. Compte tenu des effectifs en cause les variations entre les sujets ne sont pas très significatives. Les explications fournies à la question **F.5** (e) sont plutôt maigres, peu d'étudiants ayant fourni les précisions demandées.

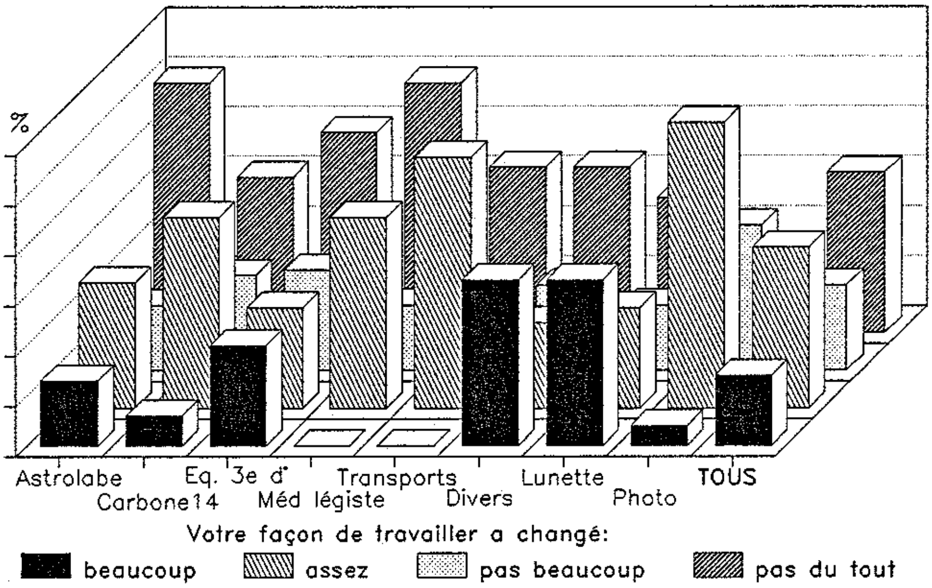
Il semble toutefois que le facteur temps soit important: il a fallu trouver le temps passé à la réalisation du mémoire[4]: soit par une meilleure organisation (en apprenant à travailler plus vite, en recourant au travail de groupe) soit au détriment du travail habituel (ou en utilisant une partie des vacances). Le tableau sur les corrélations "temps passé au mémoire -changement dans le travail habituel" le confirme : pour que la réalisation du mémoire induise un changement il faut qu'un certain seuil de travail ait été atteint.

L'apprentissage du travail en groupe est aussi susceptible de retombées dans le travail habituel.

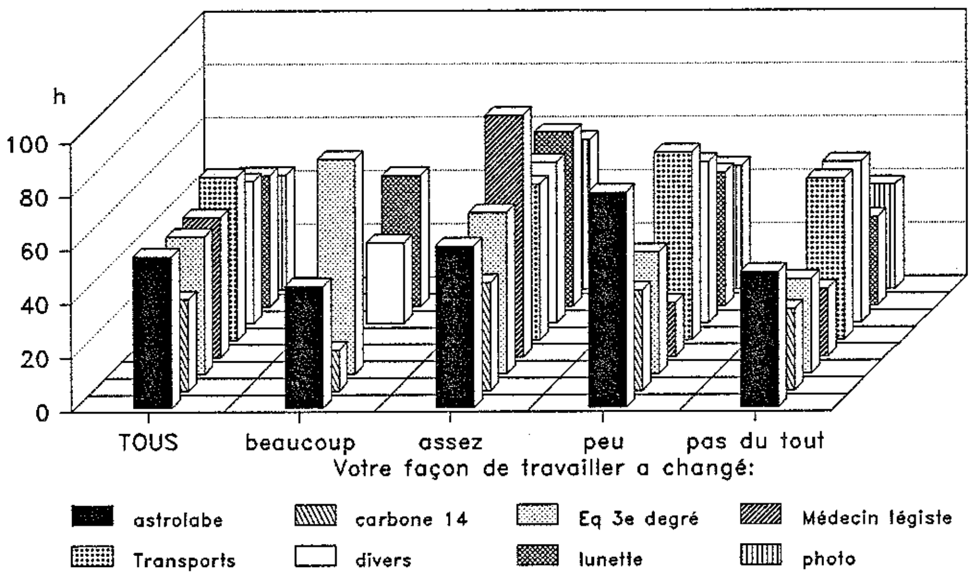
----

[4]Comme cela était prévisible, cela est surtout le cas pour les étudiants ayant passé longtemps (plus de 40 heures) au mémoire

Changement de façon de travailler pour l'enseignement habituel pendant le mémoire



Temps moyen passé au mémoire en fonction du changement de façon de travailler dans le travail habituel



Temps moyen passé (en heures) à la réalisation du mémoire

en fonction du changement de façon de travailler

dans la travail habituel

	Changement de façon de travailler				
	Tous	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe 8	56	45	60	80	50
carbone 14 16	34	15	40	37	30
éq. 3ème degré 5	51	80	60	45	35
médecin légiste 8	52		90	20	25
transports 6	61		58	70	60
divers maths 6	53	30	60	60	60
lunette 15	49	49	65	50	33
photo 7	43		43	25	
Tous 71	47	46	56	46	39

Changement dans la façon de travailler pendant le mémoire

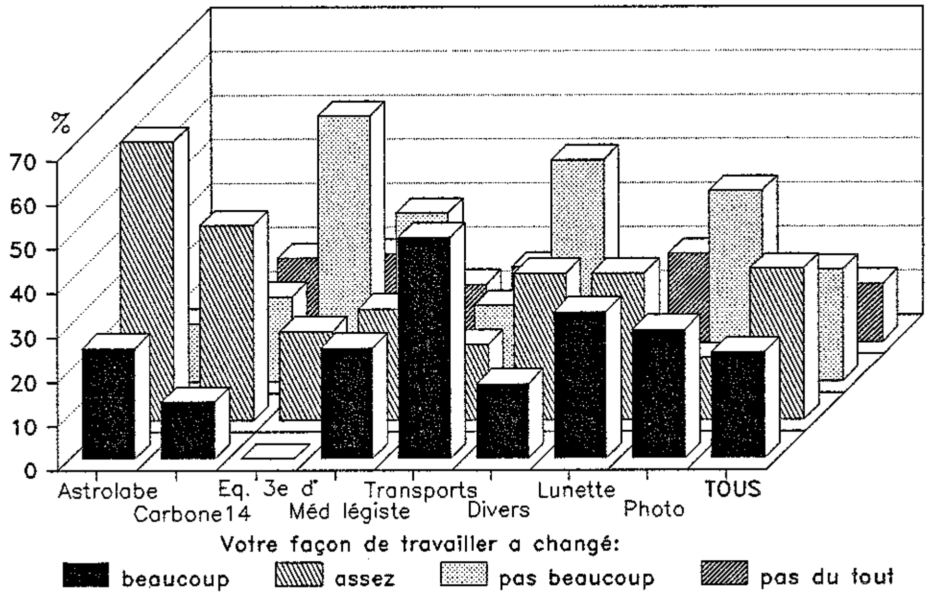
	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe $_{8}$	25 $_{2}$	63 $_{5}$	13 $_{1}$	0 $_{0}$
carbone 14 $_{16}$	13 $_{2}$	44 $_{7}$	19 $_{3}$	19 $_{3}$
éq. 3ème degré $_{5}$	0 $_{0}$	20 $_{1}$	60 $_{3}$	20 $_{1}$
médecin légiste $_{8}$	25 $_{2}$	25 $_{2}$	38 $_{3}$	13 $_{1}$
transports $_{6}$	50 $_{3}$	17 $_{1}$	17 $_{1}$	17 $_{1}$
divers maths $_{6}$	17 $_{1}$	33 $_{2}$	50 $_{3}$	0 $_{0}$
lunette $_{15}$	33 $_{5}$	33 $_{5}$	7 $_{1}$	20 $_{3}$
photo $_{7}$	29 $_{2}$	14 $_{1}$	43 $_{3}$	0 $_{0}$
Tous $_{71}$	24 $_{17}$	34 $_{24}$	25 $_{18}$	13 $_{9}$

Le changement apparaît ici plus nettement, et c'est normal puisqu'il s'agit d'un type de travail nouveau prévu, pour donner plus d'autonomie. Le questionnaire étant anonyme on ne peut corréler les réponses au travail effectivement fourni pour le mémoire mais il est plausible d'avancer l'hypothèse que les réponses ci-dessus reflètent la diversité des réalisations: du fascicule de 50 pages sur traitement de textes, fort bien présenté et documenté, relié, à un travail de moins de 20 pages manuscrites sur des copies doubles et sans grande autonomie par rapport au sujet.

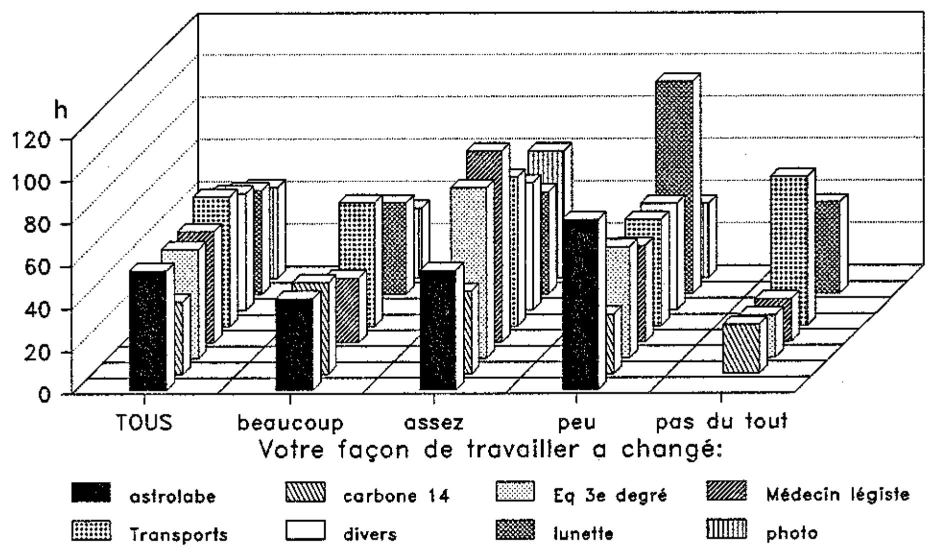
Il est difficile de dire si ce changement est significatif pour l'apprentissage des mathématiques.

Comme il fallait s'y attendre, **le changement est le plus fort pour les sujets originaux, éloignés du cours et plus faible pour ceux qui en sont proches (comme la résolution de l'équation du troisième degré).**

Changement de façon de travailler
au cours de l'élaboration du mémoire



Temps passé moyen pour le mémoire
en fonction du changement de façon de
travailler pendant le mémoire



Les changements cités sont (par ordre de fréquence décroissante):

d'abord le travail en groupe (7 fois)

le travail de recherche, de documentation

le travail d'élaboration d'un plan, de regroupement et organisation des idées,

le travail plus "intense"

la motivation pour l'étude de la discipline .

Le tableau suivant montre qu'il n'y a pas corrélation entre le temps passé et l'impression de changement de façon de travailler.

Temps moyen passé (en heures) à la réalisation du mémoire
en fonction du changement de façon de travailler pendant le mémoire

	Changement de façon de travailler				
	Tous	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe 8	56	43	56	80	
carbone 14 16	34	43	39	28	23
éq. 3ème degré 5	51		80	52	20
médecin légiste 8	52	30	90	45	20
transports 6	61	58	70	50	70
divers maths 6	53		60	50	
lunette 15	49	43	48	100	43
photo 7	43	33	60	35	
Tous 71	47	44	54	48	33

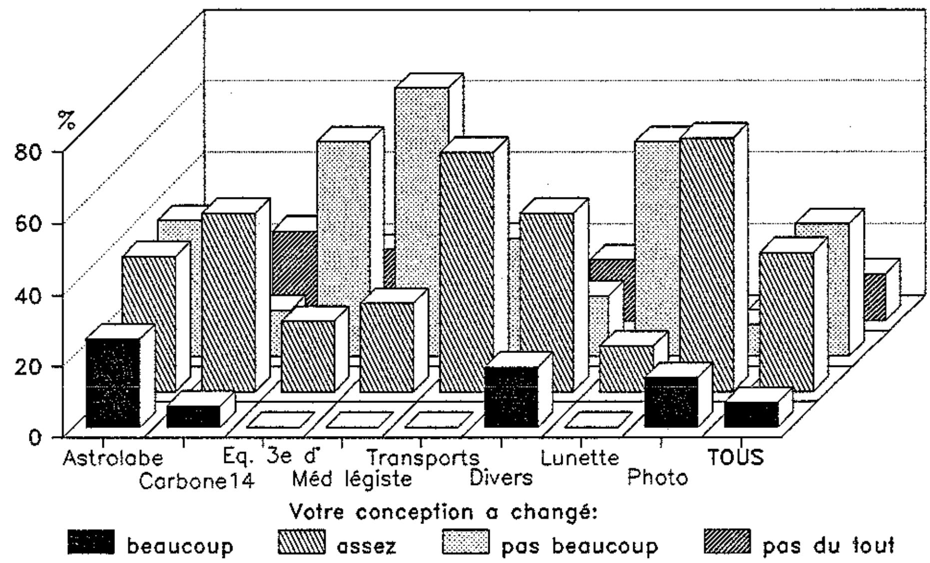
Changement de conception de la discipline du mémoire

	beaucoup		assez		pas beaucoup		pas du tout	
astrolabe 8	25	2	38	3	38	3	0	0
carbone 14 16	6	1	50	8	13	2	25	4
éq. 3ème degré 5	0	0	20	1	60	3	20	1
médecin légiste 8	0	0	25	2	75	6	0	0
transports 6	0	0	67	4	33	2	0	0
divers maths 6	17	1	50	3	17	1	17	1
lunette 15	0	0	13	2	60	9	20	3
photo 7	14	1	71	5	0	0	0	0
Tous 71	7	5	39	28	37	26	13	9

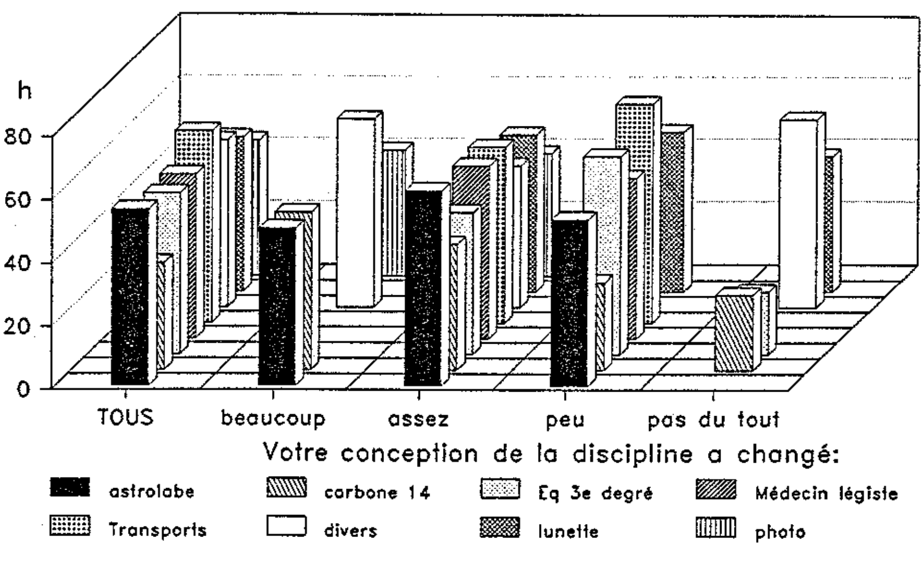
Il n'y a pas plus de réponses qu'à la question précédente et elles sont plus utilisables comme indications que pour une étude statistique. Les étudiants ont été sensibles à l'aspect application de la théorie, à l'apprentissage de nouvelles connaissances (dans le cadre de la discipline) ou à un nouveau point de vue sur celle-ci. Certains y ont (re)trouvé un plaisir à travailler, seul ou en groupe.

Du côté "négatif" les rares explications sur l'absence de changement portent sur l'existence "d'idées déjà faites" (ce qui est conforme à l'idée didactique qu'il faut changer pour apprendre) ou d'un (prétendu) manque d'intérêt du sujet choisi.

Changement de conception
de la discipline du mémoire
pendant le mémoire



Temps moyen passé pour le mémoire
en fonction du changement de
conception de la discipline



Temps moyen passé (en heures) à la réalisation du mémoire en fonction du changement de conception de la discipline

	Votre conception a changé				
	Tous	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe	56_{8}	50_{2}	62_{3}	53_{3}	$_{0}$
carbone 14	34_{16}	50_{1}	40_{8}	28_{2}	24_{4}
éq. 3ème degré	51_{5}	$_{0}$	45_{1}	63_{3}	20_{1}
médecin légiste	52_{7}	$_{0}$	55_{2}	51_{5}	$_{0}$
transports	61_{6}	$_{0}$	56_{4}	70_{2}	$_{0}$
divers maths	53_{4}	60_{1}	45_{2}	$_{0}$	60_{1}
lunette	49_{15}	$_{0}$	50_{1}	51_{9}	43_{3}
photo	43_{6}	40_{1}	39_{4}	$_{0}$	$_{0}$
Tous	47_{65}	50_{5}	47_{25}	52_{24}	34_{9}

Changement de conception de l'apprentissage de cette discipline

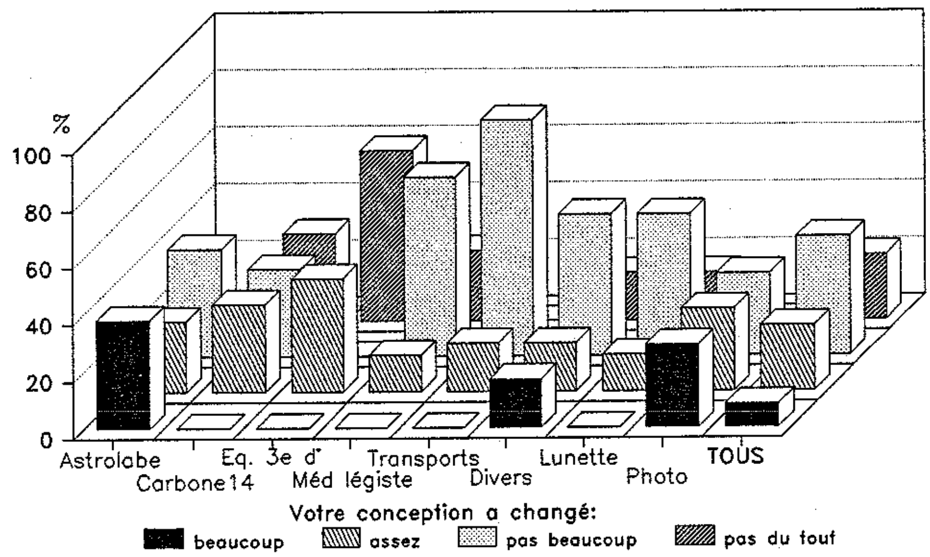
	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe $_{8}$	**38** $_{3}$	**25** $_{2}$	**38** $_{3}$	**0** $_{0}$
carbone 14 $_{16}$	**0** $_{0}$	**31** $_{5}$	**31** $_{5}$	**31** $_{5}$
éq. 3ème degré $_{5}$	**0** $_{0}$	**40** $_{2}$	**0** $_{0}$	**60** $_{3}$
médecin légiste $_{8}$	**0** $_{0}$	**13** $_{1}$	**63** $_{5}$	**25** $_{2}$
transports $_{6}$	**0** $_{0}$	**17** $_{1}$	**83** $_{5}$	**0** $_{0}$
divers maths $_{6}$	**17** $_{1}$	**17** $_{1}$	**50** $_{3}$	**17** $_{1}$
lunette $_{15}$	**0** $_{0}$	**13** $_{2}$	**50** $_{7}$	**17** $_{5}$
photo $_{7}$	**29** $_{2}$	**29** $_{2}$	**29** $_{2}$	**0** $_{2}$
Tous $_{71}$	**8** $_{6}$	**23** $_{16}$	**42** $_{30}$	**23** $_{16}$

Comme le montre le tableau précédent, le changement est plutôt faible, aux yeux des étudiants **le transfert ne s'effectue pas**[5]. Les raisons évoquées pour un changement de conception de l'apprentissage de la discipline sont l'augmentation de l'intérêt pour la discipline (en en étudiant un aspect non traditionnel), une meilleure maîtrise de la partie fondamentale grâce à la pratique d'une partie plus concrète, une meilleure motivation en en voyant l'utilité et enfin le besoin de rigueur (dans le mémoire il faut contrôler soi-même ce qu'on fait et non se contenter de justifier les assertions de l'énoncé).

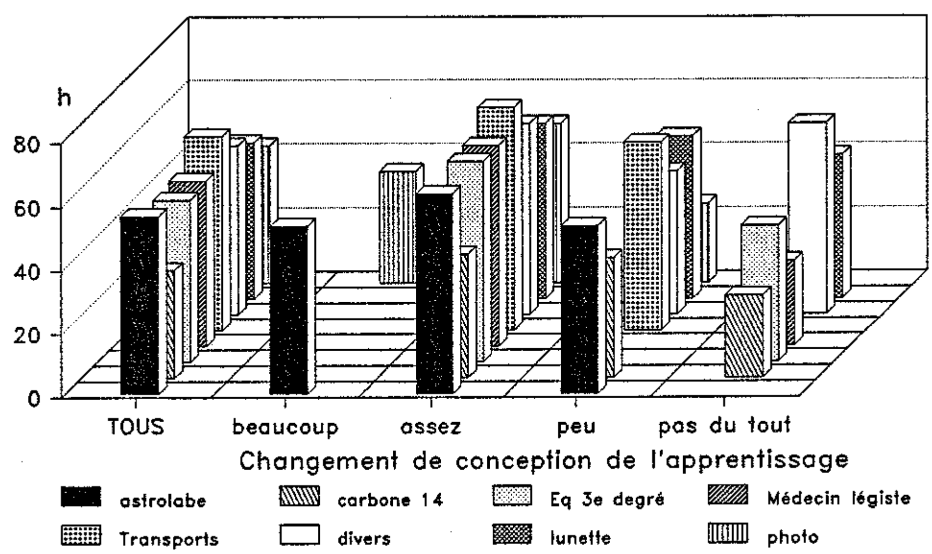
----

[5]Nous voyons par ailleurs ce que l'étude des mémoires et du test de début de seconde année permet d'en penser.

Changement de conception
de l'apprentissage de la discipline
pendant le mémoire



Temps moyen passé pour le mémoire
en fonction du changement de
conception de l'apprentissage



Temps moyen passé (en heures) à la réalisation du mémoire en fonction du changement de conception de l'apprentissage

	Votre conception a changé				
	Tous	beaucoup	assez	pas beaucoup	pas du tout
astrolabe	56_{8}	53_{3}	63_{2}	53_{3}	$_{0}$
carbone 14	34_{16}	$_{0}$	39_{5}	38_{5}	26_{5}
éq. 3ème degré	51_{5}	$_{0}$	63_{2}	$_{0}$	43_{3}
médecin légiste	52_{7}	$_{0}$	90_{1}	55_{4}	27_{2}
transports	61_{6}	$_{0}$	70_{1}	59_{5}	$_{0}$
divers maths	53_{4}	$_{0}$	60_{1}	45_{2}	60_{1}
lunette	49_{13}	$_{0}$	55_{2}	51_{6}	45_{5}
photo	43_{6}	35_{2}	50_{2}	25_{1}	$_{0}$
Tous	47_{65}	46_{5}	55_{16}	49_{26}	37_{16}

La encore, à part pour les réponses négatives (pas de changement) l'écart de temps n'est pas significatif.

Bénéfices éventuels (en dehors de la note)

Quelques étudiants, très minoritaires (7) répondent : "aucun" ou "très peu" et il y a très peu d'absence de réponses (7 aussi). Parmi les autres, qui répondent, **l'aspect positif** qui vient de loin en tête (27 fois) est **l'acquisition de nouvelles connaissances**, soit **concrètes** (mieux comprendre son appareil photo...) soit **plus théoriques**, avec l'arrière pensée que ces nouvelles connaissances pourront être utiles ou réutilisables.

Le deuxième grand apport (18 fois) est le **travail en groupe, en équipe, le fait d'apprendre à communiquer.**

Viennent ensuite la prise d'autonomie, l'apprentissage de la gestion du temps, la nécessité de rigueur et de rédaction due au travail de type mémoire, qui est aussi ressenti comme une préparation à une thèse ultérieure.

Le mémoire est aussi l'occasion d'un travail d'approfondissement et d'application concrète[6] de théories apprises en cours, un exercice en temps non limité.

Conclusion partielle.

Cette étude ne reflète que le point de vue des étudiants, l'impression de changement (ou de non-changement) dû au mémoire telle qu'ils la ressentent et non la réalité profonde de ce changement telle que nous essayons de l'appréhender par ailleurs avec d'autres moyens.

Même si elle ne répond pas pleinement à nos interrogations ni aux dessins des initiateurs du projet, l'impression est néanmoins importante car elle fait partie de la représentation des mathématiques et de leur apprentissage qu'ont les étudiants.

Les étudiants n'ont pas l'impression d'être des élèves différents, il n'ont pas conscience d'un changement d'identité, même si en fait il y a changement non directement perceptible.

Majoritairement les étudiants sont contents[7], ils ont l'impression d'avoir appris quelque chose en plus de l'enseignement traditionnel, certains en ont retiré un surcroit d'intérêt pour l'enseignement classique, mais peu évoquent un éventuel transfert vers celui-ci. Ce n'était d'ailleurs peut-être pas pour eux un enjeu de la pratique des mémoires.

----

[6]Des étudiants ayant choisi l'astrolabe ont dit avoir pris plaisir au travail manuel de construction d'un astrolabe; leur instrument, en métal était d'ailleurs fort beau.

[7]Le même sentiment majoritaire de satisfaction apparaissait dans le dépouillement - non publié - d'un autre questionnaire en 1989 sur les mémoires à Lille.

Document 2

DÉPOUILLEMENT DU TEST DE LILLE
DÉBUT DE SECONDE ANNÉE DE DEUG SSM

Nous avons cherché à évaluer l'impact de la réalisation par les étudiants de **mémoires** sur l'apprentissage des mathématiques. Parmi les moyens utilisés figuraient un questionnaire dont les réponses seront analysées par ailleurs et un test dont voici les résultats.

Ce test était présenté comme un devoir de révision proposé à tous les étudiants de seconde année à la rentrée, qu'ils aient fait un mémoire l'année précédente ou non. Il a été élaboré par l'enseignant auteur des mémoires, Marc Rogalski qui l'a diffusé auprès des enseignants de mathématiques et s'est occupé de la collecte des réponses.

Le test était à rendre de façon anonyme (donc sans enjeu au niveau du contrôle continu). Cela a eu pour conséquence que, selon l'implication de l'enseignant de Travaux Dirigés, le taux de retour a été très variable: de 0 à tous (ou presque) les étudiants du groupe. Il y a eu un nombre important de groupes sans aucune réponse et l'on peut noter que le retour est meilleur en MP qu'en PC.

De ce fait le nombre de réponses (important dans l'absolu: 145) ne représente qu'une faible proportion de l'effectif de seconde année (700 environ) et, parmi celles-ci, un nombre encore plus faible (25) concerne des étudiants ayant rédigé un mémoire.

Nous présentons ci-dessous les résultats complets, en mettant en valeur les résultats relatifs à trois groupes de TD, numérotés 3, 4 et 5. Nous les avons retenus car le fort taux de réponses et le nombre de mémoires faits, conforme à la moyenne de l'université, permettent de considérer que pour ces TD les réponses sont représentatives. De plus la présence d'un groupe de type PC et de deux de type MP permet une comparaison entre filières.

Bien sûr d'aussi petits échantillons ne permettront pas de conclusions statistiquement valables et pourront tout au plus fournir des indications pour des recherches ultérieures.

Présentation des résultats.

Le test a été passé de façon anonyme et sans prise en compte dans l'évaluation de fin d'année donc les étudiants n'étaient a priori pas motivés pour s'impliquer à fond.

Il comportait huit questions de longueur et de difficulté inégales. Pour le dépouillement nous en avons retenu quatre, les autres risquant de refléter plus ce qui avait été fait (ou non fait) en cours dans les différentes sections de première année que des effets éventuels du travail sur les mémoires (par exemple une question sur l'étude qualitative des équations différentielles).

Les tableaux suivants indiquent pour chaque groupe de TD dépouillé (on l'appelle "section") le nombre total de réponses ("TOUS") selon une grille qui sera précisée tableau par tableau.

On trouve ensuite les totaux sur l'ensemble des réponses. Certains étudiants n'ayant pas rempli le questionnaire accompagnant le test, nous n'avons pas pu savoir s'ils étaient redoublants, s'ils avaient participé à un mémoire, ils sont considérés dans la ligne "? mémoire".

En dessous, on trouve les pourcentages par lignes pour l'ensemble des réponses et enfin tout en bas les pourcentages relatifs aux sections 3, 4 et 5 qui nous paraissent les plus significatifs.

Il faut étudier les pourcentages avec la rigueur et la prudence qui s'imposent: il y a eu 24 réponses avec mémoire dont 17 dans les sections 3, 4 et 5: un déplacement de 2 réponses se traduit donc par un écart de 12%.

Des graphiques présentent les résultats (nous paraissant) les plus significatifs.

Premier tableau.

Il présente les statistiques générales. On y trouve notamment:

le nombre d'étudiants ayant participé à un mémoire ("avec mémoire"), les étudiants classés "? mémoire" sont ceux qui n'ont pas indiqué s'ils avaient fait un mémoire ou non.

le nombre de redoublants et de non-redoublants,

une note de rédaction entre 1 et 4,

le type de la section.

Quelques commentaires:

Le taux relevé de participation à des mémoires est conforme à la proportion effective puisqu'il y en avait dans une section sur 5 en première année.

Pour les redoublants le déficit entre la somme

% redoublants + % non-redoublants

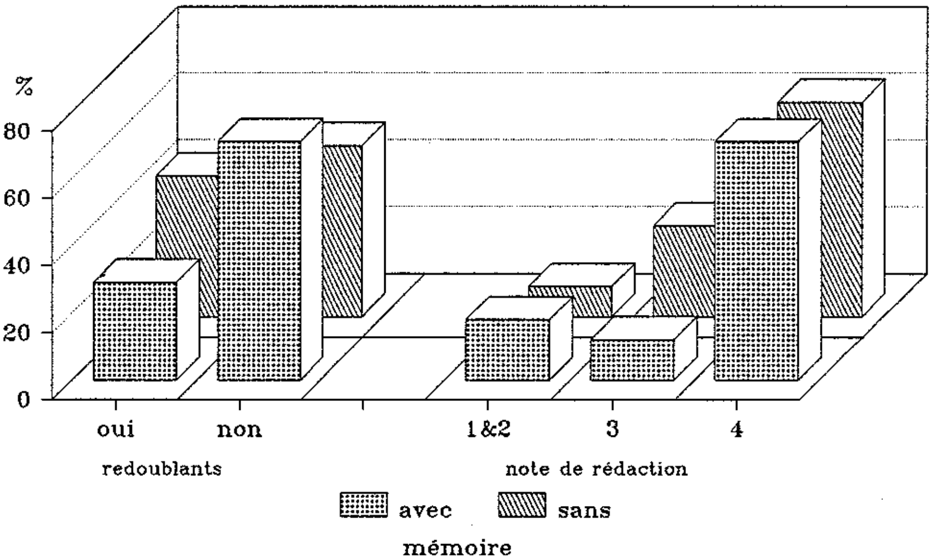
et 100% s'explique par le manque de réponses à cette question.

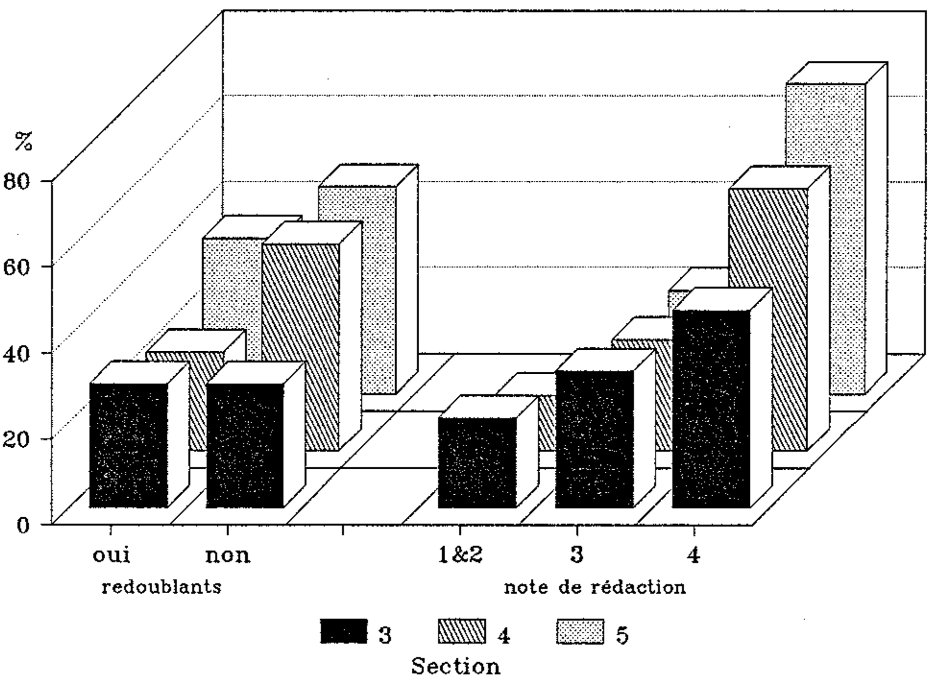
On remarque que parmi les étudiants avec mémoire le pourcentage de redoublants est sensiblement plus faible que parmi les autres: est-ce significatif? ce n'est pas sûr, compte-tenu des faibles effectifs considérés, mais cela montre au moins que les étudiants qui passent en seconde année grâce à un éventuel "coup de pouce" dû à la note de mémoire ne sont pas pénalisés ensuite.

En ce qui concerne la note de rédaction, le travail de rédaction, important, fourni lors de l'élaboration des mémoires semble avoir laissé des traces (mais la différence est moins nette qu'entre MP et PC).

On remarquera que la différence PC - MP est plus nette que la différence avec - sans mémoire.

Statistiques

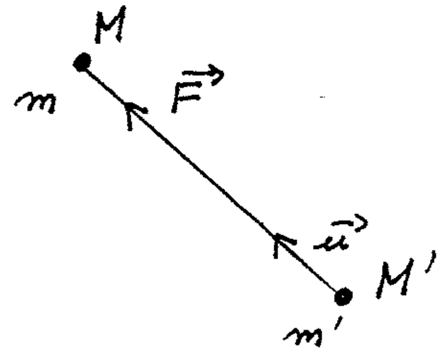




		TOUS	avec mémoire	redoublant oui	redoublant non	note de rédaction 1&2	note de rédaction 3	note de rédaction 4	type section
Nombre :									
s	1	6	0	2	4	2	3	1	alt
e	2	3	2	1	0	0	0	3	mpc
c	**3**	**28**	**4**	**8**	**8**	**6**	**9**	**13**	**pca**
t	**4**	**31**	**8**	**7**	**15**	**4**	**8**	**19**	**mp**
i	**5**	**25**	**5**	**9**	**12**	**1**	**6**	**18**	**mp**
o	6	15	1	0	11	0	4	11	mp
n	7	10	2	4	4	2	3	5	mp
	8	27	2	11	16	7	14	6	mp
avec	mémoire	24	24	9	14	5	2	17	
sans	mémoire	91	0	33	53	12	32	47	
?	mémoire	30	0	0	0	5	13	12	
	TOUS	145	24	42	67	22	47	76	
Pourcentages (par lignes) :									
s	1	100	0	33	67	33	50	17	
e	2	100	67	50	0	0	0	100	
c	**3**	**100**	**14**	**29**	**29**	**21**	**32**	**46**	
t	**4**	**100**	**26**	**23**	**48**	**13**	**26**	**61**	
i	**5**	**100**	**20**	**36**	**48**	**4**	**24**	**72**	
o	6	100	7	0	73	0	27	73	
n	7	100	20	40	40	20	30	50	
	8	100	7	41	52	26	52	22	
avec	mémoire	100	100	38	58	21	8	71	
sans	mémoire	100	0	36	58	13	35	52	
?	mémoire	100	0	0	0	15	41	44	
	TOUS	100	17	29	46	15	32	52	
En ne retenant que les sections 3, 4 et 5 (pourcentages par lignes)									
	3	100	14	29	29	21	32	46	
section	4	100	26	23	48	13	26	61	
	5	100	20	36	48	4	24	72	
avec	**mémoire**	**100**	**100**	**29**	**71**	**18**	**12**	**71**	
sans	**mémoire**	**100**	**0**	**42**	**51**	**9**	**27**	**64**	
?	mémoire	100				18	41	41	
	TOUS	100	20	29	42	13	27	60	

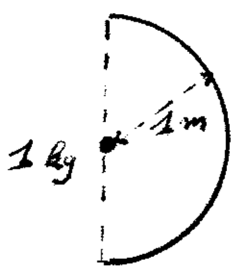
Question 2:

On rappelle que l'attraction newtonnienne d'une masse ponctuelle m *en* M *sur une autre masse ponctuelle* m' *située en* M' *est donnée par*



$$\vec{F} = G\,\frac{mm'}{r^2}\,\vec{u}$$

où $\vec{u}$ *est un vecteur unitaire colinéaire à* $\overrightarrow{MM'}$, r *la distance de* M *à* M' *et* G *une constante universelle.*



On considère un fil mince ayant la forme d'un demi-cercle de rayon 1 *mètre de densité linéaire* 1 kg / m. *Quelle force exerce sur ce fil une masse ponctuelle de* 1 kg *placée au centre du cercle?*

Le but était de voir comment les étudiants traduisaient en mathématiques un problème concret (?) et le résolvaient ensuite. Ce genre de calculs avait a priori déjà été abordé en cours de physique.

Dans toute cette question il semble que les étudiants n'ayant pas fait de mémoire fassent aussi bien ou mieux que ceux en ayant fait un.

Le premier critère retenu a été la présence ou non d'un graphe (il y en avait dans l'énoncé fourni aux étudiants).

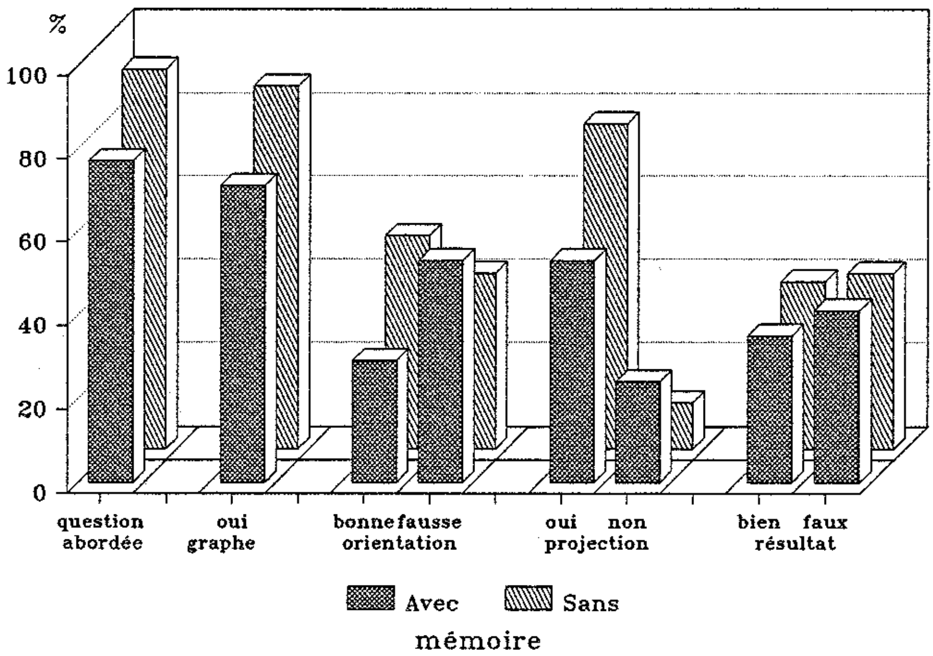
Ensuite nous avons considéré l'orientation de la force (quand il y avait graphique!): ce point n'était pas prévu a priori mais il s'est avéré qu'un nombre important d'étudiants représentaient une force attractive vers l'extérieur, ce qui est assez fâcheux.

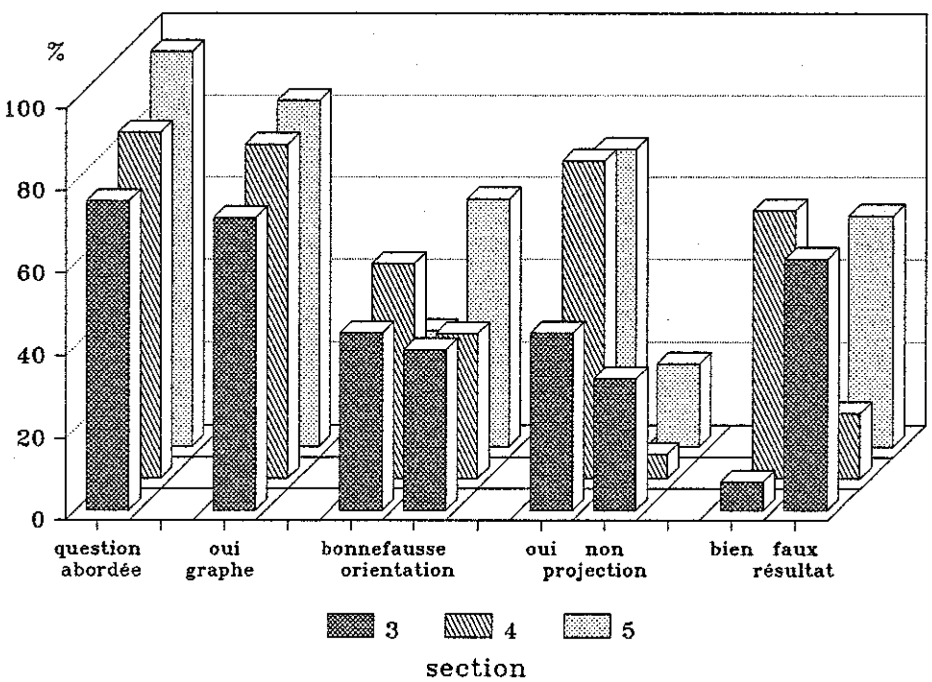
La mise en équation sous forme différentielle a été très majoritairement faite mais parfois pour calculer la longueur d'un demi-cercle. Nous avons préféré considérer le fait de projeter la force sur l'axe de symétrie du demi-cercle.

Enfin nous avons noté si le résultat final était correct, sans chercher à distinguer les valeurs comme $2\ G\ /\ d^2$ des valeurs plus numériques (manifestement il restait aux étudiants des traces de la valeur de G).

Un chiffre mérite une explication: le nombre important d'étudiants ayant bien projeté la force et ayant un résultat faux dans la section 3: la mise en équation a été bien faite, il est clair que la force est portée par l'axe de symétrie du demi-cercle mais au dernier moment, dans le calcul final, le calcul d'intégration de $\cos(\vartheta)$ est escamoté, la masse totale du fil est introduite et on trouve πG au lieu de 2G. Il y a aussi des effets de bord, à la correction on a bien l'impression que les étudiants ont travaillé le test par groupes d'où des effets de propagation des solutions (fausses ou correctes) qui parasitent notre étude.

Question sur la force d'attraction





		TOUS	question abordée	graphe oui	graphe non	force bien orientée oui	force bien orientée ?	force bien orientée non	projection oui	projection non	résultat bien	résultat faux
Nombre :												
s	1	6	5	4	1	2	2	2	4	0	4	1
e	2	3	3	3	0	2	0	1	2	1	1	2
c	3	28	21	20	1	12	5	11	12	9	2	17
t	4	31	26	25	1	16	4	11	24	2	20	5
i	5	25	24	21	3	7	3	15	18	5	8	14
o	6	15	14	12	2	5	7	3	10	4	10	4
n	7	10	8	6	2	3	4	3	5	3	3	5
	8	27	26	20	6	6	12	9	14	11	11	15
avec mémoire		24	18	16	2	7	4	13	12	6	8	10
sans mémoire		91	85	73	12	34	27	30	60	22	40	41
? mémoire		30	24	22	2	12	6	12	17	7	11	12
TOUS		145	127	111	16	53	37	55	89	35	59	63
Pourcentages par ligne:												
s	1	100	84	67	17	33	33	33	67	0	67	17
e	2	100	100	100	0	67	0	33	67	33	33	67
c	3	100	75	71	4	43	18	39	43	32	7	61
t	4	100	84	81	3	52	13	35	77	6	65	16
i	5	100	96	84	12	28	12	60	72	20	32	56
o	6	100	93	80	13	33	47	20	67	27	67	27
n	7	100	80	60	20	30	40	30	50	30	30	50
	8	100	96	74	22	22	44	33	52	41	41	56
avec mémoire		100	75	67	8	29	17	54	50	25	33	42
sans mémoire		100	93	80	13	37	30	33	66	24	44	45
? mémoire		100	80	73	7	40	20	40	57	23	37	40
TOUS		100	88	77	11	37	26	38	61	24	41	43
Pourcentages pour les sections 3 4 et 5:												
	3	100	75	71	4	43	18	39	43	32	7	61
section	4	100	84	81	3	52	13	35	77	6	65	16
	5	100	96	84	12	28	12	60	72	20	32	56
avec mémoire		100	77	71	6	29	18	53	53	24	35	41
sans mémoire		100	91	87	4	51	7	42	78	11	40	42
? mémoire		100	77	68	9	32	27	41	45	32	27	45
TOUS		100	85	79	6	42	14	44	64	19	36	43

Question 6:

Calculer avec une calculatrice:

$$\frac{40622}{99999}, \frac{1}{999}, \frac{7}{9}, \frac{257}{999}, \frac{22}{99}$$

Quel théorème les résultats vous suggèrent-ils? Prouvez le.

Outre la traditionnelle rubrique "question abordée", nous avons noté:

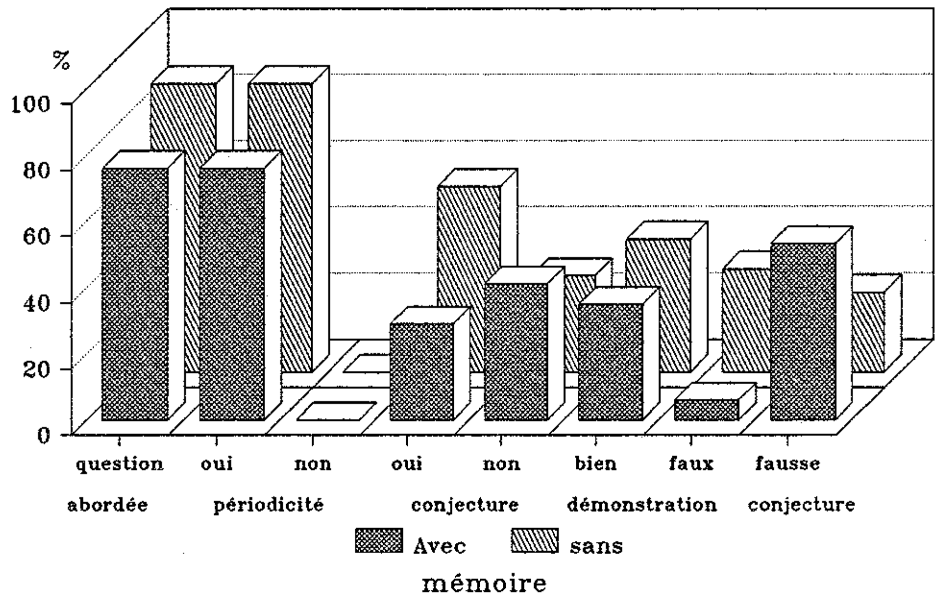
"période oui, non", si les étudiants avaient remarqué la périodicité du développement décimal, il est à noter que parmi les étudiants ayant répondu aux questionnaires tous les étudiants ayant abordé la question ont fait cette remarque.

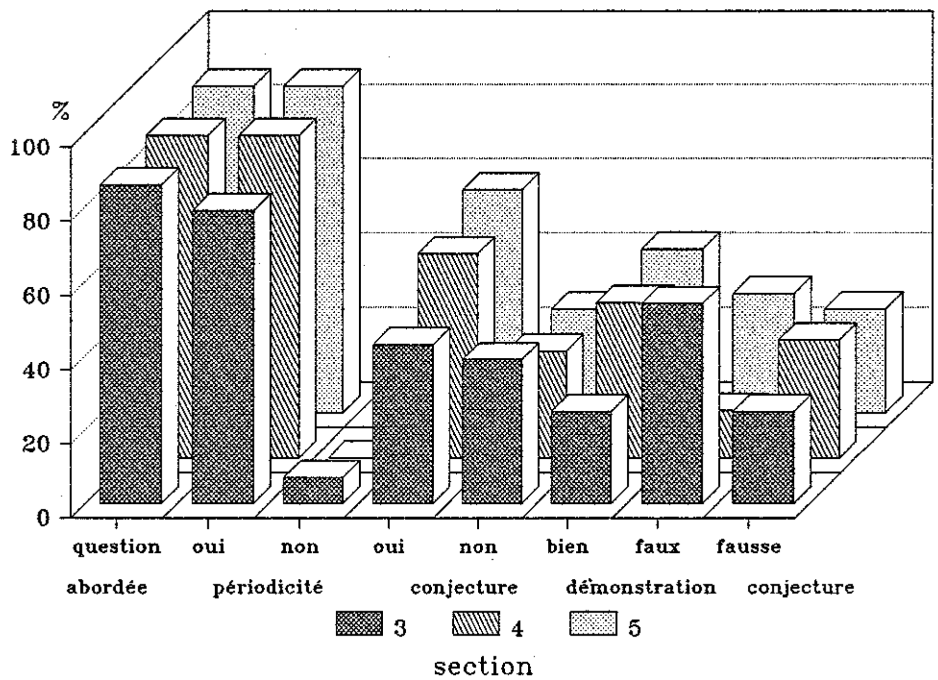
"bonne conjecture oui non", si la "bonne conjecture" (c'est à dire la périodicité du développement décimal pour les rationnels de dénominateur 99..99) était faite.

"démonstration bien fausse", si la conjecture précédente était bien démontrée ou non.

"fausse réciproque", si les étudiants avaient conjecturé (et éventuellement démontré) que tout réel dont le développement décimal est périodique est rationnel. Ce résultat avait été démontré dans la section avec mémoire l'année d'avant et il en restait manifestement des traces (voir les dernières lignes du tableau) ce qui perturbe l'analyse des chiffres de bonne conjecture: les étudiants ayant fait un mémoire ayant été conduits pour des raisons non liées aux mémoires à une fausse conjecture. On ne peut donc pas tirer de conclusion sur un éventuel développement de l'aptitude à conjecturer. Par contre on peut remarquer que les étudiants ayant fait un mémoire ont moins donné de démonstration fausse que les autres : est-ce l'indice de l'effort d'éviter de dire des bêtises plutôt que de céder à la tentation de glaner des points.

Question sur la périodicité





		TOUS	question abordée	période oui	période non	bonne conjecture oui	bonne conjecture non	démonstration bien	démonstration fausse	fausse réciproque
Nombre :										
s	1	6	4	3	1	2	2	0	1	1
e	2	3	3	2	1	0	2	0	1	2
c	3	28	24	22	2	12	11	7	15	7
t	4	31	27	27	0	17	9	13	4	10
i	5	25	22	22	0	15	7	11	8	7
o	6	15	12	12	0	10	2	9	2	1
n	7	10	7	7	0	6	1	4	2	1
	8	27	23	21	2	15	8	5	16	1
avec	mémoire	24	19	18	1	8	10	7	5	11
sans	mémoire	91	78	75	3	52	24	33	31	14
?	mémoire	30	25	23	2	17	8	9	13	4
	TOUS	145	122	116	6	77	42	49	49	30
Pourcentages par lignes :										
s	1	100	67	50	17	33	33	0	17	17
e	2	100	100	67	33	0	67	0	33	67
c	3	100	86	79	7	43	39	25	54	25
t	4	100	87	87	0	55	29	42	13	32
i	5	100	88	88	0	60	28	44	32	28
o	6	100	80	80	0	67	13	60	13	7
n	7	100	70	70	0	60	10	40	20	10
	8	100	85	78	7	56	30	19	59	4
avec	mémoire	100	79	75	4	33	42	29	21	46
sans	mémoire	100	86	82	3	57	26	36	34	15
?	mémoire	100	83	77	7	57	27	30	43	17
	TOUS	100	84	80	4	53	29	34	34	21
Pourcentages pour les sections 3, 4 et 5:										
	3	100	86	79	7	43	39	25	54	25
section	4	100	87	87	0	55	29	42	13	32
	5	100	88	88	0	60	28	44	32	28
avec	mémoire	100	76	76	0	29	41	35	6	53
sans	mémoire	100	87	87	0	56	29	40	31	24
?	mémoire	100	95	86	9	64	32	30	55	18
	TOUS	100	87	85	2	52	32	37	32	29

Question 7:

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de chacune des trois quantités

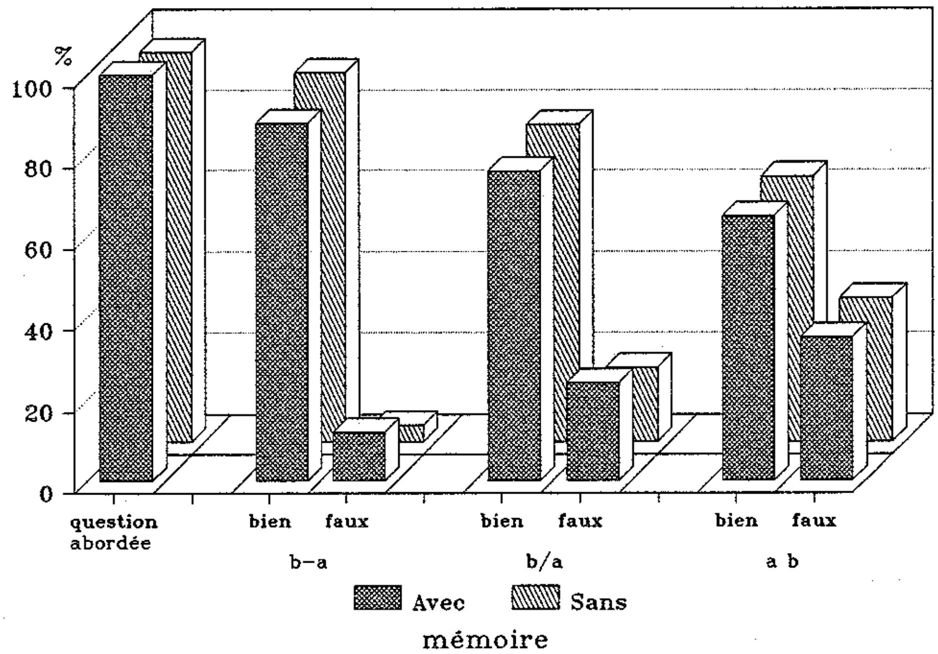
$$b-a \quad , \quad b/a \quad , \quad a\,b$$

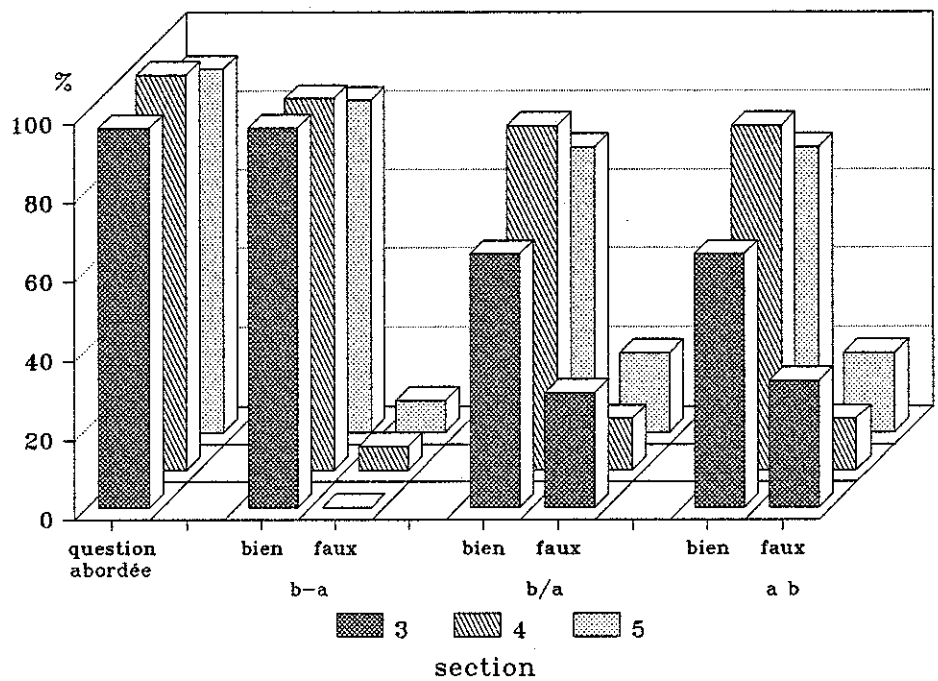
lorsque le couple (a,b) *décrit l'ensemble défini par les inégalités*

$$-3 < a < -1 \quad \text{et} \quad -1 < b < 4$$

Diverses approches étaient possibles pour arriver au résultat (une première façon - assez délicate pour b/a - était de combiner des inégalités en tenant compte du signe et du passage à l'inverse éventuels, une seconde -plus simple et s'inspirant des méthodes d'optimisation linéaire - consistait à remarquer que que les valeurs extrêmes étaient nécessairement obtenues pour les valeurs extrêmes de a et b) ; nous n'avons noté donc que la correction de la réponse fournie. et le taux de réponses.

Question sur des encadrements

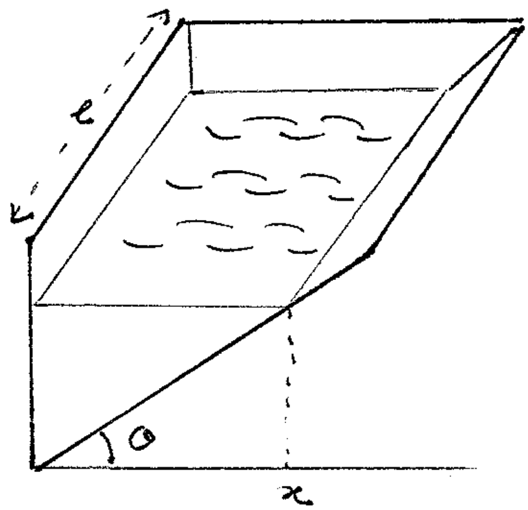




		TOUS	question abordée	b-a		b/a		a.b	
Nombre :				bien	faux	bien	faux	bien	faux
s	1	*6*	**5**	*5*	*0*	*2*	*3*	*1*	*4*
e	2	*3*	**2**	*2*	*0*	*2*	*0*	*2*	*0*
c	3	**28**	**27**	**27**	**0**	**18**	**8**	**18**	**9**
t	4	**31**	**31**	**29**	**2**	**27**	**4**	**27**	**4**
i	5	**25**	**23**	**21**	**2**	**18**	**5**	**18**	**5**
o	6	*15*	**15**	*15*	*0*	*15*	*0*	*14*	*1*
n	7	*10*	**10**	*10*	*0*	*7*	*3*	*7*	*3*
	8	*27*	**26**	*25*	*1*	*23*	*3*	*24*	*2*
avec	mémoire	*24*	**23**	*21*	*2*	*19*	*4*	*17*	*6*
sans	mémoire	*91*	**87**	*84*	*3*	*73*	*14*	*73*	*14*
?	mémoire	*30*	**29**	*29*	*0*	*20*	*8*	*21*	*8*
	TOUS	*145*	**139**	*134*	*5*	*112*	*26*	*111*	*28*
Pourcentages sur la ligne:									
s	1	*100*	**83**	*83*	*0*	*33*	*50*	*17*	*67*
e	2	*100*	**67**	*67*	*0*	*67*	*0*	*67*	*0*
c	3	**100**	**96**	**96**	**0**	**64**	**29**	**64**	**32**
t	4	**100**	**100**	**94**	**6**	**87**	**13**	**87**	**13**
i	5	**100**	**92**	**84**	**8**	**72**	**20**	**72**	**20**
o	6	*100*	**100**	*100*	*0*	*100*	*0*	*93*	*7*
n	7	*100*	**100**	*100*	*0*	*70*	*30*	*70*	*30*
	8	*100*	**97**	*93*	*4*	*85*	*11*	*89*	*7*
avec	mémoire	*100*	**96**	*88*	*8*	*79*	*17*	*71*	*25*
sans	mémoire	*100*	**95**	*92*	*3*	*80*	*15*	*80*	*15*
?	mémoire	*100*	**97**	*97*	*0*	*67*	*27*	*70*	*27*
	TOUS	*100*	**95**	*92*	*3*	*77*	*18*	*77*	*19*
Pourcentages pour les sections 3, 4 et 5:									
	3	100	**96**	96	0	64	29	64	32
section	4	100	**96**	94	6	87	13	87	13
	5	100	**92**	84	8	72	20	72	20
avec	**mémoire**	**100**	**100**	**88**	**12**	**76**	**24**	**65**	**35**
sans	**mémoire**	**100**	**96**	**91**	**4**	**78**	**18**	**80**	**16**
?	mémoire	100	**95**	95	0	68	23	73	23
	TOUS	100	**96**	92	5	75	20	75	21

Question 8:

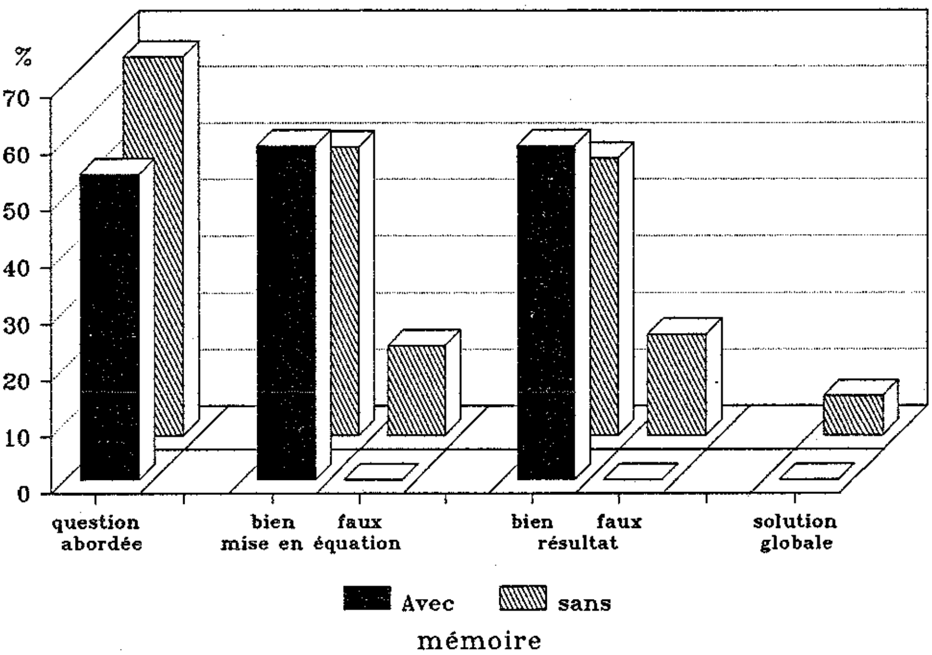
De l'eau est dans un récipient dont la forme est dessinée ci-contre (on a enlevé la paroi avant pour la visibilité). L'eau s'évapore. La masse d'eau qui s'évapore par seconde est proportionnelle à la surface libre de l'eau, avec un coefficient de proportionnalité K. Au bout de combien de temps toute l'eau s'est-elle évaporée? (On pourra utiliser l'abscisse x..).

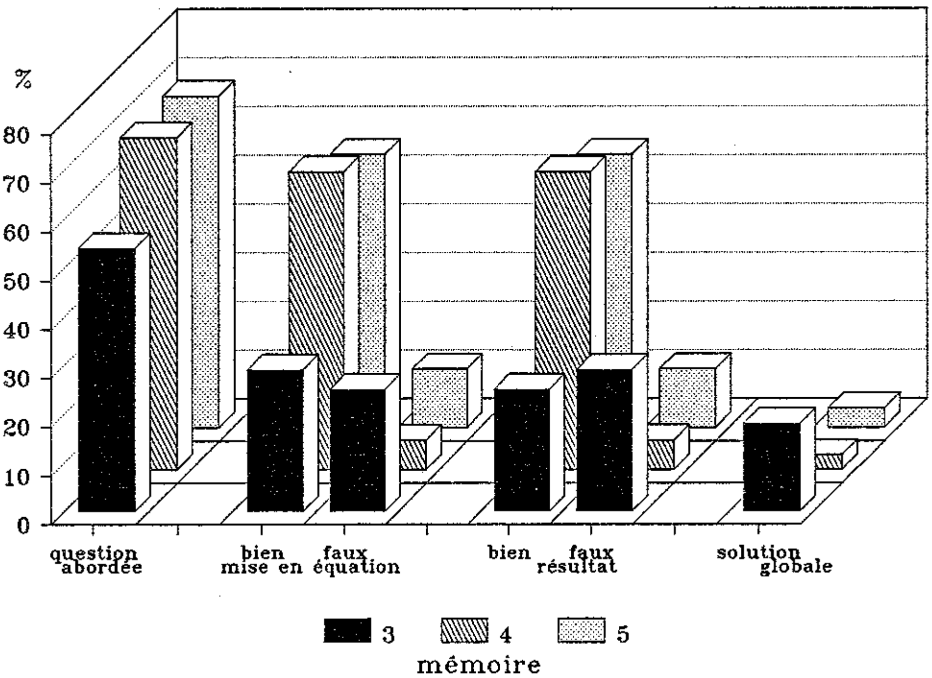


Le but de cette question était de tester l'aptitude à modéliser des étudiants, l'équation différentielle étant fort simple sa bonne résolution ne pouvait être un critère d'appréciation.

Nous avons d'abord indiqué si les étudiants avaient recours à la notation différentielle ou non, si l'équation était convenablement posée et enfin si le résultat était correct. La rubrique "solution globale" concerne les étudiants qui considérant implicitement la surface comme constante ont fait une règle de trois et divisé le volume d'eau par la surface.

Equation différentielle





		TOUS	question abordée	différentielle oui	différentielle non	mise en équation oui	mise en équation non	résultat bien	résultat faux	solution globale
Nombre :										
s	1	6	6	4	2	1	3	1	3	1
e	2	3	2	1	1	1	1	0	2	0
c	3	28	15	10	5	8	7	7	8	5
t	4	31	21	19	2	19	2	19	2	1
i	5	25	17	15	2	14	3	14	3	1
o	6	15	13	9	4	10	3	9	4	2
n	7	10	8	7	1	5	3	5	3	0
	8	27	20	8	12	1	19	1	19	4
avec	mémoire	24	14	11	3	10	4	10	4	0
sans	mémoire	91	67	47	20	35	30	32	33	7
?	mémoire	30	21	15	6	14	7	14	7	7
	TOUS	145	102	73	29	59	41	56	44	14
Pourcentages par lignes:										
s	1	100	100	67	33	17	50	17	50	17
e	2	100	67	33	33	33	33	0	67	0
c	3	100	54	36	18	29	25	25	29	18
t	4	100	68	61	6	61	6	61	6	3
i	5	100	68	60	8	56	12	56	12	4
o	6	100	87	60	27	67	20	60	27	13
n	7	100	80	70	10	50	30	50	30	0
	8	100	74	30	44	4	70	4	70	15
avec	mémoire	100	58	46	13	42	17	42	17	0
sans	mémoire	100	74	52	22	38	33	35	36	8
?	mémoire	100	70	50	20	47	23	47	23	23
	TOUS	100	70	50	20	41	28	39	30	10
Pourcentages pour les sections 3 4 et 5:										
	3	100	54	36	18	29	25	25	29	18
section	4	100	68	61	6	61	6	61	6	3
	5	100	68	60	8	56	12	56	12	4
avec	mémoire	100	59	59	0	59	0	59	0	0
sans	mémoire	100	67	56	11	51	16	49	18	7
?	mémoire	100	59	41	18	36	23	36	23	18
	TOUS	100	63	52	11	49	14	48	15	8

Quelques commentaires.

Les différences sont relativement faibles et de ce fait difficiles à interpréter compte-tenu du faible nombre de réponses. On ne peut espérer avoir un meilleur taux de réponses par des moyens informels comme ceux utilisés, pour faire mieux, il faudrait une prise en charge institutionnelle de ce genre d'étude par l'université pour que tous les étudiants concernés soient atteints.

Quand il y a des différences, elles sont plutôt à l'avantage des étudiants n'ayant pas fait de mémoires. Cela ne met nullement en cause l'intérêt de la réalisation de mémoires: le test était très classique, sur le cours de première année. On peut penser que certains étudiants ont pu compenser une note d'examen faible par une bonne réussite au mémoire, leur passage en seconde année était mérité mais leur aptitude à résoudre un problème "scolaire" pas forcément augmentée. Par contre le travail d'élaboration et de rédaction du mémoire sera sans doute utile ultérieurement dans la vie active (comme pour rédiger un rapport) mais, cela, nous ne savons pas le mesurer. Une indication en ce sens pourrait être vue dans la note de rédaction qui est meilleure pour les étudiants avec mémoire.

Une autre remarque est que le **clivage est plus net entre la section** PC et **les sections MP qu'entre avec et sans mémoire.** Ce n'est pas une surprise car la réussite en mathématiques est un élément de choix important entre les filières MP et PC. Mais il y a des corollaires un peu inquiétants: les futurs physiciens ou chimistes ont du mal à modéliser (question 8 sur l'évaporation de l'eau) et ne sont pas meilleurs sur la question 4 (force de gravitation): leurs manques en mathématiques risquent de les pénaliser ensuite dans leur discipline.

Document 3

LES MATHEMATIQUES ET LE MEDECIN LEGISTE

ou "Comment déterminer l'heure de mort d'un cadavre"

Année scolaire
1988-1989

- PREFACE

PREFACE

Ce sujet concerne la thamatologie, c'est-à-dire l'étude scientifique de la mort.

Lors de cet exposé, nous allons donner une méthode numérique permettant de dater l'heure de mort d'un cadavre.

Cette détermination est effectuée par les médecins-légistes qui étaient au nombre de 69.948 en 1982 et actuellement, on en compte 90.115.

Les médecins libéraux ont suivi les études classiques de médecine ; à ce titre, signalons que l'exercice de la médecine est régi en France par la loi du 30 Novembre 1892.

Les médecins doivent effectuer des études de droit civique puis être requis par la Justice pour pouvoir exercer sous le titre de médecins-légistes encore nommés médecins-libéraux.

Cette qualification supplémentaire leur permet de faire les constats de mort non naturelle ainsi que les autopsies. Il est entendu par mort non naturelle toute mort causée par autre chose que l'âge ou une maladie quelconque. C'est justement puisqu'une affaire judiciaire suivra cette mort que le médecin constatant le décès doit posséder une formation juridique. Dans ce cas, l'heure de la mort pourra permettre de débuter une enquête policière.

La méthode de détermination étudiée ici est celle basée sur la loi de refroidissement des corps.

I) MISE EN EQUATION DU PROBLEME.

-1) Loi de refroidissement d'un corps.

Elle est basée sur le principe de calorimétrie suivant :
Lorsque l'on met en contact deux corps possédant une quantité de chaleur différente, ce système tend vers un équilibre thermique, qui dépend du volume et de la capacité calorifique de chacun des corps.

Dans le cas que nous considérons, le premier corps est un cadavre, et le deuxième est constitué de la Terre et de son atmosphère. Il est évident que , vu le volume de ce milieu, la température du cadavre ne va influer sur celle de la Terre et son atmosphère. La température du cadavre va donc tendre vers la température extérieure au fur et à mesure que le temps avancera.

-2) Vitesse de refroidissement.

Si l'on appelle θ_1 , la température du cadavre au temps t1. θ_2 la température du cadavre au temps t2, la vitesse moyenne de refroidissement du corps est : $\dfrac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}$

La vitesse instantanée est la vitesse moyenne pour un intervalle de temps très court :

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{\theta(t)-\theta(t_0)}{t-t_0} = \theta'(t)$$

Cette vitesse est proportionnelle à la différence entre θ (t), la température du corps à l'instant t et φ (t), la température extérieure au même instant :

$$\theta'(t) = -k(\theta(t)-\varphi(t))$$

-3) Equation en t.

Si $\varphi(t) = at + b$, alors $\theta'(t)=-K(t)+K(at+b)$ on cherche donc a résoudre l'équatuion differentielle :

$$\theta'(t)+K\theta(t)=aKt+Kb \qquad (1)$$

La solution de (1) est de la forme :
solution de $\theta'(t)+K\theta(t)=0$) + solution particulière

* $\theta'(t)+K\theta(t)=0 \iff \theta(t)=C.\exp(-Kt) \quad C\in\mathbb{R}$

* Soit f, la fonction dérivable telle que $f(t)=\lambda t+\mu \qquad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

Déterminons λ et μ tels que f soit solution de (1) : $f(t)=\lambda t+\mu$; $f'(t)=\lambda$

(1) devient : $\lambda+K\lambda t+K\mu=(aK)t+(Kb)$

Par la methode d'identification des polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda K=aK \\ \lambda+K\mu=Kb \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=a \\ \mu=b-a/K \end{cases}$$

* D'où $\underline{(t)=C.\exp(-Kt)+at+b-a:K}$ (E)

-4) Equation en K

Afin de résoudre l'équation précedente, il est nécessaire de déterminer C et K .

$$\begin{cases}\varphi 1=a.t1+b \\ \varphi 2=a.t2+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi 1=a.t1+b \\ \varphi 2=a(t1+h)+b\end{cases} \qquad \text{avec } t2=t1+h$$

Si l'on pose l'origine des dates à t1, t1=0, t2=h

D'où : $\begin{cases}\varphi 1=b \\ \varphi 2=ah+\varphi 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\varphi 1 \\ a=(\varphi 2-\varphi 1)/h\end{cases}$

En transposant dans l'équation (E), on obtient :

$$\begin{cases}\theta(t1)=\theta 1=C+\varphi 1-(\varphi 2-\varphi 1)/Kh \\ \theta(t2)=\theta 2=C.\exp(-Kh)+\dfrac{(\varphi 2-\varphi 1)\cancel{h}}{h}+\varphi 1-(\varphi 2-\varphi 1)/Kh\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}C=\theta 1-\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh \\ (\theta 1-\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh).\exp(-Kh)=\theta 2-(\varphi 2-\varphi 1)+\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}C=\theta 1-\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh \\ \exp(-Kh)=\dfrac{\dfrac{(\theta 2-\varphi 2)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}{Kh}}{\dfrac{(\theta 1-\varphi 1)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}{Kh}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}C=\theta 1-\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh \\ \exp(-Kh)=\dfrac{(\theta 2-\varphi 2)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}{(\theta 1-\varphi 1)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}\end{cases} \qquad \text{On divise par } (\varphi 2-\varphi 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}C=\theta 1-\varphi 1+(\varphi 2-\varphi 1)/Kh \\ \dfrac{1}{\exp(Kh)}=\dfrac{\dfrac{(\theta 2-\varphi 2)}{(\varphi 2-\varphi 1)}Kh+1}{\dfrac{(\theta 1-\varphi 1)}{(\varphi 2-\varphi 1)}Kh+1}\end{cases}$$

$$\mathbf{\exp(Kh)=\dfrac{1+Kh\dfrac{(\theta 1-\varphi 1)}{(\varphi 2-\varphi 1)}}{1+Kh\dfrac{(\theta 2-\varphi 2)}{(\varphi 2-\varphi 1)}}}$$

Posons l'inconnue Kh=x $\qquad \dfrac{\theta 1-\varphi 1}{\varphi 2-\varphi 1} = A \qquad \dfrac{\theta 2-\varphi 2}{\varphi 2-\varphi 1} = B$

L'équation devient : $\exp(x) = \dfrac{Ax+1}{Bx+1}$

Soit (C1) la courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow \exp(x)$
Soit (C2) la courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{Ax+1}{Bx+1}$

Les courbes se coupent au point (0,1) et éventuellement en un autre point dont nous cherchons l'abscisse.

-II) ETUDE GRAPHIQUE

-1) (C1)

Il s'agit de la courbe representative de la fonction $x \longrightarrow \exp(x)$, fonction réciproque de $x \longrightarrow \ln x$.

Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

-2) (C2) Cas général :

(C2) est la courbe representative de la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{Ax+1}{Bx+1}$

une fonction homographique. (C2) est donc une hyperbole. La dérivée de cette fonction est $f' : x \longrightarrow \dfrac{(A-B)}{(Bx+1)^2}$

Ses asymptotes ont pour équation $x = \dfrac{-1}{B}$ et $y = \dfrac{A}{B}$

et elle passe par le point (0,1).

-3) Les différents cas :

L'utilisation de la "loi de refroidissement d'un corps" sous entend que la température du corps est toujours supérieure à la température extérieure, ce qui sous nos latitudes est pratiquement toujours vrai.

Donc, $(\theta 1-\varphi 1)$ et $(\theta 2-\varphi 2)$ sont strictement positifs. On peut en déduire que $A\left(=\dfrac{\theta 1-\varphi 1}{\varphi 2-\varphi 1}\right)$ et $B\left(=\dfrac{\theta 2-\varphi 2}{\varphi 2-\varphi 1}\right)$ <u>sont du même signe</u> : celui de $\varphi 2-\varphi 1$)

<u>a) Si A et B sont positifs</u>

* $A < B$ - Dessin n°1

x	$-\infty$		$-1/B$	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		$-$	
$f(x)$	A/B	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	A/B

avec $1 > A/B > 0$

La fonction $x \longrightarrow \exp(x)$, quand a elle, tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$

<u>Il existe donc toujours un deuxième point d'intersection</u> entre (C1) et C2) dont l'abscisse est inférieure à $\dfrac{-1}{B}$

* $A > B$ - dessins (2-1) et (2-2).

Si l'on trace plusieurs graphes en changeant les valeurs de A et B, on remarque que dans certains cas, (C1) et (C2) se coupent une seule fois, alors que dans d'autres cas, elles se coupent deux fois.

En fait, le deuxième point d'intersection (celui qui nous intéresse) a toujours une abscisse négative, s'il existe. Et il n'existe que si la pente de la tangente à (C2) au point (0,1) est inférieure à la pente de la tangente à (C1) au même point.

Ce qui, mathématiquement, s'écrit :

$$f'(0) < \exp'(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-B}{(B\cdot 0+1)^2} < \exp(0)$$

$$\Leftrightarrow A-B < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta 1-\varphi 1-\theta 2+\varphi 2}{\varphi 2-\varphi 1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \theta 1-\theta 2+\varphi 2-\varphi 1 < \varphi 2-\varphi 1$$ (On sait que 2- 1 est positif puiqu'on a posé A et B positifs)

$$\Leftrightarrow \theta 1-\theta 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \theta 1 < \theta 2$$

Or on a vu que le corps se " refroidissait " donc $\theta 2$ doit être inferieur à $\theta 1$.

On peut donc affirmer qu'il n'y a pas de deuxieme point d'intersection entre (C1) et (C2) dans ce cas-ci .

* A=B

f devient $x \longrightarrow 1$ (C2) est la droite y=1

Il n'y aura donc toujours qu'un seul point d'intersection .

b)Si A et B sont negatifs

*A < B - Dessin n° 3

x	$-\infty$		0	$-1/B$		$+\infty$
		$-$		‖	$-$	
	A/B	$\searrow$	$-\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	A/B

avec A/B > 1

La fonction $x \longrightarrow \exp(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et elle ne possède pas d'assymptote verticale.

Il y a donc toujours deux points d'intersection entre (C2) et (C1). Le point qui nous intéresse a une abscisse supérieure a $\frac{-1}{B}$

* A>B - dessins (4-1) et (4-2).

De même que pour A>B>0, on observe deux types de graphes correspondant à un seul point d'intersection et deux points d'intersection.

Le deuxième point d'intersection n'existe que si la pente de la tangente à (C2) au point (0,1) est inférieure à la pente de la tangente à (C1) au même point.

Ce point existe $\Leftrightarrow f'(0) < \exp(0)$

$\Leftrightarrow A-B < 1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta 1-\varphi 1-\theta 2+\varphi 2}{\varphi 2-\varphi 1} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta 1-\theta 2}{(\varphi 2-\varphi 1)}+1 < 1$

$\Leftrightarrow \frac{\theta 1-\theta 2}{\varphi 2-\varphi 1} < 0$

On sait que $\theta 1-\theta 2 > 0$ (cf. le cas A>B>0) et on étudie le cas ou A et B négatifs, donc $\varphi 2-\varphi 1 < 0$

La condition $\frac{\theta 1-\theta 2}{\varphi 2-\varphi 1} < 0$ est donc toujours vérifiéee .

Dans ce cas, <u>il y a toujours un deuxième point d'intersection</u> entre (C1) et (C2). Son abscisse est comprise entre 0 et $-1/B$.

* $A = B$

Ce cas donne rigoureusement le même résultat que lorsque A et B sont positifs égaux : f devient $x \longrightarrow 1$ et il n'y a qu'un <u>seul point d'intersection</u> entre (C1) et (C2).

<u>c) Récapitulation.</u>

Il y a deux solutions à l'équation $$\exp(x) = \frac{Ax + 1}{Bx + 1}$$ **si $B > A > 0$ ou $B < A < 0$ ou $A < B < 0$.**

III) RESOLUTION NUMERIQUE

Méthode numérique pour resoudre l'équation donnant K :

$$\exp(Kh) = \frac{1 + Kh\,\frac{\theta 1 - \varphi 1}{\theta 2 - \varphi 1}}{1 + Kh\,\frac{\theta 2 - \varphi 2}{\varphi 2 - \varphi 1}} \qquad \text{(H)}$$

Posons $y1 = \frac{Ax+1}{Bx+1}$

$x \longrightarrow \qquad y1 \longrightarrow A/B$

$x \longrightarrow -1/B \quad y1 \longrightarrow \infty$

$$y'1 = \frac{A(Bx+1) - B(Ax+1)}{(Bx+1)}$$

* Si $A-B > 0$

x	$-$	$-1/B$	$+$
$y'1$	$+$	||	$+$
$y1$	$A/B \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow A/B$

Il y a deux points particuliers $x=0$ et $y1=1$

$+B < 0$ c'est à dire $-1/B > 0$

Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1/B\}$
$$x \longmapsto \frac{Ax+1}{Bx+1}$$

Soit x0 positif au voisinage de 0. Considérons x0 comme point de départ de la suite dont on va étudier la convergence vers l'intersection des deux courbes : (C1) et (C2).

$x1 = G^{-1}(\exp(x0))$ On va définir G^{-1}.

$Bxy1 + y1 = Ax + 1$
$Bxy1 - Ax = 1 - y1$
$x(By1 - A) = 1 - y1$
Donc on obtient : $x = \dfrac{1-y1}{By1-A}$ si $y1 \neq \dfrac{A}{B}$

Alors on a : $G : \mathbb{R} - \{A/B\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$y \longmapsto \frac{1-y}{By-A}$$

Donc $x1 = \dfrac{1-\exp(0)}{B\exp(o)-A}$

et $x2 = \dfrac{1-\exp(1)}{B\exp(1)-A}$

$$xn = \frac{1-\exp(x(n-1))}{B\exp(x(n-1))-A}$$

$$\mathbf{x(n+1) = \frac{1-\exp(x(n))}{B\exp(x(n))-A}}$$ le terme général de la suite x(n)

Démontrons que x(n) est croissante.

$$x(n+1)-x(n) = \frac{1-\exp(x(n))}{B\exp(x(n))-A} - \frac{1-\exp(x(n-1))}{B\exp(x(n-1))-A}$$

$$= \frac{(\exp(x(n))-\exp(x(n-1))).(A-B)}{B(\exp(x(n))-A/B).B.(\exp(x(n-1))-A/B)}$$

Comme la branche de l'hyperbole est au dessus de la droite $y=A/B$ et puisque dans notre partie de l'exponentielle on a $\exp(x) > \dfrac{Ax+1}{Bx+1}$

Donc dans notre region $\exp(x) > A/B$ quelque soit x appartenant a notre région. Ce qui entraine $\exp(x)-A/B > 0$ car c'est le produit de trois termes positifs.

$$x(n+1)-x(n)=\frac{(\exp(x(n))-\exp(x(n+1)).(A-B)}{nbr > 0}$$

Or $A-b > 0$, donc la difference des x prend le signe de la difference des exponentielles .

$x(n+1)-x(n) > 0 \Leftrightarrow \exp(x(n))-\exp(x(n-1)) > 0$
$\Leftrightarrow x(n)-x(n-1) > 0$
$x(n)-x(n-1) > 0 \Leftrightarrow x(n-1)-x(n-2) > 0$

Et par transitivité de recurrence, on démontre que $x(n+1)-x(n)$ a le même signe que $x1-x0$ qui est positif . Donc <u>x(n) est une suite croissante.</u>

Démontrons que $x(n)$ est majorée par $-1/B$.

$$x(n=1)=\frac{1-\exp(x(n))}{B\exp(x(n))-A}$$

$$x(n+1)+\frac{1}{B}=\frac{1-\exp(x(n))}{B\exp(x(n))-A}+\frac{1}{B}$$

$$=\frac{B-A}{B(B\exp(x(n))-A)} \qquad \text{or } B-A < 0 \;;\; B < 0$$

il ne nous manque que le signe de $B\exp(x(n))-A$, or dans notre région $\exp(x(n)) > 1$. Donc $B\exp(x(n)) < B < A$. Le signe de l'expression qui nous manquait est donc négatif .

$$x(n+1)+\frac{1}{B}=\frac{nbr < 0}{(nbr < 0)(nbr < 0)}=nbr' < 0$$

Tous ces nbr sont differents

$$x(n+1)+\frac{1}{B} < 0$$

Donc $\mathbf{x(n=1) < -\frac{1}{B}}$

On a démontré que pour tout n naturel $x(n) < -1/B$, c'est à dire :

<u>La suite x(n) est majorée par -1/B</u>

On a montré que $x(n)$ est une suite croissante et majorée donc qu'elle est convergente.

Notons z sa limite ,donc z est l'intersection des courbes (C1) et (C2).

z vérifie donc : $z=\dfrac{\exp(z)-1}{A-B\exp(z)}$

* $A-B < 0$ avec A et B positifs

Notons C l'intersection de l'hyperbole avec l'axe des abscisses

$$0=\frac{Ax(c)+1}{Bx(c)+1}$$

$\Leftrightarrow$ $0=Ax(c)+1$ donc $x(c)=-1/A$

On obtient la même suite que celle obtenue dans le premier cas :

$$x(n+1)=\frac{1-\exp(x(n))}{B\exp(x(n))-A}$$

Soit I l'intersection des deux courbes.Pour que x(n) converge dans notre cas, il faut que x0 - l'élément de départ - de la suite soit superieur a l'abscisse de I ; c'est-à-dire $x0 > x(I)$.

Dans notre cas (C1) est au dessus de la droite $y=A/B$ donc quelque soit x de notre région $B\frac{\exp(x)-A}{B} < 0$ et quelque soit n naturel $\exp(n)-\frac{A}{B} < 0$ d'où $B(\exp(x(n))-A/B)(\exp(x(n-1))-A/B) > 0$

$A-B < 0$ donc $x(n+1)-x(n)$ a le signe contraire de $\exp(x(n))-\exp(x(n-1))$ et aussi de $x(n)-x(n-1)$. De même pour les autre termes.

De plus on a $x0-x2 < 0$ et $x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x(2n)-x(2n-2)$. Cette dernière affirmation ce démontre ainsi :

$$x(2n+2)-x(2n)=\frac{(A-B)(\exp(x(2n+1))-\exp(x(2n-1))}{B(\exp(x(2n+1))-A/B)(\exp(x(2n-1))-A/B)}$$

$x(2n+2)-x(2n)$ est du signe contraire de $x(2n+1)-x(2n-1)$
$x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x(2n)-x(2n-2)$

Et par transitivité de récurrence on démontre que $x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x2-x0$ qui est négatif. Donc la sous suite $x(2n)$ de $x(n)$ est décroissante et on démontre de façon analogue que la sous suite $x(2n+1)$ de $x(n)$ est croissante.

Démontrons que la sous suite $x(2n+1)$ est majorée par $-1/B$

$$x(2n+1)+\frac{1}{B}=\frac{1-\exp(x(2n))}{B\exp(x(2n))-A}+\frac{1}{B}=\frac{B-B\exp(x(2n))-A}{B(B\exp(x(2n))-A)}$$

$$=\frac{B-A}{B(B\exp(x(2n))-A}$$

or $B-A > 0$ par hypothèse et $B(B\exp(x(2n))-A=B^2(\exp(x(2n))-A/B) < 0$

Car la courbe de l'exponentielle est au dessous de la droite $y=A/B$ dans notre région.

Donc $\dfrac{B-A}{B(B\exp(x(2n))-A)} < 0$

Donc $x(2n+1)+1/B < 0$

$x(2n+1) < -1/B$

On a démontré que quelque soit n naturel $x(2n+1) < -1/B$ donc la sous suite $x(2n+1)$ est majorée par $-1/B$.

On a démontré que $\left.\begin{array}{l} x(2n+1) \text{ est croissante} \\ x(2n+1) \text{ est majorée} \end{array}\right\}$ donc $x(2n+1)$ converge.

Montrons que la sous suite $x(2n)$ de $x(n)$ est minorée par $x1$.

En fait $x1 < 0$

$$x(2n)-x1 = \frac{1-\exp(x(2n-1))}{B\exp(x(2n+1))-A} - \frac{1-\exp(x0)}{B\exp(x0-A)}$$

$$= \frac{B\exp(x0)-A\exp(x0)+A\exp(x(2n+1))-B\exp(x(2n-1))}{nbr > 0}$$

$$= \frac{(A-B)(\exp(x(2n-1))-\exp(x0))}{nbr > 0}$$

Or $A-B < 0$

On a dejà démontré que $x(2n+1)$ est croissante et majorée donc elle converge et sa limite est l'intersection des deux courbes ((C1) et (C2))

Soit xi sa limite, donc quelque soit n naturel $x(2n+1) < xi$. Or au début on a choisi $x0$ supérieur à xi. Donc $x(2n+1) < x0$ pour tout n naturel donc $x(2n-1) < x0$. Enfin on obtient $\exp(x(2n-1))-\exp(x0) < 0$

$$x(2n)-x1 = \frac{(nbr < 0)(nbr < 0)}{nbr > 0}$$

Donc $x(2n)-x1 > 0$; soit encore pour tout n naturel $x(2n) > x1$.

On a démontré que $x(2n)$ est décroissante et minorée donc elle est convergente.

D'où les deux sous suites $x(2n+1)$ et $x(2n)$ convergent vers une même limite qui est l'intersection des deux courbes (C1) et (C2).

Notons z1 cette limite ; $\exp(z1)=\dfrac{Az1+1}{Bz1+1}$

$\Leftrightarrow z1=Kh$

Donc $K=\dfrac{z1}{h}$

* A et B < 0 et A < B

Prenons $x0 > -1/B$ au voisinage de $-1/B$ et avant xi1 . (xi1 étant l'intersection entre (C1) et (C2))

Dans notre cas (C1) est au dessus de la droite $y=A/B$. Donc pour tout x élément de notre région $\exp(x)-A/B > 0$, d'où :

$$B^2(\exp(x(n))-\frac{A}{B})(\exp(x(n-1))-\frac{A}{B}) > 0$$

Suite aux hypothèses on a:

$x(n+1)-x(n)$ a le signe contraire de $\exp(x(n))-\exp(x(n-1))$ et de $x(n)-x(n-1)$

On démontre que $x(n)-x(n-1)$ a le signe contraire de $x(n-1)-x(n-2)$ donc que $x(n+1)-x(n)$ a le même signe que $x(n-1)-x(n-2)$

En calculant x0 et x2, pour des A et B fixés , on trouve que $x2-x0 > 0$ et que $x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x(2n)-x(2n-2)$.

Ceci car :

$$x(2n+2)-x(2n)=\frac{(A-B)(\exp(x(2n+1))-\exp(x(2n-1))}{B^2(\exp(x(2n+1))-A/B)(\exp(x(2n-1))-A/B)}$$

$x(2n+2)-x(2n)$ a le signe contraire de $x(2n+1)-x(2n-1)$

$x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x(2n)-x(2n-2)$

Et par transitivité de recurrence on démontre que $x(2n+2)-x(2n)$ a le même signe que $x2-x0$ qui est positive.

Donc la sous suite $x(2n)$ est croissante et on démontre de la même façon que la sous suite $x(2n+1)$ est décroissante .

Démontrons que la sous suite $x(2n+1)$ est minorée par $-1/B$

$$x(2n+1)+1 = \frac{1-\exp(x(2n))}{B\exp(x(2n))-A} + \frac{1}{B}$$

$$= \frac{B-A}{B\,(\exp(x(2n))-A/B)}$$

Or $B^2(\exp(x(2n)-A/B) > 0$ et $A-B > 0$ donc $x(2n+1)+\frac{1}{B} > 0$

$$x(2n+1) > \frac{-1}{B} \qquad \text{Pour tout n naturel}$$

Donc la sous suite $x(2n+1)$ est minorée par $-1/B$.

On a démontré que $x(2n+1)$ est décroissante et minorée . Elle est donc convergente. Sa limite est l'intersection de (C1) et de (C2) . C'est à dire que sa limite est xi1 .

Montrons que $x(2n)$ est majorée par $x1$

$$x(2n)-x1=\frac{1-\exp(x(2n-1))}{B\exp(x(2n-1))-A}-\frac{1-\exp(x0)}{B\exp(x0)-A}$$

$$=\frac{(A-B)(\exp(x(2n-1))-\exp(x0))}{nbr>0}$$

On a dejà démontré que $x(2n+1)$ converge et que sa limite ést xi1 donc pour tout n naturel on a : $x(2n+1) > xi1$. Et grace aux hypothèses on peut écrire quelque soit n naturel : $x(2n+1) > 0$

$$\Leftrightarrow x(2n-1) > 0$$
$$\Leftrightarrow \exp(x(2n-1)) > \exp(x0)$$
$$\Leftrightarrow \exp(x(2n-1)) - \exp(x0) > 0$$

Or $A-B < 0$

Donc en identifiant pour connaître le signe on obtient :

$$x(2n)-x1=\frac{(nbr<0)(nbr>0)}{(nbr>0)}$$

$\Leftrightarrow$ $x(2n)-x1 < 0$

$\Leftrightarrow$ $x(2n) < x1$ Pour tout n naturel

Donc la sous suite $x(2n)$ est majorée par $x1$. On a ainsi démontré que $x(2n)$ est croissante et majorée , c'est a dire qu'elle est convergente

Les deux sous suites convergent vers une même limite qui est l'intersection de (C1) et de (C2).

Notons xi1 la limite de x(n).

$$xi1 = \frac{Axi1+1}{Bxi1+1}$$

$xi1 = Kh$ donc $K = \frac{xi1}{h}$

Connaissant k, on peut en déduire C :

$$C = \theta 1 - \varphi 1 + \frac{\varphi 2 - \varphi 1}{Kh}$$

-IV) DETERMINATION DE tm

Il s'agit de résoudre l'équation : $(t) = C.\exp(-Kt) + at + b - a/K$ pour $(t) = 37°C$ afin de trouver une valeur tm, heure de la mort. tm doit être négatif puisqu'on a posé t1 l'origine des dates (heure de la première prise de température du cadavre et du milieu).

$$37 = C.\exp(-Ktm) + atm + b - a/K$$

$$\Leftrightarrow C.\exp(-Ktm) = 37 - atm - b + a/K$$

$$\Leftrightarrow \exp(-Ktm) = \frac{-a.tm}{C} + \frac{a}{CK} - \frac{b}{C} + \frac{37}{C}$$

Soient $\lambda = -a/C$ et $\mu = \frac{a}{CK} - \frac{b}{C} + \frac{37}{C}$

L'équation devient $\exp(-Ktm) = \lambda tm + \mu$.

Soient (C) la courbe représentative de la fonction $t \longrightarrow \exp(-Kt)$

(D) la droite représentative de la fonction $t \longrightarrow \lambda t + \mu$

tm est l'abscisse correspondant au point d'intersection entre (C) et (D) d'abscisse négative.

Pour l'étude des différents cas, on se limitera à ceux qui présentent une solution plausible. En effet l'heure de mort d'un cadavre est un phénomène physique que l'on peut constater . K , d et μ seront donc obligatoirement tels que (C) et (D) se coupent en un point d'abscisse négative.

-1) Si K est négatif

-a) $d > 0$ - dessin n° 5

Une démonstration du type de celles du **III** permettrait de prouver que la suite représentée sur le graphe est définie comme suit et tend vers tm :

$$U_{(n)} \begin{cases} U_o < 0 \text{ très proche de } 0 \\ U(n+1) = \dfrac{(\exp(-KU(n)) - \mu)}{d} \end{cases}$$

-b) $d < 0$ - dessins 6.1 et 6.2

Deux suites différentes - selon la pente d de (D) - tendent vers tm :

$$U_{(n)} \begin{cases} U_o < 0 \text{ très proche de } 0 \\ U(n+1) = \dfrac{\exp(-KU(n)) - \mu}{d} \end{cases} \qquad \text{dessin 6.1}$$

$$V_{(n)} \begin{cases} V_o < 0 \text{ très proche de } 0 \\ V(n+1) = -\dfrac{d\ln(V(n))}{K} + \mu \end{cases} \qquad \text{dessin 6.2}$$

-2) Si K est positif

-a) $\lambda > 0$ -dessins 7.1 et 7.2

Tout comme dans le cas précedent, il y a deux suites differentes selon qui tendent vers tm.

$$U(n)\begin{cases} Uo < 0 \text{ très proche de } 0 \\ U(n+1) = \dfrac{\exp(-KU(n)) - \mu}{\lambda} \end{cases}$$

dessin 7.1

$$V(n)\begin{cases} Vo < 0 \text{ très proche de } 0 \\ V(n+1) = \dfrac{-\lambda \ln(V(n)) + \mu}{K} \end{cases}$$

dessin 7.2

-b) $\lambda < 0$ -dessins 8.1 et 8.2

* $\mu < 1$

On montrerait de la même manière que dans le III que la suite U(n) tend vers tm . (Cette suite a été définie précedemment) - dessin 8.1

* $\mu > 1$

La suite V(n) définie aux 1)b) et 2)a) converge vers tm. - dessin 8.2

-V) ANNEXE INFORMATIQUE

Voici un petit programme en BASIC qui permet de déterminer l'heure de mort d'un cadavre en déterminant successivement K et tm.
Il suffit d'entrer les valeurs de $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\theta 1$, $\theta 2$et h

PROGRAMME	COMMENTAIRES	VARIABLES
10 INPUT W,X,Y,Z	On entre les valeurs de θ 1, φ1, θ 2,φ 2	W=θ 1;X=φ 1 Y=θ 2;Z=φ 2
20 A=(W-X)/(Z-X) 30 B=(Y-Z)/(Z-X)	On définit A et B comme en fin du I)	$A=(\theta_1-\varphi_1)/(\varphi_2-\varphi_1)$ $B=(\theta_2-\varphi_2)/(\varphi_2-\varphi_1)$
40 IF A>0 AND B>0 THEN K=-1/B-0.001 50 IF A<0 AND B<0 THEN K=0.001 60 IF A<0 AND B<0 AND A<B THEN K=-1/B+0.001	Détermination d'un 1er terme adéquat pour chaque cas	K:premier terme de la suite
70 FOR I=0 TO 30 80 K=(1-exp(K))/(B.exp(K)-A) 90 NEXT I	Boucle calculant les 30 1er termes de la suite $U(n+1)=\dfrac{1-\exp(U(n))}{B\exp(U(n))-A}$	I:variable de 1 à 30 K :valeurs de U(n)
100 INPUT H 110 K=K/H 120 PRINT "K= ";K	On entre h.La limite donne Kh,donc on divise par K qui est affiché	H = h.
130 C=W-X+(Z-X)/(K.H) 140 L=(X-Z)/(C.H) 150 M=(Z-C)/(C.K.H)-X/C+37/C		
160 IF K<0 AND >0 OR K>0 AND <0 THEN GOTO 220	Sélection du type de suite à calculer	
165 V=-0.01 :U=-0.01	On définit Uo et Vo	
170 FOR J=1 TO 30 180 V=-L.LN(V)/K+M	Boucle calculant Vn	J de 1 à 30
190 IF (.V+M)<0 THEN 220 200 NEXT J 210 PRINT "Tm: ";V:END	On sort de la boucle si la suite diverge	
220 FOR N=1 TO 30 230 U=exp(-K.U)/K+M 240 NEXT U 250 PRINT"Tm: ";U:END	Boucle calculant Un	N de 1 à 30

On obtient tm en heures si h a été entré en heures .

$$C = \theta_1 - \varphi_2 + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{Kh}$$

$$L = d = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{Ch}$$

$$M = \mu = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{CKh} - \frac{\varphi_1}{C} + \frac{37}{C}$$

-

VI)AUTRES MOYENS DE DETERMINATION DE L'HEURE DE MORT

La méthode utilisée par les médecins pour déterminer l'heure de mort d'un cadavre est moins précise que celle décrite précedemment.Mais elle est plus pratique et ne nécessite aucun matériel.

La méthode consiste à observer la rigidité du corps ainsi que l'éventuelle apparition de traces.

Voici les differents symptômes relevés dans l'ordre chronologique.

*Moins de 1 ou 2 h

Le corps est chaud, souple .Les cornées sont humides et transparentes

*3 à 4 h

La peau est devenue froide.Une rigidité temporo-maxillaire est apparue ainsi que des lividitées débutantes au niveau du cou.On appelle lividitées des plaques rouges violacées ou brunâtre des régions cutanées ou le sang non coagulé ainsi que le sébum s'accumulent.

*Au moins 6 h

Apparition d'une tache noire scléroticale qui se forme ,comme son nom l'indique, sur l'oeil

*Au moins 8 à 10 h

Les lividitées en nappes apparues ne disparaissent pas à la pression du doigt.

*15 à 20 h Refroidissement cadavérique

Il y a une tendance à l'équilibre de la température du corps avec celle de l'extérieur.

Le refroidissement peut commencer pendant l'agonie, la mort ne survenant que pour une temperature interne inférieure à 20°C. Mais pour certaines maladies la température peut stagner ,voir même augmenter ,quelques heures après la mort.

La température interne chute en moyenne d'1°C par heure pour un sujet peu couvert dans un climat tempéré.

*24 h maximum

Le corps est encore chaud et souple.

*36 h maximum

Le corps a gardé sa souplesse mais sa température et la même que la température ambiante.

*de 2 h à 3 jours Rigidité cadavérique

Elle commence par la machoire inférieure puis descend en 6 à 12 heures jusqu'aux pieds puis disparait dans le même ordre.

La rigidité du corps peut intervenir immédiatemnt après le décès pour des maladies comme le tétanos,ou en cas de températures extrêmes : -10°C ou +45°C

*2 à 4 jours

Sur les parties déclives du corps apparaissent des taches rouges violettes

*2 à 3 jours Putréfaction cadavérique

Elle débute au niveau du cæcum (partie initiale du gros intestin sous l'arrivée de l'intestin grêle et portant l'appendice vermicullaire).

.Ensuite elle s'étend plus ou moins rapidemment à tout l'abdomen.

*3 à 4 jours

Apparition sur le ventre du cadavre d'une tache verte due a la putréfaction des organes.

*Plus de 4 jours

Les taches rouges violettes s'accentuent et la tache verte s'étend. Des larves de mouches à viande - cælliphora - apparaissent sur le corps .

La rigidité intéresse tous les muscles du corps.Elle se manifeste par une contraction de ces derniers.Ainsi les muscles horripilateurs dressent les poils - chair de poule - ,la contraction des muscles rectal et uterins donne lieu au rejet de leur contenu.

L'attitude du cadavre est presque la même pour tous les humains:

demi flexion des membres superieurs
extension des membres inférieurs
hyperextension de la tête sur le tronc.

Cette rigidité est due à la coagulation de la syosine et à la déshydratation

METHODES UTILISANT LES TEMPERATURES

Une autre méthode faisant appel aux températures consiste a comparer celles du cadavre à des valeurs theoriques.Voici le tableau de valeurs obtenu.

Temps écoulé depuis la mort	Température du corps (1)	(2)
2 h	35 °C	36,2°C
4	33	34,5
6	31	33,8
8	28	32,8

(1) cadavre nu et maigre
(2) cadavre habillé et gras

Ces mesures ont été effectuées à une température externe de 20°C

Utilisation d'un réfrigerateur

L'interet du réfrigérateur est de conserver une température extérieure constante.

$$\exp(-Kh)=\frac{(\theta 2-\varphi 2)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}{(\theta 1-\varphi 1)Kh+(\varphi 2-\varphi 1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exp(-Kh)=\frac{(\theta 2-\varphi)}{(\theta 1-\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -Kh=\ln((\theta 2-\varphi)/(\theta 1-\varphi))$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{K=(-1/h).\ln((\theta 2-\varphi)/(\theta 1-\varphi))}$$

K est ainsi obtenu directement.Quant à tm, la méthode est toujours la même.

CONCLUSION

Toutes ces méthodes s'avèrent être trop peu fiable aux yeux des chercheurs en thamatologie qui préfèrent de loin les analyses des substances contenues dans le cadavre.Les cellules peuvent en dire plus long sur l'heure de mort que ne peut le faire une methode numérique.

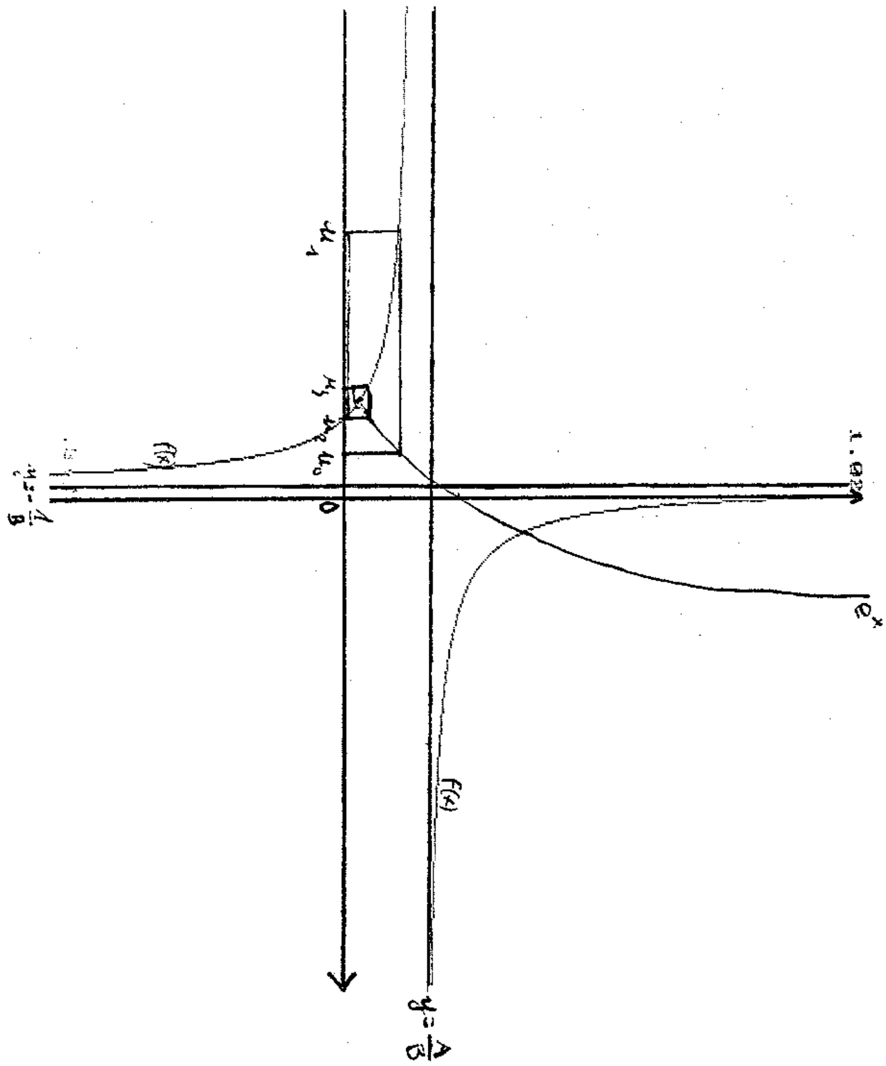
Les sources de ce mèmoire proviennent des livres suivants :

LARROUSSE MEDICAL
ELEMENTS DE MEDECINE LEGALE E.FOURNIER

DÉTERMINATION
DE K

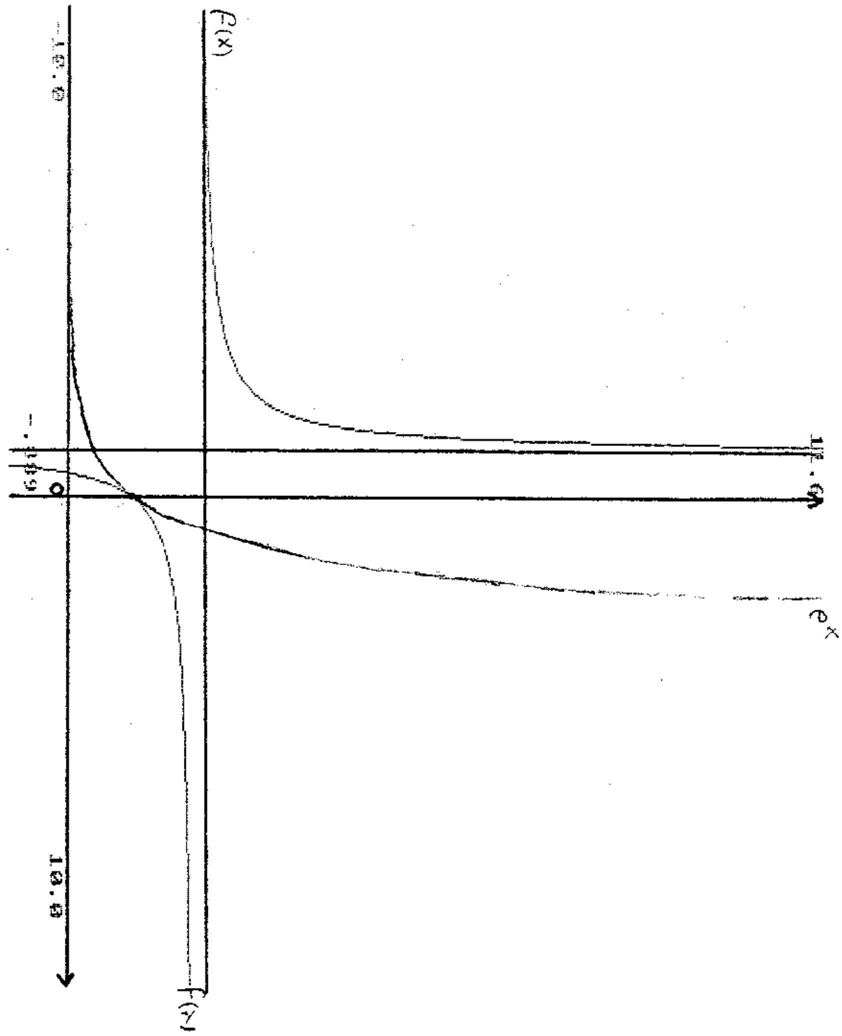
déssin 1

$B > A > 0$



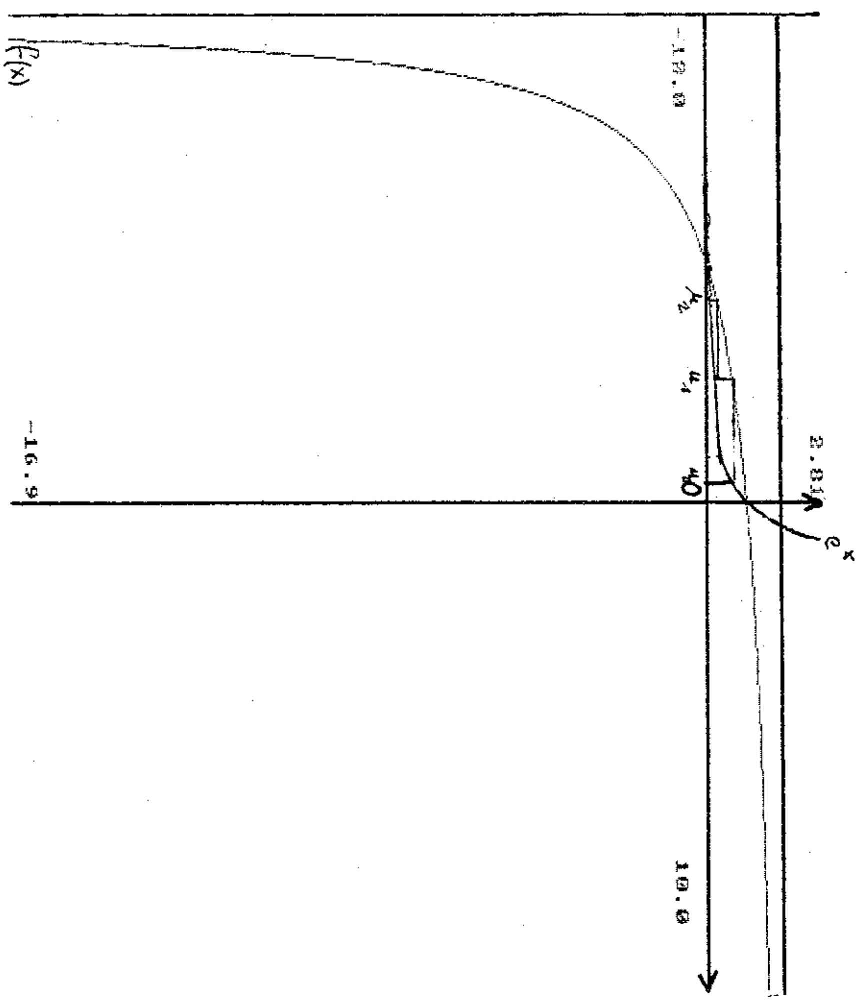
dessin 2.1

$A > B > 0$



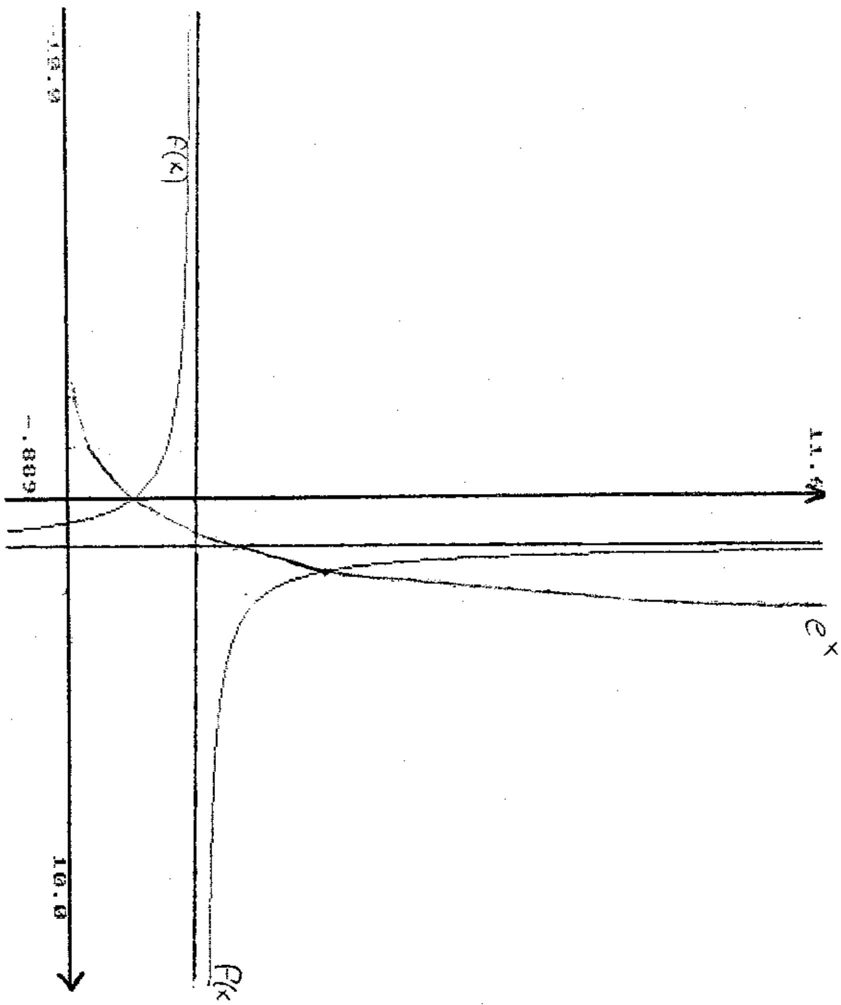
Dessin 2.2

A>B>O



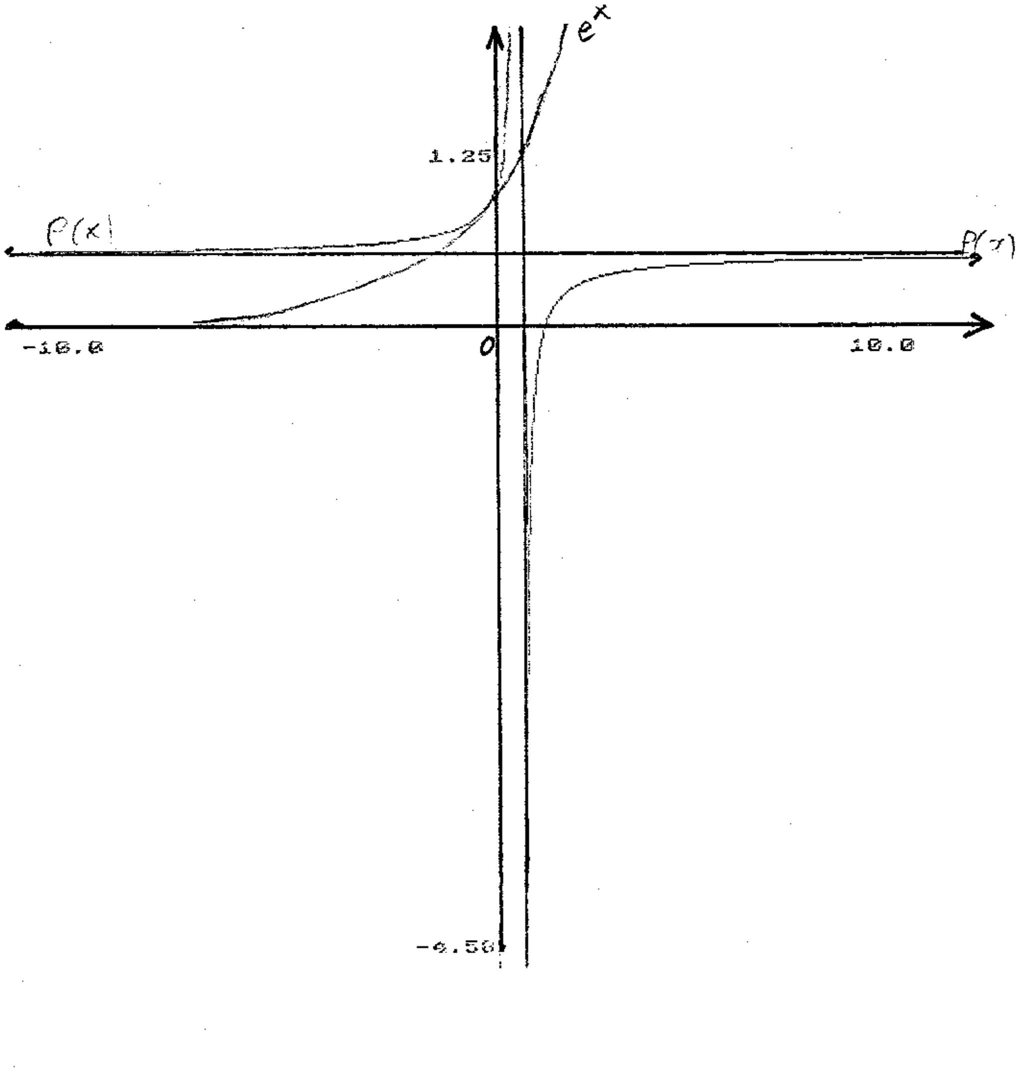
dessin 3

$A < B < 0$



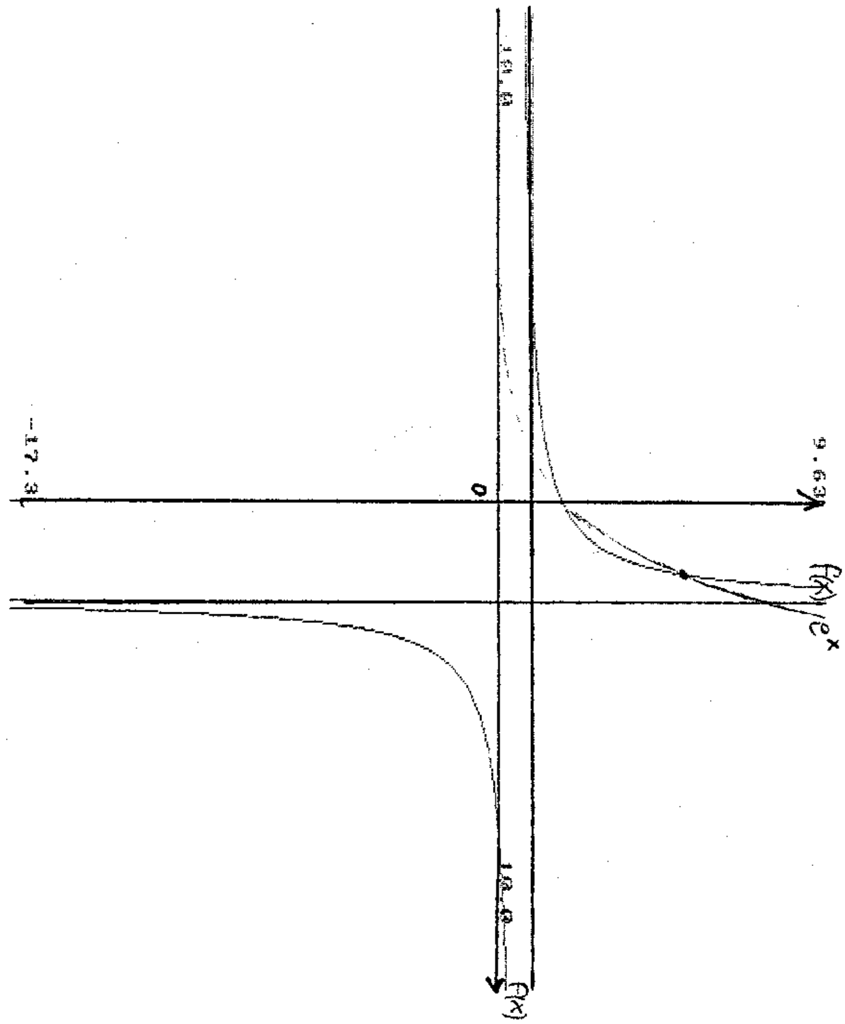
dessin 4.1

B<A<0



dessin 4.2

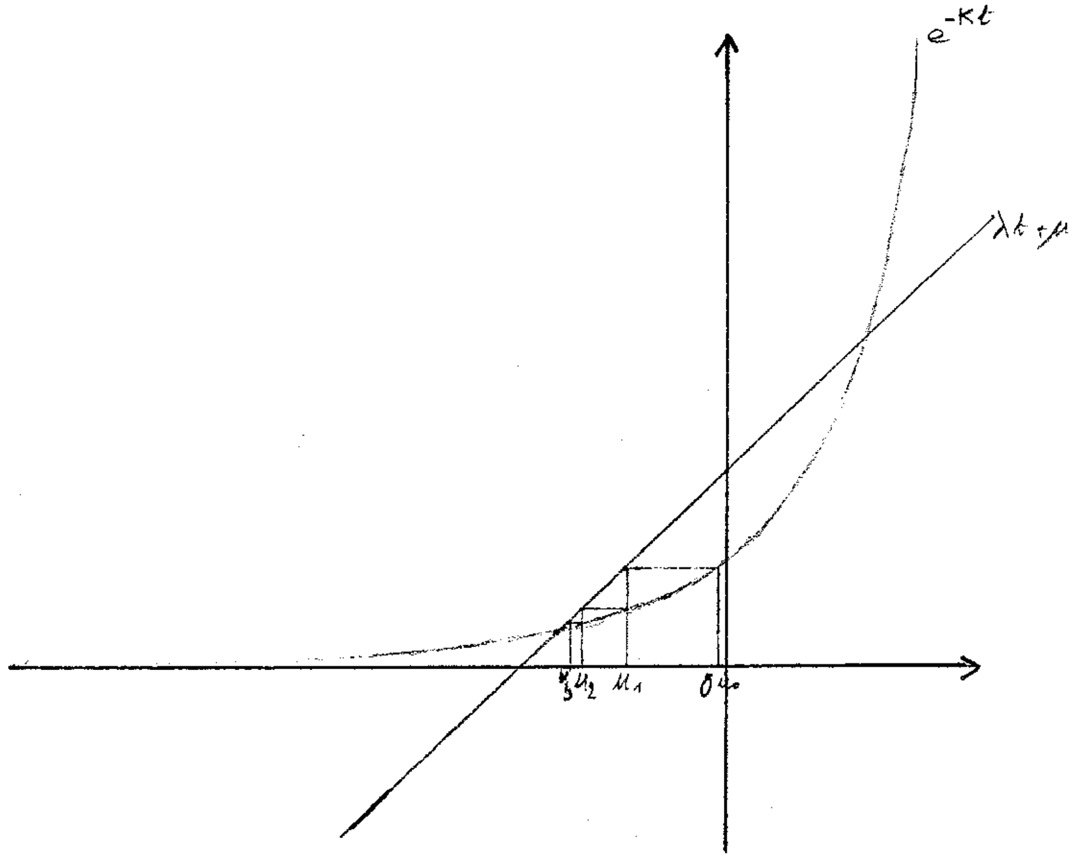
$B < A < 0$



ETERMINATION DE t_1

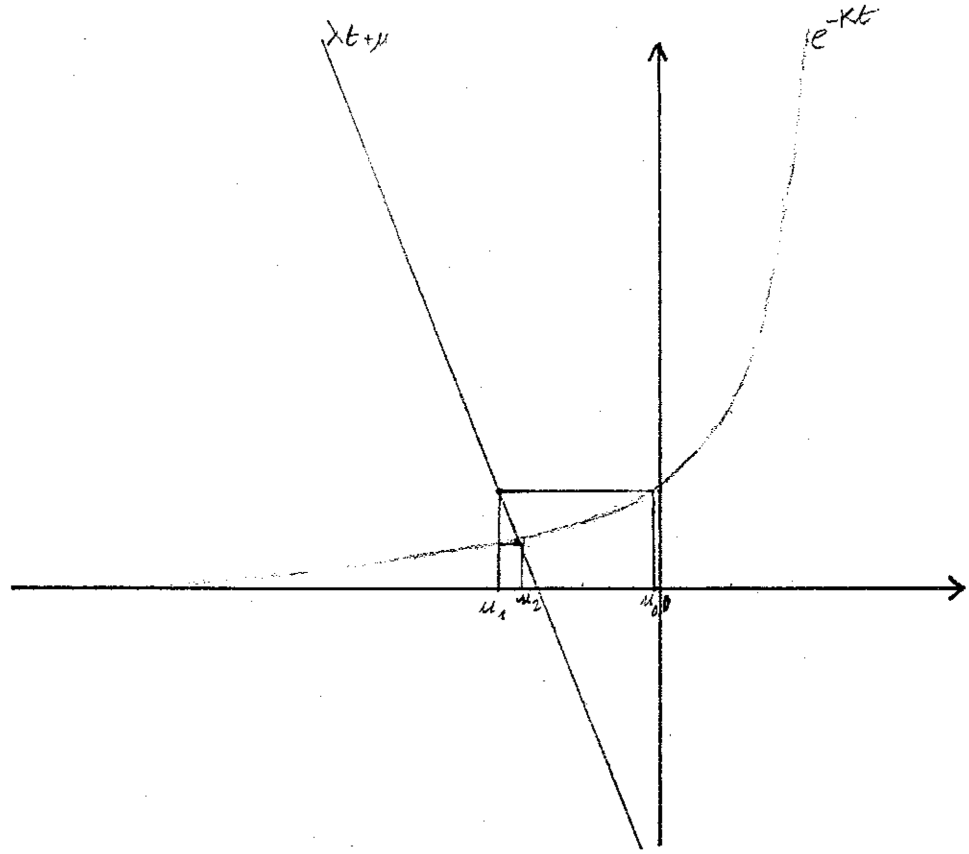
dessin 5

$K<0 \quad \lambda>0$



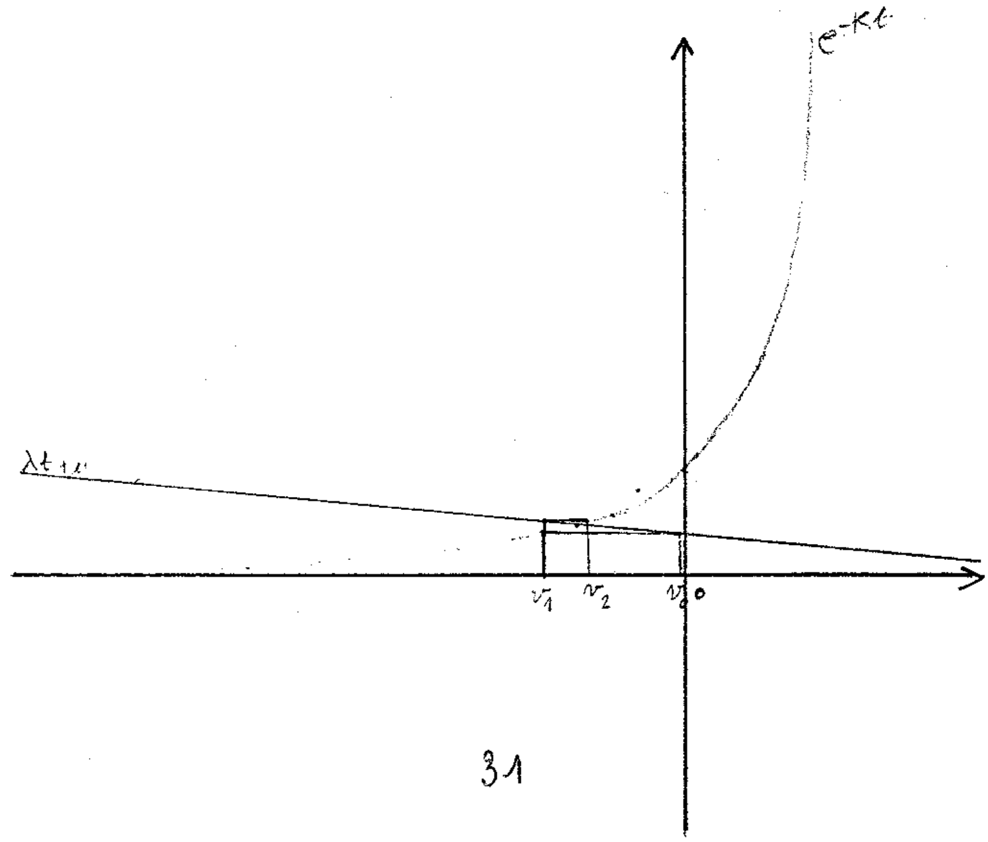
dessin 6.1

$K<0 \quad \lambda>0$



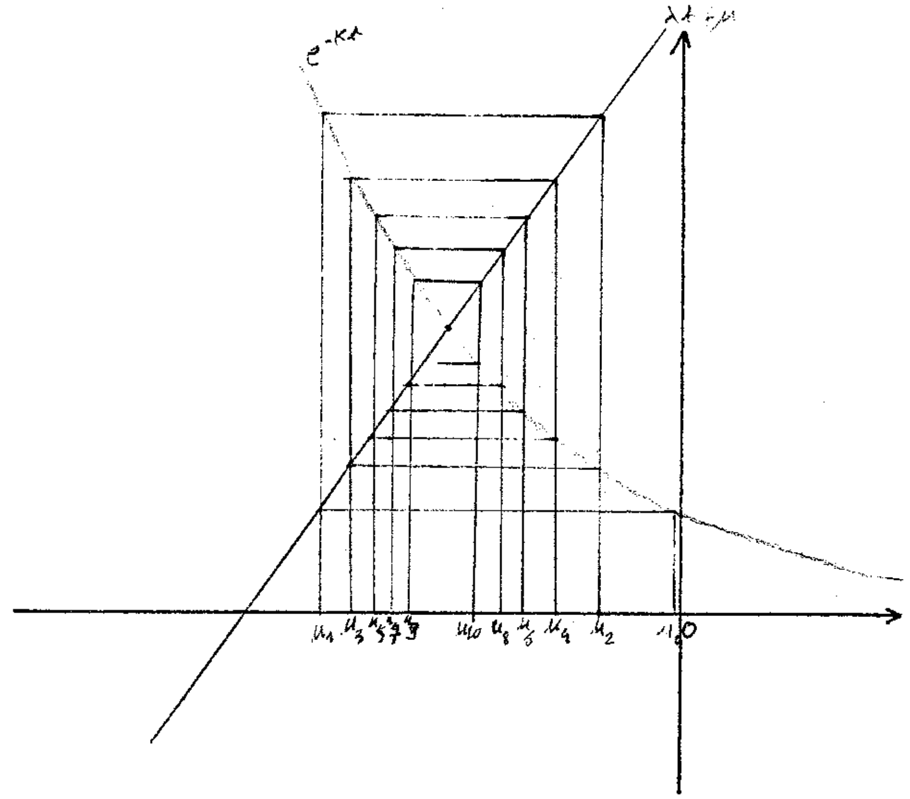
dessin 6.2

$K<0 \quad \lambda<0$



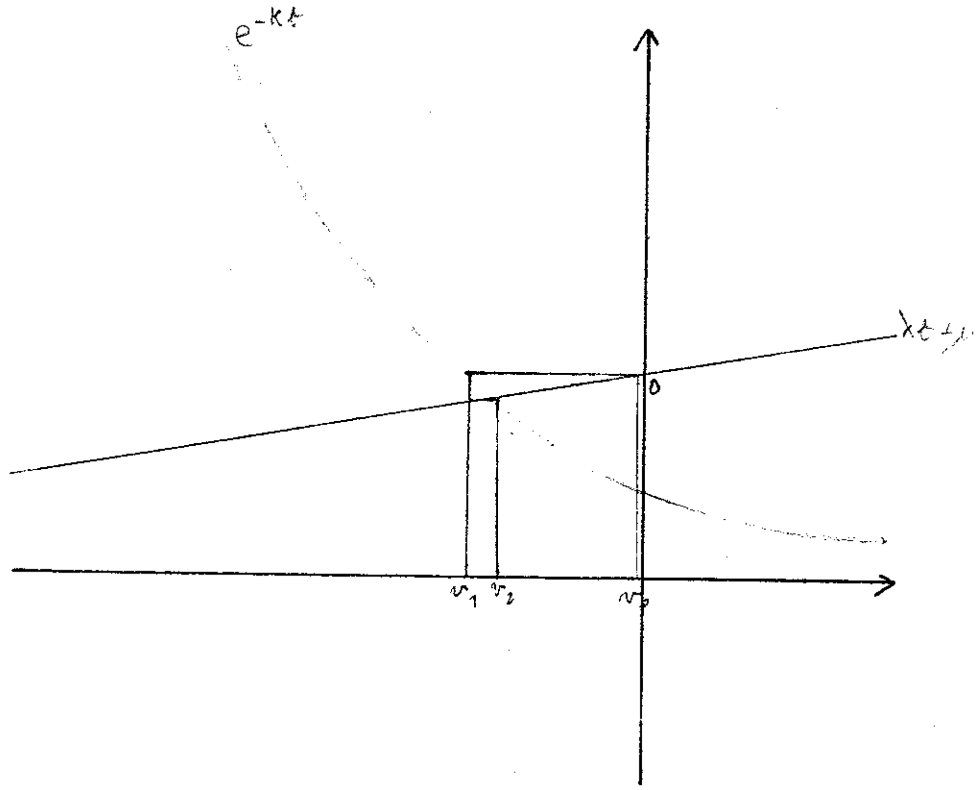
dessin 7.1

$K>0 \quad \lambda>0$



dessin 7.2

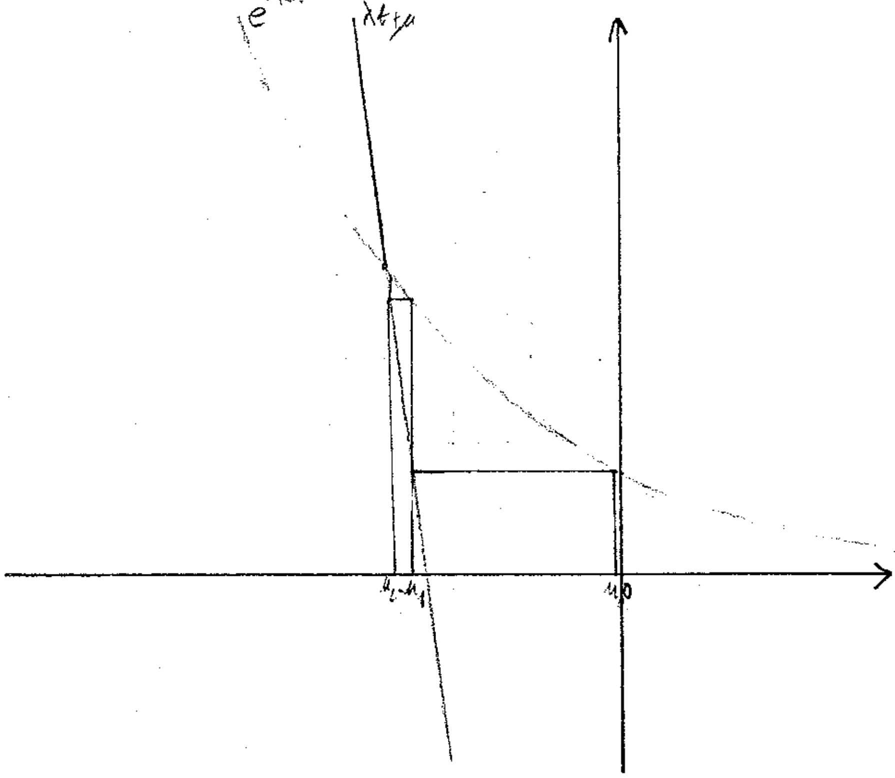
$K>0 \quad \lambda>0$



..., ...

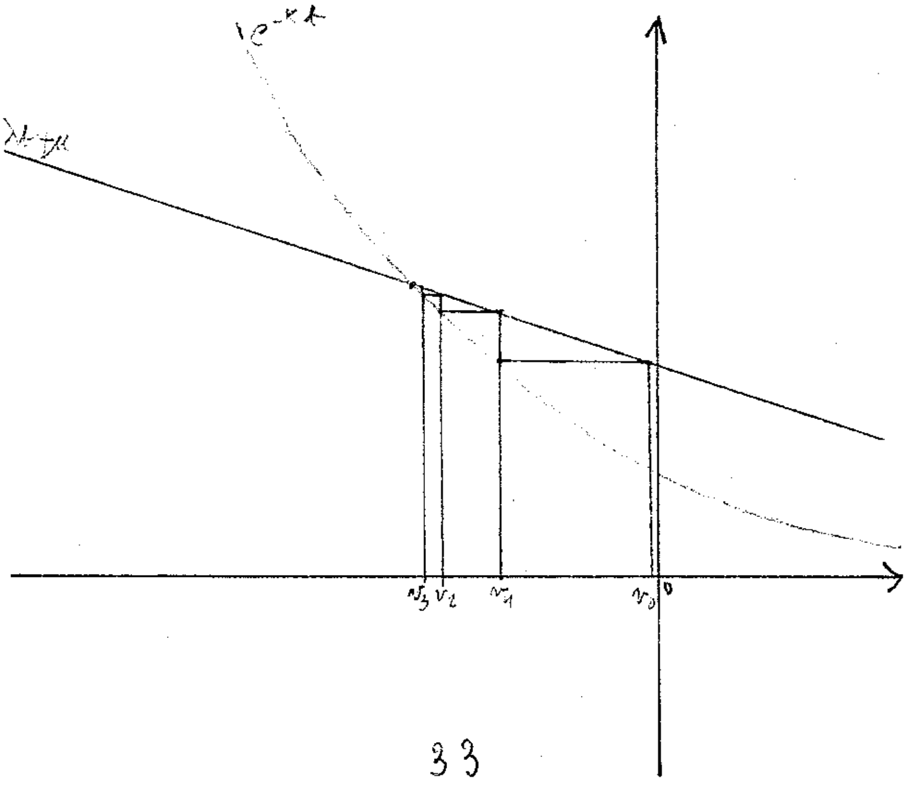
dessin 8.1

$\kappa > 0 \quad \lambda < 0 \quad \mu < 1$



dessin 8.2

$\kappa > 0 \quad \lambda < 0 \quad \mu > 1$



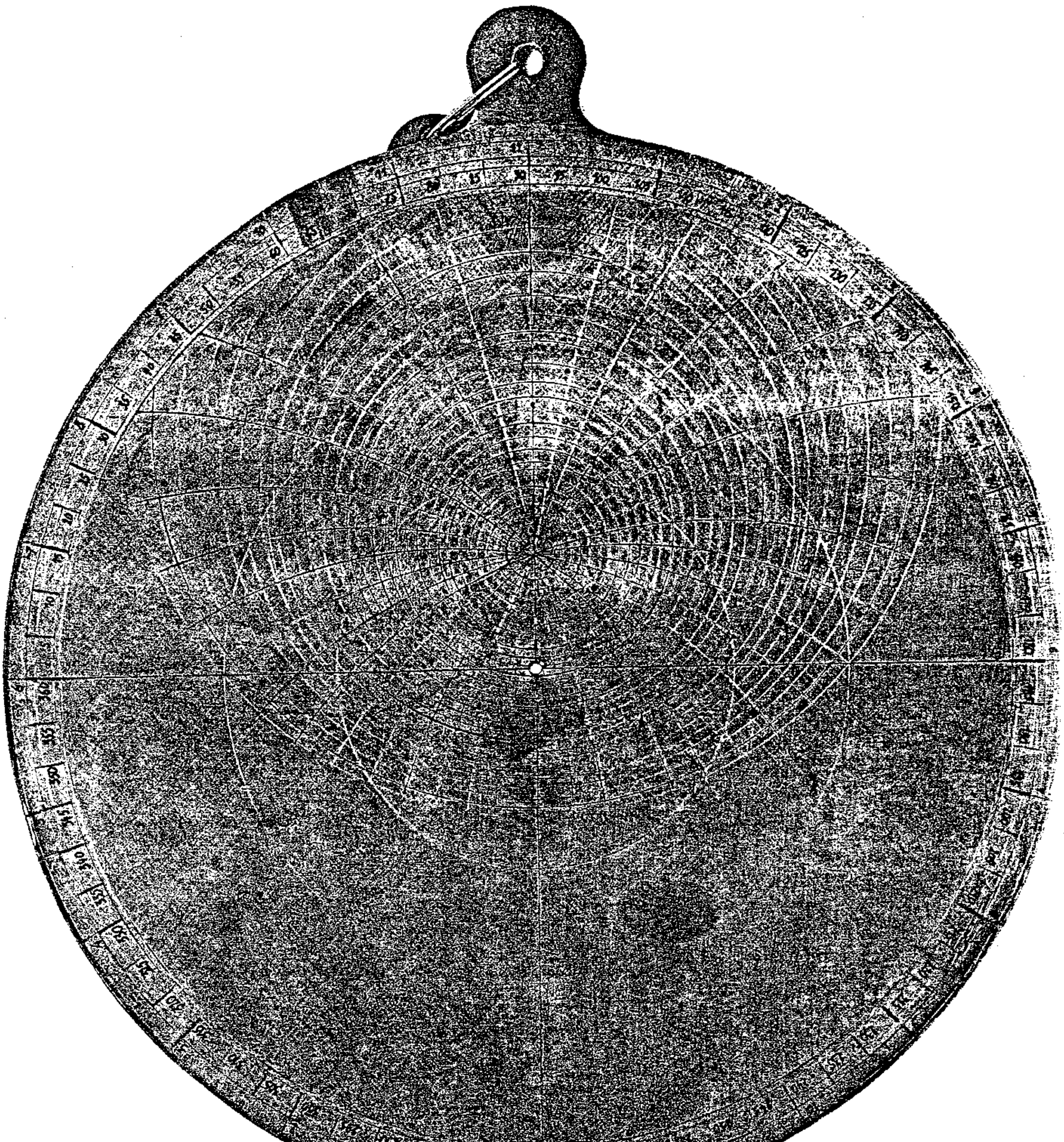
Document 4

ASTROLABE

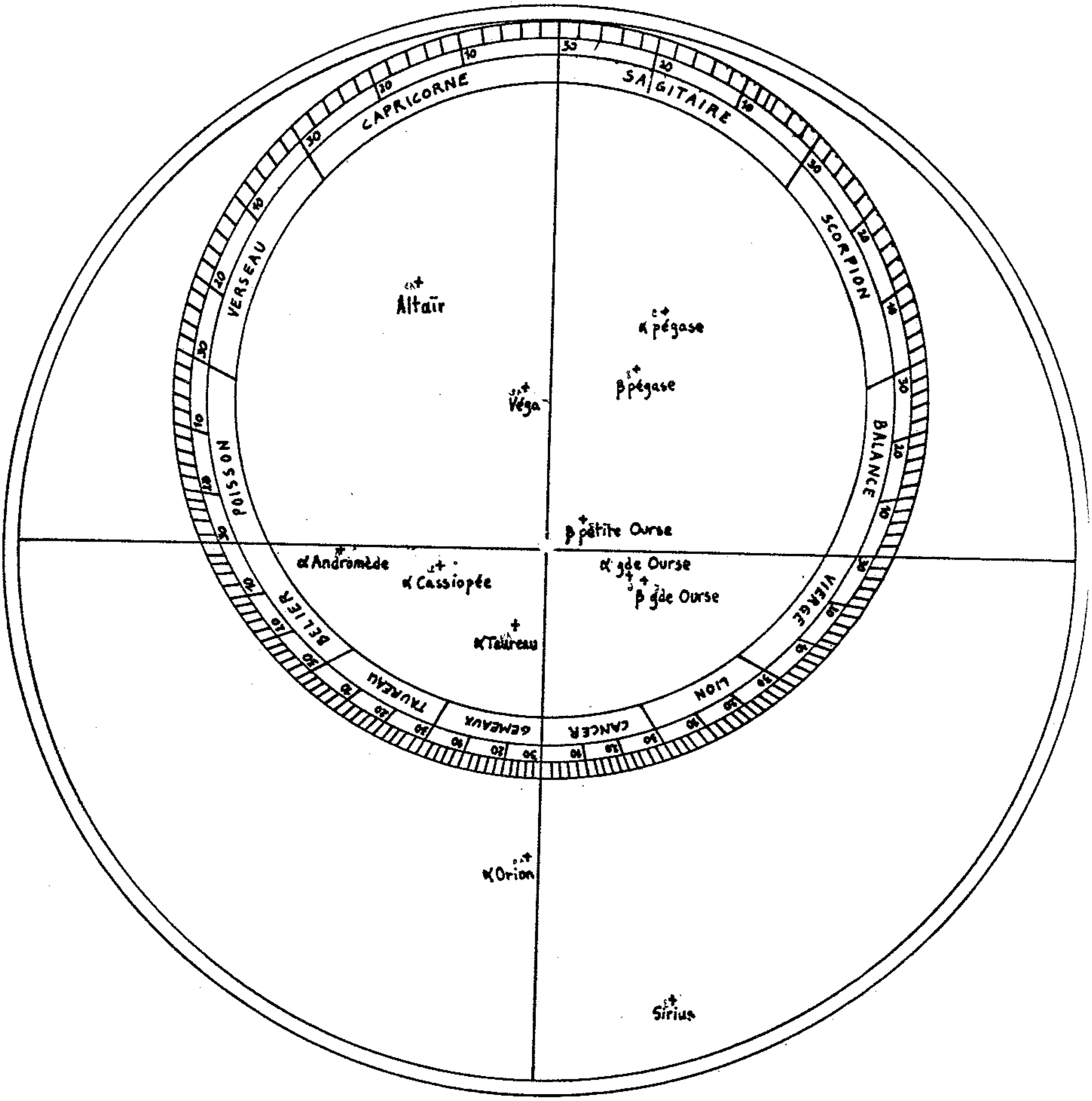
Proj. stér. : bien, original, grand sens géométrique
Détermin. explicite des cercles : bien (1 erreur)
graduat : t. bien
Modèle : excellent

1

10/10



2


CAPRICORNE
SAGITAIRE
SCORPION
BALANCE
VIERGE
LION
CANCER
GEMEAUX
TAUREAU
BELIER
POISSON
VERSEAU
Altaïr
α pégase
β pégase
Véga
β petite Ourse
α Andromède
α Cassiopée
α gde Ourse
β gde Ourse
α Taureau
α Orion
Sirius

I DESCRIPTION DE L'INSTRUMENT

Il existe plusieurs sortes d'astrolabes mais celui à qui revient les honneurs de sa réputation de "bijoux des mathématiques" est l'astrolabe planisphérique ou astrolabe stéréographique.

L'astrolabe planisphérique est composé de plusieurs pièces: dans la pièce centrale ou mère s'emboite un disque plein, le tympan, interchangeable pour une latitude donnée. Ces deux pièces sont recouvertes par un disque ajouré, l'araignée. Le tout tient grace à un pivot autour duquel l'araignée seule peut tourner pendant l'utilisation. Les astrolabes comportent également d'autres pièces dont l'usage n'a pas de rapport direct avec sa conception initiale. Seule l'alidade permettant de mesurér la hauteur d'un astre pourrait retenir notre attention mais sette mesure étant peu fiable on considérera l'usage du sextant pour une telle mesure. Sur le dos de la mère (inutile pour l'usage des propriétés propres à l'astolabe) sont gravées diverses inscriptions: lignes trigonométriques, carré des ombres etc ... auxquelles on ne s'interressera pas ici.

D'une manière générale l'astolabe se présente comme un disque de 20 à 40 cm de diamètre.

La caractéristique fondamentale de l'astrolabe est la représentation de la sphère celeste et de la sphère des fixes grâce à la projection stéréographique.

Sur le tympan est représenté la projection stéréographique de la Terre pour une latitude donnée (il faut un tympan pour chaque latitude; cette latitude est donc supposée connue pour l'usage de l'astrolabe). Sur l araignée est représentée la voute céleste; elle est identique quelque soit la position de l'observateur.
On délimite la projection stéréographique de la Terre à sa partie située au Nord du tropique du Capricorne, ce qui permet de représenter sur l'araignée toute la trajectoire apparente du soleil pendant l'année; l'astrolabe est donc utilisable à toute époque en tout point de le Terre situé au Nord du tropique du Capricorne.

II PROPRIETES MATHEMATIQUES DE LA PROJECTION STEREOGRAPHIQUE

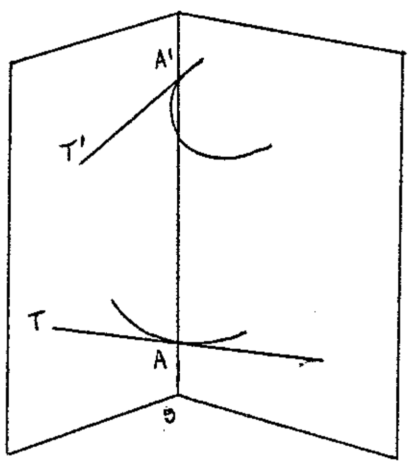
Notions d'inversion

On appelle inversion de centre O de rapport K la transformation qui fait correspondre à un point M le point M' tel que:

- M' est sur la droite (OM)
- $\overline{OM}.\overline{OM'} = K$

PROPRIETES

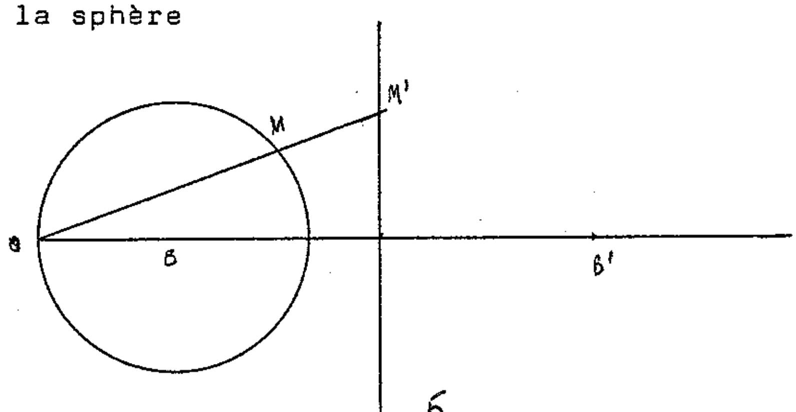
- Si une courbe C admet en un point A une tangente T, distincte de (OA), la courbe inverse C' admet au point A' inverse de A une tangente T' symétrique de T par rapport au plan médiateur de (AA').



- La propriété reste vraie pour une surface S.
- L'inversion conserve les angles.

En effet: deux courbes tangentes en un point A sont transformées en deux courbes tangentes en A'. De même pour l'orthogonalité. De même pour des surfaces.

- L'inverse d'une droite passant par le centre d'inversion est cette droite. De même pour un plan.
- L'inverse d'une sphère passant par le centre d'inversion O est le plan médiateur de (OB') où B' est l'inverse du centre B de la sphère



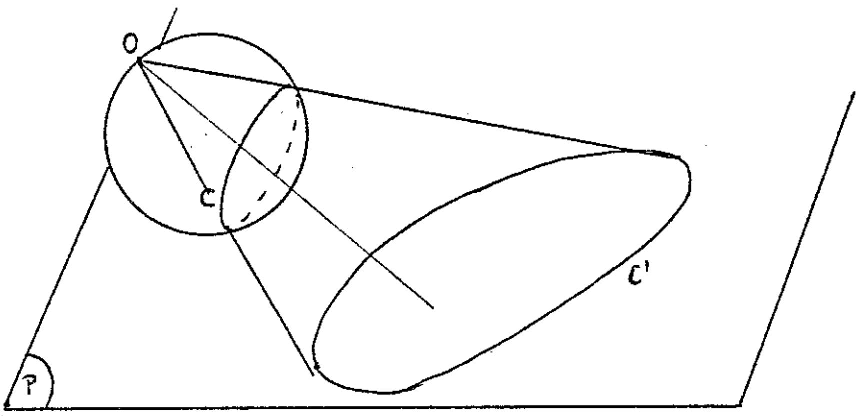
PROJECTION STEREOGRAPHIQUE

Soit S une sphère, O un point de cette sphère, P un plan parallèle au plan tangent en O à S. On appelle projection stéréographique d'un point M de S sur P le point M' où la droite (OM) coupe P.

Le point O est l'un des centres d'inversions qui permettent de transformer S dans P.

La projection stéréographique est l'inversion de centre O, de rapport le produit constant $\overline{OM}.\overline{OM'}$

On appelle projection stéréographique d'une courbe C de S la courbe C' décrite dans P par la projection stéréo d'un point M lorsque M décrit C.



D'après les propriétés de l'inversion on déduit que la projection stéréo d'un cercle C est un cercle C' dont le centre est le point A' où la droite joignant le point O centre de projection au pôle A du plan du cercle C coupe le plan P.

Le produit constant $\overline{AM}.\overline{AM'}$ des segments d'origine A et d'extremités M et M', points ou une sécante passant par A coupe la sphère, est appelé puissance du point A par rapport à la sphère.

Si d est la distance OA et R le rayon de la sphère, la puissance p de A est donnée par — $p = d^2 - R^2$

On a également les propriétés suivantes pour la projection stéréo

- Les projections stéréo des cercles de la sphère sont des cercle sur le plan.
- Les angles tracés par deux droites sur la sphère sont égaux à ceux tracés sur le plan de projection par les projections stéréo des deux droites.

9

On peut également montrer ces propriétés de la projection stéréo sans utiliser la notion d'inversion. On considère ici la projection stéréo d'une sphère depuis le point S situé sur cette sphère de centre O, sur le plan équatorial passant par O et perpendicalaire à (OS).

Théorème fondamental

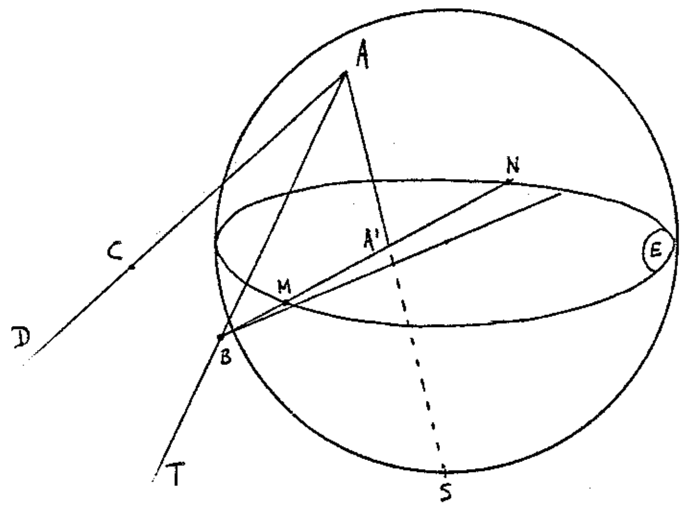
L'angle formé par deux lignes tracées sur la sphère est égal à l'angle formé par lés projetés stéréo de ces deux lignes.

Démonstration:

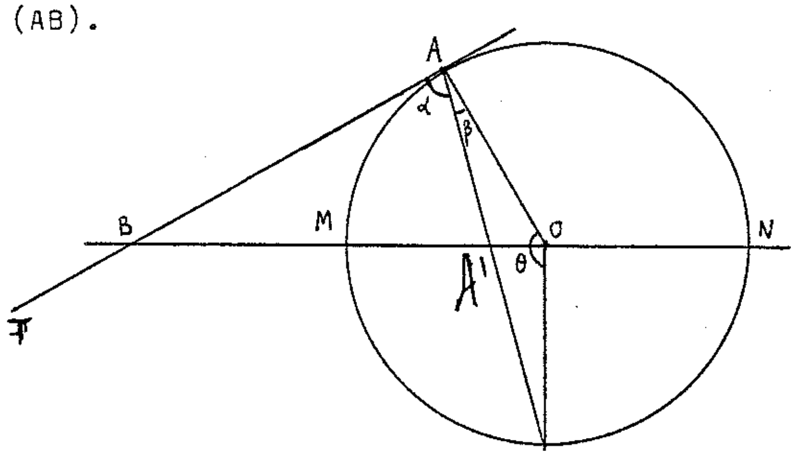
Soit A un point de la sphère; soient T et D deux tangentes en A à cette sphère; Le plan formé par T et D coupe le plan équatorial E selon une droite. Soient B et C tels que $B \in (T \cap E)$ et $C \in (D \cap E)$

Soit A' le projeté stéréo de A sur E. Les projetés stéréo de T et D sont(BA') et (CA').

Montrons que $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$



Le plan (ABS) coupe le plan E suivant (BA'). Soient M et N les points d'intersection de (BA') avec la sphère. Le plan (ABS) coupe la sphère par le cercle passant par ASMN, qui est tangent en A à (AB).



Dans le triangle (AOH), on a $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\theta$ rad

D'autre part, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

Or puisque $\widehat{AS} = \theta R$, on a $\alpha = \frac{1}{2}\cancel{R}\left(\frac{\widehat{AS}}{R}\right) = \frac{1}{2}\cancel{R}\left(\frac{\widehat{AM}+\widehat{MS}}{R}\right)$

De même l'angle $(\widehat{B, A', A})$ a pour mesure $\frac{1}{2}\cancel{R}\left(\frac{\widehat{AM}+\widehat{SN}}{R}\right)$

Or puisque S est le pôle de projection on a $\widehat{SM} = S$.

Donc $\widehat{BAS} = \widehat{BA'A}$

On en déduit que les segments BA et BA' sont égaux.

De même on montre que CA = CA'

Donc les triangles (CAB) et (CA'B) sont égaux.

Donc $\underline{\underline{\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}}}$

Corollaire I

La projection stéréo d'un petit cercle est un cercle qui a pour centre la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère le long du petit cercle considéré.

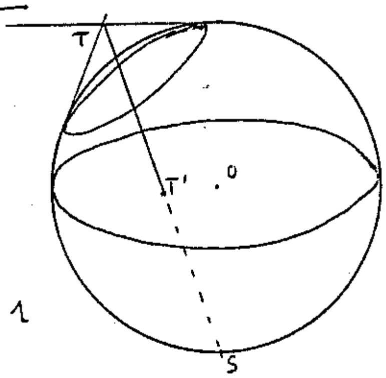
Démonstration:

Soit T le sommet du cône circonscrit à la sphère le long d'un petit cercle de la sphère. Les génératrices de ce cône sont tangentes à la sphère et rencontrent orthogonalement le petit cercle.

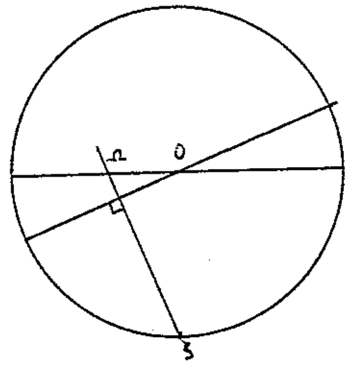
D'après le théorème fondamental, les projections de ces génératrices, qui sont des droites passant par le projetté T' de T, rencontrent orthogonalement la projection du petit cercle.

Théorème évident

Cette dernière est donc un cercle de centre T'.



Corollaire 1



corollaire 2
(vue plane)

Corollaire 2

La projection stéréo d'un grand cercle est un cercle ayant pour centre le point où la perpendiculaire au plan du grand cercle menée depuis le pôle de projection perce le plan de projection.

Démonstration: analogue à celle du corollaire I en considérant le cylindre circonscrit à la sphère le long du grand cercle.

Bonne idée, mais qui fait appel à la notion de "trajectoires orthogonales"

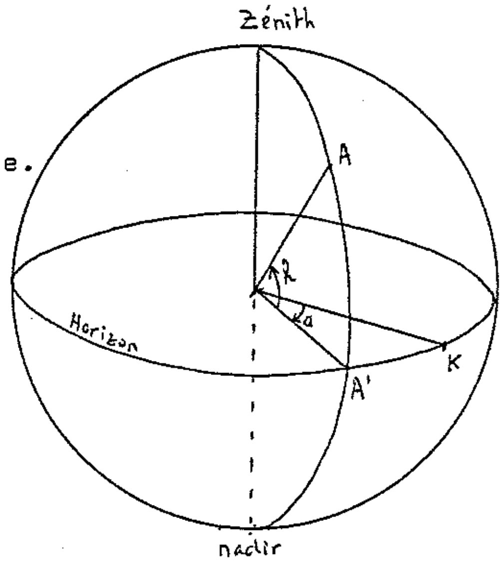
COSMOLOGIE SOMMAIRE

- sphère celeste: c'est la sphère dont la Terre réduite à un point occuperait le centre.
- sphère locale: sphère fixe dont le rayon sera pris pour unité et dont le centre est l'oeil de l'observateur.
- verticale: direction prise par un fil à plomb dans sa position d'équilibre en un point donné de la Terre.
- zénith: intersection de la verticale ascendante avec la sphère celeste.
- nadir: point de la sphère celeste diamétralement opposé au zénith.
- plan de l'horizon: plan perpendiculaire à la verticale et passant par le centre de la terre.
- axe du monde: axe autour duquel la sphère celeste parait décrire une rotation. Il coupe la Terre aux points Nord (N) et Sud (S). Attention: il y a plusieurs définition des pôles Nord, Sud (et Est, Ouest) qui ne correspondent pas aux mêmes points. Nous nous attacherons toujours ici à cette définition.
- écliptique: trajectoire annuelle du soleil sur la sphère celeste. Chaque point de l'écliptique représente la position du soleil dans le ciel à un certain jour et une certaine heure de l'année. Au cours de la journée le soleil décrit un "faux cercle" autour de la sphère. En l'éspace d'une journée il rejoint sur l'écliptique un point voisin de celui de son départ.
- plan de l'équateur: plan perpendiculaire à l'axe du monde et passant par le centre de la Terre. Il coupe la sphère terrestre selon l'équateur.
- tropiques: cercles de la sphère terrestre parallèles à l'équateur et correspondants aux positions extremes du soleil sur l'écliptique. L'écliptique étant inclinée à 23,5° sur le plan équatorial le tropique du Cancer est le cercle parralèle à l'équateur et situé à la latitude +23,5°; le tropique du Capricorne à la latitude -23,5°.
- méridien d'un lieu considéré: plan passant par les pôles N et S et le point considéré sur la Terre.
- point vernal: point où le plan de l'écliptique coupe l'équateur à l'équinoxe de printemps. On le prend pour point origine l'équateur.
- almucantaras: cercles parallèles a l'horizon.
- signe du zodiaque (zodion, ζώδιον): désignait une unité de mesure d'angle au même titre que l'angle droit en géométrie I zodion = 30° (I/I2 de cercle). Le zodiaque partage l'écliptique donc l'année, en douzes zodions auxquels ontdonne des noms d'animaux selon les constellations visibles (dans l'antiquité) à une époque de l'année.

Coordonnées locales

- coordonnées horizontales:

Soit O le centre de la sphère celeste; A la position d'une étoile. Le demi-grand cercle ZAN' est le vertical de l'étoile.

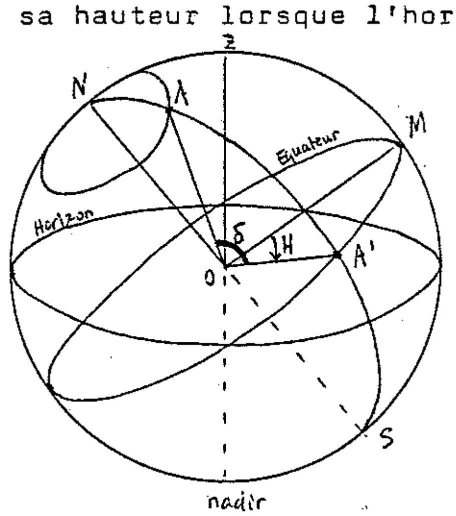


On appelle hauteur l'angle $h = \widehat{A'OA}$

On appelle azimut l'angle $a = \widehat{KOA'}$ où K est un repère fixe défini sur l'horizon.

- coordonnées horaires:

On appelle cercle horaire de l'étoile A le demi grand cercle NAS il dépend de la position de l'étoile A sur sa trajectoire au cours du temps. On appelle angle horaire H l'angle formé par le cercle horaire de A et un demi méridien fixe. On appelle ~~dé~~ déclinaison l'angle $\delta = \widehat{A'OA}$; elle se compte positivement vers le nord, négativement vers le sud. On pourrait dire que la ~~déclinai~~ déclinaison d'une étoile est sa hauteur lorsque l'horizon est confondu avec l'équateur.



- coordonnées équatoriales:

On appelle ascension droite l'angle correspondant à l'angle horaire mais qui se compte positivement dans le sens opposé c'est à dire dans le sens direct. On utilise l'angle horaire ou l'ascension droite selon que l'on parle de la sphère des fixes ou celle celeste (d'où le changement de sens positif).

TRACE DU TYMPAN DE L'ASTROLABE

Les projections stéréo de l'équateur et des tropiques sont des cercles de centre O, centre de la Terre donc projeté de ce point.

On trace le cercle correspondant à la projection de l'équateur. C'est le cercle fondamental et par convention on lui attribue un rayon de valeur 1.

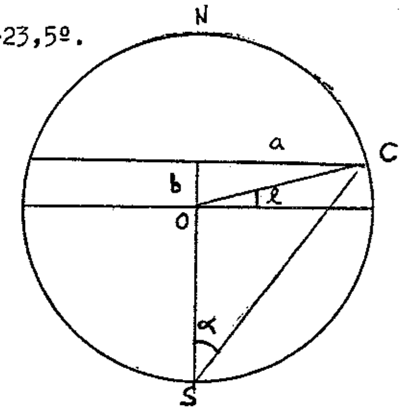
On trace relativement au cercle fondamental les cercles correspondant aux projections des tropiques en sachant que le tropique du Cancer est à la latitude +23,5º et celui du Capricorne à la latitude -23,5º.

tropique du Cancer:

$l = 23,5º$

$\begin{cases} a = \cos l \\ b = \sin l \end{cases}$

$tg\alpha = \frac{a}{1+b}$ d'où $\alpha = 32,25º$

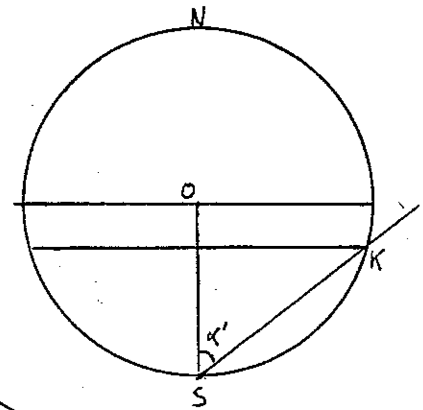


tropique du Capricorne:

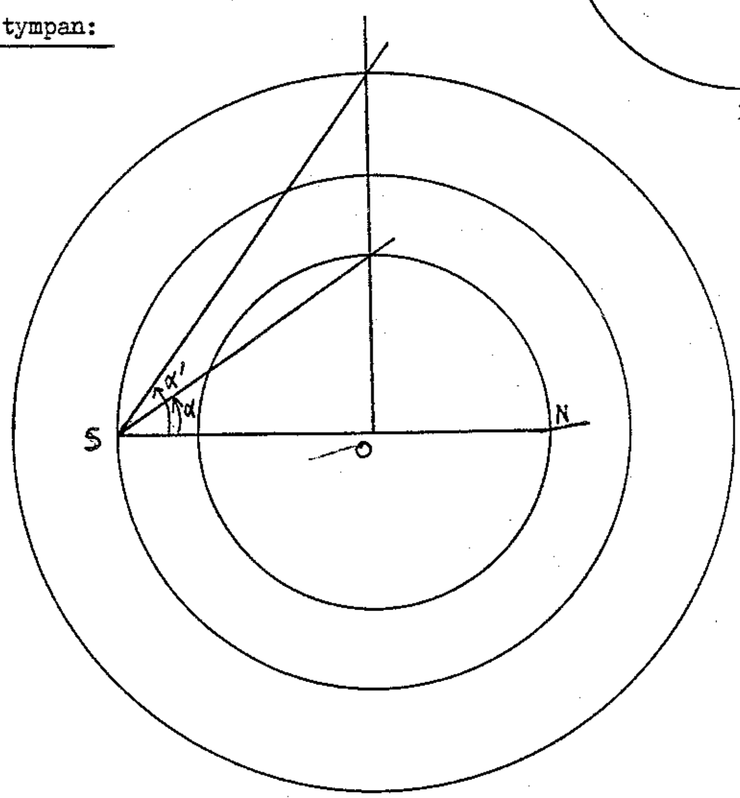
$l = 23,5º$

$\begin{cases} a = \cos l \\ b = \sin l \end{cases}$

$tg\alpha' = \frac{a}{1-b}$ d'où $\alpha' = 56,75º$

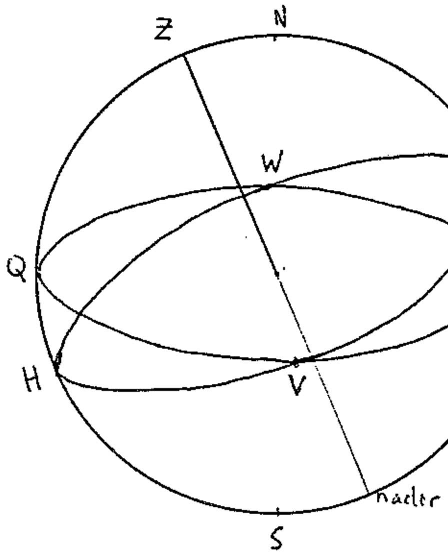


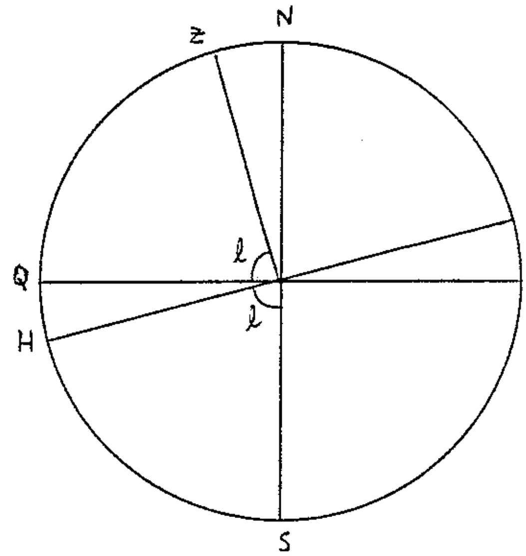
Sur le tympan:



tracé de l'horizon oblique:

Soit un observateur situé à une latitude l sur la Terre



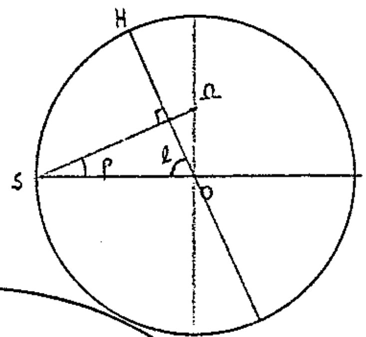


D'après le corrolaire 2, la projection stéréo de l'horizon est un cercle de centre Ω tel que (SΩ) soit perpendiculaire au plan de l'horizon.

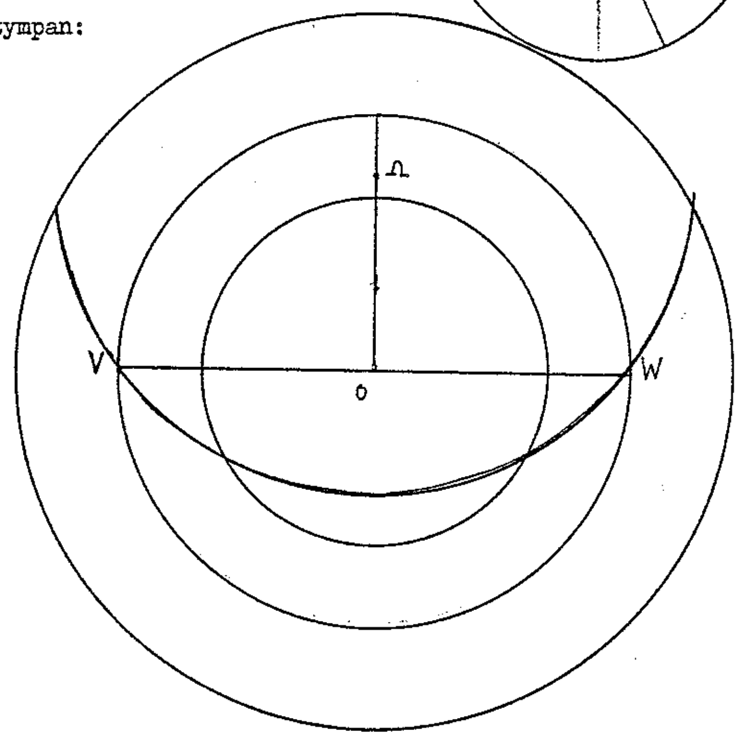
De plus tous les horizons passent par les points V et W qui sont les points d'intersection de tous les horizons avec l'équateur.

p= 90-l

tg p= OΩ



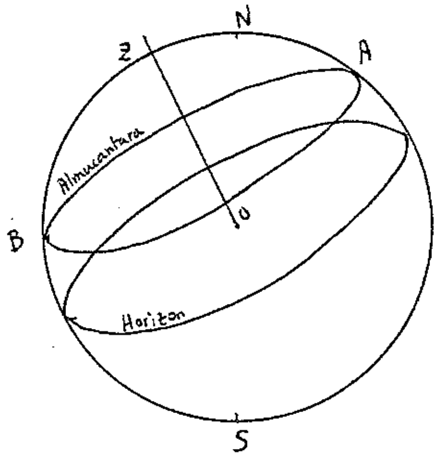
Sur le tympan:

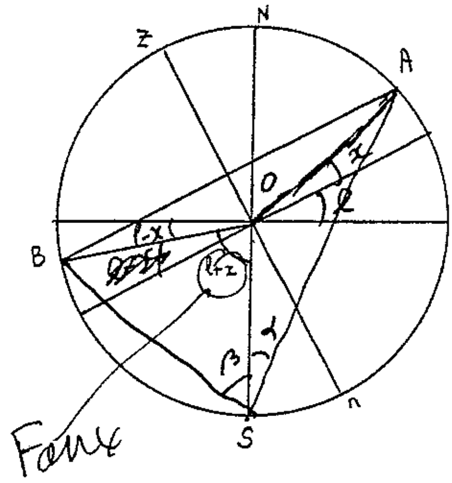


tracé des Almucantaras:

Soit un observateur situé à une latitude l sur la Terre.

On considère l'Almucantara situé à x º au dessus de l'horizon oblique.





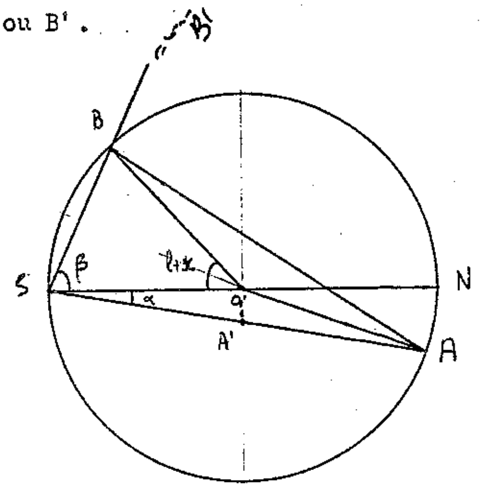
$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(l-x) \\ \beta = 90 - \frac{1}{2}(l+x) \end{cases}$$ Faux Non

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(l+x)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(l-x)$$

Le projeté de l'almucantara considéré est le cercle de diamètre A'B' et l'on connait les distances OA' = $tg\,\alpha$ et OB' = $tg\,\beta$

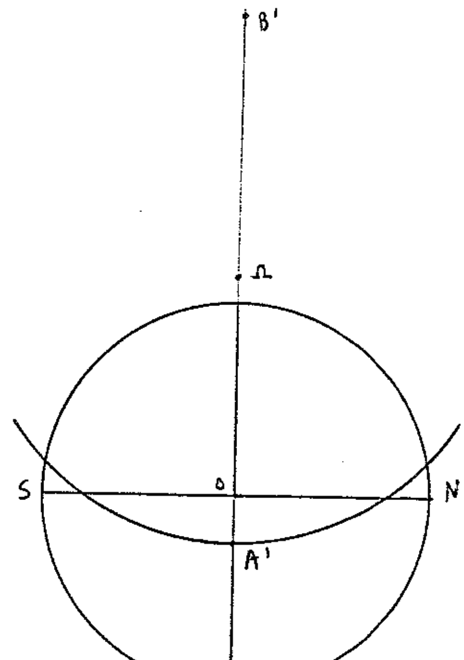
On en déduit la position du centre de la projection par rapport à l'un des deux point A' ou B' . . .



OA' = $tg\,\alpha$

OB' = $tg\,\beta$

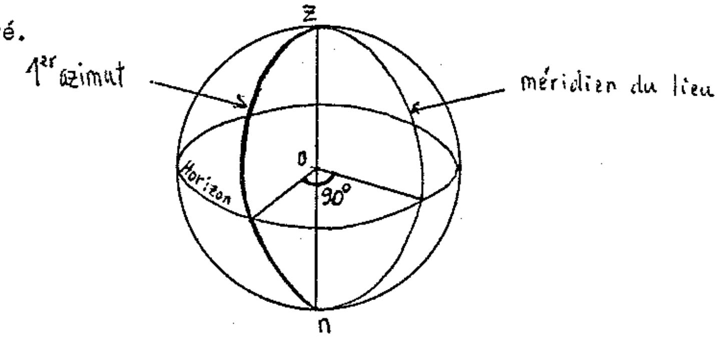
Sur le tympan :



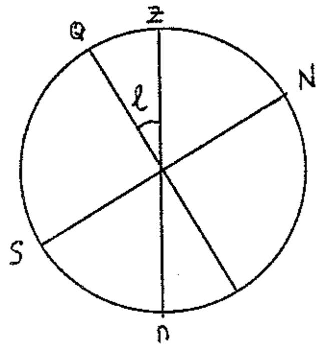
tracé du premier azimut:

les azimuts dont on parle ici ne sont pas exactement ceux définits dans la cosmologie sommaire. Il s'agit de grand cercles passant par le zénith et partageant l'horizon en plusieurs parties égales.

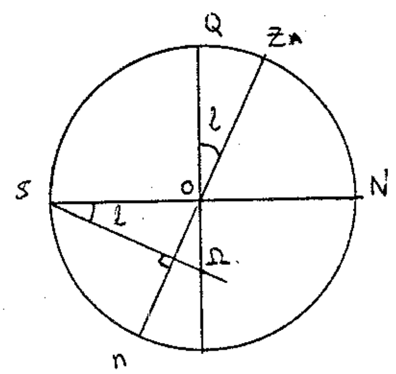
Le premier azimut est celui dont la plan est perpendisulaire au plan du méridien du lieu considéré.



On considère le plan du méridien du lieu considéré:



On applique le corollaire 2: la projection stéréo du premier azimut est un cercle de centre Ω.

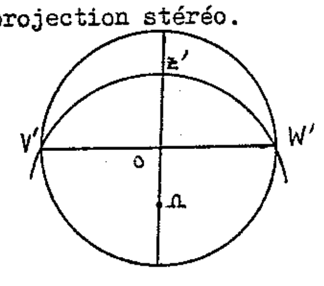


Calcul de $O\Omega$:

$O\Omega = \operatorname{tg} l$

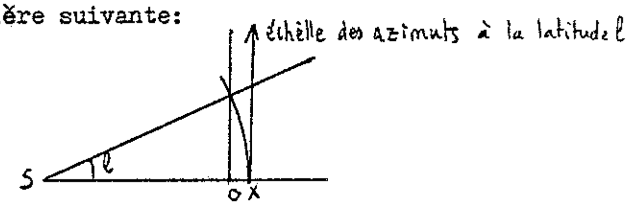
Le premier azimut passe par les points V et W.
De plus tous les azimuts passent par le zénith donc toutes leurs projections sur le plan équatorial se coupent au point Z'. Pour les autres azimuts il suffit de determiner le centre de leur projection stéréo.

Sur le tympan : le 1er azimut.



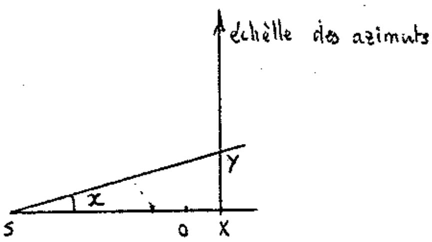
tracé des autres azimuts:

On considère l'azimut $\mathcal{A}_x$ situé à x° du premier azimut.
La méthode à suivre est la suivante (il n'y a pas de démonstration):
On trace l'échelle des azimuts de la manière suivante:

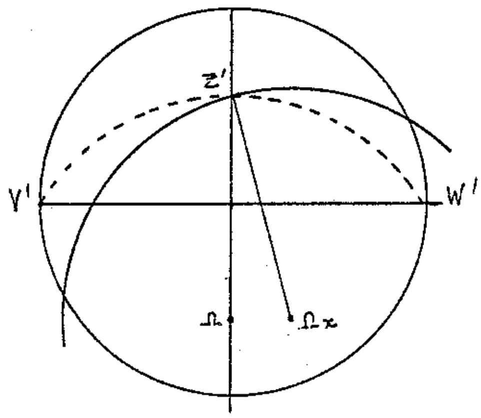


l: latitude de l'observateur.
$SO = 1$

Pour l'azimut on se reporte à l'échelle des azimuts:



Sur le tympan:
On trace le point Ω_x tel que $\overline{\Omega\Omega_x} = \overline{XY}$
Ω_x sera le centre de projection de l'azimut ; $\Omega_x Z'$ sera son rayon.



tracé des lignes horaires:

Autrefois, on divisait les journées en douzes heures de jour et douzes heures de nuit. On a alors des heures inégales. Puisque cette manière de diviser le temps n'est plus utilisée aujourd'hui on n'en parlera pas ici, bien que cela ait eût beaucoup d'importance historiquement pour l'astrolabe.

On divisera le temps en heures égales c'est à dire en I/24 de journée. Cette division ne dépendant pas de la latitude (contrairement aux heures inégales) elle peut être représenté sur le pourtour de la mère appelé limbe que l'on divise en 24 parties égales. L'heure XXIV correspond au passage du soleil au méridien.
On peut aussi graduer le limbe en degrés et faire la conversion degrés/heures.

TRACE DE L'ARAIGNEE DE L'ASTROLABE

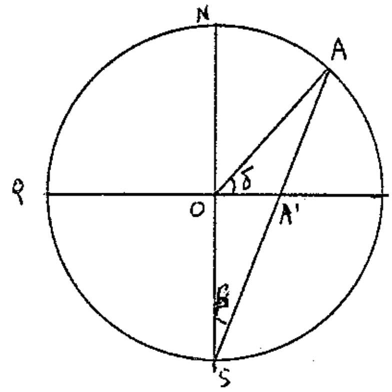
tracé des étoiles:

On utilise les coordonnées équatoriales.

Soit une étoile A de déclinaison δ et d'ascension droite α

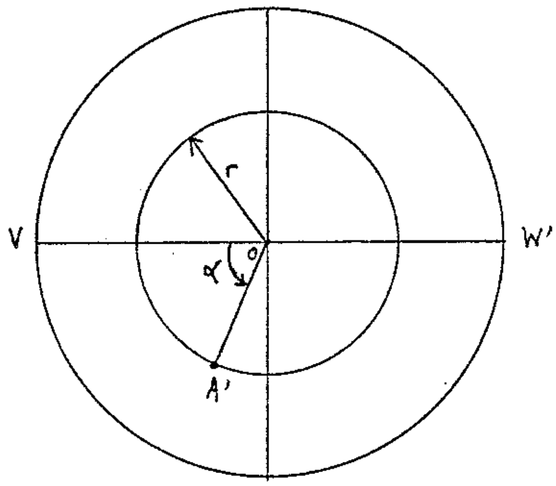
On a $\beta = \frac{1}{2}(90 - \delta)$

d'où OA'= $tg\,\beta$



Sur l'araignée:

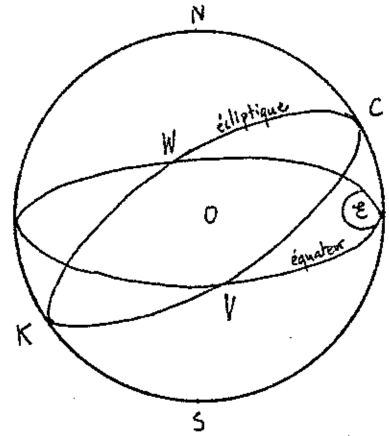
$r = tg\,\beta$



Pour notre construction on utilisera du papier calque mais les anciens faisaient des araignées en métal et devaient donc laisser des parties vides pour permettre la lecture sur le tympan. De plus ils se sont attachés à un certain goût artistique pour sa fabrication, d'où ces formes gracieuses qui lui ont valu son nom même: l'araignée.

Remarque: il est nécéssaire de connaitre les coordonées équatoriales pour tracer celles ci sur l'araignée (du moins avec cette méthode). On fournit une table des principales étoiles dont celles soulignées sont représentées sur notre araignée.

tracé de l'écliptique sur l'araignée:

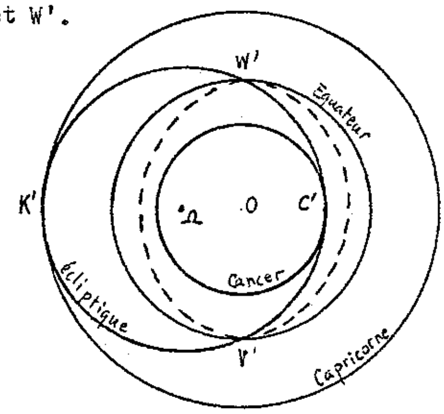


Sur le plan de l'équateur $\mathcal{E}$, on fait les projections stéréo et orthogonales de l'écliptique. La projection orthogonale de l'écliptique est une ellipse que l'on ne sait pas rigoureusement tracer et qui touche le cercle équatorial (qui est sa propre projection stéréo et orthogonale) aux points V' et W'. La projection stéréo de l'écliptique est un cercle qui est tangent à la projection du tropique du Cancer au point C', à celle du tropique du Capricorne au point K', et qui coupe le cercle équatorial aux points V' et W'.

Remarque: V est appellé point vernal.

On obtient:

on trouve facilement Ω grâce aux points V',W',C',K'.



B

Soit A un point de l'écliptique, A' son projeté stéréo sur $\mathcal{E}$. Les points S, A, et A' sont alignés par définition. La projection orthogonale conservant l'alignement, les points

- O projeté orthogonal sur $\mathcal{E}$ de S
- A'' ______________________ A
- A' ______________________ de lui même

sont alignés. Pour graduer la projection stéréo de l'écliptique (qui est graduée en zodions ou en jours) il suffit donc de graduer sa projection orthogonale sur $\mathcal{E}$.

La projection orthogonale sur $\mathscr{E}$ de l'écliptique, qui est une éllipse situé à l'intérieur du cercle équatorial et tangente à lui en deux points, peut être considérée comme l'image de ce cercle par l'affinité dans le plan de rapport b

En effet, dans $(O,\vec{I},\vec{J})$ le cercle équatorial a pour équation: $x^2 + y^2 = 1$

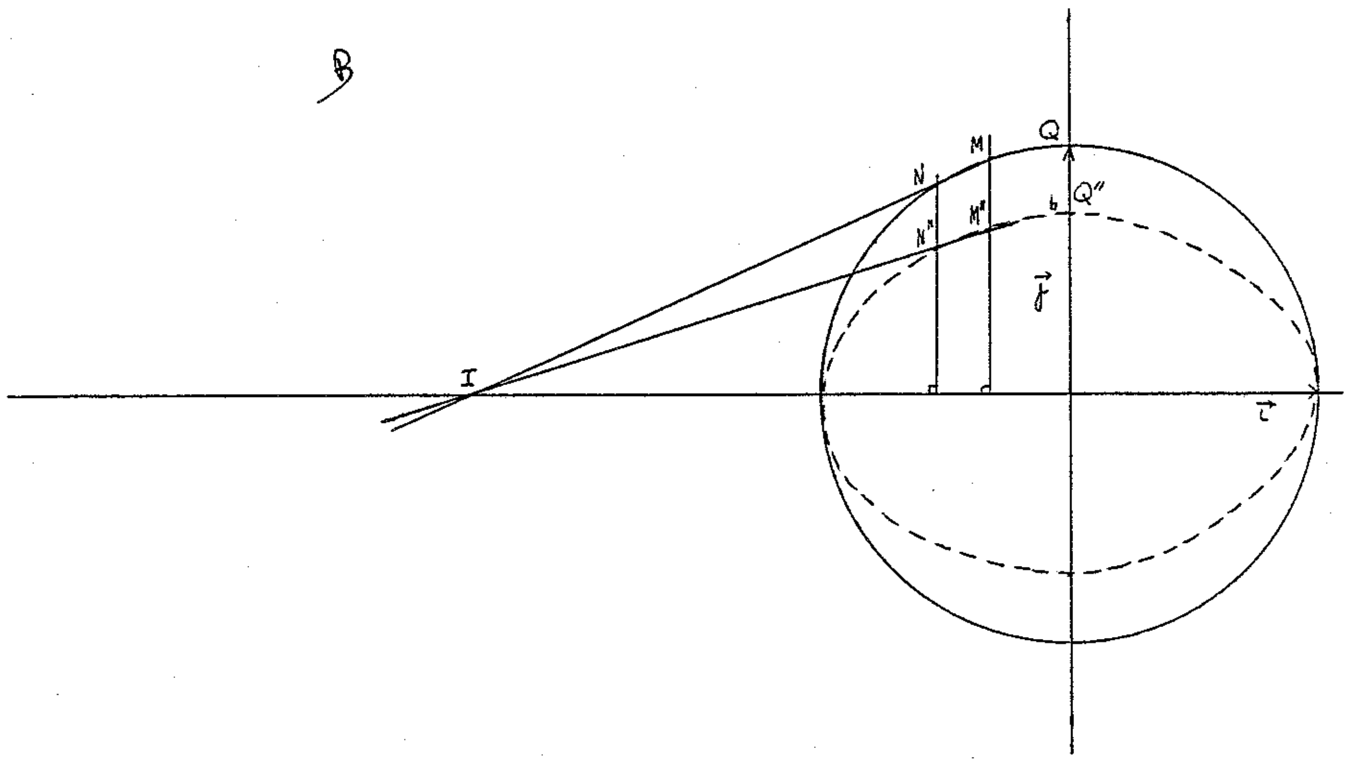
l'éllipse a pour équation: $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

On trouve immédiatement sur les figure: $b = \cos(23{,}5°)$

<u>Cette transformation du plan a la propriété suivante:</u>

Si M" est l'image de M et N" l'image de N, les droites (MM") et (NN") se coupent en un point I de l'axe $(O,\vec{I})$.

Pour graduer l'ellipse, projection orthogonale de l'écliptique, on gradue le cercle équatorial en parties égales et on utilise graphiquement la propriété des affinités dans le plan étant donné qu'elles conservent les angles, et que l'on connait Q" image de Q.



On gradue ensuite le cercle projection stéréo de l'écliptique en reportant simplement les graduations de l'ellipse.

UTILISATION DE L'ASTROLABE

Determiner l'heure du lever et du coucherde Soleil:

On place l'araignée de telle sorte que le degré zodiacal correspondant au jour voulu se superpose à la ligne d'horizon tracée sur le tympan et à l'est (soit à gauche quand l'astrolabe est suspendu à son anneau). On amène ensuite l'ostensor (sur notre modèle l'ostentor est matérialisé par une ficelle) sur ce degré zodiacal. L'ostensor indique sur le limbe l'heure du lever du soleil. Pour le coucher on opère de même mais à l'Ouest. Remarque: Cette opération peut se faire pour un jour choisit même si elle n'est pas faite ce même jour. L'astrolabe permet donc de faire des prévisions.

Determiner l'heure du lever et du coucher d'une étoile:

On place l'araignée de telle sorte que l'index de l'étoile considérée touche la ligne d'horizon sur le tympan à l'Est. On amène alors l'ostensor sur le degré zodiacal du jour considéré Il montre sur le limbe l'heure du lever de l'étoile. De même pour le coucher mais à l'Ouest.

Ce problème peut être inversé et l'on peut donc connaitre l'identité d'une étoile qui, à une date et une heure determinées, se levait à l'horizon.

Cette notion est à la base de l'astrologie: elle permet de dresser l'horoscope. Le degré du zodiaque qui se levait à un instant donné (naissance,...) régissait cet évenement: c'est l'ascendant.

En se servant des tables que l'on trouve dans les anciens almanachs, on peut facilement déduire de ce qui précède l'heure de lever ou de coucher de la lune ou d'une planète à une date quelconque.

Determination du commencement et de la fin du jour:

Le jour commence au moment ou le soleil passe à l'almucantar du crépuscule, à I8° sous l'horizon. Il finit de même. On opère exactement de même que pour la determination de l'heure de lever et de coucher du soleil mais en considérant les lignes de ces almucantaras au lieu de la ligne d'horizon.

Determination de la durée du jour:

Elle est mesurée par l'angle que doit décrire l'araignée pour que le degré zodiacal du jour passe de l'horizon Est à celui Ouest. Pour la durée de clarté on utilise la ligne de l'almucantara -I8°

CATALOGUE SOMMAIRE D'ÉTOILES

NOM	TYPE SPECTRAL	MAGNITUDE	ASCENSION DROITE 1951,0	DÉCLINAISON 1951,0	REMARQUES
			h m s	° ′ ″	
α Andromède	A_0	2,2	0 5 51	28 49 12 N	multiple
β Cassiopée	F_2	2,4	0 6 33	58 52 47 N	
α Cassiopée	K_0	2,1-2,6	0 37 43	56 16 8 N	variable
β Andromède	M_0	2,4	1 6 59	35 21 41 N	
α Petite Ourse (*Polaire*)	F_8	2,1	1 49 28	89 2 2 N	
β Persée (*Algol*)	B_8	2,3-3,5	3 4 58	40 46 6 N	variable
γ Persée	F_5	1,9	3 20 49	49 41 19 N	
α Taureau (*Aldébaran*)	K_5	1,1	4 33 6	16 24 45 N	
β Orion (*Rigel*)	B_8	0,3	5 12 11	8 15 24 S	triple
α Cocher (*la Chèvre*)	G_2	0,2	5 13 4	45 57 2 N	double
γ Orion (*Bellatrix*)	B_2	1,7	5 22 30	6 18 25 N	
δ Orion	O_9	2,5	5 29 30	0 20 2 S	double
α Orion (*Bételgeuse*)	M_2	0,5-1,1	5 52 31	7 23 59 N	variable
α Navire (*Canope*)	F_0	— 0,9	6 22 52	52 40 5 S	
α Gd Chien (*Sirius*)	A_1	— 1,6	6 42 59	16 38 51 S	double
α Gémeaux (*Castor*)	A_1	1,6	7 31 28	31 59 51 N	double
α Pt Chien (*Procyon*)	F_5	0,5	7 36 44	5 21 7 N	double
β Gémeaux (*Pollux*)	K_0	1,2	7 42 19	28 8 46 N	
ζ Poupe	O_5	2,3	8 1 52	39 51 51 S	
α Lion (*Régulus*)	B_8	1,3	10 5 46	12 12 27 N	
β Grande Ourse	A_1	2,4	10 58 54	56 38 44 N	
α Grande Ourse	G_8	2,0	11 0 43	62 0 57 N	
α Croix	B_1	1,6	12 23 52	62 49 40 S	
α Vierge (*Épi*)	B_1	1,2	13 22 36	10 54 22 S	double
α Bouvier (*Arcturus*)	K_2	0,2	14 13 25	19 26 12 N	
α Centaure	G_4	0,1	14 36 15	60 38 4 S	double
β Petite Ourse	K_5	2,2	14 50 49	74 31 21 N	
α Couronne (*la Perle*)	A_0	2,3	15 32 37	26 52 43 N	
α Scorpion (*Antarès*)	M_1	1,2	16 26 24	26 19 30 S	double
α Ophiuchus	A_5	2,1	17 32 39	12 35 39 N	
α Lyre (*Véga*)	A_0	0,1	18 35 17	38 44 13 N	
α Aigle (*Altaïr*)	A_7	0,9	19 48 24	8 44 15 N	
α Cygne (*Deneb*)	A_2	1,3	20 39 46	45 6 16 N	
α Céphée	A_7	2,6	21 17 25	62 22 39 N	
β Pégase	M_2	2,6	23 1 24	27 49 0 N	
α Pégase	B_9	2,6	23 2 19	14 56 29 N	

Sur le modèle:

- les almucantaras sont représenteés tous les 3°
- les azimuts ——————————— 10°

Annexe : les sujets des mémoires étudiés.

La datation par le carbone 14

Il s'agit de dater des objets contenant du carbone qui provient d'organismes ayant été vivants (sculptures en bois, textiles, os ou cartilages ...).

Tout organisme vivant absorbe, directement ou indirectement, en permanence du carbone provenant du CO_2 atmosphérique. Or le carbone de celui-ci contient un pourcentage, approximativement, fixe en fonction du temps de carbone 14 : C^{14}. Celui-ci est radioactif et se désintègre lentement.

Tant que l'organisme vit, le pourcentage de son C^{14} par rapport à son carbone total est identique à celui de l'atmosphère (environ 10^{-12}). Dès qu'il meurt, le C^{14} n'est plus renouvelé et sa quantité décroit. Elle est divisée par 2 en 5568 ans ("période" ou "demi-vie" du C^{14}). Si on mesure ce que la radioactivité est devenue à l'instant présent, on peut déterminer la date de la mort de l'organisme et donc savoir, par exemple, quand vivait un homme dont on retrouve des ossements.

La radioactivité du C^{14} est de 15 désintégrations par minute et par gramme de carbone contemporain. La vitesse de désintégration des atomes de C^{14}, est à chaque instant proportionnelle aux nombres d'atomes présents dans l'objet.

Il s'agit donc :

1) d'établir et de résoudre l'équation différentielle donnant en fonction du temps le poids (ou le nombre d'atomes) $N(t)$ de C^{14} présent dans un gramme de carbone ;

2) d'établir l'équation permettant de calculer l'âge de l'objet en fonction du taux de désintégration $\frac{dN}{dt}(t_a)$ mesuré à l'instant t_a - ou en fonction du nombre $N(t_a)$ directement mesuré ;

3) de faire le même travail en supposant que la proportion de C^{14} dans l'atmosphère a varié, par exemple de fonction affine, pendant la période 1890-1945, en décroissant (effet de la pollution industrielle ; il a réaugmenté depuis à cause des essais d'armes nucléaires). Cela permet, par exemple, de détecter de faux tableaux fabriqués pendant cette période.

Diverses méthodes de résolution de l'équation du 3ème degré

On peut toujours ramener l'équation à la forme $x^3+px+q=0$.

1)Racines réelles de l'équation à coefficients réels.

On introduit naturellement le discriminant $\delta=4p^3+27q^2$, qui joue un rôle analogue à $\Delta=b^2-4ac$ pour l'équation du 2ème degré. On voit que l'équation a 3, 2 ou 1 racines réelles selon que $\delta<0$, $\delta=0$ ou $\delta>0$.

2)Méthode de Cardan.

On introduit 2 inconnues auxiliaires u et v en posant $x=u+v$; si on choisit $uv=-p/3$, on obtient $u^3+v^3=-q$; si $y=u^3$ et $z=v^3$, on a $yz=-p^3/27$, $y+z=-q$; donc y et z sont solutions d'une équation du second degré qu'on sait résoudre ; on trouve les racines $(-q\pm\sqrt{\delta/27})/2$, complexes si $\delta<0$ (ou si p ou q sont complexes).

On trouve ensuite u et v par extraction de racines cubiques et $x=u+v$. Mais on trouve trop ou trop peu de racines, en apparence ; il faut utiliser les trois racines cubiques complexes d'un nombre ... et discuter.

3)Méthode trigonométrique (circulaire ou hyperbolique).

Par un changement d'inconnue on se ramène à $4y^3-3y=\lambda$ ou $4y^3+3y=\lambda$. Il y a plusieurs cas. Si par exemple $4y^3-3y=\lambda$ avec $-1<\lambda<1$, on peut poser $y=\cos\varphi$; on obtient $\cos 3\varphi=\lambda$, d'où $3\varphi=\pm\vartheta+2k\pi$, $\varphi=\pm\vartheta/3+2k\pi/3$,et pour $y=\cos\varphi$ on trouve 3 valeurs. Si on a $4y^3+3y=\lambda$, on pose $y=\operatorname{sh}\varphi$, on obtient $\operatorname{sh} 3\varphi=\lambda$; si $e^{3\varphi}=u$, on a $u^2-2\lambda u-1=0$, d'où 2 valeurs pour u, puis extraction de racines cubiques pour trouver e^{φ}, puis y ...

On peut écrire un programme de calcul pour une calculatrice.

4)Méthode de Tschirnhaus.

Soit $P(x)=x^3+px+q$. On va prendre une nouvelle inconnue $y=x^2+\alpha x+\beta$, α et β à choisir. Si $Q(x)=x^2+\alpha x+\beta-y$, la racine cherchée r doit être commune à P et Q. Donc $P(x)\equiv(x-r)A_2(x)$, $Q(x)\equiv(x-r)B_1(x)$ où A_2 est de degré 2 et B_1 de de degré 1. Alors $P(x)B_1(x)-Q(x)A_2(x)\equiv0$ ce qui signifie que les polynômes xP, P, x^2Q, xQ et Q sont linéairement liés dans l'espace $\mathcal{P}$ des polynômes de degré ≤ 4. Leurs coordonnées forment donc 5 vecteurs liés de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$. En appliquant la méthode des pivots de Gauss, cette condition se

$$\begin{array}{l} u_1\to \\ u_2\to \\ u_3\to \\ u_4\to \\ u_5\to \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 1 & \alpha & \beta-y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta-y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta-y \end{array} \right.$$

ramène facilement à $-y^3+R_1(\alpha,\beta)y^2+R_2(\alpha,\beta)y+R_3(\alpha,\beta)=0$ où R_1, R_2 et R_3 sont des polynômes en α et β de degré 1, 2 et 3. On peut alors choisir α et β (en résolvant une équation du second degré) pour que $R_1=0$ et $R_2=0$. On en déduit la valeur C de R_3 et on a $y^3=C$. On en déduit y en extrayant la racine cubique puis x en résolvant l'équation du second degré $x^2+\alpha x+\beta-y=0$. En fait on retrouve ainsi la méthode de Cardan.

5)Extension.

La même méthode permet de ramener l'équation du 4ème degré à la résolution d'équations du 3ème degré.

Les mathématiques et le médecin légiste

Pour déterminer l'heure de la mort d'un cadavre qu'on lui apporte le médecin légiste utilise la loi de refroidissement d'un corps. Si $\varphi(t)$ est la température extérieure à un instant t et $\vartheta(t)$ la température du corps plongé dans ce milieu, sa vitesse de refroidissement $\vartheta'(t)$ est proportionnelle à l'écart entre $\vartheta(t)$ et $\varphi(t)$, le coefficient K dépendant du corps :

$$\vartheta'(t) = - K\,(\vartheta(t)-\varphi(t))$$

On peut supposer, pour simplifier, que dans la période considérée, φ est de la forme at+b . La solution de l'équation est alors

$$\vartheta(t) = C\,e^{-Kt} + at + b - a/K$$

Les nombres a, b, C, K sont a priori inconnus.

La méthode est la suivante : à des instants t_1 et $t_2= t_1+h$ (t_1 et h connus, par exemple t_1 heure d'arrivée, h = 5 heures), on prend les températures ϑ_1 et ϑ_2 et celles extérieures φ_1 et φ_2 . Avec φ_1 et φ_2 on obtient a et b. Avec ϑ_1 et ϑ_2, on obtient en général C et K. L'heure t_m de la mort est alors l'instant t_m tel que $\vartheta(t_m) = 37°$.

Il s'agit de mettre en oeuvre une méthode numérique pour résoudre l'équation donnant le coefficient K :

$$e^{Kh} = \frac{1+Kh\,\dfrac{\vartheta_1-\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_2}}{1+Kh\,\dfrac{\vartheta_2-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_2}}$$

puis une méthode numérique pour résoudre l'équation $\vartheta(t_m) = 37°$ qui donne l'heure de la mort.

Il s'agit enfin de fabriquer un petit programme sur calculatrice, qui permettrait au médecin légiste, en rentrant les 4 valeurs mesurées ϑ_1, ϑ_2, φ_1, φ_2, d'obtenir en quelques secondes la réponse t_m lui donnant l'heure de la mort de son cadavre.

Remarque : on peut être moderne et introduire un réfrigérateur : qu'est ce que cela change au problème et aux équations ?

TITRE : LA PRATIQUE DE MEMOIRES ETUDIANTS
EN DEUG SSM PREMIERE ANNEE
L'expérience de Lille 1

AUTEUR : Pierre JARRAUD

DATE : Juillet 1991

RESUME :

Cette brochure cherche à évaluer l'apport de la pratique de mémoires étudiants sur l'apprentissage des mathématiques en DEUG SSM 1 A.

Deux exemples sont reproduits.

MOTS-CLES :

EVALUATION, MEMOIRES, PROJETS, DEUG SSM 1

Editeur : IREM
Directeur/Responsable de la publication : R. DOUADY
dépôt légal : 2-86612-064-7
IREM PARIS VII - Tour 56/55 - 3ème étage - 2 place jussieu 75005 Paris