

**TRAVAUX D'ETUDIANTS EN TEMPS NON LIMITE**  
(niveau licence, présentés par A. Robert)

**Algèbre et géométrie**

- \* Le groupe des frises (par M. Debray et F. Meslet)
- \* Le billard polygonal (par M. Calléjon et Y. Le Chêne)

**Fonctions de variable complexe**

- \* Analyse d'exercices de baccalauréat sur les nombres complexes (par L. Lebrun et A. Le Goff)
- \* Le théorème d'inversion globale, isomorphismes analytiques (par P. Achart et F. Chalbot)
- \* Fonctions loxodromiques (par J. L. Delrieu et N. Vergnaud)

**objectif:** présenter des travaux différents

**sujet:** algèbre, géométrie, fonctions analytiques

**niveau:** enseignement post-bac

**public:** formateurs

Travaux d'étudiants en temps non limité  
(niveau licence, présentés par A. Robert)

Algèbre et géométrie

- \* Le groupe des frises (par M. Debray et F. Meslet)
- \* Le billard polygonal (par M. Calléjon et Y. Le Chêne)

Fonctions de variable complexe -

- \* Analyse d'exercices de baccalauréat sur les nombres complexes (par L. Lebrun et A. Le Goff)
- \* Le théorème d'inversion globale, isomorphismes analytiques (par P. Achart et F. Chalbot)
- \* Fonctions loxodromiques (par J.L. Delrieu et N. Vergnaud)



## Introduction (A. Robert, enseignante)

Dans cette brochure, nous présentons quelques travaux d'étudiants de niveau licence, réalisés de manière inhabituelle : il s'agit en effet de copies de partiel, mais d'un partiel en temps non strictement limité (deux mois ont été laissés aux étudiants entre la distribution des énoncés et la remise des copies) et non strictement personnel (éventuellement fait par deux étudiants rendant alors une seule copie). De plus les étudiants ont eu le choix entre quatre ou cinq sujets (et on a veillé à ce que tous les sujets soient effectivement choisis). Il s'agit du deuxième partiel, qui a lieu assez tard dans la deuxième moitié de l'année scolaire, presque tout le programme étant déjà traité (les certificats sont annuels). Il n'y a aucune modification de l'emploi du temps pendant la réalisation de ce travail.

A l'origine de ce partiel "non classique", il y a eu deux éléments : d'abord l'hypothèse qu'il pouvait être efficace, pour l'apprentissage, de favoriser un certain type d'activités mathématiques peu fréquentes, en proposant un travail du type inhabituel évoqué ci-dessus.

En effet le fait de ne pas restreindre le temps du travail, d'accepter une collaboration éventuelle, permet d'introduire dans l'activité proposée plusieurs composantes auxquelles souvent on doit renoncer dans les cadres plus classiques (cf. ci-dessous).

Deuxième élément : les étudiants un peu lents (voire un peu âgés ?) sont systématiquement défavorisés par les évaluations classiques, et même un peu brimés par l'ensemble du travail scolaire. On leur restitue ainsi des conditions mieux adaptées à leurs spécificités.

Nous allons faire quelques commentaires sur les sujets (jointes ci-après, avec les copies), détailler le type d'activités favorisées à notre avis par ce type de sujets et donner une estimation toute subjective des résultats obtenus et des difficultés inhérentes au projet, avant de présenter les copies choisies.

## A propos du choix des sujets proposés (jointes avec les copies)

Il s'agissait d'élaborer des énoncés propices à la mise en oeuvre de ces activités non classiques, assez variés pour intéresser un maximum

d'étudiants, tout en donnant un enjeu suffisant au gros investissement nécessaire des étudiants dans ce travail : on l'a donc fait compter dans l'évaluation (dans les deux certificats concernés, il y a deux partiels, dont celui-ci et un examen à la fin de l'année).

Les sujets proposés sont assez divers, il y en a quatre pour un des certificats, dont deux sont illustrés par une des meilleures copies recueillies) et cinq pour l'autre certificat dont trois sont (partiellement ou totalement) illustrés par des productions réelles.

Dans tous les cas le travail demande l'utilisation de documents dont la liste est indiquée (un à quatre documents par sujet), la bibliographie étant fournie aux groupes choisissant le sujet (mais nous ne l'avons pas jointe dans cette brochure). Souvent il y a une partie des documents en anglais. Il n'est pas toujours facile pour les étudiants de choisir à la simple vue des énoncés, mais comment en dire plus sans rentrer dans le sujet ?

Sans en faire une analyse exhaustive, nous pouvons dire que ces sujets demandent tous un certain temps pour "entrer dedans", que les documents sont toujours imparfaits (incomplets, redondants, etc...), et que les connaissances du cours qu'il y a à utiliser viennent toujours de plusieurs chapitres de ce cours. De plus les tâches proposées sont plus vagues que d'habitude, demandent souvent une réflexion voire une critique, sont transversales (par rapport à un chapitre).

Ainsi, suivant les cas, on demande, à l'aide des documents,

- \* de résoudre un problème long et difficile, déjà découpé en questions, portant sur une partie importante du cours (l'ordre des questions pouvant être décidé par l'étudiant dans un des sujets de ce type),
- \* de (re)trouver la (ou des) démonstration(s) d'un résultat important ou d'un théorème difficile et long (donnés dans l'énoncé),
- \* d'analyser des textes d'exercices de niveau "n" à la lumière de connaissances de niveau "n+1",
- \* de donner une synthèse des propriétés d'une fonction donnée,
- \* de dresser un catalogue d'isomorphismes d'ouverts du plan complexe à partir des représentations graphiques correspondantes,

- \* d'analyser les images données par un logiciel,
- \* de concevoir un exercice sur un sujet donné.

Quelles activités mathématiques différentes peut engendrer ce type de travail ?

La "normalisation" de la durée du travail de recherche :

Les étudiants ne peuvent pas tout trouver du premier coup, ne serait-ce que parce que la longueur de ce qui est à faire empêche de tout couvrir en un jour. Mais cela ne présente pas les inconvénients habituels, c'est même sans doute "normal" vu le contrat...

L'expérience d'une mini-recherche en vraie grandeur :

Il s'agit de rentrer dans un vrai problème, qui souvent n'est pas prédécoupé. Il est presque impossible de ne pas sécher un moment ou au moins de ne pas "patauger", puis on voit les choses se mettre en place, au bout d'un moment. Les étudiants vivent donc un autre rapport avec les mathématiques, ils font l'expérience du rôle du temps, de la familiarisation avec une situation donnée.

De plus, ils doivent se poser eux-mêmes certaines questions, avoir plus d'initiative donc, à la fois en ce qui concerne les outils à utiliser et l'organisation (interne) de leur travail.

Un travail d'organisation ou de synthèse

Dans la plupart des sujets, il est nécessaire à un moment donné, avant de rédiger, de mettre en ordre ce qu'on a fait. Ce peut être pour classer les informations tirées des divers documents, ou pour choisir les arguments retenus pour les démonstrations présentées, ce peut être une synthèse des différents aspects rencontrés sur la même question.

Une utilisation obligatoire mais critique de documents bruts, non prédigérés :

Dans tous les sujets proposés, les documents mis à la disposition des étudiants sont indispensables, c'est de leur lecture que s'inspirent les résolutions.

Mais ces documents ne sont jamais parfaits (et c'est bien souvent comme

cela dans la réalité - d'ailleurs ce sont des documents tout à fait standard !)

Ils sont redondants, il faut donc faire les mises en correspondance des choses identiques, ils sont inorganisés, il faut donc les lire en essayant de comprendre de quoi il s'agit, ils sont incomplets, il faut donc restituer les démonstrations insuffisantes (avec les outils du cours).

#### Une utilisation élargie des outils du cours :

Les outils mathématiques du cours sont utilisés sans qu'on sache (par une quelconque indication) lesquels vont être utiles : en effet, pour résoudre un problème qui ne porte pas, par définition même des sujets, sur un chapitre donné du cours (et qui porte même sûrement sur plusieurs chapitres, vu la longueur des sujets), on ne peut avoir d'idée a priori de ce qui va permettre d'avancer la résolution et on est bien obligé de se poser la question.

#### La rédaction d'un travail long

Tous les sujets sont longs, et leur rédaction amène à des décisions qu'un travail plus court rend moins indispensables. Il faut respecter une certaine clarté dans la forme (sinon c'est vite illisible), il faut être strict avec les notations (garder les mêmes ou en changer selon les questions), il faut organiser un minimum les copies.

#### Quelles difficultés rencontre-t-on, quels résultats obtient-on ?

En ce qui concerne le public des certificats en question (PEGC en formation continue, sans décharge), la quantité de travail demandée par ce type de travail, l'insécurité qu'il engendre, sont très critiquées, même si les étudiants reconnaissent pour beaucoup (ensuite) l'utilité de cet investissement, pour l'examen et plus généralement.

La composition des binômes est une variable non négligeable de ce qu'il est possible de faire (suivant la proximité ou non des lieux d'habitation par exemple). Les meilleurs travaux sont obtenus en binômes.

Il est difficile de donner la correction d'un tel travail : cela demande des commentaires très individuels. Il est également difficile de mettre une

note à un tel travail : on doit prendre en compte non seulement le résultat mais aussi la quantité de travail fournie.

A mon avis, les copies recueillies sont dans l'ensemble satisfaisantes, mais surtout il y a beaucoup plus que d'habitude d'excellentes copies (niveau 19/20).

Les étudiants ont beaucoup travaillé dans l'ensemble, et certains reconnaissent avoir trouvé plus d'intérêt à ces sujets qu'aux sujets ordinaires.

Il me semble que les activités non classiques évoquées ci-dessus ont fonctionné chez beaucoup (certainement pas tous, plusieurs étudiants ont trouvé qu'il y avait trop de travail et n'ont pas joué le jeu).

Les rédactions sont en moyenne meilleures que d'habitude, bien que souvent trop longues, les étudiants n'ont pas encore l'habitude d'être concis.

Comme les étudiants ont à coeur de traduire dans leurs productions la somme de travail fournie, et que, vraisemblablement, ils dominent mieux que d'habitude leur production, ils font souvent un effort supplémentaire de présentation. Le lecteur a souvent une bonne impression globale (lecture agréable). Il y a beaucoup de graphiques, quelquefois très remarquables, quelquefois même il y a des illustrations (on n'a pas les moyens de les reproduire ici !). C'est particulièrement vrai dans les sujets les moins classiques, me semble-t-il.

Les erreurs peuvent être nombreuses mais elles ne sont pas cachées, elles sont mieux repérables que dans des copies mal rédigées.

Il ne peut pas y avoir de copies mauvaises (alors les étudiants renoncent).

Enfin, côté enseignant, le travail d'élaboration des sujets et de correction des copies n'est pas mince...

Je crois en conclusion qu'il est nécessaire de proposer des sujets assez substantiels (assez longs donc, et avec un véritable questionnement), avec un enjeu d'évaluation, pour garantir les mises en fonctionnement des activités non classiques évoquées ci-dessus...

Paradoxalement, il peut être plus facile pour certains de s'investir dans un travail difficile mais intéressant, valorisant, et demandant des qualités d'adultes...





ALGEBRE ET GEOMETRIE (C4)

4 sujets (dont deux illustrés par des copies)



ACADEMIE DE CAEN

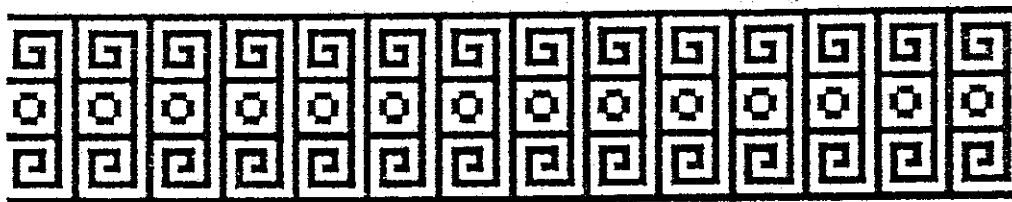
Monique DEBRAY  
Francis. MESLET.

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°1 (frises)

A l'aide des documents joints, répondre aux questions suivantes :

- 1) Qu'appelle-t-on frise, qu'appelle-t-on groupe associé à une frise ?
- 2) Quel théorème précis démontre-t-on sur ces groupes associés aux frises du plan ?
- 3) Rédiger une démonstration de ce théorème.
- 4) Résoudre les exercices 10-7, 10-18 (utiliser 10-7) et 10-14 du document en anglais.
- 5) Examiner les figures de la page 35 du texte sur le groupe des paveurs.  
Par quelles isométries directes pouvez-vous reconstituer chaque figure à partir du "pavé de base" indiqué ? On ne donnera pas de démonstration.





I (A) Qu'appelle-t-on frise ?

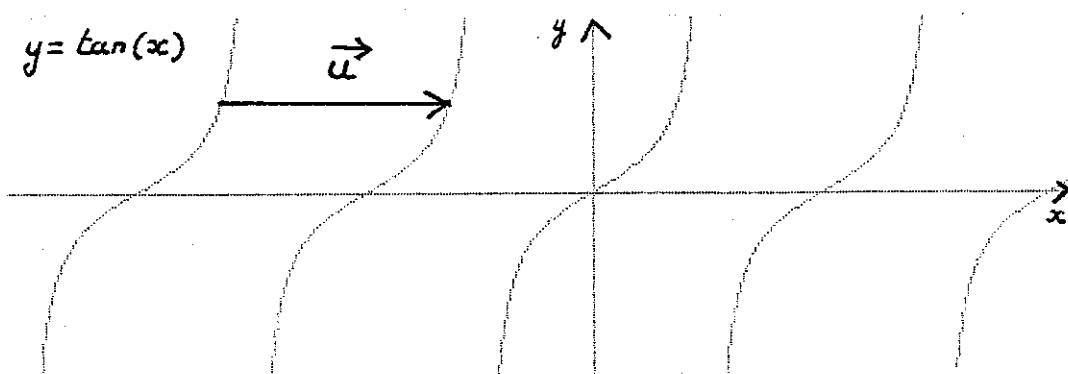
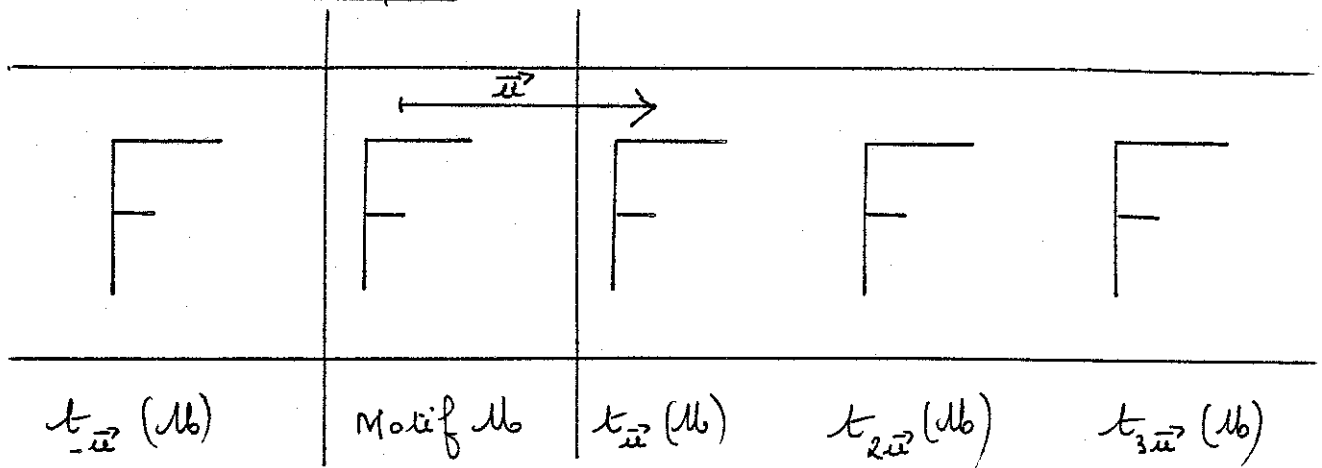
\* Définition.

Étant donné un vecteur  $\vec{u}$  non nul du plan  $P$ , on dit que  $F$  est une frise de vecteur  $\vec{u}$  si les translations conservant  $F$  sont les translations de vecteur  $n\vec{u}$  et aucune autre. ( $n \in \mathbb{Z}$ )

\* Motif d'une frise.

Si  $l$  est une droite orthogonale à  $\vec{u}$ ,  $l'$  sa transformée par  $t_{\vec{u}}$ ,  $l$  et  $l'$  délimitent une bande  $P_u$  du plan.  
et  $F \cap P_u$  est alors appelé :  
motif de la frise.

\* Exemples.



# I(B) Groupe associé à une frise.

## 1) Isométries laissant invariant un ensemble de points $E$

Un tel ensemble  $G$  muni de la loi de composition des applications est un groupe

En effet: a)  $\forall f \in G \quad \forall g \in G \quad g[f(E)] = E$  d'où  $g \circ f \in G$

b) la loi  $\circ$  est associative

c)  $\forall f \in G \quad f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$

d) Si  $f$  est une isométrie alors  $f^{-1}$  existe car  $f$  est une bijection et  $f^{-1}$  est une isométrie.  
 $f^{-1}(f(E)) = \text{Id}(E) = E$  d'où  $f^{-1}(E) = E$   
 et  $f^{-1} \in G$ .

## 2) Définition d'un groupe de frises.

Soit  $F$  une frise de vecteur  $\vec{u}$ , on appelle groupe de la frise  $F$  l'ensemble de toutes les isométries du plan qui laissent  $F$  invariante (cet ensemble étant muni de la loi  $\circ$ )

Après avoir démontré un théorème relatif aux isométries conservant un ensemble de points nous montrerons qu'il n'existe qu'un nombre fini de groupes associés à des frises.

## II<sub>1</sub> THEOREME

non unique en général

Si  $P$  est le centre de symétrie d'un ensemble de points  $S$  et si  $\alpha$  est une isométrie laissant  $S$  invariant alors  $\alpha(P)$  est centre de symétrie de  $S$ .

Si  $l$  est un axe de symétrie d'un ensemble de points  $S$  et si  $\alpha$  est une isométrie laissant  $S$  invariant alors  $\alpha(l)$  est axe de symétrie de  $S$ .

### \* Démonstration de la 1<sup>re</sup> partie.

Soit  $G$  le groupe des isométries laissant  $S$  invariant et  $\alpha$  et  $\sigma_P$  (symétrie de centre  $P$ ) deux isométries de  $G$ .

$$f = \alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1} \in G \quad \text{et} \\ \vec{f} = \alpha \circ \vec{\sigma}_P \circ \alpha^{-1} = \vec{\alpha} \circ \vec{\sigma}_P \circ \vec{\alpha}^{-1} = \vec{\alpha} \circ \vec{Id} \circ \vec{\alpha}^{-1} = \vec{Id}$$

$\Rightarrow f$  est une symétrie centrale.

$$\begin{aligned} \text{Calculons } f(\alpha(P)) &= \alpha(\sigma_P(\alpha^{-1}(\alpha(P))) \\ &= \alpha(\sigma_P(P)) \\ &= \alpha(P) \end{aligned}$$

donc  $\alpha(P)$  est invariant dans la symétrie centrale  $\alpha \circ \sigma_P \circ \alpha^{-1}$ . c'est donc le centre de la symétrie  $f$ .

comme  $f \in G$ ,  $\alpha(P)$  est centre de symétrie de  $S$ .

B

### \* Démonstration de la 2<sup>e</sup> partie.

Soit  $\alpha$  et  $\sigma_l$  (symétrie d'axe  $l$ ), deux isométries de  $G$ .

$$\begin{aligned} f &= \alpha \circ \sigma_l \circ \alpha^{-1} \in G \\ \vec{f} &= \alpha \circ \vec{\sigma}_l \circ \alpha^{-1} = \vec{\alpha} \circ \vec{\sigma}_l \circ \vec{\alpha}^{-1} \\ &= \vec{\sigma}_l \end{aligned}$$

$\vec{f}$  étant une symétrie vectorielle .../...



3 (b3)

$f$  est une symétrie axiale.

Cherchons l'axe de cette symétrie.

$$\begin{aligned}\text{Calculons } f(\alpha(l)) &= \alpha(\sigma_l(\alpha^{-1}(\alpha(l))) \\ &= \alpha(\sigma_l(l)) \\ &= \alpha(l)\end{aligned}$$

donc  $\alpha(l)$  est invariant par  $f$ : c'est l'axe de la symétrie.

Comme  $f \in G$ ,  $\alpha(l)$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{G}$ .

## II<sub>2</sub>. THEOREME DES GROUPE DE FRISES.

Soit  $F$  un groupe de frises de vecteur  $\vec{u}$  dont les translations forment le groupe engendré par  $T = t_{\vec{u}}$  (translations de vecteur  $\vec{u}$ )  
 Soit  $c$  une droite dirigée par  $\vec{u}$

Notons  $\sigma_A$  une symétrie centrale si  $F$  en contient une

Notons  $\sigma_a$  une symétrie orthogonale d'axe perpendiculaire à  $c$  si  $F$  en contient une.

Soit  $\gamma$  la symétrie glissée d'axe  $c$  telle que  $\gamma^2 = T$

$F$  est alors l'un des sept groupes distincts définis comme suit:

$$F_1 = \langle T \rangle \quad F_1^1 = \langle T, \sigma_c \rangle \quad F_1^2 = \langle T, \sigma_a \rangle$$

$$F_1^3 = \langle \gamma \rangle$$

$$F_2 = \langle T, \sigma_A \rangle \quad F_2^1 = \langle T, \sigma_A, \sigma_c \rangle \quad F_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$$

Notations utilisées pour la démonstration.

1)  $T = t_{\vec{u}}$  et " $c$ " est une droite dirigée par  $\vec{u}$

2)  $A$  sera :

- centre de symétrie si  $F$  contient une symétrie centrale
- intersection de  $a$  et de  $c$  si  $F$  contient une symétrie d'axe  $a$  si  $a \perp c$
- un point quelconque autrement.

3) Posons  $A_i = T^i(A)$  conséquence  $T^n(A_i) = T^n(T^i(A)) = T^{ni}(A)$

4) Soit  $M$  le milieu de  $[AA_1]$  et  $M_i = T^i(M)$

alors  $M_i$  est le milieu de  $T^i([AA_1])$  donc de  $[A_i, A_{i+1}]$

c'est aussi le milieu de  $[A_{i-1}, A_{i+2}]$  de  $[A_{i-2}, A_{i+3}]$  ---

..... donc de  $[A, A_{2i+1}]$ .

$$\underline{F_1 = \langle \tau \rangle}$$



Une première possibilité pour obtenir un groupe de frise de vecteur  $\vec{u}$  est de considérer le groupe engendré par la translation  $\tau = t_{\vec{u}}$ . En effet, un tel groupe ne contient que les translations.

$$\dots\dots \tau^{-3}, \tau^{-2}, \tau^{-1}, \text{Id}, \tau^1, \tau^2 \dots\dots$$

Un motif  $\mathcal{M}$  étant choisi, la frise  $F_1$  associée au groupe  $\mathcal{G}_1 = \langle \tau \rangle$  sera donc l'ensemble

$$F_1 = \{ \tau^i(\mathcal{M}) / i \in \mathbb{Z} \}$$

Toute translation  $t_{n\vec{u}}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) laisse  $F_1$  invariante.

Démonstration

$$t_{n\vec{u}}(F_1) = t_{n\vec{u}}(\{ t_{i\vec{u}}(\mathcal{M}) / i \in \mathbb{Z} \}) = \{ t_{(i+n)\vec{u}}(\mathcal{M}) / (i+n) \in \mathbb{Z} \} = F_1$$

Seules, les translations de vecteur  $n\vec{u}$  laissent  $F_1$  invariante

Démonstration Supposons qu'il existe  $\vec{u}' \notin \{ n\vec{u} / n \in \mathbb{Z} \}$  et tel que  $t_{\vec{u}'}(F_1) = F_1$ .

$$t_{\vec{u}'}(F_1) = t_{\vec{u}'}(\{ t_{i\vec{u}}(\mathcal{M}) / i \in \mathbb{Z} \}) = \{ t_{i\vec{u} + \vec{u}'}(\mathcal{M}) / i \in \mathbb{Z} \} = F_1$$

$i\vec{u} + \vec{u}'$  appartient donc à  $\{ n\vec{u} / n \in \mathbb{Z} \}$  et il existe donc  $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $i\vec{u} + \vec{u}' = j\vec{u}$  c'est à dire  $\vec{u}' = (j-i)\vec{u}$  ce qui contredit l'hypothèse et achève la démonstration de la propriété énoncée.

Propriétés d'une frise associée à  $\mathcal{G}_1$

- Elle n'a pas de centre de symétrie
- Elle n'a aucun axe de symétrie
- Il n'existe pas de symétrie glissée la laissant invariante.

$$\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$$



Les seules isométries directes autres que les translations sont les rotations. Essayons de construire un groupe de frise contenant une rotation.

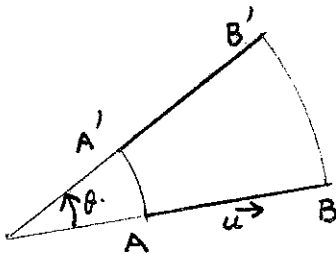
Proposition. Si une rotation conserve une frise de vecteur  $\vec{u}$ , alors c'est une symétrie centrale. (ou l'identité).

Démonstration : Soit  $\rho$  une rotation conservant une frise  $F$  de vecteur  $\vec{u}$ .

$$\rho \circ t_{\vec{u}} \circ \rho^{-1} = \vec{\rho} \circ \text{Id} \circ \rho^{-1} = \text{Id}.$$

donc  $\rho \circ t_{\vec{u}} \circ \rho^{-1}$  (composée de 3 isométries conservant  $F$ ) est une translation.  $t_{\vec{v}}$  conservant  $F$ .

Or les seules translations ayant cette propriété sont les translations  $t_{n\vec{u}}$  donc  $t_{\vec{v}} = t_{n\vec{u}}$  et  $\vec{v} = n\vec{u}$  (1)



$$\text{Soit } \vec{AB} = \vec{u} \text{ et } \rho(A) = A', \\ \rho(B) = B'$$

$$B = A + \vec{u} \text{ donc } B' = \rho(B) = \rho(A) + \vec{\rho}(\vec{u})$$

$$\vec{A'B'} = B' - A' = \rho(B) - \rho(A) = \vec{\rho}(\vec{u}) \quad (2)$$

On a donc finalement

$$\rho \circ t_{\vec{u}} \circ \rho^{-1}(A') = t_{\vec{v}}(A')$$

$$\rho \circ t_{\vec{u}}(A) = t_{\vec{v}}(A')$$

$$\rho(B) = t_{\vec{v}}(A')$$

$$B' = t_{\vec{v}}(A') \text{ d'où } \vec{A'B'} = \vec{v} \text{ et}$$

$$\text{d'après (1) et (2)} \quad \vec{v} = n\vec{u} = \vec{\rho}(\vec{u}) \quad (3)$$

Comme  $\vec{\rho}$  est une isométrie

$$\|\vec{\rho}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \text{ et d'après (3) } \|\vec{\rho}(\vec{u})\| = |n| \|\vec{u}\|$$

donc  $|n| = 1$ .

Si  $n = 1$   $\vec{p}(\vec{u}) = \vec{u}$  donc  $\vec{p} = \text{Id}$  et

$p$  est une translation; mais comme  $p$  est aussi une rotation c'est l'identité.

Si  $n = -1$   $\vec{p}(\vec{u}) = -\vec{u}$  d'où  $\vec{p} = -\text{Id}$

$p$  est donc une symétrie centrale

B

Proposition 2 Soit  $\mathcal{F}$  un groupe de fixe de vecteur  $\vec{u}$  contenant une symétrie centrale  $\sigma_A$ . Soit  $A_1$  le translaté de  $A$  par  $\tau = t_{\vec{u}}$  et  $M$  le milieu de  $[AA_1]$  alors  $\mathcal{F}$  contient la symétrie centrale  $\sigma_M$ .

Démonstration Soit  $\varphi = \tau \circ \sigma_A$  alors  $\vec{\varphi} = \text{Id} \circ (-\text{Id}) = -\text{Id}$   
donc  $\varphi$  est une symétrie centrale (appartenant à  $\mathcal{F}$ )

Calculons  $\tau \circ \sigma_A(M) = \tau(\sigma_A(M))$

$$= \tau\left(\sigma_A(A) + \vec{\sigma_A(AA_1)}\right)$$

$$= \tau\left(A + \frac{\vec{AA_1}}{2}\right)$$

$$\underline{\tau \circ \sigma_A(M)} = \tau(A) + \text{Id}\left(\frac{\vec{AA_1}}{2}\right) = A_1 + \frac{\vec{A_1A}}{2} = \underline{M}$$

$M$  est le point fixe de la symétrie centrale  $\tau \circ \sigma_A$  qui appartient à  $\mathcal{F}$ .

$\mathcal{F}$  contient  $\sigma_M$ .

Proposition 3. Si  $\mathcal{F}$  est un groupe de fixe de vecteur  $\vec{u}$  contenant une symétrie centrale  $\sigma_A$  (et donc aussi la symétrie  $\sigma_M$ : cf. prop. 2) alors il contient aussi les symétries centrales de centres  $\tau^i(A)$  et  $\tau^i(M)$

Démonstration

On applique la première partie du théorème II-1 de la page 3. B

$A$  et  $M$  étant centres de symétrie de l'ensemble de points  $F$ , et  $\tau^i$  étant des isométries laissant  $F$  invariante, alors les points  $\tau^i(A)$  et  $\tau^i(M)$  sont centres de symétrie de la figure.

PROPOSITION 4 Si  $\mathcal{F}$  est un groupe de figs de vecteur  $\vec{u}$  contenant les symétries centrales définies ci-dessus, alors ce sont les seules.

Démonstration Soit  $P$  le centre d'une symétrie centrale appartenant à  $\mathcal{F}$ .

$\sigma_P \circ \sigma_A$  est un élément de  $\mathcal{F}$ . ( $\mathcal{F}$  est un groupe)

La composée de deux symétries centrales étant une translation et les translations de  $\mathcal{F}$  transformant  $A$  en  $A_n$ , on a donc:

$$\sigma_P \circ \sigma_A(A) = A_n \text{ donc } \sigma_P(A) = A_n$$

et donc  $P$  est le milieu de  $[A A_n]$

Les milieux des segments  $[A A_n]$  sont des  $A_i$  ou des  $M_i$  (cf. page 4)

$\mathcal{F}$  contient donc les seules symétries centrales de centres  $A_i$  et  $M_i$

CONSTRUCTION DU GROUPE  $\mathcal{F}_2$ 

Soit  $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$

On a vu précédemment que  $\tau \circ \sigma_A = \sigma_M$  ; elle est donc involutive ce qui entraîne :

$$\underline{\tau \circ \sigma_A = (\tau \circ \sigma_A)^{-1} = \sigma_A^{-1} \circ \tau^{-1} = \sigma_A \circ \tau^{-1}}$$

Toute chaîne de type  $\tau^i \circ \sigma_A^j \circ \tau^{i'} \circ \sigma_A^{j'} \circ \tau^{i''} \dots$  ou  
 $\sigma_A^k \circ \tau^i \circ \sigma_A^l \circ \tau^{i'} \dots$

pourra donc s'écrire sous la forme  $\underline{\sigma_A^j \circ \tau^i}$   
 et  $j \in \{0, 1\}$ .

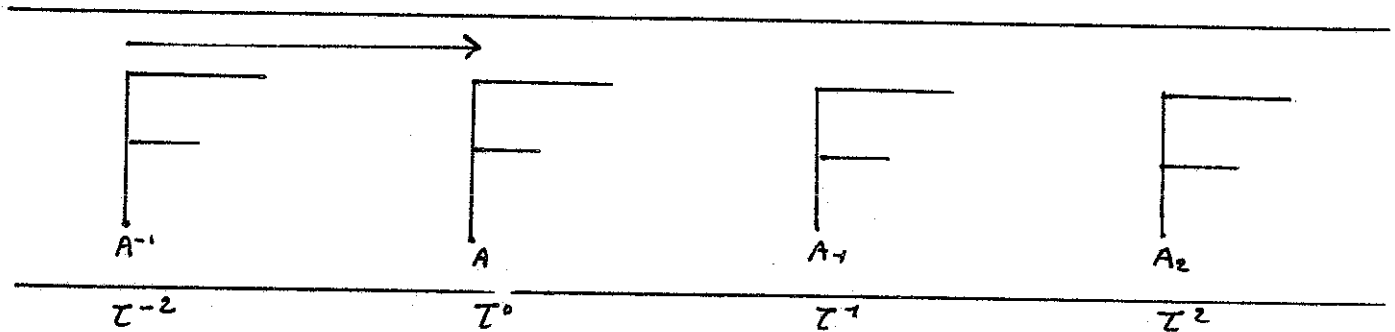
La composée d'une translation et d'une symétrie  $\sigma_A$  étant une symétrie  $\sigma_M$ , le groupe  $\mathcal{F}_2$  peut être engendré par  $\sigma_A$  et  $\sigma_M$ .

$$\text{d'où } \underline{\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle}$$

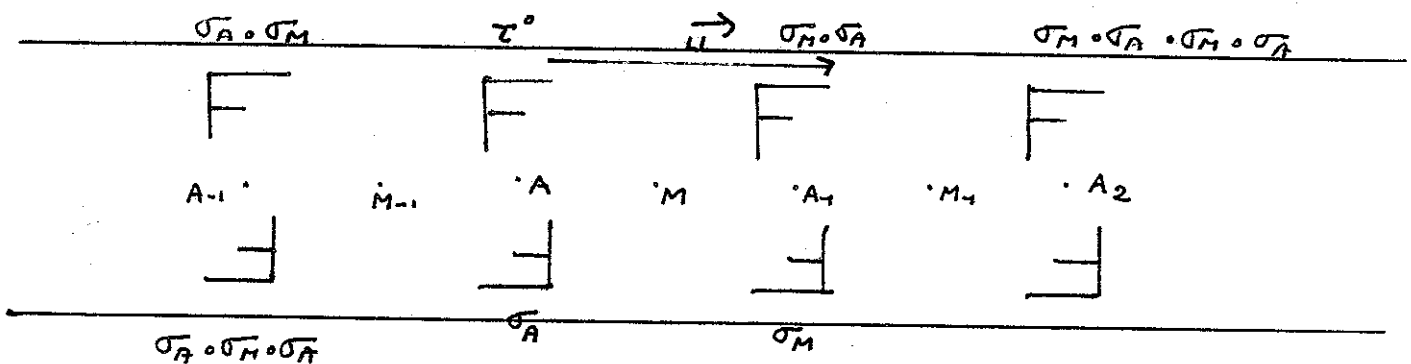
Propriétés d'une frise associée à  $\mathcal{F}_2$ 

- Elle a des centres de symétrie
- Elle n'a pas d'axe de symétrie  
 (les éléments du groupe ne permettent pas de générer des réflexions).
- Il n'existe pas de symétrie glissée la laissant invariante.

ILLUSTRATIONS. Frise associée à  $\mathcal{F}_1$

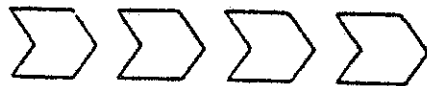


Frise associée à  $\mathcal{F}_2$





$$\underline{\mathcal{F}_1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle}$$



Les seules isométries directes du plan étant les translations et les rotations, si un groupe de frise  $\mathcal{F}$  ne contient que des isométries directes ce ne peut être que  $\mathcal{F}_1$  ou  $\mathcal{F}_2$ .

Pour obtenir d'autres groupes de frise (rappel: il n'y a pas de groupe d'isométries indirectes) nous allons enrichir les deux groupes  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  avec des isométries indirectes.

Considérons d'abord l'adjonction de symétries orthogonales.

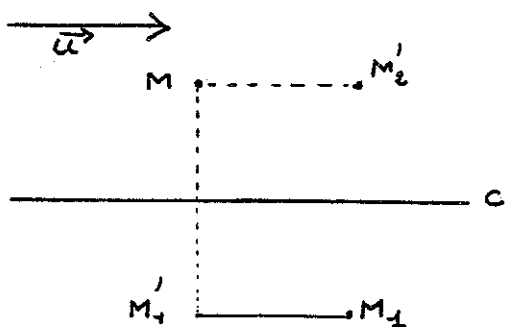
Remarquons tout d'abord que si on appelle " $c$ " une droite <sup>\*</sup>perpendiculaire dirigée par  $\vec{u}$  (vecteur de la frise), cette droite est invariante et transformée que les symétries orthogonales conservant " $c$ " sont les symétries d'axe " $c$ " ou d'axe " $\ell$ " avec  $\ell \perp c$ .

Soit  $\mathcal{F}_1' = \langle \tau, \sigma_c \rangle$  " $c$ " droite dirigée par  $\vec{u}$ .  
 $\sigma_c$ : symétrie d'axe  $c$

Remarque:  $\tau \circ \sigma_c$  est une symétrie glissée d'axe " $c$ " et de vecteur  $\vec{u}$  et on a

$$\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau$$

Démonstration



Soit  $M_1 = \tau \circ \sigma_c(M)$  et  $M_1' = \sigma_c(M)$

Soit  $M_2'$  le point tel que

$$\vec{MM_2'} = \vec{u}$$

Puisque  $M_1'M_1 = \vec{u}$ , le quadrilatère  $MM_2'M_1M_1'$  est un parallélogramme et  $c$  qui est parallèle à  $(MM_2')$  et  $(M_1'M_1)$  est axe de symétrie de ce parallélogramme, puisque  $M_1' = \sigma_c(M)$ .

Les points  $M_2'$  et  $M_1$  sont donc symétriques par rapport à " $c$ " et  $M_1 = \sigma_c(M_2') = \sigma_c(\tau(M)) = \sigma_c \circ \tau(M)$

On a bien.

$$\underline{\tau \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \tau}$$

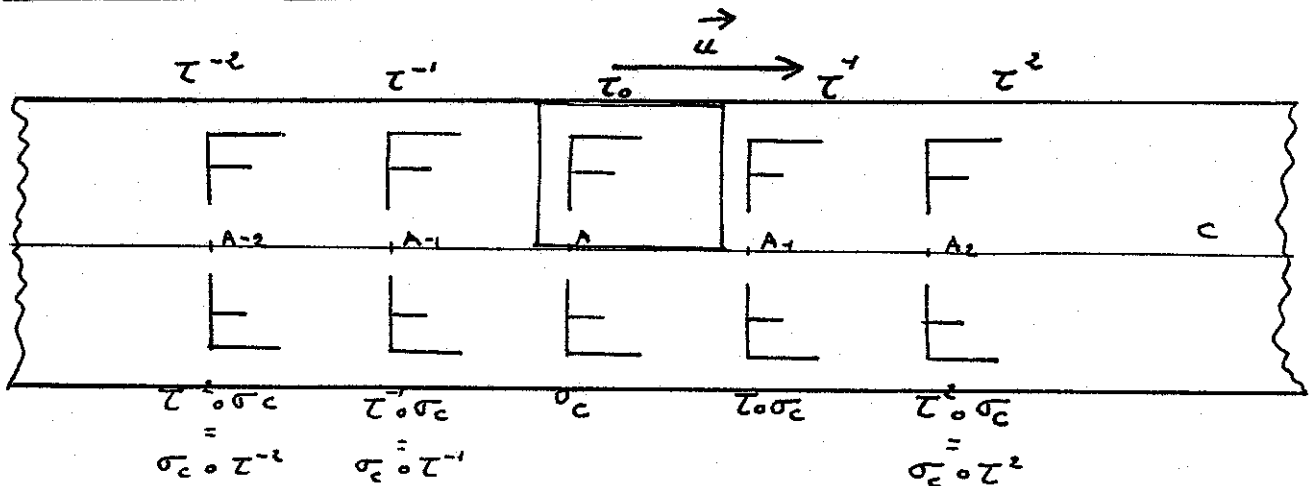
Le groupe  $\mathcal{F}_4^+$  constitué de translations, de la symétrie d'axe  $c$ , de symétries glissées est, d'après ce qui précède, commutatif.

Chaque élément de ce groupe peut s'écrire  $\sigma_c^j \circ \tau^i$   $j \in \{0, 1\}$

### Propriétés d'une frise associée à $\mathcal{F}_4^+$

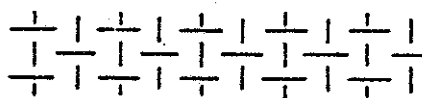
- Elle n'a pas de centre de symétrie.
- "c" droite dirigée par  $\vec{u}$  vecteur de la frise est axe de symétrie.
- Il existe des symétries glissées qui la laissent invariante.  
(en effet  $A_n$  peut être considéré comme l'image de  $A$  dans la symétrie glissée  $\sigma_c \circ \tau^n$ )

### Illustration. Frise associée à $\mathcal{F}_4^+$



Ce qui est encadré permet certes de construire la frise, mais ce n'est pas le "motif" (cf la définition que nous donnons)

$$\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$$

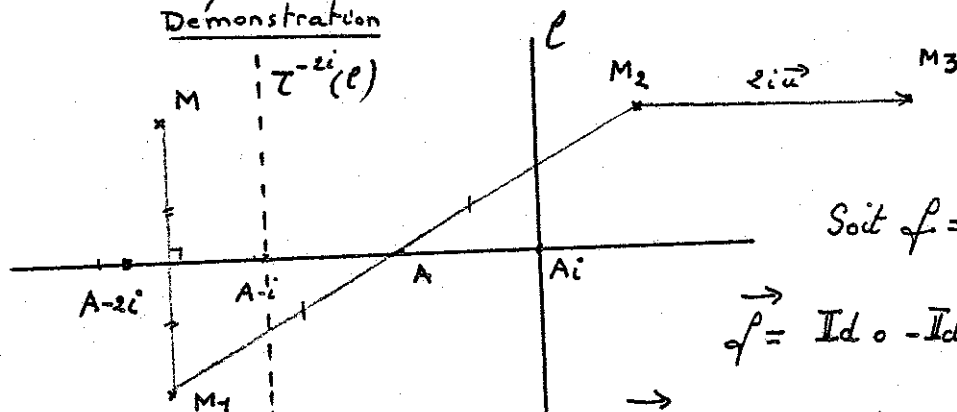


Considérons le groupe engendré par les éléments de  $\mathcal{F}_2$  et la symétrie axiale d'axe  $c$  ( $c$  étant une droite dirigée par  $\vec{u}$ )

Remarquons que  $\sigma_c$  commute à la fois avec  $\tau$  et  $\sigma_A$  et  $\text{je} \{0,1\}$   
 que donc les éléments de  $\mathcal{F}_2^1$  sont de la forme  $\sigma_c^k \circ \sigma_A^j \circ \tau^i$   
 Le sous groupe de translations de  $\mathcal{F}_2^1$  est le même que celui de  $\mathcal{F}_2$ ; l'adjonction de  $\sigma_c$  et des composés qui s'en déduisent n'ajoute pas de translations supplémentaires.

$\mathcal{F}_2^1$  contient les symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à  $c$  et passant par  $\tau^i(A)$

Démonstration



$$\text{Soit } f = \tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$$

$$\vec{f} = \text{Id} \circ -\text{Id} \circ \vec{\sigma} = -\vec{\sigma}$$

$\vec{f}$  est une symétrie vectorielle.  $\sigma$  étant une symétrie d'axe  $c$ ,  $\vec{\sigma}$  est une symétrie vectorielle par rapport à  $\{h\vec{u}\}$  et  $-\vec{\sigma}$  est une symétrie vectorielle par rapport à  $\{h\vec{u}\}^\perp$ .

$f$  est une symétrie orthogonale par rapport à une droite perpendiculaire à  $c$ . À condition qu'elle admette au moins un point invariant.

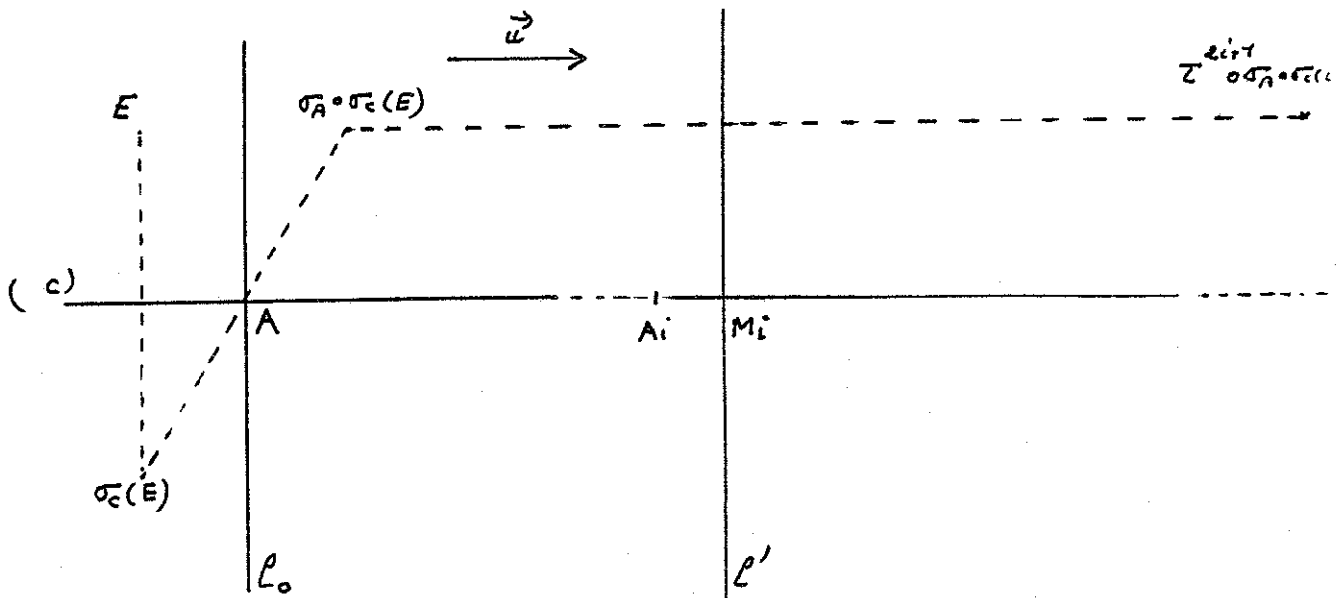
Soit  $l$  la droite perpendiculaire à  $c$  passant par  $\tau^i(A) = A_i$

$$f(l) = \tau^{2i} \circ \sigma_A \circ \sigma_c(l) = \tau^{2i} \circ \sigma_A(l) = \tau^{2i}(\tau^{-2i}(l)) = l.$$

car l'image de  $l$  dans  $\sigma_A$  est une droite parallèle à  $l$ .

(\*)  $f$  est donc la symétrie orthogonale d'axe perpendiculaire à  $c$  passant par  $\tau^i(A)$ .

$\mathcal{G}_2'$  contient les symétries orthogonales d'axes perpendiculaires à  $\vec{c}$  et passant par  $T^i(M)$  avec  $M$  milieu de  $[A, T(A)]$



Soit  $f' = T^{2i+1} \circ \sigma_A \circ \sigma_c$ . C'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite perpendiculaire à  $\vec{c}$  (démonstration analogue à la précédente et il faut toujours qu'elle admette au moins un point invariant - cf remarque de la p. 13).

Soit  $l_0$  la droite perpendiculaire à  $\vec{c}$  passant par A et soit  $l' = T^{\frac{2i+1}{2}} \vec{u}(l_0)$  c'est à dire la droite perpendiculaire à  $\vec{c}$  passant par  $M_i$

$$\begin{aligned} f'(l) &= T^{2i+1} \circ \sigma_A \circ \sigma_c(l') = T^{2i+1} \circ \sigma_A(l') = T^{\frac{2i+1}{2}} \vec{u} \circ T^{-\frac{2i+1}{2}} \vec{u}(l) \\ &= T^{\frac{2i+1}{2}} \vec{u}(l) = l' \end{aligned}$$

$l$  est invariante par  $f'$ .

$f'$  est la symétrie orthogonale d'axe perpendiculaire à  $\vec{c}$  passant par  $M_i$

Une remarque -

Si on appelle "a" la droite perpendiculaire à "c" passant par A, alors

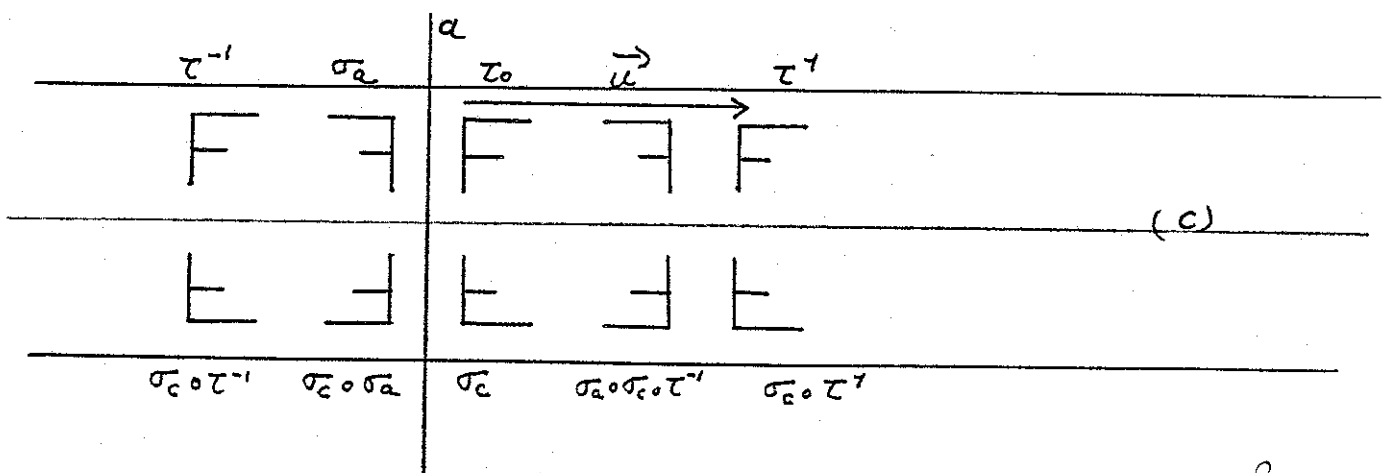
$\sigma_A = \sigma_a \circ \sigma_c$  et le groupe  $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$  peut être considéré comme engendré par  $\tau, \sigma_a$  et  $\sigma_c$

$$\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle = \langle \tau, \sigma_a, \sigma_c \rangle$$

Propriétés d'une frise associée au groupe  $\mathcal{F}_2^1$

- Elle a des centres de symétrie
- Elle possède deux types d'axes de symétrie
  - 1- un axe "c" (c dirigée par  $\vec{u}$ )
  - 2- des axes  $a_i$  et  $m_i$  perpendiculaires à c
- Il existe des symétries glissées la laissant invariante (ce sont les  $\sigma_c \circ \tau^i$ )

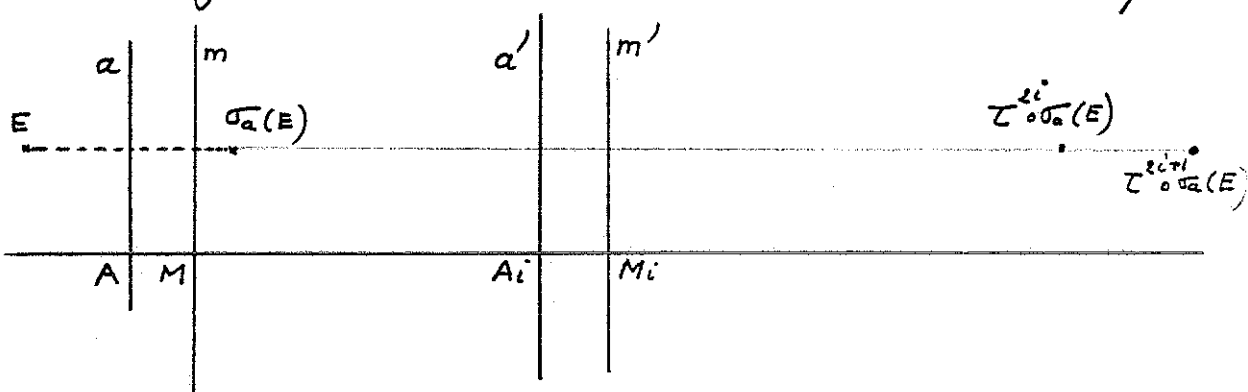
Illustration : Frise associée à  $\mathcal{F}_2^1$



$$\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$$



Considérons un groupe de frise  $\mathcal{F}$  contenant les translations  $\tau^i$  et une symétrie axiale ( $\sigma_a$  avec  $a \perp C$ ) et ne contenant pas de symétrie centrale (ce qui reviendrait à enrichir  $\mathcal{F}_2$ )



① Le groupe contient les symétries axiales d'axes  $a_i$  ( $a_i = \tau^i(a)$ )

On applique la deuxième partie du théorème II-1 de la page 3.

"a" est un axe de symétrie de la frise F,  $\tau^i$  est une isométrie laissant F invariante donc  $\tau^i(a)$  est un axe de symétrie de la frise.

② Le groupe contient les symétries axiales d'axes  $m_i$  ( $m_i = \tau^i(m)$ ) et m est la médiatrice de  $[AA_1]$

Démontrons que  $\sigma_m$  appartient à  $\mathcal{F}$

$\tau \circ \sigma_a$  appartient au groupe et  $\overrightarrow{\tau \circ \sigma_a} = \text{Id} \circ \overrightarrow{\sigma_a} = \overrightarrow{\sigma_a}$   
donc  $\tau \circ \sigma_a$  est une symétrie axiale. ] Toujours la même  
fente.  
Cherchons l'axe de cette symétrie.

Soit m la médiatrice de  $[AA_1] = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(a)$

$$t_{\vec{u}} \circ \sigma_a(m) = t_{\vec{u}} \circ t_{-\frac{\vec{u}}{2}}(a) = t_{\frac{\vec{u}}{2}}(a) = m.$$

$\tau \circ \sigma_a$  est la symétrie  $\sigma_m$ . ici aussi -

En appliquant de la même façon que précédemment le théorème II-1 page 3 on déduit que le groupe contient les symétries axiales d'axe  $m_i$  ( $m_i \perp C$ )

③ Démontrons que le groupe ne contient pas d'autres symétries axiales.

Supposons que  $\mathcal{F}$  contienne une réflexion  $\sigma_\ell$

- $\ell \neq c$  car  $\sigma_\ell \circ \sigma_a$  serait une symétrie centrale or le groupe n'en contient pas.
- Si  $\ell \perp c$  alors  $\sigma_\ell \circ \sigma_a$  est une translation et comme toute translation de  $\mathcal{F}$  elle doit transformer  $A$  en un  $A_n$ .  
 $\sigma_\ell \circ \sigma_a(A) = A_n \Rightarrow \sigma_\ell(A) = A_n$  et donc  $\ell$  est perpendiculaire à  $c$  en  $A_n$  et donc  $\ell = a_n$ .  
 et  $\sigma_\ell$  est une des symétries étudiées précédemment.
- On a vu page 11 qu'il ne pouvait y avoir d'autres axes de symétrie que  $c$  ou des droites perpendiculaires à  $c$ .

Remarques sur les éléments du groupe

$$(\tau \circ \sigma_a)^{-1} = \sigma_a^{-1} \circ \tau^{-1} = \sigma_a \tau^{-1}$$

Or  $\tau \circ \sigma_a$  est une réflexion, donc involutive donc égale à sa réciproque

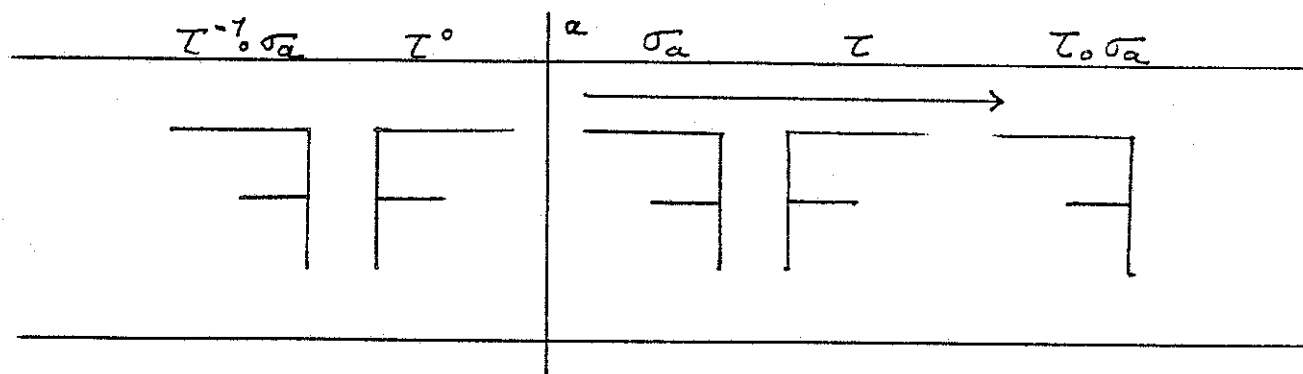
$$\tau \circ \sigma_a = (\tau \circ \sigma_a)^{-1} = \sigma_a \tau^{-1}.$$

Chaque élément du groupe  $\mathcal{F}_4^2$  pourra donc s'écrire sous la forme  $\sigma_a \tau^j$   
 $j \in \{0, 1\}$ .

### Propriétés d'une frise associée au groupe $\mathcal{F}_4^2$

- Elle n'a pas de centre de symétrie
- Elle n'a pas d'axe de symétrie dirigé par  $\vec{u}$
- Elle a des axes de symétrie orthogonaux à  $\vec{u}$ .

### Illustration. Frise associée au groupe $\mathcal{F}_4^2$





$$\underline{F_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_P \rangle}$$



Considérons un groupe contenant les translations  $\tau^i$ , une symétrie centrale  $\sigma_A$  et une réflexion d'axe  $q$ .

Si  $q = c$  ou  $q \perp c$  en  $A_i$  ou  $M_i$  alors c'est le groupe  $F_2^1$  déjà étudié.

Pour obtenir un groupe nouveau nous supposons  $q$  orthogonal à " $c$ " et ne passant ni par  $A_i$  ni par  $M_i$ .

\* Si un tel groupe existe,  $q$  est médiatrice de  $[A M_i]$

Démonstration

$A$  étant centre de symétrie de la figure et  $\sigma_q$  une isométrie laissant la figure invariante alors d'après le théorème II-1 page 3,  $\sigma_q(A)$  est centre de symétrie de  $F$ .

Or, d'après l'étude du groupe  $F_2^1$ , tout centre de symétrie ne peut être qu'un  $A_i$  ou un  $M_i$ .

Si  $\sigma_q(A) = A_i$  alors  $q$  passe par un  $A_j$  ou  $M_k$  ce qui est contraire aux données.

Si  $\sigma_q(A) = M_i$  alors  $q$  est médiatrice de  $[A M_i]$

L'application du théorème II-1 page 3 avec  $q$  et les  $\sigma_{A_i}$  montre que  $F$  contient les symétries ayant pour axes les médiatrices de  $[A M_i]$  pour tout  $i$ .

En effet, on a montré que pour un certain indice  $i$ , la médiatrice de  $[A M_i]$  est axe de symétrie, et donc pour tout  $j$ ,  $\sigma_{A_j}(q) = q'$  est aussi axe de symétrie.

$q'$  est médiatrice de  $\sigma_{A_j}[A M_i] = [A_{2j}, M_{2j-i-1}]$

$q'$  est donc médiatrice de  $[A, M_{2j-i-1}]$  pour tout  $j$ .

En particulier  $\mathcal{F}$  contient  $\sigma_p$  avec  $p$  médiatrice de  $[AM]$

Il ne peut contenir  $\sigma_a$  (avec  $a \perp c$  en  $A$ )

En effet  $\sigma_p \circ \sigma_a$  est une translation et  $\sigma_p \circ \sigma_a(A) = \sigma_p(A) = M$ .  
Cela est impossible car toute translation d'un groupe de  
Fise transforme  $A$  en un  $A_i$ .

Il ne peut contenir  $\sigma_c$

En effet  $\sigma_p \circ \sigma_c \circ \sigma_A = \sigma_p \circ \sigma_a$  et  $\sigma_p \circ \sigma_a$  n'appartient pas au groupe (cf. dessus).

Nous avons considéré toutes les possibilités d'enrichissement de  $\mathcal{F}_2$  par des symétries axiales.

Notre nouveau et dernier groupe construit à partir de  $\mathcal{F}_2$  est donc.

$$\underline{\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_p \rangle} \quad \begin{array}{l} p \text{ étant la} \\ \text{médiatrice} \\ \text{de } [AM] \end{array}$$

Remarques.

$$\overrightarrow{\sigma_p \circ \sigma_A} = \overrightarrow{\sigma_p} \circ -\text{Id} = -\overrightarrow{\sigma_p} \text{ donc}$$

$\sigma_p \circ \sigma_A$  est une symétrie axiale d'axe  $c$  ou une symétrie glissée d'axe  $c$ . ) Oui

$\sigma_c$  n'étant pas dans le groupe, c'est donc une symétrie glissée qui transforme  $A$  en  $M$  car

$$\overrightarrow{\sigma_p \circ \sigma_A}(A) = \overrightarrow{\sigma_p}(A) = M.$$

$\overrightarrow{AM}$  étant égal à  $\frac{\overrightarrow{u}}{2}$ , c'est la symétrie glissée  $\gamma$  d'axe  $c$  et de vecteur  $\frac{\overrightarrow{u}}{2}$ . et on a  $\gamma^2 = t_{\overrightarrow{u}} = \tau$

21.

$$\sigma_P \circ \sigma_A = \gamma$$

$$\sigma_P \circ \sigma_A \circ \sigma_A = \gamma \circ \sigma_A$$

$$\underline{\sigma_P = \gamma \circ \sigma_A.}$$

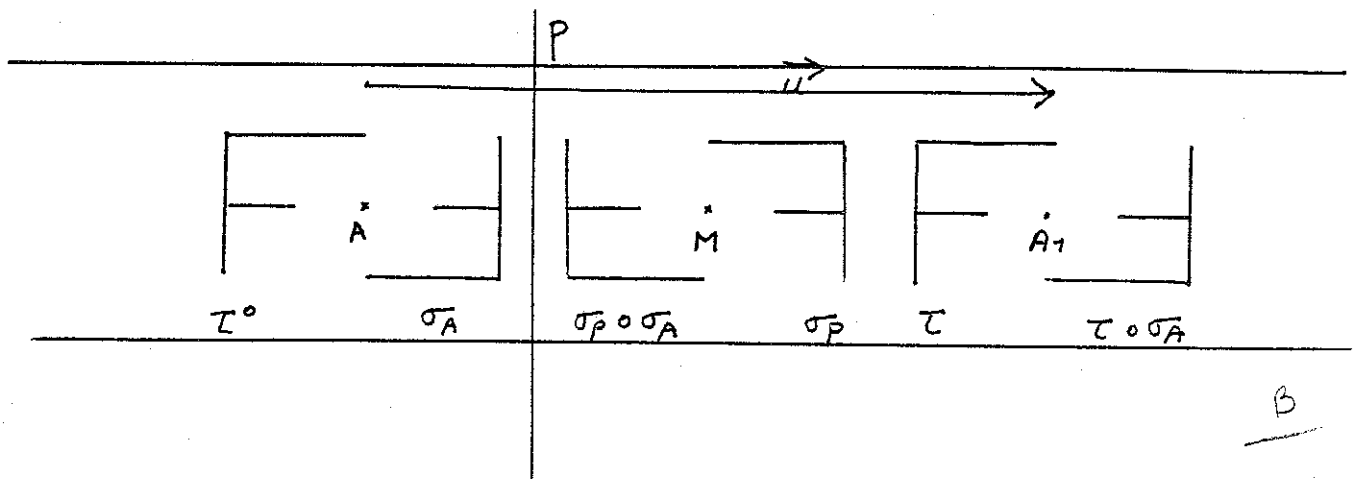
Le groupe  $\mathcal{F}_2^2$  peut donc être engendré par  $\gamma$  et  $\sigma_A$  avec  $\gamma$  tel que  $\gamma^2 = \tau$ .

$$\underline{\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_P \rangle = \langle \gamma, \sigma_A \rangle}$$

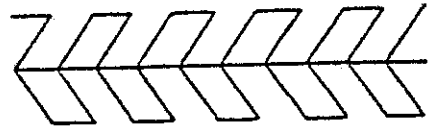
Propriétés d'une frise associée au groupe  $\mathcal{F}_2^2$

- Elle a des centres de symétrie
- Elle n'a pas d'axe de symétrie dirigé par  $\vec{u}$ .
- Elle a des axes de symétrie perpendiculaires à  $\vec{c}$
- Il existe des symétries glissées qui la conservent.

Illustration: Frise associée au groupe  $\mathcal{F}_2^2$



$$\underline{\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle \quad \gamma^2 = \tau}$$



Soit  $\mathcal{F}$  un groupe de fûse contenant une symétrie glissée  $\alpha$ .

$\alpha$  doit conserver "c". Elle est d'axe c et  $\alpha^2$  est une translation.

① Supposons que  $\alpha^2 = \tau^{2n} = t(n\vec{u})$  ( $\vec{u}$  vecteur de la fûse)

$\alpha^2 \cdot \tau^{-2n} = \text{Id}$  et comme translation et symétrie glissée de vecteurs colinéaires commutent on a:

$$(\alpha \cdot \tau^{-n})^2 = \text{Id}.$$

$\alpha \cdot \tau^{-n}$  composée d'une isométrie indirecte et d'une isométrie directe est indirecte. C'est donc une réflexion ou une symétrie glissée. Comme d'autre part son carré est égal à  $\text{Id}$ , elle est involutive c'est donc une réflexion d'axe c. P.

$$\alpha \cdot \tau^{-n} = \sigma_c \Rightarrow \alpha = \sigma_c \cdot \tau^n$$

$\mathcal{F}$  contient alors  $\sigma_c$  et  $\sigma_c \cdot \tau^m$  pour tout m

- S'il n'y a pas de symétrie centrale c'est  $\mathcal{F}_4^7$
- S'il y'a des symétries centrales c'est  $\mathcal{F}_2^7$ .

② Supposons  $\alpha^2 = \tau^{2n+1}$  alors.

$\tau^{-2n} \cdot \alpha^2 = \tau$  et par commutativité l'on vient.

$$(\tau^{-n} \cdot \alpha)^2 = \tau.$$

Posons  $\gamma = \tau^{-n} \cdot \alpha$ . C'est une isométrie indirecte donc une réflexion ou une symétrie glissée. Son carré est  $\tau \neq \text{Id}$ . C'est une symétrie glissée d'axe c.

$\gamma^2 = \tau$  transforme A en A+1 donc  $\gamma$  transforme A en M

23.

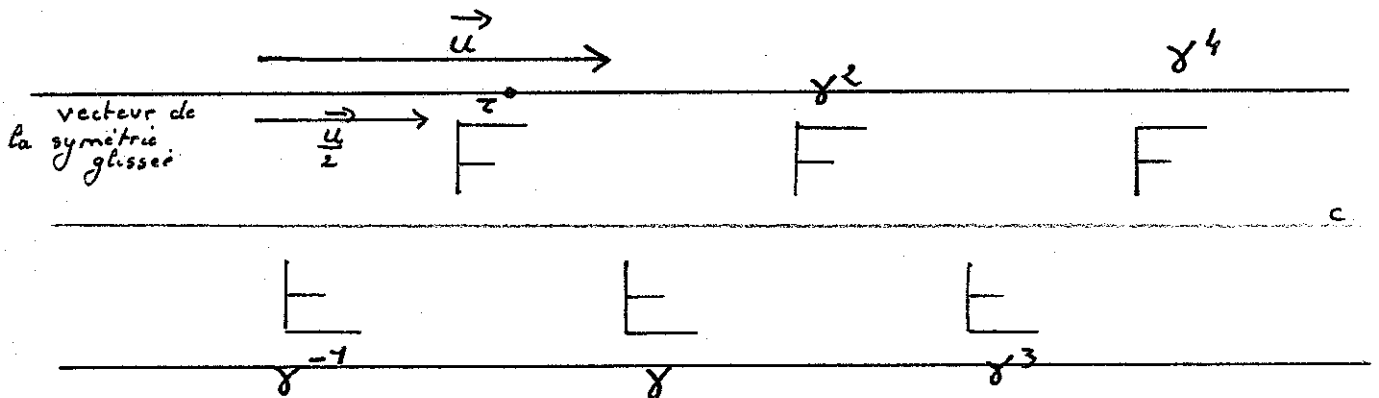
Considérons le groupe  $F_4^3$  <sup>associé (ou dérivé)</sup> généré par  $\gamma$   
symétrie glissée d'axe  $c$ . Posons.  $\gamma^2 = \tau$ .

$F_4^3$  est un groupe de frise. Il contient des symétries glissées et des translations.  $\gamma^{2m}$ . Ces translations conservent bien la frise par construction du groupe.

Propriétés d'une frise associée à  $F_4^3$

- Elle n'a pas de centre de symétrie.
- Elle n'a pas d'axe de symétrie.
- Elle n'est invariante que par symétries glissées (et translations comme toutes les autres).

Illustration. Frise associée à  $F_4^3$ .



CONCLUSION

- ① Si on enrichit  $\mathcal{F}_2$  d'une symétrie d'axe " $c$ ", alors des symétries d'axes perpendiculaires à " $c$ " et des symétries glissées sont automatiquement générées d'où le groupe  $\mathcal{F}_2^1$

Si on enrichit  $\mathcal{F}_2$  d'une symétrie d'axe " $l$ " ( $l \perp c$ ), alors des symétries glissées se trouvent générées d'où le groupe  $\mathcal{F}_2^2$ .

Enfin, l'adjonction d'une symétrie glissée à  $\mathcal{F}_2$  conduit à l'existence de symétries axiales (par composition de symétries centrales et symétries glissées) ce qui redonne  $\mathcal{F}_2^2$

Toutes les possibilités avec  $\mathcal{F}_2$  ont été explorées.

- ②  $\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\sigma_c$  amène au groupe  $\mathcal{F}_4^1$   
 $\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\sigma_l$  amène au groupe  $\mathcal{F}_4^2$   
 $\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\gamma$  ( $\gamma^2 = \tau$ ) amène au groupe  $\mathcal{F}_4^3$

$\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\sigma_l$  et  $\sigma_c$  conduit à l'existence de symétries centrales : on retombe sur les groupes  $\mathcal{F}_2^1$  au  $\mathcal{F}_2^2$ .

$\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\gamma$  et  $\sigma_c$  donne  $\mathcal{F}_4^1$ .

La seule possibilité restante est  $\mathcal{F}_4$  augmenté de  $\sigma_l$  et  $\gamma$

Soit  $\mathcal{F}_4 = \langle \tau, \gamma, \sigma_l \rangle$  avec  $\gamma^2 = \tau$  et  $(l \perp c)$

$$\sigma_l \circ \gamma = (\sigma_l \circ \sigma_c) \circ t_{\frac{u}{2}} = \sigma_{\text{AouM}} \circ t_{\frac{u}{2}} = \sigma_{\text{AouM}}$$

$\mathcal{F}_4$  contient une symétrie centrale au moins, c'est donc  $\mathcal{F}_2^2$ .

Tous les possibilités ont été étudiées - Il n'y a donc que sept groupes de frises.

Résumons les propriétés des différents groupes.

|         | Il existe une symétrie centrale. | Il existe une symétrie axiale d'axe $c$ | Il existe une symétrie d'axe $a$ perpendiculaire à $c$ | Il existe une symétrie glissée |
|---------|----------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $F_1$   | non                              | non                                     | non                                                    | non                            |
| $F_1^1$ | non                              | oui                                     | non                                                    | oui                            |
| $F_1^2$ | non                              | non                                     | oui                                                    | non                            |
| $F_1^3$ | non                              | non                                     | non                                                    | oui                            |
| $F_2$   | oui                              | non                                     | non                                                    | non                            |
| $F_2^1$ | oui                              | oui                                     | oui                                                    | oui                            |
| $F_2^2$ | oui                              | non                                     | oui                                                    | oui                            |

C'est sur ce résumé qu'est basée la méthode de recherche suivante "Four question key" (Recherche en 4 questions du document)

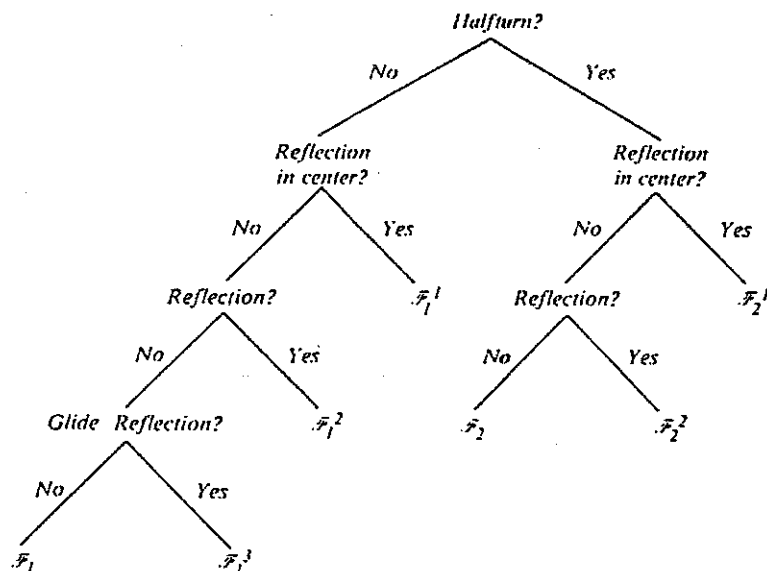


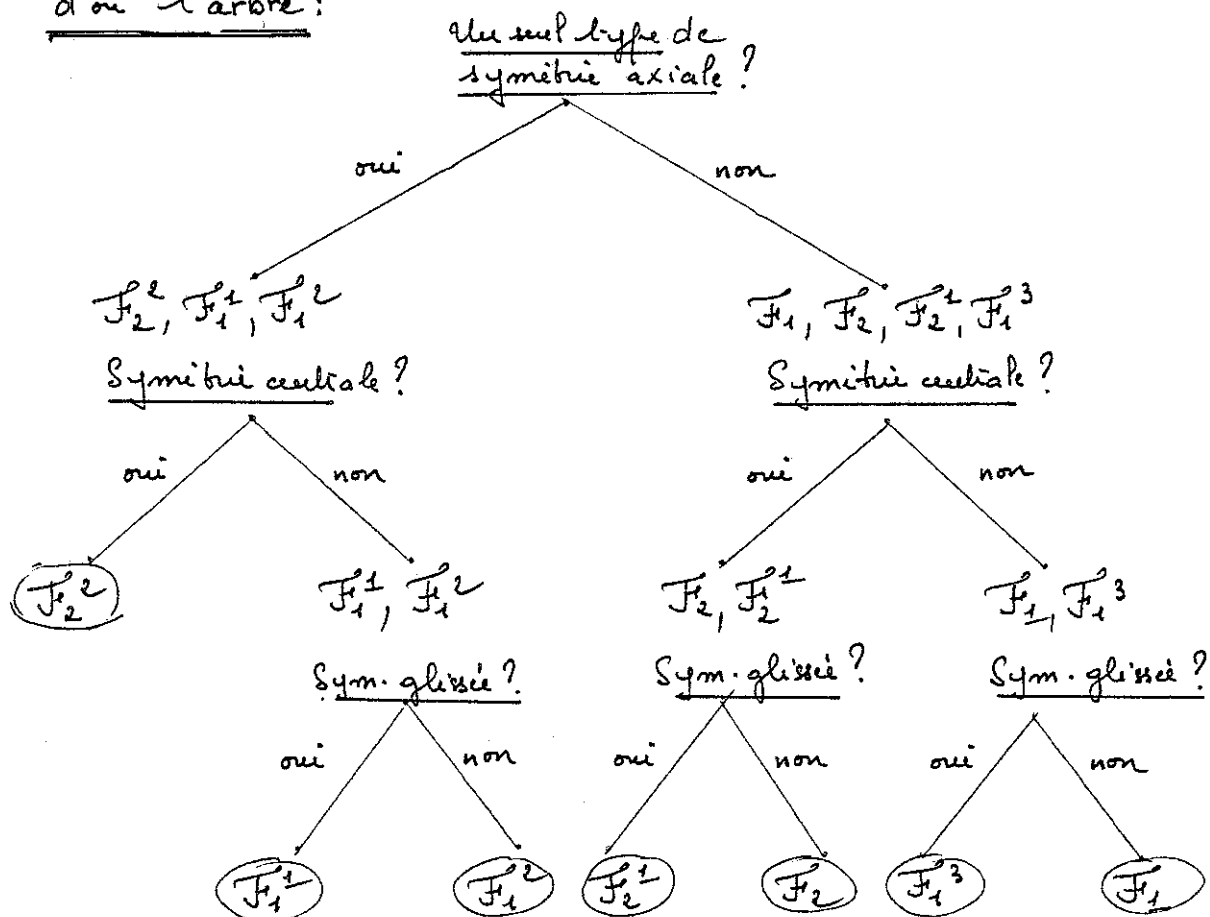
Figure 10.11

Remarque: Il n'y a que sept groupes, trois questions doivent donc suffire pour déterminer le groupe associé à une frise (en effet  $7 < 2^3$ )

Ex: 10.7 "Three question Key" Nouveau tableau.

|         | Il existe un seul type de symétrie axiale d'axe $c$ ou $a$ (a.l.c.) | Il existe une symétrie centrale | Il existe une symétrie glissée. |
|---------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $F_1$   | non                                                                 | non                             | non                             |
| $F_1^1$ | oui                                                                 | non                             | oui                             |
| $F_1^2$ | oui                                                                 | non                             | non                             |
| $F_1^3$ | non                                                                 | non                             | oui                             |
| $F_2$   | non                                                                 | oui                             | non                             |
| $F_2^1$ | non                                                                 | oui                             | oui                             |
| $F_2^2$ | oui                                                                 | oui                             | oui                             |

d'où l'arbre:

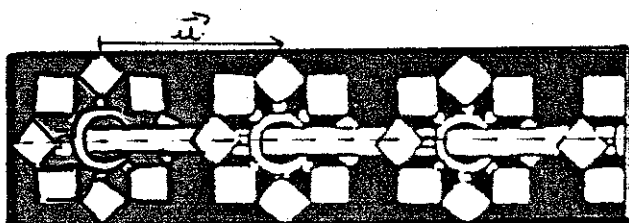
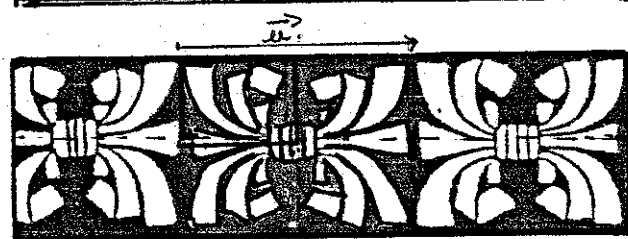
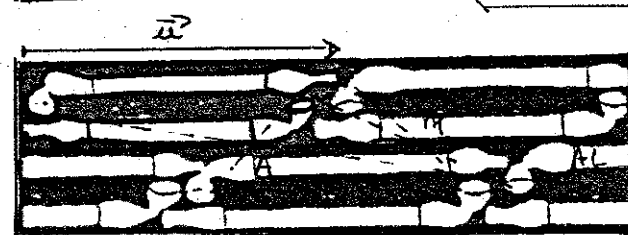
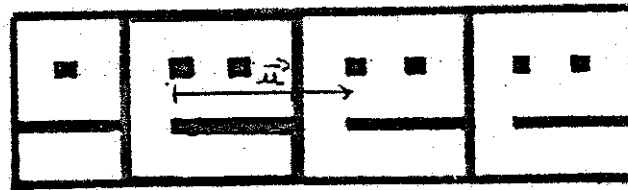
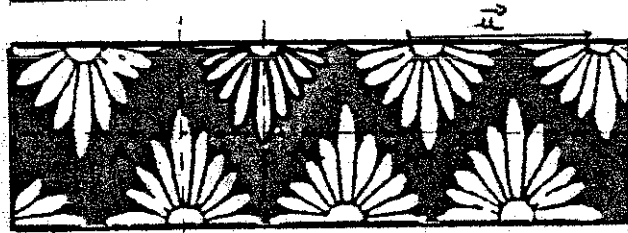
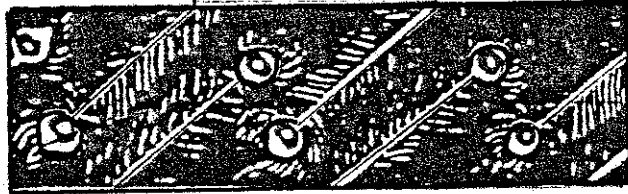




Ex. 10.18. Questions à se poser.

- ① existe-t-il un et un seul type de symétrie axiale ?
- ② existe-t-il une symétrie centrale ?
- ③ existe-t-il une symétrie glissée ?

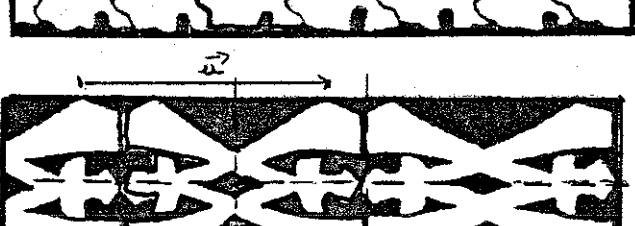
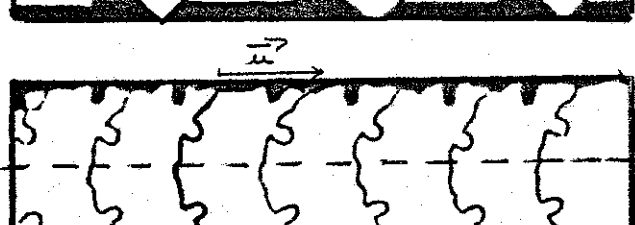
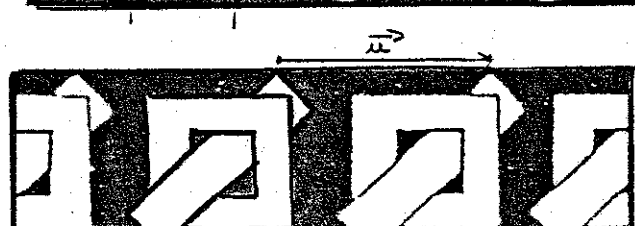
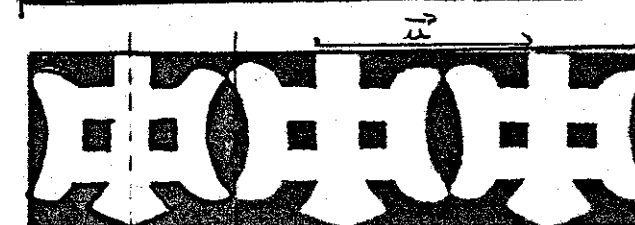
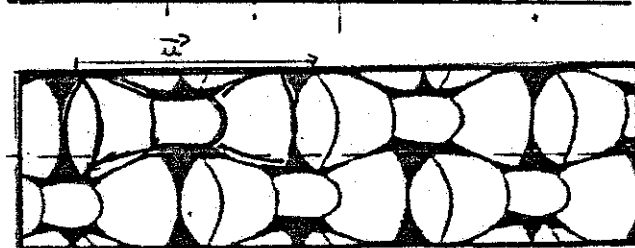
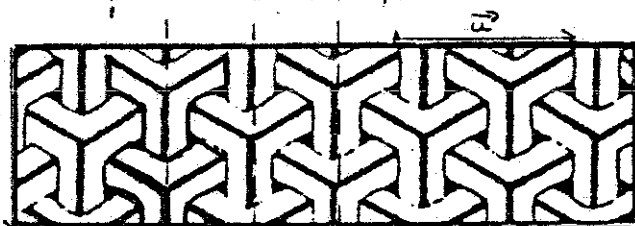
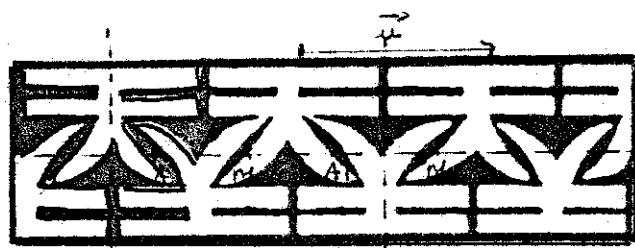
(on suppose que les dessins sont parfaitement réguliers)



| Réponses. |     |     | GROUPE ASSOCIE.                                                                |
|-----------|-----|-----|--------------------------------------------------------------------------------|
| ①         | ②   | ③   |                                                                                |
| non       | oui | non | $F_2$                                                                          |
| oui       | oui |     | $F_2^2$                                                                        |
| non       | non | non | $F_1$                                                                          |
| non       | non | non | $F_1$<br>(en on ne tient pas compte des<br>chevauchements et s'agit de $F_2$ ) |
| non       | oui | non | $F_2$                                                                          |
| non       | oui | oui | $F_2^1$                                                                        |
| oui       | non | oui | $F_1^1$                                                                        |

Suite de l'ex: 10-18 : Rappel des questions.

- ① existe-t-il un et un seul type de symétrie axiale?
- ② existe-t-il une symétrie centrale?
- ③ existe-t-il une symétrie glissée?



| Réponses |     |     | GROUPE<br>ASSOCIE |
|----------|-----|-----|-------------------|
| ①        | ②   | ③   |                   |
| oui      | oui | -   | $F_2^2$           |
| oui      | non | non | $F_1^2$           |
| non      | non | oui | $F_1^3$           |
| oui      | non | non | $F_1^2$           |
| non      | non | non | $F_1$             |
| oui      | non | oui | $F_1^1$           |
| non      | oui | oui | $F_2^1$           |

## Ex 10-14

Le groupe <sup>engendré</sup> généré par 2 symétries glissées de même axe et -il un groupe de frise?

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  2 symétries glissées de même axe  $\Delta$  et de vecteurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , avec  $\Delta$  dirigée par  $\vec{u}$  et  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  le groupe d'isométries généré par  $\alpha$  et  $\beta$ . Il n'existe que 4 groupes de frise contenant des symétries glissées.  $(\mathcal{F}_1^1; \mathcal{F}_2^1; \mathcal{F}_2^2 \text{ et } \mathcal{F}_4^3)$ . Des compositions de symétries glissées ne pouvant pas donner de symétrie centrale, si  $\mathcal{F}$  est un groupe de frise ce ne pourra être que  $\mathcal{F}_1^1$  ou  $\mathcal{F}_4^3$ .

Condition nécessaire  $\vec{u} = k\vec{v}$  avec  $k$  rationnel.

Démonstration Supposons que  $\mathcal{F}$  soit un groupe de frise de vecteur  $\vec{s}$ .

$$\alpha^2 = t_{2\vec{u}} \text{ doit être de la forme } t_{a\vec{s}} \quad (a \in \mathbb{Z})$$

$$\beta^2 = t_{2\vec{v}} = t_{2k\vec{u}} \text{ doit être de la forme } t_{b\vec{s}} \quad (b \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ce qui implique } \begin{aligned} 2\vec{u} &= a\vec{s} \\ 2k\vec{u} &= b\vec{s} \end{aligned} \quad \text{donc } k = \frac{b}{a}.$$

Considérons donc les deux symétries glissées  $\alpha(\Delta, \vec{u})$  et  $\beta(\Delta, \vec{v} = \frac{b}{a}\vec{u})$   $\frac{b}{a}$  étant la forme irréductible. donc avec  $b$  et  $a$  premiers entre eux.

4<sup>er</sup> cas.  $(b-a)$  est impair.

Soit  $\vec{s} = \frac{1}{a} \vec{u}$ .

$\mathcal{G}$  contient la symétrie axiale d'axe  $\Delta$

Démonstration  $\mathcal{L}^{-b}_0 \beta^a$  est un élément de  $\mathcal{G}$ .

C'est une symétrie glissée d'axe  $\Delta$  car  $(a-b)$  est impair.  
et le vecteur de cette symétrie glissée est

$$-b\vec{u} + a\vec{v} = -b\vec{u} + \frac{b}{a}a\vec{u} = \vec{0}.$$

c'est donc une symétrie axiale d'axe  $\Delta$ .

Si  $\mathcal{G}$  est un groupe de fûse, ce sera  $\mathcal{F}_4^+$

La translation  $t_{\vec{s}}$  appartient à  $\mathcal{G}$

Démonstration Les translations de  $\mathcal{G}$  sont de la forme

$\mathcal{L}^{i}_0 \beta^j$  avec  $(i+j)$  pair. Les vecteurs de ces translations sont de la forme  $i\vec{u} + j\vec{v} = \left(\frac{ia+bj}{a}\right)\vec{u}$  donc de la forme  $(ia+bj)\vec{s}$ .

$t_{\vec{s}}$  sera donc un élément de ce sous groupe de translations s'il existe  $i$  et  $j$  ( $i+j$  pair) tels que  $ai+bj=1$ .

Le théorème de Bezout permet d'affirmer que l'équation ci-dessus a des solutions à condition que le PGCD de  $a$  et  $b$  divise 1: ce qui est le cas.

Les solutions sont de la forme.

$$\begin{aligned} i &= i_0 + bk \\ j &= j_0 - ak \end{aligned} \quad (i_0, j_0) \text{ étant une solution particulière. } k \in \mathbb{Z}$$

On a donc  $i+j = (i_0+j_0) + k(b-a)$ . Comme  $(b-a)$  est impair,  $k(b-a)$  peut être rendu pair ou impair et donc  $i+j$  peut être rendu pair.

Il existe donc bien  $i$  et  $j$  ( $i+j$  pair) tels que  

$$t_{\vec{s}} = \alpha^i \circ \beta^j.$$

Il est clair que pour tout  $n$ ,  $t_{n\vec{s}} = (\alpha^i \circ \beta^j)^n \in \mathcal{F}$ .

Montrons que toute translation de  $\mathcal{F}$  est de la forme  $t_{n\vec{s}}$

Soit  $\alpha^p \circ \beta^q$  ( $p+q$  pair) une translation de  $\mathcal{F}$ .

Elle a pour vecteur  $p\vec{u} + q\vec{v} = p\vec{u} + q\frac{b}{a}\vec{u} = (pa+qb)\vec{s}$

$pa+qb \in \mathbb{Z}$  d'où  $\alpha^p \circ \beta^q \in \langle t_{\vec{s}} \rangle$

$\mathcal{F}$  est un groupe d'isométries dont le sous-groupe de translations est généré par  $t_{\vec{s}}$  avec  $\vec{s} = \frac{1}{a}\vec{u}$ .

$\mathcal{F}$  est un groupe de glisse de vecteur  $\vec{s}$ . Il contient  $\sigma_{\Delta}$  c'est donc  $\mathcal{F}_1$

2<sup>ème</sup> cas.  $(b-a)$  est pair. Comme  $\frac{b}{a}$  est irréductible on a donc  $b$  et  $a$  tous les deux impairs.

Soit  $\vec{s} = \frac{2}{a}\vec{u}$ .

$\mathcal{F}$  ne contient pas la symétrie d'axe  $\Delta$ .

En effet, il faudrait trouver  $i$  et  $j$  ( $i+j$  impair) tel que  $\alpha^i \circ \beta^j$  soit une symétrie glissée de vecteur nul. Cela impliquerait  $i\vec{u} + j\vec{v} = \vec{0}$  donc  $ia + jb = 0$ .

Or " $a$ " impair peut s'écrire  $2a'+1$  et  $b = 2b'+1$

donc  $ia + jb = 0 \Leftrightarrow i+j = 0 - 2a'i - 2b'j$ .

$i+j$  serait pair. Un tel couple  $(i,j)$  n'existe pas.

Si  $\mathcal{F}$  est un groupe de frise, ce sera  $\mathcal{F}_4^3$

La translation  $t_{\vec{s}}$  appartient à  $\mathcal{F}$

Soit  $\alpha^i \cdot \beta^j$  ( $i+j$  pair) une translation de  $\mathcal{F}$ .

Son vecteur est  $i\vec{u} + j\vec{v} = \left(\frac{ia+bj}{a}\right)\vec{u} = \left(\frac{ia+bj}{2}\right)\vec{s}$ .

$t_{\vec{s}}$  sera donc un élément de  $\mathcal{F}$  si on peut trouver  $i$  et  $j$  ( $i+j$  pair) tels que  $ia+bj=2$ .

L'équation  $ia+bj=2$  a une infinité de solutions.  
(th. de Bezout) et on a donc en posant  $a=2a'+1$  et  $b=2b'+1$

$$i(2a'+1) + j(2b'+1) = 2.$$

$$i+j = 2 - 2(a'i + b'j)$$

de qui prouve que  $i+j$  est pair.

Comme précédemment, les translations  $t_{n\vec{s}}$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ .

Montrons que toute translation de  $\mathcal{F}$  est de la forme  $t_{n\vec{s}}$

Soit  $\alpha^p \cdot \beta^q$  ( $p+q$  pair) une telle translation.

Son vecteur est  $p\vec{u} + q\vec{v} = p\vec{u} + q\frac{b}{a}\vec{u} = \left(\frac{pa+qb}{2}\right)\vec{s}$

$a$  et  $b$  étant impairs,  $\frac{pa+qb}{2}$  peut s'écrire  $\frac{p(2a'+1) + q(2b'+1)}{2}$

c'est à dire  $pa' + qb' + \frac{p+q}{2}$ . Or  $p+q$  est pair.

donc  $pa' + qb' + \frac{p+q}{2}$  est un entier et le vecteur

$\left(\frac{pa+qb}{2}\right)\vec{s}$  est de la forme  $n\vec{s}$ .

$\mathcal{F}$  est un groupe d'isométries dont le sous groupe de translations est généré par  $t_{\vec{s}}$  avec  $\vec{s} = \frac{2}{a}\vec{u}$ . C'est le groupe de frise de vecteur  $\vec{s}$ . C'est  $\mathcal{F}_4^3$



## PAVAGES

On s'intéresse aux façons de "recouvrir" un plan avec des motifs répétés régulièrement

Plus précisément, un pavé de base étant choisi, on cherche à recouvrir tout le plan avec des pavés identiques sans "trous" ni chevauchement et de façon régulière.

En utilisant toutes les isométries du plan, il a été montré qu'il y a 17 groupes de pavages possibles.

Si on n'utilise que des isométries directes, il n'y a que 5 groupes possibles - qui correspondent aux 5 figures étudiées dans les pages suivantes.

La mathématisation de cette situation est donnée par les axiomes suivants.

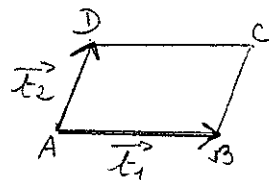
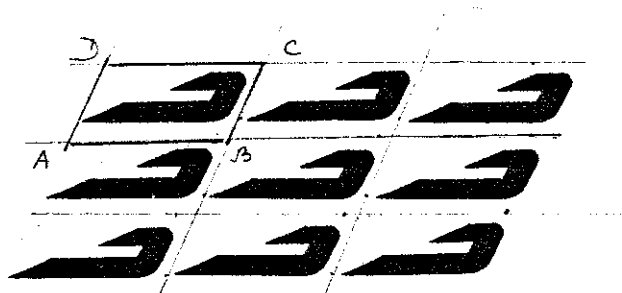
Soit  $G$  un groupe d'isométries directes du plan  $P$   
et soit  $B$  un compact connexe de  $P$  (c.à.d. le pavé)  
alors on doit avoir.

$$1) \bigcup_{g \in G} g(B) = P$$

intérieur : "o"

$$2) g(B) \cap h(B) \neq \emptyset \Rightarrow g = h. \quad (g, h) \in G^2$$

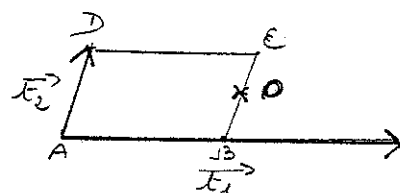
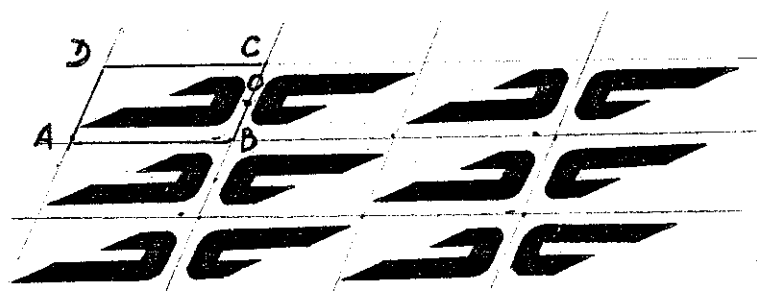


Figure 1

Soit  $\vec{t}_1 = \vec{AB}$  et  $\vec{t}_2 = \vec{AD}$

Les isométries directes permettant de reconstituer la figure 1 à partir du pavé de base sont toutes les composées  $t_1^n \circ t_2^m$  avec  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

Le groupe associé à ce pavage est donc le groupe  $\langle t_1, t_2 \rangle$

Figure 2.

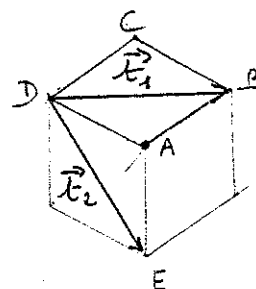
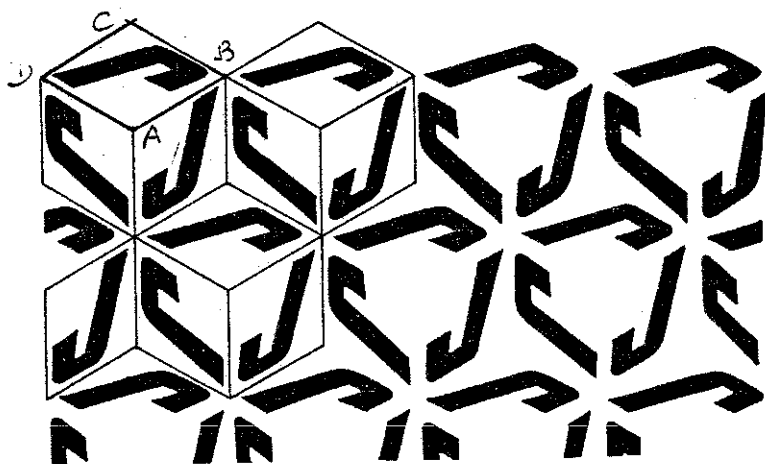
Soit  $O$  le milieu de  $[BC]$  et  $\vec{t}_1 = 2\vec{AB}$ ,  $\vec{t}_2 = \vec{AD}$

Les isométries directes permettant de reconstituer la figure 2 à partir du pavé de base sont:

- la symétrie de centre  $O$  et toutes les composées  $t_1^n \circ t_2^m$  (avec)  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

Le groupe associé à ce pavage est donc le groupe  $\langle \sigma_O, t_1, t_2 \rangle$

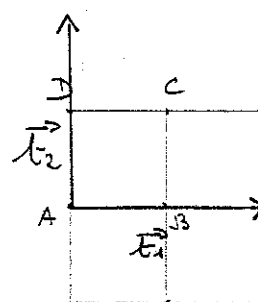
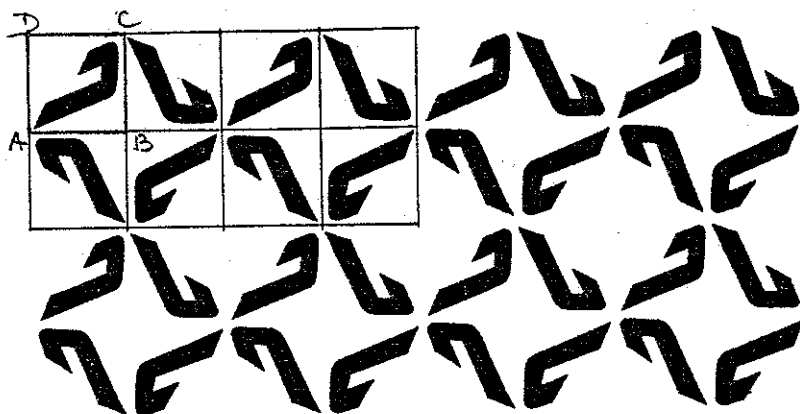
Figure 3.



Soit  $\vec{t}_1 = \vec{AB}$   $\vec{t}_2 = \vec{AE}$  et  $\rho_2(A, \frac{2\pi}{3})$ , les isométries directes permettant de reconstituer la figure 3 à partir des pavé de base ABCD sont les composées  $t_1^m \circ t_2^n \circ \rho_2^k$  avec  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$   $k \in \{1, 2, 3\}$

Le groupe associé à ce pavage est donc  $\langle t_1, t_2, \rho_2 \rangle$

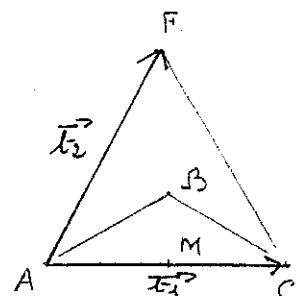
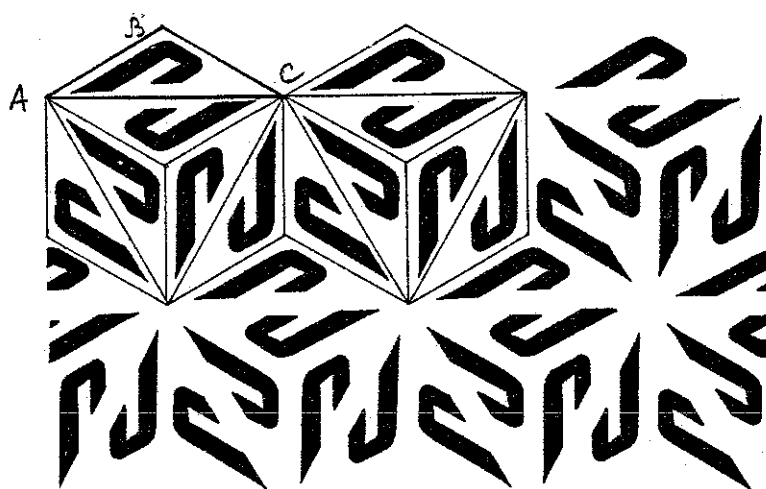
Figure 4.



Soit  $\vec{t}_1 = 2\vec{AB}$   $\vec{t}_2 = 2\vec{AD}$  et  $\rho_2(B, \frac{\pi}{2})$ , les isométries directes permettant de reconstituer la figure 4 à partir des pavé de base ABCD sont:  $t_1^m \circ t_2^n \circ \rho_2^k$  avec  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$   $k \in \{1, 2, 3\}$

Le groupe associé à ce pavage est donc  $\langle t_1, t_2, \rho_2 \rangle$

Figure 5.



Pavé de base  $ABC$ . triangle inscrit en  $B$  tel que  $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$ .

Soit  $\vec{t}_1 = \vec{AC}$   $\vec{t}_2 = \vec{AF}$  tel que  $AFC$  soit équilatéral

Soit  $M$  le milieu de  $[AC]$ .

Si on appelle  $\sigma_M$  la symétrie de centre  $M$

$\rho_3(B, \frac{2\pi}{3})$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$

Le groupe associé à ce pavage est donc

le groupe :  $\langle t_1, t_2, \sigma_M, \rho_3 \rangle$

C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2  
Sujet n°3 (billard polygonal)

I A l'aide des documents ci-joints, donner une rédaction personnelle du problème du billard polygonal.

Le plan d'exposition ne sera pas nécessairement celui du document.

On vous demande d'indiquer clairement les propositions que vous proposez de démontrer, suivies de leurs démonstrations complètes.

Il y a en effet dans le texte des manques dans les démonstrations qu'on vous demande de combler. S'il y a lieu, indiquez clairement ce que vous admettez.

Traiter complètement les cas  $n = 3$  et  $n = 4$  (avec des figures).

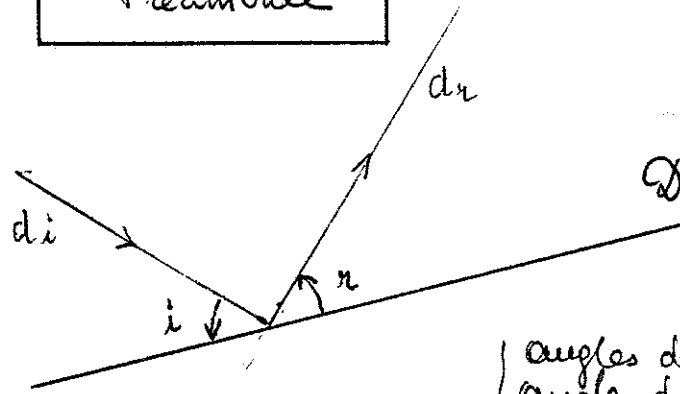
II Résoudre l'exercice ci-joint (indépendant de ce qui précède). [non joint]

Documents joints :

Berger Géométrie vol 2 (Cédic Nathan) pp. 81 à 89



Préambule



{ angles de faïces  $(\widehat{AA_3H}) = \widehat{A_3A}$   
 { angles de dièdre  $(\overrightarrow{A_3A}, \overrightarrow{A_3H})$   
 $(\overrightarrow{A_3A}, \overrightarrow{A_3H})$

Ce dessin pourrait être le schéma représentant

la trajectoire  $di - dr$  suivie par une boule de billard lorsqu'elle rebondit sans effet sur un des côtés  $D$ . L'angle d'incidence  $i$  est égal à l'angle de rebond  $r$  et par suite  $D$  est la bissectrice de  $(di, dr)$  ou encore, si  $\sigma_D$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $D$ ,  $dr = \sigma_D(di)$  ou même, plus précisément, si on oriente les droites dans le sens du mouvement  $\vec{dr} = \sigma_D(\vec{di})$

ici  $\vec{dr}$  et  $\vec{di}$  désignent des droites orientées et non des droites vectorielles (droites affines + vecteur ?)

On considère maintenant le problème physique suivant :

étant donné un billard dont la forme est celle d'un polygone convexe, quelles sont les possibilités et quelles sont les circonstances pour qu'une boule partant d'un point intérieur revienne à son point de départ après avoir rebondi sans effet une seule fois successivement sur chacun des côtés.

S'il existe une telle possibilité alors la trajectoire polygonale suivie par la boule est une trajectoire

②

de billard.

L'existence de telles possibilités risque de dépendre de la forme du billard.

Afin d'étudier le problème on va mathématiser la situation en adoptant le plan suivant, le billard étant assimilé à un polygone convexe :

0 - Notations utilisées

1. - Examen du cas général d'un polygone convexe qui possède un nombre  $n$  de côtés. On prendra cependant  $n \geq 3$  pour que l'intérieur du polygone ne soit pas réduit à l'ensemble vide.

1 - 1 Définition mathématique de la trajectoire de billard.

1 - 2 Recherche de conditions nécessaires pour que le polygone possède une trajectoire de billard.

1 - 3 Énoncé d'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle trajectoire.

X En fait le problème n'est pas totalement résolu dans le cas général car cette dernière condition nécessaire et suffisante est elle-même liée à l'existence d'une certaine droite dont les circonstances de tangibilité ne seront précisées que dans les deux cas suivants

2 - Cas du triangle.

3 - Cas du quadrilatère

## 0. Notations utilisées.

On considère un polygone convexe  $P$  à  $n$  cotés,  $n \geq 3$ . On utilise la convention  $n+1 = 1$

Pour  $i \in I = \{1, \dots, n\}$  on introduit les notations suivantes :

$A_i$  est un sommet

La droite  $\langle A_i, A_{i+1} \rangle$  est notée  $\mathcal{D}_i$

$\alpha_i$  est un point de  $\mathcal{D}_i$

$\sigma_{\mathcal{D}_i}$  est la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathcal{D}_i$

$$g_i = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \dots \circ \sigma_{\mathcal{D}_i}$$

$$g_n = g$$

$\vec{g}$  est l'application linéaire associée à  $g$

Dans 1-2  $\beta_i = g_i(\alpha_i)$

Dans 1-3  $\beta_i$  est défini directement dans

la proposition 4.

*Ce n'est peut-être pas une très bonne idée de notation (absurdité de la chose)*

$\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle$  désigne la droite orientée dont le sens est donné par le vecteur  $\vec{\alpha_i \alpha_{i+1}}$

$\text{dir}^{\text{orientée}} = (\mathcal{D}, \vec{u})$

Par ailleurs on utilise constamment le fait que si  $f$  est une isométrie, l'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment est un segment entièrement déterminé par les images des extrémités

$$\text{Ainsi } f(\langle A, B \rangle) = \langle f(A), f(B) \rangle$$

$$\text{ou } f(\overrightarrow{\langle A, B \rangle}) = \overrightarrow{\langle f(A), f(B) \rangle}$$

$$\text{ou encore } f([A, B[) = [f(A), f(B)[$$



④

On utilise également souvent implicitement les propriétés de convexité du polygone.

1.  $P$  est un polygone convexe à  $n$  côtés,  $n \geq 3$

### 1.1. Définition

Avec les notations du préambule,  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est une trajectoire de billard dans  $P$  si les deux conditions suivantes sont réunies:

a)  $\alpha_i \in ]A_i, A_{i+1}[$

b)  $\sigma_{\alpha_i}(\overrightarrow{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}) = \overrightarrow{\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle}$

### 1.2. Recherche de conditions nécessaires d'existence de trajectoires de billard.

#### 1.2.1. Proposition 1:

Si  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est une trajectoire de billard dans  $P$  alors  $\overrightarrow{\langle \alpha_m, \alpha_1 \rangle}$  est stable par  $g$ .

Remarque: Dire que  $\overrightarrow{\langle \alpha_m, \alpha_1 \rangle}$  est stable par  $g$  c'est dire que la droite  $\overrightarrow{\langle \alpha_m, \alpha_1 \rangle}$  est globalement invariante et en tenant compte en plus du fait que  $g$  est une isométrie

?  $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{\langle \alpha_m, \alpha_1 \rangle}) = \overrightarrow{\langle \alpha_m, \alpha_1 \rangle} \text{ (+ 1 pt conservé)}$

#### Démonstration de la proposition 1.

$\forall i \in I \quad g_i(\overrightarrow{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}) = g_{i-1} \circ \sigma_{\alpha_i}(\overrightarrow{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle})$   
et comme  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est de billard on obtient

(1)  $g_i(\overrightarrow{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}) = g_{i-1}(\overrightarrow{\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle})$



⑥

La récurrence est alors évidente et permet d'affirmer :

par le même ! //

$$\forall i, j \in I \quad g_i(\overrightarrow{\alpha_i, \alpha_{i+1}}) = g_j(\overrightarrow{\alpha_j, \alpha_{j+1}})$$

en particulier

$$g(\overrightarrow{\alpha_n, \alpha_1}) = g_n(\overrightarrow{\alpha_n, \alpha_1}) = g_1(\overrightarrow{\alpha_1, \alpha_2})$$

et comme

$$g_1(\overrightarrow{\alpha_1, \alpha_2}) = \tau_{g_1}(\overrightarrow{\alpha_1, \alpha_2}) = \overrightarrow{\alpha_n, \alpha_1},$$

car  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est de billard, finalement

qui 
$$g(\overrightarrow{\alpha_n, \alpha_1}) = \overrightarrow{\alpha_n, \alpha_1}$$

ce qui prouve la proposition 1.

### 1.2.2 - Proposition 2 :

Dessin ①

Si  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est de billard, alors les  $\beta_i$  sont alignés, et dans l'ordre de leurs indices, sur la droite  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$

a) préalablement on démontre que

$$(2) \quad \beta_i = g_i(\alpha_i) = g_{i-1}(\alpha_i)$$

$$\text{En effet } g_i(\alpha_i) = g_{i-1} \circ \tau_{g_i}(\alpha_i)$$

$$\text{or } \alpha_i \in \mathcal{D}_i \text{ donc } \tau_{g_i}(\alpha_i) = \alpha_i$$

$$\text{ainsi } g_{i-1} \circ \tau_{g_i}(\alpha_i) = g_{i-1}(\alpha_i)$$

$$\text{et d'ailleurs de même } g_i(\mathcal{D}_i) = g_{i-1}(\mathcal{D}_i)$$

### b) Démonstration de la proposition 2.

Il suffit de montrer que  $\forall i \in I$ ,

$\beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}$  sont alignés dans

cet ordre car  $\beta_1 = \alpha_1$  et  $\beta_n = g_n(\alpha_n) = g(\alpha_n)$

$\in \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$  d'après la proposition 1.

(7)

d'après (1)  $g_i(\overrightarrow{\langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle}) = g_{i-1}(\overrightarrow{\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle})$

et donc  $g_i$  étant une isométrie : (officielle suffisante)

$$\langle g_i(\alpha_i), g_i(\alpha_{i+1}) \rangle = \langle g_{i-1}(\alpha_{i-1}), g_{i-1}(\alpha_i) \rangle$$

et d'après (2)

$$\langle \beta_i, \beta_{i+1} \rangle = \langle \beta_{i-1}, \beta_i \rangle$$

ce qui démontre que  $\beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}$  sont alignés dans cet ordre et comme  $\beta_1$  et  $\beta_n$  sont sur la droite  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$

ad les  $\beta_i$  sont alignés sur  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$

1.2.3. Proposition 3.

↙

Si  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est une trajectoire de billard, alors,  $\forall i \in I$ , la droite  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$  est sécante à  $g_i(D_i)$  et  $g_i(D_i) \cap \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle = \{\beta_i\}$

D'après la proposition 2 les  $\beta_i$  sont alignés sur  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs } g_i(P) &= g_{i-1} \circ \sigma_{D_i}(P) \\ &= g_{i-1} \circ \sigma_{D_i} \circ g_{i-1}^{-1} \circ g_{i-1}(P) \\ &= \sigma_{g_{i-1}(D_i)} \circ g_{i-1}(P) \end{aligned}$$

Les  $g_i(P)$  sont convexes et donc tout entier dans un même demi-plan de frontière  $g_i(D_i)$ .  
 $g_{i-1}(D_i) = g_i(D_i)$  et d'après ce qui précède  $g_{i-1}(P)$  et  $g_i(P)$  étant symétriques par rapport à  $g_i(D_i)$  sont dans des demi-plans opposés de frontière  $g_i(D_i)$ .

$\beta_{i-1} \in g_{i-1}(P)$ ,  $\beta_{i+1} \in g_{i+1}(D_{i+1}) = g_i(D_i)$   
 et donc  $\beta_{i+1} \in g_i(P)$

donc finalement  $\beta_{i-1}$  et  $\beta_{i+1}$  étant de part et d'autre de  $g_i(D_i)$ ,  $\langle \beta_{i-1}, \beta_{i+1} \rangle$

est sécante à  $g_i(D_i)$  et d'après 1.2.2 nécessairement en  $\beta_i$ .

1.2.4 - Enfin  $\alpha_i \in ]A_i, A_{i+1}[$  implique:  
 $g_i(\alpha_i) \in g_i(]A_i, A_{i+1}[) = ]g_i(A_i), g_i(A_{i+1})[$

1.3. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une trajectoire de billard.

1.3.1 Proposition 4.

Les  $g_i$  et  $g$  étant définis comme précédemment, si il existe une droite orientée  $\vec{D}$  stable par  $g$  et telle que,  $\forall i \in \mathbb{I}$ ,

- a)  $\vec{D} \cap g_i(D_i) = \{\beta_i\}$ ,
- b)  $\beta_i \in g_i(]A_i, A_{i+1}[)$ ,
- c) les  $\beta_i$  sont dans l'ordre de leurs indices,

alors  $\mathcal{P}$  possède une trajectoire de billard dont les sommets sont les  $g_i^{-1}(\beta_i)$ .

②

### Démonstration de la proposition 4.

$g_i$  est une isométrie donc une bijection, ce qui assure l'existence de la bijection réciproque  $g_i^{-1}$ .

Sachant que  $g_i = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \dots \circ \sigma_{\mathcal{D}_i}$  on peut expliciter  $g_i^{-1}$

$$g_i^{-1} = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_{i-1}} \circ \dots \circ \sigma_{\mathcal{D}_i}$$

On remarque que  $g_i^{-1} = \sigma_{\mathcal{D}_i} \circ g_{i-1}^{-1}$  ce qui permet de démontrer:

$$(3) \quad \forall i \in I \quad g_i^{-1}(\beta_i) = g_{i-1}^{-1}(\beta_i)$$

En effet  $\beta_i \in g_i(\mathcal{D}_i)$  donc  $g_i^{-1}(\beta_i) \in \mathcal{D}_i$  ce qui signifie que  $g_i^{-1}(\beta_i)$  est invariant par  $\sigma_{\mathcal{D}_i}$  c'est à dire:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{D}_i} \circ g_i^{-1}(\beta_i) &= g_i^{-1}(\beta_i) \\ \text{et comme } \sigma_{\mathcal{D}_i} \circ g_i^{-1} &= \sigma_{\mathcal{D}_i} \circ (\sigma_{\mathcal{D}_i} \circ g_{i-1}^{-1}) \\ &= g_{i-1}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{on obtient } g_{i-1}^{-1}(\beta_i) = g_i^{-1}(\beta_i)$$

D'autre part, les  $\beta_i$  étant alignés dans l'ordre de leurs indices, on peut écrire

$$\langle \overrightarrow{\beta_i, \beta_{i+1}} \rangle = \langle \overrightarrow{\beta_{i-1}, \beta_i} \rangle$$

et donc:

$$g_i^{-1}(\langle \overrightarrow{\beta_i, \beta_{i+1}} \rangle) = g_i^{-1}(\langle \overrightarrow{\beta_{i-1}, \beta_i} \rangle)$$

Cette égalité peut encore s'écrire sous la forme:

$$\langle \overrightarrow{g_i^{-1}(\beta_i), g_i^{-1}(\beta_{i+1})} \rangle = \sigma_{\mathcal{D}_i}(\langle \overrightarrow{g_{i-1}^{-1}(\beta_{i-1}), g_{i-1}^{-1}(\beta_i)} \rangle)$$

et en utilisant (3) :

$$\langle g_i^{-1}(\beta_i), g_{i+1}^{-1}(\beta_{i+1}) \rangle = \sigma_{2i}(\langle g_{i-1}^{-1}(\beta_{i-1}), g_i^{-1}(\beta_i) \rangle) \quad \leftarrow \text{c'est 1.1.a)}$$

Comme par ailleurs  $\forall i \in I, \beta_i \in g_i([A_i, A_{i+1}]) \quad \leftarrow \text{c'est 1.1.b)}$   
 implique  $g_i^{-1}(\beta_i) \in [A_i, A_{i+1}]$ , le  
 polygone  $(g_i^{-1}(\beta_i))_{i \in I}$  est une trajectoire  
 de billard dans  $\mathbb{P}$ .

On

### 1.3.2 Condition d'existence d'une droite $\vec{D}$ stable par $g$ .

$g$  est la composition de  $n$  isométries indirectes donc selon que  $n$  est pair ou impair  $g$  est une isométrie directe ou indirecte.

On

a) Cas où  $n$  est pair:  $g$  est directe.

C'est là que l'utilisation de la droite orientée est intéressante car seule une translation conserve à la fois la direction et le sens de la droite.

On associe alors, dans  $g$ , les  $\sigma_{2i}$  deux par deux. On pose  $\tau_{\theta_p} = \sigma_{2p-1} \circ \sigma_{2p}$

$p = 1, \dots, n/2$  avec

$$\theta_p = \angle(\vec{D}_{2p-1}, \vec{D}_{2p})$$

$g$  s'écrit alors sous la forme

$$g = \tau_{\theta_1} \circ \tau_{\theta_2} \circ \dots \circ \tau_{\theta_{n/2}}$$

et comme  $g$  est une translation

$$\sum_{p=1}^{n/2} \theta_p = 0 \pmod{2\pi}$$



10

ce qui équivaut à :  
on  $\sum_{p=1}^{n/2} (\mathcal{D}_{2p-1}, \mathcal{D}_{2p}) = 0 \pmod{\pi}$   
 (il y en une autre identique d'ailleurs)

b) cas où  $n$  est impair .  $g$  est indirecte  
 Là encore l'utilisation de la droite orientée  
 se révèle fructueuse car  $g$  est une isomé-  
 trie indirecte et  $\vec{g}(\overrightarrow{\alpha_n \alpha_1}) = \overrightarrow{\alpha_n \alpha_1}$  équivaut  
 à dire que  $\langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle$  est l'axe de  $g$ .  
on Cet axe est unique et existe quel que soit  
 $n$  impair.

1.3.3. Condition d'existence d'une droite  
 $\vec{\mathcal{D}}$  répondant aux hypothèses de la proposition  
4.

Il reste donc à examiner la possibilité  
 qu'une droite orientée  $\vec{\mathcal{D}}$  stable par  $g$  vérifie  
 la condition :

$\forall i \in I, \beta_i \in g_i([A_i, A_{i+1}[)$  avec  
 $\{\beta_i\} = \vec{\mathcal{D}} \cap g_i(\mathcal{D}_i)$  et tel que les  $\beta_i$   
 soient dans l'ordre de leurs indices.

B | En fait, c'est là qu'est le problème car  
 cette condition n'est pas vérifiée en général.  
 On peut malgré tout énoncer une proposition

a) Proposition 5.

Si  $n$  est pair et si il existe une droite  
 $\vec{\mathcal{D}}$  vérifiant les conditions de la proposition  
 4, alors il en existe une infinité.

Cela signifiera alors que  $\mathcal{Q}$  possède une infinité de trajectoires de billard.

### Démonstration de la proposition 5.

Si  $n$  est pair,  $g$  est une translation et toute droite ayant même direction que la direction de translation est stable par  $g$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une droite vérifiant les hypothèses de la proposition 4 alors  $\forall i \in I$ :

$$\beta_i \in g_i([A_i, A_{i+1}])$$

$$\text{Soit } d_i = \inf [d(g_i(A_i), \mathcal{D}), d(g_i(A_{i+1}), \mathcal{D})]$$

$\mathcal{D}$  ne contient ni  $A_i$ , ni  $A_{i+1}$  donc  $d_i > 0$

Soit  $t_{\vec{u}}$  une translation de vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$  non parallèle à  $\mathcal{D}$  tel que  $\|\vec{u}\| < \inf_{j \in I} (d_j)$

$$\text{On pose } \mathcal{D}' = t_{\vec{u}}(\mathcal{D})$$

Des hypothèses on déduit immédiatement que  $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$  et  $0 < d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') \leq \|\vec{u}\|$ .

$$\forall i \in I, \text{ soit } \{\beta'_i\} = \mathcal{D}' \cap g_i(\mathcal{D}_i).$$

Ainsi les points  $g_i(A_i), g_i(A_{i+1}), \beta_i, \beta'_i$  sont alignés sur  $g_i(\mathcal{D}_i)$ .

$\mathcal{D}$  étant parallèle à  $\mathcal{D}'$  on se sert alors du théorème de Thalès on pose  $\forall i \in I$ :

$$(4) \quad \lambda_i d_i = \inf [d(g(A_i), \beta_i), d(g(A_{i+1}), \beta_i)], \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$$

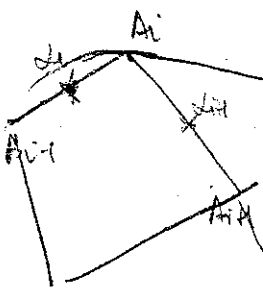
$$\text{alors } d(\beta_i, \beta'_i) = \lambda_i d(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$$

$$\leq \lambda_i \|\vec{u}\|$$

$$< \lambda_i \inf_{j \in I} (d_j)$$

$$< \lambda_i d_i$$

cela  
manque  
vraiment  
de dessin  
pour le  
lecteur!



(12)

d'après (4) et comme  $\beta_i \in ]g_i(A_i), g_i(A_{i+1})[$   
cela signifie que  $\beta'_i \in g_i(]A_i, A_{i+1}[)$

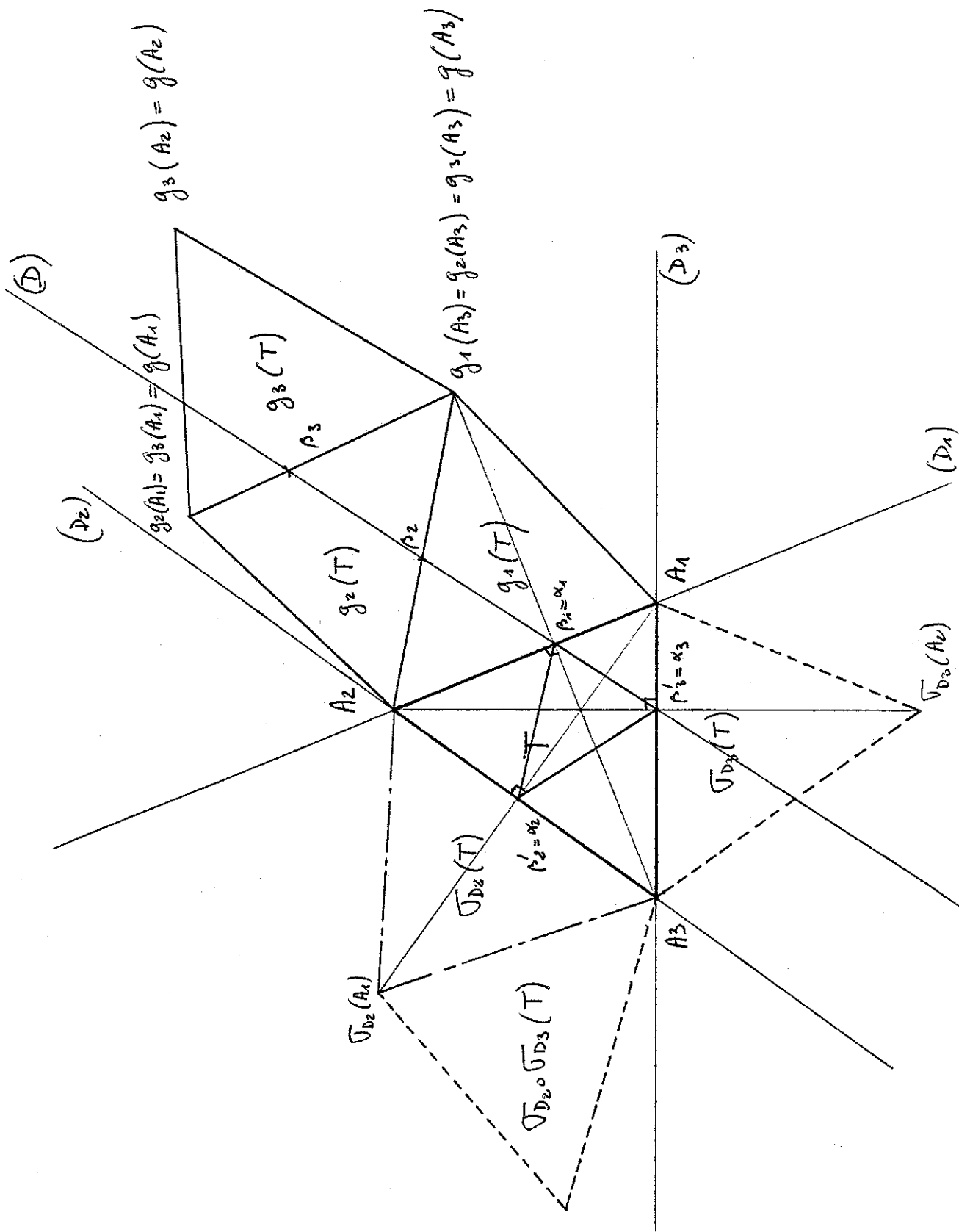
Toujours d'après Thalès, en considérant les sécantes  $g_i(D_i)$  et  $g_{i+1}(D_{i+1})$  qui ont en commun le point  $g_i(A_{i+1})$ ,  $\beta_i$  et  $\beta'_i$  sont sur la même demi-droite d'origine  $g_i(A_{i+1})$ ,  $D$  et  $D'$  étant parallèles,  $\beta_{i+1}$  et  $\beta'_{i+1}$  sont également sur la même demi-droite d'origine  $g_i(A_{i+1})$  et donc les points  $\beta_i, \beta_{i+1}$  d'une part et  $\beta'_i, \beta'_{i+1}$  d'autre part sont dans le même sens c'est à dire  $\overrightarrow{\beta_i \beta_{i+1}}$  et  $\overrightarrow{\beta'_i \beta'_{i+1}}$  sont colinéaires. Ceci assure l'ordre des  $(\beta'_i)_{i \in I}$ .

Ainsi on voit que  $D'$  satisfait aux conditions de la proposition 4, ce qui démontre la proposition 5.

---



figure 2



## 2 Trajectoire de billard dans un triangle (figure 2.) ⑬

ici les notations  
complexées de 1 ne  
se justifient plus du tout

Soit  $(A_1 A_2 A_3)$  un triangle, c'est un polygone  
à 3 côtés donc d'après l'étude générale il existe  
une droite orientée unique stable par  $g$ .

( $g = \sigma_{D_1} \circ \sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_3}$  ou  $\sigma_{D_i}$  désigne la symétrie  
orthogonale d'axe  $D_i$ , et  $D_1 = (A_1 A_2)$ ;  $D_2 = (A_2 A_3)$   
 $D_3 = (A_3 A_1)$ )

Soit  $D$  cette droite si elle vérifie les  
conditions énoncées dans le cas général :

$D \cap g_i(D_i) = \{\beta_i\}$   
 $\beta_i \in g_i([A_i A_{i+1}])$   
les  $\beta_i$  sont alignés dans l'ordre de leurs indices.

Alors le triangle  $(A_1 A_2 A_3)$  possède une  
unique trajectoire de billard  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$  avec  
 $\alpha_1 \in [A_1 A_2]$ ;  $\alpha_2 \in [A_2 A_3]$ ;  $\alpha_3 \in [A_3 A_1]$ .

ou et  $\alpha_1 = g_1^{-1}(\beta_1)$ ;  $\alpha_2 = g_2^{-1}(\beta_2)$ ;  $\alpha_3 = g_3^{-1}(\beta_3)$

On pourrait simplifier  
en partant d'un triangle  
à un angle et en  
montrant que le triangle  
 $H_1 H_2 H_3$  construit  
à partir d'un triangle avec  
un angle obtus et en  
montrant que  $\phi$

il faudrait  
redéfinir le  
triangle  
ce qui est  
signifié

(14)

1) Montrons que:

$$D \cap g_1(D_1) = \{\beta_1\} \text{ et que } \beta_1 \in g_1([A_1 A_2])$$

La droite  $D$  est invariante par  $g$  donc elle passe par le milieu de  $[A_3; g(A_3)]$  or

$$g(A_3) = \tau_{D_1} \circ \tau_{D_2} \circ \tau_{D_3}(A_3) \text{ et comme } A_3 \in D_2 \cap D_3$$

$$g(A_3) = \tau_{D_1}(A_3)$$

et donc la droite  $D$  passe par le milieu de  $[A_3; \tau_{D_1}(A_3)]$  qui est sur  $D_1$  car  $\tau_{D_1}$  est la symétrie orthogonale d'axe  $D_1$

Donc les droites  $D$  et  $D_1$  ont au moins un point commun. Il faut montrer que c'est le seul.

Supposons  $D = D_1$  alors on aurait

$$\text{comme } g(D) = D, \quad g(D_1) = D_1 \text{ soit}$$

$$\tau_{D_1} \circ \tau_{D_2} \circ \tau_{D_3}(D_1) = D_1$$

ce qui impliquerait que  $\tau_{D_2} \circ \tau_{D_3} = \text{Id}$  soit  $D_2 = D_3$

ce qui serait incompatible avec l'hypothèse  $(A_1 A_2 A_3)$  est un triangle.

Donc les droites  $D$  et  $D_1$  sont sécantes et comme  $g_1(D_1) = D_1$  on a:

$$D \cap g_1(D_1) = \{\beta_1\}$$

oui

Maintenant il reste à montrer que  $\beta_1 \in g_1([A_1 A_2])$

$$g_1([A_1 A_2]) = [A_1 A_2] \quad \text{car } D_1 \ni [A_1 A_2]$$

donc il faut montrer que  $\beta_1 \in [A_1 A_2]$

or  $\beta_1$  est le milieu de  $[A_3; \tau_{D_1}(A_3)]$

donc  $[A_3 \beta_1]$  est orthogonale à l'axe  $D_1$

$\beta_1$  est entre  $A_1$  et  $A_2$  si les angles  $\hat{A}_1$  et  $\hat{A}_2$  sont aigus. car alors  $\beta_1$  est le pied de la hauteur

oui

issue de  $A_3$ .

(15)

Et dans ce cas  $g^{-1}(\beta_1) = \alpha_1$

$$\beta_1 = \alpha_1$$

oui

Conclusion: La droite  $D$  est bien sécante à  $g_1(D_1)$  en  $\beta_1$ , mais ce point  $\beta_1$  n'appartient à  $g_1([A_1 A_2])$  que si les angles  $\hat{A}_1$  et  $\hat{A}_2$  sont aigus - et alors  $\alpha_1 = \beta_1$  est le pied de la hauteur issue de  $A_3$ .

2) Montrons que

$$D \cap g_2(D_2) = \{\beta_2\} \text{ et que } \beta_2 \in g_2([A_2 A_3])$$

La droite  $D$  intersecte par  $g$  par le milieu de  $[A_1 g(A_1)]$  or

$$g(A_1) = \tau_{D_1} \circ \tau_{D_2} \circ \tau_{D_3}(A_1) \text{ et comme } A_1 \in D_3 \text{ on a:}$$

$$g(A_1) = \tau_{D_1} \circ \tau_{D_2}(A_1)$$

$$g(A_1) = \tau_{D_1}(\tau_{D_2}(A_1))$$

oui

donc  $D$  passe par le milieu de  $[A_1; \tau_{D_1}(\tau_{D_2}(A_1))]$

soit encore par le milieu de  $[\tau_{D_1}(A_1); \tau_{D_1}(\tau_{D_2}(A_1))]$   
(car  $\tau_{D_1}(A_1) = A_1$ )

soit encore par l'image par  $\tau_{D_1}$  du milieu de

$[A_1; \tau_{D_2}(A_1)]$ . Soit  $\beta'_2$  le milieu de  $[A_1; \tau_{D_2}(A_1)]$

$\beta'_2$  appartient à l'axe  $D_2$  et  $D$  passe par  $\tau_{D_1}(\beta'_2)$

donc  $\tau_{D_1}(\beta'_2) = \tau_{D_1} \circ \tau_{D_2}(\beta'_2) = g_2(\beta'_2)$  qui appartient

à  $g_2(D_2)$  donc.

oui

La droite  $D$  et la droite  $g_2(D_2)$  ont donc au moins un point commun :

$$D \cap g_2(D_2) \ni \{g_2(\beta'_2)\} = \{\beta_2\}$$



16

Il faut montrer que c'est le seul point d'intersection

a) . D'après 1) on a

$$g_1(D_1) \cap D = \{\alpha_1\} \text{ avec } \alpha_1 \in ]A_1 A_2[$$

b) . D'autre part on a

$$\begin{aligned} g_1(D_1) \cap g_1(D_2) &= \{g_1(D_1 \cap D_2)\} \\ &= \{g_1(A_2)\} \quad \text{Comme } A_2 \in D_1 \\ &= \{A_2\} \end{aligned}$$

mais on sait aussi que  $g_1(D_2) = g_2(D_2)$

Donc

$$g_1(D_1) \cap g_1(D_2) = g_1(D_1) \cap g_2(D_2) = \{A_2\}$$

En comparant a) et b) on voit que  $\alpha_1$  ne peut appartenir à  $g_1(D_1) \cap D$  et  $g_2(D_2)$  que si  $\alpha_1 = A_2$  ce qui est exclu car.

$$\alpha_1 \in ]A_1 A_2[$$

Donc il existe un point  $\alpha_1$  de  $D$  qui n'appartient pas à  $g_2(D_2)$  donc

oui

$$D \cap g_2(D_2) = \{g_2(\beta'_2)\} = \beta_2$$

maintenant il faut montrer que

$$\beta_2 \in g_2(]A_2 A_3[)$$

On a  $\beta'_2$  qui est le milieu de  $[A_1, T_{D_2}(A_1)]$  donc  $\beta'_2 \in D_2$  et de plus comme  $T_{D_2}$  est une symétrie orthogonale  $[A_1 \beta'_2]$  est orthogonal à  $D_2$  donc  $\beta'_2$  est le pied de la hauteur issue de  $A_1$  dans le triangle  $(A_1 A_2 A_3)$

$\beta'_2$  appartient à  $]A_2 A_3[$  si les angles

$\hat{A}_2$  et  $\hat{A}_3$  sont aigus, et alors  $\beta_2$  qui est égal

$$\text{à } g_2(\beta'_2) \text{ appartient à } g_2(]A_2 A_3[)$$

et dans ce cas.  $g_2^{-1}(\beta_2) = \alpha_2$  soit  $\alpha_2 = \beta'_2$  ⑪

oui Conclusion. La droite  $D$  est bien sécante à  $g_2(D_2)$  en  $\beta_2$ , mais ce point  $\beta_2$  n'appartient à  $g_2([A_2 A_3])$ , que si les angles  $\hat{A}_2, \hat{A}_3$  sont aigus et alors  $\alpha_2 = g_2^{-1}(\beta_2)$  est le pied de la hauteur issue de  $A_2$

3) Montrons que.

$$D \cap g_3(D_3) = \{\beta_3\} \text{ et que } \beta_3 \in g_3([A_3 A_1])$$

long!

La droite  $D$  passe par le milieu de  $[A_2 g(A_2)]$

ou  $g(A_2) = \tau_{D_1} \circ \tau_{D_2} \circ \tau_{D_3}(A_2)$  soit encore.

ou  
recurrence...  $g(A_2) = g_2 \circ \tau_{D_3}(A_2)$  donc  $D$  passe par le milieu de  $[A_2 g_2(\tau_{D_3}(A_2))]$

comme  $g_2(A_2) = A_2$  on a encore.  $D$  passe par le milieu de  $[g_2(A_2) g_2(\tau_{D_3}(A_2))]$

soit par l'image du milieu de  $[A_2; \tau_{D_3}(A_2)]$  par  $g_2$

Soit  $\beta'_3$  le milieu de  $[A_2; \tau_{D_3}(A_2)]$  donc  $D$  passe par  $g_2(\beta'_3)$  or  $\beta'_3$  appartient à  $D_3$  l'axe de  $\tau_{D_3}$  donc on peut aussi écrire.

$$g_2(\beta'_3) = g_2 \circ \tau_{D_3}(\beta'_3) = g_3(\beta'_3)$$

donc  $D$  passe par  $g_3(\beta'_3)$  or  $g_3(\beta'_3) \in g_3(D_3)$  car  $\beta'_3 \in D_3$

donc il existe au moins un point en commun:

$$g_3(\beta'_3) = \{\beta_3\} \in D \cap g_3(D_3).$$

il faut montrer que c'est le seul point  
ou d'intersection

a) d'après 2) on a:

$$g_2(D_2) \cap D = \{\beta_2\} = g_2(\alpha_2); \alpha_2 \in [A_2 A_3]$$

(13)

b) D'autre part on a

$$g_2(D_2) \cap g_2(D_3) = \{g_2(D_2 \cap D_3)\} = \{g_2(A_3)\}$$

mais on sait aussi que

$$g_2(D_3) = g_3(D_3) \text{ donc}$$

$$g_2(D_2) \cap g_2(D_3) = \boxed{g_2(D_2) \cap g_3(D_3) = \{g_2(A_3)\}}$$

En comparant a) et b) on voit que  $\beta_2$  ne peut appartenir à  $D$ ;  $g_2(D_2)$  et  $g_3(D_3)$  que si  $\beta_2 = g_2(A_3)$  ce qui est exclu car

$$\beta_2 \in g_2([A_2 A_3])$$

Donc il existe un point de  $D: (\beta_2)$ , n'appartenant pas à  $g_3(D_3)$ , donc les droites  $D$  et  $g_3(D_3)$  sont sécantes

$$\boxed{D \cap g_3(D_3) = \{g_3(\beta'_3)\} = \beta_3}$$

Maintenant il faut montrer que

$$\beta_3 \in g_3([A_3 A_1])$$

$\beta'_3$  est le milieu de  $[A_2; \sigma_{D_3}(A_2)]$  donc  $\beta'_3 \in D_3$ . axe de  $\sigma_{D_3}$  et de plus comme  $\sigma_{D_3}$  est une symétrie orthogonale d'axe  $D_3$  on a  $[A_2 \beta'_3]$  orthogonal à  $D_3$  donc  $\beta'_3$  est le pied de la hauteur issue de  $A_2$  dans le triangle  $(A_1 A_2 A_3)$

$\beta'_3$  appartient à  $[A_3 A_1]$  que si les angles  $\hat{A}_3$  et  $\hat{A}_1$  sont aigus et alors  $\beta_3$  qui est égal à  $g_3(\beta'_3)$  appartient à  $g_3([A_3 A_1])$

Et dans ce cas  $g_3^{-1}(\beta_3) = \alpha_3$  soit  $\alpha_3 = \beta_3$ .

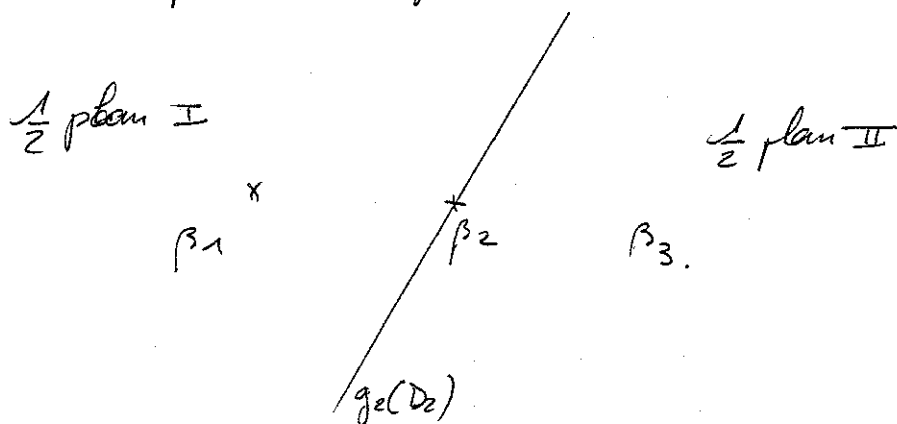
Conclusion: La droite  $D$  est bien sécante à  $g_3(D_3)$ , en  $\beta_3$ , mais cette intersection appartient à  $g_3([A_3 A_1])$  que si les angles  $\hat{A}_1$  et  $\hat{A}_3$  sont aigus et alors  $\alpha_3 = g_3^{-1}(\beta_3)$  est le pied de la hauteur issue de  $A_2$ .

4) Montrons maintenant que les 3 points  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont alignés dans l'ordre de leurs indices sur  $D$ .

Les 3 points sont d'après ce qui précède alignés sur la droite  $D$ .

Pour montrer qu'ils sont placés dans l'ordre de leurs indices, on va montrer que.

$\beta_1$  et  $\beta_3$  sont dans des  $\frac{1}{2}$  plans différents de frontière  $g_2(D_2)$  sur laquelle se trouve  $\beta_2$



Considérons le triangle  $g_2(A_1 A_2 A_3)$  (figure)  
Les points  $g_2(A_3), \beta_3, g_2(A_1)$  sont dans le  $\frac{1}{2}$  plan I de frontière  $g_2(D_2)$ .

L'image de  $g_2(A_1)$  par la symétrie  $\sigma_{g_2(D_2)}$  est donc dans le  $\frac{1}{2}$  plan II.

$$\text{or } \sigma_{g_2(D_2)}(g_2(A_1)) = g_2 \sigma_{D_2} g_2^{-1}(g_2(A_1))$$

(20)

soit encore :

$$\begin{aligned}\sigma_{g_2(D_2)}(g_2(A_1)) &= g_2 \circ \sigma_{D_2}(A_1) \\ &= (\sigma_{D_1} \circ \sigma_{D_2}) \circ \sigma_{D_2}(A_1) \\ &= \sigma_{D_1}(A_1). \\ &= g_1(A_1)\end{aligned}$$

donc  $g_1(A_1)$  est dans le  $\frac{1}{2}$  plan II alors que  
 $\beta_3$  est dans le  $\frac{1}{2}$  plan I

De plus  $g_2(A_2)$  est sur la droite  $g_2(D_2)$   
mais  $g_2(A_2) = g_1(A_2)$  (car  $A_2 \in D_2$ )

donc  $g_1(A_2)$  est sur la droite  $g_2(D_2)$

En rapprochant les 2 derniers résultats :

- $g_1(A_1)$  dans le  $\frac{1}{2}$  plan II de frontière  $g_2(D_2)$ .
- $g_1(A_2)$  sur  $g_2(D_2)$

On en conclut que :

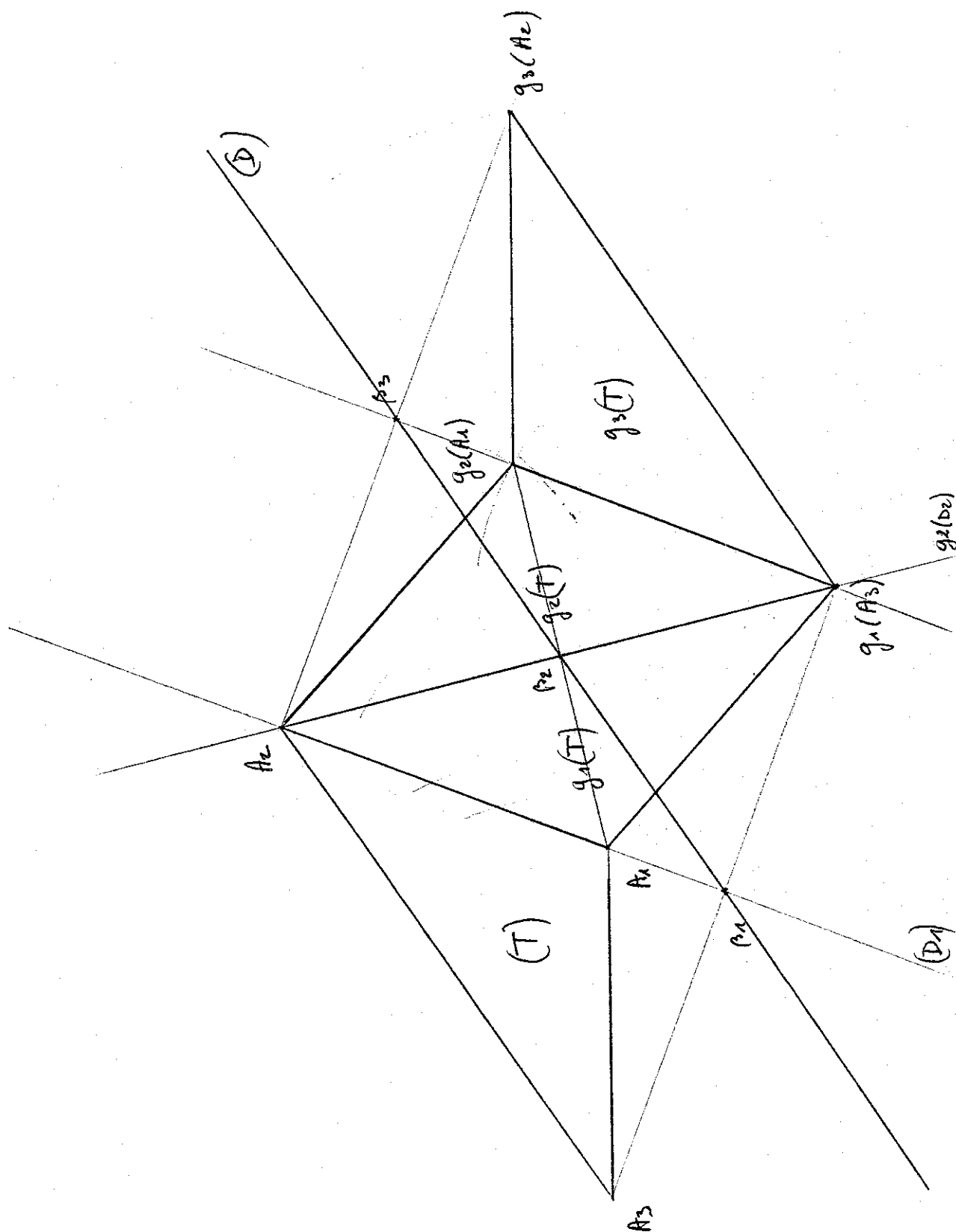
$[g_1(A_1) g_1(A_2)]$  est dans le  $\frac{1}{2}$  plan II  
or  $\beta_1$  est sur ce segment donc  
 $\beta_1$  est dans le  $\frac{1}{2}$  plan II

On a donc finalement démontré que

oui  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont alignés dans l'ordre  
de leurs indices.



figure 2 bis



5) Conclusion: proposition 6.

Un triangle admet une trajectoire de billard unique. si ce triangle a ses trois angles aigus.

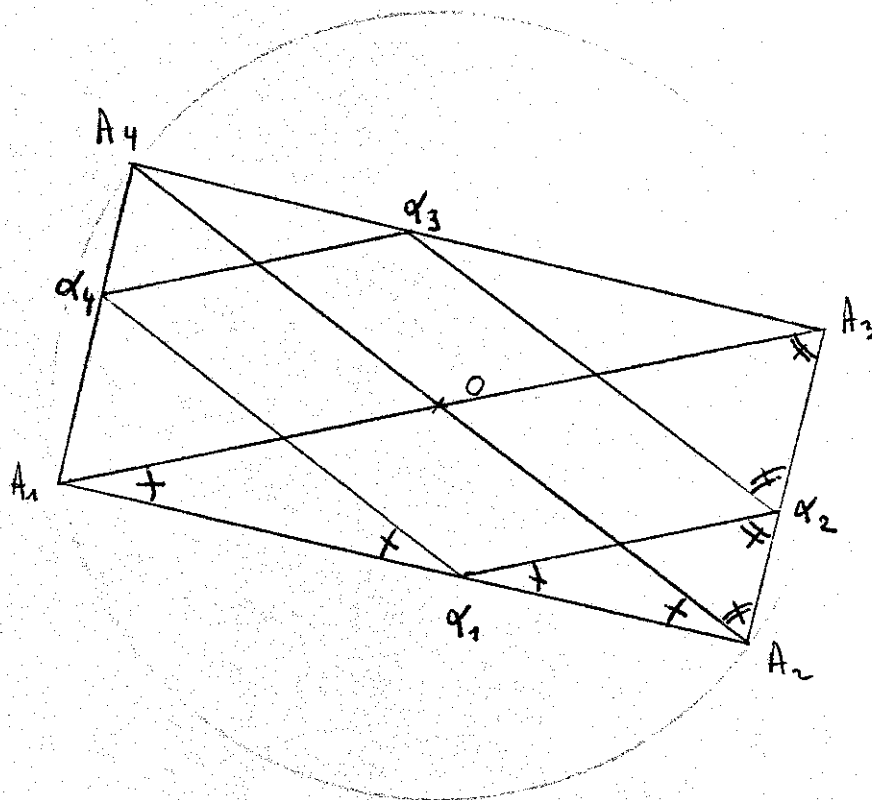
oui

Les sommets de cette trajectoire sont les pieds des trois hauteurs

Si le triangle a un angle obtus il y a une droite stable par  $q$ , mais pas de trajectoire de billard (figure 2bis)  
et un triangle de périmètre minimum  
Muscot (réduit à l'équerre)



# Dessin (3)



Les angles à la base du triangle isocèle  $OA_1A_2$  sont égaux. Les parallèles aux diagonales créent des angles correspondant et donc égaux à ces derniers. La trajectoire  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$  ainsi construite est bien une trajectoire de billard.

### 3 - Cas du quadrilatère -

On a vu que lorsque le nombre de côtés est pair une condition nécessaire pour qu'il existe une droite stable par  $g$  est que  $\sum_{p=1}^{n/2} (\mathcal{D}_p, \mathcal{D}_{p+1}) = 0 \pmod{\pi}$  et que dans ce cas  $g$  est une translation.

Qui Pour un quadrilatère cette condition signifie que  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sont cocycliques. Pour que, en plus, ce quadrilatère ait une trajectoire de billard on a la proposition suivante :

#### Proposition 7

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe, inscriptible dans un cercle, ait une trajectoire de billard est que le centre du cercle circonscrit soit intérieur au quadrilatère.

La démonstration de cette proposition est assez longue aussi l'a-t-on découpée dans un but de plus de clarté et passe-t-on par la démonstration des propositions 8 à 16 qui suivent.

Dessin ③ 3-1 Si le quadrilatère est un rectangle, c'est quasi-immédiat. En effet, en partant de n'importe quel point de  $[A_i, A_{i+1}]$  si on suit une trajectoire parallèle aux diagonales on obtient une trajectoire de billard. (voir dessin).

(23)

3.2. Si le quadrilatère n'est pas un rectangle, compte

et les angles  
aigus? Ils  
sont éliminés  
de toute  
la suite...

tenu de la condition sur les angles, il possède deux angles obtus et deux angles aigus. Les angles aigus étant consécutifs on peut toujours supposer qu'ils ont pour sommets  $A_3$  et  $A_4$  de sorte que les angles intérieurs de sommets  $A_1$  et  $A_2$  sont obtus. De plus on nomme le quadrilatère de telle façon que l'orientation de la figure soit dans le sens conventionnel, ainsi les angles  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$  et  $(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$  sont intérieurs au polygone, ces angles étant considérés, si cela n'est pas précisé dans leur orientation positive.

On rappelle que  $g_i([A_i, A_{i+1}[) = g_{i+1}([A_i, A_{i+1}[)$   
et donc  $g_1([A_1, A_2[) = [A_1, A_2[$

$$g_2([A_2, A_3[) = g_1([A_2, A_3[) = [A_2, g_1(A_3)[$$

$$g_3([A_3, A_4[) = g_2([A_3, A_4[) = [g_1(A_3), g_2(A_3)[$$

$$g_4([A_4, A_1[) = g_3([A_4, A_1[) = [g_2(A_4), g_3(A_1)[$$

La dernière ligne montre que

$$g(A_4) = g_4(A_4) = g_2(A_4)$$

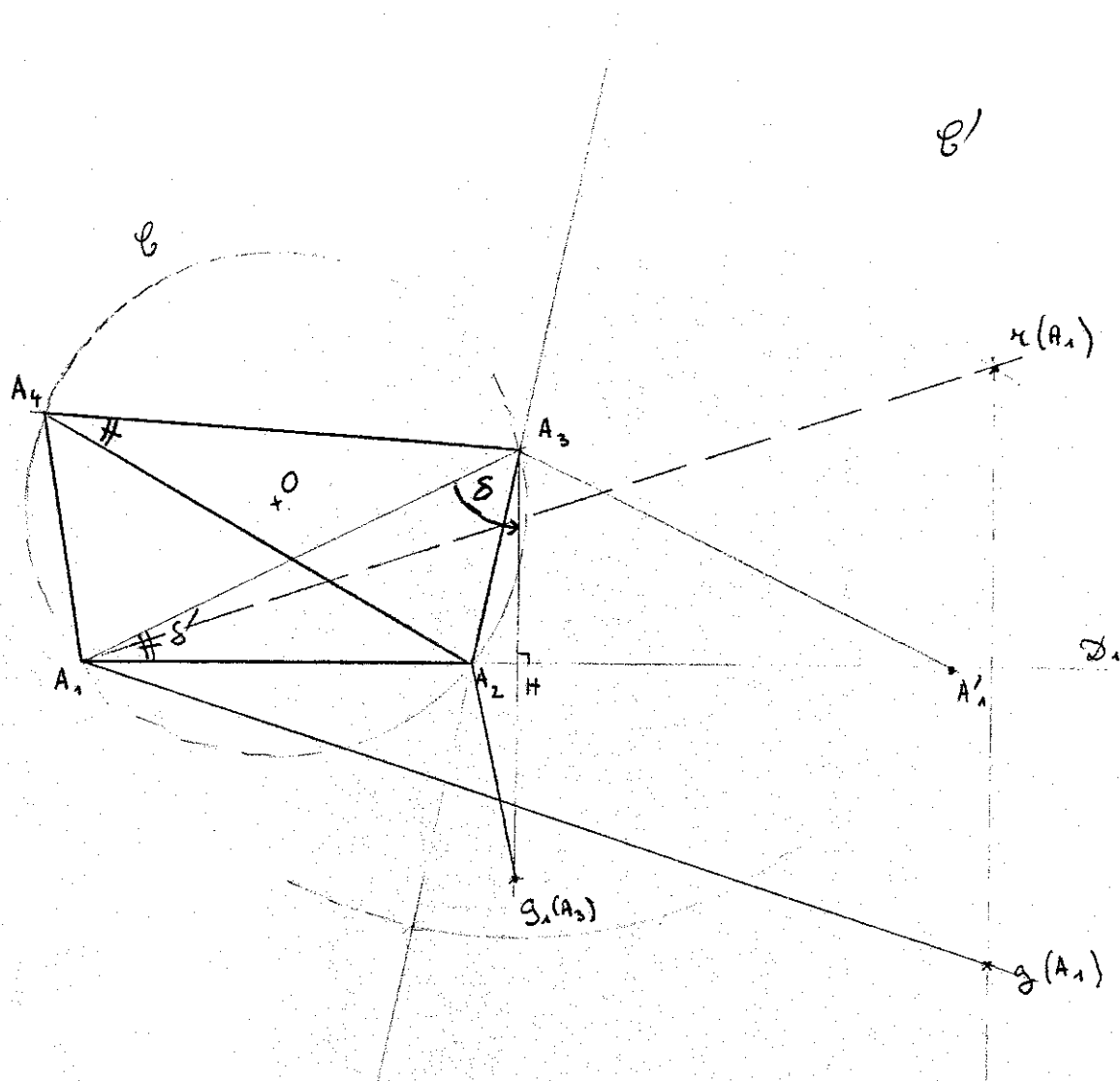
$g$  étant une translation les droites de la direction de translation sont stables et parallèles, en particulier  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  et  $\langle A_4, g(A_4) \rangle$  sont la frontière d'une bande  $B$  à bords parallèles.

$$\text{D'autre part } g(A_1) = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \sigma_{\mathcal{D}_3} \circ \sigma_{\mathcal{D}_4}(A_1)$$

$$\begin{aligned} A_1 \in \mathcal{D}_4 \text{ donc } g(A_1) &= \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \sigma_{\mathcal{D}_3}(A_1) \\ &= \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \pi(A_1) \end{aligned}$$



Dessin (4)



où  $r$  est la rotation de centre  $A_3$  et d'angle  $2(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$

### 3.2-1. Proposition 8

Dessin (4)

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $r(A_1)$  et  $A_3$  soient dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\mathcal{D}_1$  est que le centre du cercle circonscrit soit à l'intérieur du quadrilatère  $A_1 A_2 A_3 A_4$ .

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A_3$  sur  $\mathcal{D}_1$ . Le triangle  $A_1 A_2 A_3$  ayant, par hypothèse, un angle obtus en  $A_2$ , le point  $H$  est à l'extérieur de ce triangle et du côté de  $A_2$ . Ainsi, l'angle aigu  $(\angle A_3, A_1, \angle A_3, H)$  est de même orientation que l'angle aigu  $(\angle A_3, A_1, \angle A_3, A_2)$  qui est lui-même de même orientation que l'angle aigu  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$ .

Le premier angle est aigu parce que dans un triangle rectangle en  $H$ , le second par hypothèse.

La droite  $\mathcal{D}_1$  est sécante au cercle  $\mathcal{C}'$  de centre  $A_3$  et de rayon  $[A_1, A_3]$  car  $A_1 \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{C}'$  et  $\mathcal{D}_1$  n'est pas tangente à  $\mathcal{C}'$  parce que dans le triangle  $A_3 A_1 A_2$  l'angle de sommet  $A_2$  est obtus ce qui implique que  $(\angle A_1, A_2, \angle A_1, A_3)$  n'est pas droit. Soit  $A'_1$  le deuxième point d'intersection.  $H$  est le pied de la hauteur issue du sommet principal du triangle isocèle  $A_1 A'_1 A_3$  donc  $\angle H, A_3$  est l'axe de symétrie de ce triangle et on a :

25

$$0 < (\angle A_3, A_1, \angle A_3, A'_1) = 2(\angle A_3, A_1, \angle A_3, H) < \pi$$

$$\text{on pose } (\angle A_3, A_1, \angle A_3, H) = \delta.$$

Il est clair alors que pour que  $r(A_1)$  et  $A_3$  soient dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\mathcal{D}_1$ , il faut et il suffit que l'angle de rotation  $2(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$  de  $r$  soit supérieur à  $2\delta$  c'est à dire

$$(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2) > \delta$$

Dans le triangle  $A_1 H A_3$  rectangle en  $H$ ,  $\delta$  est le complémentaire de  $(\angle A_1, A_2, \angle A_1, A_3) = \delta'$  ce qui s'écrit  $\delta + \delta' = \frac{\pi}{2}$

Par ailleurs, dans le cercle  $\mathcal{C}$ , circonscrit au quadrilatère,  $(\angle A_1, A_2, \angle A_1, A_3)$  et  $(\angle A_4, A_2, \angle A_4, A_3)$  interceptent le même arc, ils sont donc égaux et  $(\angle A_4, A_2, \angle A_4, A_3) + \delta = \frac{\pi}{2}$

\* Si  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2) > \delta$  alors comme

$$(\angle A_3, A_4, \angle A_3, A_2) = (\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2),$$

$$(\angle A_4, A_2, \angle A_4, A_3) + (\angle A_3, A_4, \angle A_3, A_2) > \frac{\pi}{2}$$

et donc dans le triangle  $A_2 A_3 A_4$  le troisième angle  $(\angle A_2, A_3, \angle A_2, A_4) < \frac{\pi}{2}$

Le triangle a donc ses trois angles aigus ce qui signifie que le centre  $O$  du cercle  $\mathcal{C}$  est à l'intérieur du triangle donc du quadrilatère.

Si  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2) < \delta$  les inégalités sont inversées l'angle de sommet  $A_2$  dans le triangle  $A_2 A_3 A_4$  est obtus,  $O$  n'est pas dans ce triangle et comme il n'est pas non plus dans  $A_1 A_2 A_4$  qui possède, par hypothèse un angle obtus en  $A_1$ , il elle n'est pas dans le quadrilatère.

Enfin, réciproquement si  $O$  est dans le quadrilatère, comme il n'est pas dans  $A_1 A_2 A_3$ , on vient de le voir, il est dans  $A_2 A_3 A_4$  qui a donc ses trois angles aigus ce qui en remontant la démonstration précédente amène à  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2) > \delta$ .

### Dessin (4) 3.2.2. Proposition 9.

$A_2$  et

$r(A_1)$  sont dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\langle A_1, A_3 \rangle$

Les angles  $(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_2)$  et  $(\langle A_3, A_1 \rangle, \langle A_3, A_2 \rangle)$  sont de même orientation et tous les deux aigus donc les angles  $(\langle A_3, A_1 \rangle, \langle A_3, A_2 \rangle)$  et  $(\langle A_3, A_1 \rangle, \langle A_3, r(A_1) \rangle)$  sont de même orientation et tous deux strictement compris entre 0 et  $\pi$ . C'est une condition nécessaire et suffisante pour que  $A_2$  et  $r(A_1)$  soient dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\langle A_1, A_3 \rangle$

qui

### 3.2.3. Proposition 10.

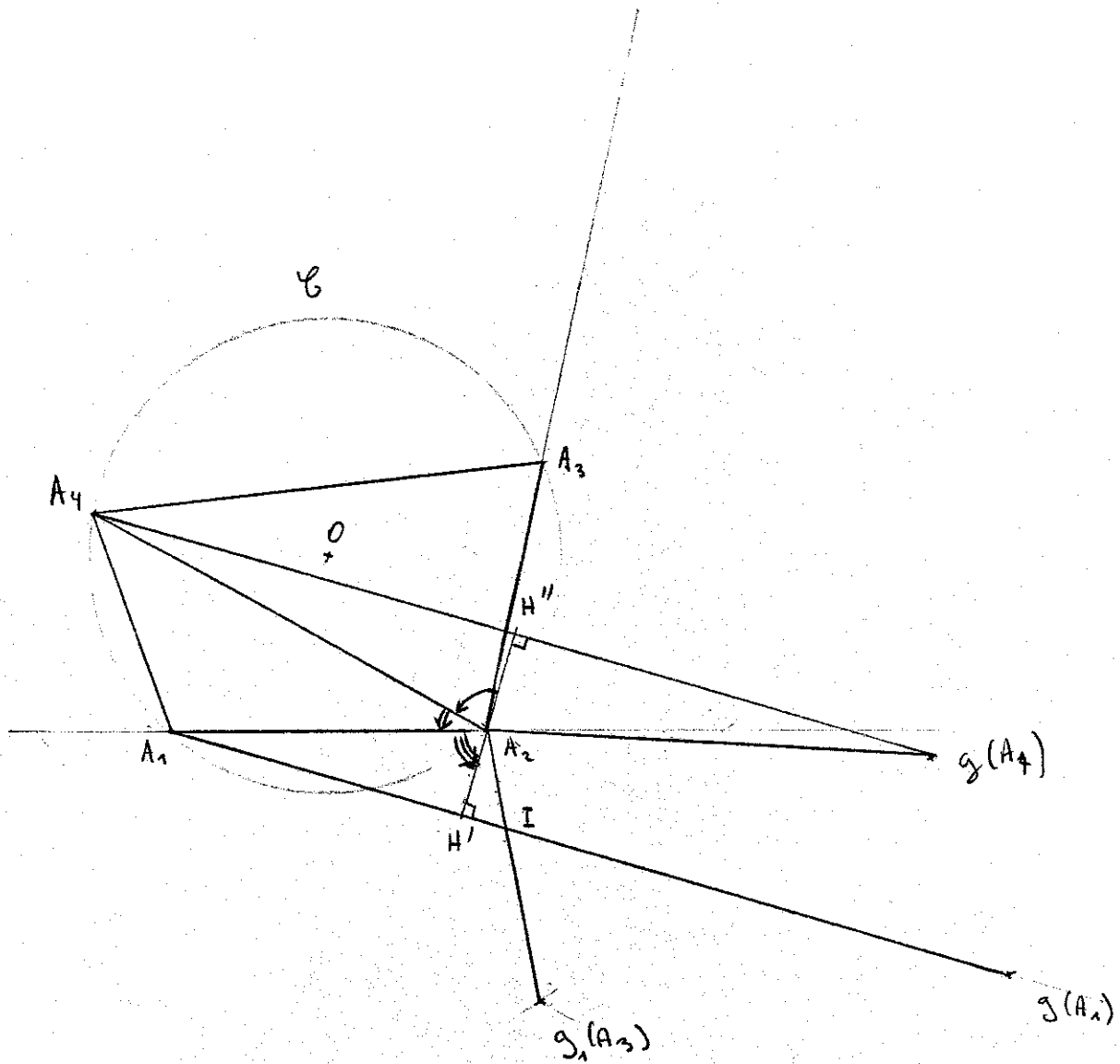
Dessin (4)

Si  $O$  est intérieur au quadrilatère, la demi-droite  $]A_1, r(A_1)[$  coupe  $]A_2, A_3[$ .

Des propositions 8 et 9 on déduit que  $r(A_1)$  est (strictement) compris dans l'intersection du demi-plan ouvert de frontière  $\mathcal{D}_1$  contenant  $A_3$  et du demi-plan ouvert de frontière  $\langle A_1, A_3 \rangle$  contenant  $A_2$ . Donc la demi droite  $]A_1, r(A_1)[$



Dessin (5)



(27)

est incluse dans le secteur saillant ouvert de côtés  $]A_1, A_3>$  et  $]A_1, A_2>$ . Soit  $S$  ce secteur. Cette demi-droite, étant de plus issue du sommet, elle coupe tout segment ouvert dont les extrémités sont sur les côtés du secteur  $S$ . En particulier  $]A_1, r(A_1)>$  coupe  $]A_2, A_3[$

qui

### 3.2.4. Proposition 11.

Dessin (4)

Avec la même hypothèse la demi-droite  $]A_1, g(A_1)>$  coupe le segment  $g_2(]A_2, A_3[)$

On sait que:

$$g_2(]A_2, A_3[) = ]A_2, g_1(A_3)[ = g_1(]A_2, A_3[)$$

$$g(A_1) = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ r(A_1)$$

$$]A_1, r(A_1)> \text{ coupe } ]A_2, A_3[$$

Par symétrie par rapport à  $\mathcal{D}_1$ ,

$$\sigma_{\mathcal{D}_1}(]A_1, r(A_1)>) \text{ coupe } g_1(]A_2, A_3[)$$

c'est à dire  $g_2(]A_2, A_3[)$

### 3.2.5. Proposition 12.

Dessin (5)

Toujours avec la même hypothèse,  
 $A_2$  est à l'intérieur de la bande  $\mathcal{B}$

Soient  $H'$  et  $H''$  les projetés orthogonaux de  $A_2$  sur, respectivement,  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  et  $\langle A_4, g(A_4) \rangle$

$$\text{On a vu plus haut que } g(A_4) = g_2(A_4)$$

$$= \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2}(A_4)$$

$g(A_4)$  est l'image de  $A_4$  dans une rotation  $\rho$  de centre  $A_2$  et d'angle  $\angle(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$

$(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$  est obtus par hypothèse donc l'angle de rotation est supérieur à  $\pi$  et inférieur à  $2\pi$ .

On en déduit que  $(\angle A_2, g(A_4), \angle A_2, A_4)$  est strictement compris entre 0 et  $\pi$ . Or le triangle  $A_2 g(A_4) A_4$  est isocèle de sommet  $A_2$  et donc  $[A_2, H'']$  est la bissectrice de l'angle  $(\angle A_2, g(A_4), \angle A_2, A_4)$  ce qui donne  $0 < (\angle A_2, H''), \angle A_2, A_4 < \frac{\pi}{2}$  (i)

Soit  $I$  le point d'intersection de  $]A_1, g(A_1)>$  et  $]A_2, g_1(A_2)>$  existe-t-il  $H'$ ?

Dans le triangle  $A_1 I A_2$  l'angle de sommet  $A_2$  est le symétrique par rapport à  $\mathcal{D}_1$  de l'angle de sommet  $A_2$  du quadrilatère, lequel angle est obtus. Cela signifie que  $[A_2, H']$  est intérieur au triangle  $A_1 I A_2$  et donc  $H' \in ]A_1, I[$  (ii)

La symétrie étant une isométrie indirecte on a:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1) &= -g_1[(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)] = g_1[(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)] \\ &= (\mathcal{D}_1, g_1(\mathcal{D}_2)) \\ &= (\angle A_2, A_1, \angle A_2, I) \end{aligned}$$

et donc, compte tenu de (ii)

$(\angle A_2, A_1, \angle A_2, H')$  qui est de même orientation que  $(\angle A_2, A_1, \angle A_2, I)$  est aigu car dans le triangle  $A_1 H' A_2$  rectangle en  $H'$ .

Comme par ailleurs  $(\angle A_2, A_4, \angle A_2, A_1)$  est aigu car d'orientation positive dans le triangle  $A_1 A_2 A_4$  qui possède un angle obtus en  $A_1$  on obtient:

$$0 < (\angle A_2, A_4, \angle A_2, A_1) + (\angle A_2, A_1, \angle A_2, H') < \pi$$

d'où  $0 < (\angle A_2, A_4, \angle A_2, H') < \pi$  (iii)

(23)

En considérant (i) et (iii) il vient :

$$0 < (\langle A_2, H'' \rangle, \langle A_2, A_4 \rangle) + (\langle A_2, A_2 \rangle, \langle A_2, H' \rangle) < 2\pi$$

c'est à dire

$$0 < (\langle A_2, H'' \rangle, \langle A_2, H' \rangle) < 2\pi$$

Or les côtés de la bande  $B$  étant parallèles, les points  $H', A_2$  et  $H''$  sont alignés. L'encadrement ci-dessus impose donc  $(\langle A_2, H'' \rangle, \langle A_2, H' \rangle) = \pi$

$$\text{c'est à dire } A_2 \in ]H', H''[ \quad (iv)$$

( $A_2$  n'est pas confondu avec  $H''$  car  $2(\angle_2 \angle_1) > \pi$  et  $A_4, A_2$  et  $g(A_4)$  ne sont donc pas alignés).

(iv) signifie que  $A_2 \in B$

### 3.2.6. Proposition 13.

Dessin (5)

Avec la même hypothèse  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  n'est pas parallèle à  $\mathcal{D}_4$ .

En effet  $A_2$  étant dans  $B$ , cette bande n'est pas vide (il s'agit d'une bande ouverte) et donc les bords en sont disjoints.

La droite  $\mathcal{D}_4$  qui contient  $A_4$  du bord  $\langle A_4, g(A_4) \rangle$  et  $A_1$  du bord  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  est donc sécante à  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$

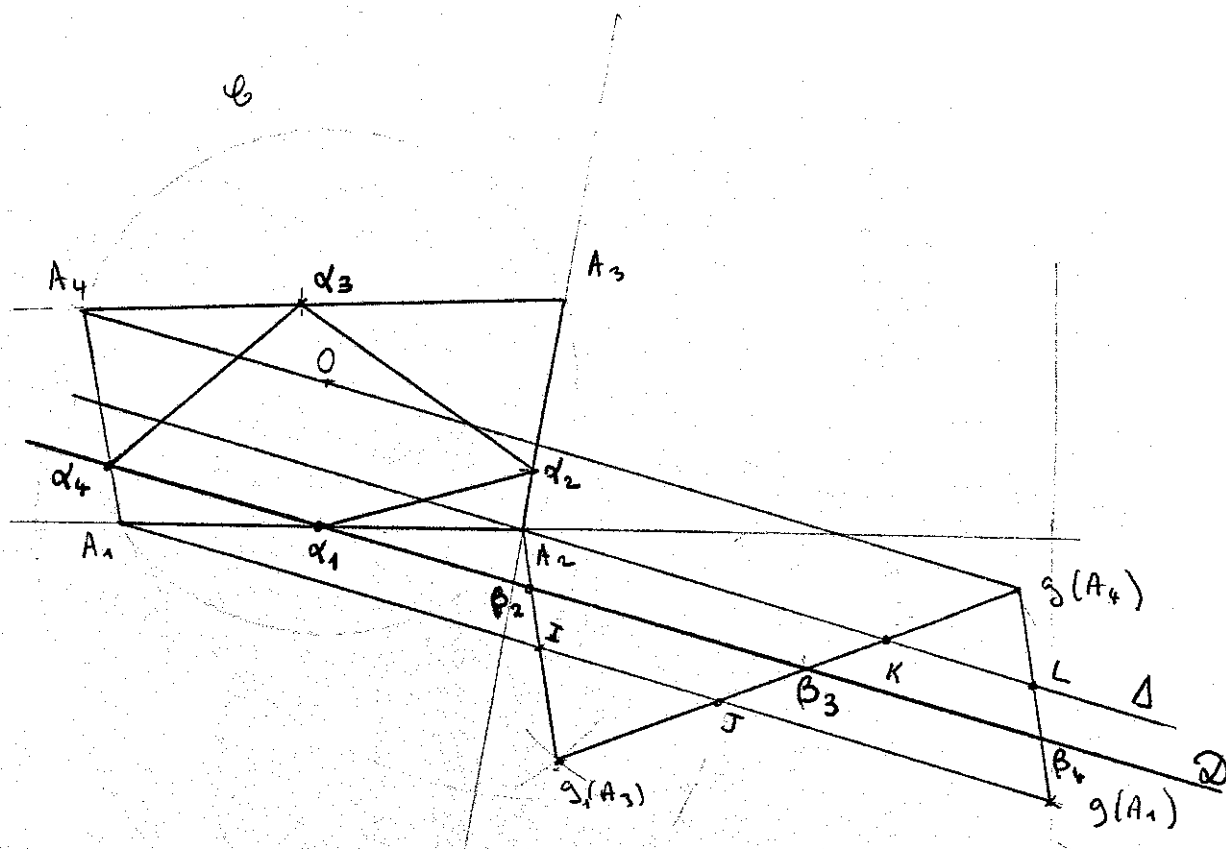
### 3.2.7. Proposition 14.

Dessin (6)

Toujours avec la même hypothèse,  
 $\langle A, g(A_1) \rangle$  coupe  $g_3([A_3, A_4])$

$A_2$  est dans  $B$  donc  $A_2$  et  $\langle A_4, g(A_4) \rangle$

Dessin ⑥



sont dans un même demi-plan ouvert de frontière  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  c'est à dire  $A_2$  et  $g(A_4)$  sont dans ce même demi-plan.

Or  $]A_2, g_1(A_3)[$  est coupé par  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  donc  $A_2$  et  $g_1(A_3)$  sont dans des demi-plans ouverts opposés de frontière  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$ . Par suite  $g(A_4)$  et  $g_1(A_3)$  sont également dans des demi-plans opposés de frontière  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$ , cela implique que  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  coupe  $]g_1(A_3), g(A_4)[$  c'est à dire  $]g_1(A_3), g_2(A_4)[ = g_3([A_3, A_4])$

Soit  $J$  le point d'intersection.

### 3.2.8 - Proposition 15.

Dessin (6)

Avec l'hypothèse 0 intérieur au quadrilatère la bande ouverte  $B'$  dont la frontière est constituée par la droite  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  et la droite  $\Delta$  passant par  $A_2$  qui lui est parallèle est la bande de résolution.

Cela signifie que toute droite parallèle à  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  incluse dans  $B'$  vérifie les hypothèses de la proposition 4 et donc permet d'obtenir une trajectoire de billard.

Il suffit d'appliquer la propriété suivante: toute droite incluse dans une bande à bords parallèles est sécante à tout segment dont les extrémités sont sur des bords distincts

Ainsi  $\Delta \subset B$ ,  $J \in \langle A_1, g(A_1) \rangle$  et  $g(A_4) \in \langle A_4, g(A_4) \rangle \Rightarrow \Delta$  coupe  $]J, g(A_4)[$

(31)

Soit  $K$  ce point d'intersection.

$g(A_1) \in \langle A_1, g(A_1) \rangle$  donc  $\Delta$  coupe  $]g(A_1), g(A_4)[$ . Soit  $L$  ce point d'intersection. On obtient

$$]J, K[ \subset g_3([A_3, A_4]) \text{ et } ]L, g(A_1)[ \subset g_4([A_4, A_1])$$

Ainsi les points  $A_1, I, J, g(A_1)$  étant sur  $\langle A_1, g(A_1) \rangle$  et  $A_2, K, L$  étant sur  $\Delta$ , toute droite  $\mathcal{D}$  incluse dans  $B'$  (donc de même direction que  $B'$ ) coupe  $]A_1, A_2[, ]A_2, I[, ]J, K[$  et  $]L, g(A_1)[$  c'est à dire  $\mathcal{D}$  coupe

$g_1([A_1, A_2]), g_2([A_2, A_3]), g_3([A_3, A_4])$  et  $g_4([A_4, A_1])$  en des points  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  et  $\beta_4$ .

$\beta_4$  est sur  $g_4([A_4, A_1]) = g([A_4, A_1])$  donc  $g^{-1}(\beta_4) = \alpha_4$  est sur  $]A_4, A_1[$ .

$\beta_1 \in g_1([A_1, A_2]) = [A_1, A_2]$  on pose  $\beta_1 = \alpha_1$  et donc  $\mathcal{D} = \langle \alpha_4, \alpha_1 \rangle$

$$\text{De plus } g_i(P) = \sigma_{g_{i-1}(\mathcal{D}_i)} \circ g_{i-1}(P)$$

donc les  $g_i(P)$  étant convexes,  $g_i(P)$  et  $g_{i-1}(P)$  sont dans des demi-plan opposés de frontière  $g_{i-1}(\mathcal{D}_i)$ .

$$\beta_i \in g_{i-1}(\mathcal{D}_i) = g_i(\mathcal{D}_i) \text{ (la frontière)}$$

$$\beta_{i-1} \in g_{i-1}(P)$$

$$\beta_{i+1} \in g_{i+1}(\mathcal{D}_i) = g_i(\mathcal{D}_i) \in g_i(P)$$

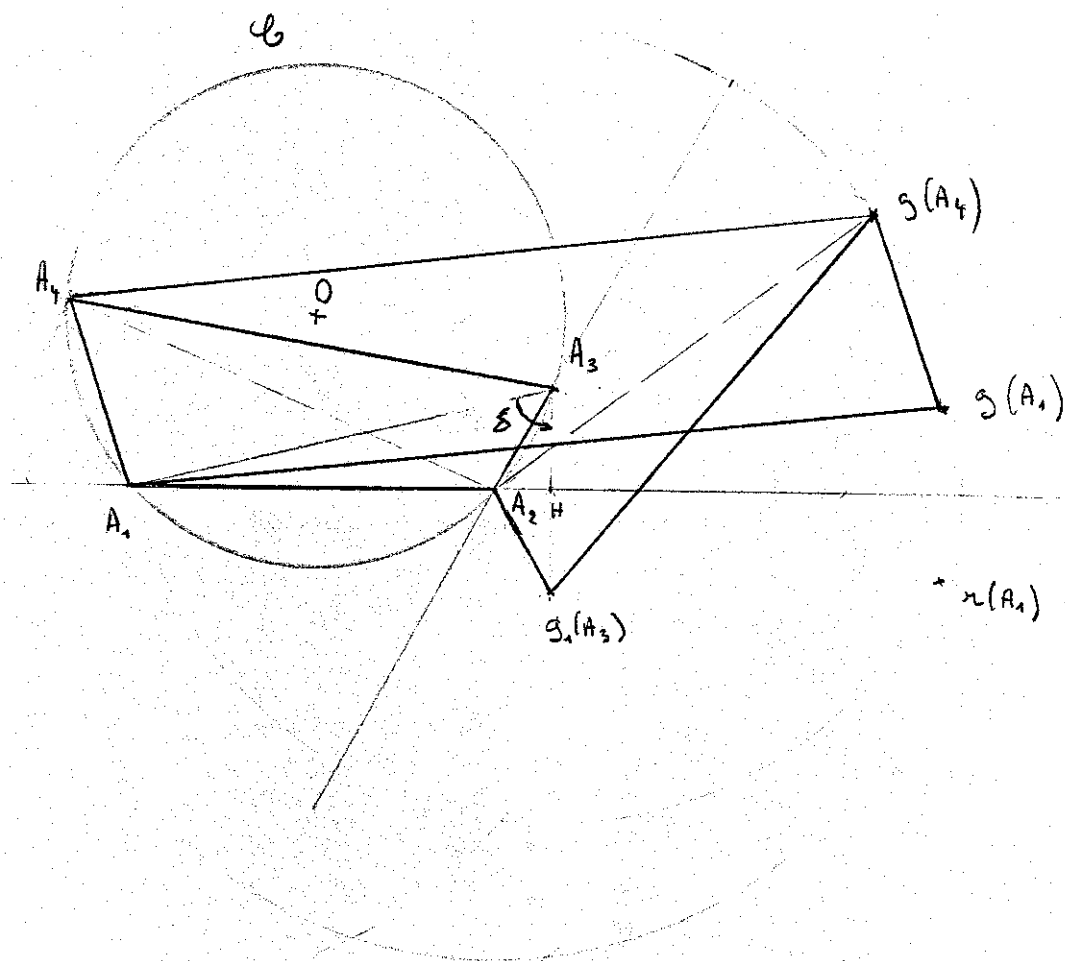
donc la droite  $\langle \beta_{i-1}, \beta_{i+1} \rangle$  coupe la frontière  $g_{i-1}(\mathcal{D}_i)$  en un point qui ne peut être que  $\beta_i$  par hypothèse donc

$\beta_i \in ]\beta_{i-1}, \beta_{i+1}[$  ce qui assure l'ordre des points qui est donc ici, en tenant





Dessin ⑦



compte que pour la même raison  $\alpha_1 \in ]\alpha_4, \beta_2[$  (32)

$\alpha_4, \alpha_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$

La droite  $\mathcal{D}$  répond aux hypothèses de la proposition 4.

### 3.2.9 Proposition 16.

Dessin (7)

Si  $n(A_1)$  et  $A_3$  ne sont pas dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\mathcal{D}_1$  il n'y a pas de trajectoire de billard dans le quadrilatère.

D'après la proposition 8 cette hypothèse équivaut à  $O$  n'est pas à l'intérieur du quadrilatère. Le triangle  $A_2 A_3 A_4$  qui ne contient donc pas  $O$  possède un angle obtus qui ne peut être qu'en  $A_2$  compte tenu des hypothèses sur  $A_3$  et  $A_4$ .

La rotation  $P$  transforme  $A_4$  en  $g(A_4)$  et a pour angle  $2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1)$  or

$$2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1) = (\angle A_2, A_3, \angle A_2, A_4) + (\angle A_2, A_4, \angle A_2, A_1)$$

ces deux angles étant de même orientation positive et avec

$\frac{\pi}{2} < (\angle A_2, A_3, \angle A_2, A_4) < \pi$  car c'est l'angle obtus du triangle  $A_2 A_3 A_4$ .

$$2(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1) = \underbrace{2(\angle A_2, A_3, \angle A_2, A_4)}_{> \pi} + 2(\angle A_2, A_4, \angle A_2, A_1)$$

Cela suffit pour que  $A_4$  et  $g(A_4)$  soient dans le même demi-plan <sup>ouvert</sup> de frontière  $\mathcal{D}_1$ .

L'hypothèse indique par ailleurs que  $A_3$  et

(33)

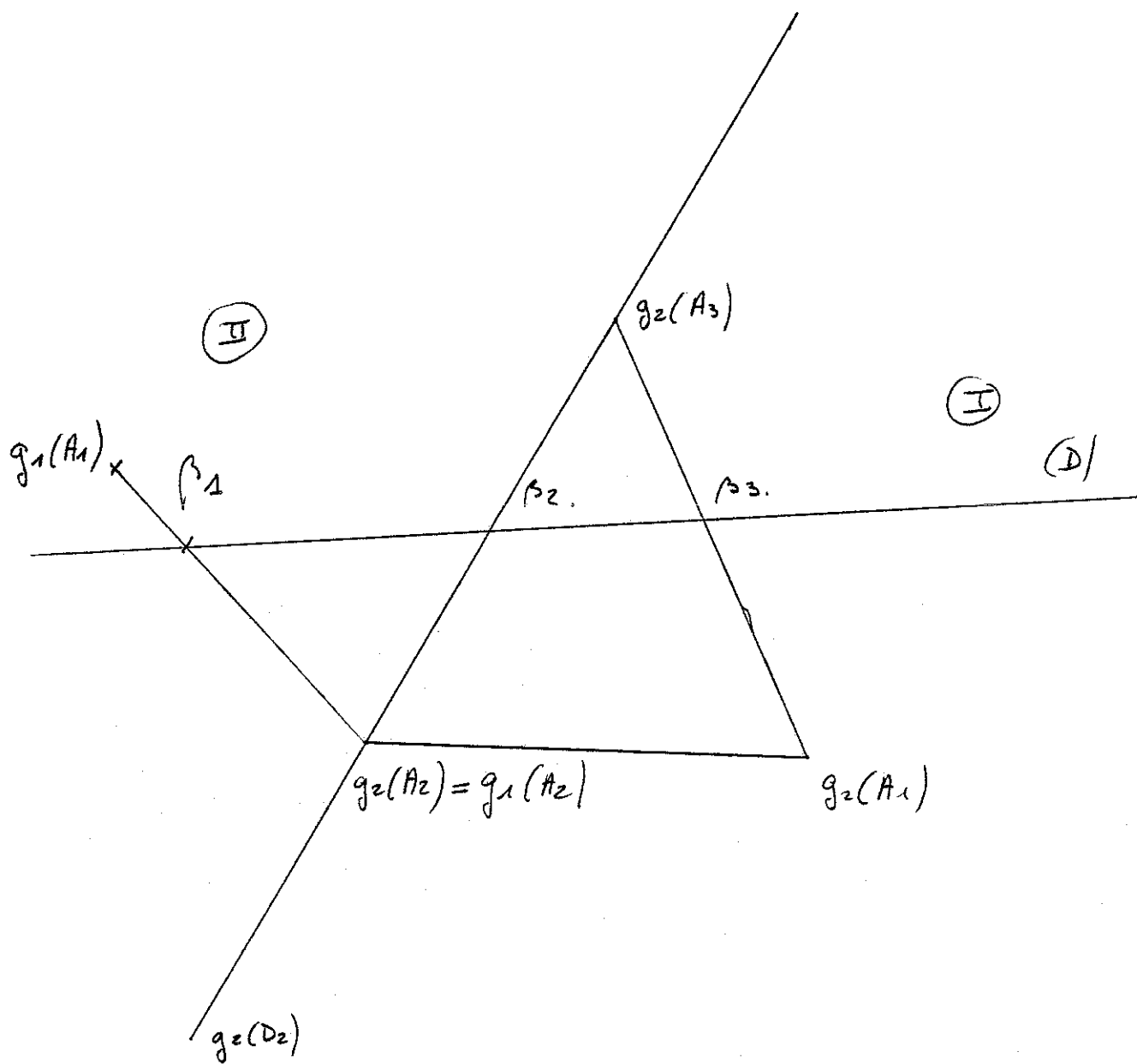
$\pi(A_1)$  ne sont pas dans le même demi-plan ouvert de frontière  $\mathcal{D}_1$  donc  $g(A_1)$  qui est dans le demi-plan opposé à  $\pi(A_1)$  est donc dans le même demi-plan <sup>fermé</sup> que  $A_3$  et donc que  $A_4$  et  $g(A_4)$ .  
Ainsi le parallélogramme  $A_1 g(A_1) g(A_4) A_4$  est inclus dans le demi plan fermé de frontière  $\mathcal{D}_1$ .

La frontière et le parallélogramme ont, au plus en commun le côté  $[A_1, g(A_1)]$  et donc  $A_2$  est au mieux sur le côté mais dans tous les cas pas à l'intérieur du parallélogramme.

Une droite incluse dans  $B$  qui coupe  $g_4([A_4, A_1])$  coupe  $[A_4, A_1]$ , si  $\alpha_4$  et  $\beta_4$  sont respectivement ces deux points alors  $\beta_2$  <sup>même</sup> ~~si~~ il existe, n'appartient pas à  $[\alpha_4, \beta_4]$  car  $[\alpha_4, \beta_4]$  est inclus de le parallélogramme ouvert et l'intersection de ce parallélogramme avec  $[A_1, A_2]$  est vide.

Les hypothèses de la proposition 4 ne sont pas réunies donc le quadrilatère ne possède pas de trajectoire de billard.

Ceci achève complètement la démonstration de la proposition 7.





C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°2 (transvections, dilatations)

A l'aide des documents ci-joints, résoudre le problème proposé (on en donnera une rédaction).

Rédiger ensuite un exercice sur les transvections affines et les dilatations affines (en rédigeant aussi les démonstrations).

Documents joints :

Tisseron Géométries affine, projective, et euclidienne (Hermann) pp. 71 à 79

Lelong-Ferrand et Arnaudès, Cours de mathématiques Tome 3 (Dunod) pp. 6 à 11 et 44 à 47

Arnaudès et Fraisse, Cours de mathématiques Tome 1 (Dunod) pp. 204 à 211



19. Dans tout le problème,  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 2$  sur un corps commutatif  $K$ ,  $H$  un hyperplan de  $E$ .

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  laissant invariant tout élément de  $H$ .

1° Montrer que, si  $a \in E - H$ , on peut écrire  $u(a) = \gamma a + t$  où  $t \in H$  et où  $\gamma$  est un scalaire indépendant de  $a$ .

2° On suppose  $\gamma \neq 1$ . Montrer que  $\gamma$  est valeur propre de  $u$ , que le sous-espace propre associé à  $\gamma$  est une droite  $S$ , supplémentaire de  $H$ . On dit alors que  $u$  est une dilatation d'hyperplan  $H$ , de droite  $S$  et de rapport  $\gamma$ .

Soit  $V$  un sous-espace de  $E$ . Montrer que, pour que  $u(V) \subset V$ , il faut et il suffit que  $V \subset H$  ou  $S \subset V$ .

3° On suppose  $\gamma = 1$ . On dit alors que  $u$  est une transvection.

Soit  $g(x) = 0$  une équation de  $H$  ( $g$  étant une forme linéaire). Montrer qu'il existe un vecteur unique  $c \in H$  tel que,  $\forall x \in E$ ,  $u(x) = x + g(x)c$ . Réciproque? Montrer que  $u$  est une bijection. Si  $u \neq Id$  prouver que la droite  $T$  passant par  $c$  est indépendante de l'équation de  $H$  choisie. On dit alors que  $u$  est une transvection d'hyperplan  $H$  et de droite  $T$ . Quels sont les valeurs propres de  $u$ , les sous-espaces associés?

Soit  $V$  un sous-espace de  $E$ . A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) a-t-on  $u(V) \subset V$ ?

4° Soient  $u, u'$  deux transvections  $\neq Id$  d'hyperplans respectifs  $H$  et  $H'$ , de droites respectives  $T$  et  $T'$ .

a) Montrer que  $uu' = u'u \implies D \subset H'$  et  $D' \subset H$ .

b) A quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s)  $uu'$  est-il une transvection?

5° Soient  $r$  un automorphisme de  $E$ ,  $u$  une transvection (resp. une dilatation). Montrer que  $uru^{-1}$  est une transvection (resp. une dilatation) dont on précisera les éléments en fonction de ceux de  $u$ .

6° Soit  $\Gamma(E, H)$  le groupe des automorphismes de  $E$  laissant invariants les points de  $H$ . Montrer que l'ensemble  $\Theta(E, H)$  des transvections laissant invariants les points de  $H$  est un sous-groupe commutatif distingué de  $\Gamma(E, H)$ , isomorphe au

groupe additif  $H$ . Montrer que le groupe quotient  $\Gamma(E, H)/\Theta(E, H)$  est isomorphe au groupe multiplicatif  $K - \{0\}$ . (On précisera la correspondance).

7° Soit  $T(E)$  le sous-groupe de  $GL(E)$  engendré par les transvections de  $E$ .

a) Montrer que  $T(E)$  est distingué dans  $GL(E)$ .

b) Montrer que, si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs non nuls de  $E$ , il existe un  $\sigma \in T(E)$  tel que  $\sigma(x) = y$ .

Compléments d'Algèbre linéaire  
(Lesieur, Temam, Lefebvre)  
(Armand Colin)





C4 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°4 (groupe d'isométries du cube)

A l'aide du polycopié et des documents ci-joints, résoudre d'abord l'exercice ci-joint.

Donner ensuite deux démonstrations différentes permettant d'obtenir le groupe des isométries du cube (une inspirée de l'exemple 4 des documents et l'autre tirée du polycopié).

On demande de rédiger chaque démonstration de la façon suivante : indiquer d'abord la suite des propositions choisies pour arriver au résultat, en dégagant bien le raisonnement adopté, puis donner les démonstrations complètes de chacune de ces propositions.

Il faut donc réaliser un découpage, laissé à l'initiative de chacun, et montrer l'enchaînement qui conduit au résultat.

Documents joints :

Arnaudiès et Fraisse Cours de mathématiques Tome 1 (Dunod) pp. 238 à 245



**EXERCICE** : On considère dans  $\mathbb{R}^3$  (espace affine euclidien) un tétraèdre régulier MNPQ. On appelle J le groupe des isométries conservant globalement l'ensemble S des sommets du tétraèdre.

1) Montrer que J agit sur S par  $(\phi, T) \mapsto \phi(T)$  si  $\phi$  est un élément de J et T un sommet du tétraèdre.

2) A toute isométrie  $\phi$  de J on associe la permutation de  $[1, 2, 3, 4]$  définie par  $\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4)$  où on identifie M, N, P et Q à 1, 2, 3 et 4.

Montrer que l'application de J dans  $S_4$  ainsi définie est un morphisme de groupes injectif. En déduire que J est isomorphe à un sous-groupe de  $S_4$ .

3) Préciser la nature géométrique de l'isométrie de J qui laisse M et N fixes et qui échange P et Q ? Quelle est l'image de cette isométrie dans l'isomorphisme précédent ?

En déduire que J est isomorphe à  $S_4$ .

*On rappelle que le groupe  $S_n$  est engendré par les transpositions.*

4) Montrer que le sous-groupe de J formé des seules isométries directes est isomorphe au sous-groupe alterné  $A_4$  des permutations paires de  $S_4$ .



FONCTIONS DE VARIABLE COMPLEXE (C3)

5 sujets (dont trois partiellement illustrés par des copies)



I Quelles propriétés des fonctions de variable complexe peut-on repérer dans les exercices de baccalauréat (série C ou E) où interviennent ces fonctions ? Il s'agit de propriétés qui ne sont pas connues des élèves de terminale mais qui justifient les énoncés.

Pouvez-vous proposer d'autres solutions que celles qui sont envisageables à ce niveau (utilisant le principe du maximum ou la conformité par exemple) ? On analysera une session d'examen.

II A l'aide des documents ci-joints, étudier la fonction de Joukowski (en particulier donner l'image des domaines ou des courbes où on a un résultat intéressant, en indiquant les démonstrations complètes) - *il s'agit de la fonction définie par  $f(z) = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$ .*

III A l'aide des documents ci-joints, donner une démonstration du théorème suivant (d'inversion globale) :

Si  $f$  est une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et si  $f$  est injective, alors  $f$  est un isomorphisme analytique de  $U$  sur  $V$  (où  $V = f(U)$ ) et, pour tout  $z$  de  $U$ ,  $f'(z) \neq 0$ .

En déduire qu'il n'y a pas d'isomorphisme analytique de  $\mathbb{C}$  sur le disque unité ouvert  $D$  (centre 0, rayon 1).

On rappelle qu'on appelle isomorphisme analytique une fonction bijective analytique ainsi que son inverse.

Documents joints :

Dieudonné Calcul infinitésimal (Hermann) pp. 250 à 255 et pp. 335 à 341

Cartan Théorie des fonctions analytiques (Hermann) pp. 181 à 187

Lang Complex analysis (Springer Verlag) pp. 72 à 79

Henrici Applied and computational Complex analysis Vol I (Wiley & Sons) pp. 294 à 299.

Krasnov et al. Fonctions d'une variable complexe et leurs applications (Mir) pp. 122 à 133





GRÉHAIGNE - LEGOFF Annie  
LEBRUN Lionel

Lundi 13 mai 1991

---

## C3 - Variables complexes

Partiel n: 2

Sujet n: 1

⑤

I) Exercices de Baccalauréat (C-E) et propriétés de fonctions de variable complexe

pages 2 à 21

II) Fonction de Joukowski

pages 23 à 54

III) Théorème de l'inversion globale

pages 55 à 68

I)

I Quelles propriétés des fonctions de variable complexe peut-on repérer dans les exercices de baccalauréat (série C ou E) où interviennent ces fonctions ? Il s'agit de propriétés qui ne sont pas connues des élèves de terminale mais qui justifient les énoncés.

Pouvez-vous proposer d'autres solutions que celles qui sont envisageables à ce niveau (utilisant le principe du maximum ou la conformité par exemple) ? On analysera une session d'examen.

① Fonction  $z \mapsto \frac{1}{z}$

Rappelons quelques propriétés de cette fonction

Son domaine de définition est  $\mathbb{C}^*$ . Elle est bijective de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}^*$ , elle est involutive.

Elle transforme droites et cercles en droites et cercles avec changement de nature possible. Plus précisément, en n'oubliant pas que 0 n'appartient ni au domaine de définition, ni à l'ensemble des images on a :

② droite passant par 0  $\xrightleftharpoons[f^{-1}=f]{f}$  droite passant par 0

en particulier, le plan étant rapporté au repère orthonormal  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ ,

demi-droite d'origine  $O$   $\xleftrightarrow[f^{-1}=f]{f}$  demi-droite d'origine  $O$  <sup>③</sup>  
 d'angle  $\theta$  par rapport à  $\vec{u}$  d'angle  $-\theta$  par rapport à  $\vec{u}$

② droite ne passant pas par  $O$   $\xleftrightarrow[f^{-1}=f]{f}$  cercle passant par  $O$

③ cercle ne passant pas par  $O$   $\xleftrightarrow[f^{-1}=f]{f}$  cercle ne passant pas par  $O$

en particulier,

cercle de centre  $O$ , de rayon  $r$   $\xleftrightarrow[f^{-1}=f]{f}$  cercle de centre  $O$ , de rayon  $\frac{1}{r}$

Prenons par exemple l'exercice ci-dessous

**Djibouti - Maroc - Portugal - Sénégal**  
**Juin 1986. 4 points (E)**

Soit  $f$  l'application de  $E = \mathbb{C} - \{-i\}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}.$$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on note  $M$  le point d'affixe  $z$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $B$  dont l'affixe  $z_0$  est telle que :

$$f(z_0) = 1 + 2i.$$

2. Soit  $z$  un élément de  $E$ . On note  $r$  le module de  $z + i$  et  $\alpha$  une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de  $f(z) - i$  en fonction de  $r$  et  $\alpha$ .

3. Soit  $A$  le point d'affixe  $-i$ .

a) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  vérifiant  $|f(z) - i| = \sqrt{2}$  et l'ensemble  $\mathcal{D}$  des points  $M$  tels que  $\frac{\pi}{4}$  soit une mesure de l'argument de  $f(z) - i$ .

b) Montrer que  $B$  appartient à  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  et construire  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$ .

On peut imaginer que l'auteur, voulant utiliser les propriétés de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z}$  a construit cet exercice de la façon suivante:

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

$$z+i \mapsto \frac{1}{z+i} \quad \left( \text{dans les propriétés a), b) et c) énoncées plus haut il suffit de remplacer 0 par -i} \right)$$

$$\text{et } z \xrightarrow{f} z+i \xrightarrow{g} \frac{1}{z+i} \xrightarrow{h} \frac{1}{z+i} + i = \frac{iz}{z+i}$$

$f$  et  $h$  sont des translations

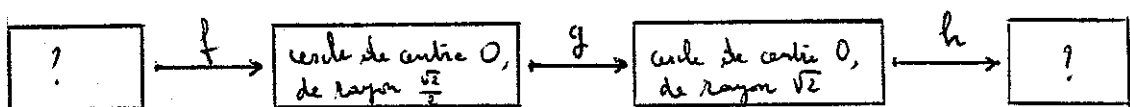
$g$  est une fonction de la forme  $z \mapsto \frac{1}{z}$

- L'antécédent de 0 par  $f$  est  $-i$ , l'image de 0 par  $h$  est  $i$ , ainsi

la fonction  $z \mapsto \frac{iz}{z+i}$  est une bijection de  $\mathbb{C} - \{-i\}$  sur  $\mathbb{C} - \{i\}$

La 1<sup>ère</sup> question est donc justifiée :  $1+2i$  a un et un seul antécédent

- Pour construire les questions suivantes, l'auteur a pu suivre les deux schémas suivants

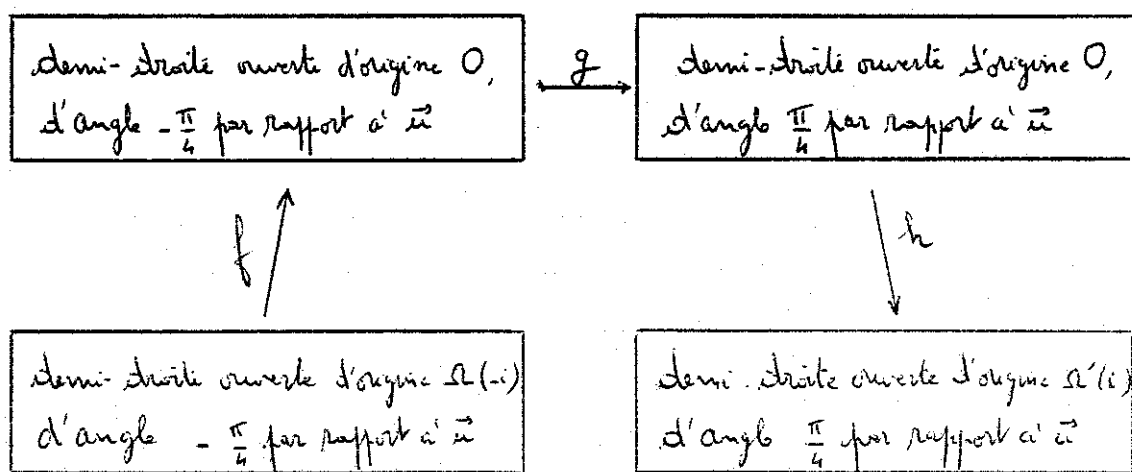


⑤

et, d'après les propriétés des translations

le cercle de centre  $\Omega(-i)$  de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  est la courbe de départ

le cercle de centre  $\Omega'(i)$  de rayon  $\sqrt{2}$  est la courbe image



- Il est donc possible de répondre aux questions posées en complétant les tableaux, de droite à gauche.

Ce n'est pas la méthode attendue ; l'auteur guide les candidats en leur faisant exprimer le module et l'argument de  $f(z) - i$  en fonction de  $z + i$ .

- ⑥ La fonction figurant dans l'exercice précédent est une fonction homographique
- Ce type de fonction apparaît dans de nombreux exercices du Baccalauréat

## Rappelons quelques propriétés de la fonction

$$f: z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

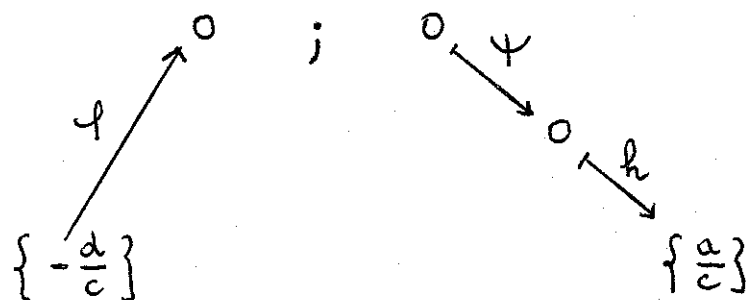
$a, b, c$  et  $d$  étant des complexes  
tels que  $ad - bc \neq 0$ ,  
on prend  $a \neq 0$  et  $c \neq 0$

• Une telle fonction se décompose ainsi

$$z \xrightarrow{\varphi} cz+d \xrightarrow{g} \frac{1}{cz+d} \xrightarrow{\psi} (b - \frac{ad}{c}) \frac{1}{cz+d} \xrightarrow{h} \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$\varphi$  et  $\psi$  sont des similitudes directes,  $h$  est une translation.  
ce sont trois applications dont les propriétés sont connues;  
 $g$  est de la forme  $z \longmapsto \frac{1}{z}$  et on peut donc utiliser

les propriétés évoquées au (A)



La fonction homographique  $f$  est donc bijective de  $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$  sur  $\mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$ .

La réciproque  $z \longmapsto \frac{dz-b}{a-cz}$  est aussi homographique

• En utilisant les propriétés (a) (b) et (c) évoquées au (A), en reprenant la décomposition de  $f$  et en utilisant les propriétés des similitudes directes

⑦

et des translations on a

droite passant par  $A(-\frac{d}{c}) \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f}$  droite passant par  $B(\frac{a}{c})$

droite ne passant pas par  $A(-\frac{d}{c}) \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f}$  cercle passant par  $B(\frac{a}{c})$

cercle ne passant pas par  $A(-\frac{d}{c}) \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f}$  cercle ne passant pas par  $B(\frac{a}{c})$

(en n'oubliant pas que  $-\frac{d}{c}$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_f$  et que  $\frac{a}{c}$  n'est pas dans l'ensemble des images par  $f$ )

• Rappelons aussi: si la fonction homographique  $f$  admet deux points fixes  $z_1$  et  $z_2$ , il existe un complexe non nul  $\kappa$  tel que

$$\forall z \in \mathcal{D}_f - \{z_1, z_2\} \quad \frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \kappa \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad ; \quad \kappa = \frac{a - cz_1}{a - cz_2}$$

Prenons deux exemples d'exercices de baccalauréat

12

6-6

Baccalauréat International

Juin 1989. 4 points

\*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est repéré par son affixe  $z = x + iy$ .

On désigne par  $A, B, C$  et  $D$  les points d'affixes respectives  $-1; 1;$

$\frac{1}{2}$  et  $2$ .

A tout point  $m$  du plan d'affixe  $z, z \neq 2$ , on associe le point  $M$  d'affixe  $Z$  tel que :

$$Z = \frac{2z - 1}{2 - z}.$$



1. Déterminer l'ensemble E des points  $m$  d'affixes  $z$  tels que  $|z|=1$ .
  2. Déterminer l'ensemble F des points  $m$  d'affixe  $z$  tels que  $\arg z = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ .
  3. Tracer les ensembles E et F dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.
  4. Exprimer, en fonction de  $z$ , le complexe  $U = \frac{z-1}{z+1}$ .
- En déduire que les quatre points A, B,  $m$ , M sont cocycliques ou alignés.

On peut imaginer que l'auteur a construit l'exercice de la façon suivante.

Il a pu chercher une fonction homographique  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  ayant 2 points fixes simples (1 et -1)

et pour laquelle la valeur de  $\kappa$  est un réel positif (pour pouvoir poser la 4<sup>e</sup> question),  $\kappa=3$  par exemple

$$3 = \frac{a-cz_1}{a-cz_2} = \frac{a-c}{a+c} \quad \text{ainsi } 2a+4c=0$$

Les coefficients  $a, b, c$  et  $d$  étant définis à un facteur multiplicatif non nul près (dans  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ),

si on remplace  $a, b, c$  et  $d$  par  $ka, kb, kc$  et  $kd$  avec  $k \neq 0$ , on ne change pas la fonction),

on a pu choisir  $c = -1$  et alors  $a = 2$

La résolution de  $f(1) = 1$  et  $f(-1) = -1$  donne

$$b = -1 \text{ et } d = 2.$$

$$\text{Ainsi } f(z) = \frac{2z-1}{2-z}$$

• S'agissant d'une fonction homographique, l'auteur sait que l'antécédent d'un cercle et celui d'une demi-droite sont des figures particulières, ce que justifie les deux premières questions.

• La 4<sup>e</sup> question se justifie par la construction

de la fonction  $f$ . En effet  $1$  et  $-1$  sont des points <sup>⑨</sup> fixes de  $f$ ,

$$\frac{f(z)-1}{f(z)+1} = \kappa \frac{z-1}{z+1}$$

Comme  $\kappa$  a été choisi dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $\arg(\kappa \frac{z-1}{z+1}) = \arg(\frac{z-1}{z+1})$

Ainsi  $\arg(\frac{f(z)-1}{f(z)+1}) = \arg(\frac{z-1}{z+1})$  et, en posant

$A(-1)$ ,  $B(1)$ ,  $m(z)$ ,  $M(f(z))$  on a  $(\widehat{AM}, \widehat{BM}) = (\widehat{Am}, \widehat{Bm})$  et les points  $A$ ,  $B$ ,  $m$  et  $M$  sont bien alignés ou conjugués

22

8-CE

Aix - Corse - Marseille - Montpellier  
Nice - Toulouse

○  
Juin 1988

$\theta$  étant un nombre réel de l'intervalle  $]0; 2[$ , on considère les deux nombres complexes :

$$z = e^{i\theta}, \text{ (ou encore } z = \cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } Z = \frac{1+z}{1-z}$$

et on note  $|Z|$  le module de  $Z$ .

1. Montrer que  $Z = i \cotan \frac{\theta}{2}$  (où  $\cotan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ )
2. Pour quelles valeurs de  $\theta$  l'argument de  $Z$  est-il défini ? A quoi est-il alors égal ? (On distinguera deux cas suivant les valeurs de  $\theta$ .)
3. A quoi est égal  $|Z|$  ?
4. On pose  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |Z| d\theta$ . Justifier l'existence de cette intégrale et la calculer (on pourra mettre  $|Z|$  sous la forme  $k \frac{u'(\theta)}{u(\theta)}$  où  $k$  est un nombre réel et  $u$  une fonction de  $\theta$ ).

$$f: z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z+1}{-z+1}$$

$f$  est une bijection de  $\mathbb{C} - \{1\}$  dans  $\mathbb{C} - \{-1\}$

Par la lecture des propriétés vues plus haut, puisque le cercle unité passe par le point d'affixe 1, son image est une droite (ne passant pas par le point d'affixe -1). En fait  $f(-1) = 0$  et  $f(1) = i$  donc l'image du cercle unité est l'axe imaginaire.

$z = e^{i\theta}$  appartenant au cercle unité,  $z = f(z)$  est donc sur l'axe imaginaire et il n'est donc pas étonnant de voir à la première question qu'on demande d'exprimer  $z$  sous la forme  $i f(\theta)$

$f(\theta) = \cotan \frac{\theta}{2}$  peut être trouvée de la façon suivante :

$$z = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}} (e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}})} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = i \cotan \frac{\theta}{2}$$

Rappelons qu'en terminale " $e^{i\theta}$ " n'est utilisée que comme notation.

La fonction  $\begin{matrix} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{matrix}$  n'est pas connue à ce niveau

③ Dans certains exercices du baccalauréat on peut trouver la recherche de l'image ou de l'antécédent d'un domaine par une fonction  $f$

Il peut s'agir d'une fonction homographique ou d'une autre fonction holomorphe sur un domaine

Les propriétés sous-jacentes sont alors

- si une fonction  $f$  est holomorphe et non constante sur un domaine  $D$ , l'image de tout ouvert  $D'$  de  $D$  est un ouvert de  $f(D)$  (théorème de l'application ouverte)

et même,

du fait de la continuité d'une fonction holomorphe, si une fonction  $f$  est holomorphe et non constante sur un domaine  $D$ ,  $f(D)$  est un domaine

Nous utiliserons d'ailleurs ces propriétés au II lors de la recherche de l'image de certains domaines par la fonction de Joukowski

Prenons par exemple, l'exercice suivant, extrait d'un problème de baccalauréat (Rennes 77) trouvé dans les annales de 1990

Soit  $(P)$  le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct. A tout point  $m$  de coordonnées  $(x, y)$  dans ce repère est associé le nombre complexe  $z = x + iy$  appelé affixe du point  $m$ . On appelle  $A$  et  $B$  les points de  $(P)$  d'affixes respectives  $i$  et  $-i$ .

1° Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$  dans  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  définie par

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Montrer que  $\varphi$  est bijective.

2° Quel est le sous-ensemble  $(P_1)$  de  $(P)$  des points  $m$  dont l'affixe  $z$  vérifie la propriété  $|\varphi(z)| < 1$ ?

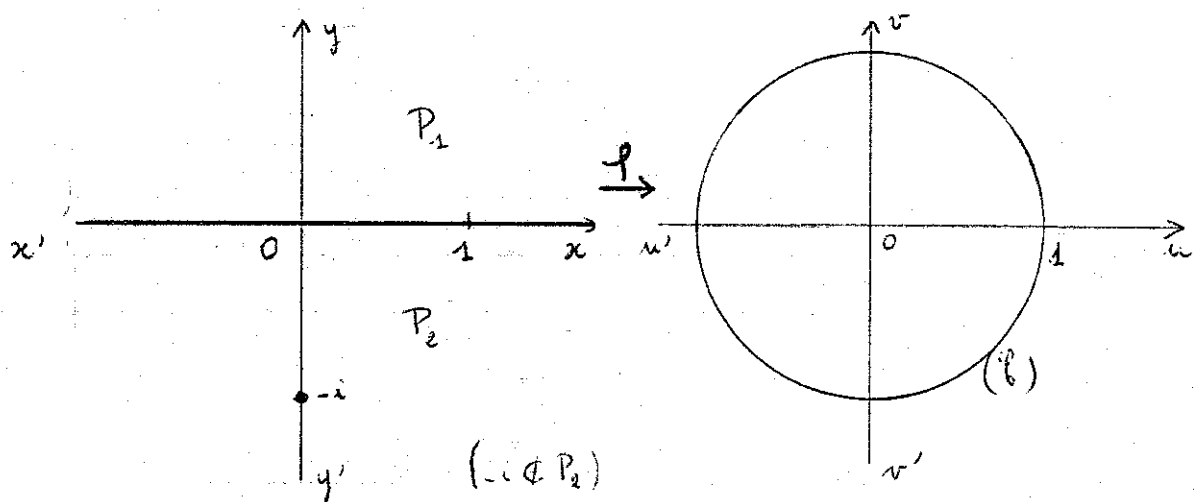
3°  $k$  étant un nombre réel donné vérifiant  $0 \leq k < 1$ , montrer que le sous-ensemble  $(P_2)$  de  $(P_1)$  des points  $m$  dont l'affixe  $z$  vérifie la propriété  $|\varphi(z)| = k$  est un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon.

d'après problème Rennes C sept. 1977

On peut trouver la réponse à la 2<sup>e</sup> question en utilisant les propriétés citées plus haut

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$f$  est bijective de  $\mathbb{C} - \{-i\}$  dans  $\mathbb{C} - \{1\}$   
 L'antécédent du cercle unité ( $\mathcal{C}$ ) est une droite ou un cercle. En fait, c'est l'axe des réels car si  $z$  est réel,  $z-i$  et  $z+i$  sont conjugués et donc

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$$


$f$  est holomorphe sur chacun des domaines  $P_1$  et  $P_2$  donc les images de ceux-ci sont des domaines  $D_1$  et  $D_2$

$\{P_1, (xx'), P_2\}$  formant une partition de  $\mathbb{C} - \{-i\}$ , comme  $f$  est bijective de  $\mathbb{C} - \{-i\}$  sur  $\mathbb{C} - \{1\}$  alors  $f(P_1) \cup f(xx') \cup f(P_2)$  n'ont, deux à deux, aucun point commun.

$$f(P_1) \cup f(xx') \cup f(P_2) = f(\mathbb{C} - \{-i\}) = \mathbb{C} - \{1\}$$

(13)

$D_1 \cup D_2 \cup (C) = \mathbb{C} - \{1\}$ , et comme  $D_1$  et  $D_2$  sont des domaines ne contenant aucun point du cercle  $(C)$ , l'un est l'extérieur de ce cercle, l'autre l'intérieur.

Or  $f(1) = 0$  donc  $f(P_1)$  est l'intérieur du disque unité.

oui L'ensemble des  $z$  tels que  $|f(z)| < 1$  est donc le demi-plan  $\text{Im} z > 0$ .

① Des questions liées à la conformité figurent aussi dans certains exercices du Baccalauréat.

Rappel

Toute fonction  $f$  holomorphe dans un ouvert  $U$  et dont la dérivée ne s'annule pas dans  $U$  est conforme dans cet ouvert. Si deux courbes paramétrées se coupent en un point  $m(z_0)$  de l'ouvert et admettent des tangentes en ce point, l'angle orienté formé par celles-ci est égal à l'angle orienté formé par les tangentes aux courbes images en  $M(f(z_0))$ .

Prendons deux exemples

1°) Regardons le II du problème suivant

PARIS E 1986

PROBLÈME (9 points)

Le plan complexe  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique : 1 cm). On note  $P_+$  l'ensemble des points  $M$  de  $P$  d'abscisse positive ou nulle.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la transformation  $T$  qui à tout point  $m$  du plan, d'affixe  $z$ , associe le point  $M$  d'affixe  $Z = z^2$ .

Propriétés élémentaires de  $T$ . Transformés des demi-droites d'origine  $O$  et des demi-cercles de centre  $O$ .

1° a) Déterminer le module  $R$  et un argument  $\theta$  de  $Z = z^2$  connaissant le module  $r$  et un argument  $\alpha$  de  $z$ , où  $z \neq 0$ .

b) Déterminer l'image  $C_r$  par  $T$  du demi-cercle  $C_r$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  contenu dans  $P_+$ .

c) Déterminer l'image  $D_\alpha$  par  $T$  de la demi-droite  $D_\alpha$  d'origine  $O$  et de vecteur directeur  $\cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{v}$ , où  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

d) Tracer sur une même figure les demi-cercles  $C_r$  pour  $r = 1, r = \frac{1}{2}, r = 2$  et les demi-droites  $D_\alpha$ , où  $\alpha = \frac{k\pi}{6}$ ,  $k$  entier,  $|k| \leq 3$ .

Tracer sur une autre figure les transformés par  $T$  des demi-cercles et demi-droites précédents.

2° a) Soit  $m$  et  $m'$  des points du plan symétriques par rapport à  $O$ ; comparer  $T(m)$  et  $T(m')$ .

b) Même question lorsque  $m$  et  $m'$  sont symétriques par rapport à la droite  $(O; \vec{u})$ , puis par rapport à la droite  $(O; \vec{v})$ .

c) Soit  $k$  un nombre réel strictement positif,  $\varphi$  un nombre réel et  $S$  la similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $k$  et d'angle mesuré par  $\varphi$ . Soit  $m$  et  $m'$  deux points de  $P$ ,  $M$  et  $M'$  leurs transformés par  $T$ ; montrer que, si  $m' = S(m)$ , alors  $M' = S^2(M)$ .

Transformés des droites parallèles aux axes de coordonnées.

Pour tout nombre réel  $\lambda$ , on note  $E_\lambda$  l'image par  $T$  de la droite  $E_\lambda$  d'équation  $y = \lambda$  et pour tout nombre réel  $\mu$ , on note  $F_\mu$  l'image par  $T$  de la droite  $F_\mu$  d'équation  $x = \mu$ .

1° On pose  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$ . Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

2° a) En déduire que l'image  $E_1$  par  $T$  de la droite  $E_1$  d'équation  $y = 1$  est une parabole de foyer  $O$  dont on déterminera le sommet et la directrice.

b) Préciser les tangentes à  $E_1$  aux points d'intersection de  $E_1$  avec l'axe  $(O; \vec{v})$ .

c) Construire avec soin la parabole  $E_1$ .

3° Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif.

a) Montrer que la droite  $E_\lambda$  se déduit de la droite  $E_1$  par une homothétie de centre  $O$ , que l'on précisera.

b) En utilisant le résultat de la question 1, 2°, c), indiquer comment  $E_\lambda$  se déduit de  $E_1$ .

Préciser la nature de la courbe  $E_\lambda$  et tracer  $E_\lambda$  pour  $\lambda = 2$  sur la même figure que  $E_1$ .

4° Soit  $\mu$  un nombre réel strictement positif.

A l'aide de 1, 2°, c), indiquer comment l'image  $F_1$  de  $F_1$  se déduit de  $E_1$  et comment les images  $F_\mu$  se déduisent de  $F_1$ .

Tracer  $F_1$  et  $F_2$  sur la même figure que précédemment.

5° Soit  $M$  un point d'intersection de  $E_\lambda$  et de  $F_\mu$ .

Montrer que les tangentes en ce point à  $E_\lambda$  et  $F_\mu$  sont orthogonales.

Nous pouvons répondre rapidement à la 5° question. En effet  $E_\lambda$ , droite d'équation  $y = \lambda$  ( $\lambda > 0$ ) et  $F_\mu$ , droite d'équation  $x = \mu$  ( $\mu > 0$ ) se coupent orthogonalement en un point d'affixe  $z_0$  non nulle.

La fonction  $f: z \mapsto z^2$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , de dérivée  $z \mapsto 2z$  non nulle en  $z_0$ . Ainsi les images  $E_\lambda$  et  $F_\mu$  des droites  $E_\lambda$  et  $F_\mu$  se coupent orthogonalement.

2) Regardons le B) du problème suivant

Amiens - Rouen  
Juin 1987. 12 points (E)

(P) est le plan rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; A est le point de coordonnées  $(1, 0)$ .

(C) est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

A tout point de (P) de coordonnées  $(x, y)$  on associe son affixe  $z$  égale à  $x + iy$  où  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

$f$  est l'application de  $\mathbb{C}$  dans lui-même définie par :

$$f(z) = 2z - z^2.$$

F est l'application de (P) dans lui-même qui à tout point  $m$  d'affixe  $z$  associe le point  $M$  d'affixe  $Z$  égale à  $f(z)$ .

On prendra 3 cm pour unité de longueur.

Le but de ce problème est d'étudier l'image (K) du cercle (C) par F.

A) Soit  $m$  un point du cercle (C) d'affixe  $z$  et  $M$  son image par F.

(15)

1. a) Soient  $m_1$  et  $m_2$  les points d'affixes respectives  $z^2$  et  $2z$ . Quels sont les modules de  $z$ ,  $2z$  et  $z^2$ ? Donner les arguments de  $2z$  et  $z^2$  en fonction de celui de  $z$ .

b) Montrer que le quadrilatère  $Om_1m_2M$  est un parallélogramme.

c) En déduire une construction géométrique simple de  $M$  à partir de  $m$ .

2. Montrer que  $A$  et  $M$  sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente (T) en  $m$  au cercle (C).

En déduire une autre construction de  $M$  à partir de  $m$ .

N.B. : On veillera à faire deux figures distinctes accompagnées d'une courte explication du tracé effectué.

B) Soit  $e^{it}$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$  l'affixe d'un point  $m$  de (C).

1. Calculer  $f(e^{it})$  et en déduire que l'image (K) de (C) par F est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} X(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ Y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (t \in [-\pi, \pi])$$

2. Montrer que les points d'affixes  $f(e^{it})$  et  $f(e^{-it})$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Qu'en déduit-on pour (K)?

Étudier sur l'intervalle  $[0, \pi]$  les variations des fonctions  $X$  et  $Y$  de la variable  $t$ .

3. a) Montrer que si  $t$  est différent de 0, la tangente à (K) au point  $M$  de paramètre  $t$  est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$\left( \cos \frac{3t}{2}, \sin \frac{3t}{2} \right).$$

On admettra que ce résultat est encore valable quand  $t$  est nul.

b) Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{mM}$  est orthogonal à la tangente à (K) en  $M$ .

4. Construire les points de (K) où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

Répondons à la question 3)b)

La fonction  $f: z \mapsto 2z - z^2$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , sa dérivée  $f'(z) = 2 - 2z$ . Soit  $m$  un point du cercle unité, d'affixe  $e^{it} \neq 1$ .

Le cercle unité et la demi-droite  $[0, m)$  se coupent orthogonalement en  $m$ . En ce point  $f'$  est non nulle donc les courbes images qu'on pourra appeler respectivement (K) (comme dans le texte) et (T) se coupent orthogonalement en  $M (f(e^{it}))$ . Leurs tangentes sont orthogonales en  $M$ .

Ainsi, pour répondre à la question, il suffit de chercher un vecteur dirigeant la tangente à (T) en  $M$  et le comparer à  $\overrightarrow{mM}$ .



La demi-droite  $[0, +\infty)$  peut être paramétrisée par  $z = \rho e^{it}$  avec  $\rho$  variant de 0 à  $+\infty$ .

La courbe image  $(\Gamma)$  est donc paramétrisée par

$$Z = 2z - z^2 = 2\rho e^{it} - \rho^2 e^{2it} \text{ avec } \rho \in [0; +\infty[.$$

La tangente à cette courbe en  $M$  est dirigée par le vecteur d'affixe  $2e^{it} - 2\rho e^{2it}$  avec  $\rho = 1$ , soit  $2(e^{it} - e^{2it})$ .

Or  $\overrightarrow{mM}$  a pour affixe  $f(z) - z = z - z^2 = e^{it} - e^{2it}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{mM}$  dirige donc aussi la tangente à  $(\Gamma)$  en  $M$  et le vecteur  $\overrightarrow{mM}$  est donc bien orthogonal à la tangente à la courbe  $(K)$  en  $M$ .

Remarque. Si  $m$  a pour affixe 1,  $M$  a pour affixe 1 et  $\overrightarrow{mM}$  est le vecteur nul, vecteur orthogonal à tout vecteur.

### (E) Théorème de D'Alembert

Étudions un exercice (juin 86) dans lequel est sous-jacent le théorème de D'Alembert : tout polynôme de degré  $n$  a au moins une racine dans  $\mathbb{C}$  et même, plus précisément il en a  $n$ , distinctes ou non.

Amérique du Nord  
Juin 1986. 5 points

(C)

Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$  où  $z$  désigne un nombre complexe et où  $\lambda$  est un nombre réel.

1. Montrer que si l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution complexe  $z_0$ , alors  $\bar{z}_0$  est aussi solution.

En déduire que l'équation  $P(z) = 0$  admet au moins une solution réelle sans chercher à résoudre l'équation.

2. Déterminer  $\lambda$  pour que l'équation  $P(z) = 0$  admette une racine réelle de module 2.

Résoudre l'équation pour la valeur de  $\lambda$  ainsi trouvée.

3. Déterminer  $\lambda$  pour que l'équation  $P(z) = 0$  admette une racine complexe de module 2.

Résoudre l'équation pour les valeurs de  $\lambda$  ainsi trouvées et préciser le module et l'argument de chaque solution.

Répondons à la première question, comme fallait <sup>(17)</sup>  
le faire un élève de Terminale.

Si  $z_0$  est solution,  $z_0^3 - 4z_0 + \lambda = 0$  donc  $\overline{z_0^3 - 4z_0 + \lambda} = 0$

et comme  $\lambda$  est un réel,  $\overline{z_0^3 - 4z_0 + \lambda} = 0$ , ainsi  $\overline{z_0}$  est aussi solution

Remarque : si  $z_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\overline{z_0} = z_0$  mais il ne faut pas conclure hâtivement que  $z_0$  est racine double.

En effet, si l'on considère par exemple, le polynôme  $Q(z) = z^2 - 1$ , on montre comme précédemment que si  $z_0$  est solution,  $\overline{z_0}$  l'est également, or 1 est solution mais n'est pas racine double !

En fait, en précisant "solution complexe  $z_0$ ", l'auteur devait avoir à l'esprit  $z_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ .

Dans ce cas  $\overline{z_0} \neq z_0$  et si  $z_0$  est solution, le polynôme  $P(z)$  peut se factoriser sous la forme

$$P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})(z + \mu)$$

Il y aurait donc une 3<sup>e</sup> racine :  $-\mu$

Le terme constant de  $P(z)$  est égal à  $z_0 \overline{z_0} \mu$   
et donc

$$\mu = \frac{\lambda}{z_0 \overline{z_0}} = \frac{\lambda}{|z_0|^2} \quad \text{soit } \mu \in \mathbb{R}$$

Ainsi, si  $z_0$ , complexe non réel est solution, il y a forcément une solution réelle

Cet exercice, présenté ainsi, semble en fait hors programme (peut-être ne l'était-il pas en 1986). En effet, le "si" implique qu'on ne peut déduire l'existence d'au moins une racine réelle que si l'on est sûr de l'existence de racines.

oui

Le théorème de D'Alembert assure l'existence de celles-ci, mais n'est pas au programme de Terminale.

(F) Un problème de géométrie résolu dans le cadre complexe.

Principe du module maximum

39-Q

Baccalauréat  
international

Juin 1989. 4 points

Dans le plan orienté, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ et } (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG], [GB].

1. Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Déterminer l'image du segment [BE] par cette rotation R.  
En déduire que MNPQ est un carré.

3. On désigne par  $l$  et  $m$  les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG. On pose  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \alpha$ ,  $\alpha \in [0; 2\pi[$ .

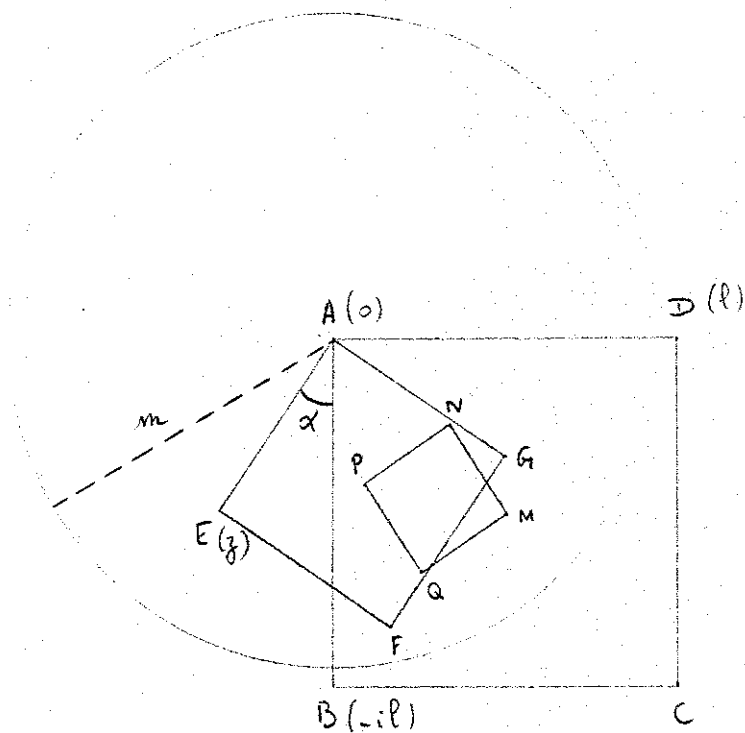
a) Exprimer, en fonction de  $l$ ,  $m$  et  $\alpha$ , la longueur des côtés du carré MNPQ.

b) Déterminer  $\alpha$  pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

On peut répondre à la question 3) b), tout comme aux questions précédentes, en utilisant les nombres complexes. (19)

trouver comment  
ce repère est lié  
à la figure

On considère un repère orthonormal  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  pour attribuer une affixe à chacun des points



Soit  $A(0)$

Le nombre  $l$  étant la longueur des côtés du carré ABCD on a  $D(l)$  et  $B(-il)$

On pose  $E(z)$ . Comme  $G$  est l'image de  $E$  dans la rotation de centre  $A$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $G(iz)$

Par définition des points  $M, N, P$  et  $Q$  on a

$$M\left(\frac{1-i}{2}\right), N\left(\frac{1+i}{2}\right), P\left(\frac{3+i}{2}\right) \text{ et } Q\left(\frac{i_3-i^3}{2}\right)$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{MN}\left(\frac{3+i}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{QP}\left(\frac{3+i}{2}\right)$$

MNPQ est donc un parallélogramme.

$$\cdot \overrightarrow{MQ}\left(\frac{i_3-1}{2}\right)$$

$$MQ = \left|\frac{i_3-1}{2}\right| = \left|i\frac{3+i}{2}\right| = \left|\frac{3+i}{2}\right| = MN;$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MQ}}) &= \arg\left(\frac{i_3-1}{2}\right) = \arg\left(i\frac{3+i}{2}\right) = \arg\left(\frac{3+i}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \\ &= (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{MN}}) + \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{aligned}$$

$$\text{donc } (\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

MNPQ est donc un carré.

$$\cdot \text{L'aire de ce carré est égale à } \left|\frac{3+i}{2}\right|^2$$

Elle est maximale quand  $|3+i|$  est maximum.

Soit un disque  $D(A, m)$ , de centre  $A$  et de rayon  $m$ .

La fonction  $z \rightarrow z+i$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ . Elle est donc analytique dans  $D(A, m)$  et continue dans  $\overline{D}(A, m)$ .

Comme elle n'est pas constante,  $\sup_{z \in \overline{D}(A, m)} |f(z)|$  ne peut être

atteint que sur la frontière, en vertu du principe du module maximum. (21)

Ceci prouve que pour un carré ABCD donné, plus le carré AEFG est grand, plus l'aire du carré MNPA est grande et ce, quel que soit l'angle  $\alpha$ . (si le côté du carré AEFG augmente, que l'angle  $\alpha$  varie ou pas, l'aire du carré MNPA augmente obligatoirement).

• Prenons  $|z| = m$  et cherchons  $\alpha$  pour que l'aire soit maximale.

$$|z+d| \leq |z| + |d|$$

$$|z+d| = BE \quad ; \quad |z| + |d| = AE + BA$$

$|z+d| = |z| + |d|$  si, et seulement si, A est sur le segment  $[BE]$ .

L'aire maximale est donc obtenue pour  $\alpha = \pi$ .

On a alors  $E(im)$  et l'aire est  $\left| \frac{im+d}{2} \right|^2 = \frac{(m+l)^2}{4}$



C3 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°2 (représentation conforme)

On s'aidera des documents ci-joints pour résoudre les questions suivantes.

① On rappelle qu'on appelle isomorphisme analytique une fonction bijective analytique ainsi que son inverse (automorphisme si l'ensemble de départ et d'arrivée sont les mêmes).

On note  $D$  le disque unité ouvert de centre  $O$  et de rayon 1.

On note  $P$  le demi plan suivant :  $P = \{ z ; \operatorname{Im} z > 0 \}$ .

1) Donner une démonstration du théorème suivant (d'inversion globale) :

Si  $f$  est une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et si  $f$  est injective, alors  $f$  est un isomorphisme analytique de  $U$  sur  $V$  (où  $V = f(U)$ ) et, pour tout  $z$  de  $U$ ,  $f'(z) \neq 0$ .

En déduire qu'il n'y a pas d'isomorphisme analytique de  $\mathbb{C}$  sur le disque unité ouvert  $D$  (centre  $O$ , rayon 1).

2) Quels sont tous les automorphismes (analytiques) de  $D$  sur  $D$  ?

Quels sont tous les automorphismes (analytiques) de  $P$  sur  $P$  ?

[Facultatif : Quels sont tous les automorphismes de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$  ?]

3) Dresser un catalogue d'isomorphismes analytiques envoyant les domaines de la liste ci-jointe sur les images indiquées.

Pour cette question 3, on rédigera à part les démonstrations.

② Etudier la fonction de Joukowski définie par

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

En particulier donner l'image des domaines ou des courbes où on a un résultat intéressant, en indiquant les démonstrations.

Documents joints :

Lang Complex analysis (Springer Verlag) pp. 198 à 223 et pp. 72 à 79

Dieudonné Calcul infinitésimal (Hermann) pp. 250 à 255 et pp. 335 à 341

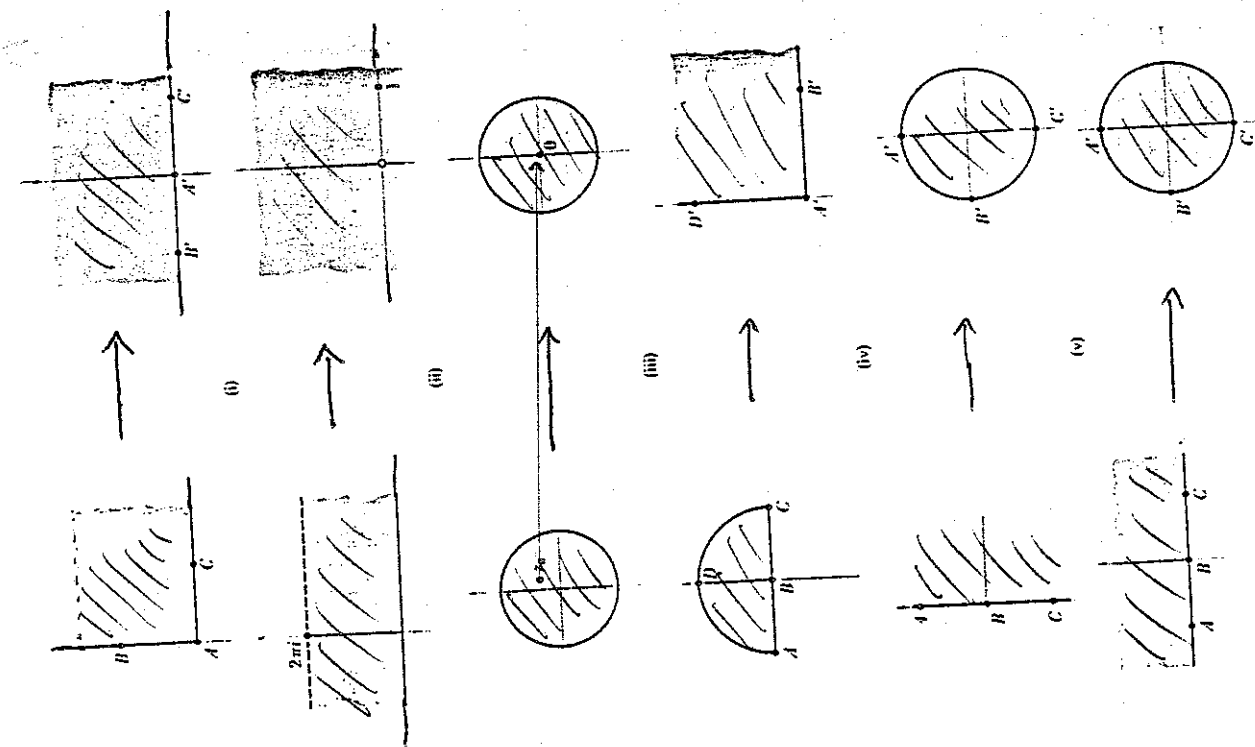
Cartan Théorie des fonctions analytiques (Hermann) pp. 181 à 187

Henrici Applied and computational Complex analysis Vol I (Wiley & Sons) pp. 294 à 299.

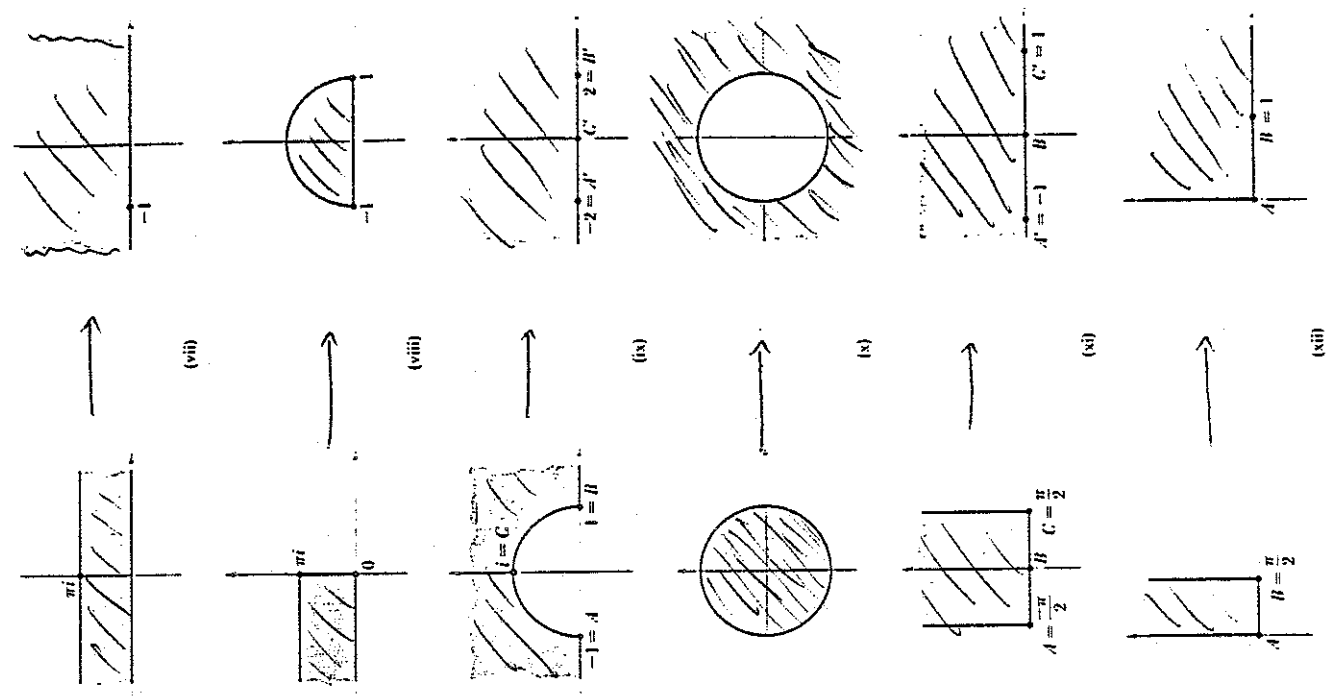
Krasnov et al. Fonctions d'une variable complexe et leurs applications (Mir) pp. 122 à 133







(les régions considérées sont hachurées)





## I.1). THÉORÈME D'INVERSION GLOBALE.

T.B. <sup>1</sup>  
c'est excellent

19 / 20

a) Introduction et plan de la démonstration.

Pour toute fonction  $f: U \rightarrow V$  ( $U \subset \mathbb{C}, V \subset \mathbb{C}$ ),  
si on restreint l'ensemble d'arrivée  $V$  à  $f(U)$ ,  $f$  est surjective.  
Alors si  $f$  est injective, elle est bijection et admet une bijection  
réciproque  $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ .

L'idée d'isomorphisme suggère que, si  $f$  en est un,  $U$  et  $f$  d'une  
part et  $V$  et  $f^{-1}$  d'autre part doivent avoir des propriétés analogues,  
et en particulier que  $V$  doit être ouvert. Effectivement, alors,  $f^{-1}$  étant  
analytique est continue, et  $V = (f^{-1})^{-1}(U)$  est ouvert. C'est-à-dire que  
 $f(U)$  doit être voisinage de chacun de ses points, soit:

$$(\forall z_0 \in f(U)) (\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall z \in \mathbb{C}) (|z - z_0| < \delta \Rightarrow (\exists \zeta \in U) (f(\zeta) = z))$$

Autrement dit: pour  $z$  voisin de  $z_0$ , l'équation  $f(\zeta) = z$   
a au moins une solution dans  $U$ .

L'injectivité de  $f$  s'exprime en disant que cette solution est unique.

Ainsi, on se propose:

- b) d'étudier d'abord l'équation  $f(\zeta) = z$  (ce qui correspond bien à l'idée d'inversion). On obtiendra un lemme, qui permettra:
- c) de démontrer le "théorème de l'application ouverte",
- d) de démontrer que si  $f$  est analytique et injective,  $(\forall \zeta \in U) (f'(\zeta) \neq 0)$   
(autrement dit:  $f$  est conforme).
- e) On transposera alors le théorème de l'inverse local, connu pour les fonctions  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , aux fonctions holomorphes  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- f) On pourra alors énoncer le théorème d'inversion globale.
- g) On en déduira qu'il n'existe pas d'isomorphisme analytique  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ .
- h) On terminera par quelques remarques.

(T.B.)

b) Etude de l'équation  $f(z) = z$ .

- (1) Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , analytique, et non constante.  
(sans autre hypothèse ici).  
Soient  $z_0 \in f(U)$ , et  $z_0 \in U$  un antécédent de  $z_0 = f(z_0) = z_0$ .

- $f$  étant analytique est développable en série entière dans un voisinage de  $z_0$ .
- $U$  étant ouvert, il existe un tel voisinage inclus dans  $U$ , par exemple un disque ouvert  $D(z_0, r_0) \subset U$ , où :

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

- $f$  n'étant pas constante, la série écrite n'est pas identiquement nulle, et les coefficients  $a_n$  ne sont pas tous nuls.

Soit  $p$  le plus petit entier tel que  $a_p \neq 0$ .

- (2)  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n < p \Rightarrow a_n = 0$ ,  $a_p \neq 0$ .

On peut alors exprimer  $f$  en définissant ainsi une fonction  $g =$

$$(3) \quad f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^p \underbrace{\left[ a_p + \sum_{k=1}^{\infty} a_{p+k} (z - z_0)^k \right]}_{g(z)}$$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^p g(z)$$

On a :  $g(z_0) = a_p$ , et  $a_p \neq 0$  donc  $g(z_0) \neq 0$ .

Et  $g$  est analytique et développable en série entière dans  $D(z_0, r_0)$ ,

où elle est donc continue :  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) (\exists r_\varepsilon \in ]0, r_0]) (|z - z_0| < r_\varepsilon \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon)$

en particulier :  $(\exists r_1, \varepsilon \in ]0, r_0]) (|z - z_0| < r_1 \Rightarrow |g(z) - g(z_0)| < \frac{1}{2} |g(z_0)|)$

et cette dernière condition entraîne  $|g(z)| > \frac{1}{2} |g(z_0)|$ . Donc :

Il existe un disque ouvert  $D(z_0, r_1) \subset D(z_0, r_0)$  où  $|g(z)| > \frac{1}{2} |g(z_0)| > 0$ .

L'équation  $f(z) = z$  s'écrit alors :

$$z_0 + (z - z_0)^p g(z) = z,$$

$$(z - z_0)^p g(z) + z_0 - z = 0, \text{ et avec } z \in D(z_0, r_1) =$$

$$(z - z_0)^p + \frac{z_0 - z}{g(z)} = 0$$

Posons :  $\varphi(z) = (z - z_0)^p$  et  $\psi(z) = \frac{z_0 - z}{g(z)}$

montrons tout  
que  $p \geq 1$

3

L'équation  $(z - z_0)^p = 0$  ayant une solution  $z = z_0$ , unique et de multiplicité  $p$ , on est amené à rechercher les conditions d'application du théorème de Rouché :

- $\varphi$  et  $\psi$  sont analytiques dans le domaine  $D(z_0, r_1)$  où  $g(z) \neq 0$  ;
- Soit  $r \in ]0, r_1[$  et soit  $K$  le compact à bord  $K = \overline{D}(z_0, r) \subset D(z_0, r_1)$ .
- La condition  $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$  sur  $\partial K$  où  $|z - z_0| = r$

sera vérifiée si  $\left| \frac{z - z_0}{g(z)} \right| < r^p$

$|z - z_0| < r^p |g(z)|$ , et en particulier, puisque

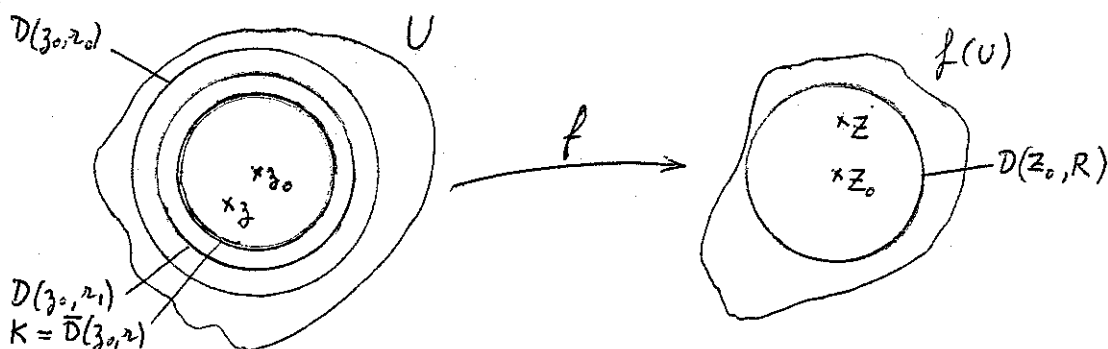
dans  $D(z_0, r_1)$  on a  $|g(z)| > \frac{1}{2}|g(z_0)|$ , si :

$|z - z_0| < r^p \frac{|g(z_0)|}{2}$ , c'est-à-dire si

$|z - z_0| < R$ , avec  $R = r^p \frac{|g(z_0)|}{2}$

Alors, le théorème de Rouché s'appliquera :  $(\varphi + \psi)$  aura même nombre total de zéros que  $\varphi$ , c'est-à-dire que l'équation  $f(z) = z$  aura  $p$  solutions (comptées avec leur ordre de multiplicité), dans  $K$ .

(et comme  $p \geq 1$   
au moins 1)



On peut donc énoncer :

Lemme :

$f, p$ , et  $g$  vérifiant les conditions (1), (2), (3) ci-dessus :

pour tout  $z_0$  de  $f(U)$ , image de  $z_0$  de  $U$ , il existe  $r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ , tel que

pour tous  $r \in ]0, r_1[$ ,  $R = \frac{r^p |g(z_0)|}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  et  $|z - z_0| < R$ ,

l'équation  $f(z) = z$  a  $p$  solutions (comptées avec leurs multiplicités)

dans  $K = \overline{D}(z_0, r)$

ou

4

c) 1<sup>re</sup> application du lemme: théorème de l'application ouverte:

Puisque  $p \geq 1$ , pour  $Z \in D(Z_0, R)$  l'équation  $f(z) = Z$  a au moins une solution dans  $U$ , c'est-à-dire que l'ouvert  $D(Z_0, R)$  est inclus dans  $f(U)$ .

ou

Toute fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , non constante, est ouverte.

d) 2<sup>e</sup> application du lemme: étude de  $f'(z)$ .

On sait qu'une fonction analytique est indéfiniment dérivable, et que dans le développement de  $f$  :  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , en particulier:  $a_1 = f'(z_0)$ .

Supposons qu'en un point  $z_0$  de  $U$  on ait  $f'(z_0) = 0$ .

Alors  $a_1 = 0$ , donc  $p > 1$ .

Or, les dérivées successives de  $f$  sont analytiques, en particulier  $f'$ .

De plus,  $f'$  n'est pas identiquement nulle, sinon  $f$  serait constante.

Et les zéros d'une fonction analytique (non identiquement nulle) sont isolés.

Donc  $(\exists r_2 \in \mathbb{R}_+^*)(0 < |z - z_0| < r_2 \Rightarrow f'(z) \neq 0)$ .

Appliquons le lemme en prenant  $r < \inf(r_1, r_2)$ :

l'équation  $f(z) = Z$  a  $p$  solutions dans  $\bar{D}(z_0, r)$  (avec multiplicité).

Supposons maintenant  $f$  injective, et prenons  $Z \in D(Z_0, R)$ ,  $Z \neq Z_0$ .

Alors  $f(z) = Z$  a une solution unique  $z_1$  dans  $\bar{D}(z_0, r)$ , et  $z_1 \neq z_0$ .

Son ordre de multiplicité est donc  $p$ .

Et puisque  $z_1 \in D(z_0, r) \subset D(z_0, r_2)$  et  $z_1 \neq z_0$ ,  $f'(z_1) \neq 0$ ,

c'est-à-dire que  $z_1$  est un zéro simple, soit:  $p = 1$ .

Ceci montre que l'hypothèse  $f'(z_0) = 0$  (pour laquelle  $p > 1$ ), est à rejeter. Donc  $f'(z_0) \neq 0$ , et puisque  $z_0$  est quelconque dans  $U$ :

ou

Théorème = Si  $f$  est une fonction analytique dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et si  $f$  est injective, on a  $f'(z) \neq 0$  pour tout  $z$  de  $U$ .

e) I-1) Suite.  
Dérivabilité de  $f^{-1}$ . On peut associer les fonctions :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & \mathbb{C} \\ \cup & & \cup \\ U & \rightarrow & V \\ z & \mapsto & f(z) \\ (x+iy) & \mapsto & P(x,y) + i Q(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ U & \rightarrow & V \\ (x,y) & \mapsto & (P(x,y), Q(x,y)) \end{array}$$

et on connaît alors les conditions de Cauchy :

$f$  dérivable en  $z \iff F$  dérivable en  $(x,y)$  et  $P'_x = Q'_y$ ,  $P'_y = -Q'_x$   
autrement dit la matrice jacobienne de  $F$  est :

$$J_F = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x & -Q'_x \\ Q'_x & P'_x \end{pmatrix} \text{ donc de forme } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Si  $f$  est dérivable en  $z$ ,  $f'(z) = P'_x + i Q'_x = Q'_y - i P'_y$ , et  
le jacobien de  $F$  est  $|J_F| = P'^2_x + Q'^2_x = |f'(z)|^2$ .

Donc si  $f'(z) \neq 0$ ,  $|J_F| \neq 0$  et  $J_F$  est inversible, et  
si  $f$  est une fonction analytique (donc dérivable) dans un voisinage  $U$  de  $z_0$ ,

et  $f'(z) \neq 0$ , on peut appliquer à  $F$ , au voisinage de  $(x,y)$ ,  
le théorème de l'inverse local pour les fonctions  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

il existe des voisinages  $U$  de  $(x,y)$  et  $V$  de  $(P(x,y), Q(x,y))$   
tels que  $F$  restreinte à  $U$  soit un  $C^1$  difféomorphisme  $U \rightarrow V$ ,  
et  $F^{-1}'(F(x,y)) = (F'(x,y))^{-1}$ . Alors :

$$J_{F^{-1}} = J_F^{-1} = \frac{1}{|J_F|} {}^t(C_{ij}) \text{ avec } C_{11} = P'_x, C_{12} = -Q'_x, C_{21} = Q'_x, C_{22} = P'_x$$

$$J_{F^{-1}} = \frac{1}{|J_F|} {}^t \begin{pmatrix} P'_x & -Q'_x \\ Q'_x & P'_x \end{pmatrix} = \frac{1}{|J_F|} \begin{pmatrix} P'_x & Q'_x \\ -Q'_x & P'_x \end{pmatrix}, \text{ de forme } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ainsi  $f^{-1}$ , associée à  $F^{-1}$ , vérifie bien les conditions de Cauchy,  
 $f^{-1}$  est dérivable au voisinage de  $f(z)$  (donc holomorphe, et analytique).

$$\text{De plus: } f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{|J_F|} (P'_x + i(-Q'_x)) = \frac{1}{P'^2_x + Q'^2_x} (P'_x - iQ'_x)$$

$$\text{et } \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{P'_x + iQ'_x} = \frac{P'_x - iQ'_x}{(P'_x + iQ'_x)(P'_x - iQ'_x)} = \frac{P'_x - iQ'_x}{P'^2_x + Q'^2_x}$$

$$\text{donc } f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad (\text{donc } f^{-1}'(f(z)) \neq 0).$$



On a ainsi démontré que le théorème de l'inverse local s'applique aux fonctions analytiques, et en regroupant les résultats des a), c), d), e) on peut énoncer :

f) Théorème d'inversion globale :

Si  $f$  est une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et si  $f$  est injective, alors  $f$  est un isomorphisme analytique de  $U$  sur  $V$  ( $V = f(U)$ ), et pour tout  $z$  de  $U$ ,  $f'(z) \neq 0$ .

De plus :

- $f(U)$  est ouvert ;
- pour tout  $z_0$  de  $f(U)$ ,  $f^{-1}(z_0) \neq \emptyset$  :  $f$  et  $f^{-1}$  sont conformes ;
- $f^{-1}'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .

g) Corollaire :

Supposons qu'il existe un isomorphisme analytique  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ ,  $D = D(0, r)$ .

- Alors  $f$ , holomorphe dans  $\mathbb{C}$ , l'est dans tout disque  $D(0, R)$ , avec  $R \in ]0, +\infty[$ , et on a les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| r^n \leq M(r) \quad , \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } r \in ]0, R[ \text{, et } M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

En particulier  $|a_1| \leq \frac{M(r)}{r}$ . (Pour les  $a_n$  du développement  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ )

Or ici  $f(\mathbb{C}) = D$  donc  $M(r) = r$ , et  $r$  peut être choisi aussi

grand que l'on veut :  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) (\exists r \in \mathbb{R}_+^*) (\frac{M(r)}{r} < \varepsilon)$ .

Donc  $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*) (|a_1| < \varepsilon) \Rightarrow |a_1| = 0$ ,  $a_1 = 0$ .

- Or  $a_1 = f'(0)$ , et d'après le théorème d'inversion globale :

$(\forall z \in \mathbb{C}) (f'(z) \neq 0)$ , en particulier  $f'(0) \neq 0$ , donc  $a_1 \neq 0$ .

Il y a donc contradiction, et l'hypothèse initiale ne peut être vérifiée.

Il n'existe pas d'isomorphisme analytique  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ .

h) Remarques.

Remarque 1 - La réciproque de la propriété d) est fautive.

oui

On peut avoir partout  $f'(z) \neq 0$ , alors que  $f$  n'est pas injective (donc pas un isomorphisme analytique).

Exemple =  $f(z) = e^z$ ,  $f'(z) = e^z \neq 0$ , et  $f(i\theta) = f(i(\theta + 2\pi))$ .

Remarque 2 - Le théorème d'extension globale, valable pour les fonctions holomorphes dans  $\mathbb{C}$ , ne l'est pas pour les fonctions dérivables dans  $\mathbb{R}$ .

oui

Contreexemple =  $f(x) = x^3$  :  $f$  est injective, et  $f'(0) = 0$ .

Remarque 3 - L'hypothèse :  $U$  connexe n'est jamais apparue dans la démonstration du théorème d'extension globale.

- On sait que l'image continue d'un connexe est connexe.

Donc si  $U_1$  est une composante connexe de  $U$ ,  $f(U_1)$  est connexe, lorsque  $f$  est continue, en particulier isomorphisme analytique.

- Réciproquement, alors,  $f^{-1}$  étant aussi continue, si  $U_1$  et  $U_2$  sont des parties de  $U$  telles que  $f(U_1 \cup U_2)$  est connexe,  $U_1 \cup U_2$  est connexe :  $U_1$  et  $U_2$  ne peuvent être des composantes connexes distinctes. Donc :

oui

Si  $f$  est un isomorphisme analytique  $U \rightarrow V$ ,  $U$  et  $V$  ont autant de composantes connexes, associées une à une.

Remarque 4 - A propos de la démonstration du corollaire :

Si la formulation de la question n'avait pas été "En déduire...", on aurait pu montrer qu'un isomorphisme  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  serait une

fonction entière = le développement  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  est valable dans le plus grand disque ouvert  $D(0, R)$  contenu dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire dans  $\mathbb{C}$ .

oui

- appliquer le théorème de Liouville = toute fonction

entière, bornée, est constante -

- et conclure puisque  $f(\mathbb{C}) = D$ , donc  $f$  non constante -

Mais justement, le théorème de Liouville se démontre à partir des inégalités de Cauchy, selon le même schéma que la démonstration g) -

Remarque 5 - Cette démonstration g) reste valable si  $M(r)$  est un réel positif quelconque, et non pas 1 (on peut toujours faire tendre  $\frac{M(r)}{r}$  vers 0). On peut donc énoncer le corollaire sous une forme plus générale :

Il n'existe pas d'isomorphisme analytique  $f: \mathbb{C} \rightarrow B$ ,  
 $B$  étant une partie bornée quelconque de  $\mathbb{C}$ .

TB

## I. 2°) AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES.

a) AUTOMORPHISMES DE  $D$ .

- Les rotations de centre 0:  $z \mapsto e^{i\theta} z$  sont à l'évidence des automorphismes de  $D$  pour lesquels 0 est invariant. Réciproquement:

Soit  $f$  un automorphisme analytique de  $D$  tel que  $f(0) = 0$ .

Puisque  $f(D) = D$ , on a aussi:  $(\forall z \in D) (|f(z)| < 1)$ .

On a également:  $f^{-1}(0) = 0$  et  $(\forall z \in D) (|f^{-1}(z)| < 1)$ .

On peut donc appliquer le lemme de Schwarz à  $f$  et à  $f^{-1}$ :

$(\forall z \in D): |f(z)| \leq |z|$  et  $|f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$ , soit  $|z| \leq |f(z)|$

donc  $|f(z)| = |z|$ , et la deuxième partie du lemme de Schwarz permet d'affirmer qu'il existe un complexe constant  $\lambda$  de module 1

tel que  $f(z) = \lambda z$ , soit avec  $\lambda = e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ):

$f(z) = e^{i\theta} z$ . Ainsi:

Les automorphismes analytiques de  $D$  tels que  $f(0) = 0$

sont les rotations:  $z \mapsto e^{i\theta} z$ .

qui

- Montrons maintenant que la fonction  $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  (étudiée dans un problème sur les fonctions unitaires) est un automorphisme

analytique de  $D$ . (Plus précisément: sa restriction à  $D$ ;  $\varphi_a$  peut être plus largement définie).

- son dénominateur ne s'annule pas dans  $\bar{D}$ , puisque

$|a| < 1$ , donc  $|\bar{a}| < 1$ , et  $|z| \leq 1$ .

- elle est donc analytique sur  $D$  et continue sur  $\bar{D}$ , puisqu'elle est obtenue par opérations et composition de fonctions qui le sont.

On peut alors lui appliquer le théorème du module maximum:

si  $\varphi_a$  n'est pas constante sur  $\bar{D}$ , elle n'admet pas de maximum dans  $D$ , mais en atteint un sur  $\partial D$ , c'est-à-dire pour  $|z| = 1$ .

Pour  $|z|=1$ ,  $|\bar{z}|=1$  et  $z\bar{z}=|z|^2=1$ , alors:

$$|f(z)| = \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z}||1-\bar{a}z|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}z\bar{z}|} = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \frac{|z-a|}{|\overline{z-a}|} = 1$$

D'autre part  $\varphi_a(a)=0$ , donc  $\varphi_a$  n'est pas constante, donc:

sur pour  $z \in D$ ,  $|\varphi_a(z)| < 1 = \varphi_a(D) \subset D$ .

Résolvons alors l'équation d'inconnue  $z$ :

$$Z = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

$$Z - \bar{a}Zz = z - a$$

$$z(1+\bar{a}Z) = Z+a, \text{ et pour } |Z| \leq 1:$$

$$z = \frac{Z+a}{1+\bar{a}Z} = \frac{Z-(-a)}{1-(-\bar{a})Z} = \varphi_{-a}(Z), \varphi_{-a} \text{ étant du même type que } \varphi_a.$$

Donc tout  $Z$  de  $D$  a un antécédent unique par  $\varphi$ ,  $\varphi: D \rightarrow D$  est bijective (de réciproque  $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ ).

La réciproque étant de même type est également analytique sur  $D$ .

$\varphi_a$  est donc bien un automorphisme analytique de  $D$ .

- Par composition d'automorphismes analytiques de  $D$ , toute fonction de type  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  en est un (pour  $\theta \in \mathbb{R}, |a| < 1$ ).

$$(f(z) = e^{i\theta} z \text{ si } a=0).$$

- Réciproquement, soit  $f$  un automorphisme de  $D$  tel que  $f(0)=a$ .

Nécessairement,  $|a| < 1$ . Le cas  $a=0$  a été traité, et si  $a \neq 0$ ,

$\varphi_a$  (définie ci-dessus) est un automorphisme de  $D$ , donc aussi  $\varphi_a \circ f$ ,

et  $\varphi_a \circ f(0) = \varphi_a(a) = 0$ . On est ramené au premier cas:

$$(\exists \theta \in \mathbb{R}) (\varphi_a \circ f(z) = e^{i\theta} z), \varphi_a^{-1} \circ \varphi_a \circ f(z) = e^{i\theta} z, \text{ d'où:}$$

$$f(z) = \varphi_a^{-1}(e^{i\theta} z) = \varphi_{-a}(e^{i\theta} z) = \frac{e^{i\theta} z + a}{1 + \bar{a}e^{i\theta} z} = e^{i\theta} \frac{z - (-ae^{-i\theta})}{1 - (-\bar{a}e^{-i\theta})z}$$

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \text{ avec } \alpha = -ae^{-i\theta} \text{ d'où } |\alpha| < 1. \text{ Ainsi:}$$

Les automorphismes analytiques de  $D$  sont exactement les

$$\text{fonctions de forme } f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad (\theta \in \mathbb{R}, |a| < 1)$$

## 2°) b). AUTOMORPHISMES DE $P$ .

### a) Méthode de recherche.

Soit  $f$  un automorphisme analytique de  $P$  (il en existe au moins un = l'identité).

Supposons que l'on connaisse un isomorphisme analytique:

$g: P \rightarrow D$ . Par composition d'isomorphismes on aura:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g^{-1}} P & \xrightarrow{f} P & \xrightarrow{g} D \\ & \searrow \varphi = g \circ f \circ g^{-1} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi = g \circ f \circ g^{-1} \text{ est un automorphisme de } D \\ g^{-1} \circ \varphi = f \circ g^{-1} \\ \underline{f = g^{-1} \circ \varphi \circ g} \end{array}$$

avec, d'après 2°) a) :  $\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ .

Réciproquement, pour une telle fonction  $\varphi$ ,  $f = g^{-1} \circ \varphi \circ g$  sera un automorphisme de  $P$ . Ainsi =

Tous les automorphismes de  $P$  se déduisent ainsi de ceux de  $D$ .

Pour trouver un isomorphisme  $g: P \rightarrow D$ , remarquons que l'on aura  $|g(z)| < 1$  pour tout  $z \in P$  si  $g$  est une fraction dont le numérateur reste, en module, inférieur au dénominateur lorsque  $z \in P$ , par exemple:

$$g(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

C'est une fonction homographique, et  $\varphi$  également. En effet:

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{-\bar{a}z+1} = \frac{e^{i\theta} z - a}{-\bar{a}z + 1}. \text{ Regroupons ce qui nous sera utile à leur sujet.}$$

### b) Observations sur les fonctions homographiques : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

$f(z)$  est définie pour  $cz+d \neq 0$ , soit sur  $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$  si  $c \neq 0$ .

( Dans le cas où  $c=0$ ,  $f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ,

$f(z)$  est définie si  $d \neq 0$  et prend alors la forme  $f(z) = \alpha z + \beta$ ,

elle est alors définie sur  $\mathbb{C}$  -  $f$  est alors analytique (par opérations et composition).

Il est commode d'associer à  $f$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de ses coefficients. Mais ceux-ci sont définis à un multiplicateur

complexes communs près: la relation:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\exists h \in \mathbb{C}^*) (a' = ha, b' = hb, c' = hc, d' = hd)$$

est évidemment d'équivalence, et  $f$  est associée à une

oui

classe d'équivalence =  $F = \mathbb{C} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$- f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{acz+ad-acz-bc}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

donc lorsque  $f$  est définie (sur  $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$ ), elle est dérivable, puisque ~~donc holomorphe, et analytique, donc holomorphe~~, de dérivée non nulle (donc conforme) si et seulement si

oui

$$ad-bc \neq 0, \text{ soit } |F| \neq 0.$$

- Composons  $f$  et  $g$  telles que  $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $G = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ :

$$f \circ g(z) = \frac{a \frac{pz+q}{rz+s} + b}{c \frac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{apz+aq+brz+bs}{cpz+cq+drz+ds} = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)}$$

donc  $f \circ g$  est une fonction homographique (en retirant éventuellement un autre point du domaine de définition) et de matrice  $F \cdot G$

oui

- Pour  $Z = \frac{az+b}{cz+d}$  on a:

$$\begin{aligned} Z(cz+d) &= az+b \\ (cZ-a)z &= -dZ+b, \quad z = \frac{-dZ+b}{cZ-a} \end{aligned}$$

donc tout  $Z$  différent de  $\frac{a}{c}$  a un antécédent unique.

$$\text{Or } \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow acz+ad=acz+bc \Leftrightarrow ad-bc=0.$$

Si  $ad-bc \neq 0$ ,  $f: \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$  est donc bijective,

$f^{-1}$  étant de matrice  $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ . C'est alors un isomorphisme analytique et  $f$  et  $f^{-1}$  sont conformes.

oui

C3 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°5 (fonctions loxodromiques)

A l'aide des documents ci-joints, résoudre le problème n°1 proposé.

Appliquer cette résolution à la résolution du problème n°2 (généralisation du précédent).

Documents joints :

Valiron Théorie des fonctions (Masson) pp. 477 à 481

Pour ce qui concerne les produits infinis, on utilisera le polycopié donné en cours.





## Devoir n° 6 (F. Gramain)

Soit  $s \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|s| > 1$ . Dans tout le problème  $f$  désigne une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  vérifiant  $f(sz) = f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ . Une telle fonction est dite fonction loxodromique. On note  $C(R) = \{z \in \mathbb{C}; R < |z| \leq |R|\}$  pour  $R > 0$ .

- ① Remarquer que  $f$  est définie par sa restriction à  $C(R)$ . Montrer que si  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , elle est constante. La fonction  $f'(z)$  est-elle loxodromique?
- ② Si  $f$  n'a ni zéro ni pôle de module  $R$  et si  $f$  n'est pas constante, calculer la somme des résidus de  $f$  aux pôles situés dans  $C(R)$ . Montrer que  $f$  a au moins deux pôles et deux zéros dans  $C(R)$  (compte tenu de leur multiplicité). Comparer le nombre des zéros et celui des pôles de  $f$  situés dans  $C(R)$ .
- ③ Soit  $S(z) = \prod_{n \geq 0} (1 - \frac{z}{s^n}) \prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{z s^n})$ . Sur quelle partie de  $\mathbb{C}$  la fonction  $S$  est-elle holomorphe? Calculer  $S(sz)$  et  $S(1/z)$  en fonction de  $S(z)$ .
- ④ Soit  $f$  une fonction loxodromique n'ayant ni zéro ni pôle de module 1. Soit  $a_1, \dots, a_m$  ses zéros et  $b_1, \dots, b_n$  ses pôles situés dans  $C(1)$ , chacun figurant un nombre de fois égal à sa multiplicité. Que peut-on dire de  $m$  et  $n$ ?  
Soit  $M(z) = \frac{S(z/a_1) \dots S(z/a_m)}{S(z/b_1) \dots S(z/b_n)}$ . Est-ce une fonction loxodromique?
- ⑤ Soit  $G(z) = f(z)/M(z)$ , et soit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k$  son développement de Laurent à l'origine. Dans quelle partie de  $\mathbb{C}$  est-il égal à  $G(z)$ ? Calculer  $G(sz)$  en fonction de  $G(z)$ . En déduire qu'il existe  $\mu \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_m} = s^\mu$  et  $f(z) = c_\mu z^{-\mu} M(z)$ .
- ⑥ a) Soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$  le développement de Laurent de  $S$  à l'origine. Calculer  $\alpha_n$  en fonction de  $\alpha_0$ .

b) On suppose  $s > 0$  et  $x > 0$ . Montrer que, pour  $x \rightarrow +\infty$

$$S(-x) \sim \alpha_0 \left(1 + \sum_{n \geq 1} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n\right) \quad \text{et} \quad S(-x) \sim P(x) = \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{s^n}\right).$$

Développer  $P(x)$  en série entière à l'origine, puis en appliquant le résultat du I du Problème n° 1 (pour  $x \rightarrow +\infty$  au lieu de  $x \rightarrow 1$ ) trouver  $\alpha_0$ .

c) Montrer que, pour  $|s| > 1$ ,  $\alpha_0$  est une fonction holomorphe de  $s$ . En déduire la valeur de  $\alpha_0$  dans le cas général.



Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , vérifiant  $|\lambda| > 1$   
 Soit  $f$  méromorphe dans  $\mathbb{C}^*$  vérifiant  $f(\lambda z) = f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$   
 On note  $C(R) = \{z \in \mathbb{C}, R < |z| \leq |\lambda| R\}$  pour  $R > 0$

1) i) Remarque que  $f$  est définie par sa restriction à  $C(R)$

• par hypothèse  $f(\lambda z) = f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$   
 de façon générale,  $f(\lambda^p z) = f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$   
 pour tout  $p \in \mathbb{Z}$

En effet, supposons la propriété vraie pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f(\lambda^n z) = f(z)$   
 alors  $f(\lambda^{n+1} z) = f(\lambda \lambda^n z) = f(\lambda^n z) = f(z)$   
 Si la propriété est vraie pour  $n$ , elle est donc vraie pour  $n+1$ ;  
 comme elle est vraie pour  $n=1$ , elle est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

D'autre part  $f(\frac{z}{\lambda}) = f(z)$

En effet  $f(\frac{z}{\lambda}) = f(\lambda \cdot \frac{z}{\lambda^2}) = f(\frac{z}{\lambda^2})$

Où Donc de même, on montrerait que  $f(\frac{z}{\lambda^n}) = f(z)$ .

• Soit  $R > 0$  fixé

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists p \in \mathbb{Z}$  t.q.  $|\lambda|^p R < |z| \leq |\lambda|^{p+1} R$

En effet,

plutôt  
 $p = E \left( \frac{\log |z| - \log R}{\log |\lambda|} \right)$  -)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} |\lambda|^{p+1} R = +\infty$  car  $R$  fixé,  $R > 0$   
 et  $|\lambda| > 1$

(n'inou d'où  
 rest (P) ?)

et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} |\lambda|^p R = 0$

Soit alors  $C(R|\lambda|^R)$  la couronne à laquelle appartient un certain  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ .

$|\lambda|^R R < |z| \leq |\lambda|^{R+1} R$

Où alors  $R < \left| \frac{z}{\lambda^R} \right| \leq |\lambda| R$  donc  $\frac{z}{\lambda^R} \in C(R)$

$$\text{or } f(z) = f\left(\frac{z}{s^k}\right)$$

On en déduit que  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists k \in \mathbb{Z}$  et  $z_1 \in C(R)$  t.q.  
 $z = z_1 s^k$  et  $f(z) = f(z_1)$

Conclusion:  $\lim f = \lim f|_{C(R)}$   
 $f$  est définie par sa restriction à  $C(R)$

ii) Montrer que si  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , elle est constante  
 si  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $f$  est continue sur  $\mathbb{C}^*$  (car dérivable)

Soit  $C_1(R) = \{z \in \mathbb{C}^*, R \leq |z| \leq k|R\}$

$C_1(R)$  est un compact

$f$  est continue sur un compact donc bornée

or  $C(R) \subset C_1(R)$

donc  $\forall z \in C(R), \exists A$  t.q.  $|f(z)| \leq A$

mais comme  $\lim f = \lim f|_{C(R)}$

$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists A$  t.q.  $|f(z)| \leq A$

alors  $f$  est bornée au voisinage de 0 donc 0 est une fausse singularité et on peut prolonger  $f$  par continuité en 0.

On en déduit que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , bornée par  $A$  sur  $\mathbb{C}$ ,

donc d'après le thm de Liouville,  $f$  est constante.

Conclusion: si  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ ,  $f$  est constante

iii) La fonction  $f'(z)$  est elle loxodromique?

Soit  $f$  une fonction loxodromique c'est à dire t.q.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, f(sz) = f(z)$$

en dérivant chaque membre on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, s f'(sz) = f'(z)$$

$$\text{soit } \forall z \in \mathbb{C}^*, f'(sz) = \frac{1}{s} f'(z)$$

comme  $|s| > 1$ ,  $s \neq 1$  ainsi que  $\frac{1}{s}$  donc  $f'(sz) \neq f'(z)$

oui

Conclusion:  $f'$  n'est pas bi-dromique (sauf si  $f$  est constante)

2) i) Si  $f$  n'a ni zéro, ni pôle de module  $R$  et si  $f$  n'est pas constante, calculer la somme des résidus de  $f$  aux pôles situés dans  $C(R)$ .

• Si  $a$  est un zéro de  $f$  alors " $sa$ " et " $\frac{a}{s}$ " sont aussi des zéros de  $f$

En effet  $f(sa) = f(a) = 0$

$$f\left(\frac{a}{s}\right) = f\left(s \cdot \frac{a}{s}\right) = f(a) = 0$$

oui Donc si  $f$  n'a pas de zéro de module  $R$ ,  $f$  n'a pas non plus de zéro de module  $|s|R$ .

• Si  $f$  n'est pas constante,  $f$  n'est pas holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  donc  $f$  possède au moins un pôle non nul. Soit  $b$  ce pôle.

oui Si  $b$  est un pôle de  $f$  alors  $sb$  et  $\frac{b}{s}$  sont aussi des pôles de  $f$ .

En effet, si  $b$  est un pôle de  $f$ ,  $f(z) = \frac{g(z)}{z-b}$   
alors  $f(sz) = \frac{g(sz)}{sz-b}$  mais  $f(sz) = f(z)$

donc  $f(z) = \frac{g(sz)}{sz-b} = \frac{h(z)}{sz-b}$  donc  $\frac{b}{s}$  est aussi un pôle de  $f$

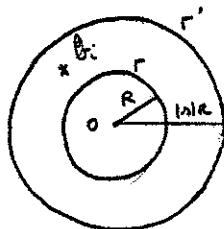
de même,  $f\left(\frac{z}{s}\right) = \frac{g\left(\frac{z}{s}\right)}{\frac{z}{s}-b} = \frac{sg\left(\frac{z}{s}\right)}{z-bs} = \frac{h(z)}{z-bs}$  donc  $sb$  est

aussi un pôle de  $f$ .

oui Donc si  $f$  n'a pas de pôle de module  $R$ ,  $f$  n'a pas non plus de pôle de module  $|s|R$ .

• Soit  $K = C_1(R) = \{z \mid R \leq |z| \leq |s|R\}$

Soit  $b_i$  les pôles de  $f$  situés dans  $C(R)$



$$\text{Soit } \Gamma = \mathcal{C}(0; R)$$

$$\Gamma' = \mathcal{C}(0; \lambda R)$$

D'après le thm des résidus

$$\sum \text{Res}(f; b_i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} f(z) dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} f(z') dz' - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$\text{on pose } z' = \lambda z$$

$$dz' = \lambda dz$$

qd  $z'$  décrit  $\Gamma'$ ,  $z$  décrit  $\Gamma$

donc

$$\sum \text{Res}(f; b_i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda z) \lambda dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$= \frac{\lambda}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} (\lambda - 1) \int_{\Gamma} f(z) dz$$

oui

Conclusion:  $\sum \text{Res}(f; b_i) = \frac{\lambda - 1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0; R)} f(z) dz$

ii) Montrer que  $f$  a au moins 2 pôles et 2 zéros dans  $C(R)$ , compte tenu de leur multiplicité.

. On a vu que  $f$  possédait au moins un pôle  $b$  non nul et qu'alors  $bs$  et  $\frac{b}{s}$  étaient aussi des pôles de  $f$ . On peut généraliser cette propriété (en recommençant le raisonnement à partir de  $bs$  ou de  $\frac{b}{s}$ ) et en déduire que si  $b$  est un pôle de  $f$ ,  $bs^p$  est un pôle de  $f$ , quel que soit  $p \in \mathbb{Z}$ .

On en déduit que  $f$  possède au moins un pôle dans  $C(R)$ .

. Considérons la fonction  $g$  telle que  $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ . Cette fonction possède les mêmes pôles et les mêmes zéros que  $f$  sur  $\mathbb{C}^*$ .

Soit  $b_i$  les pôles de  $g$  situés dans  $\mathbb{C}(R)$

$$\sum \text{Res}(g; b_i) = 0$$

En effet, par un raisonnement analogue au précédent, on peut écrire :

$$\sum \text{Res}(g; b_i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} g(z') dz' - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} g(z) dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z')}{z'} dz' - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

en faisant le même changement de variable, on obtient :

$$\sum \text{Res}(g; b_i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$= 0$$

Supposons que  $g$  possède un seul pôle simple  $b$  dans  $\mathbb{C}(R)$

alors il existe  $g_1$  telle que  $g(z) = \frac{g_1(z)}{z-b}$  avec  $g_1(b) \neq 0$   
et par définition  $\text{Res}(g, b) = g_1(b) \neq 0$

$$\text{or } \sum \text{Res}(g; b_i) = 0$$

donc si  $b$  était le seul pôle, et pôle simple, on devrait avoir

$$\text{Res}(g; b) = 0 \quad \text{d'où contradiction.}$$

On peut en déduire que  $g$  possède au moins 2 pôles ou un pôle d'ordre 2

Conclusion:  $g$  possède au moins 2 pôles dans  $\mathbb{C}(R)$  ou un pôle d'ordre 2 et comme  $f$  possède les mêmes pôles,  $f$  également.

oui



• D'autre part, si  $f$  est bi-univoque,  $\frac{1}{f}$  l'est également.  
 En effet, si  $f$  est méromorphe,  $\frac{1}{f}$  est méromorphe.  
 De plus  $\frac{1}{f}(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f}(z)$  pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ .

Donc de même  $\frac{1}{f}$  possède au moins 2 pôles dans  $C(R)$ . Comme d'après thm, les pôles de  $\frac{1}{f}$  sont les zéros de  $f$  avec le même ordre, on en déduit que  $f$  possède au moins 2 zéros dans  $C(R)$ .

Conclusion:  $f$  possède au moins 2 pôles et 2 zéros dans  $C(R)$ , compte tenu de leur multiplicité.

iii) Comparer le nombre des zéros et celui des pôles de  $f$  situés dans  $C(R)$ .

Soit  $Z$  le nombre de zéros et  $P$  le nombre de pôles. Sachant qu'il n'y a ni zéro ni pôle sur le bord  $\partial K$  on a

$$Z - P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f'(z')}{f(z')} dz' - \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

on pose à nouveau  $z' = \lambda z$   
 $dz' = \lambda dz$

$$\text{donc } Z - P = \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f'(\lambda z)}{f(\lambda z)} \lambda dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda f'(\lambda z)}{f(\lambda z)} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda f'(\lambda z) - f'(z)}{f(z)} dz$$

$$\text{or } \lambda f'(\lambda z) = f'(z)$$

$$\text{donc } Z - P = 0 \quad \text{soit } Z = P$$

Oui

Conclusion: dans  $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ , le nombre de pôles est égal au nombre de zéros

3) Soit  $S(z) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda^n}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{3\lambda^n}\right)$

i) Sur quelle partie de  $\mathbb{C}$ , la fonction  $S$  est-elle holomorphe?

• Étudions  $p(z) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda^n}\right)$

Soit  $u_n(z) = -\frac{z}{\lambda^n}$  ;  $(u_n)$  est une suite de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$

$$|u_n| = \left| -\frac{z}{\lambda^n} \right| = |z| \times \frac{1}{|\lambda|^n}$$

Sur tout compact de  $\mathbb{C}$ ,  $\exists M$  tel que  $|z| \leq M$

donc  $|u_n| \leq M \times \frac{1}{|\lambda|^n}$

or la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^n}$  est une série géométrique convergente car  $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$  car  $|\lambda| > 1$

On en déduit que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .

Donc, d'après thm n°6 p86 du poly, le produit infini  $p(z) = \prod_{n \geq 0} (1 + u_n(z))$  converge dans  $\mathbb{C}$  et  $p$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$ .

• Étudions  $q(z) = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{3\lambda^n}\right)$

Soit  $v_n(z) = -\frac{1}{3\lambda^n}$  ;  $(v_n)$  est une suite de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$

$$|v_n| = \left| -\frac{1}{3\lambda^n} \right| = \frac{1}{|3|} \times \frac{1}{|\lambda|^n}$$

Sur tout compact de  $\mathbb{C}^*$ ,  $\exists m > 0$  tel que  $m \leq |z|$

d'où  $\frac{1}{|3|} \leq \frac{1}{m}$

donc  $|v_n| \leq \frac{1}{n} \times \frac{1}{|z|^n}$

Comme précédemment, on en déduit que la série  $\sum v_n$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C}^*$

donc d'après thm 6 p 86, le produit infini  $q(z) = \prod_{n \geq 1} (1 + v_n(z))$  ou converge dans  $\mathbb{C}^*$  et  $q$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$

$S$  est donc le produit de 2 fonctions, l'une holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , l'autre holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  donc  $S$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$

ou Conclusion:  $S$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$

ii) Calculer  $S(sz)$  en fonction de  $S(z)$

$$S(z) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{s^n}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{s^n}\right)$$

$$S(sz) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{sz}{s^n}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{s^n}\right)$$

$$= \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{s^{n+1}}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{s^{n+1}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{z}{s}\right) \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{s^n}\right) \times \prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{s^n}\right)$$

$$= (1 - sz) \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{s^n}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{1}{sz}} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{s^n}\right)$$

$$= \frac{1 - sz}{1 - \frac{1}{sz}} S(z)$$

$$= sz \times \frac{1 - sz}{sz - 1} S(z)$$

$$= -sz S(z)$$

ou Conclusion:  $S(sz) = -sz S(z)$

iii) Calculer  $S(1/z)$  en fonction de  $S(z)$

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{z}\right) &= \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{1}{z \cdot 2^n}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right) \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{z \cdot 2^n}\right) \times \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z}{2^n}\right) \times \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{z-1}{z} \times \frac{1}{1-z} S(z) \\ &= -\frac{1}{z} S(z) \end{aligned}$$

oui

Conclusion:  $S\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} S(z)$

4) Soit  $f$  une fonction loxodromique n'ayant ni zéro ni pôle de module 1. Soit  $a_1, \dots, a_m$  ses zéros et  $b_1, \dots, b_n$  ses pôles situés dans  $C(1)$ , chacun figurant un nombre de fois égal à sa multiplicité.

i) que peut-on dire de  $m$  et  $n$ ?

Sachant qu'il n'y a pas de zéro ni de pôle sur le bord, on peut appliquer la propriété démontrée en ② à  $R=1$  et on en déduit que  $m=n$ .

oui

Conclusion:  $m=n$

ii) Soit  $M(z) = \frac{S(z/a_1) \dots S(z/a_m)}{S(z/b_1) \dots S(z/b_n)}$ . Est-ce une fonction

loxodromique?

Puisque  $m=n$ ,  $M(z) = \frac{S\left(\frac{z}{a_1}\right) \dots S\left(\frac{z}{a_m}\right)}{S\left(\frac{z}{b_1}\right) \dots S\left(\frac{z}{b_n}\right)}$

$$\begin{aligned}
 \text{alors } M(z) &= \frac{S\left(\frac{1z}{a_1}\right) \cdots S\left(\frac{1z}{a_n}\right)}{S\left(\frac{1z}{b_1}\right) \cdots S\left(\frac{1z}{b_m}\right)} \\
 &= \frac{(-1)^m \cancel{a_1^m} \times \frac{z}{a_1} \times \cdots \times \frac{z}{a_n} \times S\left(\frac{z}{a_1}\right) \times \cdots \times S\left(\frac{z}{a_n}\right)}{(-1)^m \cancel{a_1^m} \times \frac{z}{b_1} \times \cdots \times \frac{z}{b_m} \times S\left(\frac{z}{b_1}\right) \times \cdots \times S\left(\frac{z}{b_m}\right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{a_1} \times \cdots \times \frac{1}{a_n}}{\frac{1}{b_1} \times \cdots \times \frac{1}{b_m}} M(z) \\
 &= \frac{b_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} M(z)
 \end{aligned}$$

ou

Conclusion:  $M$  n'est pas bi-symétrique sauf si  $\frac{b_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n} = 1$   
 soit  $\prod_{i=1}^m a_i = \prod_{i=1}^n b_i$

5) Soit  $G(z) = \frac{f(z)}{M(z)}$  et soit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k z^k$  son développement

de Laurent à l'origine.

i) Dans quelle partie de  $\mathbb{C}$  est-il égal à  $G(z)$ ?

• on montre que  $S\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} S(z)$   
 donc en particulier

$$S(1) = -S(1)$$

$$\text{d'où } S(1) = 0$$

On peut en déduire que si  $z = a_1$  ou  $z = a_2$  ou  $\cdots$  ou  $z = a_n$

$$M(z) = 0$$

En effet, alors l'un des facteurs du numérateur est nul.

Donc  $a_1, \dots, a_n$  sont les zéros de  $M$  dans  $\mathbb{C}(1)$

Soit  $\lambda = \frac{b_1 \cdots b_m}{a_1 \cdots a_n}$  ; on a montré  $M(sz) = \lambda M(z)$

$$\text{donc } M(s^p z) = \lambda^p M(z)$$

on en déduit que  $s^p a_i$  est aussi un zéro de  $M$

or la réunion des couronnes  $C(|s|^p)$  quand  $p$  décrit  $\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{C}^*$

Donc  $A = \{s^p a_i, p \in \mathbb{Z} \text{ et } i = 1, \dots, n\}$  est l'ensemble des zéros de

$M$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

De même si  $z = b_1$  ou  $z = b_2$  ou  $\dots$  ou  $z = b_n$ , l'un des facteurs du dénominateur est nul.

Donc  $b_1, \dots, b_n$  sont les pôles de  $M$  dans  $\mathbb{C}(z)$

et  $B = \{z^p b_i, p \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\}$  est l'ensemble des pôles de  $M$  dans  $\mathbb{C}^*$ .

• On a vu que si  $b$  est un pôle de  $f$ ,  $z^p b$  est aussi un pôle de  $f$ .  
De même si  $a$  est un zéro de  $f$ ,  $z^p a$  est un zéro de  $f$ .

Par un raisonnement semblable, on peut donc remarquer que  $A$  et  $B$  sont aussi respectivement l'ensemble des zéros et des pôles de  $f$  sur  $\mathbb{C}^*$ .

Où On peut donc remarquer que  $M$  et  $f$  admettent les mêmes zéros et les mêmes pôles.

•  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^* - B$

$M$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^* - B$

$\frac{1}{M}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^* - A$

donc  $G = \frac{f}{M}$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^* - A \cup B$

! mais  $M$  admettant les mêmes zéros et pôles que  $f$ , la fonction  $\frac{f}{M}$  se simplifie beaucoup.

Soit  $G_1$  la fonction simplifiée -  $G_1$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}^*$ .

On peut prolonger  $G$  par continuité en posant  $G(\alpha_i) = G_1(\alpha_i)$  où  $\alpha_i \in A \cup B$ .

Donc  $G$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  et ne s'annule pas.

Où Conclusion:  $G$  est égale à son développement de Laurent sur  $\mathbb{C}^*$

ii) Calculer  $G(sz)$  en fonction de  $G(z)$

$$G(sz) = \frac{f(sz)}{M(sz)} = \frac{f(z)}{\lambda M(z)} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n}$$

$$= \frac{1}{\lambda} G(z)$$

qui

Conclusion : En posant  $\lambda = \frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n}$ , on a  $G(sz) = \frac{1}{\lambda} G(z)$

iii) En déduire qu'il existe  $\mu \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n} = s^\mu$  et

$$\underline{f(z) = c_{-\mu} z^{-\mu} M(z)}$$

$$G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$G(sz) = \frac{1}{\lambda} G(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{d'où } \lambda G(sz) - G(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{soit } \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k s^k z^k - \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k z^k = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{d'où } \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (\lambda s^k - 1) z^k = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

qui on en déduit que  $\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k (\lambda s^k - 1) = 0$

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = s^{-k}$$

Comme  $G$  n'est pas identiquement nulle, il existe au moins un

qui coefficient  $c_k \neq 0$ . Donc il existe  $k_0$  tel que  $c_{k_0} \neq 0$

L'équation précédente implique que pour ce  $k_0$ ,  $\lambda = s^{-k_0}$ ; mais

qui  $\lambda$  et  $s$  sont fixés donc  $k_0$  est unique.

Soit  $\mu = -k_0$ ; on en déduit que

il existe  $\mu$  unique tel que  $\lambda = s^\mu$  et  $c_k = 0$  dès que  $k \neq -\mu$

qui d'où  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n} = s^\mu$

$$\text{alors } G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k s^k = c_{-\mu} z^{-\mu} \quad \text{car tous les autres coefficients sont nuls}$$

d'où  $\frac{f(z)}{M(z)} = c_{-p} z^{-p}$  soit  $f(z) = c_{-p} z^{-p} M(z)$

Conclusion: il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n} = z^p$  et  $f(z) = c_{-p} z^{-p} M(z)$

Remarque: si  $p = 0$ ,  $\frac{b_1 \dots b_n}{a_1 \dots a_n} = 1$  et  $f(z) = c_0 M(z)$

d'où  $M(z) = \frac{1}{c_0} f(z)$

alors  $M(sz) = \frac{1}{c_0} f(sz) = \frac{1}{c_0} f(z) = M(z)$

et on retrouve le cas particulier où  $M$  est loxodromique

6) a) Soit  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$  le développement de Laurent de  $S$  à l'origine  
Calculer  $\alpha_n$  en fonction de  $\alpha_0$

on a vu que  $S(sz) = -sz S(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

et que  $S$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$  donc égale à son développement de Laurent. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n s^n z^n &= -sz \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\alpha_n s^{n+1} z^{n+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

d'où  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n s^n z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -\alpha_{n-1} s^n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

on en déduit  $\alpha_n s^n = -\alpha_{n-1} s \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

soit  $\alpha_n s^{n-1} = -\alpha_{n-1}$

Supposons  $n > 0$

$$\alpha_n s^{n-1} = -\alpha_{n-1}$$

de même  $\alpha_{n-1} s^{n-2} = -\alpha_{n-2}$

$\vdots$

$$\alpha_2 s = -\alpha_1$$

$$\alpha_1 = -\alpha_0$$



d'où en multipliant membre à membre

$$\alpha_n \delta^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^n \alpha_0$$

$$\text{soit } \alpha_n \delta^{\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^n \alpha_0$$

$$\text{d'où } \alpha_n = (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_0$$

On fait faire un raisonnement analogue si  $n \leq 0$

$$\alpha_0 \delta^{-1} = -\alpha_{-1}$$

$$\alpha_{-1} \delta^{-2} = -\alpha_{-2}$$

$\vdots$

$$\alpha_{n+1} \delta^n = -\alpha_n$$

d'où en multipliant membre à membre

$$\alpha_0 \delta^{(-1)+(-2)+\dots+(-n)} = (-1)^n \alpha_n$$

$$\alpha_0 \delta^{-(1+2+\dots+(-n))} = (-1)^n \alpha_n$$

$$\alpha_0 \delta^{-\frac{(-n) \times (-n+1)}{2}} = (-1)^n \alpha_n$$

$$\alpha_0 \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^n \alpha_n$$

$$\text{d'où } \alpha_n = (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_0$$

où

Conclusion :  $\alpha_n = (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_0$

b) On suppose  $s > 0$  et  $x > 0$

i) Montrer que pour  $x \rightarrow +\infty$ ,  $S(-x) \sim \alpha_0 \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right)$

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \alpha_0 z^n \\ &= \alpha_0 \left( \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n \right) \end{aligned}$$

on pose  $m = 1 - n$

alors  $m = 1 - n$

$$n - 1 = -m$$

qd  $n = -\infty, m \geq +\infty$

$$n = 0, m \geq 1$$

on pourrait remarquer (plus globalement) que

$$\frac{\alpha_0}{2} \sum s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{1}{s}\right)^{1/2} \text{ car } \frac{1}{s} \rightarrow 0 \text{ as } s \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } S(z) &= \alpha_0 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{1-m} s^{-\frac{(1-m)(-m)}{2}} z^{1-m} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n \right] \\ &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \times (-1)^{-n} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^{1-n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n \right] \end{aligned}$$

$$\text{mais } (-1)^{-n} = (-1)^n$$

$$\text{d'où } S(z) = \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{-\frac{n(n-1)}{2}} (z^n - z^{1-n}) \right]$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ alors } S(-z) &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s^{-\frac{n(n-1)}{2}} ((-z)^n - (-z)^{1-n}) \right] \\ &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{(-1)^n} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \cancel{(-1)^n} \times (z^n + z^{1-n}) \right] \\ &\quad \text{car } (-1)^{2n} = 1 \\ &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} (z^n + z^{1-n}) \right] \\ &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^{1-n} \right] \\ &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^{1-n} \right] \end{aligned}$$

on pose  $m = n-1$

$$\begin{aligned} S(-z) &= \alpha_0 \left[ \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} s^{-\frac{(m+1)m}{2}} z^{-m} \right] \\ &= \alpha_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n+1)}{2}} z^{-n} \right] \end{aligned}$$

qui soit  $S(-z) = \alpha_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} z^n \right) = \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n+1)}{2}} z^{-n}$

• Étudions la série  $\sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n+1)}{2}} z^{-n}$

$$\text{Soit } u_n = s^{-\frac{n(n+1)}{2}} z^{-n} = \left( \frac{1}{s^{\frac{n+1}{2}} z} \right)^n$$

$u_n$  est à termes réels et positifs par hypothèse

$$\forall n \geq 1, s^{\frac{n+1}{2}} \geq s \quad \text{car } s > 1$$

$$\text{d'où } s^{\frac{n+1}{2}} z \geq s z \quad \text{car } z > 0$$

$$\frac{1}{s^{\frac{n+1}{2}} z} \leq \frac{1}{s z}$$

Soit  $v_n = \left(\frac{1}{\delta x}\right)^n$   
 la série  $\sum v_n$  est une série géométrique convergente dès que  
 $x > \frac{1}{\delta}$  donc vrai qd  $x \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta x}} - 1 = \frac{\delta x}{\delta x - 1} - 1 = \frac{\delta x - \delta x + 1}{\delta x - 1} = \frac{1}{\delta x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta x - 1} = 0$$

$\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$ , les 2 séries sont à termes positifs donc  
 la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge et sa somme tend vers 0 qd  $x$   
 tend vers  $+\infty$ .

$$\text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ S(-x) - \alpha_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right) \right] = 0$$

Où

$$\text{Conclusion: } S(-x) \sim \alpha_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right) \text{ qd } x \rightarrow +\infty$$

ii) Montrer que pour  $x \rightarrow +\infty$ ,  $S(-x) \sim P(x) = \prod_{n \geq 0} \left( 1 + \frac{x}{\delta^n} \right)$

$$S(z) = \prod_{n \geq 0} \left( 1 - \frac{z}{\delta^n} \right) \prod_{n \geq 1} \left( 1 - \frac{1}{\delta \delta^n} \right)$$

$$S(-x) = \prod_{n \geq 0} \left( 1 + \frac{x}{\delta^n} \right) \prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{1}{x \delta^n} \right)$$

$$\frac{S(-x)}{\prod_{n \geq 0} \left( 1 + \frac{x}{\delta^n} \right)} = \prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{1}{x \delta^n} \right) \quad (\text{écriture possible car } \frac{x}{\delta^n} \neq -1)$$

• Étudions  $\prod_{n \geq 1} \left( 1 + \frac{1}{x \delta^n} \right)$

$$\text{Soit } \sum u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x \delta^n}$$

sur tout compact de  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\exists m > 0$  t.q.  $x > m$

$$\text{donc } \frac{1}{x} < \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{x \delta^n} < \frac{1}{m} \times \frac{1}{\delta^n}$$

DELRIEU Jean-Louis  
VERGNAUD Nadine

Feuillet n° 5

$\frac{1}{\lambda^n}$  est le terme général d'une série géométrique à termes positifs convergente donc sur tout compact de  $\mathbb{R}_+^*$  la série

$\sum u_n(z)$  converge normalement

On peut en déduire que le produit infini  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{x\lambda^n})$  converge dans  $\mathbb{R}_+^*$

Comme  $u_n$  est à termes positifs par hypothèse les séries

$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+u_n)$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et le produit  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n)$  sont de même nature.

De plus, si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+u_n)$  converge et a pour somme  $S$ ,  $\prod_{n=0}^{\infty} (1+u_n)$  converge et a pour valeur  $e^S$ .

B. qd  $x \rightarrow +\infty$   $\frac{1}{x\lambda^n} \rightarrow 0$  et

$$\log\left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right) = \frac{1}{x\lambda^n} - \frac{1}{2x^2\lambda^{2n}} + \frac{1}{3x^3\lambda^{3n}} + o\left(\frac{1}{x^4\lambda^{4n}}\right)$$

$$\text{de } \log\left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right) \leq \frac{1}{x\lambda^n} \quad \text{qd } x \rightarrow +\infty$$

la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x\lambda^n} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n}$  a pour somme

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{x(\lambda - 1)}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{x(\lambda - 1)} = 0$$

on peut en déduire comme précédemment, les  $u_n$  étant à termes positifs que la somme de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right)$  tend vers 0 qd  $x$  tend vers  $+\infty$ .

oui Donc le produit infini  $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right)$  tend vers  $e^0 = 1$

$$\text{Comme } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x\lambda^n}\right)$$

et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$  également

oui on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{x \delta^n}\right) = 1$

et donc que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(-x)}{\prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{\delta^n}\right)} = 1$

oui Conclusion: quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $S(-x) \sim P(x) = \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{\delta^n}\right)$

iii) Développer  $P(x)$  en série entière à l'origine

$$P(x) = \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{\delta^n}\right)$$

• D'abord, remarquons que  $P(\delta x) = (1 + \delta x) P(x)$ . En effet

$$\begin{aligned} P(\delta x) &= \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{\delta x}{\delta^n}\right) \\ &= \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{\delta^{n-1}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{x}{\delta^{-1}}\right) \prod_{n \geq 0} \left(1 + \frac{x}{\delta^n}\right) \\ &= (1 + \delta x) P(x) \end{aligned}$$

oui

• Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  le d.s.e de  $P(x)$

$$\text{si } P(\delta x) = (1 + \delta x) P(x)$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n x^n &= (1 + \delta x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n + \delta a_n x^{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \delta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned}$$

on pose dans le dernier terme  $m = n+1$

$$\text{alors } m = n+1$$

$$\text{et qd } n=0 \quad m=1$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + s \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$\text{soit } \cancel{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n x^n = \cancel{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + s \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$\text{soit } \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + s a_{n-1}) x^n$$

$$\text{donc } \forall n \geq 1 \quad a_n s^n = a_n + s a_{n-1}$$

$$\text{soit } \forall n \geq 1 \quad a_n (s^n - 1) = s a_{n-1}$$

$$\cdot \quad a_n (s^n - 1) = s a_{n-1}$$

$$\text{de même } a_{n-1} (s^{n-1} - 1) = s a_{n-2}$$

⋮

$$a_1 (s - 1) = s a_0$$

on

on fait le produit membre à membre d'où

$$a_n (s^n - 1) (s^{n-1} - 1) \dots (s - 1) = s^n a_0$$

$$\text{soit } a_n = \frac{s^n}{(s^n - 1)(s^{n-1} - 1) \dots (s - 1)} a_0$$

$$= \frac{s^n}{s^n \left(1 - \frac{1}{s^n}\right) s^{n-1} \left(1 - \frac{1}{s^{n-1}}\right) \dots s \left(1 - \frac{1}{s}\right)} a_0$$

$$= \frac{1}{s^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} (1 - s^{-n})(1 - s^{-(n-1)}) \dots (1 - s^{-1})} a_0$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{n(n-1)}{2}}} \times \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 - s^{-j})} a_0$$

$$\text{d'où } a_n = s^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{1 - s^{-j}} \right) a_0$$

Puis  $a_0 = 1$ , en effet

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\text{donc } P(0) = a_0$$

$$\text{mais aussi } P(z) = \prod_{n \geq 0} \left( 1 + \frac{z}{s^n} \right)$$

$$\text{donc } P(0) = 1$$

on en déduit que  $a_0 = 1$

et que  $a_n = \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right)$

oui

Conclusion:  $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  avec  $a_n = \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right)$

iv) En appliquant le résultat: si  $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$  alors  $\frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} l$   
trouver  $\alpha_0$ .

$$\begin{aligned} \text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(-x) &= \alpha_0 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right) \\ &= \alpha_0 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n \right) \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} S(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right) x^n \right)$$

on en déduit

$$\alpha_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right) x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-\frac{n(n-1)}{2}} x^n}$$

or

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\delta^{-\frac{n(n-1)}{2}}} \times \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right)}{\cancel{\delta^{-\frac{n(n-1)}{2}}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{d=1}^n \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right) \\ &= \prod_{d=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right) \end{aligned}$$

d'où en appliquant la propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \prod_{d=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right)$$

oui

Conclusion:  $\alpha_0 = \prod_{d=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-\delta^{-d}} \right)$

c) Montrer que pour  $|s| > 1$ ,  $\alpha_0$  est une fonction holomorphe de  $s$ . En déduire la valeur de  $\alpha_0$  dans le cas général.

• On a vu dans 6) b) que

$$S(z) = \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{-\frac{n(n-1)}{2}} (z^n - z^{1-n})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } S(-1) &= \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{-\frac{n(n-1)}{2}} ((-1)^n - (-1)^{1-n}) \\ &= \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{-\frac{n(n-1)}{2}} \times (-1)^n (1 - (-1)) \end{aligned}$$

qui donc  $S(-1) = 2\alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} z^{-\frac{n(n-1)}{2}}$

• D'autre part

$$S(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z^n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{z z^n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } S(-1) &= \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } S(-1) = 2 \left[ \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \right]^2$$

donc en identifiant

$$2\alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} z^{-\frac{n(n-1)}{2}} = 2 \left[ \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \right]^2$$

soit  $\alpha_0 = \frac{\left[ \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right) \right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} z^{-\frac{n(n-1)}{2}}}$

• Étudions  $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right)$

$$\text{Soit } \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$$

$$\text{Soit } u_n(z) = \frac{1}{z^n}$$



sur tout compact de  $D$ ,  $\exists k > 1$  tel que  $|s| \geq k$   
d'où  $|s|^n \geq k^n$   
d'où  $\frac{1}{|s|^n} \leq \frac{1}{k^n}$

la série de terme général  $\frac{1}{k^n}$  est une série géométrique convergente donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge normalement sur tout compact de  $D$

D'après le thm 6 p 86, on peut donc en déduire que  $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{z^n})$  converge dans  $D$  et que  $p$  est holomorphe dans  $D$

on D'où  $[p(z)]^2$ , produit de 2 fonctions holomorphes est holomorphe dans  $D$

• Etudions  $\sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}}$

on pose  $m = n - 1$

qd  $m = 1, m = 0$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} s^{-\frac{(m+1)m}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s^{\frac{n+1}{2}}} \right)^n$$

$$\text{Soit } v_n(s) = \left( \frac{1}{s^{\frac{n+1}{2}}} \right)^n$$

$$\forall n \geq 0 \quad |s|^{\frac{n+1}{2}} \geq |s|^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } |s| > 1 \text{ donc dans } D$$

$$\text{d'où } \frac{1}{|s|^{\frac{n+1}{2}}} \leq \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}}$$

sur tout compact de  $D$ ,  $\exists k > 1$  tel que  $|s| \geq k$

$$\text{d'où } |s|^{\frac{1}{2}} \geq k^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{d'où } \left( \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \right)^n \leq \left( \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \right)^n$$

$$\text{on en déduit que } \left( \frac{1}{|s|^{\frac{n+1}{2}}} \right)^n \leq \left( \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2}}} \right)^n \leq \left( \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \right)^n$$

soit  $|u_n(s)| \leq \left(\frac{1}{k^{1/2}}\right)^n$

La série de terme général  $\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right)^n$  est une série géométrique convergente (car  $k > 1$  donc  $k^{1/2} > 1$ ) donc la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge normalement sur tout compact de  $D$ .  
oui Elle converge donc uniformément.

D'après le thm p 78, on peut alors en déduire que sa somme est une fonction holomorphe sur  $D$ .

• Soit  $f(s) = \frac{\left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{s^n}\right)\right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} s^{-\frac{n(n-1)}{2}}}$ ,  $f$  est une fonction holomorphe sur  $D$  comme quotient de fonctions holomorphes sur  $D$ .

• Soit  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par  

$$g(s) = \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-s^{-j}}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-s^{-j})} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-s^{-j})}$$

sur tout compact de  $]1; +\infty[$ , la série  $\sum_{j=1}^{\infty} (-s^{-j})$  est normalement convergente pour les mêmes raisons que précédemment donc le produit  $P(s) = \prod_{j=1}^{\infty} (1-s^{-j})$  converge sur  $]1; +\infty[$  et  $P$  est holomorphe sur  $]1; +\infty[$  et ne s'annule pas car  $s \neq 1$ .

oui  $g$  est donc holomorphe sur  $]1; +\infty[$ .

•  $f$  est holomorphe sur  $D$  donc analytique sur  $D$   
 $g$  est holomorphe sur  $]1; +\infty[$  donc analytique sur  $]1; +\infty[$   
 $f$  et  $g$  coïncident sur  $]1; +\infty[ \subset D$  car ce sont 2 expressions de  $\alpha_s$  donc d'après le principe de prolongement analytique  $f = g$  sur  $D$ .

oui

Conclusion: dans le cas général, pour  $|s| > 1$

$$\alpha_s = \prod_{\delta=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-s^{-\delta}} \right)$$

# PROBLEME 2

Soit  $k$  un nombre complexe tel que  $|k| > 1$ . On veut donner l'expression de toutes les fonctions  $f$  vérifiant la propriété  $P_k$  constituée des deux conditions :

- a)  $f$  est méromorphe dans  $\mathbb{C}^*$ , non identiquement nulle
- b) il existe un scalaire  $\lambda(f)$  (qui dépend de  $f$ ) tel que  $f(kz) = \lambda(f) f(z)$  pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C}^* - P_k$  si  $P_k$  est l'ensemble des pôles de  $f$ .

1] Montrer que l'ensemble des fonctions possédant la propriété  $P_k$  forme un groupe multiplicatif que l'on notera  $G_k$

2] Soit  $f$  dans  $G_k$  et holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$ . Montrer qu'il existe un entier relatif  $n$  tel que  $\lambda(f) = k^n$  et  $f(z) = \alpha z^{-n}$   $\alpha \in \mathbb{C}$  (Utiliser le développement de Laurent de  $f$  dans  $\mathbb{C}^*$ )

3] Soit  $S_r$  la couronne  $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq |k|r\}$   $r > 0$ . Montrer que si  $f$  est dans  $G_k$ , les zéros et les pôles de  $f$  dans  $S_r$  sont en nombre fini. En déduire qu'il existe  $r'$  tel que  $r \leq r' \leq |k|r$  et tel que  $f$  n'ait ni pôles ni zéros sur le bord  $\partial S_{r'}$  de  $S_{r'}$ . Montrer qu'alors dans une telle couronne  $f$  a le même nombre de zéros que de pôles.

(compte avec leur ordre de multiplicité)

4] Soient  $p_n(z) = \prod_{q=0}^{q=n} (1 - \frac{z}{k^q})$  et  $q_n(z) = \prod_{q=1}^{q=n} (1 - \frac{1}{zk^q})$

Montrer que  $p_n(z)$  et  $q_n(z)$  ont une limite  $p(z)$  et  $q(z)$  respectivement et que la convergence de ces suites est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{C}^*$ .

En déduire que  $\varphi(z) = p(z)q(z)$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}^*$  et que l'ensemble de ses zéros est la suite  $\{k^n, n \in \mathbb{Z}\}$

5) Soit  $f$  dans  $G_k$ , soit  $S_{r'}$  une couronne du type précisée au 3], soient  $a_1, \dots, a_p$  et  $b_1, \dots, b_p$  les zéros et pôles de  $f$  dans  $S_{r'}$  (les zéros ou pôles multiples sont pris autant de fois qu'ils sont zéros ou pôles). Montrer que

$$\psi(z) = \frac{\varphi(\frac{z}{a_1}) \dots \varphi(\frac{z}{a_p})}{\varphi(\frac{z}{b_1}) \dots \varphi(\frac{z}{b_p})} \text{ est dans } G_k. \text{ Calculer } \lambda(\psi)$$

En déduire  $f(z) = \alpha z^m \psi(z)$  pour un certain  $\alpha$  de  $\mathbb{C}^*$ .



C3 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°2 bis

On s'aidera des documents ci-joints pour résoudre les questions suivantes.

On rappelle qu'on appelle isomorphisme analytique une fonction bijective analytique ainsi que son inverse (automorphisme si l'ensemble de départ et d'arrivée sont les mêmes).

On note  $D$  le disque unité ouvert de centre  $O$  et de rayon 1.

On note  $P$  le demi plan suivant :  $P = \{ z ; \operatorname{Im} z > 0 \}$ .

1) Donner une démonstration du théorème suivant (d'inversion globale) :

Si  $f$  est une fonction analytique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , et si  $f$  est injective, alors  $f$  est un isomorphisme analytique de  $U$  sur  $V$  (où  $V = f(U)$ ) et, pour tout  $z$  de  $U$ ,  $f'(z) \neq 0$ .

En déduire qu'il n'y a pas d'isomorphisme analytique de  $\mathbb{C}$  sur le disque unité ouvert  $D$  (centre  $O$ , rayon 1).

2) Quels sont tous les automorphismes (analytiques) de  $D$  sur  $D$  ?

Quels sont tous les automorphismes (analytiques) de  $P$  sur  $P$  ?

[Facultatif : Quels sont tous les automorphismes de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$  ?]

3) Expliquer ce qu'on voit à l'écran dans les démonstrations du logiciel  $(z \rightarrow f(z))$ .

Documents joints :

Lang Complex analysis (Springer Verlag) pp. 198 à 223 et pp. 72 à 79

Dieudonné Calcul infinitésimal (Hermann) pp. 250 à 255 et pp. 335 à 341

Cartan Théorie des fonctions analytiques (Hermann) pp. 181 à 187

Henrici Applied and computational Complex analysis Vol I (Wiley & Sons) pp. 294 à 299.

Krasnov et al. Fonctions d'une variable complexe et leurs applications (Mir) pp. 122 à 133



3 PEGC 90-91 Partiel n°2 (Sujet n°4)  
La fonction  $\Gamma$ .

Selon les ouvrages, on trouve 3 définitions différentes de la fonction  $\Gamma$ :

(1) On définit  $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$

et on prolonge  $\Gamma$  à  $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots, -n, \dots\}$

(2) On pose, pour  $z \neq 0, -1, \dots, -n$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z e^{\gamma z} \left[ \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]}$$

où  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$

(3)  $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$  ( $z \neq 0, -1, \dots, -n$ )

En choissant une de ces 3 définitions comme point de départ, on demande de démontrer l'équivalence des 3 définitions et les propriétés suivantes de la fonction  $\Gamma$ :

(4)  $\Gamma$  est méromorphe, avec  $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$  pôles simples

(5)  $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$  si  $z \neq 0, -1, -2, \dots$

(6)  $\Gamma(n+1) = n!$  pour  $n \in \mathbb{N}$

(7)  $\Gamma(z) \neq 0$

(8)  $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

(9)  $\operatorname{Res} \Gamma(-m) = \frac{(-1)^m}{m!}$

(10)  $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right)$

Vous préciserez votre point de départ.

L'ordre des démonstrations (y compris pour l'équivalence

des définitions) est laissé à votre choix (également). Vous pouvez ajouter une propriété à la liste ci-dessus!  
 Vous vous aiderez des documents ci-joints :

\* Cartan Théorie des fonctions analytiques (Hermann) pp 160-164 + 173

\* Dieudonné Calcul infinitésimal (Hermann) pp 292 à 297

\* Lang Complex analysis (Springer Verlag) pp 307 à 323

\* Bak & Newman Complex analysis (Springer Verlag) pp 209 à 221

\* Madsen & Hofmann Basis complex analysis (Freeman) pp 434-473

\* Valiron Théorie des fonctions (Masson) pp 169-170, 491-492

(Si vous utilisez d'autres documents les indiquez)





C3 PEGC, 90-91, Partiel n°2

Sujet n°6 (théorème de Phragmen-Lindelöf, théorème "des trois cercles" de Hadamard)

A l'aide des documents ci-joints, résoudre les quatre exercices proposés et l'exercice 5 p. 241 du livre de Rudin (théorème de Hadamard "des trois cercles"). Pourquoi ce théorème s'appelle comme cela ?

Documents joints :

Lang Complex analysis (Springer Verlag) pp. 268 à 275

Rudin Analyse réelle et complexe (Masson) pp. 232 à 242

Bak and Newman Complex analysis (Springer Verlag) pp. 178 à 183



Le principe du maximum sous sa seconde forme :

$$|f(z)| \leq \sup_{z \in \text{Fr } D} |f(z)| \quad \text{Domaine connexe}$$

n'est pas vrai si  $D$  n'est pas borné.

Exemple : Si  $D$  est la bande  $D = \{x+iy, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$

on considère  $f(z) = \exp \exp z$

pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x \pm \frac{1}{2}i) = \exp(\pm i e^x)$

d'où  $|f(z)| = 1$  pour  $z \in \partial D$

or  $f(z) \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$  sur  $\mathbb{R}$  (et m.  $f$  croît très rapidement)

La méthode de Phragmén-Lindelöf permet de montrer du théorème du style suivant :

Si  $f$  est anal sur  $D$  et si  $|f| < g$  où  $g(z) \rightarrow \infty$  "lentement" quand  $z \rightarrow \infty$  dans  $D$  alors  $f$  est bornée dans  $D$

1<sup>er</sup> exercice : on suppose  $f$  bornée la méthode améliore la borne.

Le domaine  $D$  non borné est le demi-plan  $\text{Re } z > 0$ .  
on impose à  $f$  d'être bornée sur  $\mathbb{I}$  la méthode permet d'améliorer la borne.

Soit  $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$  et soit  $f$  une fonction analytique dans  $\mathbb{I}$  ; bornée et continue dans  $\overline{\mathbb{I}}$ , on pose

$$M = \sup_{z \in \text{Fr } \mathbb{I}} |f(z)|$$

on se propose de montrer que  $|f(z)| \leq M \quad (\forall z \in \mathbb{I})$

① On suppose en outre  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ , montrer que l'on a alors  $|f(z)| \leq M$  ( $\forall z \in \mathbb{C}$ ).

② En appliquant le résultat précédent aux fonctions  $g_n$  définies par  $g_n(z) = \frac{[f(z)]^n}{z+1}$ , montrer que  $|f(z)| \leq M$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

### 2<sup>ème</sup> exercice

⌘ (le domaine non borné est une bande verticale, on suppose comme condition supplémentaire  $f$  bornée la méthode permet d'améliorer la constante)

Soit  $\Pi = \{x+iy, a < x < b\}$  et  $f$  une fonction analytique continue sur  $\Pi$  et vérifiant  $|f(z)| < B$  pour  $z \in \Pi$

① On suppose que  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in \partial \Pi$ ; montrer que l'on a  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in \Pi$

② On pose  $M(x) = \sup \{|f(x+iy)| : -\infty < y < +\infty\}$   $a \leq x \leq b$  montrer en utilisant ① que l'on a

$$M(x)^{b-a} \leq M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \quad a < x < b.$$

Cela montre que l'on peut remplacer  $|f(z)| < B$  par  $|f(z)| \leq \max[M(a), M(b)]$  pour la fonction

### 3<sup>ème</sup> exercice

⌘ (le domaine non borné est une bande horizontale on impose à  $f$  une condition de croissance)

Soit  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x+iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |y| < \frac{\pi}{2}\}$  et soit  $f$  anal sur  $B$  continue sur  $\bar{B}$ ; on suppose qu'il existe des constantes  $\alpha < 1$  et  $A$  telles que

$|f(z)| < \exp(A \exp \alpha |z|) \quad z \in B$   
 et que  $f$  vérifie en outre  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in \text{Fr } B$ .  
 Montrer que l'on a  $|f(z)| \leq 1$  pour  $z \in B$ .  
 (on utilisera la fonction  $h_\varepsilon(z) = \exp[-\varepsilon(\exp \beta z + \exp -\beta z)]$   
 avec  $\varepsilon > 0$  et  $\beta$  vérifiant  $\alpha < \beta < 1$ .)

Quatrième exercice

IV le domaine ~~est~~ non borné est le demi plan  $\text{Re } z > 0$ .  
 on impose à  $f$  une condition de croissance.

Soit  $f$  une fonction analytique sur le demi plan  
 $P = \{z = x + iy \mid x > 0\}$  continue sur  $\bar{P}$  et soit  
 $M(r) = \sup_{|\theta| \leq \frac{\pi}{2}} |f(re^{i\theta})|$

On suppose  $\sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \leq 1$  et  $M(r) \leq \exp(k r^\alpha)$   
 $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $0 < \alpha < 1$ ; on veut montrer  $|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \bar{P}$ .

① On choisit  $\alpha < \beta < 1$  et  $\varepsilon > 0$ ; on désigne par  $z^\beta = D P z^\beta$   
 explicite  $|\exp(-\varepsilon z^\beta)|$  en posant  $z = re^{i\theta}$  puis  
 $\sup_{|\theta| \leq \frac{\pi}{2}} |\exp(-\varepsilon z^\beta)|$   
 $|z| = r$   
 $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ .

② Soit  $g(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^\beta)$ ; montrer que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$   
 $z \in \bar{P}$ . En appliquant le principe du maximum montrer que  $|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \bar{P}$  en  
 déduire  $|f(z)| \leq 1 \quad (\forall z \in \bar{P})$ .

③ Montrer sur un exemple simple que le résultat  
 n'est pas vrai si  $\alpha = 1$ .

## Méthode de Phragmen. Lindelhof.

Le principe du maximum sous sa seconde forme  
 $|f(z)| \leq \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$  D ouvert connexe  
 $z \in \mathbb{C}$

n'est pas vrai si D n'est pas borné.

Exemple. Si D est la bande  $D = \{x+iy, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$

on considère  $f(z) = \exp \exp z$

pour  $x \in \mathbb{R}$ .  $f(x \pm \frac{\pi}{2}i) = \exp(\pm i e^x)$

d'où  $|f(z)| = 1$  pour  $z \in \partial D$

or  $f(z) \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$  sur  $\mathbb{R}$  (et  $\hat{m}$   $f$  croît  
très rapidement)

La méthode de Phragmen. Lindelhof permet de  
montrer du théorème du style suivant.

Si  $f$  est anal sur D et si  $|f| < g$  où  $g(z) \rightarrow \infty$  "lentement"  
quand  $z \rightarrow \infty$  dans D alors  $f$  est bornée dans D

l'exercice. on suppose  $f$  bornée la méthode améliore  
la borne.

TITRE : TRAVAUX D'ETUDIANTS EN TEMPS NON LIMITE  
(niveau licence, présentés par A. Robert)

DATE : JUIN 1991

RESUME :

Cette brochure présente des travaux d'étudiants réalisés en temps long sur des sujets assez divers. On a voulu montrer la qualité des productions de ce type.

MOTS-CLES :

EVALUATION sur un temps long

Editeur : IREM

Directeur/Responsable de la publication : R. DOUADY

dépôt légal : 2-86612-063-9

IREM PARIS VII - Tour 56/55 - 3ème étage - 2 place Jussieu 75005 Paris