C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Tome I

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage de Cahors, mars 1991
(Stage de formation de la Direction des Ecoles FCA 905 CE)

Mise en page : H. Péault, atelier P.A.O. , centre d'ANGERS de l'IUFM des Pays de la Loire
Imprimé par l'IREM de PARIS VII - octobre 1991

C O P I R E L E M

(Commission permanente des I.R.E.M. pour l'enseignement élémentaire)

DOCUMENTS POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE

EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Ouvrage collectif, à l'initiative de la **COPIRELEM**
issu du stage de Cahors, mars 1991
(Stage de formation de la Direction des Ecoles FCA 905 CE)

Mise en page : H. Péault, atelier P.A.O. , centre d'ANGERS de l'IUFM des Pays de la Loire
Imprimé par l'IREM de PARIS VII - octobre 1991

SOMMAIRE

INTRODUCTION

En continuité avec les colloques annuels...

Depuis 1974, un colloque national rassemble chaque année une centaine de professeurs de mathématiques des écoles normales. Ce colloque constitue un lieu d'échange et de réflexions sur les pratiques professionnelles et donne lieu à la publication d'Actes où l'on retrouve les comptes-rendus des groupes de travail et les contenus des diverses communications.

A côté des préoccupations disciplinaires, pédagogiques ou corporatistes,... les différents colloques ont été amenés à prendre de plus en plus en compte les développements récents de la didactique des mathématiques et à s'interroger sur ses apports dans la formation des maîtres.

et l'Université d'été d'Olivet (1988),...

C'est ainsi que, pour approfondir la réflexion, une Université d'été a été organisée en Juillet 1988 à OLIVET, sur le thème *"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire"*. Les Actes en ont été publiés.

Dans le prolongement de cette Université d'été, la COPIRELEM (Commission permanente des IREM pour l'enseignement élémentaire), organisatrice des colloques annuels, a souhaité mettre en chantier un instrument de travail à l'usage des formateurs de maîtres en mathématiques. En effet, à l'heure actuelle, autant la production de documents pour enseigner les mathématiques à l'école est riche et abondante, autant les outils pratiques pour les formateurs de maîtres sont épars et peu nombreux.

le stage de Cahors (1991)...

La COPIRELEM a donc conçu et organisé un stage sur le thème "*Elaboration de documents pour la formation des maîtres en didactique des mathématiques*". Ce stage, retenu par la direction des écoles dans son programme de formation 90/91 s'est déroulé à l'école normale de CAHORS du 11 au 15 mars 1991. A côté de communications et de débats sur les développements récents de la didactique des mathématiques, des ateliers ont permis de travailler sur l'élaboration d'outils pour les formateurs. Le présent recueil en est l'aboutissement.

a permis l'élaboration de ce recueil,

Vous trouverez donc rassemblés ici des propositions et des comptes-rendus d'activités pour la formation des maîtres. Ces textes ont été retenus par le groupe des participants au stage parce qu'ils ont paru intéressants, soit pour travailler des notions mathématiques précises, soit pour illustrer des concepts de didactique.

Il ne s'agit pas, bien sûr, d'un catalogue exhaustif de toutes les situations possibles de formation. Nous espérons cependant que ces documents constitueront une aide pour tous les formateurs concernés, y compris les débutants, et que chacun y trouvera de quoi alimenter sa pratique.

Ces textes ont été soumis à l'examen d'un comité de relecture lors du colloque de NICE, du 21 au 23 mai 1991.

La présentation retenue reprend partiellement les thèmes de travail du stage de Cahors (entrées par thèmes mathématiques ou didactiques). Un cartouche préliminaire à chaque texte devrait permettre au lecteur de se faire une idée rapide du contenu et de le situer à partir des mots-clés retenus.

en attendant le prochain...

Toujours dans le cadre du plan de formation de la direction des écoles, un nouveau stage est prévu (PAU, mars 1992) qui conduira probablement à la publication d'une autre brochure présentant de nouveaux textes d'activités en formation des maîtres. Nous invitons donc les collègues formateurs en mathématiques à nous faire part de leur expérience ou de leurs propositions ainsi que de leurs réactions au contenu du présent recueil.

La COPIRELEM

Vous pouvez nous communiquer votre courrier à l'adresse suivante :

COPIRELEM
IREM Paris 7
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

Liste des participants et animateurs du stage de CAHORS :

Jean-Claude AUBERTIN	(EN Besançon)
Dominique BEAUFORT	(EN Chartres)
Renée BOSC	(EN Paris)
Joël BRIAND	(EN Bordeaux)
Guy BROUSSEAU	(Université de Bordeaux 1)
Denis BUTLEN	(EN Melun)
Robert CATHALIFAUD	(EN Limoges)
Carmen CHAMORRO	(EN Madrid)
Marie-Claude CHEVALIER	(EN Cahors)
Louis CORRIEU	(I.G.)
Alain DESCAVES	(EN Beauvais)
Liliane DUBOIS	(EN Amiens)
Jean-Claude DUCORAIL	(IEN Bordeaux)
Régine DOUADY	(Université Paris 7)
André ESTARDIE	(IMF St Céré)
Marianne FREMIN	(EN Antony)
Mireille GUILLERAULT	(IUFM Grenoble)
Rirette GUILLERMARD	(EN Nice)
Catherine HOUDEMENT	(EN Rouen)
François HUGUET	(EN Quimper)
Nicole LABRUNIE	(EN Antony)
Mireille LAMANT	(EN Bordeaux)
Fernande LE COUTALLER	(EN Nantes)
Yves LE PEZRON	(EN St Brieuc)
Ginette MARCHAL	(EN Metz)
Danielle ORTOLLAND	(IUFM Lille)
Jean-Louis OYALLON	(EN Pau)
Hervé PÉAULT	(EN Angers)
Marie-Lise PELTIER	(EN Rouen)
Marie-Jeanne PERRIN	(Université Paris 7)
Claude RIMBAULT	(EN St Brieuc)
Christian SOUCHÉ	(EN Pau)
Jean-Guy SOUMY	(EN Guéret)
Danielle VERGNES	(EN Versailles)
Gérard VINRICH	(EN Agen)

Les publications de la COPIRELEM

*** Des aides pégagogiques**

Il s'agit de brochures destinées aux maîtres de l'école élémentaire, éditées et diffusées par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris)

- *"Aides pédagogiques pour le cours préparatoire"* (1978) - épuisé -

- *"Aides pédagogiques pour le cours élémentaire"* (1979)

- *"Aides pédagogiques pour le cycle moyen - 1. Géométrie"* (1983)

- *"Aides pédagogiques pour le cycle moyen - 2. Nombres décimaux"* (1986)

- *"Aides pédagogiques pour le cycle moyen - 3. Situations problèmes"* (1987)

*** Les Actes des colloques nationaux.**

Ces brochures, au moins les plus récentes, sont disponibles auprès des IREM correspondant aux lieux d'organisation des colloques :

NICE (1991), PARIS (1990), BORDEAUX (1989), ROUEN (1988), ANGERS (1987), QUIMPER (1986), GUÉRET (1985), GUEBWILLER (1984), ANTIBES (1983), BLOIS (1982), LE TOUQUET (1981), CLERMONT (1980), BOMBANNES (1979), AUBERIVE (1978), PLESTIN LES GRÈVES (1977), NICE (1976), ALPE- D'HUEZ (1975), ORLÉANS (1974),

Un ouvrage collectif issu des colloques de Guéret et Quimper a en outre été publié :

"La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée..." (IREM de Rouen)

*** La COPIRELEM a par ailleurs participé à l'élaboration de l'Université d'été d'Olivet dont les Actes sont publiés par l'IREM de Bordeaux :**

"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire - Actes de l'Université d'été (Olivet, 2-8 juillet 1988)", IREM de Bordeaux (40, rue Lamartine, 33400 TALENCE)

Partie 1

Aires
de surfaces planes

Ont participé à l'élaboration de ces documents :

Briand Joël,
Chamorro Carmen,
Chevalier Marie-Claude,
Fremin Marianne,
Guillermard Rirette,
Labrunie Nicole,
Ortolland Danielle,
Perrin Marie-Jeanne,
Soumy Jean-Guy.

Le thème que nous avons abordé est celui de la grandeur "aire", des comparaisons d'aires et de leur mesure.

Le **texte d'introduction** présente le cadre général du travail et permet de situer les différents documents qui suivent. Nous proposons ensuite des comptes-rendus d'activités réalisées en formation des maîtres et des pistes de travail dont voici les titres :

- **document 1** : *"Grandeur et mesure"*,

- **document 2** : *"La mesure des aires de surfaces planes au CM et au début du collège - Les apports de l'histoire des mathématiques"*.

- **document 3** : *"Aires de surfaces planes en formation initiale"*,

Titre : Aires de surfaces planes - Introduction et bibliographie
Auteur : collectif (stage de Cahors)
Date : 1991
Type : Exposé
Mots-clés : aire - surface - mesure

Aires de surfaces planes
Introduction - Bibliographie

1. Rupture dans les stratégies : comparaison des longueurs - comparaison des aires.

La mesure des aires s'appuie, à un moment ou à un autre, sur des savoirs relatifs à la mesure des longueurs mais entre aussi en conflit avec ces savoirs.

La comparaison directe des segments par inclusion permet d'en ordonner totalement une famille finie. Ce n'est pas le cas pour les surfaces planes.

Les transformations, les déformations appliquées à un objet ont des effets qui provoquent parfois des conflits cognitifs entre les longueurs et les aires (exemple périmètre et aire).

Or la mesure des longueurs est une pratique très familière chez les enseignants en formation. Cela provoque des obstacles de deux ordres :

- Il y a identification entre l'objet physique, l'objet géométrique (segment) et la grandeur (longueur). De même, il y a identification entre la grandeur et le nombre.

- Il y a une forte probabilité de voir l'enseignant faire l'économie de la construction de situations correctes et en faire simplement un exposé sans procéder à une recontextualisation puis à une décontextualisation.

2. Le problème de la mesure.

Le problème qui nous intéresse, dans le cas de la mesure des aires, est la comparaison de la place occupée par des surfaces dans le plan et, pour faciliter cette comparaison, celui d'associer à une surface un nombre qui rende compte de la place qu'elle occupe de manière à remplacer la comparaison des surfaces par celle des nombres.

a) D'un point de vue mathématique, il s'agit de définir une fonction mesure μ de l'ensemble des surfaces planes dans $\mathbf{R}^+$ qui vérifie "de bonnes propriétés" d'additivité et d'invariance par déplacement.

En fait, μ ne sera pas définie partout mais sur un certain ensemble de surfaces, l'ensemble des surfaces mesurables pour μ, et cet ensemble de surfaces mesurables va dépendre des exigences qu'on met sur la fonction mesure. On peut trouver une approche du problème théorique de la mesure des aires dans Revuz (1959).

Si on demande que μ vérifie les propriétés suivantes :

- si S_1 et S_2 sont disjointes, alors
  $\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$
- $\mu(S) \geq 0$ pour tout S
- μ est invariante par isométrie :
  pour toute isométrie g, et toute surface S,
  $\mu(g(S)) = \mu(S)$,

il est clair que μ ne peut être définie qu'à un coefficient de proportionnalité près : si μ convient, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^+$, $\lambda\mu$ convient aussi. On peut montrer que, pour tout polygone convexe A, il existe une et une seule application μ définie sur l'ensemble des polygones et vérifiant les propriétés ci-dessus et telle que $\mu(A) = 1$. D'ailleurs μ est définie de manière unique sur un ensemble plus grand de surfaces qui ne dépend pas du choix de A, c'est l'ensemble des surfaces quarrables. On prend le plus souvent pour A un carré.

On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\mu_A"] \arrow[dr, "\chi"'] & & \mathbf{R}^+ \\ & \mathcal{A} \arrow[ur, "m_A"'] & \end{tikzcd}$$

pour B dans $\mathcal{S}$

$\chi(B) = \beta$

$m_A(\beta) = \mu_A(B)$

b) Le problème de la mesure d'une grandeur (longueur, volume, angle, masse....) consiste plus généralement à associer un nombre aux objets selon le diagramme

$$\begin{tikzcd} \text{Objets} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{Nombres} \\ & \text{Grandeurs} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Les grandeurs pour lesquelles la fonction mesure a les propriétés énoncées en a) sont des grandeurs mesurables.

D'autres grandeurs, par exemple la température, sont seulement repérables : on ne peut pas définir une addition mais seulement un ordre (les écarts de température peuvent cependant s'ajouter).

Pour provoquer un questionnement en formation des maîtres sur les notions de grandeur et de mesure, il peut être utile de travailler sur des objets non familiers. C'est pour répondre à un tel objectif que nous proposons l'activité "angles cornus" dans le document 1.

c) Objets géométriques, objets matériels.

Le pôle pris en compte dans le schéma précédent concernant les aires est celui des objets géométriques. Dans les situations de classe, on a en réalité souvent affaire à des représentations matérialisées de ces objets (dessins, objets découpés) et le maître a aussi à gérer le lien entre l'objet géométrique idéal et sa matérialisation.

d) Les nombres en jeu pour répondre au problème de la mesure des aires sont les nombres réels. A l'école élémentaire, on disposera au mieux des décimaux et de quelques rationnels. Les problèmes d'encadrement et d'approximation vont donc se poser. D'ailleurs les aires fournissent une source de problèmes pour travailler les nombres, en particulier les nombres non entiers.

3. L'importance du travail sur l'aire sans mesure.

La mesure permet de traiter commodément, dans le cadre numérique, un certain nombre de problèmes. Cependant, nous voyons plusieurs raisons pour ne pas identifier trop vite grandeurs et nombres.

a) Des raisons didactiques.

Un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue des surfaces, soit du point de vue des nombres.

Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre : l'aire et le périmètre sont alors amalgamés à la surface et liés à sa forme, on agrandit ou diminue la surface en conservant sa forme ; le périmètre c'est le contour, l'aire c'est l'intérieur.

A l'autre extrême, l'aire est un nombre : on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'on combine dans des formules plus ou moins fondées telles que "*ajouter les mesures de deux côtés d'un triangle et multiplier par la troisième*", pour calculer l'aire du triangle en faisant le produit de deux longueurs.

Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves semblent développer une "*conception forme*" liée au cadre géométrique ou une "*conception nombre*" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et traiter les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique.

Le concept d'aire en tant que grandeur peut constituer un relais entre les surfaces et les nombres parce qu'il permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique).

De plus, on aura besoin d'établir des relations entre les mesures de longueur et les mesures d'aire. Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres risque de favoriser l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires) voir [4] ou [5].

b) Des raisons épistémologiques.

La recherche de surfaces équivalentes à une surface donnée, par exemple problèmes historiques de quadrature, permet dans certains cas d'aboutir à la certitude de l'égalité des aires alors que l'utilisation des nombres ne donne que des résultats approximatifs.

De plus, la comparaison des aires de ce point de vue fournit une source de problèmes pour la géométrie dès l'école élémentaire. Des pistes de réflexion pour des activités de formation sont jointes dans le document 2.

4. Des points clés dans la construction de la mesure des aires.

- l'aire en tant que grandeur avant toute idée de mesure.

On trouve là toutes les activités de comparaison d'aires planes par superposition, inclusion, soit directement, soit par découpage et réorganisation (manipulation d'objets physiques ou géométriques).

- mesure unidimensionnelle.

On évalue les aires par rapport à une aire étalon : pavage par report d'un pavé unité, utilisation de trames régulières diverses.

- mesure bidimensionnelle

On passe au travail sur les mesures d'aires par calcul à partir des mesures de longueurs : aire du rectangle, établissement des formules usuelles.

Cet aspect bidimensionnel est particulièrement visible dans les agrandissements : si les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k^2.

Il apparaît aussi dans l'utilisation du système métrique et les conversions. Pour mesurer les aires, on a en effet deux systèmes légaux d'unités :

+ les ares, hectares... se réfèrent à la mesure unidimensionnelle : 1 ha = 100 a

+ les m^2, cm^2 ... se réfèrent à la mesure bidimensionnelle : 1 m^2 = 10 000 cm^2.

- aire et périmètre.

Ces deux notions sont parfois confondues par les élèves, souvent abusivement liées dans leurs variations. Il faudra donc prévoir des activités mettant en échec les représentations spontanées erronées, par exemple fabriquer une surface d'aire plus petite et de périmètre plus grand qu'une surface donnée, étude de l'aire du parallélogramme articulé . . .

Le document 3 présente des activités réalisées en Formation Initiale autour de certains de ces points clés.

5. Estimations. Rapport au réel. Le plausible et le ridicule.

Les trois points qui suivent ne sont pas spécifiques des mesures d'aires, sauf peut-être le deuxième dans sa partie calcul.

a) Précision raisonnable pour une mesure.

Pour effectuer une mesure, on a à choisir un outil et une unité adaptés à la situation. Par ailleurs, dans les calculs, on ne doit garder qu'un nombre raisonnable de décimales.

b) Approximations simplificatrices. Ordre de grandeur d'un résultat.

Pour tester un résultat avant ou après l'avoir calculé, on peut le comparer à un résultat obtenu plus simplement en remplaçant les données par des nombres plus simples. Cela peut alors se faire mentalement.

Par exemple, si on veut calculer l'aire d'un rectange de 8,40 *m* sur 10,80 *m*, on peut calculer l'aire d'un rectangle de 8 *m* sur 11 *m* ou d'un rectangle de 8 *m* sur 10 *m* et se servir de ces résultats approchés comme moyen de contrôle.

c) Estimations empiriques.

En se servant de quelques références culturelles, on peut estimer grossièrement des grandeurs, sans les mesurer, par exemple la hauteur d'un immeuble en comptant le nombre d'étages et en considérant qu'un étage mesure environ 3 *m*.

Il serait souhaitable d'aider les élèves à se constituer un stock de ce genre de références pour juger de la plausibilité de leurs résultats.

Bibliographie

A.P.M.E.P. (1982) "*Grandeur mesure,*" (Mots VI), brochure n° 46

[1] Castelnuovo E. Barra M. "*La mathématique dans la réalité*", Cédic, Paris 1980

Chevallard (1985) "*La transposition didactique*", La Pensée sauvage, Grenoble

Douady (1987) "*Jeux de cadres et dialectique outil-objet*", Recherches en didactique des mathématiques n° 7.2, La Pensée sauvage, Grenoble

[3] Douady et Perrin-Glorian (1983) "*Mesure des longueurs et des aires*", Brochure n° 48, IREM Université Paris 7.

[2] Douady et Perrin-Glorian (1984-1985) "*Aires de surfaces planes*" (1ère partie et 2ème partie), Petit x n° 6 et n° 8, IREM de Grenoble

[5] Douady et Perrin-Glorian (1987) "*Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane*", Cahier de didactique n° 37, IREM Université Paris 7

[4] Douady et Perrin-Glorian (1989) "*Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane*", Educational Studies in Mahematics, Vol. 20 n°4.

[6] Euclide : "*Les éléments*" ("*The thirteen books of Euclid's Elements*", traduction Heath), Dover Publications, INC, New York 1956.

J. Hadamard (1928) "*Leçons de géométrie élémentaire*", I Géométrie plane, note D, A. Colin, Paris

H. Lebesgue (1931) "*La mesure des grandeurs*", L'enseignement mathématique, Rééd. Blanchard (1975)

[7] Montucla J-E : "*Histoire des recherches sur la Quadrature du cercle*", Paris 1754, réédition IREM Paris VII, 1986

[8] Perrin-Glorian M.J. : "*L'aire et la mesure*", pp 124 - 140, in Actes de l'université d'été de Didactique des mathématiques et formation des maîtres, Olivet, 1988.

[9] Platon : "*Ménon*". (Traduction E. Chambry), in PLATON - "*Oeuvres complètes*", Tome deuxième, Garnier, Paris 1960

[10] Proclus de Lycie : "*Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*", Trad. Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer et Cie, Bruges 1948, réédité IREM de Lille

A. Revuz (1959) "*Théorie de l'intégration*", Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 196, 198, 199

A. Revuz (1970) "*Intégration et mesure*", Encyclopedia Universalis

A. Revuz (1974) "*Les points essentiels d'une théorie élémentaire de la mesure*", Recherches Pédagogiques n° 64, I.N.R.P., Paris

J. Rogalski (1983) "*L'acquisition des notions relatives à la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface)*", Recherches en didactique des mathématiques n° 3.3, La Pensée sauvage, Grenoble

S. Camarda et F. Spagnolo (1989) "*Angoli di contengenza e analisi non standard*" La Matematica e la sua didattica, anno III, n° 3

titre : Grandeur et mesure

auteur : Marie-Claude CHEVALIER (P.E.N. Cahors)

date : Mars 91

type : compte rendu d'activité réalisée en formation initiale

résumé : séquence ayant pour objectif de dissocier grandeur et mesure

mots-clés : angles rectilignes, angles cornus, grandeur, mesure

GRANDEUR ET MESURE

1- Objectifs

L'aire n'est pas conçue comme une grandeur autonome par les élèves (*R Douady - M J Perrin*) ou par les maîtres. L'aire est très souvent assimilée à un nombre, il y a confusion entre aire et mesure d'une aire. Les manuels scolaires en vigueur renforcent cette idée.

L'objectif était de proposer aux normaliens (2ème année) une situation où apparaîtrait le concept de grandeur et où se poserait le problème d'associer à une grandeur une mesure.

2- Références

"*Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et ne sont pas placées en direction l'une de l'autre*" (Proclus de Lycie, commentaire sur les définitions)[10]

L'angle cornu ou corniculaire - en forme de corne - est l'angle mixtiligne, dit de contingence, formé entre un arc et sa tangente.

La nature de cet angle a été discutée par les géomètres des siècles derniers. Pour Clavius (voir son célèbre commentaire sur Euclide, Rome, 1589, vol. I, p.36) l'angle de contingence est réel, mais d'une nature hétérogène à celle de l'angle rectiligne ; tandis que pour Pelletier, Wallis et Ozanam, l'angle de contingence n'est pas véritable et n'existe même pas.

Cette différence d'opinion résulte d'un malentendu : le concept d'angle résultant de la considération de deux droites qui se coupent ou s'inclinent l'une sur l'autre ne s'applique pas sans modification à l'angle de contingence. Les lignes droites ayant toutes leurs parties dans une même direction, l'angle rectiligne n'est que la différence de direction de deux droites ; tandis que, dans l'angle mixtiligne de contingence, la direction varie en chaque point de son côté curviligne.

L'angle de contingence et l'angle rectiligne sont des grandeurs de nature différente et non comparables entre elles. Ils sont respectivement comparables entre eux ; car, bien qu'on ne puisse faire passer une droite entre l'arc et sa tangente, on peut faire passer une infinité de cercles formant chacun un angle de contingence différent. Newton a démontré (Principes, liv. I) que le rapport de deux angles de contingence est l'inverse de celui des racines des diamètres.

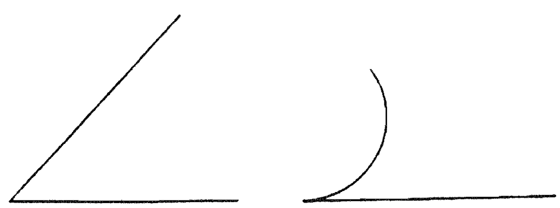
3- Compte-rendu de l'activité proposée

On donne sous forme de "rappel" et sans autre commentaire :

- "*un angle rectiligne est déterminé par deux demi-droites*"

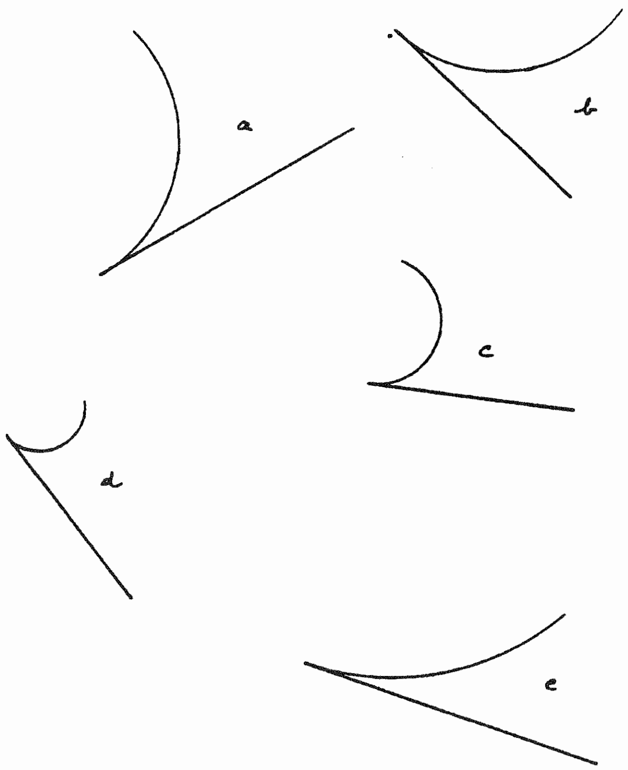
- "*un angle cornu est déterminé par une demi-droite et un arc de cercle*"

Un dessin est proposé au tableau pour illustrer cela.



Les normaliens sont par groupes et travaillent sur le document ci-après. On leur propose de comparer les angles cornus et de les mesurer.

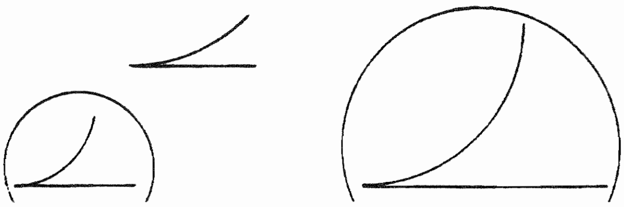
Comparer et mesurer les angles cornus ci-dessous



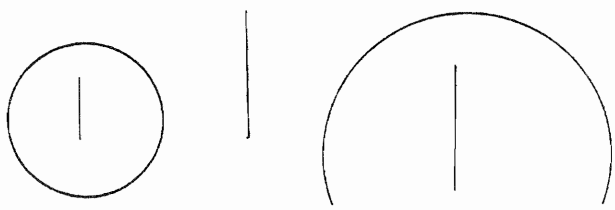
3.1 - Comparaison des angles cornus

Les groupes procèdent par superposition et obtiennent rapidement le résultat demandé.

Cependant un groupe affirme : *"tous les angles sont égaux, il suffit de faire un agrandissement pour le vérifier."*



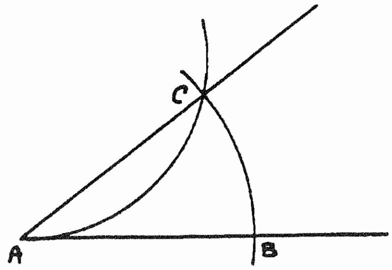
Le parallèle avec la comparaison de longueurs de segments permet de rejeter cette proposition.



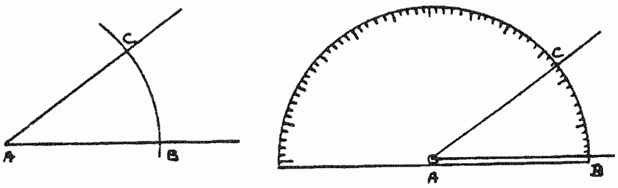
3.2 - Recherche d'une mesure

- 1ère solution

Construire un arc de cercle de centre A et de rayon arbitraire *r* et mesurer l'angle rectiligne BAC.



Cette démarche est rapprochée de la méthode utilisée pour mesurer avec un rapporteur un angle rectiligne.



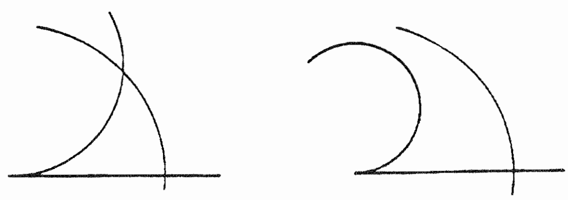
Le cas où les deux arcs de cercle ne se coupent pas est envisagé.

Il est proposé de prolonger l'arc de cercle, comme l'on procède pour un angle rectiligne.

La méthode est discutée : est-ce toujours possible ?

- oui, si l'on se contente d'une solution locale. On prend alors *r* assez petit.

- non, si l'on recherche une solution n'imposant pas un choix particulier du rayon.



- 2ème solution

Construire la tangente T au cercle au point A et mesurer l'angle rectiligne obtenu.

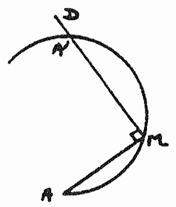
La méthode paraît satisfaisante.

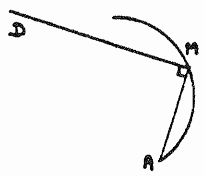
Le nouveau problème à résoudre est : comment tracer une tangente lorsqu'on ne connaît qu'un arc de cercle? Le centre du cercle doit être déterminé.

a) recherche d'un diamètre

Choisir M arbitraire sur l'arc de cercle, construire la perpendiculaire D à (AM) en A. Le point A' cherché se trouve à l'intersection de D et de l'arc de cercle.

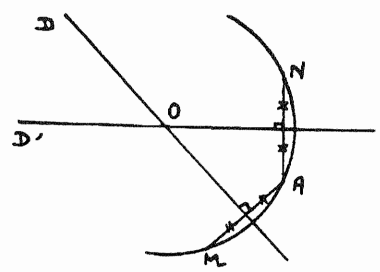
Que faire lorsque l'arc tracé ne coupe pas D?





b) recherche du centre O

Prendre 2 points distincts M et N sur l'arc de cercle. Construire les médiatrices D et D' de [AM] et de [AN]. O se trouve à l'intersection de D et D'. A, M, N n'étant pas alignés, D et D' sont bien sécantes.



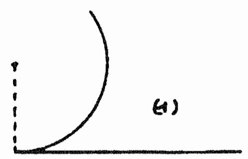
Cette méthode est retenue. Elle donne l'occasion de revoir la construction de la médiatrice d'un segment, de retrouver la définition du cercle de centre O passant par A comme ensemble des points situés à la distance OA de O.

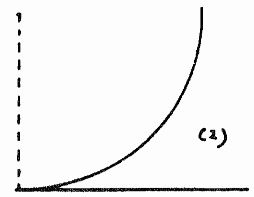
Constat :

La tangente coïncide avec la droite d. En adoptant cette méthode tous les angles cornus ont pour mesure 0. On a su associer à chaque angle un nombre... mais cela n'est pas satisfaisant car des angles qui ne se superposent pas sont associés au même nombre...

- 3ème solution

Associer à chaque angle le rayon du cercle qui supporte l'arc de cercle.

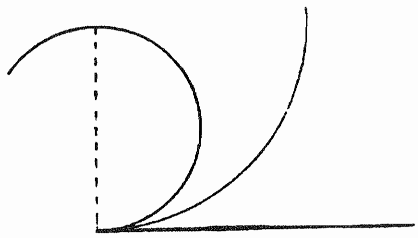




(1) est plus grand que (2) mais le nombre associé à (1) est plus petit que celui associé à (2)....

- 4ème solution

Associer à chaque angle les inverses des rayons.



Cette méthode permet par exemple de construire le double d'un angle cornu alors que la méthode de report n'est pas concevable ici.

Mais ne mesure-t-on pas autre chose que l'angle cornu lui-même?

4 - Conclusions

La situation permet :

- de retrouver des notions élémentaires de géométrie en tant qu'outils

- de réfléchir à la validation d'une solution : validation sociale, raison culturelle, raison mathématique.

Dans l'histoire on trouve les deux points de vue :

- l'angle de contingence est nul

- l'angle de contingence est une grandeur. Cette grandeur est plus petite que celle de tous les angles rectilignes, mais elle n'est pas nulle ; elle admet des multiples et des sous multiples.

Newton et Leibniz, fondateurs du Calcul Infinitésimal, adoptèrent la seconde position.

Titre : La mesure des aires de surfaces planes au CM et début de collège - Les apports de l'histoire des mathématiques.

Auteur : Danielle Ortolland (I.U.F.M. de Lille)

Date : février 1991

Type : pistes de réflexion pour des activités de formation

Résumé : Il s'agit d'étudier les contenus d'enseignement relatifs à la mesure des aires en CM et 6ème, en tenant compte en particulier de la place de ces activités à la charnière entre le numérique et le géométrique. Une étude historique tente d'apporter un éclairage supplémentaire sur les méthodes et les résultats. Dans une dernière partie, des pistes de travail sont dégagées. Elles devraient pouvoir déboucher sur des activités au niveau de la formation des enseignants.

Mots-clés : aires - histoire des mathématiques - articulation numérique/géométrique

La mesure des aires de surfaces planes au CM et début de collège Les apports de l'histoire des mathématiques.

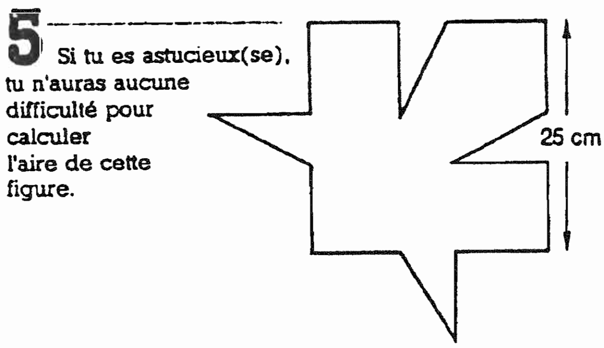
Les problèmes de mesure des aires sont intrinsèquement liés à la géométrie d'une part, mais aussi au numérique. C'est par rapport à cette question de l'articulation numérique-géométrique que nous examinerons les contenus d'enseignement relatifs à ce thème à travers certains manuels de CM et de 6ème, mais aussi les programmes de ces classes et des études didactiques réalisées sur ce thème. Une étude historique tentera d'apporter un éclairage supplémentaire sur la nature de cette liaison et sur certains obstacles mis en évidence dans les études didactiques. Nous dégagerons ensuite des pistes pour l'enseignement.

I - La mesure des aires en CM et 6ème

1. Etude de quelques manuels

Pour l'école élémentaire, nous avons analysé "*Objectif Calcul*" CM1 et CM2, (Hatier, 1987/1988). Dans ce manuel, au CM1, les premières activités se font sur un réseau quadrillé ou triangulaire qui est donné. Le recours au comptage des triangles élémentaires ou des carreaux est donc implicite. La comparaison de deux superficies par découpage et recollement des morceaux n'est pas explicitement prévue. Immédiatement ensuite on passe aux unités légales et à des calculs (exacts). Le rapport avec la géométrie n'est d'ailleurs pas développé dans le livre du maître. Au CM2, toutes les activités sont orientées vers le calcul, même là où il aurait été possible de les orienter plus vers l'aspect géométrique.

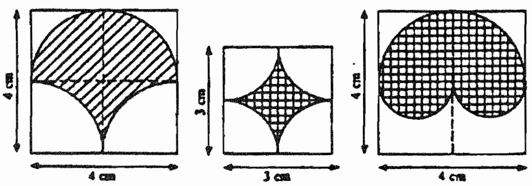
Par exemple, l'exercice 5, p 167, aurait pu avoir pour consigne : "*trouver une figure simple qui a même aire que la figure donnée*".



Nous voyons donc que dans "*Objectif Calcul*", le travail est centré sur le mesurage et l'aspect numérique.

Pour le collège, un manuel a attiré notre attention dans la mesure où justement il présente une rubrique d'histoire des mathématiques. Il s'agit de Magnard $6^{ème}$, 1986. Or, là aussi l'accent est dès les premières activités fortement mis sur l'aspect numérique. Prenons l'exemple de l'exercice 14, p. 186.

14
Calcule les aires des parties hachurées.



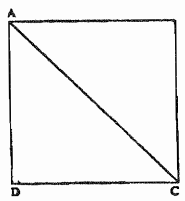
L'activité proposée réside là encore en un calcul, là où on aurait, ici aussi, pu demander de trouver des formes géométriques d'aires équivalentes à chacune des figures (par exemple, un rectangle pour la première, la différence entre un carré et un disque pour la seconde, un disque et un demi-disque pour la troisième).

Quant aux "*lunules d'Hippocrate*" (page 190) :

Hippocrate de Chios fut un mathématicien grec du V° siècle avant J.C. Ses essais d'organisation systématique des mathématiques, son enchaînement des problèmes consistant à faire dépendre la démonstration d'un théorème de celle d'un autre théorème, annoncent la géométrie d'Euclide (III° siècle avant J.C.) que tu étudies encore aujourd'hui.

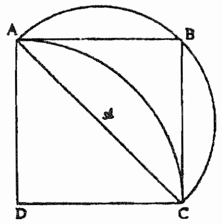
De ses travaux, on a retenu le calcul de l'aire de certaines figures en forme de croissants, appelés lunules. Voici une lunule d'Hippocrate.

* La première lunule d'Hippocrate.



Mesure AD et calcule l'aire du triangle ADC.

Mesure AC et calcule l'aire du demi-cercle ABC de diamètre [AC].



* La deuxième lunule

Calcule l'aire du quart de cercle de centre D et de rayon DA, soustrais à cette aire celle du triangle ADC, tu obtiens l'aire de la partie $\mathcal{A}$. Pour obtenir l'aire de la lunule, tu soustrais l'aire de $\mathcal{A}$ à celle du demi-cercle ABC. Que constates-tu ?

outre le fait que les lunules dont il est question sont ici en fait une seule lunule, comment peut-on imaginer que l'on puisse montrer, par le mesurage des longueurs et le calcul, l'égalité de l'aire de la lunule à celle du triangle ADC ? (Nous reviendrons ultérieurement sur cette quadrature faite par Hippocrate et analyserons sa méthode.)

La finalité dans ces manuels est bien l'obtention du résultat numérique, et non pas une comparaison géométrique des figures, même là où cette comparaison apporte autant ou plus d'information que le résultat numérique. Est-ce bien là l'esprit des programmes actuels ?

2. *Etude des programmes*

a) les programmes de CM

Je reprendrai l'analyse faite par M.J. Perrin ([8], pp 131-132) : avec les programmes de CM de 1980 "*il apparaît trois objectifs à l'enseignement de la mesure : un objectif théorique de construction de la notion de mesure, un objectif pratique de mesurage, un objectif social de connaissance des unités légales*".

C'est encore ce qui est présent dans les programmes de 85 dans la rubrique "*Mesure de quelques grandeurs*" :

"*Formation des concepts de longueur, d'aire, de volume, de masse, d'angle et de durée ; utilisation des systèmes de mesure : expression, par un nombre ou par un encadrement, du résultat d'un mesurage.*

Utilisation des unités du système légal et usuel.

Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur ou de poids.

Utilisation des instruments de mesure : double décimètre, balance, montre, etc...

Détermination du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'un rectangle, de l'aire d'un triangle, du volume d'un pavé.

Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire ou le volume d'un objet donné."

La mesure est, dans les programmes, coupée de la géométrie. La distinction entre les comparaisons d'aires par découpage-recollement et par mesurage-comptage de carreaux n'apparaît pas ; de même, la distinction entre mesure exacte et approchée est peu prise en compte.

D'après la fiche d'accompagnement des Instructions Officielles de l'école élémentaire "*Activités géométriques*"(1/06/1986), les activités à conduire avec les élèves sont répertoriées en quatre types: "*reproduire, décrire, représenter, construire*". La résolution de problèmes issus de comparaison de grandeurs n'est pas mentionnée.

Une étude des programmes antérieurs montre que dans les programmes d'avant 1970, le découpage-recollement de surfaces avait pour but d'obtenir des formules. En 1970 il sert à construire le concept d'aire. Mais jamais il n'apparaît comme moyen d'obtenir la certitude de l'égalité quand autrement on n'aurait qu'une approximation, ou comme moyen de résoudre des problèmes géométriques relatifs aux aires.

L'articulation entre numérique et géométrique et la comparaison entre ces différentes méthodes ne sont jamais explicitement mentionnées comme importantes.

b) les programmes de $6^{ème}$

Les programmes de 1989 placent explicitement la comparaison d'aires planes dans la partie "*Travaux géométriques*" du programme. Quant aux méthodes susceptibles d'être utilisées pour faire cette comparaison, sont mentionnés : les reports, les décompositions, les découpages et recollements, les quadrillages et les encadrements, donc sont mêlées les méthodes géométriques et les méthodes numériques d'une part, celles aboutissant à une égalité et celles aboutissant à une approximation d'autre part. Le découpage-recollement doit permettre "*de retenir sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle*". Les calculs sur les aires sont enfin mentionnés dans la partie "*Organisation et gestion de données. Fonctions*".

Il apparaît donc qu'en $6^{ème}$ les deux aspects, numérique et géométrique, sont bien présents dans les programmes, mais que la nature de leur articulation n'est pas explicitement mentionnée, de même que le découpage-recollement apparaît comme ayant pour but la mise en place des formules, mais rien ne précise s'il s'agit là de son but exclusif ou non.

3. Un travail en didactique des mathématiques a été fait sur ce thème par Douady - Perrin ([2], [3], [4], [5]). Il est intéressant, prend en compte les deux dimensions : "découpage-recollement" (géométrique), mesurage (numérique) ; et aussi les confusions fréquentes entre périmètre et aire. Les hypothèses suivantes sont, entre autres, énoncées :

H1 : Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique).

H2 : Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires).

Cette articulation numérique-géométrique est interprétée dans le cadre de concepts didactiques (jeu de cadres). L'histoire semble pouvoir apporter un éclairage supplémentaire sur cette articulation.

II - Etude historique des problèmes de comparaison, d'évaluation d'aires

1. Historiquement, deux méthodes apparaissent pour les évaluations et comparaisons des aires planes :

- des méthodes de mesurage, faisant appel aux nombres

On cherche alors à évaluer la mesure en rapportant la surface à un élément unité. L'égalité de surface se fonde sur des égalités numériques. Les Babyloniens par exemple calculent les aires avec des nombres, ils disposent de certaines formules, en particulier de celles donnant l'aire d'un triangle rectangle, d'un trapèze rectangle, mais aussi de formules approchées : aire du cercle, du segment de cercle. Ils ont un souci de l'approximation : dans des calculs de superficies de champs retrouvés sur certaines tablettes, on voit utilisée systématiquement la moyenne arithmétique entre deux valeurs approchées.

Cette démarche calculatoire qui est finalement proche de celles des manuels vus précédemment sera sans doute toujours présente jusqu'à nos jours, et on la retrouve plus tard chez Héron d'Alexandrie où, une grandeur de référence étant choisie arbitrairement, toute grandeur est exprimée par un nombre (exact ou approché).

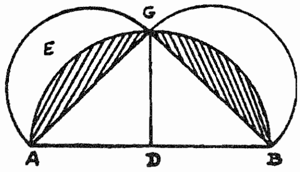
- des méthodes géométriques

On voit apparaître un nouveau type de démarche chez les Grecs, sans doute parallèlement aux méthodes précédentes, avec en particulier les problèmes de quadrature. Les documents les plus anciens sont en particulier ceux relatifs aux tentatives de quadrature de lunules d'Hippocrate de Chio, et les premiers livres des *Eléments* d'Euclide ([6]).

Examinons quelques unes des tentatives de quadrature de lunules faites par Hippocrate de Chio (mathématicien grec du $V^{ème}$ siècle avant J.C.). Ces témoignages nous sont transmis par Simplicius qui nous rapporte deux tentatives de quadrature rapportés par Alexandre d'Aphrodise (fin du $II^{ème}$, début du $III^{ème}$ siècle après J.C.), et quatre cas rapportés par Eudème de Rhodes (300 avant J.C. environ).

Penchons-nous d'abord sur les deux cas les plus simples qui sont ceux rapportés par Alexandre. Le seul résultat important concernant les cercles auxquels ces quadratures font appel, et qui doit être établi au préalable, est que les cercles sont entre eux comme les carrés construits sur leurs diamètres. On peut aisément en déduire qu'il en est de même pour les demi-cercles.

Voici la première quadrature de lunule :

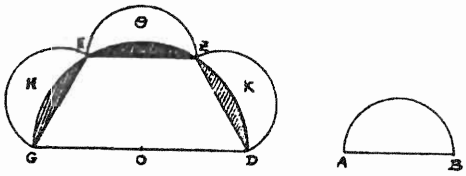


Dans le triangle rectangle isocèle AGB, le carré sur AB est égal au double du carré sur AG. Ceci peut s'obtenir grâce au théorème de Pythagore, qui figure dans le Livre I des *Eléments* et était connu au temps d'Hippocrate.

Donc, d'après le résultat sur les rapports de cercles, le demi-cercle sur AB est le double du demi-cercle sur AG, ou encore le demi-cercle sur AB est égal à la somme des demi-cercles sur les côtés AG et GB.

En enlevant les segments de cercles sur AG et GB hachurés, on trouve que le triangle rectangle isocèle AGB est égal à la somme des deux lunules sur AG et GB, ou encore qu'une lunule est égale au triangle isocèle rectangle AGD. Donc Hippocrate a ainsi montré que la lunule en question est quarrable puisque tout polygone l'est.

Après avoir inscrit dans le demi-cercle un demi-carré, il parait naturel de penser maintenant à y inscrire un demi-hexagone. On obtient ainsi le second cas relaté par Alexandre. On peut penser que telle fut la démarche d'Hippocrate. Il obtint alors la figure suivante, en construisant les demi-cercles sur chacun des côtés du demi-hexagone :



Le diamètre GD étant le double du côté de l'hexagone inscrit dans le cercle, le carré sur GD vaut quatre carrés sur EG.

Donc le demi-cercle sur GD vaut quatre demi-cercles sur EG, c'est-à-dire les trois demi-cercles sur EG, EZ, ZD, plus un demi-cercle de diamètre AB moitié de GD.

En enlevant les trois segments de cercles hachurés, on trouve de la même manière que précédemment que le trapèze GEZD vaut trois lunules plus le demi-cercle AB.

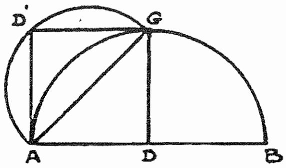
Mais cette fois on ne peut pas conclure à la quadrature de la lunule seule, mais à celle de la lunule prise avec le demi-cercle AB. Apparait ici clairement ce que cherchait Hippocrate, et qui est d'ailleurs confirmé par tous les témoignages : tenter de résoudre le problème de la quadrature du cercle en utilisant la démarche suivante :

- établir que certaines lunules sont quarrables,
- établir qu'un cercle combiné avec une certaine lunule est quarrable,
- en déduire que le cercle est quarrable.

Cette démarche revient donc à "réduire" la quadrature du cercle à la quadrature d'une lunule : puisqu'on a établi - de façon tout à fait satisfaisante d'ailleurs - qu'un cercle combiné avec une certaine lunule est quarrable, résoudre la quadrature du cercle revient exactement à établir la quadrature de cette lunule. Mais il faut démontrer soit que toutes les lunules sont quarrables, soit tout au moins que cette lunule précise est quarrable. On voit bien ici qu'Hippocrate ne se préoccupe pas d'obtenir des résultats numériques permettant d'évaluer l'aire des lunules. Sa préoccupation est bien d'ordre théorique et géométrique.

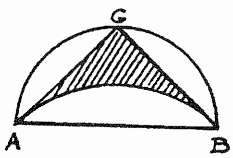
Il est intéressant de montrer comment Hippocrate a pu transformer la méthode développée dans la première quadrature précédente afin d'obtenir celle que l'on trouve dans le premier des quatre cas de quadrature rapportés par Eudème.

Pour cela, examinons à nouveau la figure correspondante.



On peut faire apparaître le triangle AD'G rectangle isocèle égal au triangle ADG. La lunule est telle que sa circonférence extérieure est un demi-cercle et sa circonférence intérieure centrée en D, c'est-à-dire que la circonférence intérieure est un quart de cercle, ou encore est semblable à l'arc AD'. On est ainsi amené à considérer la similitude des segments de cercles sur AG et sur AD'.

On peut alors envisager sa quadrature de la façon suivante (sans faire appel au demi-cercle précédent, mais uniquement à partir des éléments présents dans la figure) :

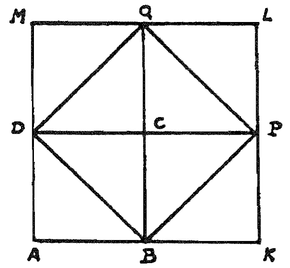


Les points ont été renommés conformément au texte de Simplicius.

Le carré sur AB est le double du carré sur AG, donc le segment de cercle sur AB est égal au double du segment de cercle sur AG. Mais il faut alors d'une part envisager la similitude des segments de cercles et d'autre part avoir montré au préalable un résultat supplémentaire par rapport aux cas précédents : "*les segments de cercles semblables sont entre eux comme les carrés construits sur leurs bases*". C'est sans doute de cette manière qu'Hippocrate a été amené à établir ce résultat sur l'aire des segments de cercle semblables. La lunule que nous venons d'obtenir correspond exactement au premier cas relaté par Eudème et sa quadrature est ensuite établie dans le texte de Simplicius de la façon suivante : on ajoute la partie hachurée du triangle aux deux segments, on trouve la lunule qui est égale au triangle ABG.

Quelle conclusion tirer à propos de la méthode d'Hippocrate ?

C'est une méthode géométrique, entièrement non numérique, déductive, qui permet d'aboutir à la certitude de l'égalité des aires et non pas à une approximation. Il ne s'agit pas d'évaluer un nombre d'éléments unités, mais de construire un carré ayant même aire qu'une figure donnée. Ici, il s'agit en fait de polygones et non pas de carrés, mais il a dû être établi antérieurement que tout polygone est quarrable, d'ailleurs ce résultat est l'aboutissement des deux premiers livres des *Eléments* d'Euclide. La géométrie est ici, tout comme dans les *Eléments*, coupée de l'arithmétique. L'opposition entre ces deux démarches apparaît dans *Le Ménon* de Platon ([9]) : alors que la démarche arithmétique mène à une impasse dans la recherche de la duplication du carré, la démarche géométrique donne rapidement la solution : il suffit de construire le carré dont le côté est la diagonale du carré initial.



C'est de la même manière qu'Hippocrate cherche une solution géométrique par une démarche qui articule logiquement entre eux des résultats. Il est le premier à avoir montré que des surfaces curvilignes sont quarrables en utilisant le découpage-recollement combiné avec le résultat sur les rapports de cercles. (Ces quadratures ont certainement encouragé les mathématiciens de cette époque dans leurs vains efforts pour quarrer le cercle.)

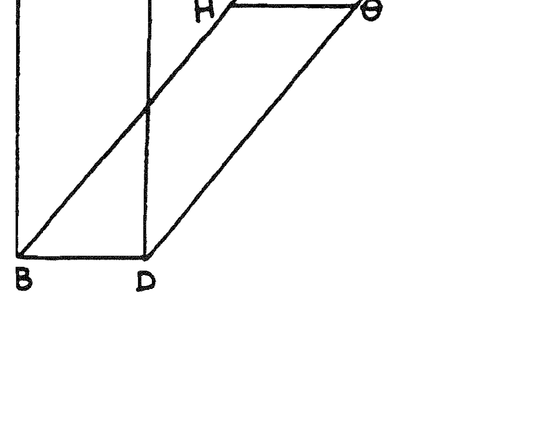
Nous voyons donc clairement deux méthodes distinctes relatives aux problèmes de comparaisons d'aires : les unes numériques, basées sur des dénombrements d'éléments unité, mais qui se heurtent au problème des approximations et de l'incommensurabilité, les autres géométriques qui prouvent que des aires sont égales, évitent les nombres et le problème de l'incommensurabilité et se présentent chez les Grecs sous la forme de problèmes de quadrature.

2. *La confusion aire-périmètre*

Après avoir examiné sur le plan historique les méthodes utilisées dans la comparaison des aires, nous allons revenir sur la confusion aire-périmètre qui a été mise en évidence dans l'étude didactique précédente afin de montrer que cette difficulté a été mentionnée plusieurs fois par les mathématiciens.

Assez proche de nous, en 1754, Jean-Etienne Montucla dans son *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* ([7], Préface) cite l'erreur de ceux qui, pour quarrer le cercle, après avoir entouré "*le cercle d'un fil délié*", "*partagent ce fil en quatre parties égales, pour faire d'une d'elles le côté d'un carré qu'ils prétendent égal au cercle. Ils ignorent cette vérité, que la Géométrie démontroit presqu'encore au berceau; sçavoir, que de toutes les figures d'égal contour, le cercle est celle qui renferme le plus d'étendue.*" L'erreur citée par Montucla consiste bien en une confusion aire-périmètre, puisqu'elle consiste à construire un carré ayant même périmètre qu'un cercle donné au lieu de la même aire.

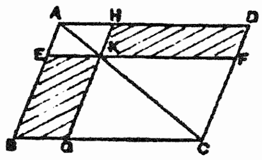
Mais cette difficulté est déjà citée par Proclus (mathématicien grec du $V^{ème}$ siècle après J.C.) dans *Les commentaires sur le premier Livre des Eléments d'Euclide* ([10], pp 339 - 341) à propos de la Proposition I,35 : "*Les parallélogrammes établis sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux*". Ce théorème est cité par Proclus comme paradoxal puisque l'on peut augmenter indéfiniment la longueur de ces parallélogrammes tout en maintenant leur aire. Pour expliquer ce phénomène, il analyse l'influence des angles sur l'aire en montrant que pour un périmètre égal, le rectangle a une aire plus grande qu'un parallélogramme non rectangle : "*le côté BE se referme en quelque sorte sur le côté BD et contracte ainsi l'aire [...] L'inégalité des angles diminue donc l'aire ; tandis que l'accroissement de la longueur, ajoutant dans la mesure où cette égalité retranche, maintient l'équivalence des aires.*"



III - Quelles conséquences en tirer au niveau de l'enseignement ?

Tout d'abord, au niveau de l'articulation numérique-géométrique, ne serait-il pas légitime d'aborder ces deux types de méthodes avec les élèves, de chercher celle qui est la plus adaptée, la plus performante pour le problème que l'on se pose, d'aborder par exemple dès le CM2 des argumentations géométriques relatives à l'égalité de figures telles qu'elles peuvent apparaître dans le problème suivant, issu directement de la Proposition I,43 des *Eléments* d'Euclide : "*Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux*", ou encore :

ABCD est un parallélogramme, K un point de la diagonale AC. Par K on mène des parallèles aux côtés du parallélogramme. Comparer les aires hachurées.



La comparaison des méthodes géométriques et des méthodes de mesurage et de calcul sera sans doute très intéressante. Faut-il pour résoudre ce problème se munir d'instruments de mesure et calculer l'aire de chaque parallélogramme, en ne pouvant alors que constater les valeurs très proches de leurs aires, ou faut-il préférer la comparaison géométrique par décomposition qui amène à la certitude de l'égalité sans mesurer ?

D'autres exemples du même type peuvent être envisagés : par exemple, pour les problèmes suivants, choisissez-vous une méthode de résolution de nature numérique, ou de nature géométrique ? Justifiez : quels sont les avantages et inconvénients de chacune ? La nature des connaissances dont on dispose influera bien entendu sur la réponse à apporter.

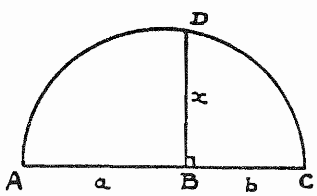
1. Trouver un carré d'aire double de celle d'un carré donné.

La méthode numérique amène à l'extraction d'une racine carrée; la méthode géométrique permet de construire le carré double à la manière du *Ménon*.

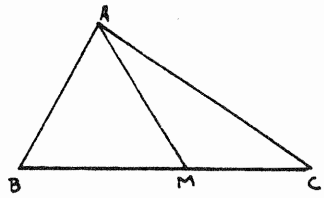
2. Trouver un carré ayant même aire qu'un rectangle donné.

La solution géométrique ne pourra bien sûr pas être envisagée au CM ou en 6ème.

$a \cdot b = x^2$



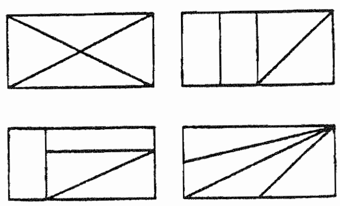
3. Un triangle ABC étant donné, trouver la droite AM qui le partage en deux triangles ABM et AMC d'aires égales.



On peut aussi poser d'emblée des problèmes d'aires sur le mode géométrique. Par exemple :

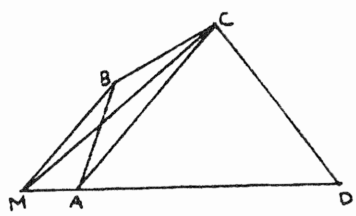
4. Trouver une figure ayant même aire que :

5. Partager des figures en figures d'aires égales, mais n'ayant pas nécessairement même forme, ou vérifier que des partages sont "équitables" (Voir ERMEL CM, Tome 2, pp 215 - 216).



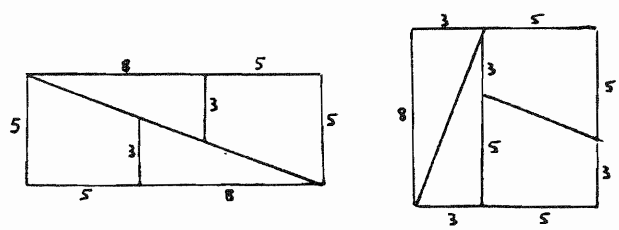
6. Un quadrilatère ABCD étant donné, trouver un triangle ayant même aire.

La solution suivante, où BM est parallèle à AC et M sur la droite AD donne un triangle MCD répondant à la question.



Cette méthode peut être généralisée à tout polygone.

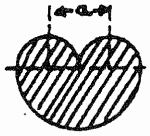
Mais il faut aussi se méfier des résultats obtenus par de faux découpages-recollements comme le montre le paradoxe de Lewis Caroll :



Ici, les comparaisons numériques nous amènent au paradoxe : 8 x 8 = 64, mais 13 x 5 = 65.

Et pour aller plus loin dans les classes où la variation de l'aire du disque en fonction du rayon a été vue, on peut résoudre les problèmes suivants "à la manière d'Hippocrate".

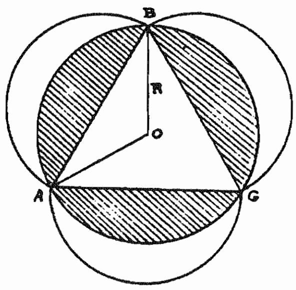
7. A combien de disques de diamètre a cette figure est-elle équivalente ?



Rép. : 1 disque de diamètre *a* + 1/2 disque de diamètre 2*a* = 3 disques de diamètre *a*

8. Et si Hippocrate avait inscrit un triangle équilatéral dans un cercle, et décrit un demi-cercle autour de chaque côté de ce triangle, à quel résultat serait-il parvenu en tentant la quadrature des lunules ainsi obtenues ?

Si R est le rayon du cercle, et D son diamètre, on a :



$AB^2 = 3\ R^2 = 3/4\ D^2$

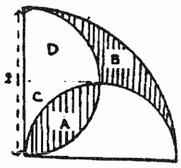
Donc demi-disque AB = 3/4 demi-disque ABG

3 demi-disque AB = 9/8 disque ABG = disque ABG + 1/8 disque ABG

En enlevant les aires hachurées, on trouve :

3 lunules = triangle ABG + 1/8 disque ABG = triangle ABG + demi-disque de rayon R/2

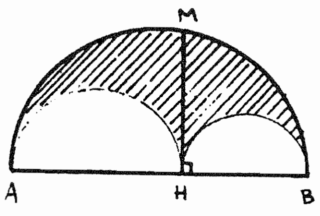
9. Comparer les aires des zones A et B.



aire de A = aire d'1/2 disque de rayon 1 - aire de D - aire de C = aire d'1/2 disque de rayon 1 - aire d'un carré de côté 1

aire de B = aire d'1/4 disque de rayon 2 - aire d'1 disque de rayon 1 + aire de A = aire de A

10. Par un point M d'un demi-cercle de diamètre AB, on mène la perpendiculaire MH à AB, et les deux demi-cercles de diamètre AH et HB. A quoi est égale l'aire hachurée ?

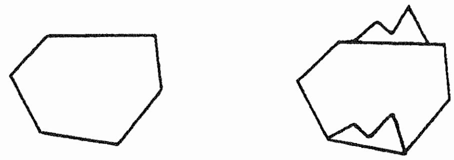


En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :

aire hachurée = aire du demi-disque AB - aire du demi-disque AH - aire du demi-disque HB = aire du demi-disque AB - (aire du demi-disque AM - aire du demi-disque MH) - (aire du demi-disque MB - aire du demi-disque MH) = 2 aire du demi-disque MH = aire du disque de diamètre MH

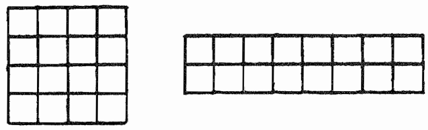
Par ailleurs, en ce qui concerne la fréquente confusion aire-périmètre, la persistance de cette erreur au collège, voire au-delà, est le signe d'un réel paradoxe, comme l'a noté Proclus, et notre attention doit être attirée par ces erreurs, par l'importance de les faire émerger en trouvant les situations appropriées.

Par exemple, l'on peut chercher à transformer des surfaces en gardant la même aire. Un moyen consiste à enlever une surface d'un côté et la rajouter d'un autre côté. Mais alors les périmètres peuvent augmenter :



Inversement, des parallélogrammes articulés ont un périmètre constant, mais une aire qui varie, une ficelle fermée peut former des rectangles d'aires différentes (voir [1], pp 15 - 31).

Si l'on assemble de différentes façons un même nombre de carrés unités pour former des surfaces différentes, les aires de ces surfaces seront égales, mais les périmètres varieront.



Toutes ces situations problématiques devraient pouvoir amener à établir des conjectures, les mettre en doute, les vérifier, les prouver ou les rejeter, mais aussi à savoir différencier les traitements par mesurage et calcul de ceux relevant d'une nature plus géométrique; ceux qui aboutissent à un constat de ceux qui sont de nature plus déductive ; ceux qui mènent à une égalité d'aires de ceux qui mènent à une approximation. Il agit là d'une véritable réflexion sur les méthodes indissociablement liée aux problèmes que l'on cherche à résoudre.

Note : les numéros du texte renvoient à ceux de la bibliographie générale sur le thème "Aires de surfaces planes".

titre : aires de surfaces planes
auteur : Marie Claude CHEVALIER (P.E.N. Cahors)
date : mars 91
type : série d'activités réalisées en formation initiale
résumé : ensemble d'activités autour de la notion d'aire
mots-clés : aire et forme - aire grandeur autonome - aire et périmètre

AIRES DE SURFACES PLANES

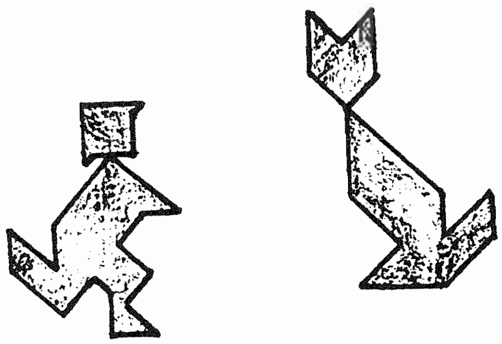
1 - aire, grandeur autonome

1.1 - aire et forme

Deux surfaces superposables ont la même aire mais deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement la même forme.

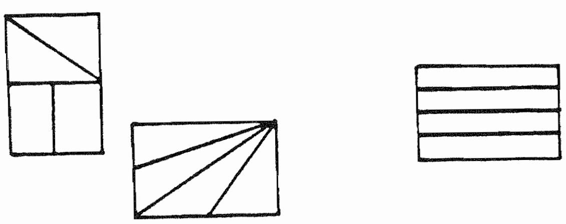
a) activité tangram

Comparer l'aire du chat et du chinois.



b) quatre parts de même aire

Partager une feuille de format A4 en quatre parts de même aire.



Procédures de validation :

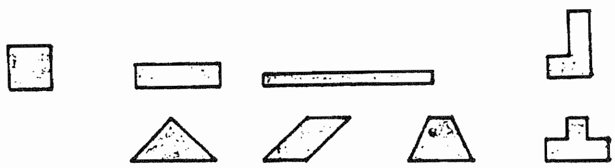
- formes superposables
- doubles superposables
- moitiés superposables
- pavage
- calcul de la mesure de l'aire (formules)

1.2 - aire et pavage

Le tangram permet de réaliser des pavages à l'aide d'éléments unités différents. Par exemple, paver une des deux figures chat ou chinois à l'aide du carré ou du petit triangle.

1.3 - aire et mesure

Les élèves affirment volontiers : *"4 cm^2 est un carré de 4 cm de côté"*. On peut proposer des activités sur les figures semblables (2.4 a)) ou demander par exemple de dessiner différentes surfaces de 1 cm^2.

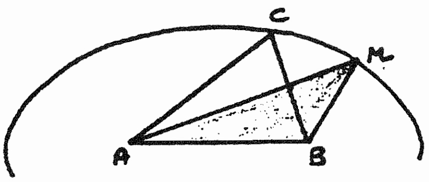


2 - aire et périmètre

2.1 - figures de même périmètre et d'aires différentes

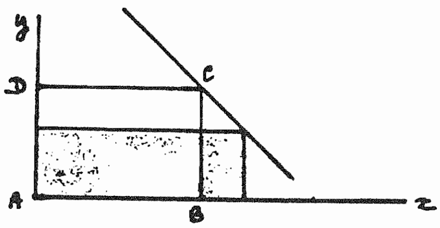
a) activité ficelle

Déterminer l'ensemble des points M tels que ABM ait même périmètre que ABC. Que dire de l'aire de ces triangles?



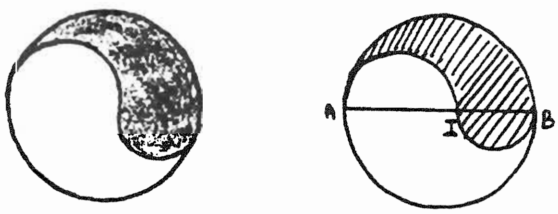
Le rectangle ABCD a un périmètre fixe p.

Déterminer l'ensemble décrit par C lorsque A est fixe, B se déplace sur (Ax), D sur (Ay).



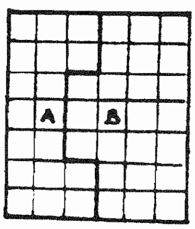
b) les "gouttes d'eau"

Soit un cercle de rayon r et de diamètre [AB]. On choisit un point I de [AB] et on construit deux demi-cercles de diamètres [IA] et [IB] de part et d'autre de la droite (AB). On obtient ainsi deux "gouttes d'eau". Que peut-on dire de leurs périmètres et de leurs aires?



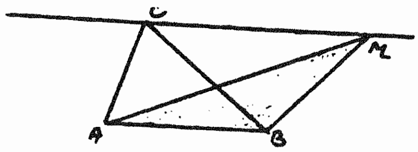
c) papier quadrillé

Analyser les procédures des élèves dans un exercice sur aires et périmètres à partir des cahiers évaluation $6^{ème}$, année 1990.



2.2 - figures de même aire et de périmètres différents

Déterminer l'ensemble des points M tels que les triangles ABC et ABM aient la même aire.



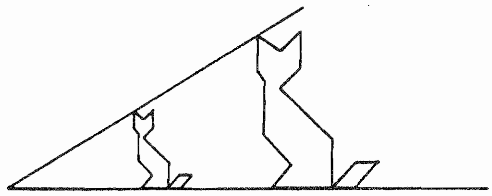
De même on peut proposer de construire des parallélogrammes de même aire et de périmètres différents.

2.3 - figures pour lesquelles "égalité d'aire" est synonyme de "égalité de périmètre"

Peut-on déduire, dans certains cas, à partir de l'égalité des aires (respectivement des périmètres) et de la connaissance de la nature de la figure, l'égalité des périmètres (resp. des aires) ? Par exemple deux carrés de même aire ont-ils même périmètre ? Cela reste-t-il vrai encore pour deux cercles ?... Pour deux figures semblables ?

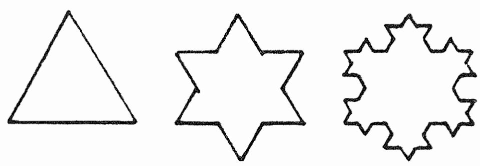
2.4 - aires et périmètres variant dans le même sens

a) figures semblables



F est une figure de périmètre p et d'aire a. Une similitude de rapport k transforme F en F'. Exprimer l'aire et le périmètre de F'.

b) flocon de Von Koch



Que dire des aires et périmètres de S_1, S_2, ..., S_n?

2.5 - aire et périmètre variant en sens contraire

Transformer une figure de façon à augmenter le périmètre et diminuer l'aire.

Partie 2

Eléments pour un cours sur la soustraction en formation des maîtres

Pourquoi la soustraction ?

L'enseignement de la soustraction comporte des difficultés non encore résolues et reste un objet de recherche.

D'autre part, les résultats des évaluations nationales CE 2-6$^{\text{ème}}$ montrent qu'elle pose problème aux élèves et aux maîtres.

Problématique

Comment présenter la soustraction aux maîtres?

Plan

- exemple d'une progression sur les problèmes additifs *(collectif)*
- exemple d'une situation liée à la soustraction (aspect "écarts") (collectif sur une idée de JL Oyallon)
- un cours sur la soustraction *(Guy Brousseau)*
- catégorisation de problèmes additifs *(Catherine Houdement)*
- bibliographie *(collectif)*

La soustraction n'est pas une connaissance unique : elle présente plusieurs aspects. Chacun de ces aspects a un domaine privilégié d'application ou se prête mieux à la résolution de problèmes. Les fonctionnements de la soustraction sont très différents suivant les environnements culturels.

Le groupe s'est accordé sur la nécessité de replacer les problèmes soustractifs dans le champ conceptuel des problèmes additifs. Il ne s'agit pas d'enseigner telle ou telle catégorisation mais de déstabiliser la conception déjà en place et de faire accepter des points de vue différents.

Titre : Exemple de démarche : catégorisation de problèmes additifs

Auteurs : collectif (stage Cahors)

Date : mars 1991

Type : exemple de progression

Résumé : réflexion et apports théoriques sur les catégorisations de problèmes additifs

Mots-clés : addition, soustraction, problème, transformation, état, comparaison, catégorie.

Exemple de démarche "catégorisation de problèmes additifs".

Objectif

Amener les élèves maîtres à réfléchir sur la complexité des problèmes soustractifs et les replacer dans le champ des problèmes additifs.

Méthode

On envisage divers classements de problèmes additifs

Dispositif

Travail en petits groupes

Déroulement en trois phases

1ère phase

On utilise comme point de départ une liste de problèmes "ad-hoc" fournie aux groupes (cf. encadré page suivante), ou extraite de manuels ou construite par les groupes en réponse à la consigne :

"Ecrire des énoncés de problèmes à résoudre par une soustraction (et une soustraction seulement) pour des élèves de niveau CE"

On complète la consigne :

"Mettez ensemble les problèmes qui se ressemblent ; chaque groupe présentera et justifiera son classement".

Chaque groupe expose son classement en explicitant les critères utilisés. On compare les différents classements. On peut rencontrer des classes égales, des inclusions de classes et des intersections vides ou non. Leur examen conduit à constater l'insuffisance de ces classifications et la complexité de la soustraction.

Analyse a priori

On s'attend à rencontrer différents types de classement :

- classement par mots inducteurs : "*reste*", "*plus*", "*manque*", "*différence*" (cette méthode pouvant conduire à plusieurs classements)

- classement sémantique selon les grands domaines de la vie courante (problèmes d'argent, de taille, d'âge...)

- classement à l'aide de représentations schématiques ou figuratives (représentations iconiques, c'est à dire non textuelles, plus ou moins abstraites).

- classement par représentations symboliques (écriture algébrique).

- classement en problèmes de type cardinal, ordinal ou "comparaison", etc...

2ème phase

On propose une grille fondée sur des travaux théoriques, par exemple :

- "*L'enfant et l a mathématique et la réalité*" (Vergnaud)
- "*Théorie des champs conceptuels*" (RDM 10/2-3)
- "*L'enfant et le nombre - du comptage à la résolution de problèmes*" (Fayol)

La conclusion de cette phase est que la soustraction n'est pas un objet unique et que ce n'est pas parce que l'élève identifie la soustraction dans des situations d'un certain type, qu'il l'identifiera dans des situations de types différents.

Il faut prendre en compte ces différents aspects, travailler les familles de situations les concernant et regarder à quel moment on peut les introduire.

3ème phase

Elle consiste à faire fonctionner la grille présentée dans la phase 2 :

- sur les problèmes précédemment examinés (phase 1) en complétant éventuellement les catégories manquantes (fabrication d'énoncés).
- sur le contenu des manuels (repérage de problèmes d'entraînement et de problèmes d'évaluation, explication de certaines causes de non-réussite par la présence en évaluation de types de problèmes ne figurant pas en entraînement), étude des problèmes proposés en évaluation CE2 et 6ème (notamment prévision des résultats d'après le type).

Il apparaît finalement qu'il n'y a pas de grille satisfaisante dans tous les cas... Il est nécessaire d'en utiliser plusieurs de façon "croisée" car l'identification de la fonctionnalité des savoirs est un objectif primordial vis-à-vis des élèves-maîtres.

Exemple de liste de problèmes additifs ayant fonctionné en formation

(Mireille LAMANT, PEN Bordeaux, février 1991)

1 Mon livre a 83 pages. J'ai lu jusqu'à la page 27. Trouve le nombre de pages qu'il me reste à lire.

2 Eric a 61 billes. Il en a 9 de plus que Pascal. Combien Pascal a-t-il de billes ?

3 Je prends 100 F et j'achète 85 F de fleurs. Combien me reste-t-il ?

4 François a reçu 250 F pour son anniversaire. Il donne 120 F à sa petite soeur. De combien dispose-t-il maintenant?

5 J'ai 100 F. J'achète un livre qui coûte 86 F. Combien me rend-on ?

6 Pour son anniversaire, Emmanuelle veut offrir à ses 32 camarades de classe un porte-clé en tissu. Elle en a déjà confectionné 14. Combien doit-elle en fabriquer encore ?

7 J'ai acheté un livre à 58 F. J'avais 96 F avant mon achat. Combien me reste-t-il ?

8 Maman est allée faire des courses. Elle avait 195 F dans son porte monnaie. En rentrant, il ne lui reste plus que 17 F. Combien a-t-elle dépensé ?

9 Paul mesure 168 cm, Virginie mesure 125 cm. Quelle est la différence de taille entre les deux enfants ?

10 Monsieur D a 37 ans, son fils Pierre a 9 ans. Quel âge avait Monsieur D quand son fils est né ?

11 Sophie veut acheter une poupée à 85 F. Elle a 72 F dans sa tirelire. Combien lui manque-t-il ?

12 Pierre a ramassé 53 champignons. Sa poche est trouée, il en perd 12. Combien en ramène-t-il ?

13 En un an, Jean a grandi de 8 cm. Jean mesure maintenant 113 cm. Quelle était sa taille il y a un an?

Titre : Exemple d'une situation liée à la soustraction (aspect écarts) : Jeu des règles et des bracelets

Source : activité proposée par J. L. Oyallon (PEN Pau)

Date : mars 1991

Type : activité de formation FC et FI

Résumé : exploitation d'une situation adidactique liée à la soustraction

Mots-clés : addition, soustraction, écart, distance, situation adidactique .

Exemple d'une situation liée à la soustraction (aspect écarts). Jeu des règles et des bracelets

(d'après une activité proposée par J.L. Oyallon)

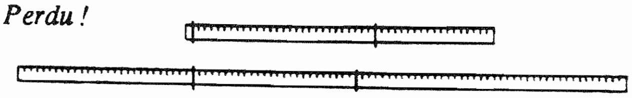
I- Matériel de base

2 baguettes en bois graduées (section 2 x 0,5 cm, type couvre-joint en menuiserie)

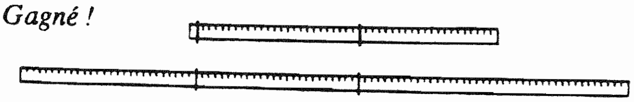
- une de 1 m 20 environ graduée de 0 à 220 (RÈGLE)
- une de 60 cm, graduée de 0 à 110 (RÉGLETTE)

Les graduations sont équidistantes, et obtenues en collant des bandes de papier sur le bois à la colle à tapisserie (cf annexe). Sur la règle (longue), deux bracelets élastiques coulissent pour matérialiser un intervalle. C'est la même chose sur la réglette (courte), sauf que l'un des bracelets est collé sur la graduation 0, le second restant mobile.

Perdu !



Gagné !



Règle du jeu

Un intervalle étant déterminé à l'aide des bracelets sur l'une des règles, on gagne lorsqu'on reproduit sur l'autre un intervalle de même longueur (le même écart). La consigne donnée au joueur est de *"faire se toucher les élastiques 2 à 2"*.

II- Variantes de la situation et savoirs visés

situation 1 :

Les bracelets sont fixés sur la règle, le joueur doit positionner le bracelet mobile sur la réglette. (Ex : élastiques sur les graduations 27 (ou **a**) et 52 (ou **b**) de la règle.)

Le joueur gagne s'il positionne le bracelet mobile de la réglette sur 25 (ou **e**).

"**objectif**" : déterminer l'écart entre deux nombres

situation 2 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **gauche** est positionné sur la règle en **a**

Le joueur doit positionner le bracelet de droite sur la règle.

"**objectif**" : trouver la somme des deux nombres a et **e**.

situation 2' :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **droite** est positionné sur la règle en **b**

Le joueur doit positionner le bracelet de gauche sur la règle.

"**objectif**" : trouver la différence des deux nombres b et **e**.

situation 3 :

Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation e, pas de bracelet positionné à l'avance sur la règle

Le joueur doit trouver une position possible des deux bracelets (parmi beaucoup).

"objectif" : produire deux nombres dont l'écart est e

savoirs visés : distance - soustraction (sens)

III - Utilisation avec les normaliens (exemple d'activité possible)

1- faire jouer les normaliens dans la situation 1 et mettre en commun les procédures utilisées.

2- mettre en évidence les savoirs concernés (soustraction : distance, écart)

3- faire imaginer quelles procédures peuvent être mises en oeuvre par les enfants et identifier les variables didactiques de la situation 1.(taille de l'écart, position des nombres...)

4- faire trouver les autres variantes du jeu.

5- mettre en évidence les caractéristiques didactiques de la situation (cf. IV)

IV- Analyse didactique de la situation de base (le jeu)

1- caractéristiques en termes de situation didactique

Dans le jeu, l'enfant est autonome et peut faire évoluer ses procédures puisque la validation de son résultat est immédiate (situation adidactique, situation d'action, situation "fondamentale" pour la notion d'écart).

2- Variables didactiques

- type de situation (1, 2-2', 3)

- nombre d'essais et autovalidation (graduations du témoin visibles par l'enfant ou non)

- taille des nombres sur la règle, positions relatives de ces nombres sur la règle par rapport aux dizaines, centaines, et extrémité reportée de la réglette (possibilité ou non de reconstituer l'intervalle de la règle sur la réglette)

- taille de l'écart.

3- Remarque

Le jeu décrit ne nécessite pas la production d'une écriture (additive ou soustractive) de la part des joueurs. Il faudra transformer la situation de base (communication, abandon de la manipulation) pour nécessiter des écritures additives ou soustractives des nombres en jeu : **e = b - a**, **b = a + e**, **a = b - e**.

Par exemple : donner la consigne "*où mettre le deuxième élastique sur la règle*" lorsque écart et un élastique sur la règle sont donnés, "*trouver toutes les possibilités*", peut amener à noter les possibilités obtenues sous la forme (connue) **a + e** et (extension du sens de -) **a - e**.

4- Exploitations possibles de la situation 3

Pour les fonctions numériques (ajouter e et retrancher e) et les techniques opératoires mentales (invariance de l'écart par translation, décomposition additive des écarts).

Annexe - bandes graduées pour l'activité "règles"

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111

112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167

168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111

112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167

168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111

Titre : Un cours sur la soustraction

Auteur : Guy Brousseau

Date : mars 1991

Résumé : recensement des divers aspects de la soustraction

Mots-clés : soustraction, procédures, dénombrement, calculs.

Un cours sur la soustraction

I - Présentation

a) Objet

- rappeler les diverses connaissances enseignées dans la scolarité obligatoire à propos de la soustraction.

- identifier les conditions de leur introduction, de leur apprentissage, de leur emploi, les difficultés rencontrées et les erreurs des élèves les plus fréquentes.

- les rattacher aux connaissances culturelles visées dans la suite de l'enseignement et utilisées dans diverses institutions (pratiques de référence).

- mettre en évidence à ce propos les théories et l'ingénierie didactique qui pourront être utiles sur d'autres sujets et qui (peut-être) permettront de traiter plus rapidement d'autres notions. (Toutes ne pourront pas être traitées à fond).

- hiérarchiser l'importance des apports aux professeurs d'école :

connaissances directes : situations, textes, programmes, méthodes, contenu, erreurs, niveau des élèves

connaissances de contrôle : (math, didactique)

b) plan

Il existe de très nombreuses approches des connaissances scolaires relatives à "la" soustraction. Chacune conduit à proposer une "typologie" plus ou moins raffinée de **cas**, de **conceptions**, d'**approches mathématiques**, de savoirs. Il importe de donner aux normaliens, évidemment, un lot de situations "standard", les connaissances nécessaires pour les mettre en oeuvre et obtenir grâce à elles les apprentissages souhaités (définis en termes de performance et de capacités). Pour cela, il est essentiel de **comprendre d'abord la fonctionnalité didactique** des différents aspects de la soustraction (problème de macro-didactique).

Il s'agit d'identifier les **catégories de situations** faisant fonctionner des aspects de la notion dans un environnement (conceptuel) cohérent.

II - Typologie fonctionnelle

1- Situations d'énumération

Enumération : appel des éléments l'un après l'autre, par exemple pour vérifier si on a pris tous les objets d'une liste.

La recherche de la construction d'un ordre total sur un ensemble fini peut conduire à activer ou à développer les schèmes ou les procédures typiques de la soustraction, indépendamment des questions numériques. Dans cet environnement, l'écriture et même la formulation de la "soustraction" ne joue que peu ou pas de rôle ; par contre l'élève va s'interroger sur les éléments constitutifs de la différence (ensembliste) $A \setminus B$, et sur les moyens de l'énumérer (appeler l'un après l'autre, une fois et une seule, tous ses éléments).

Exemple d'énumération (les situations justifiant cette activité ne sont pas données ici) :

Pour énumérer les éléments de A \ B, dans le cas général, il faut posséder une énumération de A, et, à propos de chaque élément x de A, énumérer les éléments de B pour déterminer si x figure dans l'énumération de A \ B (incrémentation de la liste A \ B). On voit que cette procédure implique une procédure d'énumération de A x B...

Il est clair que les situations d'énumération proposées aux élèves de grande section de maternelle n'impliquent l'usage d'aucune terminologie ni formulation de ce type, mais au contraire l'excluent.

Les modèles implicites d'action sont repérés par le maître grâce à l'analyse a priori des situations mais leur acquisition est obtenue exclusivement par des situations d'action, des procédures inventées ou imitées et des formulations familières.

A d'autres niveaux, il peut y avoir intérêt à identifier les méthodes d'énumération qui mobilisent des stratégies directement utilisées pour la soustraction :

- énumération relative
- énumération du complémentaire, etc...

Ces situations permettent la **mise en oeuvre** familière des procédures et des procédés d'identification des collections et l'**usage** d'un vocabulaire familier (ou personnel, privé).

2- Situations de dénombrement

Il ne s'agit que de "compter" ce dont on parle (la différence ensembliste par exemple, ou le complémentaire), il n'est pas nécessaire de **déduire** le nombre cherché de deux autres.

Ce comptage peut être indirect (dénombrement), l'ensemble est déterminé par une bijection.

Ces situations permettront "d'introduire" un vocabulaire tel que différence, complément, comparaison, puisqu'il y a déjà plusieurs concepts à l'oeuvre (cf. encadré ci-dessous) :

collections matérielles présentes	**collections seulement évoquées (propriété ou nombre)**
exemple : une boîte à oeufs a six alvéoles. 2 sont occupées par deux oeufs.	
-détermination du "nombre" (au sens large). *"Va chercher des oeufs pour remplir la boîte."*	- par la "définition" et le nombre *idem*
- désignation *"combien la boîte a de trous vides ?*	- grâce à une opération logique sur des dénominations (quelconques)
-terminologie et procédures systématiques de désignation de collections *"mets le complément."* *"combien d'oeufs pour compléter la boîte ?"*	- terminologie et connecteurs spécialisés vers la soustraction *idem*
- terminologie de désignation ou de dénombrement indirects *"Compare"* *" Quelle différence ?"* *"Quels objets as-tu en trop ?"*	- terminologie de désignation ou de dénombrement indirects *idem*

ex. : *"Paul a oublié 12 billes..."* relève du 3

3- Extensions et calculs

a) Extension à d'autres mesures que celles des ensembles finis :

il est nécessaire, pour certaines grandeurs, de faire un travail spécifique

exemple : m(A - B), masses

b) Extension à des quantités plus grandes :

Exemple :

La différence est très utilisée comme moyen d'ajustement numérique.

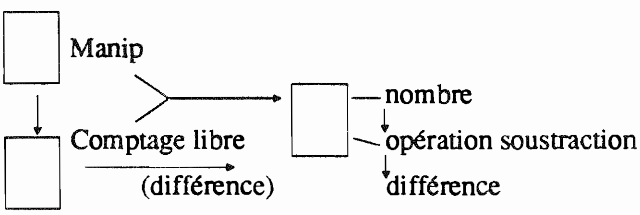
Pour construire un ensemble équipotent à un ensemble donné, il est parfois commode d'apporter sans compter une quantité approximative, puis de corriger, ajouter 3, enlever 3, rapporter 5..., il manque..., etc. L'ajustement progressif préfigure des méthodes mathématiques ultérieures. Il permet de faire manier aux élèves des collections "grandes" (non comptables) avec la connaissance des nombres petits.

c) Le calcul. Méthodes de résolution.

Suivant la taille des nombres et de la différence, on a intérêt à utiliser des méthodes différentes. Une formulation de méthode n'est pas **exigible** tant que les différentes méthodes ne sont pas identifiées comme relevant d'une même **catégorie** de problèmes.

En particulier, **le discours** associé à une méthode générale qui permet d'appuyer à tout moment les explications et les justifications exigées par le maître est un instrument didactique, un compromis, qui peut se révéler inadapté **à la fois** au calcul pratique (discours trop long qui ralentit le calcul) et à l'explication et à la compréhension de l'opération.

Les situations de ce type conduisent l'élève à rechercher le nombre voulu par un traitement des **nombres** déjà connus et non par celui des collections



L'écriture **a - b** ne joue guère de rôle sinon d'identificateur didactique de l'opération.

4- Les problèmes "de soustraction" et les formulations spécifiques

a) les situations de références qui mobilisent des conceptions spécifiques (de la soustraction) sont nombreuses, et elles sont déterminées entre autres par :

- des problèmes de types mathématiques différents : ordinal, cardinal, relations numériques, translations, ...)

- des conditions temporelles de l'action et de la description (directes ou inverses)

- des problématiques différentes (termes connus ou inconnus des relations).

- des méthodes de résolution disponibles et de leur efficacité.

b) Les élèves peuvent utiliser une typologie de problèmes qu'ils construisent eux mêmes (situation : le concours de problèmes).

Travail métacognitif avec les élèves, construction de leurs problèmes de référence et des raisons de trouver identiques ou différents les problèmes de soustraction.

c) Formulation de méthodes : officialisation des formes verbales et de leurs conditions d'emploi.

Le sigle [a - b] permet de désigner directement le cardinal d'un ensemble

Opérer sur cette écriture, exemples : [a - b] + b = a ou a - [a - b] = b

Autre usage, [a - b] programme d'exécution de l'algorithme standard, devrait venir au moment où la conceptualisation est assez avancée.

Dans cet environnement, il s'agit de manipuler des termes tels que [a - b] , mais l'égalité a - b = c en tant que relation n'a pas de motif. C'est l'objet de l'environnement suivant.

5- Environnement algébrique

Travail sur des égalités

La soustraction comme opération "algébrique"

La symétrisation d'un monoïde (semi groupe), construction de Z

Obstacles afférents

6- Environnement topologique

Sous la forme d'intervalles, les différences sont traitées comme des objets qui ne sont pas immédiatement transformés par le calcul, par exemple quand la différence représente un intervalle (longueurs et bornes)

- approximations et différences
- calculs d'erreurs, etc...

Cette typologie fonctionnelle résulte d'une tentative d'utiliser la modélisation en terme de situations dans le domaine de la "macro-didactique".

Il s'agit de regrouper les exercices et situations qui font fonctionner un même concept de la même façon en tant que moyen d'action (modèle implicite)

- avec des formulations voisines
- des motivations semblables,

Les environnements de questions reliées entre elles par des similitudes d'objets, de relations, de conditions ergonomiques, etc...

Titre : catégorisation de problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question

Rédacteur : C. Houdement (PEN Rouen)

Date : février 1991

Type : exposé théorique

Mots-clés : problèmes additifs

Catégorisation de problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question

1- les 6 grandes catégories de relations additives selon G. Vergnaud

Première catégorie :

deux mesures se composent pour donner une mesure.

Deuxième catégorie :

une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure

Troisième catégorie :

une relation relie deux mesures.

Quatrième catégorie :

deux transformations se composent pour donner une transformation.

Cinquième catégorie :

une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.

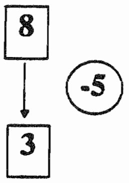
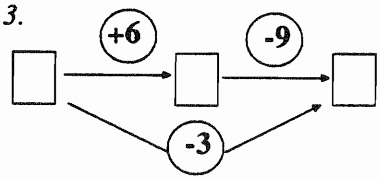
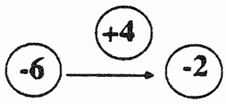
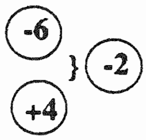
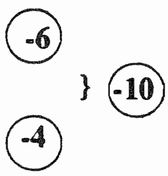
Sixième catégorie :

deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

2- Pour faire fonctionner ces catégories,

G. Vergnaud a donné les exemples suivants :

1 *Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes* $\left.\begin{array}{c}\boxed{6}\\ \boxed{8}\end{array}\right\} \boxed{14}$ $6 + 8 = 14$	I
2 *Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11.* $\boxed{7} \xrightarrow{+4} \boxed{11}$ $7 + [+4] = 11$	II
3 *Paul avait 7 billes avant de jouer. Il perd 4 billes. Il en a maintenant 3.* $\boxed{7} \xrightarrow{-4} \boxed{3}$ $7 + [-4] = 3$	II

4 *Paul a 8 billes. Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3.*  $8 + [-5] = 3$	III
5 *Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. En tout il en a perdu 3.*  $[+6] + [-9] = [-3]$	IV
6 *Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.*  $[-6] + [+4] = [-2]$	V
7 *Paul doit 6 billes à Henri, mais Henri lui en doit 4. Paul doit donc 2 billes à Henri.*  $[-6] + [+4] = [-2]$	VI
8 *Paul doit 6 billes à Henri et 4 billes à Antoine. Il doit 10 billes en tout.*  $[-6] + [-4] = [-10]$	VI

Codage Vergnaud :

- un entier dans un **rectangle** est un **naturel**

- un entier dans un **cercle** est un **relatif**

- une **accolade** représente une **composition** d'éléments de même nature

- **n** est un naturel, (-**n**) ou (+**n**) un relatif

- + est addition de deux naturels, d'un naturel et d'un relatif, de deux relatifs

- la flèche indique une **transformation** ou une **relation** , i.e. composition d'éléments de natures différentes

3 - Exemples de problèmes donnés par G. Vergnaud pour faire fonctionner le classement

a

"Jean a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné 16 billes. A la seconde partie, il en a gagné 9. Que s'est-il passé en tout ?"

b

"En 1974, la population de Paris est de 2844000 habitants. Elle a diminué de 187000 personnes en 5 ans. Combien d'habitants y avait-il en 1969 ?"

c

"Jean-Pierre a 9 bonbons. Il en donne 4 à sa petite soeur. Combien lui en reste-t-il ?"

d

"Dans une ville, l'excédent des naissances sur les décès a été de 1293 personnes entre 1950 et 1960 et de 4084 entre 1950 et 1970. Que s'est-il passé entre 1960 et 1970 ?"

e

"Henri vient de trouver 2,60 F sur le trottoir. Il les met dans son porte-monnaie. Il a alors en tout 3,90 F. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de faire sa découverte ?"

f

"Pierre a joué deux parties de billes. Au cours de la première partie, il en a gagné 7. Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les deux parties, il s'aperçoit qu'il a perdu 2 billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ?"

g

"Il y avait 17 personnes dans l'autobus, il en monte 4. Combien y en a-t-il maintenant ?"

h

"La réserve d'or d'une banque a baissé de 642 lingots au cours de l'année 1973. Au cours du premier semestre de la même année, elle avait baissé de 1031 lingots. Que s'est-il passé au cours du second semestre ?"

i

"Un parisien part en vacances en voiture. Au départ de Paris, son compteur kilométrique marque 64809 km ; à son retour, il marque 67351 km. Combien de kilomètres a-t-il parcourus en voiture pendant les vacances ?"

j

"Jean a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné 9 billes. A la seconde partie il en a perdu 16. Que s'est-il passé en tout ?"

k

"Paul vient de jouer aux billes. Il avait 41 billes avant de jouer. Il en a maintenant 29. Combien de billes a-t-il perdues ?"

l

"Jean a joué deux parties de billes. A la première partie, il a gagné 16 billes. A la seconde partie il en a perdu 9. Que s'est-il passé en tout ?"

m

"Pascal distribue un bonbon à chacun de ses 7 camarades. Il distribue ainsi 7 bonbons. Il lui en reste alors 4. Combien de bonbons avait-il avant la distribution ?"

Certains enfants raisonnent alors de la façon qu'illustre l'exemple suivant :

"Si Pascal a 10 bonbons et qu'il en donne 7, il lui en reste 3 ; ce n'est pas ça, il faut plus. Si Pascal a 11 bonbons et qu'il en donne 7, il lui en reste 4. C'est ça... il avait 11 bonbons."

4 - Etude des difficultés liées à la place de la question

La catégorisation précédente ne fonctionne pas dans un premier temps sur un texte avec question. Il faut aussi analyser le type de difficultés liées à la "place" de la question dans la relation additive (c'est-à-dire le schéma ternaire).

1- analyse de la catégorie II

$$\boxed{a} \xrightarrow{\ b\ } \boxed{c}$$

Selon que la question porte sur a, b, c, on obtient 6 classes sous-jacentes de problèmes :

	question sur		
	c	b	a
b > 0	1	2	3
b < 0	4	5	6

(cf. 3 pour retrouver des exemples)

G. Vergnaud étudie les difficultés en ces termes :

- 1 et 4

Calcul relationnel le plus simple car on applique une transformation directe à un état initial.

1 est toujours possible, 4 pas toujours ($a<|b|$)

Remarque fondamentale : dans ce schéma, la soustraction apparaît "sui generis", a une signification propre, ne dépend pas de l'introduction préalable de l'addition.

En effet perdre, donner, descendre,... ont des significations par elles mêmes en tant que transformations.

- 2 et 5

Calcul relationnel plus complexe, échecs plus tardifs, même avec des petits nombres ; pas avant fin de CP ou début de CE1.

Procédures de réussite à ces problèmes :

- celle du "complément" : rechercher ce qu'il faut ajouter ou enlever à l'état initial pour obtenir l'état final, sans faire la soustraction.

- celle de la "différence" : plus élaborée, raisonner par soustraction des deux états, donc réaliser que si b fait passer de a à c, alors b = c - a.

Les procédures employées d'abord sont celles de complément.

- 3 et 6

Calcul relationnel encore plus complexe car la solution canonique fait inverser la transformation directe et appliquer à l'état final cette transformation inverse.

Plusieurs procédures :

- celle canonique : si b fait passer de a à c, -b fait passer de c à a, donc on fait c - b = a.

- celle de complément : ne fonctionne que si b>0 et lorsque les nombres se prêtent à un calcul mental.

- celle de l'état initial hypothétique (cf. 3, m)

Conclusion : ainsi, une relation n'implique pas des calculs relationnels d'égale difficulté. De plus, dans ces conditions, il n'est pas étonnant que les enfants recourent à des procédures non canoniques.

2- analyse de la catégorie I

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{array}\right\}\ \boxed{c}$$

Seulement deux grandes classes de problèmes

1 se résout par une addition

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{array}\right\}\ \boxed{?}$$

2 se résout soit par une soustraction soit par une procédure de complément.

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a}\\ \boxed{?}\end{array}\right\}\ \boxed{c}$$

Remarque fondamentale : ici la soustraction est nécessairement comprise comme opération inverse de l'addition :

$a + x = c \qquad x = c - a$

cela constitue déjà une forme de calcul relationnel et est, au sens soustraction, un peu plus complexe que la soustraction sui generis précédente.

Ce serait donc une erreur de ne considérer que des problèmes où la soustraction est une opération déjà subordonnée à l'addition.

5 - Autres difficultés liées aux problèmes

Bien entendu, dans cette étude, il a été occulté les autres types de difficultés liées aux textes et nombres utilisés par les problèmes, notamment.

*** la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire.**

ex : dans "*j'ai 5 billes et encore 8 billes*", le calcul relationnel est le même que dans "*j'ai 177 allumettes et encore 285*", mais le calcul est plus complexe

La taille des nombres (absolue et relative) interdit parfois l'utilisation de procédures NON canoniques.

*** l'ordre, la présentation des informations :**

- sont-elles noyées dans le texte ?
- où est placée la question ?
- les temps employés éclairent-ils le texte ?...

Tout ce qui est lié à la lecture fonctionnelle du problème.

Il y a donc beaucoup de difficultés, mais, d'après Gérard Vergnaud, *"la source principale, celle qui éclaire les autres"* est cette catégorisation en 6 classes de problèmes et sous-classes de calculs relationnels.

6 - Poursuite

* Quelles classes sont pertinentes pour l'école élémentaire ?

* Faire fonctionner la grille sur des problèmes de l'école élémentaire :

- ceux du départ
- ceux d'un manuel CE 2 ou CE1,
- ceux de l'évaluation CE 2-6ème[1]

* Comparer les problèmes qui servent à évaluer, et ceux qui servent à entraîner dans les manuels, dans une classe.

* Faire fabriquer des problèmes I, II, V. Les faire passer en classe.

---

(1) A l'issue des utilisations de la grille de G. Vergnaud, on peut constater que les catégories I, II, III, IV semblent toujours pertinentes. Par contre, les catégories V et VI semblent moins bien fonctionner ; certains problèmes relèvent de plusieurs catégories, ce qui permet d'ailleurs de pointer ces catégorisations non pas comme définitives, mais comme outil d'aide à l'analyse.

Bibliographie sur la soustraction

Titre : *"La soustraction au CE1"*

Auteur : Corem

Editeur : Irem de Bordeaux (parution fin 91)

Contenu : on trouvera dans cette brochure pour les enseignants,

- le compte-rendu de la suite complète des séquences sur la soustraction au CE1 menées depuis plusieurs années à l'école expérimentale Jules Michelet (COREM) ;

- une étude détaillée de la situation fondamentale (jeu de la boîte) accompagnée des problèmes de dévolution, du rôle et de l'importance des variables didactiques.

- les contrôles et résultats des élèves sur les cinq dernières années (86 à 90) sur toute la progression suivie au CE1.

Titre : *"Sur la résolution de problèmes de soustraction au CE. Etude du rôle de la grandeur des nombres et des différentes représentations de la soustraction en vue de l'élaboration des situations didactiques."*

Auteur : Imana Katembara

Editeur : Irem de Bordeaux

Contenu : cette étude apporte des éléments de réponse aux questions suivantes :

- les procédures utilisées par les enfants de CE pour résoudre les situations soustractives ont-elles un domaine de meilleure efficacité bien déterminé ?

- comment utiliser les réponses à la question précédente pour en tirer bénéfice lors de l'enseignement de la soustraction?

- en admettant qu'il existe différentes conceptions de la soustraction, celles-ci ont-elles des relations avec certaines procédures de résolution ou certaines techniques de calcul connues ?

Titre :*"Comment les enfants apprennent à calculer"*

Auteur : Rémi Brissiaud, PEN Cergy Pontoise.

Editeur : Retz

Contenu : L'auteur postule que l'enseignant doit, dès les premiers apprentissages, favoriser le développement des compétences numériques, même sur un domaine restreint.

Il distingue le nombre comme moyen de communication des quantités et comme moyen de mise en relation des quantités. Il préconise l'usage des collections témoins (idée chère à R. Brissiaud : les collections témoins de doigts) et il propose un matériel didactique de sa conception : les réglettes avec cache. Son objectif est d'amener l'enfant du comptage au calcul pensé, via le surcomptage.

R Brissiaud se situant "au delà de Piaget", fait référence, tout en prenant ses distances, à Gelman, Fuson, Von Glaserfeld et Brousseau. Il se rapproche en fait de la méthode instrumentale de Vigotsky.

Conclusion : le plan structuré et la rédaction claire rendent la lecture aisée et agréable, même si on n'est pas obligé d'adhérer aux conceptions de l'auteur.

Niveaux concernés : Maternelle (moyenne et grande section) et CP

Titre : *"Calculs numérique et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique."*

Auteur : François Conne, psychologue, Université de Genève

Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 5-3 p269 à 332.

Contenu : l'auteur souligne l'importance des moyens symboliques servant de support aux résolutions de problèmes de type additif. Tout en s'appuyant sur les travaux de Vergnaud, il s'en distancie en montrant l'intérêt de la représentation équationnelle sur l'ensemble des entiers relatifs, que Vergnaud rejette au profit de représentations symboliques spécifiques.

Conclusion : analyse psychologique très fine de l'activité de résolution de problèmes de type additif chez des enfants de 8-10 ans.

Titre : *"L'enfant, la mathématique et la réalité."*

Auteur : G Vergnaud, psychologue

Editeur : Peter Lang, 1983, collection Exploration Recherches en Sciences de l'Education.

Contenu : l'ouvrage "analyse les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et décrit de manière détaillée différentes étapes et différents aspects du processus de mathématisation du réel, par lequel on peut conduire l'enfant à donner du sens aux concepts mathématiques et à en comprendre les propriétés."

Le chapitre IX est consacré aux problèmes de type additif, dont la solution n'exige que des additions et des soustractions. Il y est proposé une catégorisation très fine de ces problèmes.

Conclusion : Vergnaud démontre dans le chapitre IX de cet ouvrage qu'il existe plusieurs sortes de relations additives, donc plusieurs types d'additions et de soustractions, et que la soustraction ne saurait être considérée comme seconde et toujours subordonnée à l'addition.

Titre : *"La théorie des champs conceptuels."*

Auteur : G Vergnaud, psychologue

Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10/2-3 p133 à 169.

Contenu : l'auteur propose une théorie psychologique du concept, ou mieux de la conceptualisation du réel.

En ce qui concerne les problèmes de type additif, il montre la nécessité, pour les élèves, d'utiliser des représentations symboliques spécifiques, notamment pour représenter les transformations et les relations négatives.

Conclusion : cet article unifie par une théorie les différentes études proposées dans son ouvrage "*L'enfant, la mathématique et la réalité*".

Titre : *"Faire comprendre la soustraction"*

Auteur : Marcelle Pauvert

Editeur : Nathan CNDP Les pratiques de l'Education 1990

Contenu : ouvrage court et d'accès facile en trois parties

1) difficulté de l'apprentissage de la technique de la soustraction et de son utilisation dans les problèmes.

2) quelques compléments théoriques sur la résolution de problèmes, les problèmes additifs, l'évolution des programmes pour cerner le "contexte" de la soustraction.

3) quelques pistes d'activités élèves.

Conclusion : en résumé, une lecture rapide pour cerner la soustraction et cerner certaines de ses difficultés.

Titre : *"L'enfant et le nombre"*

Auteur : Michel Fayol

Editeur : Delachaux et Niestlé

Contenu : une synthèse pointue et étayée sur l'état actuel des recherches, françaises et étrangères, en psychologie cognitive, sur l'enfant et le nombre

Partie 3

Figures élémentaires de géométrie

Titre : ASSEMBLAGES DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

Auteurs : Catherine Houdement (P.E.N. Rouen) et Marie-Lise Peltier (P.E.N. Rouen)

Origine : d'après une idée de C. Véron (P.E.N. Rouen)

Date : mars 1991

Type : Présentation d'activités réalisées dans le cadre de la formation initiale et continue

Résumé : Exploitation de classements de figures géométriques obtenues par un jeu d'assemblage, pour dégager des notions de géométrie ou de mesure telles que polygone, aire, périmètre, symétrie axiale, symétrie centrale.

Mots-clés : Géométrie - polygones - jeu - axe de symétrie - centre de symétrie - logo.

ASSEMBLAGES DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- sans rappel préalable, réactiver les connaissances des normaliens sur polygone, aire, périmètre, convexité, symétrie axiale, symétrie centrale.

- illustrer l'émergence d'une propriété mathématique par le tri entre objets ayant cette propriété et objets ne l'ayant pas.

Objectifs didactiques

- pointer la notion d'enjeu : ici jeu avec un vainqueur.

- montrer une utilisation première du travail de groupe : échange et confrontation en vue de la constitution d'un matériel de travail commun.

- pointer la notion de cadre dans l'exploitation faite des classements : cadre numérique (dénombrement, mesure) et cadre géométrique.

ACTIVITÉ 1

But

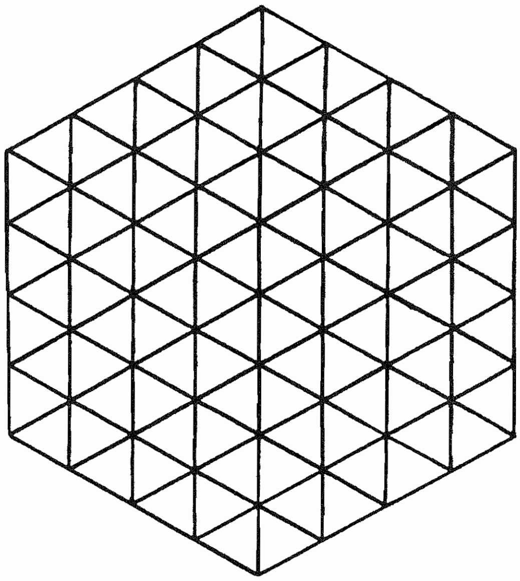
Constitution d'un stock d'assemblages de triangles colorés sur une face

Situation

Jeu à deux.

Matériel

- Grille hexagonale de 96 triangles équilatéraux
- Dés à jouer
- Crayons de couleur
- Ciseaux



* Phase 1

Consigne 1

"Vous disposez, pour deux, d'une grille constituée de cases triangulaires. Vous décidez par un jet de dé le joueur qui va commencer ; puis, alternativement, vous lancez le dé et vous coloriez autant de cases adjacentes que le nombre de points indiqué sur le dé, en essayant de faire le maximum d'assemblages différents.

Des assemblages adjacents obtenus par des jets de dé différents doivent être de couleurs différentes. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.

Le gagnant de cette phase est celui qui finit le premier le coloriage de la grille."

Remarques

1 - On peut demander aux joueurs de remplir une feuille de route avec les points tirés par chacun en cochant ceux qui n'ont pas pu être joués, ceci afin de permettre une vérification en fin de partie.

2 - On peut également demander aux joueurs de mettre un signe de reconnaissance sur les assemblages qu'ils ont eux-mêmes coloriés (couleurs attribuées à chacun par exemple).

3 - On observe différentes stratégies chez les normaliens. Certains partent d'un bord, d'autres du centre ; certains collaborent, d'autres jouent de façon dispersée jusqu'au moment où ils constatent que cette stratégie est bloquante pour les deux joueurs.

* Phase 2

Objectif

Distinguer la superposition sans retournement ("mêmes formes") de la superposition après retournement ("formes symétriques")

Consigne 2

"Lorsque la grille est entièrement coloriée, vous découpez les différents assemblages et vous gardez un seul exemplaire de chaque assemblage (deux assemblages qui ne sont superposables qu'après retournement sont considérés comme distincts).

Le groupe gagnant de cette phase est celui qui a obtenu le maximum d'assemblages différents."

Remarque

Dans cette phase, il est important que les assemblages aient été coloriés pour distinguer les superpositions directes des superpositions après retournement.

* Phase 3

Objectifs

- Réinvestir l'analyse précédente : distinction entre mêmes formes et formes symétriques.

- Augmenter le stock de pièces.

Consigne 3

"Par groupes de 4 (puis de 8), vous comparez les formes retenues et vous conservez un seul modèle de chaque sorte."

Remarque

A l'issue de cette phase, on peut comptabiliser le nombre d'assemblages distincts de chaque groupe. On peut également demander à chaque groupe de constituer un deuxième jeu de pièces pour avoir plus de matériel pour la suite.

Il est intéressant de pointer le fait qu'à chaque regroupement le nombre d'assemblages distincts augmente, mais la recherche exhaustive de tous les assemblages possibles n'est pas un but de l'activité.

ACTIVITÉ 2

But

Faire émerger par classement un certain nombre de propriétés des assemblages obtenus.

1 - Déroulement

Matériel

Le jeu de pièces obtenues lors de la consigne 3

Organisation

Par groupes de 4 (ou de 8)

Consigne

"Avec le jeu de pièces que vous avez obtenues précédemment, vous allez proposer divers classements de ces pièces en essayant de préciser le critère qui vous permet de réaliser ce classement.

Dans chaque groupe un secrétaire note les critères retenus et les classements correspondants."

Remarque

Je précise si nécessaire les conditions requises pour qu'il s'agisse d'un classement effectif.

Mise en commun

Chaque groupe vient présenter les classements réalisés

2 - Les divers classements : analyse et exploitation en termes de propriétés mathématiques

a) Le classement par le **nombre de triangles** constituant l'assemblage permet de pointer la notion d'aire (si on choisit le triangle de base comme unité d'aire, la mesure de l'aire de l'assemblage est le nombre de triangles utilisés)

b) Le classement par le **nombre de côtés** permet de préciser l'origine du vocabulaire lié aux polygones, de l'associer au classement par le nombre de sommets et de rappeler la propriété pour les polygones : nombre de sommets = nombre de côtés.

c) Le classement par le **nombre de côtés de triangles de base** dans le contour de l'assemblage permet de pointer la notion de périmètre et notamment de différencier numériquement les notions de périmètre et d'aire. (On constate que deux assemblages peuvent avoir même périmètre sans avoir la même aire, d'où une nouvelle question : peut-on trouver des assemblages ayant même aire et des périmètres différents, des assemblages ayant même aire, même périmètre mais de formes différentes ?)

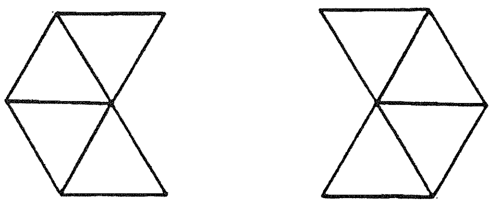
d) L'existence de figures superposables non pas directement mais après retournement est toujours constatée. Deux telles figures seront désignées par la suite par l'expression : "figures jumelles".

Le classement par **existence de figures jumelles** est donc retravaillé collectivement même s'il n'est pas proposé par les différents groupes.

Consigne : *"Dans chaque groupe vous effectuez le classement : figures ayant leur jumelle, et les autres ; et pour chaque figure n'ayant pas de jumelle dans le stock de vos pièces, vous regardez s'il est possible de construire sa jumelle."*

Constat 1 : Deux figures jumelles se superposent seulement après retournement

Constat 2 : Certaines figures n'admettent pas de jumelle. (Ce n'est pas évident pour tous les normaliens. Par exemple les deux assemblages ci-dessous leur paraissent jumeaux alors qu'ils se superposent, même sans retournement).



Consigne : *"Dégagez les particularités des figures n'admettant pas de figure jumelle".*

Il s'agit ici de dégager la notion d'axe de symétrie : les figures n'ayant pas de jumelle admettent au moins un axe de symétrie.

e) Cette phase peut être prolongée par un classement suivant le **nombre d'axes de symétrie**.

f) **Autres classements**, proposés ou imposés :

- figures convexes, figures non convexes
- figures ayant un centre de symétrie, figures n'en ayant pas (par coïncidence avec l'empreinte après demi-tour). Mise en relation avec la parité du nombre d'axes de symétrie
- assemblages réalisant ou non un patron de solide (tri par anticipation, validation éventuelle par construction)

3 - L'institutionnalisation choisie

- Notion d'axe de symétrie, notion d'invariant (figures ayant des axes de symétrie)
- Vers la symétrie axiale : notion de transformation (figures se déduisant l'une de l'autre par symétrie axiale). La notion de symétrie axiale est souvent bien connue des normaliens. J'insiste donc surtout sur la distinction entre la notion d'invariant et celle de transformation.
- Lien avec la symétrie centrale

4 - Mini-analyse didactique

- Notion d'enjeu
- Notion de cadres mathématiques
- Notion de classement permettant l'émergence de propriétés

5 - Travail individuel

- Rédiger une fiche de préparation pour une activité-élèves à partir d'assemblages de figures (carrés, triangles rectangles isocèles ou triangles équilatéraux)
- Construire un jeu de cartes permettant un travail de reconnaissance de formes à partir des assemblages obtenus. (Le jeu est constitué de cartes portant des assemblages jumeaux dans des dispositions variées et d'un assemblage n'ayant pas de jumeau). Proposer diverses règles de jeu (ex. : jeu de mariage, mémory,...)

ACTIVITÉ 3

Prolongement possible en LOGO

(Situation construite à partir d'un échange avec Mme S. Dupuis, I.E.N. à Neufchâtel - 76)

Objectif

- Etude de triangles réguliers ; propriétés angulaires
- Comparaison d'unités de mesure de longueur

Reproduction d'assemblages à l'écran

- En mode direct avec les primitives usuelles
- En mode direct avec la primitive ∇
- En mode programme avec deux options :

. le professeur impose le côté du triangle-écran en pas de tortue

. le professeur demande un triangle-écran superposable au triangle du jeu. On pourra ensuite dans ce cas proposer une étude des périmètres des différents assemblages en fonction de l'unité de longueur choisie : côté de triangle équilatéral, cm, pas de tortue, et pointer la proportionnalité entre les différentes mesures obtenues.

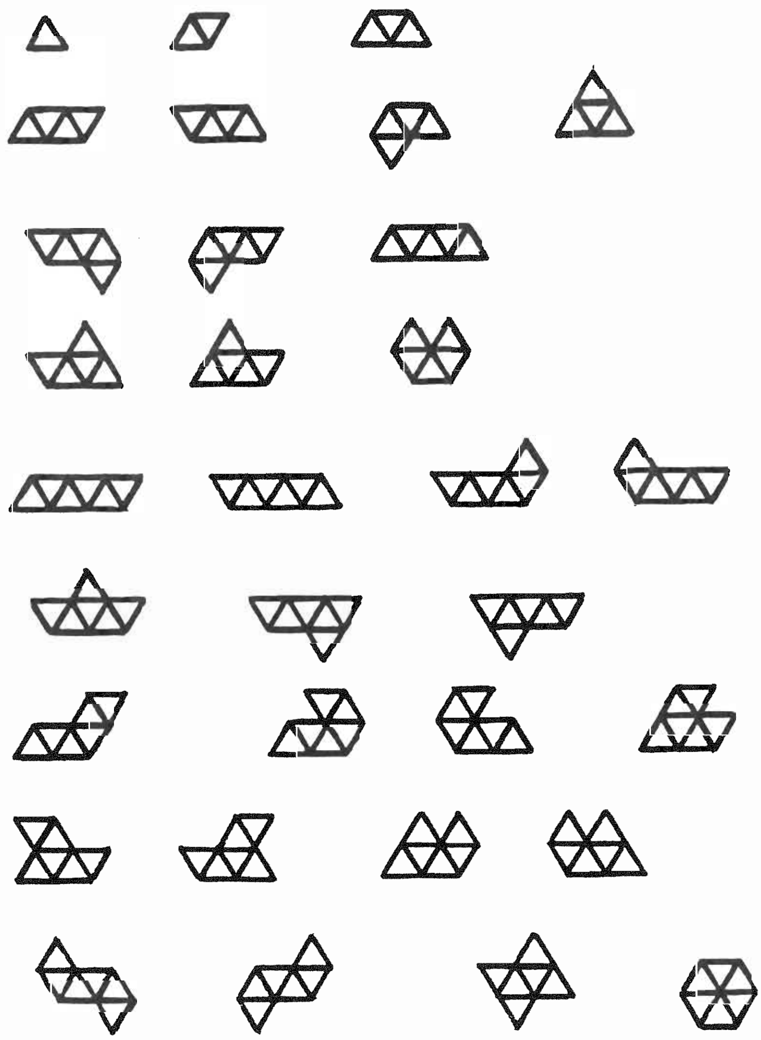
Fabrication d'assemblages

- avec contrainte de périmètre
- avec contrainte d'aire

Travail individuel

Fabrication d'une situation de classe exploitant une démarche analogue.

Recensement des différents assemblages pouvant être obtenus



Titre : Activités géométriques sur quadrillage

Auteur : J.C. DUCORAIL (I.E.N. Bordeaux)

Date : Mars 1991

Type : Activités conduites en stage de formation d'instituteurs

Résumé : A partir de constructions sur quadrillage, on fait apparaître un certain nombre d'outils ou de notions géométriques dans une dimension dynamique et pas seulement comme objets d'étude statique.

Mots-clés : Quadrillage, géométrie, transformations du plan, translation, symétrie orthogonale, perpendiculaire.

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES SUR QUADRILLAGE

Le quadrillage est un "objet social" et un "outil" connu de tous les élèves, utilisé quotidiennement pour... écrire essentiellement, quelquefois pour dessiner, rarement pour faire des mathématiques. Pourtant les activités géométriques à l'école élémentaire prévoient des exercices sur quadrillage (repérage des noeuds, dessin, reproduction de figures, déplacements, ...).

Ces activités sont souvent présentées et mises en oeuvre de façon très simple, voire simpliste (cf. exercices proposés dans les ouvrages et portant essentiellement sur le repérage, le codage de déplacements, la reproduction d'une figure). C'est une utilisation très statique du quadrillage qui est demandée aux élèves.

Pourtant, le quadrillage (évidemment régulier et orthogonal) peut être un support d'activités très riches pour "faire" de la géométrie aussi bien à l'école élémentaire qu'au collège. Il s'agit d'utiliser cet outil comme un instrument de traçage associé à une règle non graduée et à un crayon. Les tracés réalisés, ou à réaliser, n'ont de sens que s'ils sont inscrits à la fois dans une situation de nécessité et dans une situation de recherche ou dans une situation-problème.

Le "dessin géométrique" n'a pas de sens en soi. Les constructions évoquées ci-dessous ont pour but non seulement d'utiliser des instruments inhabituels mais surtout de faire apparaître un certain nombre d'outils ou de notions géométriques dans une dimension dynamique et pas seulement comme objets d'étude statique.

UTILISATION AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION INITIALE

Le but des activités proposées est,

d'une part :

- de faire de la géométrie,
- de mobiliser différemment les savoirs acquis,
- d'acquérir éventuellement de nouveaux savoirs,

et, d'autre part:

- d'étudier les transpositions possibles pour des activités avec les élèves,
- de pointer les variables didactiques.

En fin du document, sont décrites d'autres pistes de travail qui permettent de faire des mathématiques avec des enseignants mais qui ne se prêtent pas facilement à une transposition pour l'école élémentaire. C'est volontairement que nous n'avons pas développé ici ces parties.

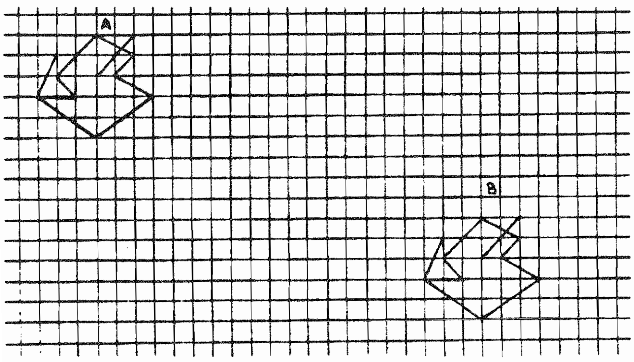
TRANSLATION DANS LE PLAN

1) Situation de départ possible

C'est une situation de communication. Le groupe émetteur possède une feuille quadrillée avec une figure et son transformé par translation, le groupe récepteur dispose d'une feuille quadrillée de même format mais avec seulement la figure de départ. Cette figure doit être suffisamment complexe pour que le groupe émetteur ne soit pas tenté d'en faire une description à partir d'un point.

La consigne donnée aux émetteurs est que leur message permette au groupe récepteur de tracer la figure B à partir de la figure A de telle façon que, après réalisation, les feuilles des deux groupes soient exactement superposables.

La difficulté est de varier les situations et la complexité des figures pour faire apparaître le message court correspondant à la translation : on passe de tous les points de la figure A à tous les points de la figure B de la même façon. Vous trouverez ci-dessous un exemple de situation de départ.



2) Recherches autour de la translation

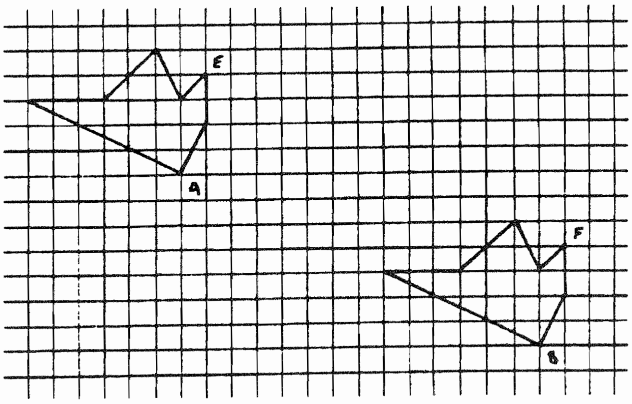
La translation étant définie par un bipoint (forcément deux noeuds du quadrillage), il s'agit maintenant d'appliquer ce déplacement sur le quadrillage à divers "objets":

- point,
- segment,
- droite,
- toute figure définie par *n* noeuds du quadrillage.

A partir de là on peut chercher ce que conserve la translation dans une figure. On peut chercher tous les parallélogrammes que l'on peut trouver à partir d'une figure et de son transformé.

Si on passe de E à F comme on passe de A à B, peut-on prévoir le nombre de parallélogrammes que l'on peut ensuite tracer?

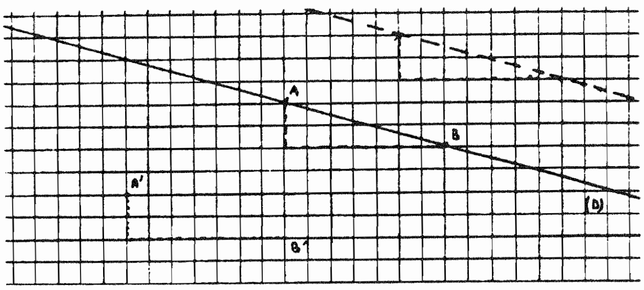
On peut certainement s'intéresser aux parallélogrammes et à leurs diagonales, constater aussi que si (A,B) définit une translation, (A,E) en définit une autre, etc...



De la même façon on peut étudier la composition de deux translations, ne serait-ce que pour constater que la première "définition" vraisemblablement trouvée (on passe de A à B en descendant de 7 carreaux et en allant à droite de 14 carreaux) est déjà une composition de translations.

3) Intérêt de la translation

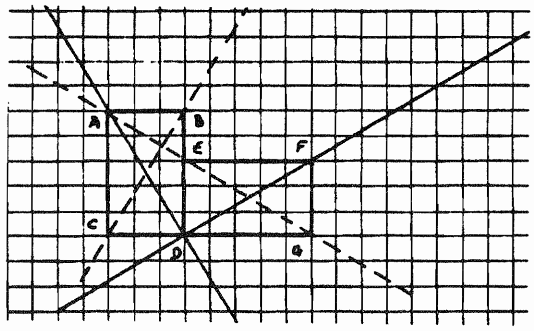
L'intérêt de tout ce qui précède est d'arriver à l'idée que le quadrillage permet de tracer des parallèles en utilisant uniquement les noeuds du quadrillage. Autrement dit, pour toute droite (D) passant par deux noeuds du quadrillage, il est possible de tracer une parallèle à (D) à partir de n'importe quel noeud du quadrillage.



On retrouve ici la technique du tracé avec le té et l'équerre.

TRACER UNE PERPENDICULAIRE

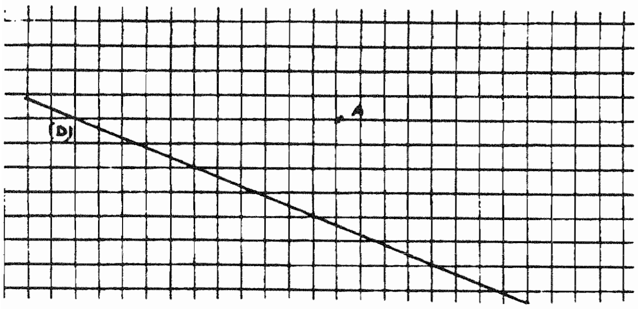
Il s'agit maintenant d'utiliser toujours le quadrillage pour tracer la perpendiculaire à une droite passant par deux noeuds du quadrillage à partir de n'importe quel autre noeud. Ceci revient à se pencher sur les propriétés de la figure ci-dessous (qui est en fait une rotation de 90 degrés d'un rectangle autour d'un sommet) et de s'intéresser plus particulièrement aux diagonales AD et DF, puis à BC et EG.



Quelques situations-problèmes possibles pour aborder cette question:

- on pourrait certes poser le problème comme ci-dessous :

Soit une droite (D) et un point A, tracer la perpendiculaire à (D) passant par A.

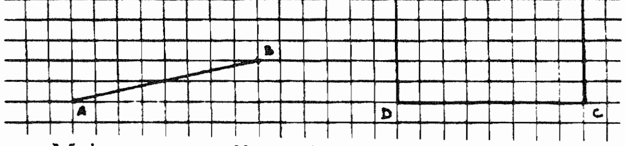


- on peut également s'intéresser aux carrés que le quadrillage permet de tracer:

- Tracer un carré quelconque dont les côtés ne sont pas parallèles aux directions du quadrillage

- Tracer un carré de côté AB

- Tracer un carré à l'intérieur d'un carré ABCD et dont les sommets sont sur [AB], [BC], [CD], [AD].

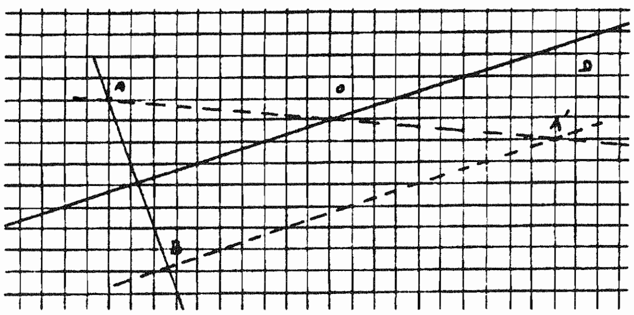


Maintenant que l'on sait, sur un quadrillage, tracer parallèles et perpendiculaires, on peut "étudier" les transformations du plan.

PISTES POUR FAIRE DES MATHÉMATIQUES AVEC UN QUADRILLAGE

Symétrie orthogonale

Si (D) est l'axe de symétrie (passant par 2 noeuds) et A est le point dont on cherche le transformé, on peut toujours tracer la perpendiculaire à (D) passant par A. Comme on ne dispose pas de moyen de report des longueurs, il faut bien trouver "autre chose". Une solution (ce n'est pas la seule) consiste à prendre un point O sur (D), à construire A' symétrique de A par rapport à O, puis à tracer par A' la parallèle à (D). Cette construction est toujours possible puisque A, O, A' sont des noeuds du quadrillage. De ce fait, tracer la parallèle à (D) est toujours possible.



Il y a d'autres solutions.

Rotation

Sur le quadrillage, elle sera simplement définie par le centre et par deux points symétriques par rapport à un des axes du quadrillage passant par le centre de rotation.

Homothétie

L'homothétie sera définie par trois noeuds alignés du quadrillage (le centre, un point et son transformé).

N.B:

On n'a évidemment pas toutes les symétries, rotations, homothéties de cette manière puisqu'on n'obtient que des caractéristiques rationnelles.

Les figures ne sont pas rigoureusement exactes, la photocopie transformant les carrés en rectangles non carrés!

Titre : Quadrilatères particuliers

Auteur : Hervé Péault (PEN Angers)

Date : février 1991

Type : présentation d'activités réalisées dans le cadre de la formation initiale

Résumé : A partir de quelques activités visant à resituer les connaissances géométriques sur les quadrilatères, essai d'analyse didactique et étude comparée de séquences proposées par des manuels.

Mots-clés : Géométrie - quadrilatères

QUADRILATÈRES PARTICULIERS

Parmi les figures géométriques étudiées à l'école élémentaire, les quadrilatères occupent une place importante.

J'ai choisi cette année d'y consacrer plusieurs séances en FP2 (4 fois 2 h, plus une cinquième séance ultérieure sur le thème des triangles qui était à la fois un prolongement du travail et un moyen d'évaluation).

Objectifs

- Permettre à chacun de se réapproprier les connaissances sur les quadrilatères particuliers
- Faire vivre sur ce thème des activités à base de problèmes
- Faire analyser ces activités en les resituant dans une conception de l'apprentissage et travailler à cette occasion quelques concepts de didactique (peu abordés en 1 année pour certains des groupes concernés)
- Donner les moyens d'analyser d'autres activités (notamment extraits de manuels) à partir de ces concepts de didactique

Ces objectifs ont été présentés dès le départ aux normaliens

Déroulement

1) Activités (4 h)

2) Analyse des activités (2 h)

3) Etude d'extraits de manuels sur les quadrilatères particuliers (2 h)

4) Etude d'extraits de manuels sur les triangles (2 h)

I. - ACTIVITÉS

Activité 1

Apprentissage visé

Savoir reconnaître et définir par des conditions nécessaires et suffisantes les différents types de quadrilatères

Prendre conscience des relations entre ces différents types.

Situation

Deviner un quadrilatère en posant des questions

Matériel

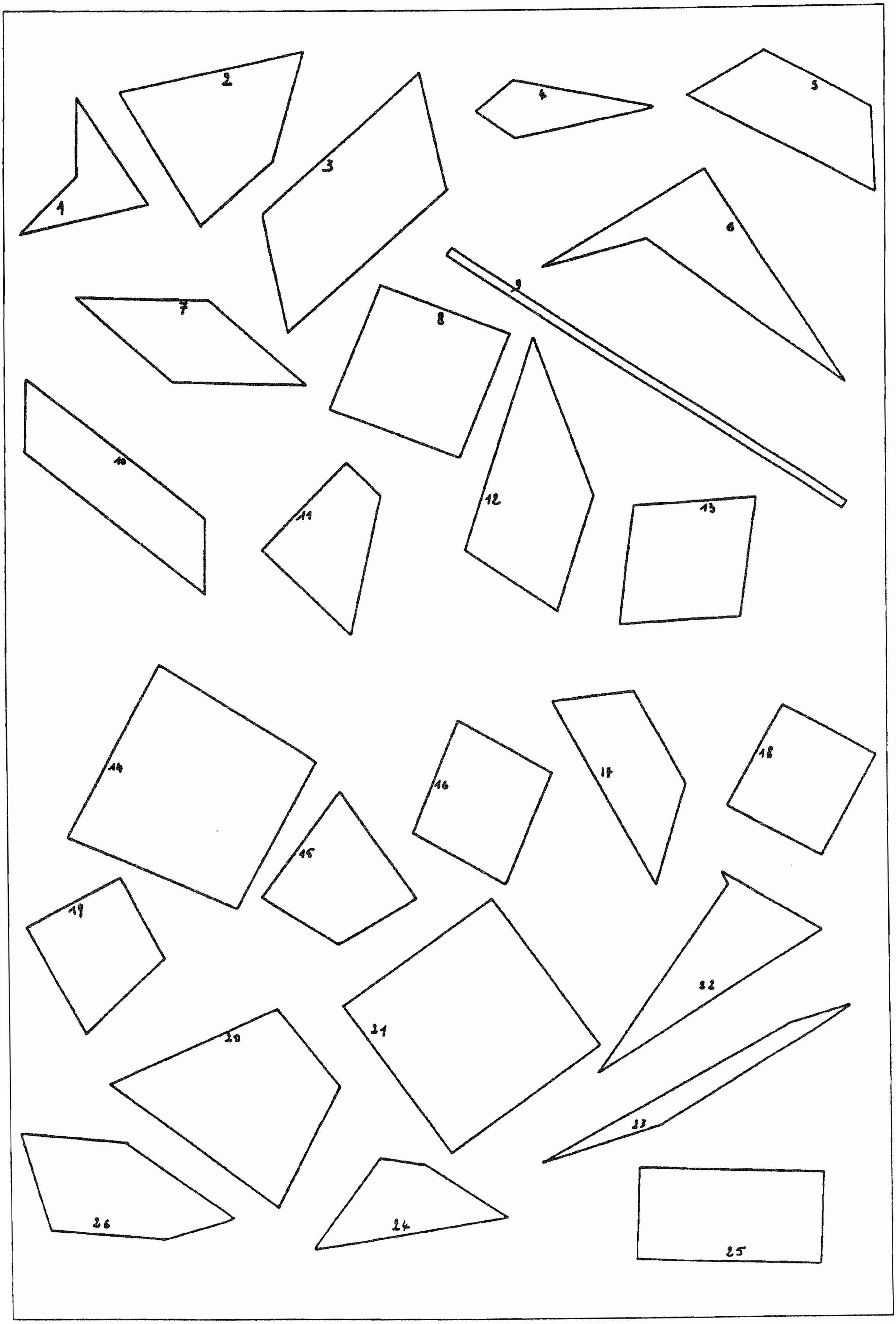
Chacun dispose d'une feuille sur laquelle sont dessinés 25 quadrilatères divers (cf page suivante). Un intrus (le 26) est un pentagone.

Organisation

par groupes de 3 ou 4

Consigne

"J'ai choisi un des 25 quadrilatères de la feuille; vous devez deviner lequel. Pour cela, vous devrez me poser par écrit des questions (n'importe lesquelles sauf demander le numéro); je répondrai par écrit à toute question, pourvu qu'elle ait du sens. Quand une équipe sera sûre d'avoir trouvé, elle indiquera le numéro de la figure. Essayez à la fois d'être rapides et de poser un minimum de questions."


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

Déroulement

Une première fois, la figure choisie est le n 10 (parallélogramme non rectangle), une seconde fois le 11 (trapèze rectangle avec 2 côtés consécutifs égaux) avec la consigne complémentaire de ne pas utiliser les dénominations usuelles des quadrilatères. Ceux qui terminent plus tôt sont invités à rechercher un système de questions qui, a priori, permettraient de reconnaître n'importe quel quadrilatère.

Remarques

- Le complément de consigne pour la deuxième recherche (ne pas utiliser les noms usuels des quadrilatères) s'est avéré inutile, aucun groupe n'ayant fait référence aux noms de quadrilatères (effet de contrat ?)

- Perpendicularité et parallélisme sont presque toujours estimés "à vue", ce qui conduira à des erreurs d'appréciation pour certaines figures

- La distinction entre le 3 et le 10 ne pouvait se faire qu'à partir de considérations de longueurs ou d'angles. Aucune demande de mesure n'a été formulée (effet de contrat ?), les questions pour permettre la différenciation étant le plus souvent du genre "est-ce que le plus grand côté mesure moins de trois fois plus que le petit côté?"

Mise en commun

Elle concerne le listage des différents critères utilisés (convexité, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueurs, égalité d'angles, diagonales - auxquelles je fais référence si aucun groupe ne les a utilisées), l'examen de quelques questionnements (notamment ceux pour lesquels j'avais repéré des erreurs ou des redondances) et se prolonge à partir d'une nouvelle consigne

Nouvelle consigne pour les groupes

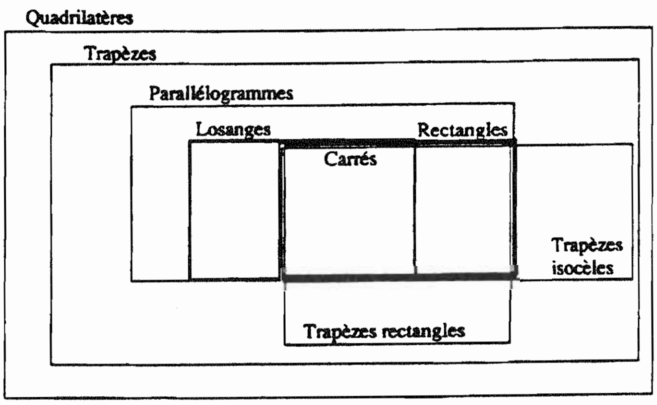
"On ne conserve que les critères de convexité, parallélisme de côtés, perpendicularité de côtés, égalité de côtés opposés, égalité d'angles.

1) Classer les figures en mettant ensemble celles qui sont indiscernables lorsqu'on s'en tient à ces seuls critères

2) Indiquer pour chaque classe une ou plusieurs caractérisations suffisantes à l'aide de ces critères. Attribuer les noms génériques, lorsqu'ils sont connus, aux classes ou groupements de classes."

Mise en commun

Elle vise à caractériser de façon précise (conditions nécessaires et suffisantes) différents types de quadrilatères : quadrilatères convexes, trapèzes, trapèzes rectangles, trapèzes isocèles, parallélogrammes, rectangles, losanges, carrés, et à repérer les inclusions diverses. Celles-ci sont récapitulées par un schéma du type :



Activité 2

Apprentissage visé

Savoir organiser des informations géométriques sur des quadrilatères et en tirer d'autres par déduction

Réaliser des constructions élémentaires à l'aide des instruments usuels.

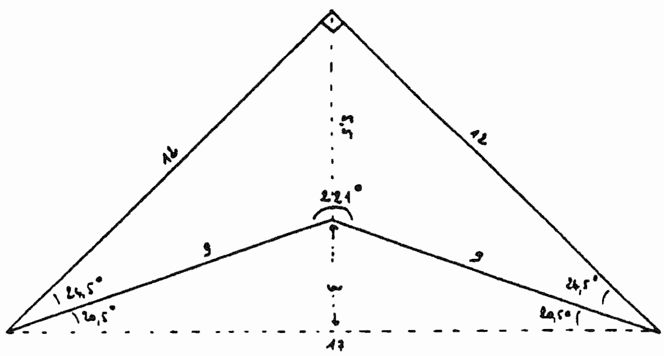
Situation

Reproduire un quadrilatère caché, à partir d'informations données ou à demander

Matériel

La figure ci-dessous, cachée

Chaque groupe dispose de papier blanc et de tous les instruments de tracé qu'il désire.



Organisation

par petits groupes

Consigne

"Sur une feuille j'ai dessiné un quadrilatère. Vous devez reproduire ce quadrilatère. Le dessin que vous réaliserez devra être superposable au mien. On vérifiera par transparence.

Vous ne pouvez voir mon dessin, mais je vous livre une partie des informations le concernant :

- il a au moins deux côtés perpendiculaires
- il a au moins deux angles égaux
- les côtés sont égaux deux à deux
- une diagonale mesure 17 cm
- il a au moins un axe de symétrie
- l'un des côtés mesure 9 cm

Il n'est pas sûr que les informations soient suffisantes ; si vous estimez qu'il vous en manque, vous pouvez poser par écrit de nouvelles questions (sans utiliser des noms de polygones), mais le moins possible. Chaque question supplémentaire donne un point de pénalisation, plus un autre si la demande porte sur une mesure de longueur. Si votre dessin me paraît trop éloigné de l'original, vous ne serez pas autorisés à le vérifier et vous écoperez de 3 points de pénalité."

Mise en commun

Elle porte sur les déductions effectuées et les erreurs. Notamment, la plupart estiment d'emblée qu'il s'agit d'un quadrilatère particulier (effet de contrat ?) et donc d'un rectangle, puis d'un quadrilatère convexe de type *"cerf-volant"*. Pour beaucoup, il faut longtemps avant de penser qu'il puisse s'agir d'une figure concave.

Par ailleurs, à la question *"les diagonales se coupent-elles en leurs milieux ?"* j'ai répondu *"au milieu de l'une d'elles seulement"*. Cette réponse a soulevé par la suite des contestations et nous a amenés à rechercher des mots du type "diagonale" (diamètre, côté, hauteur, médiane,...) susceptibles d'être utilisés tantôt pour désigner un segment tantôt pour désigner la droite support.

Activité 3

(d'après une fiche de J. Bolon)

Apprentissage visé

- savoir organiser une construction géométrique de quadrilatère en fonction des informations disponibles

- pouvoir envisager diverses méthodes de construction

Situation

Elaborer des consignes pour la construction d'un quadrilatère avec des contraintes

Organisation

par groupes de 2

Consigne

" Je vais donner à chaque groupe un papier précisant une construction à faire faire par un autre groupe (il s'agit chaque fois d'un quadrilatère). A partir de ce papier, vous devrez rédiger un message permettant au groupe destinataire de réaliser la construction.

Aucun terme de désignation de polygone (trapèze, carré, etc..) ne devra être employé dans le message. Celui-ci devra être rédigé sous forme de succession d'actions élémentaires dont chacune sera de l'un des types suivants :

- marquer un point
- tracer un segment de longueur donnée ou joignant 2 points donnés
- tracer une droite passant par 2 points
- reporter une longueur
- tracer une perpendiculaire à une droite passant par un point donné
- tracer un cercle ou un arc de cercle de centre et de rayon donnés.

Les messages seront échangés; pour la construction, vous pourrez utiliser la règle graduée, l'équerre et le compas; une fois la construction réalisée, les récepteurs essaieront de deviner quelle était la consigne donnée aux émetteurs et on comparera les réalisations et les messages."

Constructions à effectuer

- faire construire un carré ayant une diagonale de 10 cm

- faire construire un parallélogramme dont un côté mesure 5 cm et une diagonale 10 cm

- faire construire un losange dont les côtés mesurent 5 cm

- faire construire un trapèze ni rectangle ni isocèle dont les côtés parallèles mesurent 4 cm et 7 cm

- faire construire un parallélogramme dont une diagonale mesure 5 cm et l'autre 10 cm

- faire construire un parallélogramme non rectangle dont les côtés mesurent 5 cm et 10 cm

- faire construire un trapèze isocèle dont les côtés parallèles sont distants de cm et dont l'un mesure 7 cm

- faire construire un rectangle ayant un côté de 5 cm et une diagonale de 10 cm

- faire construire un losange non carré ayant une diagonale de 8 cm

Mise en commun

Elle s'effectue après que chaque groupe ait réalisé au moins une construction. Les plus rapides sont chargés d'écrire un message pour une nouvelle construction.

Plusieurs messages sont analysés avec chaque fois la question suivante renvoyée à tous : *"existe-t-il à votre avis une méthode de construction plus simple ?"*

Elle s'est prolongée autour de problèmes rencontrés : *"quelles procédures pour tracer la parallèle à une droite passant par un point donné ?", "quelles procédures pour tracer le milieu d'un segment?"...*

II. - ANALYSE DES ACTIVITÉS

Elle est menée de façon collective à partir du questionnaire ci-dessous. Pour chaque question, chacun prend un temps de réflexion et on note toutes les idées. J'essaie d'aider à synthétiser. Le débat ne suit pas vraiment l'ordonnancement des questions.

1) A travers ces 3 activités, quelles connaissances mathématiques, quels savoir-faire ont été étudiés? Estimez-vous que cela a été l'occasion pour vous d'un apprentissage?

2) Parmi les termes suivants ou d'autres encore, lesquels vous paraissent caractériser le mieux la façon dont vous avez travaillé: observation, initiative, manipulation, écoute, activité, imitation, recherche, application, passivité, motivation, mémorisation, apprentissage, jeu, invention,... Lorsque plusieurs vous paraissent convenir, en quel ordre et dans quelle mesure les dispositions correspondantes vous paraissent avoir été sollicitées?

3) A votre avis, ces 3 activités ont-elles été conçues dans le même esprit? Qu'est-ce que pourrait les caractériser par rapport à d'autres façons d'enseigner sur le même sujet ?

4) Au cours de ces activités, vous est-il arrivé de vous imposer des contraintes qui n'avaient pas été explicitement énoncées?

5) Pour chacun des problèmes posés lors de ces activités, essayez de retrouver les différentes procédures de résolution qui sont apparues. Ces procédures étaient-elles conditionnées par la façon dont le problème était posé? Imaginez des "variations" de ces problèmes qui auraient entraîné d'autres modes de résolution.

6) Comment avez-vous su si votre travail était réussi ou non? Par une appréciation extérieure ou par vous-mêmes? comment?

Le débat autour de ces questions donne un support pour les notions de "problème", "situation d'apprentissage", procédures de résolution", "variables didactiques", "validation", "institutionnalisation", "contrat didactique", "connaissances outils/ connaissances objets".

Très rapidement viennent se greffer des questions liées à la transposition à l'école : *"Peut-on faire ça dans sa classe? ou du moins travailler de façon analogue? Ne serait-ce pas coûteux en temps et difficile à mettre en oeuvre?..."* et ce travail est parfois perçu plus en tant que nouvelle norme de méthode d'enseignement ("il nous montre comment il faut faire") qu'en tant que moyen de s'approprier des instruments d'analyse.

III. - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES QUADRILATÈRES

Suivant les cas, j'ai proposé des extraits de manuels de CE1 sur le thème "carré, rectangle" ou des extraits de manuels de CM2 sur le thème "quadrilatères particuliers".

Modalités de travail

- lecture individuelle de chacun des extraits
- étude par groupes du questionnaire proposé
- mise en commun

Questionnaire proposé

- Quelles sont, pour chacun des extraits, les connaissances et compétences auxquelles il est fait référence ?

- Y a-t-il des cas où les auteurs prévoient que l'apprentissage s'effectue à partir de problèmes que les enfants doivent résoudre?

- Dans ces cas, énoncer les problèmes et préciser les procédures de résolution qu'on peut attendre des enfants ainsi que les variables didactiques de la situation.

- Comment peut être envisagée dans chaque cas la validation du travail des enfants ?

- Quel est chaque fois le savoir institutionnalisé ? A quel moment ?

- Pour autant qu'on puisse en juger sur cette documentation parcellaire, voyez-vous des différences, entre les différents manuels, dans les conceptions sous-jacentes de l'apprentissage ?

- Comment envisageriez-vous une ou plusieurs séquences sur le même thème, au même niveau ?

Extraits utilisés

- *"Mathématique contemporaine CE1"* Thirioux (Magnard, 1975) p. 136-137

- *"Autour du carré à partir du cube"* (séquence R.T.S. -CE1 - juin 1975)

- *"Vivre les mathématiques CE1"* Jardy... (A.C. Bourrelier 1986) p. 77

- *"Objectif calcul CE1"* Clavier... (Hatier 1988) p. 183-184

- *"L'Univers mathématique CE1"* Goergler... (L'école 1979) p.236-237

IV. - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES TRIANGLES

Modalité de travail

Travail écrit individuel

Les étudiants disposent du questionnaire et des extraits indiqués ci-dessous.

Questionnaire

1) Les triangles particuliers auxquels on s'intéresse généralement sont :

*- les triangles **"isocèles"** (qu'on peut caractériser par l'égalité d'au moins 2 côtés)*

*- les triangles **"réguliers"** dits **"équilatéraux"** (qu'on peut caractériser par l'égalité des 3 côtés)*

*- les triangles **"rectangles"** (qu'on peut caractériser par la présence d'un angle droit).*

Réalisez un schéma analogue à celui réalisé pour les quadrilatères, mettant en évidence ces différentes catégories et leurs éventuels recoupements.

2) Vous trouverez ci-joints 4 extraits de manuels de CM2 concernant l'étude des triangles.

a) Pour chacun d'eux, quels sont les connaissances et les savoir-faire auxquels il est fait référence ? Quelles remarques vous inspirent les propositions des différents auteurs ?

b) En vous inspirant ou non de ces extraits, donnez des exemples de situations-problèmes qui vous paraissent pertinentes pour un apprentissage sur les triangles avec des enfants de CM2

c) Développez l'un ou l'autre de ces exemples dans la perspective d'une mise en oeuvre dans une classe, en précisant vos choix didactiques.

Exploitation

Lors d'une séance ultérieure, nous sommes revenus sur ce travail à partir d'un document que j'ai proposé, apportant des éléments de réponse aux questions précédentes.

Extraits utilisés

- *"Math et calcul CM2"* Eiller (Hachette 1988) p. 154-155

- *" Objectif calcul CM2"* Clavier... (Hachette 1988) p. 44-45

- *"La mathématique au CM1 et 2"* Caparros (Bordas 1981) p. 110-111

- *"Maths CM2 - Calcul et géométrie"* Chapuis (Nathan 1989) p. 54-55

Titre : VIV(R)E LE TRIANGLE A L'ÉCOLE MATERNELLE

Auteur : Claude RIMBAULT (P.E.N. St Brieuc)

Date : 1991

Type : Support de conférence pédagogique

Résumé : Sensibilisation des maîtres au caractère réducteur de certaines conceptions du triangle et propositions d'activités pour l'école maternelle.

Mots-clés : Géométrie, triangle, maternelle

VIV(R)E LE TRIANGLE A L'ÉCOLE MATERNELLE

Mode d'emploi

Ce texte a été le support d'une conférence pédagogique (durée : 3 heures) à l'intention d'enseignants d'école maternelle (40 personnes).

Déroulement

1 - Des feuilles A4 sont distribuées aux stagiaires : *"Dessinez-moi, à main levée, un triangle sur votre feuille"*.

2 - Des feuilles circulaires, découpées dans un format A4 avec un compas coupeur, sont distribuées : *"Dessinez-moi, à main levée, un triangle sur votre feuille"*.

Bien observer la façon dont les stagiaires "reçoivent" la feuille ronde. Passer dans les rangs et faire faire environ un quart de tour aux feuilles rondes et observer les réactions des stagiaires.

3 - *"Posez devant vous la feuille A4 et la feuille ronde et n'y touchez plus"*.

4 - Pour les feuilles A4 et leur triangle, recenser les positions relatives de la feuille A4 sur la table, la nature des triangles dessinés (isocèles, acutangles, obtusangles, rectangles, etc.), la position relative des triangles sur la feuille A4 (triangles "assis", triangles "pointe en bas", ...), la place du triangle sur la feuille (dans le haut, dans le bas, dans un coin,..).

Faire le même travail avec les feuilles rondes.

5 - Demander à un stagiaire de dire comment on fait pour calculer la surface d'un triangle.

6 - Discuter (échanger) avec les stagiaires sur les résultats obtenus en 4 et 5. On peut espérer qu'ils prendront conscience qu'ils ont, le plus souvent, une idée (sociale ?) réductrice du triangle (reliquat de la formation ?).

Par exemple, poser le problème du calcul de la surface d'un triangle obtusangle dont un côté est parallèle au petit côté de la feuille A4. Même question avec un triangle obtusangle dessiné sur une feuille ronde.

7 - Définition du triangle

8 - Quelques activités sur le triangle à l'école maternelle dont on (moi !) pense qu'elles donneront une image moins réductrice du triangle.

Exemple : l'activité décrite p. 66, ***"Des trous et des triangles"***.

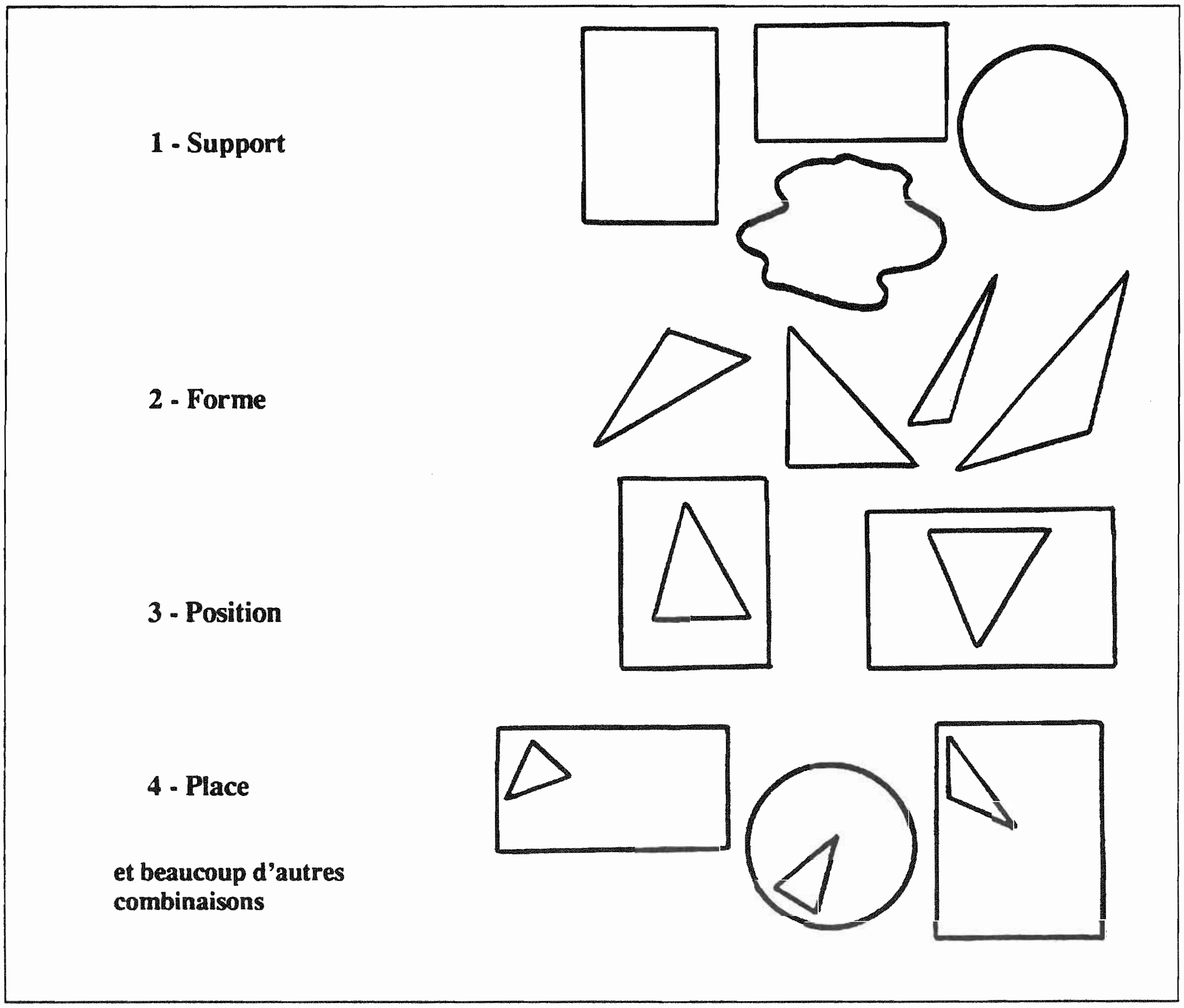
Présenter le matériel seulement et la consigne d'utilisation. Les stagiaires doivent rédiger la fiche d'utilisation : niveau, objectifs, consignes,...

Pourquoi les faces des triangles sont-elles de deux couleurs différentes ? Pourquoi les coins d'un des triangles sont-ils différenciés par des pastilles de couleurs différentes ? etc.

Travail à faire pour toutes les activités proposées par l'animateur.

9 - Demander si, dans l'assistance, quelqu'un a aussi des activités semblables à proposer.

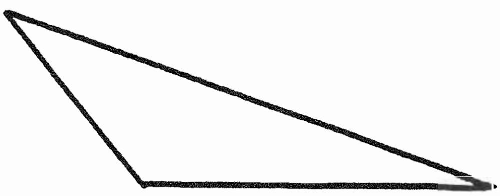
NB : Faire varier, si possible, la nature des supports, la forme, la position, la place du triangle.



Triangle (du latin *triangulus*) : *"figure formée par trois points non alignés et par les trois segments qui les joignent deux à deux."* Définition simple, s'il en est ! Pas si sûr.

Dessinez donc sur une feuille A4 non quadrillée un triangle. Presque toujours, le triangle dessiné est acutangle et a un côté parallèle au petit côté de la feuille... et tout le monde sait que *"pour calculer la surface d'un triangle, il faut multiplier LA base par LA hauteur et diviser par deux"*.

N'y a-t-il donc pas des triangles obtusangles ? Y a-t-il des triangles "assis" d'une part et des triangles "pointe en bas" d'autre part ? Un triangle a-t-il toujours une base ? Peut-il en avoir plusieurs ? Et peut-on calculer la surface du triangle ci-dessous qui a SA hauteur à l'extérieur ?



Interrogations naïves peut-être mais qui empoisonnent élèves et enseignants.

Connaître le triangle, c'est, au moins, le manipuler, le reconnaître dans n'importe quelle position ; c'est donc donner un sens plein au préfixe TRI du mot triangle ; c'est aussi, mais plus tard, être capable de classer les triangles.

Il apparaît nécessaire de mettre en place dès l'école maternelle des activités permettant aux enfants d'appréhender le triangle. Les activités décrites ci-après trouvées dans les classes sont des débuts de réponse aux interrogations précédentes.

PAPIER POINTÉ

Niveau

Moyenne section.

Matériel

Des feuilles de papier pointé.

Consigne

Dessiner des triangles en joignant trois points deux à deux.

Objectif

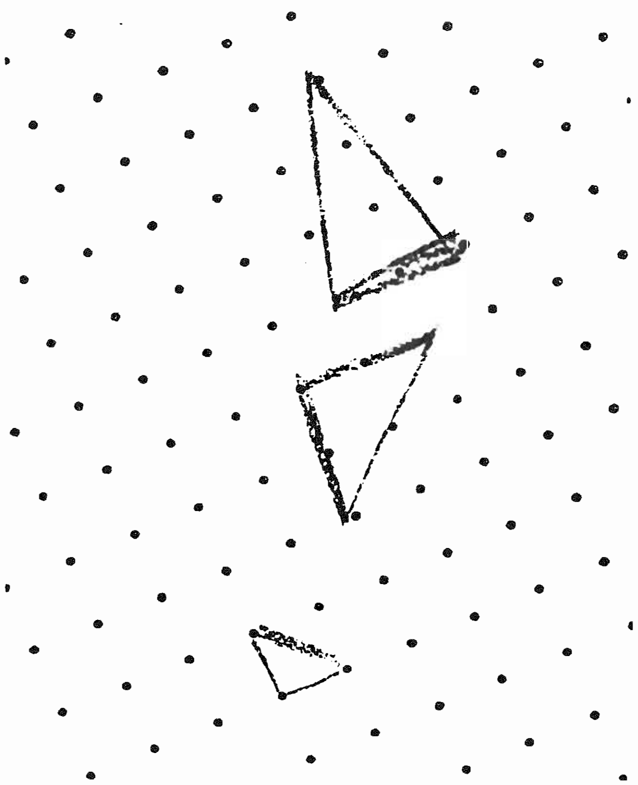
Prendre conscience que trois points non alignés déterminent un triangle.

Commentaire

Cette activité proposée en grande section peut inciter les enfants à utiliser la règle.

Origine

"Espace et géométrie avec des enfants de 4 à 6 ans" Danièle CHAUVAT et Annick DAVID (IREM de Nantes)



LE SPHINX

Niveau

Moyenne section

Matériel

- Des triangles équilatéraux de côté 2,5 cm de différentes couleurs (7 à 8 triangles pour chaque couleur).

- Des sphinx (hexatriangles) en carton

Consigne

Recouvrir exactement un sphinx avec des triangles et les coller.

Objectif

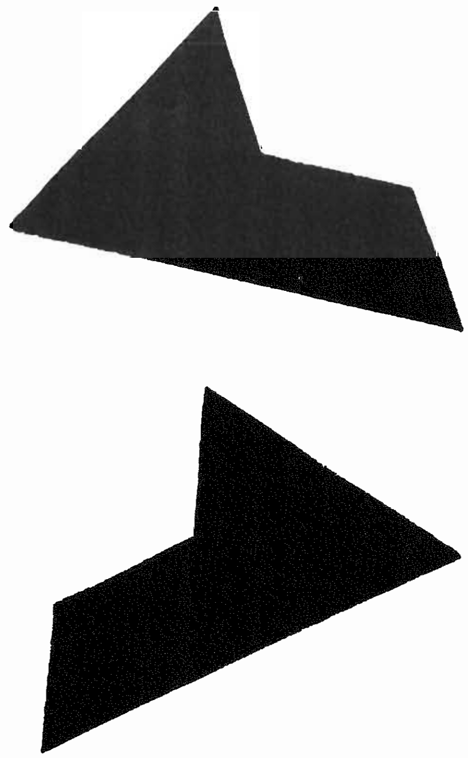
Approcher quelques propriétés du triangle équilatéral (rotations,..., le triangle équilatéral pave,...)

Commentaire

En prolongement, un sphinx étant ainsi recouvert, on peut en construire trois autres et assembler ces quatre sphinx pour obtenir un grand sphinx homothétique. (Il faut disposer 3 sphinx côté pile (ou face) et le quatrième côté face (ou pile)). On pourra différencier les couleurs des deux faces.

Origine

Classe de Nicole QUINTIN, I.M.F.A.E.N. (Ecole Marcelin Berthelot - 22000 Saint-Brieuc)



HABILLER DES TRIANGLES

Niveau

Grande section

Matériel

- Des triangles tracés sur des feuilles A4.
- Des crayons feutres et des crayons de couleur.

Consigne

Faire un dessin prenant en compte le triangle déjà tracé.

Objectifs

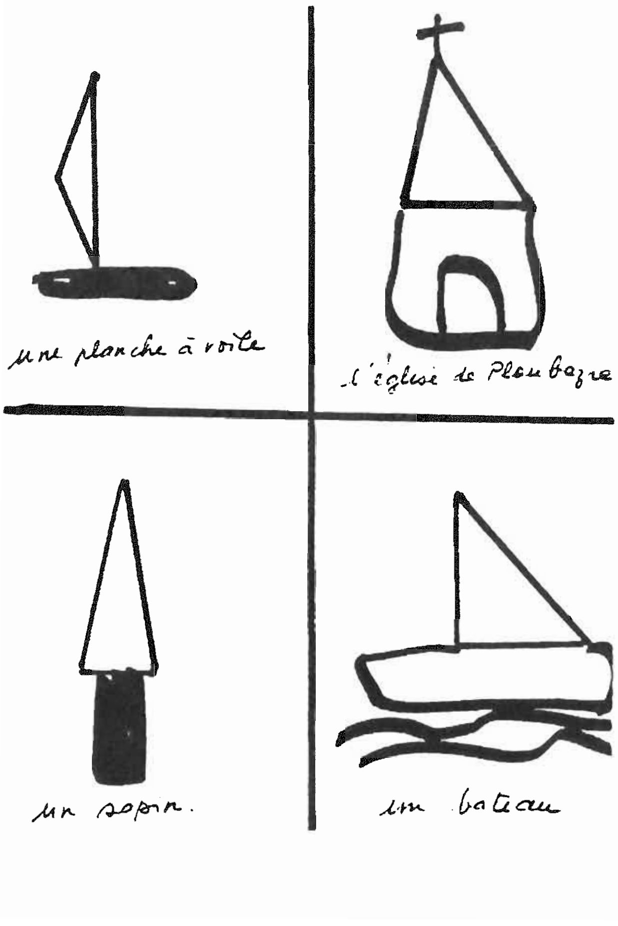
- Se faire une image mentale du triangle.
- Savoir repérer des triangles.

Commentaire

La forme des triangles et leur position relative dans la feuille A4 induisent les habillages des enfants. Cette activité devrait être le sujet d'une étude plus approfondie et scientifique.

Origine

Classe de Michèle DAGORN, I.M.F.A.E.N. (Ecole de Kérénoc - 22 Pleumeur-Bodou)



DES TROUS ET DES TRIANGLES

Niveau

Petite section

Matériel

- Une plaque rectangulaire de carton-plume 11 cm x 23 cm et d'épaisseur 0,5 cm avec six trous de triangles différents.
- Les six triangles découpés.

Consigne

Boucher les six trous avec les six triangles.

Objectifs

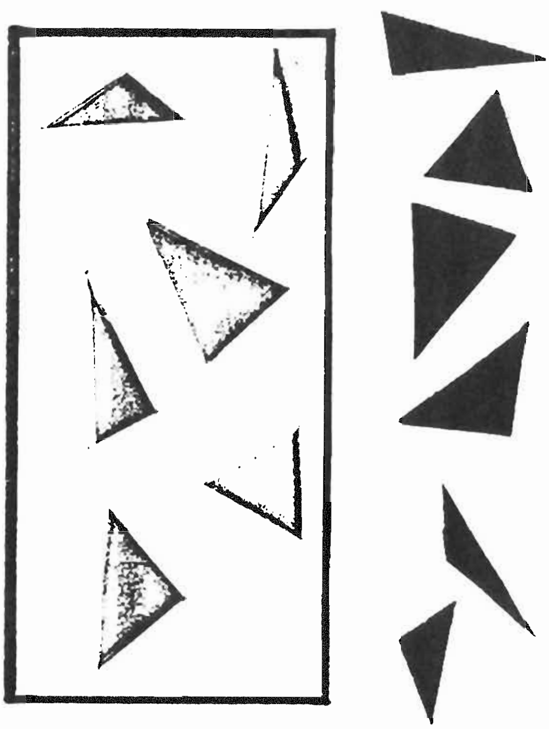
- Prendre conscience de l'existence de triangles différents.
- Prendre conscience que ces différences affectent la longueur des côtés et les angles.

Commentaire

Deux des triangles sont isocèles et un autre est équilatéral. Ce sont les seuls qui peuvent boucher leur trou respectif côté pile ou côté face (les faces d'un même triangle sont de couleurs différentes). On pourra éventuellement repérer les différentes façons de boucher le trou du triangle équilatéral.

Origine

Classe de Claudine LE MORVAN, élève-institutrice (22 Jugon-les-lacs)



PAPIER TRIANGULÉ

Niveau

Moyenne section.

Matériel

- Des feuilles triangulées.
- Des crayons feutres ou de couleur.

Consigne

Dessiner des contours de triangles.

Colorier des triangles (un triangle peut être formé de plusieurs petits triangles).

Objectifs

- Reconnaître des triangles.
- Le triangle équilatéral pave.

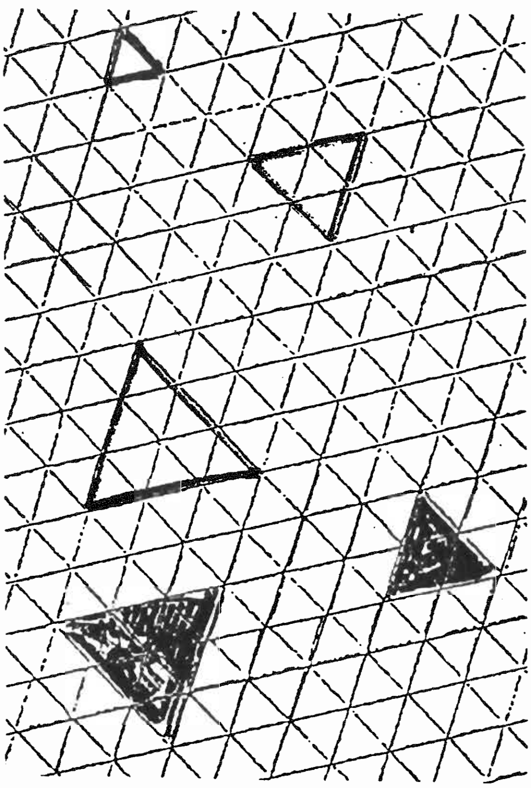
Commentaire

On pourra utiliser du papier triangulé avec des mailles plus petites ou plus grandes selon les difficultés de dessin ou de coloriage rencontrées.

Une autre activité intéressante est le pavage d'une feuille de papier avec un triangle équilatéral qu'on déplace en s'en servant comme gabarit.

Origine

"*Espace et géométrie avec des enfants de 4 à 6 ans*" Danièle CHAUVAT et Annick DAVID (IREM de Nantes)



JEUX DE CONTOURS

Niveau

Moyenne section

Matériel

- Des triangles de formes différentes sont tracés au crayon marqueur sur des supports différents (feuille A4, feuille ronde, feuille déchirée,...)

- Des crayons marqueurs de couleurs.

Consigne

Suivre, à l'intérieur, le contour des triangles tracés.

Objectif

Savoir dessiner un triangle (ou, du moins, une ligne fermée constituée de trois segments de droite).

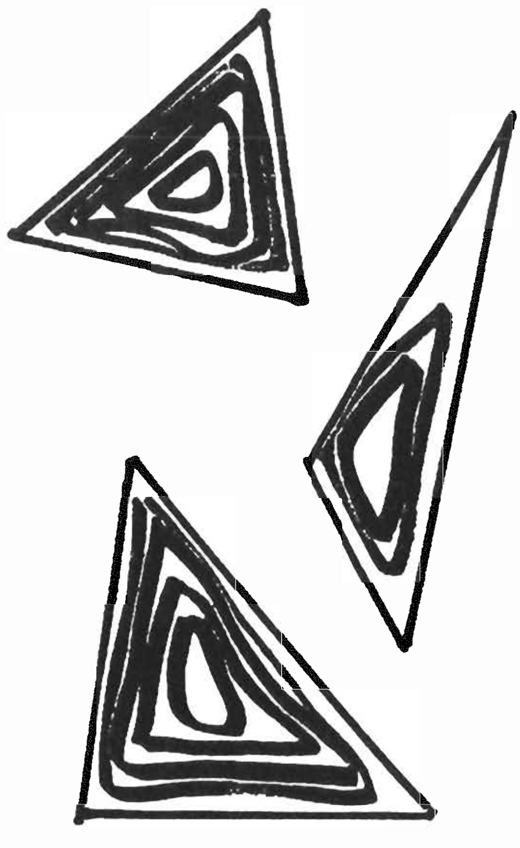
Commentaire

En donnant deux ou trois marqueurs de couleurs différentes, on peut obtenir des tracés algorithmiques.

Cette activité proposée en grande section a incité les enfants à utiliser la règle.

Origine

Classe de Michèle DAGORN, I.M.F.A.E.N. (Ecole de Kérénoc - 22 Pleumeur-Bodou)



LE MASSACRE DE PAUL KLEE

Niveau

Grande section.

Matériel

Ce puzzle orienté a pour support 4 cartes postales reproduisant "*Rythmes d'une plantation*" (1925), aquarelle sur papier de Paul KLEE (1879-1940), visible au musée d'art moderne Georges Pompidou.

Deux triangles rectangles non isocèles ont été découpés dans chaque carte de façon arbitraire. Les 8 pièces à remettre en place sont toutes identiques et peuvent donc prendre place indifférement dans n'importe quelle case.

Pour réussir, il faut tenir compte de la forme de la pièce et de la continuité des lignes, chaque pièce ayant une place bien déterminée qui est unique.

Consigne

Remettre en place les 8 triangles.

Objectifs

Affiner sa perception visuelle du triangle :

- l'orientation

- la continuité des lignes et des couleurs.

Commentaire

Plusieurs variables didactiques interviennent :

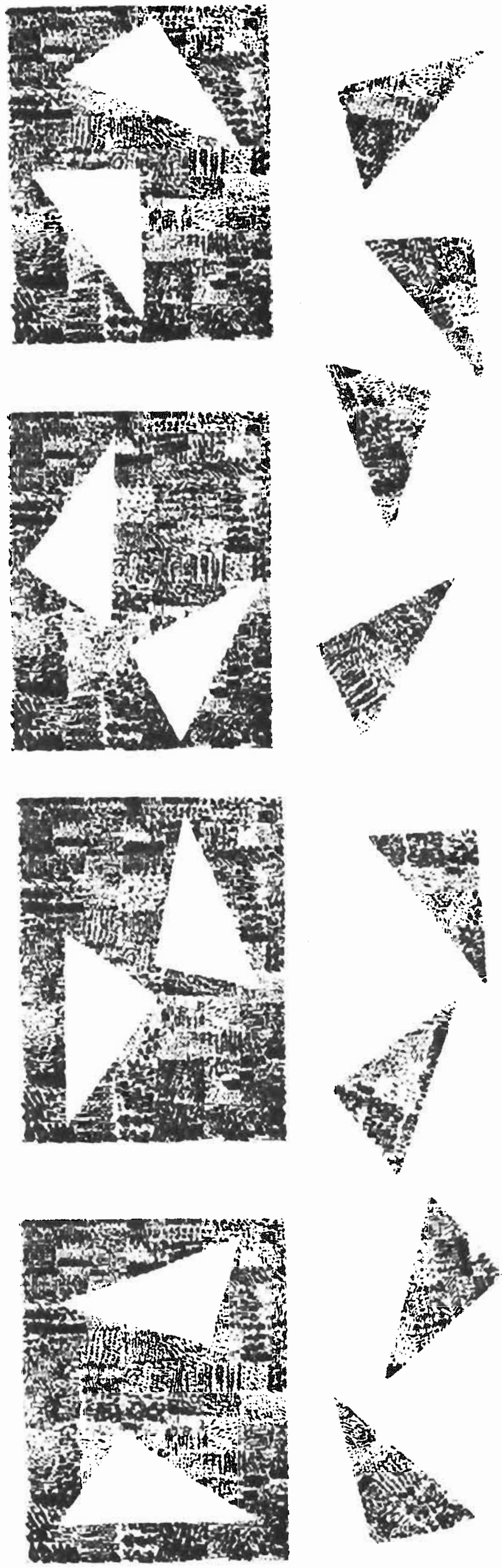
- Si les pièces découpées sont des triangles équilatéraux, seule la continuité des lignes interviendra dans la stratégie de recherche.

- Si le support est une reproduction d'un MONDRIAN, d'un ALBERS ou d'un VAN DOESBURG, aux couleurs vives, c'est le critère de continuité des couleurs qui prévaudra (on connaît les tons neutres de Paul KLEE).

- Si le support provient d'un TILSON ou d'un Frank STELLA ("*Les Indes galantes*", par exemple), les enfants prendront en compte l'un ou l'autre des critères : lignes, couleurs.

Origine

Claude RIMBAULT in "*Bulletin n° 13 des professeurs d'école normale*" (IREM de Rennes), d'après une idée de Geneviève ZIMMERMANN.



LE BAUTIERY

Niveau

Grande section.

Matériel

- Deux jeux de 6 cartons (des sous-verres de bière, par exemple) sur lesquels sont dessinés des triangles différents.

- Des cartons vierges.

Consigne

Un enfant dispose d'un jeu de 6 cartons.

Il choisit un carton et reproduit sur un carton vierge le triangle qui y figure.

Il transmet sa reproduction à un autre enfant qui, en s'aidant de son propre jeu de cartons doit reconnaître le triangle dessiné par son camarade.

Objectif

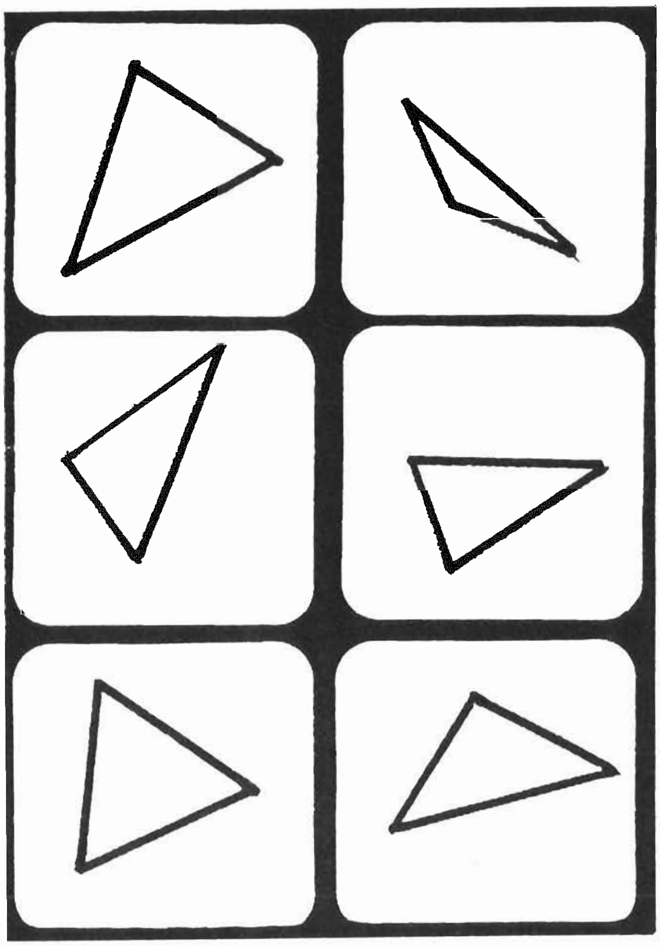
Commencer à affiner ce qui peut différencier un triangle d'un autre triangle.

Commentaire

Cette activité de communication est très intéressante mais aussi difficile à bien conduire. Elle met en évidence les différences sur les mesures des côtés et des angles.

Origine

D'après une idée de Thierry BAUTHIER in "*Bulletin des professeurs d'école normale*" (IREM de Rennes)



MONDRIAN...ITÉS

Niveau

Grande section

Matériel

- Des cartes postales reproduisant des tableaux modernes, par exemple des Sonia DELAUNAY, où apparaissent des triangles

- Du papier affiche de différentes couleurs

- Des rectangles de carton blanc du format de la carte postale à reproduire

Consigne

Découper et coller des triangles de papier affiche pour reproduire la carte postale.

Objectif

- Reconnaître des triangles et les agencer

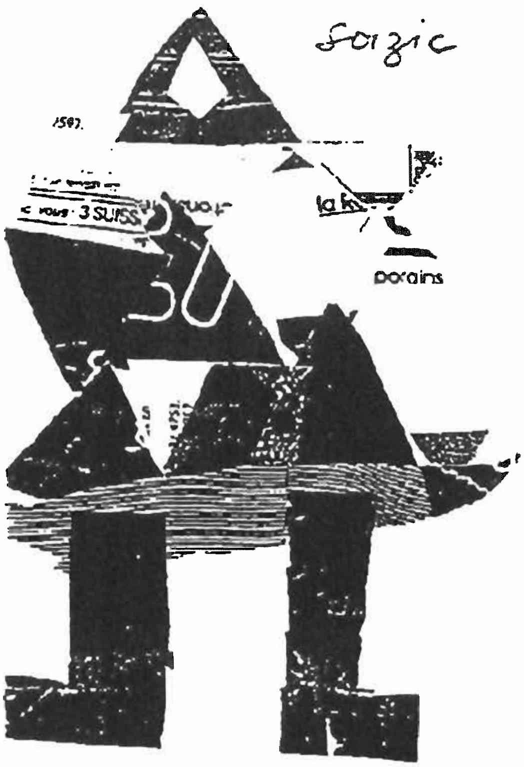
- Découper des triangles

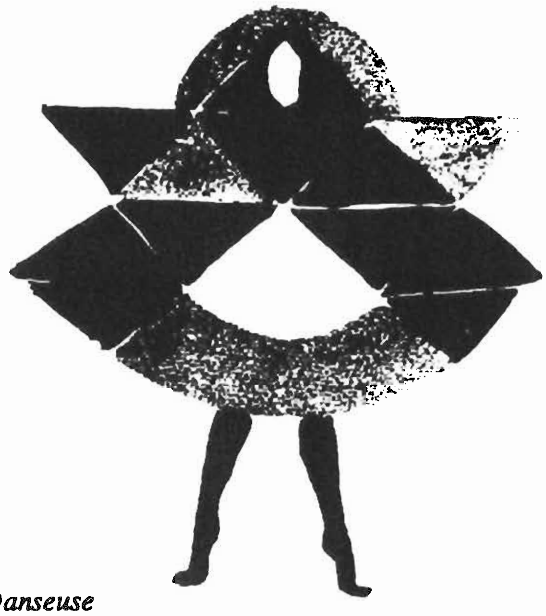
Commentaire

Une activité préalable est le découpage puis le collage libre de triangles. On obtiendra des sapins, des alignements de tentes, etc...

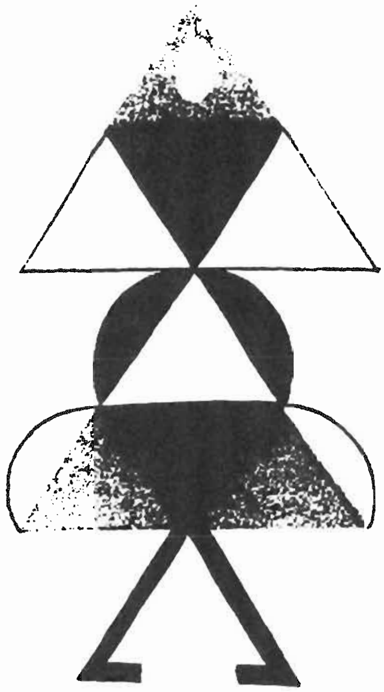
Origine

Article de Michèle KERNEIS (IREM de Rennes - Diffusion restreinte)

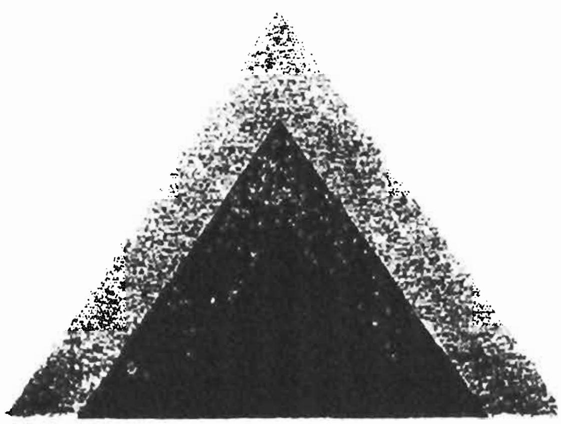




Danseuse
Sonia DELAUNAY *(1923)*



La danseuse jaune pour l'entracte du "coeur à gaz"
Sonia DELAUNAY *(1923)*



Across Kenneth NOLAND *(1964)*

Titre : LA BOÎTE CADEAU

Auteur : François HUGUET (P.E.N. QUIMPER)

Date : Mai 1991

Origine : Situation proposée dans "Elem-Math VII" (Publication APMEP)

Type : Compte-rendu d'activité en formation initiale.

Résumé : A partir d'une mise en situation, le travail proposé ici a pour but essentiel de montrer aux élèves-maîtres l'intérêt de penser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire en terme "d'activité".

Mots-clés : Résolution de problèmes - Géométrie - Figures simples.

LA BOÎTE CADEAU

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes." (I.O. 1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation récemment en 3 circonstances et sur une durée d'environ 2 heures avec des normaliens de 1ère et 2ème année en modifiant à chaque fois quelques variables didactiques de la situation.

Je me suis volontairement détaché de la présentation faite dans l'ouvrage cité en référence.

Cette situation me semble un bon prétexte pour convaincre les élèves en formation de l'intérêt d'une telle approche de notions mathématiques fondée sur la résolution de problèmes en "construisant du sens" et prenant le contre-pied d'une approche plus "formaliste", à base de définitions, qu'ils ont souvent mal vécue.

Matériel

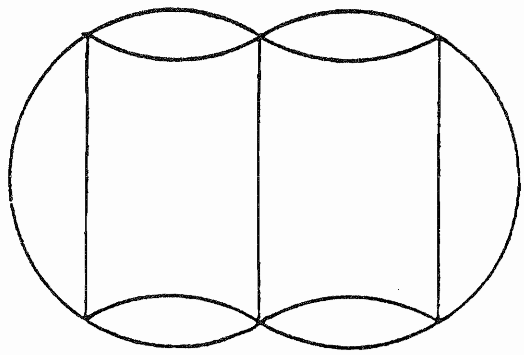
- Des feuilles de papier Canson, des ciseaux.
- Des règles, des doubles décimètres
- Des compas, des équerres.

I - Mise en situation

1ère Phase : Appropriation du problème.

Consigne

"Nous allons tous construire des "Boîtes Cadeaux". Voici le modèle d'un "patron" qui vous servira à construire différentes boîtes".



Mon rôle a consisté à répondre aux questions concernant la réalisation des patrons. Exemple : *"Je ne vous donne pas les positions des centres des cercles mais vous pouvez les trouver !"*

Aides possibles

(voir codages sur le dessin de la page suivante)
- Coder des points particuliers A,B,C,D,E,F.
- Les points A B C sont alignés.
- Les points D E F sont alignés.
- Tous les cercles ont même rayon

Découverte des deux paramètres de la situation :
- R = Rayon des cercles.
- d = Distance des centres O_1 O_2.

2ème Phase : Construction des "Patrons".

Choix possible : Fixer un paramètre (Ex: R = 8 cm)

Proposer à différents groupes de normaliens des distances variées entre les centres. (Ex : 3 cm ; 5 cm ; 7 cm ;...; 15 cm.).

Cela permet d'avoir une production riche, qui sera intéressante à exploiter.

3ème Phase : Analyse des difficultés rencontrées.

Par exemple pour trouver les centres des cercles :

- Utilisation des propriétés des diagonales ou des médianes du rectangle. (Ex: Dans le rectangle ABED on peut déterminer ainsi la position du centre O_1)

- Utilisation des propriétés du losange.
(Ex : O_1 A O_3 B)

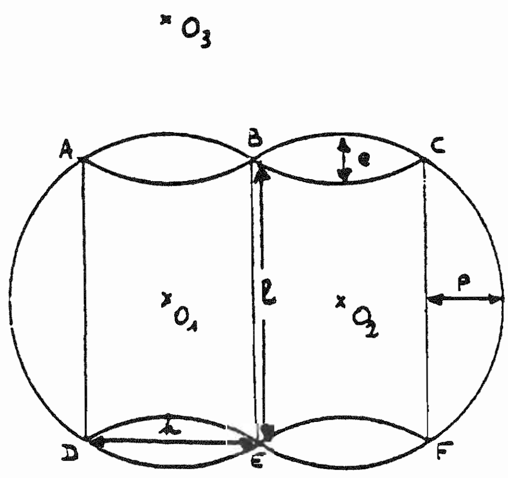
- Utilisation des propriétés de symétrie, etc...

4ème Phase : Réalisation puis comparaison des boîtes obtenues.

Pour la construction il me semble nécessaire, comme pour des enfants, d'être exigeant et attentif à la bonne utilisation des instruments tout en laissant un libre choix en ce domaine.

Pour faciliter la comparaison des boîtes obtenues, il est possible de s'accorder sur quelques dénominations utiles.

Par exemple :
- p = poignée.
- e = épaisseur de la boîte.
- l = largeur de la boîte.
- h = hauteur de la boîte.



5ème Phase : Premiers prolongements possibles

Remarque : Ces propositions de travail sont à la limite des possibilités d'enfants de CM.

1) Faire constater que pour un rayon fixé (Exemple : R = 8 cm), si "d" augmente alors "p" diminue, "e" augmente, "l" diminue, et "h" augmente.

Bien sûr, la justification mathématique est du niveau du collège et peut être l'occasion d'utiliser le théorème de Pythagore.

Pour justifier ces résultats constatés, certains de mes normaliens ont eu des difficultés à argumenter ! Cela a produit une intéressante confrontation permettant de montrer l'utilité des démonstrations et des connaissances mathématiques.

2) Poser le problème de l'adaptation des dimensions de la boîte à la forme d'un objet donné. Par exemple pour un objet de faible épaisseur et de forme "carrée", il faudra prévoir une boîte telle que "l" = "h". Dans ce cas, la figure O_1 B O_2 E est un carré.

C'est alors l'occasion de redécouvrir de nombreuses propriétés de cette figure simple.

Autres prolongements pour un niveau plus élevé

Poser le problème des contraintes de construction. La construction d'une telle boîte est-elle toujours possible ?

Ceux qui ont choisi R = 8 cm et d = 15 cm ont constaté que la construction n'est pas possible !

La contrainte évidente $0 < d < 2R$ est donc trop large !

Une analyse plus fine, niveau Lycée ou fin de 3ème, permet de découvrir :

$$p = R - d/2$$
$$e = 2\,(R - \sqrt{R^2 - d^2/4})$$
$$l = 2\sqrt{R^2 - d^2/4}$$
$$h = d.$$

L'étude de ces fonctions confirme les constats précédents.

La position "limite" correspondant à "l = e" peut être étudiée simplement en constatant que, dans ce cas, le triangle O_1 B E est équilatéral. Ceci confirme la solution algébrique qui donne le résultat suivant :

$$0 < d < R\sqrt{3}.$$

II - Regard sur l'expérience vécue.

Afin de faciliter l'analyse critique de l'activité proposée, je demande alors aux normaliens de comparer notre démarche avec celle indiquée dans l'ouvrage de référence. (Elem-Math VII p. 107-108)

Cette comparaison permet bien sûr d'identifier quelques "variables de commande" de la situation et de commencer une "analyse a priori" des procédures qui pourraient être utilisées par des enfants de CM.

Au cours de ces 3 expériences, les normaliens en très grande majorité ont "joué le jeu" et adhéré à la démarche proposée.

Ils semblent convaincus de l'intérêt d'une telle approche de la géométrie à partir d'une réelle situation-problème pour l'école élémentaire mais ils posent aussi deux types de questions :

- *"Quelles sont les limites de ces activités avec des enfants de CM ?"*

- *"Qu'ont appris les enfants et que faut-il "institutionnaliser" ?*

Aux questions du premier type j'ai eu tendance à répondre : *"Vous essaierez !"*

Pour répondre aux autres questions et relancer le débat, j'ai proposé que l'on fasse ensemble l'inventaires des propriétés géométriques concernant des figures simples et des notions mathématiques relevant du niveau de l'école élémentaire qui peuvent être évoquées ou utilisées au cours de ce type d'activité.

Comme vous pouvez le deviner c'est très riche ! :

- On peut retrouver par exemple, pour le rectangle, le losange, le carré, les propriétés des diagonales et des médianes.

- On peut utiliser la symétrie et construire des médiatrices pour trouver la position des centres des cercles.

- On peut aussi rencontrer des parallélogrammes, des triangles équilatéraux, des triangles rectangles inscrits dans des demi-cercles.

- On pourrait même utiliser des propriétés liées à la proportionnalité !

Je me suis permis enfin d'évoquer quelques notions didactiques concernant les situations d'apprentissage.

En effet, au cours de ce type d'activité les enfants sont mis en situation d'action puis de formulation et de validation avec la possibilité de confronter leurs méthodes de recherche.

Cette situation, ouverte pour l'élève, l'amène à faire des choix, tout en lui donnant des possibilités de contrôle, la validation n'étant pas nécessairement de la responsabilité du maître.

Enfin, même si les acquisitions de connaissances peuvent ne pas être négligeables, le plus important c'est :

- de construire du "sens" à travers des activités mathématiques,

- de permettre à l'enfant d'accumuler des expériences en développant son autonomie,

- de lui donner l'occasion d'argumenter et de communiquer.

Ce sont bien là les points forts et l'esprit des instructions officielles actuelles concernant l'Ecole Elémentaire.

Lutter contre le refuge des "belles définitions" et l'abus d'un formalisme prématuré, lutter aussi contre la pédagogie du modèle *"Je te montre, imite-moi"* me semble un enjeu d'importance.

Titre : Interactions Espace-Plan

Auteurs : Denis BUTLEN et Monique PEZARD (P.E.N. Melun)

Date : 1990

Type : Cours effectué dans le cadre de la "formation initiale" des futurs instituteurs, maîtres-formateurs

Mots-clés : Géométrie dans l'espace, solides, polyèdres.

INTERACTIONS ESPACE-PLAN

Plan

Introduction

Ce cours est consacré à l'étude de situations de formation centrées sur les interactions entre l'espace et le plan à l'école élémentaire. Il s'intègre dans une "formation initiale", en fait un stage de 5 semaines consacré à la préparation au CAFIMF. Ces 5 semaines sont consacrées uniquement au français et aux mathématiques, soit 60 heures en deux périodes (3 semaines en mars 1990, 2 semaines en novembre 1990).

Ce cours s'inscrit dans la première période. Signalons que cette période a été l'occasion de traiter les notions de typologie des situations, contrat didactique, variables didactiques et analyse a priori, jeux de cadres, conflit socio-cognitif...

Cette partie est plutôt consacrée à une réorganisation des connaissances des stagiaires, notamment sur la géométrie dans l'espace.

Elle sera l'occasion de pratiquer une double institutionnalisation :

- une institutionnalisation mathématique sur les polyèdres et sur les représentations,
- une institutionnalisation didactique.

I. - GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

A) Objectifs des activités

- Effectuer une mise à niveau en géométrie dans l'espace permettant d'animer et d'analyser des activités de géométrie dans l'espace niveau CE/CM.

- Présenter des exemples d'activités de ce type et illustrer les I.O. sur ce sujet (en particulier : reproduire, décrire, représenter, construire).

- Soulever un certain nombre de problèmes liés à l'enseignement de la géométrie, notamment sur les interactions plan-espace.

- Réinvestir les concepts didactiques déjà présentés.

B) Activités de construction de polyèdres

1 - Construction et tri de polyèdres quelconques

Le PEN distribue 5 plaques de matériel PLOT n° 1 et 2 ([5]) et donne la consigne suivante : "*Assemblez ces polygones pour obtenir des solides ; ne faites pas tous les mêmes.*"

Il laisse 30 minutes de recherche. La production des stagiaires est très peu riche et il faut la compléter.

Il propose alors de trier les solides, à partir de critères à définir. (On peut partir de solides quelconques, pas forcément de polyèdres, et adjoindre à la collection des **cylindres**, des **cônes**, des **sphères**...)

- ***Premier critère*** : Séparer la collection en solides "qui roulent" et solides "qui ne roulent pas". Les seconds, ici seront des **polyèdres**.

- ***Deuxième critère :*** Déterminer la sous-collection des polyèdres **convexes** ; un polyèdre est convexe s'il répond à la caractéristique suivante : "*il est situé entièrement dans un des deux demi-espaces limités par chacun des plans définis par une de ses faces.*" ou bien : "*quelle que soit la façon dont on le pose sur une surface plane, il repose sur une face entière.*"

- ***Troisième critère :*** Polyèdres constitués par une ou plusieurs figures de base (polygones réguliers ou non)

- ***Quatrième critère :*** Si on s'intéresse à la sous-collection des polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers identiques, on peut alors considérer le critère des relations d'incidence en chaque sommet. On distingue alors :

* les **polyèdres réguliers** : "*Toutes les faces sont des polygones identiques réguliers, tous les sommets reçoivent le même nombre d'arêtes sous le même angle.*" Exemples de polyèdres réguliers : les cinq polyèdres réguliers convexes ou "**solides de Platon**" ; les quatre polyèdres réguliers non-convexes, soit les "**polyèdres étoilés règuliers**" (cf. fiche 8)

* les **polyèdres non-réguliers** ("deltaèdres", dans le cas du triangle équilatéral).

- ***Cinquième critère :*** Si on s'intéresse aux polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers de plusieurs espèces, on est amené là encore à considérer un critère portant sur les relations d'incidence en chaque sommet ; on distingue alors :

* les **polyèdres semi-réguliers** : "*tous les sommets reçoivent le même nombre de faces, se répartissant toujours de la même façon et dans le même ordre*". En dehors des **prismes** et des **antiprismes**, ils sont au nombre de 13 ; ce sont les "**polyèdres d'Archimède**" (voir fiche 5). Exemples : le tétraèdre tronqué, l'octaèdre tronqué, le cuboctaèdre, le cube tronqué,... et aussi les prismes et antiprismes semi-réguliers.

On a ainsi commencé à construire un arbre de tri des solides (cf fiche 1)

2 - Construction des polyèdres réguliers et des deltaèdres

Le PEN propose la consigne : "*Etudier les polyèdres convexes à une seule figure de base : le triangle équilatéral*". Afin d'analyser les propositions des stagiaires, il est amené à préciser la consigne par : "*Trouver une condition en termes d'angles pour construire ces polyèdres*".

En fait il est amené à énoncer la proposition : "*Il faut que la somme des angles des faces arrivant en un sommet soit inférieure strictement à 360°, ce qui peut se traduire par : $n \times 60^o < 360^o$, où n est le nombre de faces arrivant en un sommet*" et à faire la mise au point suivante :

- Il y a 3 valeurs possibles pour n : 3, 4 et 5.

- De ce fait il faut alors considérer si le nombre d'arêtes en un sommet est le même ou non. Si c'est le cas on obtient les solides réguliers à savoir le **tétraèdre régulier**, **l'octaèdre régulier**, **l'icosaèdre régulier**. Sinon on obtient les autres **deltaèdres non-réguliers** (cf. fiches 2 et 3).

Cela conduit à compléter l'arbre ébauché précédemment.

Afin de compléter cette étude, le PEN propose une autre consigne : "*Etudier les polyèdres convexes à une seule figure de base et réguliers*".

Les stagiaires reprenant leurs constructions déterminent cinq solides ; un raisonnement sur les angles permet (au PEN) de démontrer que l'on a trouvé tous les polyèdres répondant à la question. Ce sont les **solides de Platon.**

Suit un très bref rappel historique :

- Les étrusques utilisaient des dés à jouer dodécaédriques durant le premier millénaire avant J.C.

- 6 sicècles avant J.C., les Pythagoriciens ne connaissaient que le tétraèdre et le cube.

- Vers 400 avant J.C. (427-348 avant J.C.), ces cinq solides étaient manipulés dans l'entourage de Platon ; ils étaient associés à un élément naturel :

* le cube est associé à la terre

* le tétraèdre au feu

* l'octaèdre à l'air

* le dodécaèdre à l'univers

* l'icosaèdre enfin est associé à l'eau

- Les 4 polyèdres étoilés ont été découverts plus tard.

- En 1619, KEPLER découvre le petit et le grand dodécaèdre étoilés.

- En 1810, POINSOT découvre le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre et leurs duaux (cf. fiche 4)

Un bref exposé signale ensuite le principe des polyèdres duaux des précédents. (cf. fiche 5)

3 - Recherche de patrons

On s'intéresse ensuite à l'étude de certains patrons à partir d'un document distribué aux stagiaires (cf. fiche 6)

4 - Analyse des polyèdres tronqués

Le PEN expose alors quelques éléments concernant l'étude de polyèdres tronqués (cf. fiche 7)

C) Fiches

Ce sont des fiches techniques détaillées dont on décrit ici rapidement le contenu.

Fiche 1
Classement de solides

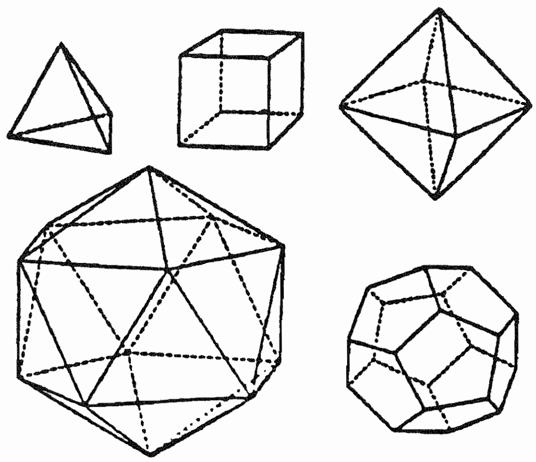
Cette fiche reprend l'arbre suivant (mais le classement peut aussi être obtenu à l'aide d'un tableau à double entrée) et donne quelques définitions (notamment : pyramide, prisme, antiprisme...)

SOLIDES

à faces planes	avec des faces non planes
polyèdres	non-polyèdres *(ex. cylindres, cônes, sphères)*
convexes	non-convexes *(ex. polyèdres étoilés)*
faces régulières	faces non-régulières *(ex. pyramides quelconques...)*
une seule figure de base régulière	plusieurs figures de base régulières *(ex. polyèdres archimédiens)*
sommets identiques et réguliers *(solides de Platon)*	ou non *(ex. deltaèdres réguliers)*

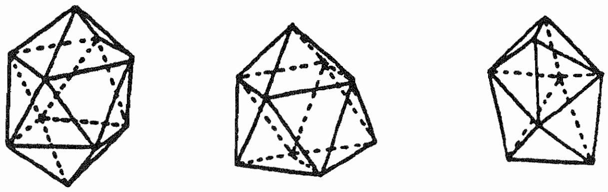
Fiche 2
Les solides de Platon

Cette fiche présente les solides de Platon et leur calcul en utilisant la relation d'Euler et le calcul de la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe.



Fiche 3
Les deltaèdres

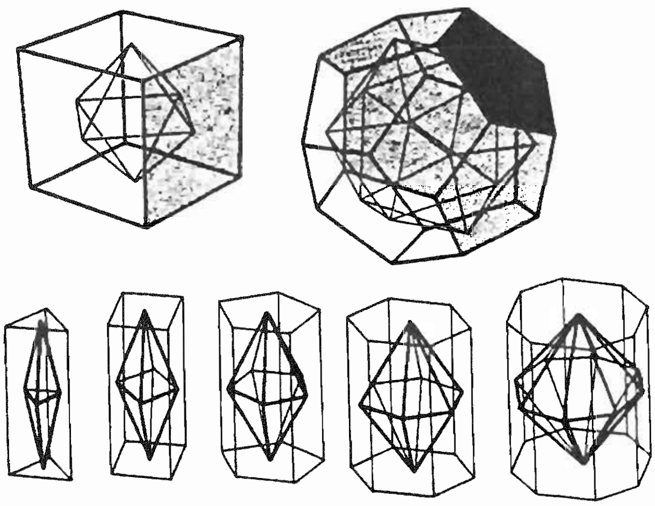
Cette fiche présente les 8 deltaèdres convexes : le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers, les 2 bipyramides triangulaire et pentagonale, ainsi que les 3 autres deltaèdres convexes :



Fiche 4
Polyèdre dual

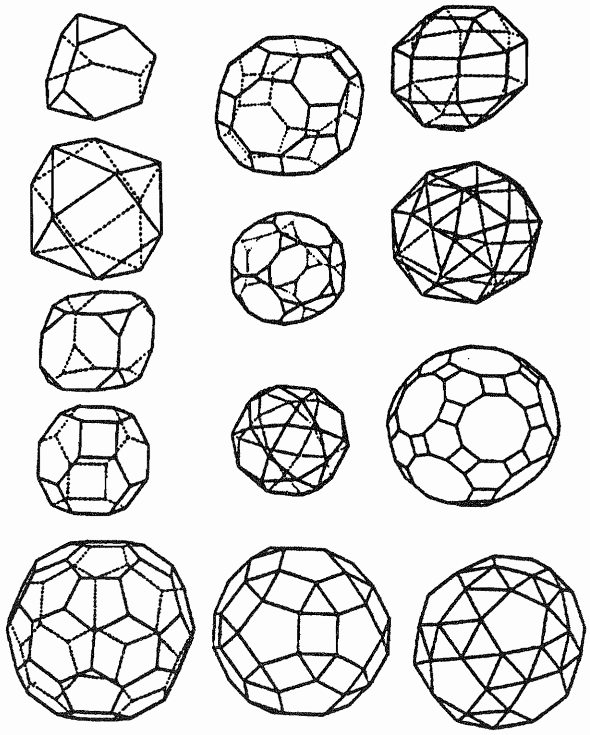
Les arêtes du dual s'obtiennent en joignant les centres des faces adjacentes.

La fiche propose une approche topologique et une approche combinatoire, quelques éléments historiques et des exemples.



Fiche 5
Les polyèdres semi-réguliers d'Archimède

La fiche présente les 13 polyèdres semi-réguliers autres que les prismes et antiprismes réguliers.



Fiche 6
Quelques patrons

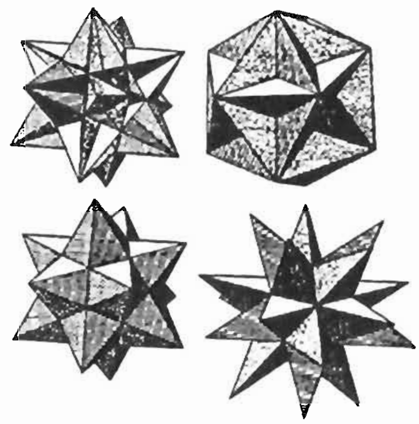
La fiche propose une consigne générale : trouver des patrons de polyèdres en utilisant les réseaux proposés (réseaux triangulaires ou carrés).

Fiche 7
Polyèdres tronqués

Cette activité s'inspire très largement de la brochure "Géométrie" des "Aides pédagogiques pour le CM" (brochure APMEP de la COPIRELEM). Elle consiste à rechercher les polyèdres obtenus par troncature du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre.

Fiche 8
Polyèdres étoilés

Cette fiche présente les 4 polyèdres réguliers étoilés réguliers et quelques autres polyèdres étoilés.



D) Présentation d'activités au C.E.

Il s'agit ici de présenter et d'analyser certaines activités sur le thème des interactions espace-plan ; pour cela nous nous sommes inspirés du ERMEL (CE) et des "Aides pédagogiques pour le CE" (Publication APMEP)

Ces activités portent sur :

- **Les ombres** : Le but des activités est de prendre conscience de la forme prise par l'ombre de différents objets ou élèves en fonction de l'heure et de la hauteur du soleil.

- **Les "points de vue"** : les buts de ces activités sont les suivants :

* prendre conscience des différents points de vue d'un assemblage d'objets quant à leurs positions relatives

* essayer d'imaginer d'autres points de vue que le sien

* coordonner différents points de vue

Les activités sont les suivantes :

* Disposer un assemblage de 4 objets sur une table, un objet doit en cacher un autre selon un point de vue donné ; demander aux élèves de dessiner ce qu'ils voient de leur place

* Redistribuer les dessins obtenus, chaque élève doit retrouver la place du dessinateur.

* Distribuer 4 vues d'un assemblage d'objets ; les élèves sont divisés en quatre groupes ; chaque groupe dispose d'une vue. A tour de rôle ils doivent reconstituer l'assemblage correspondant à leur vue ; ils doivent prendre en compte l'assemblage effectué par les groupes qui les précèdent. La vue de dessus devant constituer une validation.

- **Les gabarits** : il s'agit de l'activité décrite dans le document "*Du passe-muraille aux projections*" (Document RTS d'accompagnement de l'émission du 18-01-1980 sur TF 1). Les assemblages (en légo) et le trièdre ont été reconstitués par les stagiaires.

- **Les sections** : cf. ERMEL du CE, P. 149-159.

Deux documents sont distribués :

* La fiche "Du passe-muraille aux projections"

* Une fiche d'assemblages de légo à reconstituer :

II. - SÉQUENCES EN C.E. ET C.M.

Mise au point collective et test de séquences consacrées à ce thème dans des classes de CE et CM ; analyse a priori et a posteriori.

A) Buts de l'activité - Un guide d'analyse

Nous poursuivons un double but :

- d'une part utiliser les outils et les apports d'information fournis précédemment, pour construire, par groupes de 4 ou 5, une séquence sur un sujet donné

- d'autre part utiliser un guide d'analyse (plus précis) permettant d'analyser la séquence préalablement construite et de déterminer les écarts par rapport à la préparation et les indices susceptibles d'expliquer une prise de décision (prévue ou non) du maître. Il s'agit ici de montrer la nécessité de l'analyse a priori pour l'observation et l'analyse a posteriori.

Accessoirement, nous simulions les deux épreuves du CAFIMF (examen préparé par les stagiaires).

Le dispositif adopté est le suivant :

- les instituteurs choisissent un sujet de géométrie (dans l'espace) à traiter à un niveau donné ;

- préparation d'une séquence, par groupes de 5, sur ce sujet, avec aide éventuelle, toujours limitée, d'un PEN (quelques rectifications, apport de documents) ;

- un des stagiaires mène la séquence dans sa classe, les autres observent (un stagiaire observe le maître, les autres les élèves). On a constitué 4 groupes, seuls 2 groupes sont observés par un PEN ;

- bilan rapide (20 à 30 minutes) de la séquence avec le PEN quand cela est possible ;

- rédaction par les instituteurs d'un compte-rendu de la séquence (la préparation de la séquence doit figurer obligatoirement dans ce compte-rendu)

- exposé des différents comptes-rendus aux autres stagiaires, discussion collective.

B) Productions des stagiaires

1 - Séquences préparées

- Premier groupe : "Points de vue" au CE1 : un assemblage d'objets étant posé sur une table, les élèves de la classe doivent d'une part dessiner ce qu'ils voient et d'autre part, après échange des dessins, retrouver la place occupée par l'élève ayant dessiné.

- Deuxième groupe : "Points de vue" au CE2 : le sujet et le dispositif sont semblables.

- Troisième groupe : gabarits au CM2 : il s'agit de déterminer les gabarits sur papier quadrillé, selon trois plans perpendiculaires d'un assemblage de cube.

- Quatrième groupe : activité de communication ; les élèves disposent par groupe d'un polyèdre construit à l'aide du matériel PLOT ; ils doivent rédiger un message décrivant ce solide et permettant à un autre groupe de le reconstruire.

2 - Quelques remarques

- Les idées de séquence s'inspirent largement des exemples d'activités décrites précédemment par les PEN.

- A ce stade il est difficile d'obtenir des traces écrites substantielles des préparations ou des commentaires (sauf pour le groupe 4)

- Chaque groupe a toutefois respecté le dispositif adopté et a essayé de faire fonctionner le guide d'analyse (voir annexe)

- Les deuxième et troisième groupes ont été observés par un PEN ; on peut noter :

* pour le deuxième groupe, la mise au point, à la demande du PEN, d'une typologie des productions des élèves.

* pour le troisième groupe : des activités et un rythme un peu lent pour un CM2.

- Une analyse détaillée des messages a été effectuée par les PEN, lors du compte-rendu, pour le quatrième groupe. Les instituteurs de ce groupe n'ayant pas su le faire correctement du fait de la nouveauté du sujet mathématique et d'un manque de familiarisation avec cette tâche.

- L'ensemble des productions et des analyses nous a paru toutefois d'un assez bon niveau (une analyse plus fine de ces productions resterait à faire).

Cette activité a permis de souligner l'importance de l'analyse a priori, permettant l'observation et préparant l'analyse a posteriori. L'étude des décalages entre préparation et déroulement effectif a permis de dégager les prises de décisions du maître et d'en déterminer les causes et effets.

III. - BIBLIOGRAPHIE

(1) "*Aides pédagogiques pour le CM - Géométrie*" COPIRELEM (Publication APMEP : Elem-Math VII)

(2) "*Aides pédagogiques pour le CM - Situations-Problèmes*" COPIRELEM (Publication APMEP : Elem-Math IX)

(3) "*Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - C.E.*" ERMEL (INRP, diffusion HATIER)

(4) "*Pochette de 200 feuilles de réseaux*" Brochure 41 de l'IREM de Paris VII (Université de Paris VII)

(5) "*PLOT, matériel n° 1 et n°* 2" (APMEP Orléans-Tours)

(6) "*Les dossiers du PLOT : Polyèdres dans l'espace*" (mars 1987, APMEP Orléans-Tours)

(7) "*Assemblages de polygones*" Nicole PICARD et Alix GIRODET (Série "Thèmes mathématiques", O.C.D.L.)

(8) "*Modèles mathématiques*" H.M. CUNDY et A.P. ROLLETT (CEDIC, 1978)

ANNEXE
GUIDE POUR L'OBSERVATION D'UNE SÉQUENCE DE MATHÉMATIQUES

1) Quel est l'objectif de la séquence ?

Objectif d'apprentissage

- d'une notion,
- d'un langage
- d'une technique,
- d'une forme de travail,
- ...

L'apprentissage se fait-il

- par mise en oeuvre d'une **situation-problème** ?
  * où en est-on (en début, en cours) ?
  * en quoi la situation prévue est-elle une situation d'apprentissage ?
  * quels principes d'apprentissage met-elle en oeuvre ?
  * Est-elle bien adaptée, efficace pour l'objectif d'apprentissage visé ?
- par apport d'**information du maître** ?

Objectif de réinvestissement

- en vue d'une familiarisation par des exercices simples d'application

- en vue d'une mise à l'épreuve dans un contexte nouveau qui nécessite la coordination d'éléments de savoir déjà appris séparément ou qui implique une partie réellement nouvelle.

Objectif d'évaluation

Organisation didactique de la séquence

- En fonction de l'objectif, quelle est l'organisation de classe choisie par le maître : travail individuel, travail en groupe, situation de communication ? Est-elle pertinente ?

2) Comment se situe la leçon dans la progression à moyen terme ?

- Quel est le **processus prévu** pour élaborer et faire fonctionner le savoir engagé ?

- Quelles sont les **étapes-clés du processus** et comment s'articulent-elles entre elles ?

- Quelle est l'**évolution** constatée des **conceptions** des élèves ?

- A-t-on envisagé des **rectifcations de parcours** ?
  * si oui, lesquelles et pour quelles raisons ?
  * si non, pourquoi ? Par exemple, les réalisations sont conformes aux prévisions du maître ou celui-ci ne sait pas comment tenir compte des élèves.

3) Travail de l'élève, travail du maître

- En quoi consiste la **tâche de l'élève** ?

- Quelle est la **consigne** de travail ? Sous quelle forme est-elle donnée ? Est-elle l'objet d'une discussion la précisant ?

- Est-elle l'objet d'une **négociation** ?

- Cette discussion ou cette négociation débouche-t-elle sur la tâche prévue ou sur une autre ? Laquelle ?

- L'élève est-il engagé dans une activité lui posant **problème** ? Quel problème ? Etait-il prévu ?

- En cas de blocage de la situation, quelle est l'**intervention du maître** ?

- Au cours de son travail, l'élève **peut-il revenir en arrière** et recommencer ? Est-ce licite ?

- Prend-il ses décisions en se référant au savoir ou à un **contrat** entre le maître et les élèves ? Ce contrat est-il explicite ? implicite ?

- Y a-t-il négociation entre le maître et les élèves pour la **production** de ce qu'attend le maître ?

- Y a-t-il **débat de savoir** ?

- Quels **moyens de contrôle** l'élève a-t-il sur la validité de ce qu'il fait ?

- Quel est le rôle du maître dans la **validation** du travail que fournit l'élève ?

- La réalisation représente-t-elle un **progrès de savoir**, du point de vue du maître ?

4) Gestion du temps

- Comment est organisée la séquence :
  * selon un seul objectif ?
  * selon plusieurs sous-séquences d'objectifs différents ?
- Au cours de la séquence observée
  * quel est le temps du maître, comment l'occupe-t-il ?
  * quel est le temps de l'élève, comment l'occupe-t-il ?
  * quel est le temps collectif ? comment est-il géré, comment est-il occupé ?
- Quelles sont les **variantes**, et en fonction de quoi sont-elles décidées, dans d'autres séquences ?

Titre : REPRÉSENTATIONS DE SOLIDES

Auteur : Dominique BEAUFORT (P.E.N. Chartres)

Date : mai 1991

Type : Présentation d'activités réalisées dans le cadre de la formation initiale des instituteurs.

Résumé : Production et lecture de représentations de solides dans le plan, puis étude des principaux systèmes conventionnels.

Mots-clés : Géométrie - Représentations - Perspective - Projections - Formation des maîtres

REPRÉSENTATIONS DE SOLIDES

Comment représenter un objet de l'espace sur une feuille de papier ? Les solutions à ce problème ne sont pas simples, même si nos habitudes culturelles nous ont rendu familières certaines représentations. Depuis les Grottes de Lascaux jusqu'aux images de synthèse, les tentatives sont multiples : perspective centrale (Peintres de la Renaissance), perspectives cylindriques (géométrie projective), projections orthogonales sur plusieurs plans (dessin technique), topologie, anamorphoses,... Il s'agit toujours d'un point de vue particulier sur un objet, choisi en fonction de l'information (l'émotion) que l'on souhaite communiquer.

I - Objectifs

- Placer les étudiants en situation de produire une représentation plane d'un solide. Les caractéristiques de celui-ci sont telles qu'une représentation en perspective est insuffisante pour rendre compte entièrement de l'objet ; de plus, la validation des productions sera effectuée par la construction d'un solide semblable.

- Placer les étudiants en situation de lire une représentation pour construire un solide.

- Les sensibiliser à la variété des systèmes de représentations et à leurs intérêts respectifs selon l'objectif de communication visé (toute représentation est une perte d'information).

- Faire analyser ces activités et préciser à cette occasion quelques concepts de didactique.

- Informer sur les principaux systèmes de représentation conventionnels : dessin technique, perspectives.

II - Déroulement des activités

Durée

6 heures

Matériel

- 5 solides tous différents construits à l'aide de tasseaux de section carrée.

- cubes emboîtables (matériel numération)

- feuilles format A3

1ère phase : élaboration d'une représentation

La classe est divisée en groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit un solide et une grande feuille de papier.

Consigne : "*élaborez un message sous forme d'un ou plusieurs dessins permettant à un autre groupe de construire un solide analogue*". On précisera en cours de travail qu'on ne s'attachera pas aux dimensions réelles de l'objet.

Chaque groupe analyse le solide, le pose sur la table dans la position qui lui semble la plus appropriée (ce point de vue n'est pas identique pour tous les membres du groupe), se met d'accord sur un moyen de le représenter : perspective(s), sections, vues géométrales, ... Selon le système choisi, les étudiants collaborent à la réalisation, essaient au brouillon, exécutent une vue particulière.

2ème phase : construction d'un solide à l'aide d'un message

Les productions sont échangées d'un groupe à l'autre, et chaque groupe reçoit une collection de cubes emboîtables . Ils doivent construire, à l'aide de ce matériel, un solide selon les indications fournies par le message.

Remarque : les cubes emboîtables ne sont fournis qu'à ce moment de l'activité, afin de ne pas induire des modes de représentations trop particuliers dans la première étape.

3ème phase : comparaison des solides construits avec les originaux

La non conformité peut provenir :

- soit d'une lecture erronée de la représentation : codage mal interprété, lecture fausse.

- soit d'une représentation ambiguë, insuffisante.

4ème phase : confrontation des systèmes utilisés

Chaque groupe présente à l'ensemble de la classe le mode de représentation qu'il a utilisé, tandis que le groupe récepteur indique la plus ou moins grande facilité avec laquelle il a construit le solide. Cette phase permet de prendre conscience de la variété des solutions au problème, d'en mesurer pour chacune d'elles l'adéquation au problème de construction et de rechercher les causes d'erreur.

Une première classification des systèmes de représentations est établie : perspectives, projections orthogonales sur plusieurs plans, coupes, ...

5ème phase : analyse de l'activité

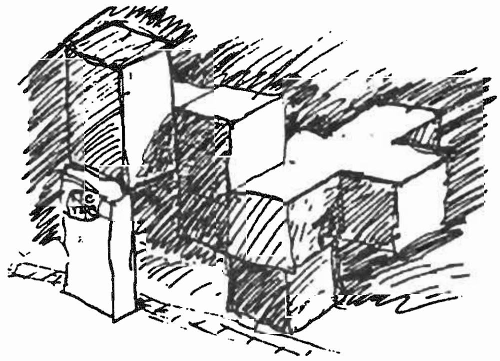
Elle est menée de manière collective et porte sur les objectifs, ainsi que sur les caractéristiques de la situation. Le débat autour de ces questions permet d'éclairer quelques concepts de didactique : situation, problème, variables didactiques, validation, institutionnalisation, communication-formulation, ...

6ème phase : information sur les principaux modes conventionnels de représentation

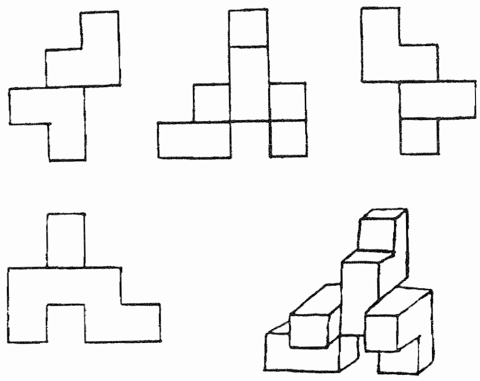
Voir paragraphe IV

III - Exemples de productions

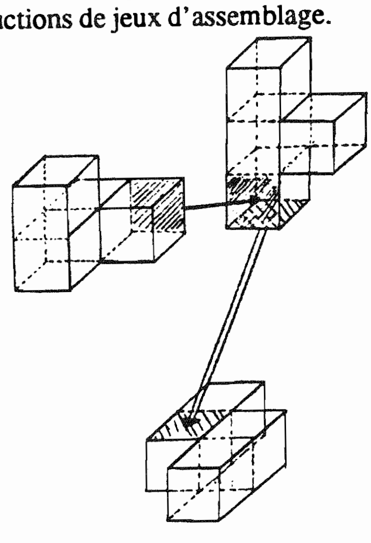
- Perspective : ces représentations (parfois mal maîtrisées) ne permettent pas, seules, de fournir toutes les informations nécessaires à la construction. Elles donnent par contre une vue globale du solide.



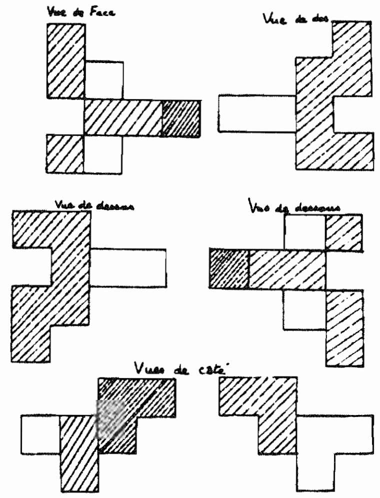
- Projections orthogonales et perspective : les conventions de disposition de ces vues ne sont en général pas respectées. Reproduction aisée du solide.



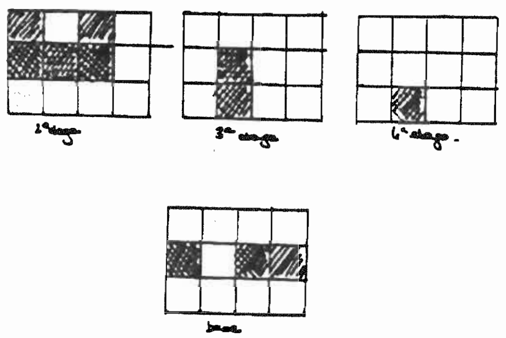
- Vues éclatées en perspective avec schéma de montage : on trouve aussi parfois le plan de montage en différentes étapes à la manière des plans de constructions de jeux d'assemblage.



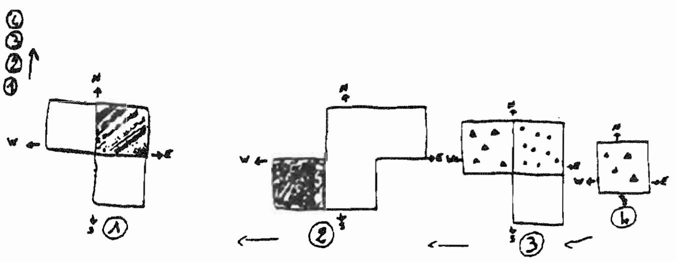
- Projections orthogonales sur plusieurs plans et indication des différents niveaux :



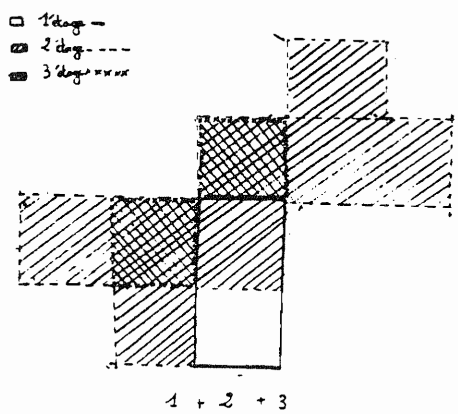
- Sections du solide en surimpression de la vue de dessus :



- Sections et plan de montage :



- Section sur un seul dessin avec légende des différents niveaux :



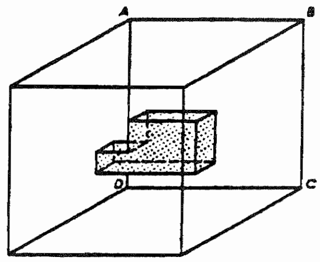
IV - Principaux systèmes de représentations

1) Classification des méthodes de projection

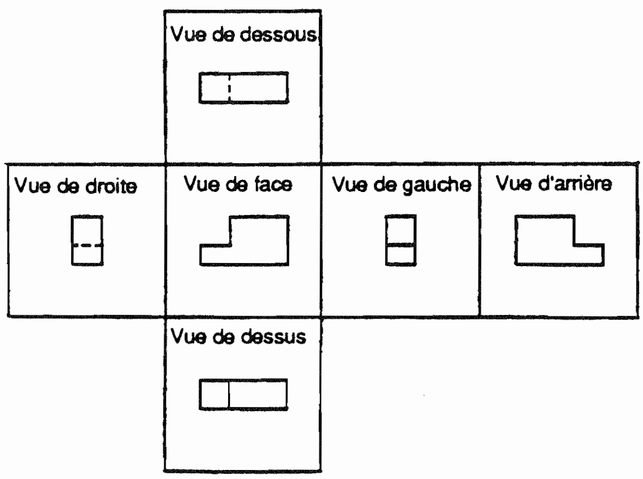
- projections cylindriques (ou parallèles) :
  - projection orthogonale de l'objet sur plusieurs plans orthogonaux : dessin technique, géométrie descriptive
  - projection de l'objet sur un seul plan :
    - projection oblique : perspective cavalière, perspective "militaire"
    - projection orthogonale : perspective axonométrique
- projection conique : perspective centrale

2) Dessin technique

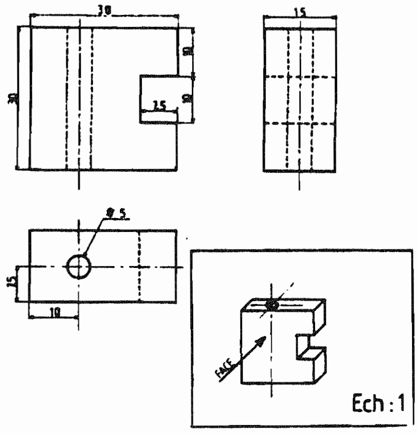
On imagine l'objet dans un parallélipipède rectangle et l'on projette cet objet sur les 6 faces de celui-ci. Ces projections peuvent être assimilées aux images perçues par un observateur placé à différents endroits : face à l'objet, à droite, à gauche, au dessus, ... D'où la terminologie utilisée : vue de face (ou parfois élévation), vue de gauche, etc ...



La disposition des différentes vues sur la feuille de dessin résulte d'un développement du parallélipipède : c'est le système européen où la vue de gauche est placée à droite de la vue de face.



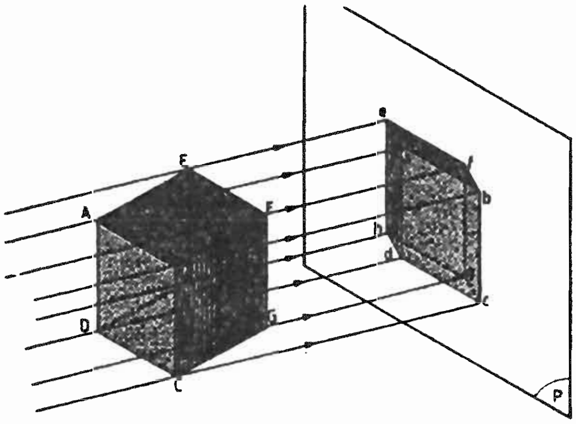
En fait on ne représente le plus souvent que 2 ou 3 vues, celles qui donnent le maximum d'informations.



Conventionnellement, les arêtes vues sont représentées en traits pleins alors que les arêtes cachées le sont en traits pointillés.

3) Perspective cavalière

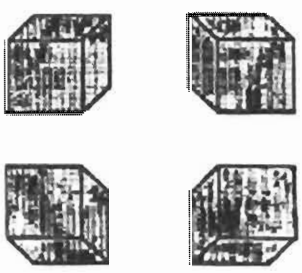
(du nom d'un ouvrage de fortification appelé "*cavalier*")



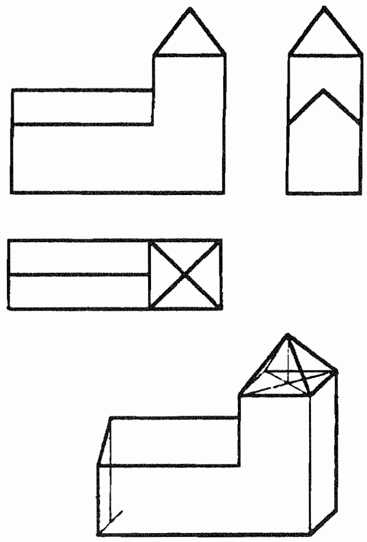
Il s'agit d'une projection oblique sur un plan (le plus souvent vertical) parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.

Les éléments situés dans des plans parallèles au tableau (plan de projection) se projettent sans déformation et en vraie grandeur (à une échelle près) : les distances et les angles sont conservés.

Les droites perpendiculaires au tableau se projettent selon une même direction, dite *direction des fuyantes*, faisant un angle donné avec l'horizontale. Cet angle est le plus souvent égal à 45°. Les distances sur cette direction des fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction : 0,5 en général.

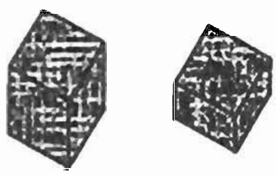


Perspective cavalière du cube

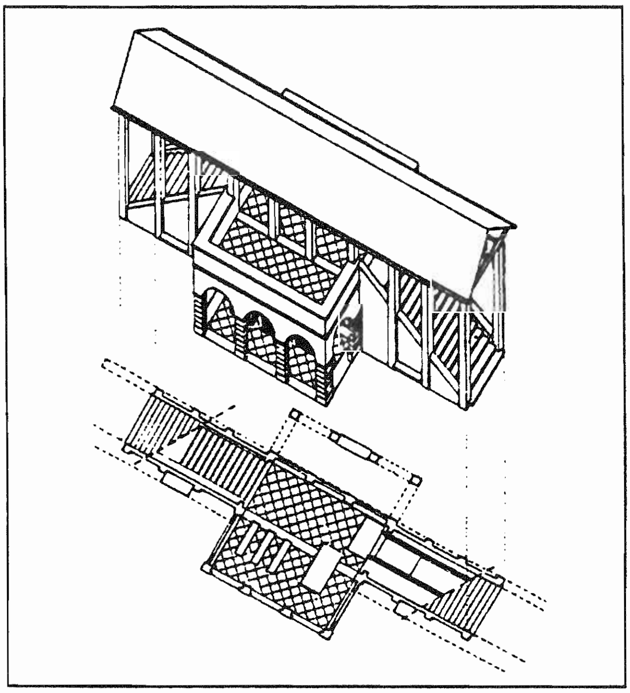


Perspective cavalière construite à partir des projections orthogonales

Remarque : en architecture, on utilise une perspective qui suit un principe semblable : mais cette fois, le plan de projection est horizontal (sol). Les éléments situés dans des plans horizontaux sont projetés en vraie grandeur : on peut donc partir du plan de l'édifice pour construire la perspective. Dans ce contecte, cette technique est appelée, selon les auteurs, "*perspective axonométrique*" ou encore "*perspective militaire*".

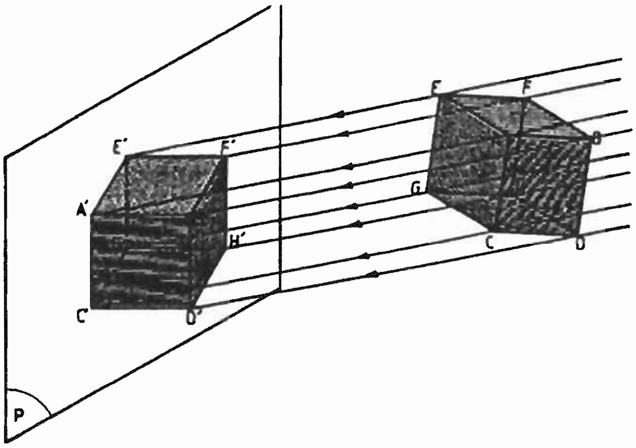


Perspective miltaire du cube



4) Perspective axonométrique

Il s'agit d'une projection orthogonale de l'objet sur un plan non parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.

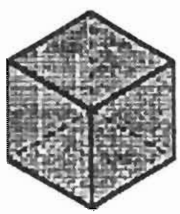


Elle se caractérise par les angles formés par les projections des 3 directions du repère associé à l'objet, ainsi que par les coefficients de réduction sur chacune de ces directions :

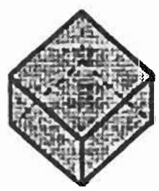
perspective isométrique : 3 angles égaux (120°) ; $k_x = k_y = k_z = 0{,}82$

perspective dimétrique : 2 angles égaux ($a = b = 131° 30'$; $c = 97°$)
$k_x = k_y = 0{,}94$; $k_z = 0{,}47$

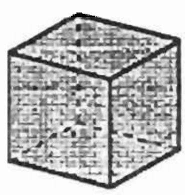
perspective trimétrique : les 3 angles sont différents
$a = 105°$ $k_x = 0{,}65$
$b = 120°$ $k_y = 0{,}86$
$c = 135°$ $k_z = 0{,}92$



Perspective isométrique



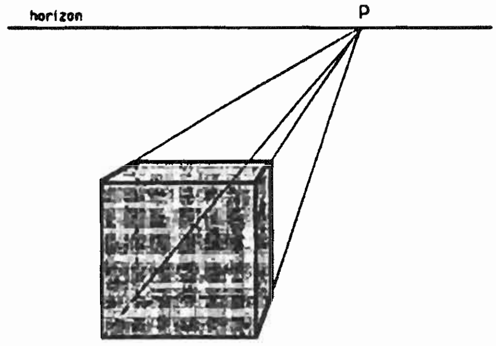
Perspective dimétrique



Perspective trimétrique

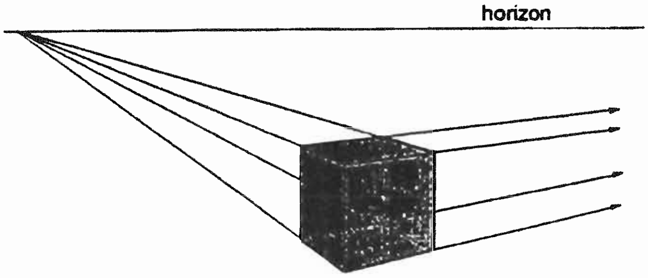
5) Perspective centrale

Ce procédé, mis au point par les peintres et architectes de la Renaissance (Alberti, Brunelleshi, Dürer,...), est un système de représentation de l'espace visant à produire une image identique à celle que perçoit un observateur.



Une face du cube est parallèle au tableau

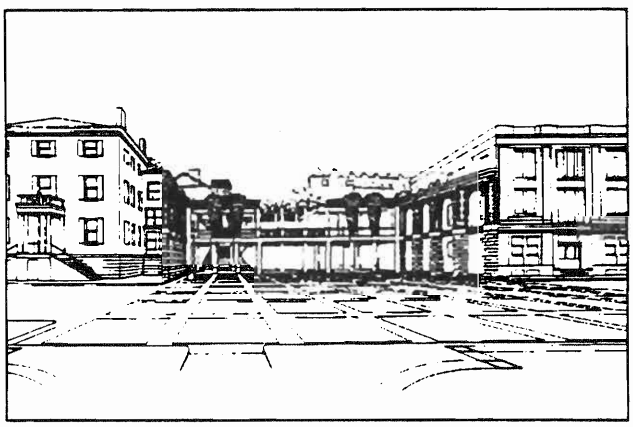
Tous les plans de même direction (elle-même non parallèle au tableau) convergent vers une ligne de fuite : ainsi la ligne d'horizon est la "fuite" des plans horizontaux.



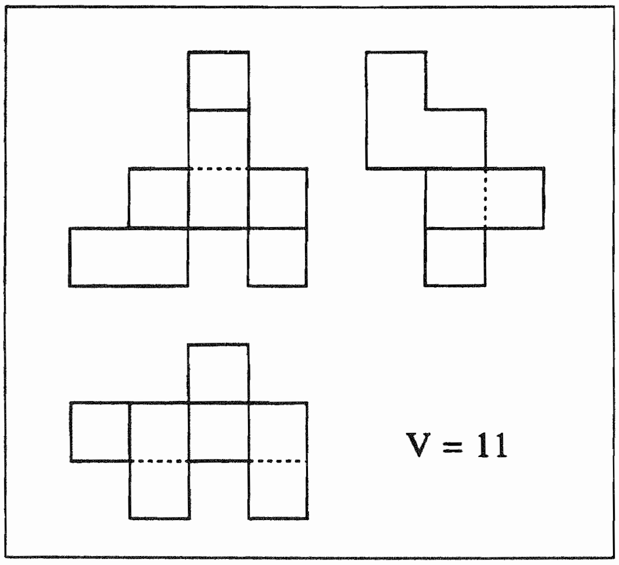
Les horizontales des 2 directions principales fuient vers 2 points

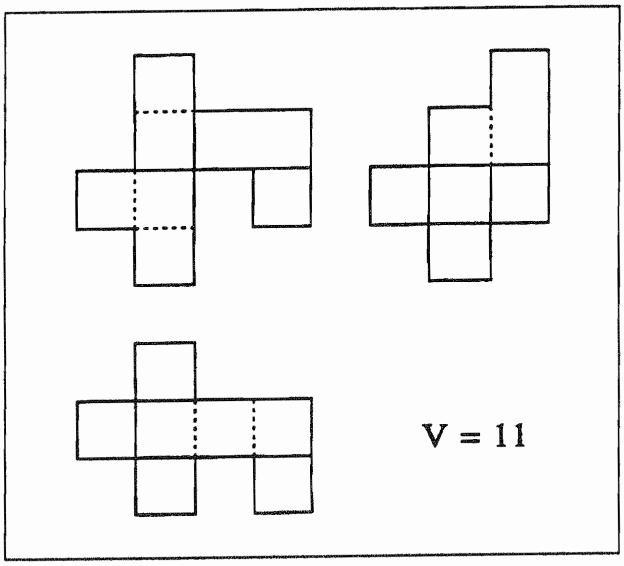
Toutes les droites de même direction (elle-même non parallèle au tableau) convergent vers un point de fuite : toutes les droites horizontales ont un point de fuite sur la ligne d'horizon, le point principal étant le point de fuite des horizontales perpendiculaires au tableau.

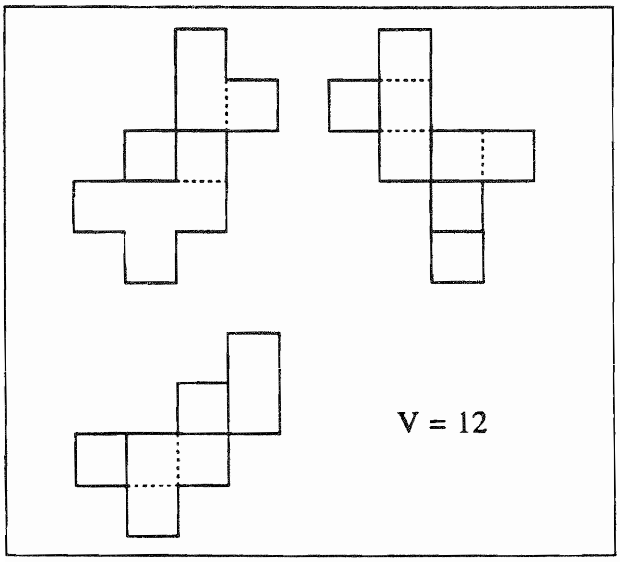
Enfin toute droite parallèle au tableau se projette dans la même direction.

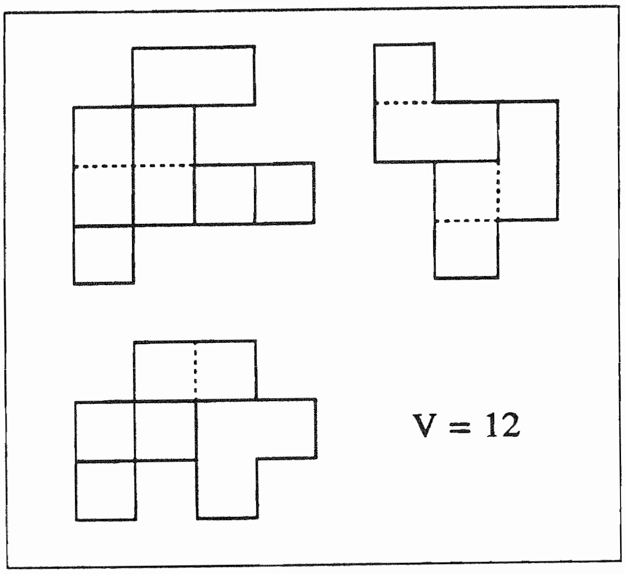


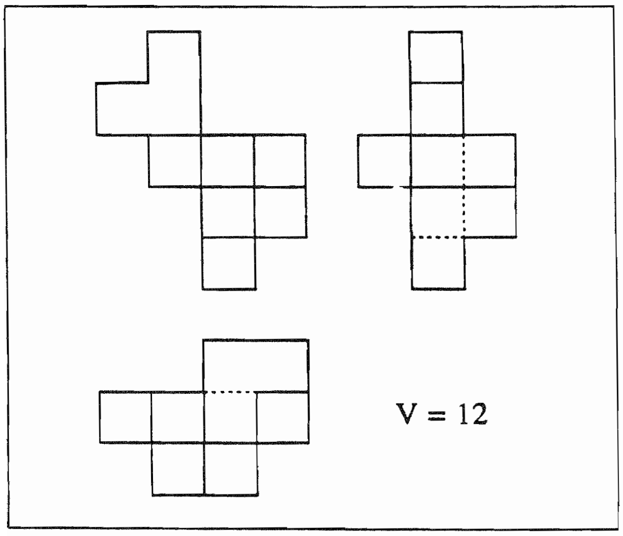
ANNEXE
Vues des solides utilisés (cf. II et III)

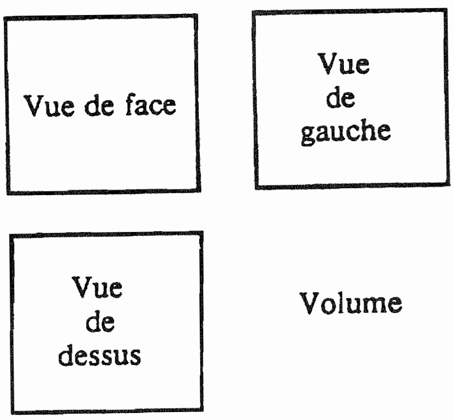












Titre : Géométrie sur un cube

Auteurs : J.C. DUCORAIL (I.E.N Bordeaux), et M.H. SALIN (P.E.N Bordeaux)

Date : Janvier 1990

Origine : Divers articles (cf. bibliographie à la fin du document)

Type : Activités conduites en stage de formation continue

Mots-clés : Géométrie (plane et dans l'espace), orthogonalité, parallélisme, cube, perspective cavalière, volumes.

GÉOMÉTRIE SUR UN CUBE

Le cube apparait comme un volume simple et ses propriétés semblent évidentes (du moins celles que chacun croit connaître et chacun pense qu'il les connaît toutes). Objet d'étude sans mystère, il peut apparaître à l'enseignant et à l'élève comme étant un bon support de réussite immédiate ... et il ne présente plus alors le moindre intérêt. Nous allons essayer de prouver le contraire.

UTILISATION AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION INITIALE

Le cube va être étudié à partir de situations diverses qui feront appel à cinq types de représentations :

- le patron (le développement) du volume,

- le volume réalisé en "dur" (bois ou polystirène),

- le volume réalisé à partir d'un patron,

- le volume représenté en perspective cavalière (même approximative),

- le volume représenté en dessin technique.

Ce sont les interactions entre ces cinq "*écritures*" du cube qui vont permettre :

- de faire des hypothèses,

- de vérifier, de valider les conjectures,

- de se familiariser avec des représentations de l'espace,

- de comprendre, dans et par l'action, la nécessité de tracés soignés et précis,

- d'anticiper les actions par un va-et-vient entre l'espace et sa représentation plane,

- d'utiliser en situation les outils du dessin géométrique.

Par exemple, la recherche de tous les patrons du cube peut être validée par la réalisation du cube construit ou par une réalisation rapide de bristol quadrillé (pour la rapidité du tracé). La dialectique du "plan" à l'espace, du "dessin" au concret doit toujours être présente dans les activités proposées.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES VISÉS

- parallélisme de deux droites dans l'espace,

- orthogonalité d'une droite et d'un plan,

- plans perpendiculaires et section du dièdre droit.

...

CONTENUS DIDACTIQUES

- montrer que la géométrie plane se fait dans un plan même si ce plan n'est pas celui de la feuille ou celui du tableau,

- dans le vécu des enseignants en formation, montrer que le constat d'erreur (ou de réussite) doit venir de la situation elle-même, c'est-à-dire ici de la transposition d'une "écriture" du cube dans une autre, ce qui permet de vérifier, de valider une action ou une hypothèse,

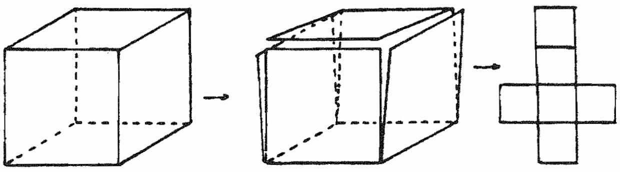
- chercher les transpositions didactiques possibles avec des élèves.

A LA RECHERCHE D'UN PATRON DU CUBE

1) Situation de départ

Chaque élève (ou chaque groupe d'élèves) dispose d'un cube "en dur" (cf. paragraphe matériel). La consigne est de rechercher le développement de ce volume donné. Le développement étant réalisé, il faut alors construire un cube dont la longueur de l'arête est différente de celle du cube initial. Cette réalisation sert de validation de l'activité précédente.

On pourrait également partir de la représentation du cube en perspective cavalière. La consigne serait alors de désigner les arêtes selon lesquelles il faut couper pour "ouvrir" le cube et de passer ensuite au patron d'un cube d'arête donnée pour valider.



2) Notes sur la perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation codée des volumes.

Principes :

- Toutes les figures des plans frontaux sont représentées sans déformation (conservation des propriétés angulaires et métriques) à l'échelle près.

- Contrairement au dessin habituel, le point de fuite est rejeté à l'infini. Il y a donc conservation du parallélisme. En général on choisit un "angle de fuite" par rapport à l'horizontale de 30°, 45° ou 60° à cause des instruments de dessin.

- Pour conserver à l'oeil l'impression correcte du volume, on réduit les dimensions sur les fuyantes (2/3, 1/2, 3/4 ...) selon l'angle de fuite choisi. Tout dessin en perspective cavalière devrait donc comporter l'indication de l'échelle et de la réduction sur les fuyantes.

- On représente en traits pleins ce qui est visible et en traits interrompus ce qui est caché.

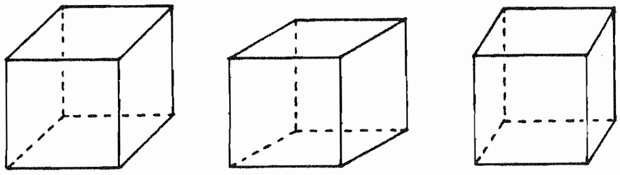
Propriétés :

- Sur les tracés non déformés toutes les propriétés de la géométrie plane sont conservées.

- Sur les autres faces sont conservées les propriétés du parallélisme et les propriétés des milieux.

Ci-dessous trois représentations d'un même cube avec 3 angles de fuite différents : 45°, 30°, 60°.

Les réductions sur les fuyantes sont respectivement 2/3, 2/3, 1/2.



3) Et ensuite .....

Si on en reste là, avec cette seule activité, on peut considérer que le tour du cube (au propre comme au figuré), a été fait et qu'il suffira d'ajouter la formule du volume pour que chacun sache ce qu'est réellement un cube. Malheureusement il n'en est rien et toute la richesse du cube reste inexplorée.

Ce que nous proposons ci-après est un essai d'exploitation des richesses du cube dans le but d'une approche différente de la géométrie.

4) Les patrons du cube

On peut proposer ensuite de rechercher tous les patrons possibles du cube.

On peut partir des divers patrons trouvés dans la classe lors de la situation (1) et se demander s'il existe d'autres modèles. On peut partir à nouveau du cube en "dur".

On peut se demander si tous les hexaminos sont des patrons du cube.

On peut partir de la perspective cavalière (situation difficile).

Quel que soit le point de départ choisi, il importe de pouvoir vérifier rapidement les hypothèses sans recourir à une réalisation soignée comme en (1). Du papier quadrillé sur lequel le tracé est facile et que l'on peut rapidement découper et plier permet cette vérification.

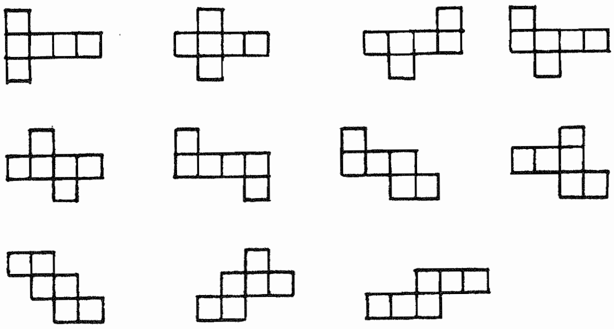
Ensuite il faut trier et classer les patrons trouvés. Ce tri va permettre:

- d'éliminer les patrons identiques (superposables par retournement ou par rotation),

- de vérifier s'il n'y a pas d'autre combinaison de six carrés adjacents par un moins un côté qui permette de construire un cube,

- de vérifier au moins qu'il existe des combinaisons de six carrés qui ne permettent pas de construire un cube.

Les onze patrons du cube:



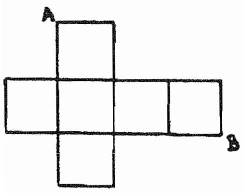
Toute cette activité ne peut se conclure que par la réalisation effective de cubes à partir des patrons ainsi trouvés.

5) D'autres exercices avec les patrons.

Plusieurs exercices sont possibles. Ils conduisent tous à passer mentalement du patron au cube réalisé, de la représentation au patron.

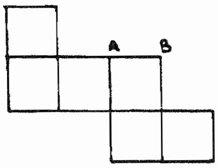
Voici quelques exemples :

- Sur un patron, désigner le sommet extérieur d'un carré. Demander de désigner les autres sommets qui viennent se superposer à celui-ci lors du "montage" du cube.



Sommets venant coïncider avec A? avec B? etc...

- le même exercice peut être fait avec le côté d'un carré :

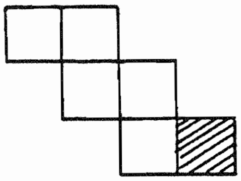


Quel côté vient se superposer sur AB?

- réaliser, sur un patron quelconque, le tracé effectué sur le cube en vraie grandeur (cf. infra, tracés sur le cube).

- sur un cube réalisé, indiquer (en les repassant avec un feutre par exemple) les arêtes selon lesquelles, il faut couper pour "ouvrir" le cube et obtenir un patron désigné à l'avance.

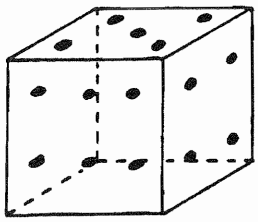
- même exercice avec un carré. On peut chercher la face opposée :



Quelle est la face opposée à la face hachurée?

- un onglet (pour le collage) étant placé, indiquer où se placent les autres sur le patron.

- A partir d'un dé représenté en perspective cavalière



Sur un patron placer le 6 et le 4 ou le 6 et le 3, ou ... et demander aux élèves de replacer les autres faces du dé sur le même patron.

Il faut alors considérer que le patron se plie à l'inverse des habitudes, c'est-à-dire que les faces sur lesquelles on écrit deviennent des faces extérieures du cube réalisé.

On peut recommencer avec divers patrons, avec diverses faces du dé.

TRACÉS SUR UN CUBE

Ayant réalisé un volume, il est intéressant d'effectuer des tracés sur ses faces. C'est une première approche de la géométrie dans l'espace mais en vraie grandeur.

Le passage du tracé réalisé à ses représentations en perspective cavalière et en dessin technique devrait permettre:

- de se familiariser avec les représentations de l'espace,

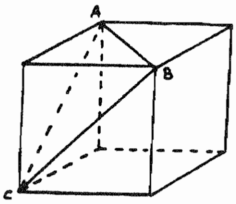
- de rencontrer les projections orthogonales,

- de s'attacher davantage aux propriétés qu'aux représentations,

- de formuler des hypothèses à partir de figures "fausses".

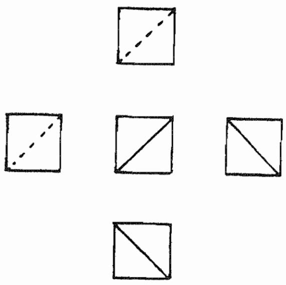
Ici, dans ce document, la présentation ne peut se faire qu'avec des représentations en perspective cavalière ou en dessin technique mais il faut d'abord réaliser les tracés sur un cube réel avant de les représenter.

1) Quelques polygones

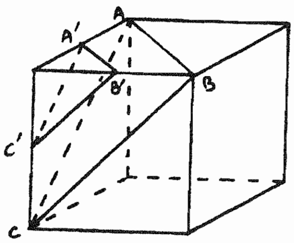


Nature du triangle ABC?

Calcul des côtés.

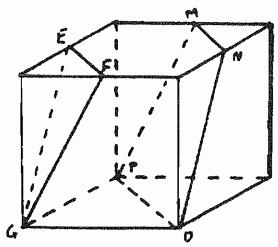


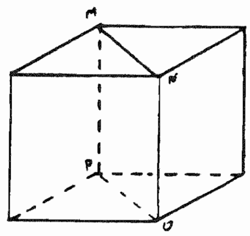
Dessin technique (projection et rabattement)



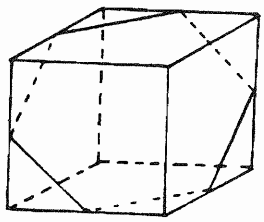
Nature du triangle A'B'C' ?

Rapport entre ABC et A'B'C'?





Nature de EFG ?
Nature de MNOP ?

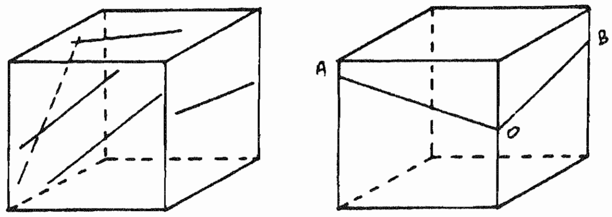


Nature du polygone construit en joignant les milieux des arêtes?

Ces divers tracés de figures planes "dans l'espace" peuvent apporter une autre conception de la géométrie et montrer, par exemple, que la géométrie dans un plan n'existe pas uniquement sur le plan de la feuille de cahier ou sur le plan du tableau.

2) Droites sur un cube

Le tracé de droites sur les faces d'un cube peut permettre de faire découvrir la fausseté de quelques théorèmes erronés construits autour de l'orthogonalité ou du parallélisme dans l'espace.



AÔB est-il droit?

Le cube "dur" que l'on peut couper aide à prendre conscience de la fausseté de certaines intuitions. La représentation en perspective cavalière montre que des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas dans la "réalité".

CUBES TRONQUÉS

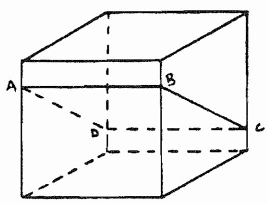
1) Sections du cube par un plan

Si un plan coupe une face du cube, combien en coupe-t-il au plus? au moins?

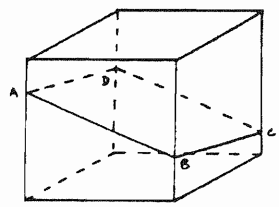
Dans tous les cas il serait souhaitable de partir de la représentation du cube en perspective cavalière, de demander de formuler des hypothèses, éventuellement de démontrer.

On pourra ensuite vérifier en réalisant une coupe du cube en "dur" ou en réalisant le tracé sur le cube (trace de l'intersection du plan sécant avec chacune des faces).

Vous trouverez ci-dessous quelques exemples et des pistes éventuelles de recherches à conduire.



Nature du quadrilatère ABCD ?



Nature de ABCD ?

Quelques questions à chercher :

Quelles conditions doit remplir le plan sécant pour que la section soit :

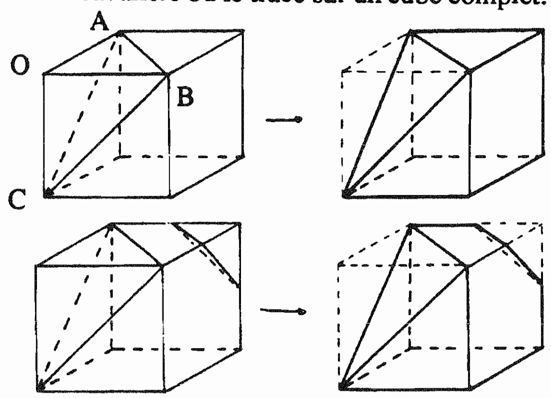
- un quadrilatère?
- un trapèze?
- un parallélogramme?
- un carré?
- un rectangle?
- un hexagone? (pas forcément régulier)

La section du cube peut-elle être un losange? Dans quel cas?

2) *Cubes tronqués et patrons*

Certes on pourrait faire réaliser les patrons des troncs de cubes obtenus à partir de l'intersection d'un cube et d'un plan. Certains cas peuvent être délicats à réaliser. Il est plus simple de s'intéresser à des sections plus régulières.

Le point de départ pourrait être le dessin en perspective cavalière ou le tracé sur un cube complet.



On peut demander de réaliser le patron et le volume construit :

- de la pyramide
- du cube tronqué

en 2 groupes séparés

- de la grande pyramide
- de la petite pyramide
- du cube tronqué

en 3 groupes séparés

Une représentation de ces volumes en dessin technique peut être un excellent exercice de projection.

On peut aussi demander de chercher combien de pyramides OABC on peut tirer d'un même cube et de faire des hypothèses sur ce qui reste à l'intérieur du cube.

3) *Autres pistes*

On peut aussi s'intéresser aux volumes obtenus à partir de l'octogone régulier inscrit sur chaque face du cube, à partir des centres de chacune des faces, etc.

MATÉRIEL ET MATÉRIAUX

- Polystirène et filicoupeur (cf."*Géométrie au premier cycle*" tome 2, p. 45 : "*Le fil à couper le beurre*").
- papier bristol ou à dessin
- colle
- ciseaux
- instruments du dessin géométrique
- papier ordinaire quadrillé pour les tracés rapides.

BIBLIOGRAPHIE

- *"Espace et géométrie pour les enfants de 3 à 11 ans"* François BOULE (Editions CEDIC)

- *"Modèles mathématiques"* H.M CUNDY et A.P. ROLLET (Editions CEDIC)

- *"Formation mathématiques des Instituteurs"* Nicolas BALACHEFF, Jean KUNTZMANN, Colette LABORDE (Editions CEDIC)

- Brochures de l'A.P.M.E.P (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. 26, rue Duméril - 75013 PARIS) :

  * *"Aides pédagogiques pour le CM"*, tome 1, *"Géométrie"*
  * *"Géométrie au premier cycle"*, tomes 1 et 2
  * *"Activités mathématiques en quatrième-troisième"* tomes 1 et 2

- *"Introduction à la géométrie dans l'espace. Activités pour la 5ème"* (IREM de Grenoble)

Partie 4

Situation d'enseignement et rapport au savoir

EXEMPLES DE SITUATIONS POUR LA FORMATION D'ENSEIGNANTS

"LES TRANSVASEMENTS"

(Joël BRIAND, PEN Bordeaux)

"LA VACHE ET LE PAYSAN"

(Hervé PÉAULT, PEN Angers)

Ces deux activités peuvent être conduites en préprofessionnalisation, de même qu'en formation initiale ou continue. Dans tous les cas, le but recherché est de réaliser rapidement les conditions d'une réelle pratique mathématique dans le cadre institutionnel que constitue un groupe d'étudiants et un professeur.

Ce type d'activité permet de mettre en évidence:

- Les difficultés à se construire une conviction sans s'en référer au professeur. (*contrat*)

- la nature première de la démonstration qui est de prouver à d'autres parce que l'on a pris en charge le problème et que l'on souhaite convaincre. (*dévolution*)

- les *conflits cognitifs* qu'un problème provoque.

- les types de démonstration. (*changements de cadres*).

"RAPPORT AU SAVOIR, DÉVOLUTION, INSTITUTIONNALISATION"

(Joël BRIAND, PEN Bordeaux)

En partant d'énoncés de problèmes classiques, il s'agit ici, en formation initiale ou continue, de construire des situations et d'analyser les changements permettant de modifier favorablement le rapport des enfants au savoir.

Titre : LES TRANSVASEMENTS.

Auteur : Joël Briand (P.E.N. Bordeaux).

Date : Novembre 90.

Origine : Enoncé de problème in "*Amusements mathématiques*" NORTHROP (Dunod).

Type : Compte-rendu d'activité en préprofessionnalisation et formation continue.

Résumé : A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions. L'activité et les débats permettent d'aborder les thèmes de démonstration, preuve, vérité, conflit cognitif.

Mots-clés : démonstration, preuve, vérité, contrat, dévolution, conflit cognitif.

LES TRANSVASEMENTS

I - Exercice

"Soient deux récipients contenant, en égale quantité, l'un un liquide A, l'autre un liquide B.

A l'aide d'une cuillère, on prend une quantité du liquide A que l'on verse dans le liquide B. Du mélange ainsi obtenu dans le deuxième récipient, on prend une cuillère que l'on verse dans le liquide A.

1) Y a-t-il plus de liquide A dans B que de B dans A?

2) Y a-t-il plus de liquide B dans A que de A dans B?

3) Y a-t-il autant de B dans A que de A dans B?"

II - Déroulement de l'activité

L'énoncé est proposé sous forme écrite ou orale. Les stagiaires sont par deux.

Le contrat entre le formateur et les stagiaires est le suivant:

"Dans deux minutes je vous demande de vous prononcer pour l'une de ces trois hypothèses. Ensuite, vous allez trouver une méthode pour confirmer ou infirmer votre hypothèse de départ."

De temps en temps, le formateur note le temps passé ainsi que l'état des opinions. En aucun cas, il ne suggère quoi que ce soit, pas même sur le plan méthodologique.

A chaque fois qu'un stagiaire pense pouvoir donner une explication argumentée, il est invité à venir expliquer au groupe.

III - Premières remarques

J'ai conduit cette séquence avec des publics divers (étudiants en préprofessionnalisation, normaliens, instituteurs en formation continue).

Dans chaque cas j'ai constaté:

1) L'hypothèse 2 est largement majoritaire dans les premières minutes. L'argument généralement avancé, ayant statut de preuve pour la majorité du groupe, est le suivant:

"Lorsque je ramène du second vers le premier récipient, je rapporte un peu de liquide B, donc il y a plus de B dans A que de A dans B".

2) Les changements de conviction sont nombreux. (Les résultats figurant sur ce document ne font pas état du cheminement de chaque stagiaire.)

3) Peu de stagiaires n'entrent pas dans le jeu.

4) J'ai toujours eu au moins un stagiaire défenseur (souvent maladroit dans les premières explications) de l'hypothèse vraie...

5) Le traitement de cas particuliers constitue un lieu privilégié de débats.

Un phénomène de lassitude apparaît quelquefois lorsque le groupe n'a pas trouvé une preuve au bout de 2 ou 3 heures. Dans ce cas, je ne donne pas de réponse et passe à une autre activité. Le problème "mijote" et fait immanquablement reparler de lui au cours d'une séance suivante.

IV- Résultats, analyses

Cette séquence avec des étudiants en préprofessionnalisation, (étudiants de DEUG A et B), a donné les résultats suivants:

Durée (en minutes)	1	5	10	15	35	55	65
solution 1	1	0	0	0	0	0	0
solution 2	11	10	8	7	3	3	0
solution 3	0	2	5	3	8	8	14

Au cours d'un stage, les résultats ont été:

Durée (en minutes)	1	5	25	40	50	60
solution 1	2	0	0	0	0	1
solution 2	11	9	9	11	13	12
solution 3	1	4	2	3	1	2
sans opinion	1	2	4	1	1	0

avec arrêt au bout de 2 heures.

Une seule fois, un stagiaire n'a pas été convaincu de l'exhaustivité de ces trois hypothèses: *"il y a moins de liquide A dans le B que de B dans le A"* n'était pas perçu comme équivalent à l'hypothèse 2.

Comportements répétés :

- Après un exposé sur un cas particulier, (celui où la contenance de la cuillère est exactement le volume du liquide A (ou B), certains partisans de l'hypothèse 2 sont troublés, d'autres disent : *"justement, c'est un cas particulier, il faut l'éliminer"*.

- La "pression" est en général très forte lorsqu'une large majorité de stagiaires est convaincue de H2 face aux convaincus (minoritaires) de H3.

Les stagiaires se tournent constamment vers le formateur pour obtenir une opinion de "celui qui connait la solution". Lorsqu'il est clair que rien ne filtrera du côté de celui-ci, le déroulement change.

"Comment pourra-t-on réfuter une hypothèse alors que l'on ne voit pas d'erreur de raisonnement ?"
"Comment va-t-on savoir si on a raison ou non?"
"Et si on est tous d'accord sur une hypothèse fausse ?"
"Vous n'avez pas le droit de ne pas nous dire !"
...

V- Les stratégies adoptées, cadre, changements de cadre

On peut classer les stratégies selon 5 catégories :

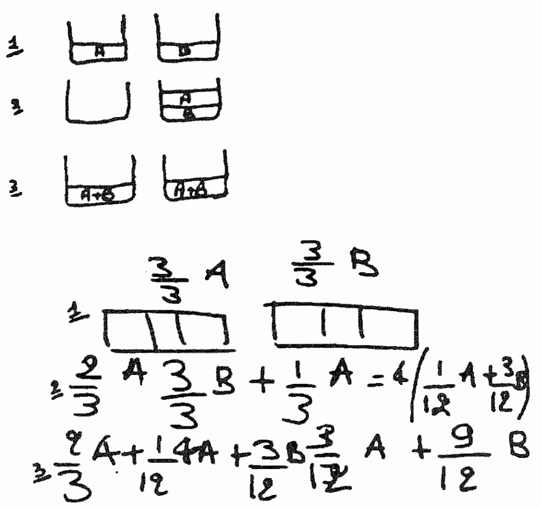
1) Un fait reconnu qui provoque une conclusion (modèle qui apparaît en début) :

"Lorsque je ramène du second vers le premier récipient, je rapporte un peu de liquide B, donc il y a plus de B dans A que de A dans B".

2) Examen d'un cas particulier à l'aide des nombres (modèle qui apparaît tard) :

La cuillère a une contenance égale à une fraction simple du volume de liquide (1, 1/2, 1/3).

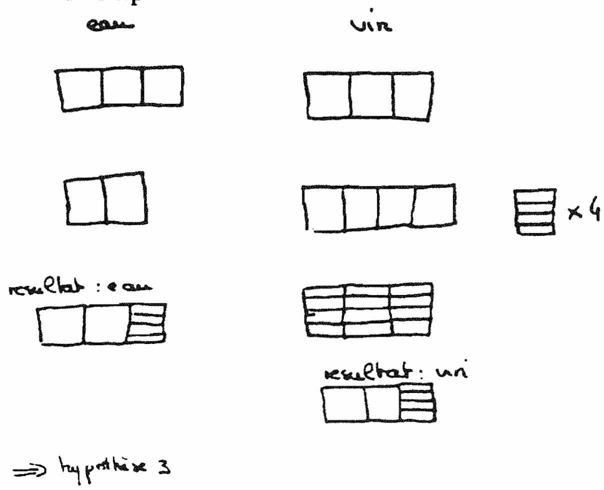
Exemple :



3) Examen d'un cas particulier à l'aide de schéma (modèle qui apparaît tard) :

La cuillère a une contenance égale à une fraction simple du volume de liquide (1 1/2 1/3).

Exemple :



4) Démonstration utilisant un coefficient réel (modèle qui apparaît tard et qui est rarement bien conduit ; erreur type : $/\alpha$ au lieu de $/\alpha+1$).

exemple de raisonnement correct:

$$\text{①}\quad \cancel{x+dx}\ x \;\Big|\; y$$

$$\text{②}\quad x-\alpha x \;\Big|\; y+\alpha x$$

$$\text{③}\quad x-\alpha x+\frac{\alpha}{1+\alpha}(y+\alpha x) \;\Big|\; y+\alpha x-\frac{\alpha}{1+\alpha}(y+\alpha x)$$

$$x-\alpha x+\frac{\alpha^2}{1+\alpha}x+\frac{\alpha y}{1+\alpha} \;\Big|\; y+\alpha x-\frac{\alpha^2 x}{1+\alpha}-\frac{\alpha y}{1+\alpha}$$

$$x\left(1-\alpha+\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right)+y\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \;\Big|\; y\left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+x\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right)$$

$$x\left(\frac{1+\alpha-\alpha-\cancel{\alpha^2}+\alpha^2}{1+\alpha}\right)+y\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$C = x\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)+y\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \qquad y\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)+x\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$$

5) Démonstration utilisant les égalités-états (modèle rare) :

$$\text{①}\quad V_A \qquad V_B$$

$$\text{②}\quad V_A-q_A \qquad V_B+q_A$$

$$\text{③}\quad V_A\underbrace{-q_A+q'_A+q''_B} \qquad V_B+\underbrace{q_A-q'_A-q''_B}$$

$$\underbrace{-q_A+q'_A}+q''_B = q_A-q'_A-q''_B$$

$$\Rightarrow \boxed{q_A-q'_A=+q''_B}$$

ou bien:

"Puisque les niveaux sont les mêmes à la fin, ce qui est parti de A est rentré dans B, et inversement, donc c'est pareil".

J'ai constaté que peu d'étudiants changeaient de cadre. Ceux qui travaillaient sur le numérique, comme ceux qui travaillaient sur schémas restaient, en général dans leur cadre. C'est dans le modèle 2, (examen d'un cas particulier) que les étudiants changeaient plus facilement de cadre.

VI - Les points de didactique abordés

Lors de cette séquence, sont abordés :

- le rapport à la vérité.
- la notion de preuve, de conviction, les types de preuves.
- la nature du contrat que passent le formateur et les étudiants.
- les cadres (numérique et géométrique).
- la notion de conflit cognitif. (que l'on appelle souvent "paradoxe" ou "fausse intuition").

VII - Précisions de vocabulaire

PROBLÈME : Question à résoudre par des procédés scientifiques et discursifs.

DISCURSIF : Qui concerne le discours.

SCIENTIFIQUE : Relatif à la science (ensemble cohérent de connaissances relatives à certaines catégories de faits).

ÉNONCÉ : Ensemble de données d'un problème, d'une proposition, d'une relation entre des êtres mathématiques.

EXPLICATION : Discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat.

PREUVE : Explication acceptée par une communauté à un moment donné.

DÉMONSTRATION : Explications adoptant une forme particulière. Suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées: un énoncé est connu comme vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien définies.

RAISONNEMENT : Activité intellectuelle de manipulations d'informations.

RIGUEUR en mathématiques :La validité d'une démonstration repose sur un consensus d'experts qui, après tout, peuvent se tromper. En réalité, il n'y a pas de rigueur, mais des niveaux de rigueur.

La rigueur n'est qu'une question de conviction intime. Elle dépend du sujet, de sa culture, de ses connaissances, du contexte de l'époque et de la société.

VIII - Bibliographie

— *"Fantaisies et paradoxes mathématiques"* NORTHROP (Dunod)

— *"Suivi scientifique de 5ème"* (publication IREM), article de M. Mante sur la naissance du raisonnement déductif.

Titre : LA VACHE ET LE PAYSAN

Auteur : Hervé Péault (P.E.N. Angers)

Date : février 1991

Origine : Problème rapporté par J.-L. OYALLON lors du colloque PEN de Paris (Cité par A. Bouvier - qui dit le tenir de N. Balacheff - dans le bulletin numéro 13 de l'IREM de Grenoble)

Type : Compte-rendu d'activité en formation initiale et continue

Résumé : A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions. L'activité et le débat qui suit permettent d'aborder les thèmes de la résolution de problèmes, de la démonstration, de l'analyse des erreurs, ainsi éventuellement que celui des situations additives.

Mots-clés : Résolution de problèmes - démonstration - preuve - erreurs - conflit cognitif - dévolution - contrat - situations additives

LA VACHE ET LE PAYSAN

Contexte

J'ai utilisé 5 ou 6 fois cette activité, en formation initiale et en formation continue, sur une durée de 2 h ou 3 h.

Elle me semble être une bonne activité introductive dans le cadre d'une formation. Elle permet de soulever divers points de didactique, notamment les problèmes de formulation d'une argumentation, de validation par la démonstration, d'analyse et de compréhension des erreurs, ... Ce peut en outre être un support intéressant pour l'étude d'une typologie des situations additives.

Particularité

Le problème de départ a ceci de particulier qu'il paraît très simple mais qu'il est fréquent que les gens trouvent des solutions erronées sans qu'il soit pour autant toujours facile d'en montrer la fausseté.

Le Problème

"Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5000 F. Il la revend 6000 F. Se ravisant, il la rachète 7000 F. Il la revend à nouveau 8000 F.

A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ?
Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ?"

Déroulement

Les lignes générales de ce déroulement sont annoncées avant l'énoncé du problème

1) Chacun cherche seul pendant 5 à 10 minutes.

2) Chacun, tour à tour, indique sa conclusion. Les différentes solutions sont notées au tableau, sans commentaires, avec le nombre de personnes les ayant retenues.

3) Un représentant de chacune des solutions expose son argumentation (plusieurs si d'autres estiment avoir procédé différemment), de préférence en notant sur le tableau. Les autres peuvent poser des questions, mais uniquement pour chercher à comprendre l'argumentation, en évitant d'opposer des objections.

4) Sondage : pour chacune des solutions, on demande combien sont convaincus de sa justesse.

5) Pour chacune des solutions qui ont été proposées, la parole est à ceux qui veulent contre-argumenter.

6) Nouveau sondage sur les convictions quant aux solutions proposées.

7) Les échanges continuent, jusqu'à ce que tous s'estiment convaincus de la justesse de l'une des solutions mais aussi de la fausseté des autres (ou jusqu'à une heure fixée si cette condition n'est pas remplie...)

8) Débat didactique sur l'activité elle-même.

Remarques

a) J'annonce dès le départ que je n'interviendrai à aucun moment sur la validité des argumentations, que ce n'est pas moi mais les autres qu'il faut convaincre et que je ne fais que diriger le débat pour permettre à chacun de s'exprimer.

L'engouement des participants est en général assez fort et il est quelquefois difficile de canaliser le flot des argumentations et contre-argumentations.

b) L'activité "tombe" si tout le monde trouve d'emblée la solution correcte. Cela ne m'est jamais arrivé (j'avais prévu, dans cette éventualité, de semer le doute en présentant moi-même une solution erronée) mais ce n'est sans doute pas à exclure

(Pour *n* participants dans un groupe, le nombre de solutions correctes trouvées du premier coup a varié entre *n/4* et ... *n-1*; dans ce dernier cas, la personne isolée s'est défendue avec acharnement...)

Exemple de propositions

Le tableau ci-dessous donne, à titre d'exemple, l'évolution des convictions (le plus large éventail que j'ai obtenu) à l'intérieur d'un groupe de 17 instituteurs, particulièrement animé.

colonne A : propositions après recherche individuelle
colonne B : convictions après exposé des premières argumentations
colonne C : convictions après exposé des premières contre-argumentations.

	A	B	C
Ni gain ni perte	5	3	1
Gain de 1000 F	6	1	1
Gain de 2000 F	5	5	11
Gain de 3000 F	1	0	0
Ne sait pas	0	8	4

Dans un autre groupe est apparue aussi au départ l'affirmation *"ça dépend de la somme initiale dans son portefeuille"*. Cette affirmation revient d'ailleurs souvent dans les autres groupes, au cours des argumentations.

Exemples d'argumentations

Voici un résumé simplifié des argumentations les plus fréquemment apparues :

"Ni gain ni perte"

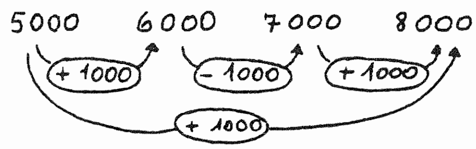
- *"gain de 1000 F entre premier achat et première vente, gain de 1000 F entre deuxième achat et deuxième vente, perte de 2000 F entre le premier et le second achat, donc solde nul. Les bénéfices de 1000 F sont annulés par l'augmentation de 2000 F d'un achat à l'autre."*

- *"8000 F - 6000 F = 7000 F - 5000 F. Même différence entre les prix d'achat et de vente, donc ni gain ni perte."*

"gain de 1000 F"

- *"entre premier achat et première vente, gain de 1000 F ; entre première vente et second achat, perte de 1000 F ; entre second achat et seconde vente, gain de 1000 F ; bilan : gain de 1000 F".*

- même raisonnement s'appuyant sur un schéma du type :



"gain de 3000 F"

- Il y a un état initial et un état final comparables (il arrive sans vache, il repart sans vache). Peu importent donc les étapes intermédiaires. Il achète 5000 F au départ et vend 8000 F à la fin. D'où un bénéfice de 8000 F - 5000 F = 3000 F.

"perte de 3000 F"

- *"Argent engagé : 5000 F. Première transaction : gain de 1000 F. Deuxième transaction : gain de 1000 F. Solde : 1000 + 1000 - 5000 = -3000"*

"gain de 2000 F "

- gain de 1000 F à la première vente, gain de 1000 F à la deuxième vente, donc gain total de 2000 F

- il a dépensé 5000 F + 7000 F = 12000 F ; il a encaissé 6000 F + 8000 F = 14000 F ; gain de 2000 F

- supposons qu'il ait 7000 F en poche. Il achète 5000 F, il lui reste 2000 F ; il vend 6000 F, il a donc 8000 F ; etc..

- comme la précédente avec présentation sous forme d'un cahier de comptabilité avec les rubriques "report caisse", "recettes", "dépenses", "caisse"

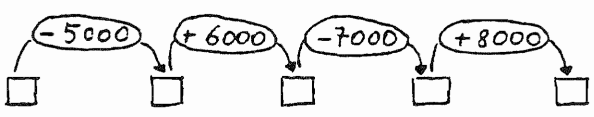
Remarques sur les argumentations

Les suppositions sur l'argent initial en poche ont entraîné une discussion sur la légitimité d'une telle supposition. C'est souvent à l'occasion de ce débat que des participants proposent de simuler la situation (il y en a toujours un prêt à jouer le rôle de la vache...) avec de la monnaie de papier ou aussi avec un carnet de chèques pour montrer l'indépendance par rapport à l'avoir initial. Jusqu'à ce que quelqu'un propose d'appeler "*x*" cet avoir initial et effectue un calcul littéral.

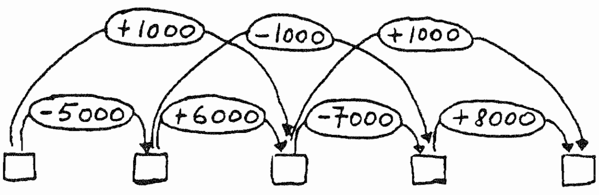
Le plus souvent, les participants sont assez vite persuadés que la solution "gain de 2000 F" est la bonne, mais en avouant qu'ils ne voient pas ce qui cloche dans l'exposé de la solution "gain de 1000 F" ; et l'essentiel du débat d'argumentation vise à montrer que les argumentations voulant prouver un gain de 1000 F sont fausses. Ceux qui pensent l'avoir compris essaient de convaincre les autres mais en revenant le plus souvent à une autre argumentation montrant la justesse de la solution "gain de 2000 F" et la question est sans cesse reposée : *"Ça, on voit bien, mais on ne voit toujours pas ce qui ne va pas dans l'argumentation pour le gain de 1000 F".*

Une contre-argumentation a eu un effet sur une partie du public, mais sans convaincre tout le monde : *"il suffit de considérer que la première fois il a acheté une première vache, et que la seconde fois c'est une autre vache ; ça ne change rien au problème, mais ça montre qu'il n'est pas légitime de prendre en compte une perte de 1000 F entre la première vente et le second achat".*

Les difficultés à rejeter la solution "gain de 1000 F" viennent essentiellement d'une confusion entre "états" et "transformations". Une seule fois quelqu'un a emporté la conviction de tous en proposant un schéma du type



et en interprétant la solution "gain de 1000 F" comme une composition erronée de transformations :



Prolongement didactique

- Lorsqu'on décide d'arrêter pour ne pas dépasser l'heure fixée (je prévois en général 1 heure avec une tolérance d'une petite demi-heure supplémentaire, "*jusqu'à la pause*" pour les séances de 3 h) et que des participants doutent encore, ils me demandent toujours de prendre position. J'ai choisi dans ce cas de présenter la classification des situations additives de G. VERGNAUD, à charge pour eux, s'ils le jugent utile, de reprendre le problème en le resituant dans cette typologie.

Il me semble que ce problème pourrait être un bon support pour une étude plus détaillée des situations additives.

- J'essaie de mener un débat à partir des questions "*que pensez-vous de cette activité ?*" "*comment analysez-vous l'évolution de vos convictions ?*" "*était-il nécessaire que je ne prenne pas position sur le fond ?*" "*plus généralement comment concevez-vous l'activité de résolution de problème dans la classe ?*" ... et de celles qui sont posées par les participants, comme celle-ci qui arrive chaque fois : "*que doit-on exiger comme rédaction de la part des enfants ?*"...

C'est l'occasion d'exprimer voire de développer des idées telles que

- faire des mathématiques c'est d'abord résoudre des problèmes
- le rôle du conflit socio-cognitif
- la non linéarité de l'apprentissage et l'existence de phases de régression
- la démonstration est au coeur de l'activité mathématique
- dire à quelqu'un qu'il se trompe et lui indiquer une bonne solution est inopérant si on ne l'aide pas à prendre conscience de ses erreurs

Ce dernier point, avec les instituteurs en FC, fait en général surgir des exemples et des questions : "*J'ai tel élève, j'ai beau lui expliquer, il ne comprend pas telle chose et fait toujours les mêmes erreurs...*". Nous n'apportons pas en général de réponses simples à ces questions, mais le lien avec l'expérience vécue sur le problème précédent aide à accréditer l'idée que les erreurs ne sont pas forcément des marques de paresse ou d'inintelligence et que leur traitement passe par leur analyse et leur compréhension.

Il serait intéressant de disposer, sur cette idée, d'exemples significatifs à faire étudier.

Titre : RAPPORT AU SAVOIR, DEVOLUTION, INSTITUTIONNALISATION

Auteur : Joël Briand (P.E.N. Bordeaux).

Date : Mars 91.

Origine : Stage de formation continue.

Type : Compte-rendu d'activité en formation continue.

Résumé : En formation continue des maîtres, partant d'énoncés de problèmes classiques, il s'agit de construire des situations permettant progressivement la complète gestion des problèmes par les enfants. Du point de vue de la formation, il s'agit d'analyser comment la transformation de l'énoncé et/ou de son environnement d'aides peut modifier favorablement le rapport des enfants au savoir.

Mots clés : contrat didactique, dévolution, institutionnalisation.

(Avec J.Y Dalm et D. Géron, maîtres formateurs.)

RAPPORT AU SAVOIR, DÉVOLUTION, INSTITUTIONNALISATION

PRÉAMBULE

Les énoncés de problèmes à structure de texte inhabituelle, ou bien les problèmes dits ouverts sont des tentatives pour se rapprocher du réel. Le concept de réel fait entrer en jeu le sujet et il est donc peu rigoureux de s'y référer pour caractériser une situation-problème.

Un énoncé de problème "académique" fait en sorte que, de toutes façons, le sujet est "privé" de l'activité de recueil de faits (qu'il pratique, par ailleurs dans toute activité raisonnée.). Mais il en est de même des énoncés plus "modernes" ou "conviviaux".

Le maître peut essayer de faire construire un énoncé à partir de faits. Mais comme cette activité n'est pas simple à réaliser, il ne peut bien souvent le faire.

D'autre part, l'énoncé de problème est une pratique institutionnelle. L'élève doit y être habitué.

D'où la question suivante : comment agir sur un énoncé pour que l'on soit assuré

1) que l'élève appréhende les faits et les questions que l'enseignant souhaite voir pris en compte. (dévolution d'une responsabilité.)

2) que l'élève puisse voir les effets de ses réponses sur ces faits. (dévolution d'une causalité.)

3) que le sujet traité ne soit pas très éloigné du sujet envisagé par le problème initial.

I - CONTRATS ET DÉVOLUTIONS

I - 1 EN CLASSE

Lorsque l'on propose un problème à un enfant, par exemple le problème suivant : *"Dans un parking rectangulaire, il y a 12 rangées de 26 voitures. Il reste 24 places libres. Combien de voitures sont dans le parking. ?"*, le problème du maître est de trouver le nombre de places occupées. Il est à craindre, et de nombreux travaux sur le contrat l'ont prouvé, que le problème de l'enfant ne soit pas le même. En général, le problème, pour l'élève, est de deviner quelle opération faire pour trouver le résultat.

Toute réflexion, toute décision dans la gestion de la classe qui va permettre de fournir à l'enfant les moyens de savoir

- quelle question se pose vraiment,
- quels types de vérification peuvent être mobilisés,

permettra une meilleure gestion du contrat, une meilleure approche d'une activité mathématique, et donc une meilleure prise en compte, par l'enfant lui-même, du problème du maître.

I - 2 EN FORMATION

Pour le formateur, ce qui vient d'être écrit peut être dit, mais la transmission sous cette forme a des limites connues. Il lui reste donc à construire une action de formation au cours de laquelle, le stagiaire prendra à son compte, dans sa professionnalité, le problème du formateur.

Pour cela, nous pensons nécessaire :

- que le stagiaire ait déjà pratiqué une activité mathématique pour lui-même, ce qui n'a rien à voir, ou presque, avec l'enseignement des mathématiques (enjeu personnel).

- qu'une action de formation lui donne les moyens de construire des situations didactiques pour élèves , qu'il puisse observer ces situations et analyser si elles permettent une pratique mathématique (enjeu professionnel).

L'exemple d'activité de formation qui suit veut donc illustrer ce problème

II - COMPTE-RENDU D'UN TRAVAIL DE FORMATION

II - 1 PREMIÈRE SÉANCE :

Nous proposons une activité à enjeu personnel. Cette activité est décrite par ailleurs. Il s'agit de l'activité "TRANSVASEMENTS", dont nous pensons qu'elle produit un enjeu suffisant pour que le stagiaire s'approprie le problème.

II - 2 DEUXIÈME SÉANCE

Je propose un énoncé de problème. Reprenons notre exemple :

"Dans un parking rectangulaire, il y a 12 rangées de 26 voitures. Il reste 24 places libres. Combien de voitures sont dans le parking ?"

Les maîtres sont invités à construire une situation d'enseignement autour de ce problème pour une classe de CE2, et à prévoir des aides possibles. (Cette notion reste floue à ce moment de la formation).

Les aides proposées sont souvent de même nature : résultats partiels proposés, tables, fiches auto-correctives au fond de la classe, correction collective.

Remarque : Dans l'activité de transvasement, les stagiaires se sont bien rendu compte qu'il n'y avait pas de phase de recherche et de phase de correction séparées, mais des propositions de solutions, mises en débat, provoquant de nouvelles tentatives, etc... Ce qui permettait à l'activité de fonctionner était le fait que chacun avait pris le problème à son compte, le débat ne consistant pas à exhiber la solution aux fins d'être validé ou invalidé par le formateur, mais de convaincre les autres.

Cette prise de conscience va permettre de "lire" la séquence qui suit d'une autre façon.

II - 3 TROISIÈME SÉANCE

Nous faisons alors une observation en classe.

La construction de la séquence de classe est faite avant le stage, donc indépendemment des stagiaires. (voir fiche didactique, en annexe 1).

Cette construction est le résultat de la mise en oeuvre du même énoncé que celui traité par les maîtres lors de la première séance.

Les maîtres sont simplement chargés de relever les méthodes utilisées par les enfants pour résoudre le problème, ainsi que la façon dont ceux-ci mobilisent, ou non, des stratégies de vérification. Ils doivent, en outre, observer l'attitude du maître dans la gestion de la formulation des méthodes, et la place faite à l'affirmation de la réponse exacte.

II - 4 QUATRIÈME SÉANCE

Les stagiaires élaborent le compte-rendu de l'observation (voir observation de la première séance en annexe 1).

Lors de l'observation, quatre tâches ont été exécutées par les stagiaires :

- La fiche chronique de la leçon.
- Recensement des stratégies des enfants.
- Recensement des obstacles.
- Bilan après observation.

II - 5 CINQUIÈME SÉANCE

Par groupes, les maîtres sont invités à prendre un énoncé de problème dans un manuel et à construire une situation d'enseignement qui prévoie des structures d'aide.

Une de ces situations sera choisie et proposée à un maître formateur afin qu'il la réalise dans sa classe. Ceci fera l'objet d'une seconde observation.

Cette fois, les productions des stagiaires sont plus variées.

Les aides proposées sont pricipalement des schémas, des plans, l'usage de la calculette, la communication comme structure permettant une aide, la construction d'un problème connexe (voir observation numéro 2).

II - 6 SIXIÈME SÉANCE

La situation choisie est réalisée en classe.

(Voir observation numéro 2 en annexe).

II - 7 SEPTIÈME SÉANCE

Il s'agit d'institutionnaliser les concepts de didactique qui ont fonctionné aux deux niveaux :

- celui de la formation;
- celui des enfants lors des observations.

II-7-1 Dévolution de la responsabilité, obstacles à la dévolution

Chez le stagiaire :

Le problème des transvasements illustre les conditions d'appropriation du problème par ceux-ci.

Chez les enfants :

Nous avons à gérer la façon dont les aides vont intervenir en classe :

Les aides doivent évoluer dans le temps, venir de moins en moins de la part du maître, provoquer des effets de contrat tels que l'enfant ne considère plus comme interdit le fait de changer de cadre.

Les deux observations vont être construites de façon à ce que l'aide se situe dès l'énoncé en première observation, alors qu'elle se situe en fin d'activité dans l'autre observation.

La possibilité, chez un enfant, de faire un croquis, de son propre chef, afin de s'aider, doit être un objectif du maître. Toutefois, deux risques se présentent :

- Si le maître ne dit rien, les enfants peuvent ne pas avoir l'idée de changer de cadre, et s'ils y pensent ils peuvent s'interdire un tel changement.

- Si le maître ritualise les structures d'aides, il rendra les enfants dépendants de cette aide. Cette aide doit donc être négociée, dans le temps, comme devant être construite par le sujet lui-même. Le maître doit donc se préoccuper de la dévolution du problème en terme de responsabilité (*cf. l'article de G. Brousseau dans les Actes de l'université d'été d'Olivet, p. 90).* Le rite de l'aide est un obstacle à la dévolution.

II-7-2 Institutionnalisation

En formation :

Cette séance numéro 7 est elle-même une institutionnalisation des concepts de rapport au savoir, preuve, dévolution.

En classe :

Le maître, (exemple dans les deux observations) va, au cours du bilan, évoquer les méthodes de travail, les relations entretenues avec les aides proposées, la nécessité, dans le temps d'être à même de se créer, soi-même, ces aides. Le bilan n'est pas seulement la mise en évidence du résultat juste ou faux, mais celui des méthodes de travail, de leur fiabilité rendue meilleure ou non selon que l'on s'est donné, ou non, des moyens de vérifier.

ANNEXE 1
PREMIÈRE SÉANCE
FICHE DIDACTIQUE

CLASSE DE CE2 - NOVEMBRE 90 - 30 ÉLÈVES.

ANTÉCÉDENTS :

Les enfants ont à leur disposition DES façons de calculer le produit de deux nombres.

exemple : 26 x 12 = (20 + 6) x 12 = 240 + 72 = 312

Ils ont abordé des situations soustractives mais ne maîtrisent pas encore un procédé de calcul. Ils ont acquis des procédés fonctionnels de travail sur les nombres en utilisant leur structure:

exemple : 312 - 24 c'est 312 - 12 = 300 puis 300 - 10 = 290 puis 290 - 2 = 288.

BUTS DE LA SÉQUENCE:

Proposer une situation problème qui permette :

1) L'utilisation des procédés de calcul en cours de mise au point.

2) Une réelle activité scientifique en ce sens que l'enfant doit pouvoir, sans faire appel au maître, évaluer si la réponse qu'il apporte est sensée, juste ou fausse.(*)

Pour cela, nous utiliserons un énoncé accompagné d'un dessin dont des "lectures" sont possibles.

- (*) Si l'enfant doit faire appel au maître pour valider sa solution c'est que le contrat habituel de la classe est celui-ci. La situation ne permet pas d'autre moyen ; c'est le cas dans des situations de contrôle. Dans ces deux cas, il n'y a pas de pratique scientifique.

DÉROULEMENT PRÉVU

Le maître propose l'énoncé suivant :

"Voici une photo d'un parking de super-marché. Le parking est presque plein, il ne reste pas beaucoup de places libres.
Quel est le nombre total de places dans ce parking? Quel est le nombre de voitures sur ce parking? "

CONSIGNES (**)

"D'après vous, il y a à peu près combien de voitures dans ce parking ?"

Les enfants font des hypothèses qu'ils écrivent sur une feuille. Ensuite :

"Vous allez répondre aux questions posées dans le problème."

"Lorsque vous aurez répondu, quel(s) moyen(s) avez-vous pour vérifier vous-même, si vos résultats sont justes ou non."

(**) Un énoncé de problème ne constitue pas une construction d'une situation didactique. Les gestions possibles, d'un même problème aboutissant à des activités complètement différentes, sont nombreuses. D'où la nécessité de prévoir ce que l'on va dire, pour être en accord avec les objectifs.

ACTIVITÉ

Le travail se fait par groupes de deux afin de favoriser les échanges. La correction ne portera pas essentiellement sur le contrôle de la justesse des réponses. En effet, si les enfants sont suffisamment autonomes, ils doivent situer leur activité sur la méthode plus que sur le résultat.

Le bilan portera donc

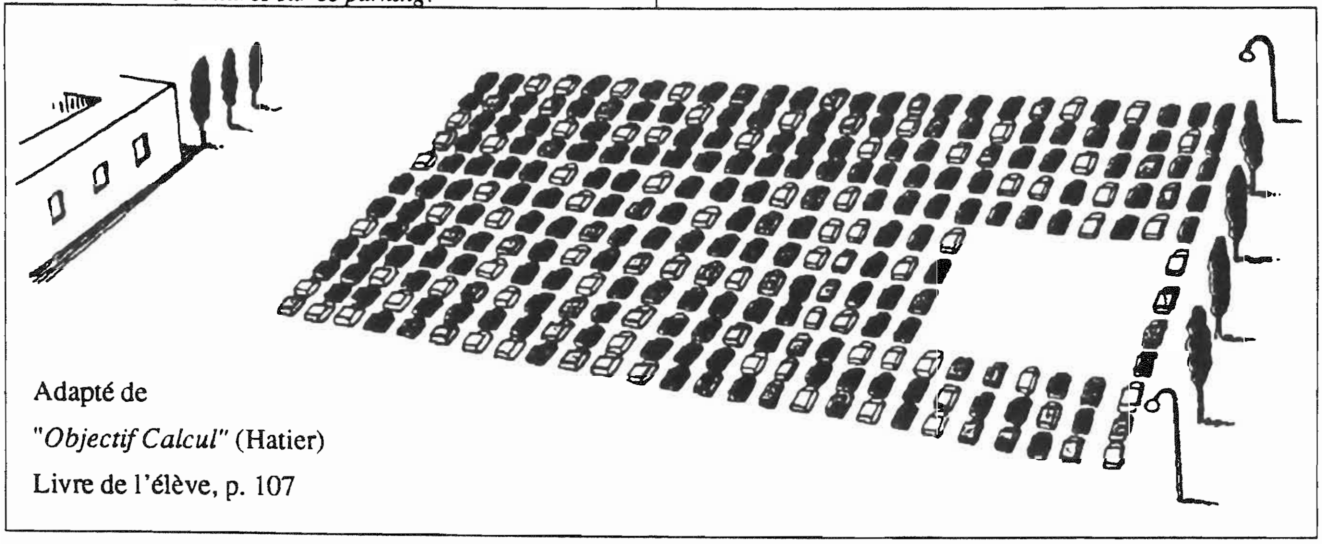
- sur la comparaison des méthodes.

- sur la mise au point (en cours) des pratiques opératoires.

- sur une institutionnalisation progressive des comportements possibles à tenir en vue de vérifier un travail effectué.

REMARQUES

Selon l'objectif, un tel problème peut donc être résolu avec des calculettes ou non. On peut envisager le dénombrement un à un pour certains enfants. L'objectif est toutefois l'entraînement au calcul qui vient s'ajouter à la construction d'une méthode. Remarque: ces deux aspects ne sont pas totalement indépendants.



Adapté de
"*Objectif Calcul*" (Hatier)
Livre de l'élève, p. 107

ANNEXE 2
OBSERVATION
DE LA PREMIÈRE SÉANCE

I - CHRONIQUE DE LA LECON

Cette chronique est rédigée par un maître lors de la 4ème séance.

9h41. Le M demande *"combien y a-t-il de voitures à vue d'oeil ?"* Les enfants commencent à compter un à un ou de 10 en 10.

Certains commencent à dénombrer en longueur et en largeur, en vue d'une multiplication. Le maître écarte ces stratégies et répète sa demande.

Le maître doit insister pour que les enfants ne fassent pas de calcul. Les réponses sont :

50 - 130 - 3000 - 210 - 200 - 200 - 210 - 900 - 126 - 300 - 230 - 200 - 230 - 200 - 201 - 230

9h45. Organisation matérielle : le M fait placer par groupes de 2 et distribue une grande feuille de papier à chaque groupe afin d'écrire sa démarche (gain de temps à la correction, évite l'activité de réécriture au tableau.)

9H51. Le M : *"voici le texte qui est au tableau"* (lecture par un enfant). *"Quels sont les moyens que vous pouvez utiliser pour vérifier quand vous allez faire quelque chose ?"*

Le M : *"Dans chaque groupe, vous devez trouver les moyens pour vérifier"*.(Cette remarque n'a pas été comprise.)

9h56. Le M : *"Si vous connaissez un moyen rapide, utilisez-le."*

Le M redonne une consigne pour faire comprendre qu'il y a à conduire un travail de calcul et un travail de vérification. *"être sûr"*. Un enfant: *"Qu'est-ce que c'est d'être sûr"?*

10h 20. Groupe 1 : ont fait des paquets de 8, de 5, puis deux opérations. Groupe 2 : affichent le résultat 281 ; gênés par *"place libre"*.

7 ou 8 enfants (voir analyse) ont travaillé sur des paquets.

Groupe 3 : ne sont pas arrivés au bout. Groupe 4 : *"il y a moins de voitures que de places"*. Groupe 5 : réussite. Groupe 6 : réussite ; écriture 19 x 12.

10h45. Apparition de (12 x 26) - 24, avec des variantes

exemples :

26 x 12 = (20 + 6) x 12 = 240 + 72 = 312

312 - 24 c'est 312 - 12 = 300 puis 300 - 10 = 290 puis 290 - 2 = 288.

II - BILAN D'APRÈS OBSERVATION

Le contrat : la méthode est privilégiée par rapport aux résultats. Pas de méthode dépréciée a priori, pas de jugement de valeur. (à commenter).

Les enfants jugent eux-mêmes (temps passé, efficacité).

Les enfants n'ont pas une technique de la soustraction. Ils approchent quand même la notion. Quant à la multiplication, ils disposent de plusieurs procédés : écriture en ligne, algorithme à la grecque.

Il savent, sauf deux ou trois, trouver une technique appropriée pour obtenir un résultat. Ceci ne peut se produire que si l'on fait vivre les situations (donner du sens).

Des obstacles ont été rencontrés: le "blanc" a gêné certains, d'autres l'ont matérialisé.

Les groupes sont constitués au hasard, rarement les mêmes. En cours de travail, le maître prépare la phase de bilan. Il n'est pas centré sur les résultats, mais sur les familles de stratégies qui apparaissent, afin de mieux gérer la phase finale.

III - RECENSEMENT DES STRATÉGIES DES ENFANTS

Les stagiaires trient les travaux des stagiaires selon qu'elles se réfèrent ou non directement à l'image.

IV - RECENSEMENT DES OBSTACLES

1- Obstacles d'origine linguistique

* Compréhension des mots :

- parking : *"il y a 280 parking"*. *"un parking"* pour dire une place occupée par une auto.

- place : *"une place, est-ce que c'est une place libre"* (Mathieu).

* Phrase : la phrase *"le parking est presque plein, il ne reste pas beaucoup de places libres"* est-elle un obstacle à la réponse à la première question?

Proposition: *"si le parking était plein, combien y aurait-il de voitures ? Combien y a-t-il de voitures, actuellement sur ce parking ?"*

* Consigne : La consigne donnée au début *"quels moyens avez-vous pour vérifier vous-mêmes si vos résultats sont justes ou non ?"* n'a-t-elle pas incité certains enfants à effectuer, dès le début, un comptage plus rassurant (petits rectangles) aux dépens d'une méthode plus sophistiquée.

2- Obstacles liés à la lecture de l'image

Les enfants tentent la deuxième question directement, donc les places libres constituent un obstacle. Elles n'étaient pas matérialisées. Les enfants imaginent-ils la structure ? Décision à prendre : matérialiser ou non ; cela constitue une variable didactique sans aucun doute importante.

Le rectangle des places vides dissuade de tenter directement la grande multiplication.

Le nombre de voitures sur le schéma n'incite pas au comptage un à un. Il faut pourtant que les enfants le fassent s'ils n'ont pas d'autre système de vérification.

3 - Obstacles liés aux connaissances numériques

-Difficulté de tenter une grande multiplication 19 x 12

-Découpage en petits rectangles qui implique trop d'additions successives, d'où des erreurs.

-Les découpages non réguliers qui sont source d'erreurs.

ANNEXE 3
OBSERVATION NUMÉRO 2

La fiche a été rédigée par un groupe de stagiaires lors de la séance 5. Cette séquence vise à introduire une structure d'aide dans l'activité "centre de calcul" décrite dans ERMEL. L'usage des calculettes y est permis.

FICHE DIDACTIQUE

CLASSE DE CM2 - JANVIER 91 - 32 ÉLÈVES.

ANTÉCÉDENTS

Les enfants ont la maîtrise des nombres décimaux. La multiplication par un nombre décimal est en cours. Les enfants ont déjà travaillé sur des activités de communication. Ils ont travaillé sur des supports d'énoncés variés. Dans une activité de résolution collective de problème, le maître a demandé aux enfants de rédiger *"les opérations à faire"*.

BUTS DE LA SÉQUENCE

1) Faire progresser les enfants dans la résolution des problèmes en portant ici toute leur attention sur le choix des opérations à effectuer.

2) Montrer que l'on peut produire une solution d'un problème, et argumenter sur les stratégies de résolution, sans produire de calculs.

3) Se donner les moyens de rédiger une écriture en ligne qui lève toute ambiguité (le parenthésage étant une réponse possible).

4) Pratiquer une activité mathématique en ce sens que l'enfant doit pouvoir, sans faire appel au maître, évaluer si la solution est sensée, juste ou fausse. Pour cela, nous utiliserons des procédures d'aide à la vérification (schéma pour un exemple, problème connexe pour l'autre exemple).

PROLONGEMENTS

En se référant au manuel ERMEL CM TOME1, il est possible de construire des situations analogues qui pourront permettre de travailler sur des lettres.

L'approche de la notion de variable n'est pas au programme de l'enseignement élémentaire. Toutefois, une activité qui sépare la méthode et la réalisation effective du calcul (cette analyse n'est pas nouvelle : voir les très vieux manuels de l'enseignement élémentaire) semble bien préparer les enfants à ne pas identifier problème et opérations à effectuer. C'est un sujet intéressant la liaison CM-collège.

DÉROULEMENT PRÉVU

La classe est répartie par groupes de deux. Chaque groupe communique avec un autre.

Phase 1 (20 mn)

Dans la première phase, les groupes élaborent les calculs à effectuer. Ils envoient à l'autre groupe le message des calculs à faire. Les messages sont rédigés sur une grande feuille (en vue d'un affichage lors de la synthèse).

Phase 2 (10 mn)

Devenus groupes calculateurs, les groupes effectuent les calculs (d'un problème qu'ils ne connaissent pas).

Phase 3 (15 mn)

Dans la troisième phase les résultats renvoyés sont étudiés (sur la même feuille).

Le maître propose une aide afin que chaque groupe soit sûr de la validité ou non, de la suite des calculs proposée ainsi que du résultat.

Phase 4

Lors de la synthèse, les travaux d'un problème sont affichés. Les méthodes de rédaction sont mises en évidences et discutées. Eventuellement, le parenthésage peut être introduit.

CONSIGNES

Phase 1

"Vous êtes par groupes de deux qui communiquez avec un autre groupe." (Répartition des groupes).

"Je vais vous donner un problème. Vous devez envoyer les calculs à effectuer à l'autre groupe. Lorsque ce groupe aura fait les calculs, il vous renverra les résultats. Dans votre message, il ne doit pas y avoir de calculs déjà faits. Votre message doit être le plus court possible."

Phase 2

"Maintenant, vous renvoyez le résultat sur la même feuille que le message".

Phase 3

"Vous allez récupérer votre feuille sur laquelle figure le résultat de votre problème. Je vous demande de vérifier si ces résultats sont justes. Pour vous aider, si vous en avez besoin, je vous donne quelques informations."

QUELQUES MESSAGES

Problème 1

25 x 28 = ?

(25 x 9) x 2 = ?

[(25 x 9) x 2] x 42,5 = ?

(25 x 28) x 57 = ?

[[(25 x 9) x 2] x 42,50] + [(25 x 28) x 57] = ?

(25 x 28) x 57 = A

[(25 x 9) x 2] x 42,50 = B

A + B = ?

Problème 2

26 675 - 26 616 = A A x 0,49 = B

13 519 - 13357 = A_1 A_1 x 0,49 = B_1

B_1 + B + 367,80 = TOTAL

X W

26 675 - 26 616 13 519 - 13 357

X + W = Y (Y x 0,49) + 367,80 = ?

LES ÉNONCÉS ET LES AIDES PROPOSÉES

Enoncé 1

"La salle Molière se compose de trois parties. Une partie centrale de 25 rangées de 28 fauteuils et de deux bas-côtés identiques. Un bas-côté est composé de 25 rangées de 9 fauteuils. Une place centrale se vend 57 F. Une place de bas-côté se vend 42,50 F.

Ce soir, la salle est pleine ; combien a-t-on gagné d'argent?"

Enoncé 2

(une facture)

ÉLECTRICITÉ - GAZ DE FRANCE
du 19.04.87 au 19.08.87

Réf. 984 158 200 155
M. COURANT, charcutier
18, av. du Circuit
SAINT-PLOT

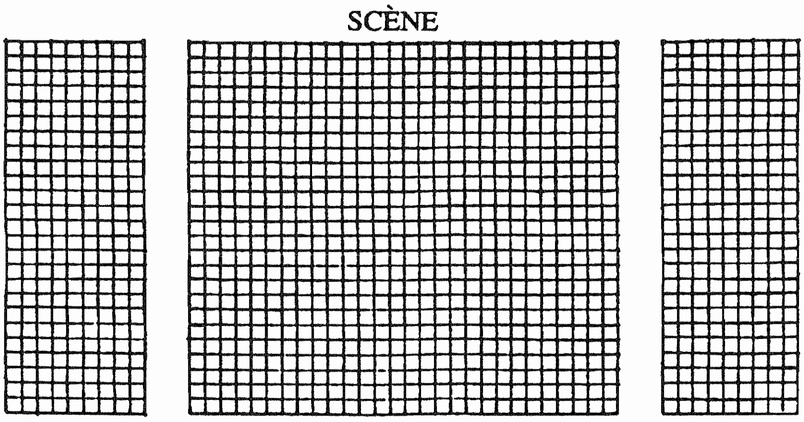
Date 26.05.87

	Consommation en kW/h			Prix en F des kW/h	Montants
	Compteur au 1 mai	Compteur au 1 janvier	Différence		
Habitation Magasin	26 675 13 519	26 616 13 357	....	0,49 0,49	....
			abonnement pour 4 mois :		367,80
				total	....

Quelle somme Monsieur COURANT devra-t-il payer pour les 4 mois ?

Aides

Les aides seront distribuées à la demande, lorsque les calculateurs auront rapporté leurs calculs.



Plan de la salle Molière

ÉLECTRICITÉ - GAZ DE FRANCE
du 19.04.87 au 19.08.87

Réf. 984 158 200 155
M. COURANT, charcutier
18, av. du Circuit
SAINT-PLOT

	Consommation en kW/h	
	Compteur au 1 mai	Compteur au 1 janvier
Habitation Magasin	26 675 13 519	26 616 13 357

abonne... 367

total
Somme déjà versée 150,00
Montant 326,09

Partie 5

Didactique des mathématiques en formation des maîtres

Analyse a priori - variables didactiques

I. - BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE

1 - DOCUMENTS DE RÉFÉRENCE

- "*Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*"- Guy BROUSSEAU - "Recherches en Didactique des Mathématiques" n°7.2 (R.D.M 7.2)

- "*La didactique des mathématiques en France*", Michèle ARTIGUE, Régine DOUADY - note de synthèse - "Revue Française de Pédagogie"n° 76 (juillet-août-septembre 1986)

- "Cahiers de didactique des mathématiques" - IREM PARIS 7 - Cahiers 3 à 6

- "*Les objets de la didactique des mathématiques*" - Guy BROUSSEAU - Université d'été Olivet 1982

2 - EXEMPLES D'INGÉNIERIE DIDACTIQUE POUR L'ÉCOLE

- "*Apprentissages mathématiques Grande section*" - ERMEL - Hatier

- "*A nous les nombres au CP*" (doc. d'accompagnement du logiciel) - Suzy GAIRIN-CALVO

- "*Les wagons*" - documents sur le nombre - "J.D.I." juin 1987 n° 9

- "*Les carrelages*" - "Rencontres Pédagogiques" n° 21 - I.N.R.P

- "*Activités de partage*" - "Grand N" spécial Maternelles

- "*Aires de surfaces planes en CM et en 6ème*", R. DOUADY, M.J. PERRIN-GLORIAN, "Petit x" n° 6 et 8 ainsi que "Grand N" n° 39-40 et 41

3 - DOCUMENTS PROPOSANT UNE SITUATION DE FORMATION

- *"La division en formation initiale"* - Annexe au groupe de Roland CHARNAY - Hervé PÉAULT - Colloque P.E.N Rouen 1988

- *"Dans quelle mesure la didactique des mathématiques peut-elle devenir un objet d'enseignement ?"* - Suzy GAIRIN-CALVO - Colloque P.E.N Angers 1987

- *"Apport de la didactique en formation professionnelle"* - Robert NEYRET - Colloque P.E.N Bordeaux 1989

- *"L'analyse a priori d'une situation - problème."* - Evaluation en formation initiale - Marie-Hélène SALIN - Colloque P.E.N Angers 1987

- *"L'analyse a priori"* - Alain MERCIER - Marie-Hélène SALIN - Université d'Eté Olivet 1988

- *"Formation des instituteurs et didactique des mathématiques"* - Institut de Formation des Maîtres de GRENOBLE - DEUG Premier Degré

II. - SITUATIONS DE FORMATION

1 - Situations de type mathématique dont l'objet est une réflexion d'ordre didactique.

EXEMPLE : ***"Qui dira 20 ?"***

Reprendre avec les normaliens la situation de l'I.R.E.M. de Bordeaux. Les normaliens jouent à deux. La consigne donnée est de découvrir la stratégie gagnante. Il s'agit ici de revenir sur la dialectique de l'action, sur la dialectique de la formulation et sur la dialectique de la validation.

Quand un normalien croit avoir trouvé, il joue contre le P.E.N. S'il gagne, on change le point d'arrivée et/ou le pas. Puis on propose de jouer à la course à 3024 avec un pas de 127.

Ensuite on demande aux normaliens de décrire les interventions du professeur et de faire l'inventaire des diverses stratégies.

2 - Réflexion sur des situations d'enseignement des maths à l'école élémentaire.

Les 3 documents présentés ci-dessous ont été remis en forme par le groupe à partir de documents originaux :

- *"Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au CE1"* (Denis Butlen et Monique Pézard)

- *"Analyse d'une séquence sur la division au CM1"* (Denis Butlen)

- *"Activités autour de calcul mental et résolution de problèmes"* (Denis Butlen et Monique Pézard)

Nous y avons adjoint deux autres documents :

- *"Comparaison de collections au CP. Dévolution de la notion de variable didactique."* (F. Huguet)

- *"La boîte du pâtissier."* (C. Houdement, M.L. Peltier)

Titre : Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au CE1.

Origine : Denis BUTLEN et Monique PEZARD

Date : Mars 1991

Type : Situation de formation des maîtres.

Résumé : Situation de formation des maîtres permettant d'analyser des notions de didactique à partir d'une préparation tronquée sur l'introduction des écritures multiplicatives au CE1

Mots-clés : variable didactique - jeux de cadres - analyse a priori - écritures multiplicatives.

Analyse de préparation sur les écritures multiplicatives au CE 1

I - INTRODUCTION DES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU CE1

Cette séquence s'inspire d'une situation élaborée par l'I.R.E.M de Bordeaux, et a été rédigée par Denis Butlen. Elle constitue la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative.

Objectifs de la séquence

- Introduire la notion d'écriture multiplicative d'un nombre entier naturel ;

- donner un sens à cette écriture ;

- renforcer la notion de nombre naturel.

Notre choix :

L'analyse mathématique de la notion, l'analyse des pratiques enseignantes et des manuels scolaires montrent qu'il y a deux grandes manières d'introduire ce concept.

- On peut introduire cette écriture à partir de l'addition réitérée :

$7 \times 12 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$

$12 \times 7 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12$

Cette méthode, si elle présente l'avantage de s'appuyer sur les connaissances acquises par les élèves sur l'addition, présente par ailleurs beaucoup d'inconvénients : les facteurs a et b ne jouent pas le même rôle (12 paquets de sept éléments, ce n'est pas la même chose que 7 paquets de 12 éléments). Cela peut amener certains maîtres à introduire dans un premier temps une multiplication non commutative ! Elle oblige d'autre part à introduire un vocabulaire et des notations peu commodes.

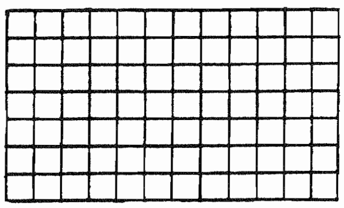
- On peut présenter l'écriture $a \times b$ comme une désignation du nombre d'éléments d'une collection organisée sous forme de grille rectangulaire :

a lignes et b colonnes ou b colonnes et a lignes

Cette présentation, si elle élimine les défauts de la première, a l'inconvénient d'être très liée à la disposition spatiale de la collection à décrire.

Nous avons adopté le principe d'une présentation dialectique de l'écriture multiplicative $a \times b$ s'appuyant sur deux cadres :

- un cadre géométrique : $a \times b$ désignera le nombre d'objets d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grille rectangulaire;



- un cadre numérique : $a \times b$ sera une écriture plus courte de l'écriture additive réitérée.

Cette séquence a pour but de présenter aux élèves une situation évolutive permettant de faire le lien entre ces cadres.

PRÉSENTATION DE LA SITUATION

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.

La classe est divisée en groupes de deux types (groupes de 3, 4 élèves) : des **groupes émetteurs** et des **groupes récepteurs.** Chaque groupe joue alternativement le rôle d'émetteur et de récepteur.

Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (dessinée sur une feuille polycopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.

Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La consigne est la suivante :

"Le groupe émetteur doit envoyer au groupe récepteur un message désignant le nombre de carreaux de la grille et lui permettant de retrouver le plus rapidement et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible."

LES VARIABLES DE LA SITUATION

a) Les variables numériques.

Il est nécessaire de prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands, par exemple $a > 6$ et $b > 11$ afin de placer les élèves dans une situation :

- où les "techniques primitives de dénombrement" (un à un ou paquets par paquets) sont plus laborieuses ;

- où l'écriture a x b devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire (spatialement) le nombre d'éléments de la collection ;

- où la perception globale de ce nombre devient très difficile de visu.

b) Le choix des grilles du groupe récepteur.

Il faut que soient présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe émetteur, dont les dimensions restent assez proches de celles-ci. Par exemple : dans le cas de la grille de dimensions 7 et 12, on peut choisir des grilles de dimensions 6, 8 pour l'une, 10, 11, 13, 14 pour l'autre.

- des grilles ayant le même nombre d'éléments que la grille initiale mais dont les dimensions sont différentes, ainsi :

* dans le cas d'une grille 7 x 12, il faut prévoir les grilles 42 x 2, 14 x 6, 3 x 28;

* dans le cas 9 x 14, des grilles de dimensions 18 x 7, 3 x 42 ...

ceci, afin d'éliminer certains messages (84 par exemple) qui ne permettent plus de trouver à coup sûr la bonne grille.

c) Les contraintes de la situation.

La consigne comprend certaines contraintes, indispensables au bon déroulement de la séquence ; ainsi le groupe émetteur doit envoyer un message :

- court et essentiellement numérique, afin d'éliminer des messages écrits "en français", avec des phrases trop longues et souvent incompréhensibles. Cela permettra également l'élaboration éventuelle d'une écriture permettant de désigner le cardinal de la collection.

- qui doit permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille en question.

ANALYSE DE LA TÂCHE DE L'ÉLÈVE

Pour élaborer son message, l'émetteur doit :

- soit dénombrer un à un le nombre de carreaux de la grille et donner une écriture "canonique",

- soit dénombrer "paquets par paquets" ce nombre et traduire cette activité par une écriture additive ou canonique. Le dénombrement peut alors prendre en compte, ou non, la disposition spatiale de la collection (nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne, nombre de lignes ou colonnes),

- soit dénombrer le nombre d'éléments d'une ligne et d'une colonne et traduire cette activité par une écriture multiplicative proche de cette forme.

ANALYSE DES MESSAGES DES ÉLÈVES

Nous avons constaté une grande diversité des messages produits par les élèves. Nous pouvons les classer ainsi :

- des écritures canoniques : "*84*" pour la grille 7 x 12 par exemple,

- des écritures additives faisant intervenir la symétrie de la figure ou le partage en deux de celle-ci comme "*42 + 42*",

- des écritures additives réitérées basées :

* soit sur le nombre d'éléments d'une ligne ou d'une colonne : "*12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12*"

* soit sur une technique de dénombrement paquets à paquets :
"*10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4*" etc...

- des écritures rendant compte de la disposition spatiale de la collection : "*12C 7L*" ou "*12, 7*".

On peut également voir apparaître des messages montrant que l'élève a déjà rencontré cette notion, par exemple : "*12 fois 7*" ou bien "*7 fois 12*" ou même "*12* x *7*"

VALIDATION DE L'ACTIVITÉ :

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.

Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison des messages, sur la longueur de ceux-ci d'une part, sur la rapidité avec laquelle le groupe récepteur a retrouvé la grille d'autre part. Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter les contraintes énoncées dans la consigne.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ :

1) Enoncé de la consigne

2) Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.

3) Phase de recherche de la part du récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires s'il ne peut, compte-tenu du message, remplir sa tâche. L'émetteur devra alors envoyer un nouveau message.

4) Phase de comparaison des productions : cette phase a pour but, à partir de la comparaison des messages produits par les émetteurs et des difficultés rencontrées par les récepteurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type n'apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.

- Les écritures canoniques ne seront pas retenues comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître à coup sûr la grille.

- Les écritures traduisant un découpage en deux (ou trois...) non plus car soit elles demandent un travail important de la part du groupe récepteur, soit elles ne permettent pas de conclure de façon certaine.

- Les autres écritures additives ne satisfont pas aux contraintes de la situation : messages trop longs, demandant un temps de recherche trop important pour le groupe récepteur...

Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages décrivant la disposition spatiale de la collection.

S'il n'existe que des messages du type "*12C, 7L*", il devra alors introduire les écritures 12 x 7 et 7 x 12 comme une autre façon d'écrire cela et comme une autre écriture du nombre d'éléments de la grille.

Il fera de même pour des messages du type : "*12 fois 7*" ou "*7 fois 12*".

S'il apparaît des messages sous forme d'écritures multiplicatives, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture.

Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est le plus adéquat pour répondre au problème posé.

5) Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente, à partir des contraintes de la situation, ne permet de souligner qu'un seul sens de l'écriture, celui lié à la configuration de la collection.

Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et, pour cela, de prouver que cette écriture désigne bien un nombre entier naturel.

Quand on pose la question suivante à des élèves : "*cette écriture désigne-t-elle un nombre ?* ", ils répondent souvent : "*non, car on ne sait pas combien il y en a*".

Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mises en oeuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à l'addition et à la disposition spatiale de la collection : les additions réitérées.

Le maître pourra alors faire comparer ces deux types d'écritures, faire dégager le fait qu'elles désignent la même grille et, par là, le même nombre, et que l'écriture multiplicative est une façon plus rapide de traduire une écriture additive réitérée.

Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

PROLONGEMENTS

Travail individuel rapide

1) A partir d'une grille représentée sur une feuille polycopiée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 x 21 par exemple.

2) Voici une écriture multiplicative : 7 x 9 ; construire une collection (sur papier quadrillé) ayant ce nombre d'éléments, ou entourer une collection ayant ce nombre d'éléments.

II - EXEMPLE D'UTILISATION EN FORMATION

ANALYSE D'EXTRAITS D'UNE PRÉPARATION DE SÉQUENCE INTRODUISANT LES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU COURS ÉLÉMENTAIRE.

Il s'agit d'analyser des extraits d'une préparation de la séquence d'introduction des écritures multiplicatives au cours élémentaire (rédaction de Denis BUTLEN). Voir en annexe le support de travail donné aux normaliens

Une série de sept questions permet de conduire cette analyse :

C'est la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative. Répondre aux questions suivantes :
1) Déterminer les objectifs.
2) Justifier le choix didactique.
3) Y a-t-il plusieurs cadres ? Lesquels ?
4) Déterminer les variables de la situation.
5) Faire une analyse de la tâche de l'élève (connaissances mobilisables - décisions de l'élève - procédures envisageables).
6) Commenter les différentes phases du déroulement.
7) Prolongement : quels exercices de renforcement ?

Voici le déroulement de l'analyse :

a) Recherche, par groupes de trois, des réponses aux questions 1, 2 et 3.

Il s'agit de la première leçon sur la notion d'écriture multiplicative. La forme adoptée est une situation de communication par groupe, cette forme étant justifiée par le fait que l'objectif est la production d'une écriture, d'un langage.

Les choix didactiques et les objectifs sont exposés dans le texte complet de la préparation, nous invitons le lecteur à s'y reporter.

A propos de la question 3, nous avons été amenés à préciser la notion de cadres et à replacer cette notion dans le contexte de la théorie d'apprentissage de Régine DOUADY.

Quels sont les cadres qui interviennent ?

On fait ici référence à la théorie des jeux de cadres de R. DOUADY.

Idée centrale :

Les connaissances ayant trait au concept à acquérir ne sont pas maîtrisées de la même manière dans chacun des cadres.

Les connaissances plus grandes dans un des cadres devraient amener les élèves à faire des conjectures dans les autres cadres et à leur donner des idées de procédures à tester.

Exemples de cadres :
- réel, physique,
- graphique,
- numérique,
- géométrique, informatique ...

Une situation d'apprentissage doit faire intervenir la notion dans des cadres différents.

Ici, on s'appuie sur deux cadres :

- un cadre **géométrique**, $a \times b$ désignant le nombre d'éléments d'une collection organisée ou pouvant s'organiser sous forme de grille rectangulaire,

- un cadre **numérique**, $a \times b$ étant une écriture plus courte de l'écriture additive réitérée.

Il s'agit ici de faire le lien entre ces deux cadres.

Remarques

1) Un aller-retour entre ces deux cadres sera utilisé tout au long de la construction de la technique opératoire.

2) Autres exemples d'interventions de jeux de cadres

Réel, physique/Numérique : manipulations de collections pour obtenir différentes décompositions additives d'un nombre (écritures additives)

3) Découpage de rectangles, de grilles rectangulaires lors de la construction de la technique opératoire (liaison cadre physique géométrique/numérique)...

b) Etude des questions 4 et 5

Elle permet de revenir sur les variables d'une situation et sur l'analyse de la tâche de l'élève.

Une variable didactique est une "*variable de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir et dont un changement de valeur peut entraîner un changement de procédures*".

Autrement dit : "*Elément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu dans la situation*".

Selon la situation, les variables didactiques peuvent être :
- le matériel utilisé (ex : papier quadrillé, papier blanc en géométrie),
- le type de tâche (ex : tâche de constat ou de fabrication dans la comparaison de collections au CP),
- la répartition des tâches des enfants, et la répartition des tâches dans le temps,
- les contraintes de la tâche (ce qui est autorisé ..),

- la forme du travail (individuel, par groupes, ...),
- la gestion du temps (temps laissé aux élèves pour résoudre un problème, éliminer des procédures trop coûteuses en temps),
- la taille des nombres,

mais l'enseignant ne peut pas fixer :
- l'origine socio-professionnelle des élèves,
- le sexe des élèves,
- les connaissances acquises à un moment donné.

Dans le cas de cette séquence **nous agissons sur les variables didactiques de la façon suivante :**

Les variables numériques :

Prévoir une grille faisant intervenir des nombres assez grands (a > 6 et b > 11) afin de placer les élèves dans une situation :

- où les techniques primitives de dénombrement ("un à un" ou paquets par paquets) sont plus laborieuses

- où la perception globale, de visu, de ce nombre devient très difficile.

- où l'écriture *a* x *b* devient plus commode car plus rapide, plus économique pour décrire spatialement le nombre d'éléments de la collection.

Le choix des grilles du groupe récepteur :

Doivent être présentes :

- des grilles différentes de celles du groupe émetteur mais dont les dimensions restent assez proches

ex : pour une grille 7 x 12, prendre : 8 x 12, 6 x 10, 11 x 9 et, 7 x 11, 6 x 12 car les enfants évitent souvent de compter deux fois le "carré du coin".

- des grilles ayant même nombre d'éléments que la grille de l'émetteur mais de dimensions différentes. Exemples : :
* pour 7 x 12, prévoir des grilles 2 x 42, 1 x 84, 14 x 6, 28 x 3, 42 x 2 etc...
* pour 9 x 14 : 18 x 7, 3 x 42, ...
(ceci pour éliminer les messages de type "*84*" pour 7 x 12)

Les contraintes de la situation :

Le message doit :
- être court et essentiellement numérique pour éliminer les messages écrits "en français", trop longs et souvent incompréhensibles afin d'élaborer une nouvelle écriture du type *a* x *b*,
- permettre au groupe récepteur de retrouver rapidement et facilement la grille.

Les formes de travail

Le travail par groupes est ici justifié par la volonté d'obtenir des productions plus riches et d'éliminer certaines erreurs par un premier filtre (effectué par les élèves du groupe).

Le temps est une variable déterminante dans cette situation ; les logiciels mis au point par D. BUTLEN (voir bibliographie) en sont une confirmation (les auteurs décrivent ici brièvement les activités correspondantes).

Nous renvoyons le lecteur à la lecture du texte de la préparation pour l'analyse de la tâche de l'élève. Notons que cette partie de l'activité peut être l'occasion de parler de l'analyse a priori et de situer celle-ci par rapport au contrat didactique.

Ainsi l'analyse a priori permet à l'enseignant d'accroître ses marges de manoeuvre et de prendre conscience de ses prises de décisions lors du déroulement de la séquence (interventions de l'enseignant face à un déroulement prévu ou non) et du décalage entre prévisions et réalisations effectives.

Nous renvoyons le lecteur sur ce point à l'article de A. MERCIER et M-H SALIN intitulé *"L'analyse a priori, outil pour l'observation"* Olivet 1988.

Notons que cette partie : analyse de la tâche de l'élève nous a semblé la plus difficile à obtenir de la part des instituteurs (tant confirmés que débutants) ; cela s'explique sans doute par un manque d'habitude de cette "tâche" et par le fait que cette activité vise justement le contrat didactique.

Nous laissons au lecteur le soin de répondre aux questions 6 et 7, en notant qu'un accent particulier a été mis sur la nécessité de jouer sur une double définition des écritures multiplicatives.

BIBLIOGRAPHIE

- *"Jeux de cadres et dialectique outil-objet"* - R. DOUADY - Cahier de didactique des mathématiques n° 19 -IREM Paris 7

- *"L'apport de l'informatique à l'apprentissage des écritures multiplicatives au CE"* (thèse 3ème cycle de didactique de mathématiques) D. BUTLEN Paris 7

- *"Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage de l'algorithme de calcul d'un produit"* (Denis BUTLEN et Claire LETHIELLEUX) - Cahiers 25-1 et 25-2 des "Cahiers de didactique de mathématiques" IREM Paris 7

- *"La multiplication"* , Groupe de recherche sur l'enseignement à l'école élémentaire, IREM de Bordeaux.

- *"Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire - C.E."* ERMEL, Hatier

ANNEXE

(document destiné aux normaliens ; cf p. 116-117)

INTRODUCTION DES ÉCRITURES MULTIPLICATIVES AU CE1

PRÉSENTATION DE LA SITUATION

Il s'agit d'une situation de communication entre les élèves.

La classe est divisée en groupes de deux types (groupes de 3, 4 élèves) :

-des groupes émetteurs,

-des groupes récepteurs.

Chaque groupe joue alternativement le rôle d'émetteur et de récepteur.

Le groupe émetteur possède une grille rectangulaire (dessinée sur une feuille polycopiée) dont les dimensions peuvent être par exemple de 7 et 12 ou bien de 9 et 14.

Le groupe récepteur possède un lot de grilles parmi lesquelles se trouve la grille du groupe émetteur.

La **consigne** est la suivante :

"Le groupe émetteur doit envoyer au groupe récepteur un message désignant le nombre de carreaux de la grille et lui permettant de retrouver le plus rapidement et le plus facilement possible la grille correspondante dans son lot. Ce message doit être le plus court possible."

VALIDATION DE L'ACTIVITÉ :

La situation étant une situation de communication, la validation pourra se faire dans un premier temps sur le fait que le groupe récepteur a pu ou non déterminer la grille du groupe émetteur.

Un autre élément de validation portera, lors de la comparaison des messages, sur la longueur de ceux-ci d'une part, sur la rapidité avec laquelle le groupe récepteur a retrouvé la grille d'autre part. Cela implique que le maître ait le souci constant, dans cette phase, de faire respecter les contraintes énoncées dans la consigne.

DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ :

1) Enoncé de la consigne

2) Phase de recherche et élaboration des messages de la part de l'émetteur.

3) Phase de recherche de la part du récepteur pour déterminer la grille correspondante. Il pourra demander par écrit (à l'aide de phrases courtes) des explications supplémentaires s'il ne peut, compte-tenu du message, remplir sa tâche. L'émetteur devra alors envoyer un nouveau message.

4) Phase de comparaison des productions : cette phase a pour but, à partir de la comparaison des messages produits par les émetteurs et des difficultés rencontrées par les récepteurs, de dégager ou d'introduire (si aucun message de ce type n'apparaît) les avantages d'un codage à l'aide d'une écriture multiplicative.

- Les écritures canoniques ne seront pas retenues comme efficaces car elles ne permettent pas de reconnaître à coup sûr la grille.

- Les écritures traduisant un découpage en deux (ou trois...) non plus car elles demandent soit un travail important de la part du groupe récepteur, soit elles ne permettent pas de conclure de façon certaine.

- Les autres écritures additives ne satisfont pas aux contraintes de la situation : messages trop longs, demandant un temps de recherche trop important pour le groupe récepteur...

Le maître devra introduire l'écriture multiplicative à partir des messages décrivant la disposition spatiale de la collection.

S'il n'existe que des messages du type "*12C, 7L*", il devra alors introduire les écritures 12 x 7 et 7 x 12 comme une autre façon d'écrire cela et comme une autre écriture du nombre d'éléments de la grille.

Il fera de même pour des messages du type "*12 fois 7*" ou "*7 fois 12*".

S'il apparaît des messages sous forme d'écritures multiplicatives, le maître utilisera ces élèves pour donner un sens à ce type d'écriture.

Dans tous les cas, il s'attachera à montrer que ce type d'écriture est le plus adéquat pour répondre au problème posé.

5) Donner les deux sens de l'écriture multiplicative : l'explication précédente, à partir des contraintes de la situation, ne permet de souligner qu'un seul sens de l'écriture, celui lié à la configuration de la collection.

Nous pensons qu'il est nécessaire dès cette étape de dégager le caractère numérique de cette écriture, et, pour cela, de prouver que cette écriture désigne bien un nombre entier naturel.

Quand on pose la question suivante à des élèves : "*cette écriture désigne-t-elle un nombre ?*", ils répondent souvent : "*non, car on ne sait pas combien il y en a*".

Un moyen de résoudre partiellement ce problème est de faire le lien entre cette écriture et les techniques de dénombrement mises en oeuvre par certains élèves, celles qui se réfèrent à la fois à l'addition et à la disposition spatiale de la collection : les additions réitérées.

Le maître pourra alors faire comparer ces deux types d'écritures, faire dégager le fait qu'elles désignent la même grille et, par là, le même nombre, et que l'écriture multiplicative est une façon plus rapide de traduire une écriture additive réitérée.

Il est évidemment nécessaire de prévoir des activités renforçant cette notion. La compréhension de ce concept prend du temps.

PROLONGEMENTS

Travail individuel rapide

1) A partir d'une grille représentée sur une feuille polycopiée, l'élève doit en un temps très court (60 secondes) désigner par l'écriture de son choix le nombre d'éléments de la grille. On pourra prendre comme dimensions 17 x 21 par exemple.

2) Voici une écriture multiplicative : 7 x 9 ; construire une collection (sur papier quadrillé) ayant ce nombre d'éléments, ou entourer une collection ayant ce nombre d'éléments.

Titre : Analyse d'une séquence sur la divison au CM1

Auteur : Denis BUTLEN

Type : Guide pour une situation de formation des maîtres

Résumé : Ce document soulève un certain nombre de questions à propos de l'analyse d'un compte-rendu de séquence extrait de "*Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*" ERMEL CM, tome 1 (p 66). C'est l'occasion d'aborder les problèmes suivants :

- choix d'une variable didactique (la maîtresse laisse les élèves choisir 25 comme diviseur, ce qui les conduit à privilégier une procédure qui n'est pas celle qui est visée et retenue par la maîtresse),

- l'évolution du contrat didactique,

- l'institutionnalisation trop faible (dans l'exemple cité)

Mots-clés : Variable didactique - Dévolution du problème - Contrat didactique - Institutionnalisation - Division.

Analyse d'une séquence sur la division au CM 1

QUESTIONS POSÉES A PARTIR DE LA SÉQUENCE SUR LA DIVISION AU CM1
(ERMEL CM- Tome 1 - p. 66)

1) Choix de la situation

a) Dans quelle démarche d'apprentissage des mathématiques cette leçon s'inscrit-elle ?

b) Quel est l'objectif de la séquence ? (Apprentissage d'une notion ? d'une technique ? d'un langage ? ...)

c) Quelles sont les variables de la situation ?

2) Organisation de la séquence

a) dévolution du problème, étude de la consigne : Que pensez-vous de la manière dont la maîtresse donne la consigne ? Comment peut-on analyser cette intervention ? A-t-elle une influence sur la suite de l'activité ?

b) Quelle est l'organisation choisie par la maîtresse ? Est-elle pertinente ?

c) Quelles sont les différentes phases de la séquence ? Pour chaque phase quelles sont les interventions de la maîtresse ? Quelle est la stratégie de la maîtresse, en fonction de quel(s) objectif(s) ?

3) Comportement des élèves

a) Quelles sont les différentes productions des élèves, quelle classification peut-on envisager pour les analyser ?

b) Pourrait-on obtenir dans d'autres classes des travaux différents de ceux-ci ?

4) Négociation et évolution du contrat didactique

Quel est, au cours des différentes phases de la séquence, le problème pour la maîtresse, le problème pour les élèves ?

5) Institutionnalisation

Analyser en particulier la dernière phase de la séquence. Feriez-vous le même choix que la maîtresse ?

Nous renvoyons le lecteur aux Actes du colloque de Rouen pour une analyse détaillée de cette séquence.

Titre : Activités autour du calcul mental et de la résolution de problèmes

Auteurs : Denis BUTLEN et Monique PEZARD

Résumé : Elaboration de scénarios d'activités de calcul mental ou de résolution de problèmes visant à faire évoluer des procédures d'élèves.

Mots-clés : variable didactique - analyse a priori - résolution de problèmes - calcul mental

Activités autour du calcul mental et de la résolution de problèmes

Bibliographie : Fiches J.D.I. n° 7 et 8 - mars et avril 1988;
"Une activité de calcul mental : le jeu de l'autobus"; et *"Le championnat de football"*

DÉROULEMENT DES ACTIVITÉS

I - Elaboration de scénarios

Les stagiaires, en petits groupes, élaborent des scénarios pour réaliser une séquence en classe, cette séquence sera ensuite filmée en Laboratoire Pédagogique. Cette séquence a pour but d'amener un certain nombre d'élèves à résoudre le problème de l'autobus ci-dessous en mettant en oeuvre une procédure de composition des transformations.

"Dans un autobus il y a n *voyageurs ; à un arrêt il en monte* a *et il en descend* b *; combien y a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ?"*

II - Exemples de scénarios proposés

* 1 - Présentation du jeu de l'autobus avec des petits nombres puis passage à la même situation avec de grands nombres.

* 2 - Présentation du jeu de l'autobus sans état initial chiffré ni état final. Les enseignants se donnent le droit de poser des questions intermédiaires. Puis on reprend le scénario précédent.

* 3 - Scénario présenté par le formateur :

Présentation du jeu de l'autobus avec n proche de 30, a et b plus grands que 10 et la valeur absolue de $a - b$ inférieure à 10.

Devant l'échec des élèves qui ne trouvent pas les résultats, retour à la même situation avec des nombres plus petits pour que le problème prenne du sens pous les élèves. Puis, à nouveau, présentation de la situation initiale.

III - Analyse des films tournés en Laboratoire Pédagogique

IV - Commentaires

Les scénarios 2 et 3 marchent bien et c'est l'occasion de travailler sur :

- variables didactiques,
- analyse a priori,
- processus de déséquilibre - rééquilibration,

et de faire référence aux travaux de Gérard VERGNAUD.

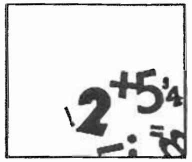
V - Réflexion sur les fiches

Si on a le temps, renforcer l'alternance : compliqué - simple - compliqué à partir d'extraits des fiches jointes en annexe ci-après.

ANNEXE : Fiche ***"Le championnat de football"*** J.D.I. (Journal des Instituteurs) n° 7, mars 1988
(Reproduit avec l'aimable autorisation des éditions Nathan)

CM1-CM2 ***Séquence***

MATHÉMATIQUES



Le championnat de football

Objectifs
- ***Apprendre à résoudre un problème de combinatoire.***
- ***Renforcer le sens de la multiplication, à partir de la résolution d'un problème multiplicatif.***
- ***Créer, renforcer les représentations de la notion de produit.***
- ***Enrichir la notion de nombre entier.***

Présentation de la situation

Matériel

Le maître devra prévoir de distribuer aux élèves :
– une feuille polycopiée sur laquelle sera écrite la liste des équipes de 1re division du championnat de football,
– une grande feuille de papier sur laquelle chaque groupe d'élèves écrira sa solution (et qui sera affichée au tableau).
Les élèves disposent de leur cahier de brouillon.

Démarche

L'activité peut être individuelle, il nous semble préférable de la traiter en groupe de 3, 4 élèves, afin de faciliter la communication entre élèves et d'obtenir des productions plus riches.

Consigne

En première division il y a 20 équipes de football, chaque équipe rencontre les autres deux fois (match aller, match retour). Combien y a-t-il de matchs disputés lors du championnat ?

Contraintes (ou variables) didactiques

– **l'habillage** : championnat de football, série de dîners entre amis, trajets...
– **complexité du problème** : on ne peut considérer que les matchs aller ;
– **champ numérique** : le nombre d'équipes peut être variable.
· un petit nombre d'équipes (inférieur à 10) permet aux élèves d'élaborer une solution, par une recherche exhaustive de toutes les rencontres mais masque la structure multiplicative du problème, il permet une familiarisation avec ce type de problème ;
· par contre un nombre de l'ordre de la vingtaine conduit les élèves à dégager, par souci d'économie, cette structure.
Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant (observations dans les classes).
– **constitution des groupes** : homogènes, hétérogènes...
– **communication** : entre élèves favorisée ou non par l'envoi de message, par un travail en groupes, par de fréquentes phases de mise en commun des productions.

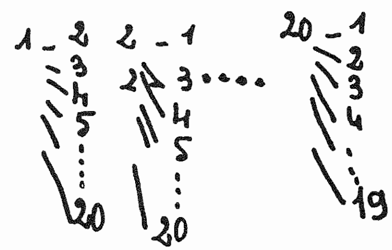
Comment résoudre ce problème ?

Il y a plusieurs façons d'aborder et de résoudre ce problème, de même on peut en donner plusieurs représentations. En voici quelques-unes.

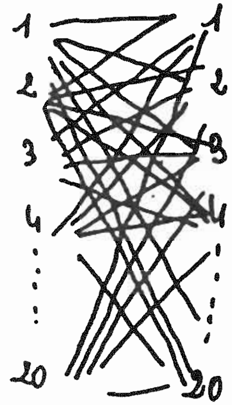
Procédure 1 : chaque équipe rencontre les autres équipes, elle dispute donc 19 matchs-aller, il y a 20 équipes, cela donne donc
$19 \times 20 = 380$ matchs

Procédure 1 bis : les élèves sont souvent amenés à conduire une recherche exhaustive ayant pour but de dresser la liste de toutes les rencontres afin d'en trouver le nombre.
Numérotons de 1 à 20 les équipes, voici quelques représentations permettant par une recherche exhaustive de conduire un raisonnement proche de celui ci-dessus.

• liste des rencontres



• représentation sagittale (difficilement lisible)



• représentation sous forme de tableau (cartésien)

$\boxed{1}$ 2 3 4 5 6 7 8 9 20
1 $\boxed{2}$ 3 4 5 6 7 8 9 20
1 2 $\boxed{3}$ 4 5 6 7 8 9 20
1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...... $\boxed{20}$

ils en déduisent alors le nombre de rencontres par :

• une addition réetérée
$$\underbrace{19 + 19 + 19 + \ldots\ldots + 19}_{20 \text{ fois}} = 380$$

• par une multiplication
$19 \times 20 = 380$
Notons ici une erreur possible : oublier qu'un match ne peut avoir lieu que s'il met en jeu, deux équipes distinctes, et proposer le résultat $20 \times 20 = 400$

Procédure 2 : gardons la numérotation ci-dessus et dénombrons les rencontres disputées par chaque équipe :
– l'équipe n° 1 rencontre 2 fois les équipes n°s 2, 3,... 20, elle aura donc disputé 19×2 : 38 matchs.

$\boxed{1}$ 2 3 4 5 6 ... 18 19 20 19×2
1 $\boxed{2}$ 3 4 5 6 ... 18 19 20 18×2
1 2 $\boxed{3}$ 4 5 6 ... 18 19 20 17×2
$\boxed{18}$ 19 20 2×2
$\boxed{19}$ 20 1×2

– l'équipe n° 2 doit alors rencontrer 2 fois les équipes n°s 3, 4, 5,... 20 (ses rencontres avec l'équipe n° 1 ayant déjà été comptabilisées), il lui reste à disputer
$18 \times 2 = 36$ matchs.

Il suffit alors de réitérer ce raisonnement qui peut par exemple se représenter par

et se traduire par
$38 + 36 + 34 + \ldots + 8 + 6 + 4 + 2 = 380$
ou bien
$(19 + 18 + 17 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1) \times 2 = 190 \times 2 = 380.$

Cette analyse des différentes méthodes de résolution de ce problème nous amène à faire quelques constatations.

– Suivant que l'on prend tout de suite en compte ou non le fait qu'une équipe doit faire 2 matchs (aller et retour) on est amené à privilégier
• la structure multiplicative (procédure 1 et 1 bis)
• la structure additive (procédure 2).

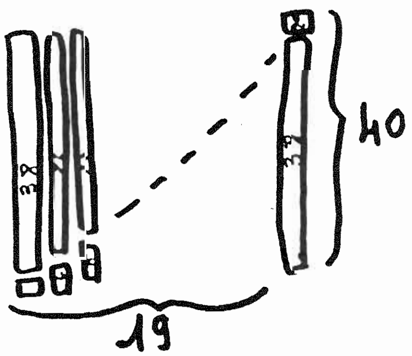
– Les élèves peuvent représenter le problème de nombreuses façons.

– Une recherche exhaustive de toutes les rencontres s'avère très coûteuse si le nombre d'équipes est de l'ordre de 20, l'élève devra donc abandonner celle-ci, à partir d'un certain rang pour en déduire une règle et les calculs correspondants.

– Les calculs étant plus difficiles dans le cas de la procédure 2 (19 additions successives), il s'avère que la prise de conscience de la nature multiplicative de la situation facilite sa résolution.

– On peut retrouver cette structure multiplicative dans le calcul de la somme
$S = 38 + 36 + 34 + \ldots$
$+ 10 + 8 + 6 + 4 + 2$
afin de faciliter celle-ci, faisons apparaître un facteur constant 40 par le calcul de 2S
$S = 38 + 36 + 45 + \text{—}$
$+ 10 + 8 + 6 + 4 + 2$
$S = 2 + 4 + 6 + \text{—}$
$+ 30 + 32 + 34 + 36 + 38$

$2S = 40 + \text{—} + 40$
$2S = 40 \times 19$
$2S = 760$
$S = 380$
(ce calcul peut être explicité par un schéma du type loin d'être intuitif).



Ces différentes remarques nous conduisent à proposer le déroulement suivant.

Déroulement de l'activité

1re période

phase n° 1 : distribution du matériel énoncé de la consigne : le maître s'assurera que cette dernière est bien comprise (notamment le fait que les équipes se rencontrent deux fois) en suscitant des exemples (sans pour cela donner des éléments de résolution). Les élèves entament leur recherche.
Si des élèves ne produisent rien ou se lancent dans des calculs farfelus, le maître proposera de faire « un dessin », un schéma permettant d'illustrer la situation.

phase n° 2 : première mise en commun des productions

Le temps peut permettre à certains élèves ne produisant rien ou s'étant engagé dans des impasses de bénéficier de l'apport des autres groupes.

Le maître ne doit pas à ce stade privilégier une représentation ou une procédure mais au contraire dégager des pistes de recherche, conduire les élèves à clarifier (pour leurs pairs) leur démarche. A ce stade on verra sans doute apparaître les représentations et procédures explicitées ci-dessus.

Le moment permettra également d'éliminer des représentations inadéquates (par exemple des dessins figuratifs) ou des calculs faisant intervenir, au hasard, certaines données du problème (20×2 par exemple). Le rejet devra être justifié par les élèves et non imposé par le maître.

phase n° 3 : retour au travail par groupe. Les élèves devront pendant cette phase conduire à terme une méthode de résolution, transcrire celle-ci sur la grande feuille collective afin de pouvoir l'expliquer à ses camarades.

phase n° 4 : les élèves viennent exposer leur solution au tableau.
Le maître organisera cette mise en commun avec le souci.

• d'exposer les différentes méthodes de résolution ;

• de dégager les différentes représentations et de comparer leurs qualités, de montrer le lien entre représentations et procédures de résolution ;

• d'analyser les différentes erreurs (20×20, 20×2, calculs hasardeux faisant intervenir certaines données du problème...) ;

• de dégager la structure multiplicative du problème car celle-ci facilite les calculs, il montrera :

– dans le cas d'une procédure de type 1 bis (recherche exhaustive) comment on peut optimiser celle-ci pour aboutir à la procédure 1 ;

– dans le cas d'une procédure de type 2, comment on peut organiser les calculs de la somme (arbre de calcul) ;

– comment on peut calculer cette somme à l'aide d'une multiplication (voir § II).

2e période

Nous nous sommes aperçus, lorque nous avons testé ce type de situation dans des classes de CM, que certains élèves, même après la mise en commun, ne savent pas encore aborder ce type de problème. Si le cas se présente, le maître pourra, afin de familiariser ses élèves, proposer un énoncé du même type mais faisant intervenir un nombre d'équipes compris entre 5 et 10. Les élèves en « grosse difficulté » pourront alors dresser la liste de toutes les rencontres et mieux comprendre le problème.

Toutefois là encore il faudra dégager la structure multiplicative et ne pas se contenter d'une procédure de recherche exhaustive. Il nous semble préférable de commencer par un nombre important car cette variable justifiera l'optimisation des procédures et ceci même lors de la 2e période (compte tenu de l'expérience acquise précédemment).

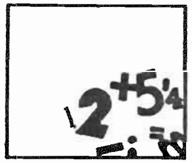
3e période. Le maître pourra proposer des problèmes de combinatoire du même type ou légèrement différents afin de permettre aux élèves de réinvestir leurs connaissances.
Par exemple : 25 élèves se serrent la main, un élève sert la main à tous les autres, combien de poignées de main sont ainsi échangées.
– 24 équipes de basket disputent un championnat, chaque équipe rencontre une fois toutes les autres, combien de rencontres sont ainsi disputées.
– Même type de problèmes (mais avec des petits nombres) et résolus mentalement.
– Problème faisant intervenir un autre type de sélection (tournoi de tennis par exemple) afin de montrer que la différence de structure entre les problèmes précédant et celui-ci (32e de finale, 16e, 8e, quart de finale, demi-finale, finale).

Denis Butlen
PEN Melun IREM Paris VII
Monique Pezard
PEN Antony IREM Paris VII

ANNEXE : Fiche ***"Le jeu de l'autobus"*** J.D.I. (Journal des Instituteurs) n° 8, avril 1988
(Reproduit avec l'aimable autorisation des éditions Nathan)

CE2 Séquence MATHÉMATIQUES

Une activité de calcul mental : le jeu de l'autobus



Le calcul mental et la résolution de problème

Les expériences (1) menées par l'équipe élémentaire de l'IREM de Paris VII ont montré :
– que la prise de distance par rapport à l'algorithme écrit favorise l'émergence de nouvelles procédures de résolution et un affinement des stratégies mises en œuvre par les élèves,
– que le calcul mental est un espace de travail motivant, intensif tant au niveau individuel que collectif,
– que l'approche, par le biais du calcul mental, de certains problèmes (faisant intervenir des données numériques plus ou moins grandes), permet dans certains cas, de donner du sens aux problèmes, de donner du sens aux opérations. Nous le montrerons sur plusieurs exemples (voir fiche CM : le championnat de football) et en particulier ici à propos du jeu de l'autobus.

Présentation de la situation

1) Enoncé standard et objectifs de la situation

Il s'agit de faire résoudre mentalement par les élèves le problème suivant :
« Dans un autobus, il y a n voyageurs, à un arrêt il en monte a et en descend b, combien y a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ? »
Les nombres n, a et b sont donnés par le maître.
Les travaux de G. Vergnaud sur les structures additives montrent, entre autres choses, qu'il y a deux types de procédures pour résoudre ce problème :
– une procédure [E], portant sur des « états », qui revient à considérer un état initial E_1, à lui appliquer une transformation T_1, à en déduire un état intermédiaire E_2, à lui appliquer une transformation T_2 afin de déterminer l'état final E_3.

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow[+a]{T_1} & E_2 & \xrightarrow[-b]{T_2} & E_3 \\ n & & n+a=n' & & n''=n'-b \end{array}$$

(1) Le lecteur pourra lire à ce sujet les Cahiers de Didactique des mathématiques « Calcul mental, calcul rapide : une analyse didactique de quelques situations du CP au CM2 » par D. Butlen – C. Lethelleux – M. Pezard.
« Calcul mental de produits et résolution de problèmes multiplicatifs » par D. Butlen et M. Pezard.
(IREM Paris VII).

– une procédure [T] portant sur la composition des transformations : elle revient à considérer un état inital E_1 à évaluer une transformation T_3 obtenue par composition des transformations T_1 et T_2, à l'appliquer à l'état initial afin de déterminer l'état final E_2.

$$\begin{array}{cccc} E_1 & \xrightarrow[+a]{T_1} \xrightarrow[-b]{T_2} & E_2 & \\ (n) & \underbrace{\qquad T_3 \qquad}_{a-b} & & n' = n + (a-b) \end{array}$$

Par le biais du calcul mental, le but de l'activité est de faire acquérir aux élèves la procédure [T]. C'est aussi l'occasion de renforcer les pratiques d'addition et de soustraction.

2) Analyse de la tâche de l'élève

L'énoncé est donné oralement, le nombre n est inscrit au tableau (2). Selon les cas, les élèves écrivent seulement le résultat (sur ardoise ou papier) ou bien doivent écrire un résultat intermédiaire (afin d'expliciter leur démarche). Dans ce dernier cas, la tâche de l'élève, notamment le rapport à la mémoire, est changée. Quelque soit la procédure mise en œuvre, l'élève doit :
– mémoriser les données intervenant dans le problème (n, a, b),
– traduire a et b en terme de transformation (ajouter a, retrancher b).
Dans le cas d'une procédure de type [E], l'élève doit effectuer 2 calculs, mémoriser le résultat intermédiaire et donner le résultat final.
Dans le cas d'une procédure de type [T], il doit :
– mémoriser plus longtemps l'état initial n,
– évaluer la valeur absolue [a-b], en déterminer le signe et le traduire en terme de transformation,
– donner le résultat final.
La procédure [T] est plus complexe mais peut s'avérer plus efficace selon les valeurs numériques du problème.

(2) Le maître peut ne pas écrire cette donnée.

3) Les variables didactiques de la situation

a) les variables numériques (données n, a et b)

Afin de favoriser l'émergence et la diffusion de telle ou telle procédure, le maître joue sur les données numériques intervenant dans le problème. L'expérimentation faite dans des classes du CE1 au CM2 montre que l'on peut distinguer deux domaines (3) de variation :
– **le domaine D_1** : $n < 100$, $a < 10$ et $b < 10$
– **le domaine D_2** : $n < 100$, $a > 10$, $b > 10$ et $|a-b| < 10$
Dans les deux cas, le maître choisira une valeur de n nettement supérieure à a et b.
D'autres éléments peuvent intervenir à ce niveau, l'existence par exemple d'un « passage à la dizaine » : un calcul du type :
$n + a - b = 22 + 9 - 3 = 31 - 3 = 28$
est plus difficile que
$n + a - b = 21 + 8 - 3 = 29 - 3 = 26$
Nous verrons dans le paragraphe III l'effet de ces différents domaines numériques sur les procédures de résolution des élèves.

b) les variables liées au contexte

Cette activité devant se dérouler sur plusieurs séquences, il est nécessaire :
– afin de ne pas lasser les élèves, de changer l'énoncé, ainsi on pourra proposer des jeux faisant intervenir des pertes et des gains (jeu de billes par exemple) ;
– afin de permettre des mimes de la situation (si cela s'avère nécessaire), le maître peut proposer l'énoncé suivant : je suis à n pas de ma grand-mère, elle me dit d'avancer de a pas, puis de reculer de b, où suis-je ? (4) ;
– afin de justifier les valeurs prises par n, a et b, on pourra parler de train au lieu d'autobus.
De même, il est indispensable d'inverser les termes « monte » et « descend » dans l'énoncé.
Il peut aussi s'avérer nécessaire de prévoir des questions intermédiaires donnant du sens à la tâche :
« Dans un autobus il y a n voyageurs, il en monte a et en descend b, après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs ? »

(3) Exemples : domaine D_1 $n = 37$, $a = 5$, $b = 2$ domaine D_2 $n = 59$, $a = 28$, $b = 22$.
(4) Cet énoncé peut s'adapter pour prévoir les déplacements de la tortue en Logo.

ou bien
« Dans un autobus..., après l'arrêt y a-t-il plus, moins, autant de voyageurs, combien en plus ou combien en moins ? »

Analyse des procédures, résultats et erreurs des élèves

Nous avons testé cette activité du CE1 au CM2, nous avons constaté :
– que les élèves du CE1 ne mettent en œuvre, dans le meilleur des cas, que des procédures de type [E] et que cette activité reste très difficile à ce niveau ;
– que les élèves du CE2 et de CM, dans le cas de données numériques appartenant au domaine D_1, utilisent très majoritairement des procédures de type [E]. Seuls quelques élèves (en général les meilleurs) procèdent à l'aide de [T], les données de départ n'imposant pas ce dernier type de procédure, même après explicitation, les élèves ne voient pas la nécessité de modifier leur stratégie ;
– que les mêmes élèves, dans le cas du domaine D_2 et après explicitation des différentes méthodes de calcul, adoptent dans la presque totalité des cas une procédure de type [T].
Celle-ci devient alors économique car elle réduit le coût des calculs intermédiaires. Cette diffusion de la procédure [T] nécessite toutefois une explicitation de la part du maître.
Les performances réalisées par les élèves dépendent de la familiarité acquise avec le problème et dépendent de la complexité de la tâche, ainsi nous avons noté que les exercices sont mieux réussis :

– quand il n'y a pas de passage à la dizaine,
– quand l'ordre des transformations est d'abord une addition, puis une soustraction,
– quand a (nombre de voyageurs qui montent) est supérieur à b (nombre de voyageurs qui descendent),
– quand n est assez petit.

Quand les données numériques sont plus importantes (passage au domaine D_2), nous constatons un fléchissement des réussites, dû au fait que peu d'élèves composent les transformations, puis au fur et à mesure du déroulement des séances et de la diffusion des procédures [T], un pourcentage de réussite croissant.

Les erreurs les plus fréquentes proviennent principalement :
– d'une difficulté à mémoriser toutes les données,
– d'une difficulté à évaluer le signe de la transformation composée (alors que l'écart $|a-b|$ est correctement évalué),
– cette difficulté est renforcée lorsque le signe de la transformation globale est négatif, ou lorsque le nombre de voyageurs qui descendent est donné en premier.

Signalons pour terminer cette analyse que le rôle du maître dans la diffusion des procédures de composition [T] est fondamental. L'augmentation de la taille des nombres (domaine D_2) ne suffit pas à faire évoluer l'ensemble de la classe, une explicitation, une comparaison des savoir-faire sont indispensables. Toutefois, en aucun cas, celles-ci doivent être fournies arbitrairement par le maître, l'explicitation doit s'appuyer sur plusieurs phases de recherche et de familiarisation avec le problème, elle ne peut être justifiée que par un souci d'économie chez les élèves. Cela nous amène à envisager le dispositif ci-dessous.

Déroulement des séquences

1) Un choix pédagogique : la durée des séquences de calcul mental

Le maître a sur ce point un choix à faire, il peut au début de chaque séquence de mathématiques réserver entre 10 et 20 minutes à des activités de calcul mental et donc découper « en tranches » la progression qui sera exposée ci-dessous. Ou bien consacrer un temps plus long au calcul mental (de l'ordre de 3 quarts d'heure), ce qui l'amènera à concentrer le travail des élèves dans le temps.

Quelque soit le dispositif adopté, le maître doit avoir le souci constant de faire expliciter par les élèves leurs démarches de calcul et les faire comparer.

2) Première phase : familiarisation avec le problème : domaine D_1

Dans un premier temps, le maître proposera l'activité en choisissant les données numériques dans le domaine D_1, $n < 100$, $a < 10$ et $b < 10$. Il pourra proposer, en changeant éventuellement l'énoncé, entre 4 et 6 fois, les 4 calculs suivants :

sans passage à la dizaine	*avec passage à la dizaine* (1 passage)	(2 passages)
32 + 7 — 3	36 + 7 — 2	38 + 7 — 6
35 + 3 — 7	32 + 3 — 8	39 + 2 — 9
39 — 8 + 6	34 — 8 + 2	34 — 8 + 5
34 — 3 + 8	36 — 5 + 9	33 — 5 + 9

Si cela s'avère nécessaire (trop d'échecs), le maître pourra à ce stade poser des problèmes faisant intervenir des questions intermédiaires (combien en plus, ou en moins...) afin de préciser l'explicitation des procédures de type [T] pouvant apparaître et de faire contrôler les résultats. Toutefois, ce n'est que dans une deuxième phase (domaine D_2) que l'on peut espérer une réelle diffusion de ce type de procédures.

Dans tous les cas, il devra faire expliciter les techniques de calcul. Prenons l'exemple 34 – 8 + 5 :

– des élèves peuvent inverser les calculs 34 + 5 = 39 suivi de 39 – 8 = 31 (stratégie supprimant la difficulté due au passage à la dizaine) ;

– d'autres peuvent calculer directement 34 – 8 = 26 et 26 + 5 = 31 ;

– ou bien procéder par décomposition : 34 – 8 = 34 – 4 – 4 = 30 – 4 = 26 suivi de 26 + 5 = 26 + 4 + 1 = 30 + 1 = 31 ;

– d'autres enfin peuvent à ce stade compter et décompter de 1 en 1 (en se servant ou non de leurs doigts) pour déterminer les résultats intermédiaires.

L'explicitation et l'analyse des erreurs sont aussi déterminantes pour faire progresser les élèves.

3) Deuxième phase : domaine D_2

A ce stade, le maître pourra proposer plusieurs séries de calculs du type :

45 – 18 + 21
48 – 24 + 22
46 – 23 + 26
49 + 24 – 29

Exemple :

$49 + 21 - 29$

$\underbrace{49 + \underbrace{21 - 29}_{-8}}_{41}$

ou bien

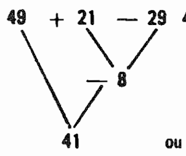
$49 + 21 - 29 \quad 41$

$+\ 21 - 21 - 8$

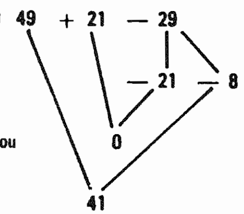
$0 \quad -8$

-8

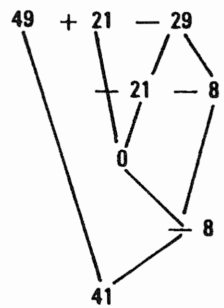
Schémas ligne ou arbres de calcul :



ou



ou encore :



Dans un premier temps, les élèves conserveront une procédure [E], ce qui les amènera, dans bien des cas à des échecs dus à la gestion des calculs.

Une explicitation des procédures, une analyse des erreurs peut permettre une meilleure prise de conscience de l'économie due à la procédure [T]. Si cela s'avère nécessaire, le maître pourra poser des énoncés, avec questions intermédiaires, en s'appuyant sur des exemples du type :

« Quand il montre 23 voyageurs et quand il en descend 23, cela revient au même ! » (argumentation d'un élève).

Il peut aussi faire expliciter par des schémas, les procédures utilisées :

Les explicitations peuvent s'avérer très utiles pour les élèves en difficulté qui, nous l'avons constaté, conservent plus longtemps que leurs pairs, des procédures de type [E].

Denis Butlen
Monique Pezard
P.E.N.
I.R.E.M. Paris VII.

Titre : La boîte du pâtissier

Auteurs : Catherine Houdement (PEN Rouen), Marie Lise Peltier (PEN Rouen)

Date : avril 1991

Origine : "Aides pédagogiques CM" (APMEP), p 103

Type : compte-rendu d'activité FI et FC d'instituteurs

Résumé : à partir d'une activité de fabrication par pliage d'une boîte parallélépipédique, pointer les concepts didactiques, de situation, dialectique outil objet, variable didactique.

Mots-clés : résolution de problème - modélisation - autovalidation - dévolution - situation didactique - pliage et géométrie.

LA BOÎTE DU PÂTISSIER

Objectifs didactiques

1) mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...)

2) analyser des processus de recherche, montrer l'importance :

- du cheminement personnel
- de la confrontation
- de la validation interne à la situation comme moteur de la recherche.

(le fait de pouvoir évaluer soi-même son travail permet de continuer si nécessaire la recherche sans nouvelle intervention du maître)

Objectifs mathématiques

1) revenir sur le vocabulaire géométrique et sur l'étude d'objets géométriques du plan et de l'espace.

2) modéliser une situation.

Déroulement

2 temps :

I - Les étudiants résolvent le problème mathématique puis visionnent le document vidéo relatant la résolution d'une partie du problème dans une classe de CM.

La séquence est ici menée avec les objectifs plutôt mathématiques pour que les étudiants vivent la situation côté élève et comparent leurs réactions et leurs procédures de résolution à celles d'élèves de CM.

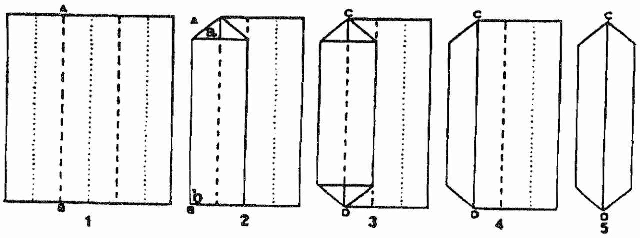
II - Recul didactique par rapport à cette suite d'activités : l'analyse fait basculer les étudiants **côté enseignant** : le professeur explicite ses choix, explique ses décisions, analyse les procédures et les erreurs des "élèves".

(Le problème proposé est tiré de *"Aides pédagogiques pour le cycle moyen"*, APMEP, p. 103)

I - Mise en situation de recherche

phase 0 : première construction de boîtes

Les plis en creux sont représentés : ------
et les plis en relief : ......



Construire une boîte à partir d'une feuille rectangulaire de format A4 en suivant les instructions (P) suivantes :

a) faire apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués, fig. 1

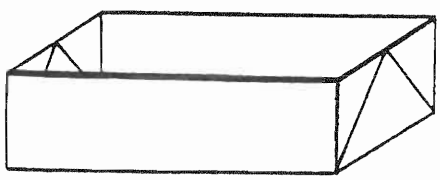
b) plier suivant AB, et réaliser les pliages du coin (a), fig. 2

c) réaliser dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a), fig. 3

d) plier suivant le pli en creux CD, fig. 4

e) mêmes actions dans la partie droite de la feuille. On aboutit au résultat représenté fig. 5

f) il reste à ouvrir la boîte, et à marquer les plis des arêtes :



NB : on obtient deux boites de formes différentes suivant que l'on plie sur la longueur ou la largeur de la feuille A4.

phase 1 : les boites à fond carré

Recherche

Travail par groupes de 4, après une indispensable recherche individuelle de 5 minutes.

Consigne 1

"Construisez en suivant les instructions (P) une boîte à fond carré puis rédigez une affiche relatant la recherche, la méthode retenue, les conclusions que vous en tirez. Il est important que vous notiez tous les essais, même ceux qui n'ont pas abouti."

Procédures observées chez les normaliens

- faire le pliage à partir d'une feuillé carrée.

- mesurer les dimensions de la boîte presque carrée obtenue en phase 0 et enlever la différence sur la longueur, puis sur la largeur.

- déplier la boîte construite dans la phase 0 et étudier les pliages .

- construire un carré au centre d'une feuille et le compléter par les bandes nécessaires à la construction par pliage.

- dessiner sur le fond d'une boîte déjà construite un carré, déplier la boîte et construire par translation les bandes nécessaires pour la construction.

Remarques

Les procédures sont analogues à celles observées chez des enfants de CM2 confrontés à la même consigne. (Ces derniers peuvent également proposer une méthode par découpage du fond de la boîte pour le rendre carré.)

Consigne supplémentaire pour la gestion du temps

"Construisez la boîte à fond carré la plus grande possible à partir de la feuille A4."

Mise en commun

Présentation au groupe entier des différentes affiches et explication d'un des auteurs.

NB : le professeur laisse exposer chacun des groupes, sans prendre position, il n'y a donc pas nécessairement de conclusion générale du type : "pour une boîte à fond carré de côté x, il faut prendre une feuille de dimensions 2x, 3x".

Consigne 2

"Sauriez vous construire une boîte dont le fond est un carré 6x6?"

(gestion du temps : construire des boîtes à fond carré gigognes)

Synthèse

Généralisation avec institutionnalisation.

"Pour construire une boîte à fond carré de dimension x, la feuille rectangulaire a pour dimensions 2x et 3x, et on la plie suivant la longueur".

Phase 2 : condition d'existence des boîtes

Relance de la situation

Consigne 1

"Pour construire une boîte de fond 6 x 13, de quelles feuilles peut-on partir?"

Gestion du temps

"Elaborez un tableau de valeurs numériques correspondant aux différentes boites construites pendant la recherche de la phase 1."

rectangle de départ	dimension du fond de la boite

Consigne 2

"Construisez une boîte de fond 8 x 14 et hauteur 5".

Synthèse

* prise en compte de la hauteur de la boîte dans le tableau précédent.

* recherche d'une condition sur la hauteur pour qu'on puisse construire une boîte de fond $x \times y$ et de hauteur h : *"la hauteur de la boîte est toujours la moitié de l'une des dimensions du fond."*

Phase 3 : Extension du champ numérique pour une modélisation algébrique

Consigne 1

"Trouvez les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte de dimension 12 x 15 et de hauteur 6."

Ici, il s'agit de demander une prévision (éventuellement avec d'autres valeurs numériques) et sa justification, de façon à obtenir une modélisation de la situation.

Synthèse

1) si on connaît les dimensions de la boîte : fond x et y, (hauteur x/2), on obtient les dimensions de la feuille par la fonction :

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow (3x, x+y)$$

(et le pliage se fait suivant x)

2) si on connaît les dimensions x et y de la feuille que l'on plie suivant x, celles de la boîte sont données par la fonction :

$$g: \quad \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$
$$(x, y) \longrightarrow (x/3, y - x/3, x/6)$$

Prolongement éventuel de cette phase :

Consigne 2

"Recherchez les conditions sur les dimensions x et y de la feuille pour que l'on puisse obtenir une boîte en la pliant suivant x."

conclusion :

- si $x < y$, le pliage est toujours possible

- si $x > y$, le pliage n'est possible que si $x < 3y$ (lien avec l'ensemble de définition de la fonction g.)

Phase 4 (facultative) : relance vers des consignes relatives au volume

Exemples : quelles feuilles choisir pour construire une boîte à fond carré contenant 1/2 litre, une boîte cubique contenant 1 litre, une boîte ayant un volume de 160 cm^3 ?...

Phase 5 : visionnement du film "la boîte du pâtissier"

Pour repérer les procédures de résolution des élèves de CM et mettre en évidence le rôle de l'erreur.

II - Analyse de l'activité

A - Analyse mathématique

Cette situation permet de :

- faire des rappels de géométrie, de vocabulaire.

- élaborer un codage fonctionnel utile comme outil de prévision (les fonctions f et g permettant une généralisation "puissante").

- travailler sur le raisonnement : émission d'hypothèses, validation ou invalidation de ces hypothèses, mise en évidence et en défaut de raisonnements du type : *"si je pars d'un rectangle j'obtiens une boîte à fond rectangulaire, donc si je pars d'un carré, j'obtiens une boîte à fond carré."*

B - Analyse didactique

1. Description de la situation

- phase de dévolution (cf. B 2.3)
- travail sur les consignes (simples, courtes)
- analyse de la tâche : production avec des contraintes, validation interne,...
- rôle de l'erreur : elle apparaît ici très positive car elle permet d'avancer soit en éliminant les hypothèses invalides, soit en les modifiant pour les rendre valides.
- la gestion du temps (consignes annexes qui permettent de gérer le temps et l'hétérogénéité du groupe, mais qui participent aussi à l'élaboration de la synthèse collective).
- institutionnalisation possible à plusieurs moments :

sur des points méthodologiques

sur le raisonnement

sur les notions mathématiques.

2. Quelques concepts de didactique

2.1 conditions pour qu'un problème puisse être source d'apprentissage :

- l'énoncé a du sens pour les élèves
- le problème est consistant (la réponse n'est pas évidente)
- l'élève comprend ce qu'est une réponse au problème
- il peut s'engager dans des procédures de résolution
- il peut en contrôler lui même les effets.

2.2 phases d'une situation didactique

- action
- formulation - communication
- validation
- institutionnalisation
- réinvestissement.

2.3 dévolution

- en phase 0, l'élève se libère des difficultés matérielles
- en phase 1, la réalisation effective de l'objet et la validation interne motivent sa recherche.

2.4 dialectique outil-objet

- elle fonctionne ici localement sur l'objet savant «fonction de $\mathbf{R}^p$ --- >$\mathbf{R}^n$»
- elle intervient ici comme outil implicite dans les phases 1 et 2
- la phase 3 permet d'expliciter cet outil, de l'utiliser pour prévoir d'autres constructions, pour anticiper l'action.
- une phase supplémentaire permettrait de l'étudier plus précisément en tant qu'objet, mais ceci est en dehors des objectifs de la formation des instituteurs.

Le fonctionnement outil-objet de la notion de fonction dans cette situation, permet d'illustrer l'esprit des mathématiques :

- résolution locale
- nécessité de généralisation
- puissance de la modélisation pour anticiper, pour résoudre en une fois une famille de problèmes isomorphes.

2.5 variables didactiques

- le fait d'imposer ou non la hauteur de la boîte à construire (phase 2 consignes 1-2) influe sur la manière dont les étudiants prennent en compte les résultats antérieurs.
- le fait de demander ou non une boîte constructible dans une feuille A4 (phase 3, consigne 1). Le choix fait bloque les procédures de tâtonnement et de constat et incite à réfléchir à des procédures de prévision, donc à modéliser la situation.
- variable non prise en compte dans cette séquence, mais qui peut être discutée : le fait de ne pas imposer le type de pliage (par exemple, plier en 10 au lieu de 6) peut induire des procédures de recherche tournées vers le pliage à faire et non vers les dimensions de la feuille à plier.

2.6 contrat

- constater les effets du contrat implicite : un problème posé à l'école a toujours une solution (cf phase 2, consigne 2), on ne rédige que "la bonne solution" (cf phase 1 consigne 1)
- construire un contrat explicite, a contrario, par le choix de consignes appropriées (cf ci-dessus)

Titre : COMPARAISON DE COLLECTIONS AU CP - Dévolution de la notion de "variable didactique".

Auteur : François HUGUET, (P.E.N. QUIMPER)

Date : Mai 1991

Origine : Séquences construites et expérimentées par un petit groupe de Normaliens de 2ème Année dans une classe de CP

Type : Compte-rendu d'activité en formation initiale.

Résumé : A partir du problème classique de la comparaison de 2 collections, une équipe de 3 normaliens a proposé, dans une même classe de CP et au cours de 2 séquences espacées d'une semaine, deux situations voisines en modifiant seulement quelques variables.

Le travail proposé ici a pour but essentiel de leur faire comprendre le rôle important de la gestion des variables didactiques par le maître et de leur permettre d'observer l'influence de certains choix sur la production des enfants.

Mots-clés : Résolution de problèmes - Dévolution - Variable didactique - Situations d'action.

COMPARAISON DE COLLECTIONS AU CP
Dévolution de la notion de "Variable didactique"

Contexte

Avec les normaliens de 2ème Année, j'ai souvent adopté la formule de TP dans les classes par équipes de 2 ou 3 . Ce travail autonome réalisé dans une même classe et un suivi de 2 ou 3 séances sont préparés au préalable à l'Ecole Normale et fait ensuite l'objet d'un bref compte-rendu en grand groupe.

Au cours d'un "Module CP", voici un exemple de ce type de travail présenté ici en 4 parties :

1) Recherche collective des variables de commande de la situation.

2) Compte-rendu de l'expérimentation de la 1ère situation.

3) Compte-rendu de l'expérimentation de la 2ème situation.

4) Conclusion.

I - Analyse du problème "Comparer deux collections"

Le maître peut gérer un certain nombre de "paramètres" que nous appellerons les "variables didactiques" de la situation.

Une recherche collective permet aisément de trouver les principales variables de cette situation :

* *La taille des collections*

- A la portée des possibilités de comptage.
- Hors de portée de ces possibilités.

* *La nature des objets*

- Homogènes.
- Hétérogènes.

* *La Situation*

- Réelle.
- Représentée.

* *La disposition des objets*

- Favorisant la correspondance terme à terme.
- Favorisant la correspondance paquet à paquet.

* *Les possibilités de déplacement*

- Objets fixes (Ex: Objets dessinés sur une feuille).
- Objets déplaçables (Ex: Objets qu'on peut découper).

* *La nature de la tâche*

- Constat.
- Action.
- Anticipation

A partir de cette analyse une équipe de normaliens a choisi d'expérimenter d'abord une situation classique proposée dans un manuel puis, après avoir tenu compte des réalisations des enfants, elle a conçu et proposé une autre situation en modifiant le choix de certaines variables. Dans les deux cas il s'agit d'une organisation en travail individuel.

II - Présentation de la Situation I

* Taille : Près de 40 objets, c'est-à-dire au delà des possibilités de dénombrement des enfants de la classe. (Nous sommes en Novembre dans un CP).

* Objets homogènes dans chaque collection. (Des carrés et des triangles).

* Objets fixes (Travail sur feuille).

* Deux dispositions envisagées dont l'une favorisait la correspondance paquet à paquet.

* Tâche de constat.

Analyse des résultats obtenus.

* Productions assez pauvres et peu de réussites !

* Procédures peu variées :

- Des tentatives de liens.
- Quelques correspondances paquet à paquet.

III - Présentation de la Situation II

Comparaison des nombres de cases de deux quadrillages.

* Taille : Autour de 40 comme précédemment.

* Objets homogènes.

Modifications importantes.

* Les objets ne sont plus fixes.

* Le maître donne la possibilité aux enfants de colorier, de découper, de déplacer les objets, d'utiliser la colle.

* Tâche de constat ou d'action si l'enfant décide de découper.

Analyse des résultats obtenus.

* Productions très riches et variées : Nette amélioration dans le taux de réussite.

* Procédures de résolution très nombreuses mais pas toujours menées à leur terme.

Exemples :

** Procédures de découpage :*

- Découpage de carreaux un par un, puis collage avec superposition.

- Découpage de carreaux un par un puis de bandes.

- Découpage de carreaux un par un puis de bandes puis disposition côte à côte.

- Découpage de bandes ou de morceaux, puis disposition en positions symétriques.

** Procédures de coloriage :*

- correspondance "indicée" (l'enfant coche ou colorie une case d'une collection puis une case de l'autre collection).

- Recherche d'algorithmes en utilisant une suite de couleurs. (Utilisation par exemple des 10 crayons d'une boîte).

- Coloriage d'un nombre de carreaux que l'enfant sait dénombrer facilement (par exemple : 10, puis 5, puis 8). C'est d'ailleurs un autre aspect de la correspondance paquet à paquet.

** Procédures d'adaptation :*

- Tentatives de liens, puis découpage et superposition.

- Découpage un par un, puis découpage par bandes.

Cette démarche illustre bien la manière courante utilisée par l'enfant pour s'approprier un savoir dans une "situation d'action" !

IV - Conclusion

Ce travail a été estimé très intéressant par l'ensemble des Normaliens mais surtout évidemment par l'équipe des expérimentateurs.

J'ai repris le même thème avec d'autres Normaliens qui ont choisi d'autres paramètres et une autre organisation de l'activité.

Par exemple pour la 2ème Situation un nombre d'objets voisin de 100 et une organisation de travail par équipes de 2 enfants.
Les résultats obtenus m'ont semblé moins probants. L'ampleur de la tâche a découragé certains groupes d'enfants et la collaboration à l'intérieur des groupes a posé quelques problèmes. Cependant, en tant qu'observateur de cette séquence, j'ai pu constater tout de même d'excellentes pistes de recherche pour approcher la solution.

Cette prise en charge par l'élève-maître des variables didactiques d'une situation illustre, à mon sens, la notion de dévolution d'un concept didactique.

D'autre part ce type d'activité permet de faire mieux comprendre aux Normaliens qu'essayer, se tromper, utiliser les procédures des autres, tout cela est très formateur pour l'enfant !

Encore faut-il qu'il ait ces possibilités de libre choix !

D'où l'intérêt pour l'enseignant de bien savoir identifier et gérer les "variables didactiques" des situations d'apprentissage qu'il propose.

Partie 6

Petit vocabulaire de didactique

Titre : Didactique des mathématiques : définitions et commentaires.

Auteur : Guy BROUSSEAU (IREM de Bordeaux)

Date : 1991

Type : Etude des différentes acceptions du terme "didactique"

Didactique des mathématiques : définitions et commentaires

DIDACTIQUE

I. Adjectif. 1554 (du grec "*didactikos*", de "*didaskein*" : enseigner)

a) **Qui vise à instruire, qui a rapport à l'enseignement.** Traité, ouvrage, matériel, terme didactique. Le genre didactique : genre littéraire où l'auteur s'efforce d'instruire sous une forme agréable et poétique.

b) **pédant** : le terme "didactique" comprend une **coloration péjorative**. En effet, un matériel, un poème qui trahissent des fins didactiques apparaissent toujours comme des objets détournés de leur fonction fondamentale et par cela même médiocres, inférieurs : une poésie ne gagne rien à être didactique, et un moteur didactique est en général scié en deux et ne marche pas. D'emploi peu répandu, il permet, opposé à enseignement, d'en souligner les travers et les déformations. Le plus souvent il exprime ainsi, à peine dissimulée, une opinion péjorative à l'endroit de l'enseignement lui-même : *"Celui qui ne sait pas faire des mathématiques les enseigne, et celui qui ne sait plus les enseigner dit comment il faudrait le faire"*.

II. Substantif féminin : la didactique

1 - **Art d'enseigner**. (*"La grande didactique"*, Coménius, 1640). Ensemble des moyens et des procédés qui tendent à faire connaître, à faire savoir quelque chose, généralement une science, une langue, un art...

2 - **Projet social de faire approprier, par un ou des élèves, un savoir constitué ou en voie de constitution** ; par extension, tout ce qui concourt à l'enseignement d'un domaine de connaissances : objectifs, institutions, structures sociales, moyens de contrôle et d'évaluation...

Dans cette acception l'accent est mis :

- sur le rôle du savoir : ne relève de la didactique que ce qui, dans le projet éducatif, est spécifique du savoir visé ;

- sur le caractère social du projet et donc sur les possibilités culturelles d'identification et de gestion des savoirs ;

- sur les protagonistes et sur le caractère intentionnel de l'action (même l'autodidacte réalise un projet social).

Usage dérivé et précieux : l'enseignement lui-même, en tant qu'action de transmettre des connaissances (qui apparaît même alors comme une partie ou une phase de la didactique).

3 - **Les moyens techniques, surtout " modernes", de l'enseignement**. Tout ce qui, dans le projet didactique au sens 2, n'est pas l'enseignement direct ; in extenso, l'invention, la description, l'étude, la production et le contrôle de moyens nouveaux pour l'enseignement : curriculums, objectifs, moyens d'évaluation, matériels, manuels, logiciels, aide à l'enseignement par l'ordinateur, ouvrages de formation,...

Syn. "ingénierie didactique" : production de tels moyens dans la mesure où elle s'appuie sur un usage rationnel de connaissances scientifiques en didactique au sens 6 ci-après.

4 - **Certains des enseignements nécessaires à la formation des maîtres,** en tant qu'objet d'enseignement ou que moyen de formation, (principalement dans les pays où celle-ci a été confiée à des Universités). Suivant les structures administratives, ce mot est employé

- *dans le sens de "pédagogie spéciale"* pour désigner la formation donnée à des éducateurs en vue de les préparer à l'enseignement d'une discipline particulière, par opposition à leur formation générale à l'éducation. La didactique comprend alors un apport de connaissances (convenablement aménagées) dans cette discipline ;

- *pour désigner des compléments de connaissances en sciences humaines*, par opposition à la formation (dite fondamentale) dans la discipline ;

- *pour désigner une formation technique et professionnelle des enseignants*, (méthodologie didactique : description des méthodes d'enseignement).

Dans ces contextes, la didactique peut renvoyer à des enseignements très différents, selon qu'elle est considérée ou non, comme normative : elle dit ce qui doit être enseigné, et selon qu'elle s'autorise d'une connaissance empirique et pragmatique de l'enseignement ou au contraire qu'elle tend à s'appuyer sur des bases scientifiques.

5 - Connaissance de l'art d'enseigner ; connaissances sur l'enseignement ;

a) Ensemble de connaissances résultant de recherches menées dans le cadre de domaines scientifiques classiques, sur l'enseignement d'un savoir donné.

b) Le champ scientifique de ces recherches.

Encyclopédie : De nombreuses sciences produisent des connaissances qui peuvent appartenir dans ce sens à la didactique des mathématiques :

- la *sociologie*, puisqu'il s'agit d'un projet social et culturel,

- la *sémiologie* et la *linguistique*, puisqu'il s'agit de communication,

- la *psychologie* (et plus particulièrement la psychologie cognitive, les théories de l'apprentissage, l'épistémologie génétique...), puisque tout commence et tout finit par l'activité intellectuelle d'un sujet ; et, dans cette direction, la *neurophysiologie*,

- la *pédagogie* et la *pédiatrie* (bien qu'elles ne s'intéressent principalement qu'aux enfants),

- la *psychanalyse*,

- *l'épistémologie* (théorie des connaissances humaines) et plus particulièrement *la discipline elle-même, ici les mathématiques*, ainsi que leur environnement métamathématique, l'histoire des mathématiques, etc.

D'autres, sans lui fournir de cadre théorique, lui proposent des instruments qui paraissent si nécessaires ou si prometteurs qu'ils tendent à jouer un rôle essentiel dans son développement : la *statistique* (comme instrument atypique de l'identification de faits), *l'informatique* (Enseignement Assisté par Ordinateur), *l'intelligence artificielle...*

6 - Science s'intéressant à la production et la communication de connaissances, dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances.

Encyclopédie. Cette acception est principalement utilisée en France, par les didacticiens des mathématiques. Elle tend à intégrer toutes les approches précédentes et à leur assigner une place par rapport à une théorie unifiante du fait didactique dont la justification et les méthodes seraient endogènes et spécifiques.

Elle étudie la façon dont des connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société, et plus particulièrement :

- d'une part les opérations essentielles de la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques), les conditions de leur existence et de leur diffusion (l'écologie des savoirs) et les transformations que cette diffusion produit, aussi bien sur ces connaissances (transposition didactique) que sur leurs utilisateurs (apprentissages, rapport au savoir),

- d'autre part les institutions et les activités ayant pour objet de faciliter ces opérations.

Elle utilise diverses approches (ergonomique, systémique, ethnologique...)

Les didacticiens des mathématiques d'orientation fondamentale insistent sur son rattachement aux mathématiques elles-mêmes. Ils s'appuient sur des arguments historiques et épistémologiques tels que les suivants : que ce soit en vue de la recherche ou en vue de l'enseignement, la production et l'étude des problèmes qui sollicitent une notion mathématique ou un théorème, ainsi que les transformations des mathématiques (et leur étude), ont toujours fait partie de l'activité spécifique des mathématiciens. Une situation didactique est un problème élargi (ensemble de conditions qui appellent en réponse la production et l'emploi d'une connaissance mathématique). On ne conçoit pas de moyens extramathématiques de produire ce genre de connaissances par essence mathématiques.

De même, chaque grand secteur de connaissances tend à définir et à produire sa propre didactique. Cette orientation est conforme à la dernière définition. Elle limite actuellement les perspectives d'une didactique générale, même si des concepts créés dans tel ou tel secteur peuvent être utilisés dans un autre.

III. Substantif masculin : le didactique.

Ce qui est de l'ordre de la didactique (au sens 6), ce qui est relatif à l'organisation et à l'exercice de l'enseignement d'une connaissance. Ex. : le didactique et le pédagogique.

Titre : Glossaire de didactique.

Auteurs : Joël Briand (P.E.N. Bordeaux), Carmen Chamorro (P.E.N. Madrid)

Date : Mars 91.

Origine : *Stage de Cahors.*

Type : Définitions, mises au point, recueillies à partir de documents divers.

Glossaire de didactique

AVERTISSEMENT

Un recueil de définitions ne saurait se substituer à la pratique de la discipline (en l'occurence, ici, la didactique des mathématiques). Des déclarations récentes réduisant la didactique à une mise au point terminologique sont là pour nous rappeler que la confusion est vite faite par les néophytes.

Mais un autre phénomène se produit actuellement, dans les lieux de formation. C'est celui de l'utilisation de quelques mots, à seule fin, pour le locuteur, de paraître maîtriser les concepts auxquels ces mots font référence. Par exemple, il n'est pas rare de voir utilisée la notion de "*contrat didactique*" alors qu'il s'agit d'évoquer le rapport maître-élève au sens affectif du terme, de même, la "*transposition didactique*" serait, pour certains, la nouvelle façon de parler de la préparation des cours.

Le glossaire qui suit n'a rien de figé. Malgré ses imperfections et ses lacunes, il essaie de faire le point sur des termes souvent utilisés ; certains verront sans doute leur sens s'affiner au fur et à mesure du développement de la recherche. Nous espérons qu'il permettra à tous ceux qui **travaillent en didactique** des mathématiques d'avoir des références communes pour un certain nombre de concepts.

DIDACTIQUE (d'une discipline)

"Etudie les processus de transmission et d'acquisition des connaissances relatives au domaine spécifique de cette discipline ou des sciences voisines avec lesquelles elle interagit." (Rapport GRECO DIDAMAT CNRS 1983)

"Elle décrit et analyse les difficultés rencontrées et propose des moyens pour aider les professeurs, les élèves et les étudiants à les surmonter, et notamment pour faire du savoir enseigné, un savoir vivant, fonctionnel et opératoire." (Rapport GRECO DIDAMAT CNRS 1983)

"Théorie fondamentale de la communication des connaissances mathématiques". (G.Brousseau 1989- "Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège").

"La didactique ne consiste pas à donner un modèle pour l'enseignement, mais à produire un champ de questions qui permette la mise à l'épreuve de n'importe quelle situation d'enseignement et qui permette de corriger ou d'améliorer celles que l'on a produites, de poser des questions sur ce qui se passe." (Brousseau 1987).

"Beaucoup d'aspects de la recherche en didactique sont spécifiques du contenu des connaissances dont l'acquisition est visée : cela se mesure aussi bien par la nature des problèmes scientifiques auxquels répond tel ou tel concept, que par la nature des difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants. L'enseignement et l'acquisition des concepts de nombre décimal, de fonction de plusieurs variables, de chaleur, de force ou de référentiel, ne sauraient être décrits dans un même modèle de psychologie cognitive, ni du point de vue des problèmes qu'ils résolvent, ni du point de vue des obstacles conceptuels qu'ils soulèvent." (Rapport GRECO DIDAMAT CNRS 1983)

"La didactique n'est pas réduite à une technologie et sa théorie n'est pas celle de l'apprentissage, mais celle de l'organisation des apprentissages d'autrui ou plus généralement celle de la diffusion et de la transposition des connaissances." (Brousseau Angers 1987).

SAVOIR

Dans la conception la plus générale de l'enseignement, le savoir est une association entre les bonnes questions et les bonnes réponses. On constate que quelqu'un sait des mathématiques à ce qu'il sait poser et résoudre des problèmes.

Une présentation axiomatique du savoir mathématique en est une présentation classique et économique, souvent particulièrement adaptée à une sous famille de questions.

La didactique distingue plusieurs types de fonctions du savoir :

- fournir des références culturelles permettant à la société de communiquer des questions, informations, solutions.

- prendre, dans un problème, des décisions dont on anticipe les effets.

- permettre la formulation de l'information nécessaire à la résolution d'un problème.

- fournir des preuves, dans un débat, sur la validité des choix faits ou envisagés dans un problème.

SITUATION

1 - Ensemble de circonstances dans lesquelles une personne (un groupe, une collectivité, etc...), se trouve;

2 - Ensemble de relations qui unissent quelqu'un à son milieu, à la société;

3 - Ensemble de données qui caractérisent une évolution, une action (à un moment donné)...

Spécialement en philosophie, sociologie, et psychologie, (et en didactique) : Ensemble des relations concrètes qui, à un moment donné, unissent un sujet ou un groupe au milieu et aux circonstances dans lesquelles il doit vivre et agir. (dictionnaire Robert)

En didactique : Pour représenter les situations au sens ci-dessus, on utilise comme modèle des jeux formels (automates) particuliers que l'on appelle aussi "situations" et à l'aide desquels on modélise les rôles réciproques d'un sujet (enseignant, élève, etc...), d'un milieu, et d'une connaissance. (G.Brousseau- 1990).

SITUATION-PROBLÈME

Terme utilisé par les enseignants pour désigner des situations (au sens 2 ci-dessus) qui se distinguent des problèmes classiques par une certaine indétermination des questions posées, des objectifs d'enseignement, par l'existence d'un éventail de solutions et de décisions qui feront l'objet d'une transaction au moment même de l'acte d'enseignement. Une situation-problème ne détermine donc pas une situation didactique, mais elle est considérée par les praticiens comme un moyen d'enseignement (non reproductible.) (G.Brousseau 1990)

SITUATION DIDACTIQUE
(elle est spécifique d'une connaissance).

C'est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élève, un certain milieu (comprenant des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

Outre l'organisation de rapports réels ou évoqués avec des situations a-didactiques, le professeur devra aider ses élèves à décontextualiser ses connaissances pour en retenir les formes culturelles ; ce type de situation didactique est une situation d'institutionnalisation.

SITUATION NON-DIDACTIQUE
(elle est spécifique d'une connaissance.)

Il s'agit de situation qui requiert cette connaissance comme moyen de gestion en dehors de tout contexte d'enseignement, et à laquelle le sujet, qui a appris le savoir correspondant ou qui peut le construire (on parlera, dans ce cas de situation non-didactique d'apprentissage), devra faire face seul.

SITUATION A-DIDACTIQUE
(elle est spécifique d'une connaissance.)

Pour qu'un élève puisse affronter une situation non-didactique, il est nécessaire que le professeur ait préparé ce passage de la situation didactique à une situation non-didactique. Il doit donc proposer des situations (dites a-didactiques) que l'élève peut et doit gérer lui-même, sans faire appel à des raisons didactiques, et en l'absence de toute indication intentionnelle.

SITUATION FONDAMENTALE
(correspondant à un savoir)

Ensemble minimal de situations a-didactiques qui permet d'engendrer, par manipulation de variables didactiques, un espace de problèmes suffisamment étendu pour représenter toutes les situations didactiques dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à l'élève une forme du savoir visé.

INSTITUTIONNALISATION

L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. (Brousseau, Angers 87). L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. (Brousseau, Angers 87).

Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le "cours". Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer. (R.Douady, M.J.Perrin, ESM 20 1989).

TRANSPOSITION DIDACTIQUE

"Y.Chevallard a importé en didactique des mathématiques la notion de transposition didactique, initialement due à M. Verret *(Le temps des études 1975).*" dit M. Artigue dans le cahier de DIDIREM n° 3 de juin 89.

Transposition didactique : Remaniement important des connaissances scientifiques qui consiste à les transformer en objet d'enseignement. (Yves Chevallard 1985)

La transposition didactique est l'ensemble des transformations du savoir qui interviennent entre sa production par le mathématicien et son fonctionnement dans le travail des élèves. Ces transformations sont nécessaires, même pour la construction de la science, et inévitables pour l'enseignement. Elles doivent faire l'objet d'une surveillance épistémologique.

(Voir aussi texte de G.Arsac IREM de Lyon "La transposition didactique en mathématiques, en physique et en biologie" 1989).

DÉCONTEXTUALISATION

Le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les réorganise, il leur donne une forme aussi générale que possible. Il fait de la "didactique pratique" qui consiste à mettre le savoir sous une forme communicable, décontextualisée.

RECONTEXTUALISATION

L'enseignant fait le travail inverse du mathématicien. Il effectue une recontextualisation du savoir. Il cherche des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner.

CONTRAT DIDACTIQUE

C'est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. (Brousseau 1984)

(Voir aussi article de G.Brousseau "Fondements et méthodes de la didactique" RDM 1986 Vol 7-2).

A cette définition, il convient d'ajouter une réflexion de G. Brousseau (1984) : "Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves, les comportements qu'il attend, tend à priver ces derniers des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. (NDLR : voir l'*effet Topaze*, l'*effet Jourdain*).

Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, la maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même, et donc il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre, implique pour lui de refuser le contrat mais aussi d'accepter la prise en charge.

Donc **l'apprentissage va reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses RUPTURES.**"

DÉVOLUTION

La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit chercher. (Brousseau, Olivet 1988).

La dévolution fait partie, comme l'institutionnalisation, des interventions du maître sur le couple élève-situation.

Elle est un élément important du contrat didactique.

Il ne suffit pas de "communiquer" un problème à un élève pour que ce problème devienne son problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre. Il ne suffit pas, non plus, que l'élève accepte cette responsabilité pour que le problème qu'il résoud soit un problème "universel" dégagé de présupposés subjectifs. (Brousseau, Angers 1987). G. Brousseau décrit 5 stades de dévolution. (RDM 1986 Vol 7-2 ; Actes d'Olivet 1987 p.90 ; "Les différents rôles du maître", Actes du colloque d'Angers, p. 40).

La dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement mais sur les situations qui le caractérisent. (Brousseau 1987)

OBSTACLES

Un obstacle se manifeste par des erreurs non pas fugaces et erratiques mais reproductibles et persistantes. Ces erreurs témoignent d'une connaissance (erronée) qui a réussi dans tout un domaine d'action (mais qui échoue dans d'autres) ; elles persistent souvent après l'apprentissage d'un savoir correct ; leur origine peut être ontogénétique, didactique ou épistémologique.

Obstacles épistémologiques : Obstacles attestés dans la genèse historique d'un concept et constitutifs du savoir actuel. "On connaît contre une connaissance antérieure". Bachelard ayant mis en évidence ce concept, un certain nombre de travaux qui s'appuient sur l'histoire des sciences poursuivent la recherche entreprise par Bachelard et l'étendent à d'autres sciences que les sciences physiques.

Obstacles didactiques : Obstacles résultant des pratiques d'enseignement antérieures. Le franchissement d'obstacles implique très souvent à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et des systèmes de preuves. Le didacticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques des trois types.

INGÉNIERIE DIDACTIQUE

Synonyme de *engineering*, mot anglais dérivé de *engineer* (ingénieur) et qui désigne l'ensemble des activités nécessaires à l'étude et à l'exécution technique d'un projet de construction, d'installation industrielle ou de production (1973, *Commission française de terminologie* d'après "Encyclopaedia universalis").

Ingénierie didactique (ingénierie génétique) pourrait se dire génie didactique (génie génétique).

"L'ingénieur doit être capable de mettre en oeuvre les méthodes et les moyens matériels et intellectuels les plus récents qui sont à sa disposition pour atteindre son but dans les meilleures conditions techniques et économiques. Mais aussi, en plus de prendre appui sur la science la plus récente, il doit rendre compte de son produit selon les termes de la science. il ne peut se soustraire à cette interpellation." (Chevallard 1982).

Poser le problème de l'ingénierie didactique, c'est poser, en le rapportant au développement actuel et à venir de la didactique des mathématiques, *le problème de l'action*, et des *moyens* de l'action, sur *le système d'enseignement*. (Chevallard, 1982, "Actes de l'école d'été d'Orléans".)

La notion d'ingénierie didactique a émergé en didactique des mathématiques au début des années 1980. Il s'agissait d'étiqueter par ce terme une forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, s'appuie sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique mais, dans le même temps, se trouve obligé de travailler sur des objets beaucoup plus complexes que les objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement, avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge. (M. Artigue RDM 1990 Vol 9-3)

VARIABLES DIDACTIQUES

(d'une situation a-didactique)

Une variable didactique est un élément de la situation qui peut être modifié par le maître, et qui affecte la hiérarchie des stratégies de solutions (par le coût, la validité, la complexité).

La modification des valeurs de ces variables permet donc d'engendrer, à partir d'une situation, un champ de problèmes auxquels correspondent des stratégies différentes de résolution.

SAUT INFORMATIONNEL

Brusque écart d'une variable d'une situation a-didactique qui provoque une modification importante de la complexité de la tâche de l'élève, et par là une modification qualitative des connaissances nécessaires à son adaptation.

CONCEPT OUTIL

Un concept est outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions.

(R. Douady M.J.Perrin ESM 20 1989).

CONCEPT OBJET

Un concept est objet lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances d'un moment reconnues socialement. (R. Douady, M.J.Perrin, ESM 20 1989).

DIALECTIQUE OUTIL-OBJET

Processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé. (R.Douady, RDM 1986 Vol 7-2)

Un travail où interviennent de façon alternée et interactive les aspects outil et objet des concepts doit permettre leur adaptation et leur réinvestissement dans des situations différentes de celles qui les ont produits. (R. Douady).

CADRE

Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et ces relations.(R. Douady, thèse).

CHANGEMENT DE CADRES

C'est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. (R. Douady, thèse).

JEUX DE CADRES

Ce sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves. (R. Douady, thèse et RDM 1986 Vol 7-2, p.6).

La dialectique outil-objet est créatrice de sens. Les jeux de cadres sont source de déséquilibre ; la rééquilibration participe à l'apprentissage. Les jeux de cadres jouent un rôle moteur dans l'une des phases de la dialectique. (RDM 1986 Vol 7-2 p.6)

ANNEXE 1

L'enjeu dans une situation didactique

Guy BROUSSEAU

Conférence du 12 mars 1991 au stage de Cahors

(retranscription à partir de la bande vidéo : Jean-Louis OYALLON)

Je vous remercie de la confiance que vous me faites en me confiant le soin d'occuper l'une des plages que vous réserviez à votre information, et je remercie les organisateurs de m'avoir proposé un sujet roboratif. Je ne suis pas sûr de remplir mon contrat parce que ce n'est pas le résultat d'un travail expérimental direct, et donc c'est un certain nombre de réflexions et de mises en place théoriques que j'essaierai d'illustrer avec des exemples connus. Mais de toute manière la question de l'enjeu dans une situation didactique reste une question un peu spéculative. Ça m'a permis de réfléchir d'une manière un peu différente, de me repencher sur des problèmes que j'avais mal résolus. J'ai cherché à savoir ce qu'était au fond la motivation, et en réfléchissant, je me suis aperçu que c'était un sujet central.

I - Rappels de théorie des situations

1

Une situation est un modèle en quelque sorte, en terme de théorie des jeux, des relations qui s'installent dans une classe, soit entre l'élève et un certain système de savoir, soit entre le professeur et l'élève.

On modélise ces rapports dans un premier temps en termes d'automates finis, mais on s'est aperçu qu'il y avait une évolution des règles, qu'il ne pouvait pas y avoir de situation didactique qui fonctionne sur des règles fixes, on avait démontré qu'il y avait toujours rupture du contrat didactique.

Par conséquent, le travail d'enseignement est un travail à la fois sur un langage, sur une production de faits en fonction de règles connues, et un travail de transformation des règles, en termes d'automates, un langage à auto-imbrication. On a démontré qu'un automate fini peut produire des langages auto-imbriqués simples mais que d'une façon générale, il faut un automate plus complexe qui est un automate à pile de mémoire. Le modèle de la relation didactique est donc un automate à pile de mémoire, c'est-à-dire producteur d'un langage de Chomski.

2

Oublions rapidement ces phrases un peu prétentieuses. Si je considère donc une situation comme étant un certain ensemble de relations d'un sujet avec un certain milieu, un certain environnement, et que je modélise ces relations par un jeu, un jeu formel, la notion d'enjeu qui apparait est très simple : **à chacune des étapes successives du jeu , le sujet a le choix entre plusieurs états. Les "connaissances" lui permettent de réduire son incertitude et de faire ce choix de tel ou tel état à chaque coup.**

En première approche, l'enjeu d'une action modélisée par un jeu est représenté par le gain et, selon la psychologie du joueur, par des fonctions plus ou moins raffinées de sa distribution sur les états terminaux: le gain de l'événement le plus favorable, la somme des gains possibles, l'espérance mathématique de gain.

A chaque état terminal est associé un gain ou une perte. Cette distribution de valeurs constitue l'enjeu global de la partie. En chacun des états intérieurs, c'est-à-dire en chacune des étapes possibles du jeu (qui précèdent ces états terminaux) s'il est possible d'évaluer pour chacun des choix possibles les probabilités conditionnelles de chaque état terminal il est aussi possible de calculer l'espérance mathématique de chaque choix.

Un enjeu est une certaine fonction de cette distribution d'espérances mathématiques sur les issues d'une décision. (un exemple simplifié: la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite) qui prend aussi en compte l'incertitude de la décision.

Elle a pour objet de représenter l'importance d'une décision au cours d'une partie ou d'une action.

Il y a deux points de vue un peu différents:

- il y a **la distribution des gains** sur les états terminaux qui sont les **enjeux objectifs**,

- et il y a **l'espérance mathématique du joueur** qui se trouve dans un certain état et qui est la somme des probabilités conditionnelles .

3

En réalité, **l'espérance mathématique ne représente pas forcément la psychologie du joueur:** les joueurs sont des gens qui n'aiment pas jouer avec des probabilités égales à 1 ou à 0. **Ce qui les intéresse, ce n'est pas le gain, c'est l'écart entre l'espérance mathématique et la réalisation,** c'est-à-dire, ce qui les intéresse dans un jeu c'est **le risque** qu'ils ont encouru ; en quelque sorte, ce qu'ils veulent c'est que dans une situation, les espérances mathématiques soient éloignées, soit parce qu'il y avait beaucoup d'argent (enjeu fort), soit parce que la probabilité était faible. C'est l'écart entre la réalisation et l'espérance mathématique qui donne une idée soit du risque, soit de l'intérêt que l'on avait. Psychologiquement, le jeu ne fonctionne pas de la même manière. Si vous voulez, la mathématisation du jeu ne mathématise pas la passion du joueur, elle mathématise son intérêt, ce qui n'est pas la même chose. Un joueur est intéressé à des situations qui ne sont pas optimales du point de vue mathématique, il est intéressé parce qu'il satisfait d'autres conditions qui participent d'une espèce d'économie interne psychique: le jeu permet de tester des choses comme *"est-ce que le monde m'aime ?"*, *"est-ce que j'ai de la chance ?"*, *"est-ce que je suis aimé des dieux ou non ?"*. Ce sont des jeux différents du jeu qui est mathématisé. Et il va falloir, quand on va analyser la situation d'enseignement, la situation didactique, prendre en compte ces formes différentes d'enjeu. Historiquement, la théorie des probabilités a été créée pour résoudre de tels problèmes, à partir de la notion d'enjeu et du savoir de ce que l'on risquait dans un état donné. Pascal a théorisé l'espérance mathématique plus que la probabilité elle même.

II - Dans une situation réelle, que va-t-on avoir?

On n'aura pas en réalité une modélisation avec une situation: on en aura plusieurs, un joueur jouera à plusieurs jeux, le maître jouera à plusieurs jeux, l'enfant jouera à plusieurs jeux à la fois et il aura des enjeux divers relatifs à chacun de ces jeux là.

1

Une situation didactique lie quatre partenaires sociaux : la société, les parents, le maître et l'élève. Chacun exerce des pressions selon ses enjeux. Une situation didactique est une espèce de résultat de négociation entre les intérêts de ces quatre joueurs. Une situation d'enseignement est le résultat des pressions de ces quatre joueurs, un équilibre instable entre les intérêts qui ne sont pas nécessairement compatibles, cohérents, convergents.

Le modèle le plus simple que l'on connaisse est la situation a-didactique, socialement isolée: un joueur, un environnement, personne n'a d'intention à l'encontre du joueur, il investit sa propre personne et il essaie de satisfaire un certain nombre d'enjeux, de désirs, de choses comme ça, et déjà pourtant, on peut envisager là au moins deux enjeux: l'enjeu personnel (égoïste ou altruiste) et l'enjeu officiel.

2

Quand quelqu'un entre dans une pratique sociale, il entre dans la peau d'un personnage. Il n'est pas nécessairement engagé psychologiquement, il n'est même pas libre de ses décisions. C'est un peu comme un personnage d'une pièce de théâtre qui joue un rôle déjà écrit. Les autres attendent de lui qu'il fasse quelque chose, qu'il joue son rôle, c'est-à-dire qu'il sache et qu'il fasse ce qui correspond à la pratique sociale annoncée; comme il y a des obligations professionnelles, il y a des obligations d'élèves, il y a un métier d'élève. L'enfant apprend ce métier d'élève, il sait ce qu'il a à faire en tant qu'élève et cela ne concerne pas nécessairement sa personne psychologique. Les raisons pour lesquelles le sujet psychologique va investir le rôle qui lui est proposé font partie des problèmes que nous aurons à régler, des conversions en jeu. Alors vous avez les enjeux personnels qui seraient le cas échéant les raisons privées, et puis à côté, un enjeu public ou officiel de l'action.

Donc déjà dans les situations a-didactiques, l'élève entre dans une pratique sociale. On lui propose de faire quelque chose (seul ou avec d'autres) qui globalement doit être favorable à son éducation (il est à l'école) mais dont les intentions pédagogiques spécifiques ne sont pas lisibles. En principe personne ne veut rien apprendre à personne, personne ne veut transformer directement personne, simplement il faut faire *"ce que chacun attend de vous"*.

L'assujettissement (volontaire) des élèves à un projet social peut être aussi pour eux un enjeu important, correspondant au désir de s'intégrer dans un groupe, de se définir, etc. Beaucoup d'élèves sont prêts à faire beaucoup d'efforts pour participer aux activités du groupe auquel ils s'identifient et qui les reconnaît, pour être comme les autres. Cet enjeu est de plus en plus négligé au bénéfice d'enjeux individuels sous la pression de certaines conceptions de l'enseignement.

3

De son côté Chevallard distingue trois types de rapports auxquels doivent correspondre en termes de situations, **trois types d'enjeux:**

- les rapports privés, personnels au savoir ; il faudra observer quels sont les enjeux de ces rapports ;

- les rapports officiels qui sont les rapports avec ce qui se passe dans la classe ;

- et les rapports institutionnels qui sont encore autre chose, qui marquent la pression de la société sur le système.

Ça, c'était le deuxième point: **dans une situation réelle, plusieurs parties sont engagées à la fois de sorte que l'enjeu d'une situation sera un espèce de vecteur,** il n'y aura pas une catégorie en jeu, mais un vecteur dont on regardera les composantes tout à l'heure. A chaque instant dans une situation didactique, si on veut représenter ce qui est en jeu, il faudra avoir des catégories de gains, différentes: enjeux personnels, l'élève se fera plaisir, parce qu'il y adhère, il y aura des enjeux cognitifs, culturels, épistémologiques, affectifs. On regardera cette liste un peu plus tard.

III - Analyse du caractère temporel des enjeux.

1

Il va y avoir une espèce de **dialectique entre l'avant et l'après,** l'avant c'est-à-dire les raisons que l'on a d'investir une situation, le désir au niveau privé, l'enjeu au sens de la mise, ce que l'on met dans l'aventure avant de jouer, il y aura les gains qui sont les résultats effectifs du jeu, et il va y avoir l'après-coup, la réorganisation de la partie en d'autres termes et la relecture de ce qui s'est passé, c'est-à-dire l'enjeu symbolique. Vous avez donc **l'enjeu a priori** qui est de l'ordre du désir, **l'enjeu effectif** qui est de l'ordre de ce qui se réalise et vous avez un **enjeu symbolique,** avec quelquefois une distance assez grande entre l'enjeu symbolique et l'enjeu effectif, et le fait d'avoir réalisé les choses ne donne pas toujours pour autant une bonne lecture de ce qui a été réalisé. Les enfants apprennent spontanément, simplement en participant à certaines activités. Ces apprentissages spontanés ne sont pas nécessairement transformables en savoirs parce que les problèmes ainsi résolus ne sont pas repérés dans un système de savoirs (sauf à utiliser un système de lecture autodidactique qui peut d'ailleurs se fourvoyer complètement).

Ils sont DONC immédiatement oubliés en tant que problèmes. Seules les difficultés rencontrées qui ont mobilisé assez vigoureusement les capacités cognitives conscientes du sujet peuvent laisser des traces dans son système métacognitif: il "connaît" ou reconnaît la situation sans savoir comment lui est venue cette connaissance.

Il en est de même des apprentissages scolaires, toutes les conditions d'un apprentissage scolaire normal bien qu'elles n'aient plus rien de spontané ou de fortuit sont à terme effacées au bénéfice du savoir lui-même. Des efforts raisonnables d'apprentissage volontaire ou au moins conscient de certains savoirs seront oubliés alors que d'autres seront repris, reconstruits, perpétués au niveau symbolique et cultivés comme particulièrement désagréables ou agréables. Ils sont pris dans un discours à propos et fabriqués après coup au cours d'une relecture des moments d'apprentissage.

Ce travail sur les connaissances et les savoirs, sur la perception de leur rôle dans l'activité de l'individu et dans sa position personnelle est indispensable à sa structuration et à celle de ses connaissances. Le transfert de l'investissement des conditions d'apprentissage, vers ou au profit de son résultat, correspond à des modifications d'enjeux que la théorie des situations a-didactiques essaie de modéliser.

2

Donc, diachroniquement, il y a une évolution, **l'essentiel de l'enjeu c'est d'être une fonction du temps.** On ne pourra pas parler d'une manière simple de l'enjeu d'une situation sans préciser comment elle est lue: pendant, tout de suite, après, par quelqu'un d'extérieur, ou si c'est une relecture du sujet.

Par exemple, je veux évoquer deux choses. Ce qui va être peut-être plus important que les enjeux ça va être le caractère adapté ou non à certains processus de ce qui s'est passé. L'enjeu va finalement subir sans arrêt des transformations à cause de ces phénomènes dont je viens de parler et la lecture qui sera faite des événements et de ce qu'on en a retiré sera surtout tributaire de l'usage temporel qui en sera fait. Au fond, **ce qui va juger la valeur d'un moment didactique, ce ne sera pas la réalisation des enjeux éventuels que l'on avait avant, ce sera l'adéquation de ce moment à un processus temporel.** Par exemple on apprend pour des raisons mais ce qu'on a appris permet de faire des choses nouvelles et c'est ce que ça permet qui était finalement important après coup et non pas ce que l'on attendait. Je dis mal les choses un peu exprès pour laisser ouvertes les interprétations, mais, par exemple, imaginons qu'un enjeu soit dénommé objectif, que j'appelle objectif a priori d'une situation didactique pour le maître ou pour l'élève. Le fait d'atteindre les objectifs peut être lu simplement comme la réalisation du projet et donc le résultat le plus satisfaisant de l'activité d'enseignement. Ben, ce n'est pas prouvé, parce que ce qu'il s'agit de gérer c'est une espèce à la fois d'acquisition et d'appétence pour des acquisitions futures, autrement dit par exemple, le fait de ne pas avoir atteint certains de ses objectifs peut être un moteur plus intéressant pour continuer l'action que le fait d'avoir perdu l'occasion d'atteindre ces objectifs. Autrement dit, d'une certaine manière, il y a un certain type de frustration à la suite d'une activité qui peut être plus favorable, dans la dialectique de l'apprentissage, à la satisfaction complète et définitive des besoins ou des désirs que l'on pouvait avoir.

3

Les enjeux ne sont pas lisibles synchroniquement, c'est la signification qu'ils ont dans une chaîne diachronique qui va dire exactement quelle est la signification de cet enjeu pour l'avenir. Je pourrais dire ces choses là de façon plus savante: c'est un apport de la lecture psychanalytique de la création du sens qui montre comment la chaîne du sens est ouverte. On ne peut pas fermer la chaîne du sens parce qu'on ne peut pas résoudre le problème des frustrations fondamentales.

Ce qui est le moteur de la création symbolique, au départ, c'est l'équilibration de la relation de l'enfant avec sa mère, équilibration d'une relation qui est frustrante: la mère n'arrête pas de se séparer de l'enfant, elle a sa vie, sa mort, elle est une autre personne et l'enfant n'arrête pas de vouloir que sa mère fasse partie de lui. Quand la mère disparaît, il voudrait qu'elle reste, il l'appelle, il crie, il voudrait la faire revenir, il faut qu'il accepte l'idée que sa mère peut disparaître et que ces disparitions et ces apparitions ne sont pas soumises à son désir ou à sa volonté. Cette frustration fondamentale est équilibrée par le rapport à un objet médian: c'est la bobine de Freud, l'enfant joue avec un objet, reporte sur ses rapports avec un objet ses relations avec la mère: il fait disparaître et apparaître une bobine à volonté, et on voit là par exemple comment cette nouvelle situation hérite de la précédente par le fait qu'on peut y voir les mêmes relations: apparition et disparition d'un objet, ça ne représente pas la mère, mais il y a un changement dans le rôle: dans le sens situation frustrante, l'enfant est soumis à l'arbitraire des apparitions-disparitions tandis que là il prend la commande du fil, c'est lui qui la tire et qui la jette et donc il joue les apparitions et disparitions à volonté. Le symbole va marcher jusqu'au moment où l'enfant va prendre conscience qu'il n'y a rien d'autre dans cette relation que ce que lui y a mis, c'est-à-dire l'arbitraire de l'apparition-disparition, et du même coup, dès lors qu'il a ça, le symbole échoue dans sa prétention à équilibrer la frustration de la disparition de la mère et, dit Lacan, *la disparition du symbole en tant que moyen d'équilibration de l'économie psychique du sujet crée le besoin d'un nouveau symbole.* Il va y avoir un nouvel objet de savoir qui va être pris comme la chose avec laquelle on va pouvoir satisfaire à nouveau cet appétit de pouvoir sur les choses, et en même temps, chaque fois qu'on a le pouvoir sur les choses, on ne l'a plus, chaque fois qu'on a la réponse à sa question, on a tué le désir que l'on avait de la réponse.

Il faut comprendre que, pour les enfants il y a, entre les différentes composantes de l'enjeu dont on a parlé, des échanges et que, presque toujours, un gain sur une partie va correspondre à une perte sur une autre ; par exemple le fait pour un enfant d'apprendre va le changer, il va sortir de l'ignorance.

L'ignorance a des avantages (je ne dirai pas que certains la découvrent, et même la chantent, je vous ferai passer un texte pour que vous réfléchissiez à ce sujet sur la position de certains de nos collègues), vous n'êtes engagés à rien, sinon à voir le monde avec des yeux naïfs... et universels parce que si vous êtes naïfs, tout le monde peut l'être, l'a été dans son enfance, bref c'est vraiment le moyen le plus empathique possible, le moyen d'avoir la sympathie de tout le monde. Quand vous savez, vous êtes un type gênant, un emmerdeur, vous voulez empêcher les autres de croire à n'importe quoi, tandis que quand vous ne savez pas, vous avez immédiatement la sympathie et l'appui des autres. Quand vous ne réussissez pas un truc, pour peu que vous soyez gentil, les autres viennent à votre secours, ils vous aident, ils vous donnent des conseils. C'est un moyen très commode de s'intégrer dans une société nouvelle que d'y arriver en naïf qui a besoin d'aide, tout le monde trouve ça sympathique. Alors, échanger cette ignorance, cette position d'enfant que l'on choit contre la position de celui qui sait ou qui croit savoir quelque chose, qui s'inscrit dans cette position, qui accepte des responsabilités, qui accepte de reconnaître qu'il sait quelque chose et qu'il a donc des obligations et des devoirs, c'est un échange qui n'est pas si simple. **Et pour les enfants, il faut trouver du plaisir dans le fait de savoir pour abandonner le confort de l'ignorance.**

Il y a des enjeux effectifs et des enjeux symboliques, et des échanges entre ces niveaux d'enjeux qu'il faut considérer, dont il faut faire l'inventaire. Donc, si je voulais donner une structure mathématique de l'enjeu, je serais obligé de faire l'inventaire des situations que je veux représenter, dont je veux maîtriser l'évolution, j'aurais donc un vecteur, un n-uplet et j'essaierais de voir quelles sont les lois d'échanges entre ces choses là. J'ai dit aussi que l'enjeu apparaît comme une sorte de différentiel à gérer, c'est-à-dire que le professeur, l'élève, tout le monde gère un potentiel d'investissement, d'intérêt, d'enjeu et que la relation didactique va avoir pour objet de nourrir, de maintenir les équilibres entre ces choses-là. Le professeur va avoir à se préoccuper dans la chaîne didactique, de façon très précise, de son crédit auprès des élèves. S'il est obligé de faire une leçon un peu emmerdante, il va essayer de gagner en crédit en gonflant les gamins, en faisant quelque chose qui marche bien avant, en leur donnant un petit moment d'excitation, de façon à ce qu'ils abordent avec des possibilités de résister quelque temps à l'ennui et au découragement dans la situation qu'il va leur proposer. Il y a des moments dans l'enseignement qui vont consommer de la motivation, de l'attention, de la capacité de concentration de la part des élèves, et puis d'autres où l'enseignant va augmenter ces choses là. Si jamais il passe son temps à leur prouver que ce sont des imbéciles, il va réussir ; au bout d'un moment ils ne feront plus rien, ils seront découragés ça ne marchera pas. S'il passe son temps à leur dire qu'ils sont magnifiques et merveilleux, rapidement, ils n'en ficheront pas une rame. **Donc il faut vraiment gérer tout ce système écologique du désir de l'élève et des lieux d'investissement de ce désir et de la canalisation vers l'objet de la médiation didactique de ces désirs là.** Alors par exemple, le mauvais calcul est de rechercher la motivation exogène: je vais chercher ma motivation à l'extérieur, je m'amuse bien à l'extérieur et je vais la consommer sur le terrain des mathématiques. Ça va marcher une fois ou deux, mais assez rapidement, on va installer les maths dans un ghetto où on dit *"ah, les maths c'est embêtant, heureusement qu'on aime la vie et tout le reste"*. Ça ne va pas du tout, ça, **il faut trouver dans l'activité même que l'on propose aux enfants, intellectuelle, il faut leur trouver des moyens de prendre leur pied, là.** La motivation exogène est un instrument dangereux parce qu'il va vous vider l'activité que vous vous proposez de faire "aimer" aux élèves, de son potentiel de désir.

Voilà ce qu'il s'agit maintenant de regarder ensemble. On ne va peut-être pas passer trop de temps sur les situations a-didactiques, puisque tout le monde ici en a une idée, on y reviendra peut-être puisque c'est l'alpha et l'oméga, c'est ce que fait l'élève dans son rapport privé aux mathématiques qui intéresse en premier lieu les professeurs, c'est quand même la gestion de la relation didactique qui nous intéresse le plus.

Alors en deuxième lieu, je proposerai donc l'enjeu non pas dans des situations didactiques ou a-didactiques, je prends quelques libertés avec cette organisation habituelle de la didactique, mais je vais parler de l'enjeu dans des situations socialement isolées ; c'est-à-dire au fond quand l'élève est devant une situation, maître de ce qui va lui arriver, que se passe-t-il? Quand le maître est tout seul devant sa classe et qu'il a tendance à oublier les pressions sociales, quels sont les investissements et les engagements qu'il peut avoir? Et puis dans un deuxième temps on essaiera de regarder l'enjeu dans les situations de dépendance sociale, par exemple dans des situations a-didactiques de preuve, l'enfant se place ou est placé dans une situation de dépendance sociale, ce qu'il croit va être jugé par d'autres et il est dans une situation où l'investissement qu'il va faire va être médié par des rapports sociaux. Je fais un autre partage entre des choses pour lesquelles on est relativement indépendant des autres et des choses où au contraire on est dépendant des autres. Et pour le maître, évidemment il s'agira de situations didactiques vues comme des obligations sociales, ce qu'il faut qu'il fasse.

Voilà les deux points que je veux aborder par la suite.

Premier point

L'enjeu au fond c'est ce qui va ressembler à ce qu'on voit dans une partie ; seulement chaque fois que je vais définir le genre de partie qui va m'intéresser - vous voyez que je prends enjeu en un sens très très large - **il faudra définir l'enjeu comme ce qui est gagné ou perdu, et pas seulement en terme de stock, mais en terme de signification dans la chaîne temporelle du système.**

Par exemple, si vous faites une séance d'enseignement alors que l'élève lui, ne peut pas lire ou apprécier ce qu'on prétend lui avoir appris, c'est-à-dire que vous l'avez fait agir, mais il n'est pas en mesure de dire après coup ce qu'il a fait, ce qu'il a appris. Alors on peut imaginer que l'enjeu du côté du maître est bien vu, que le maître peut dire ce que l'élève a fait et comment, mais que du côté de l'élève l'enjeu n'est pas visible et pour lui il se peut très bien que cette leçon soit vide au plan didactique. Des élèves assez grands ne supporteront pas une phase vide de projet didactique pour eux, vide de résultats didactiques. Si vous restez un moment sans parler, si vous ne voulez pas dire ce que vous voulez qu'ils apprennent, si vous prétendez obtenir par des causes des choses qui seraient pour eux des raisons et que vous ne leur rendiez pas raison, il se peut très bien qu'ils disent *"qu'est-ce que c'est ?... à quoi on joue ?... dites nous ce qu'il faut apprendre... on est là pour apprendre, pas pour...etc"*.

L'un des enjeux principaux, l'une des craintes principales des professeurs, et surtout des professeurs débutants est de ne pas remplir le temps avec assez de temps didactique, de ne pas savoir quoi faire avec les élèves, qui paraisse aux élèves suffisamment gratifiant ; la première crainte c'est de ne pas pouvoir continuer la relation didactique parce qu'on n'a pas rempli les conditions dans le temps précédent. Autrement dit, **ce que doit gérer le prof d'abord, c'est d'éviter la rupture de la relation didactique** parce que l'élève trouve qu'on s'emmerde ou qu'il ne fait rien d'intéressant ; les élèves jeunes ne protesteront pas mais rempliront le vide par autre chose: ils parleront, ils s'occuperont, se bousculeront, bref s'il ne se passe rien, il y aura du désordre, il y aura un autre ordre qui s'installera que l'ordre didactique. Et ça, c'est la terreur des débutants de se dire *"mais qu'est-ce que je vais faire ?.. il faut que je fasse quelque chose sinon il ne va rien se passer, ou se passer quelque chose d'insupportable"*, etc... C'est l'enjeu fondamental et c'est vrai à tous les niveaux: *"mais qu'est-ce que je vais leur dire pour qu'ils restent tranquilles, qu'ils trouvent qu'ils ont quelque chose à faire de suffisant ?"*. Alors, on voit que là ce n'est pas un enjeu apparemment facile à décrire ; c'est pourtant l'enjeu fondamental. Un type qui s'installe comme prof, ou l'élève qui s'installe comme élève, faut que ça dure, faut que ça puisse continuer, faut qu'une chaîne s'instaure qui chaque fois maintienne en haleine les partenaires de la relation didactique. Ce n'est pas un enjeu très facile à mettre en évidence. On a essayé à une époque.

Allez, petite parenthèse méthodologique: ne prenez pas ça comme exemple, c'est difficile, mais je n'ai pas su faire mieux. Comment savoir si justement, pendant une phase didactique les élèves sont ou non attentifs, s'ils investissent ce que l'on est en train de faire, si le temps est plein ou vide. Les maîtres avisés sentent ça très bien, quand il y a un appel, quand il sont en train de ne pas satisfaire ce genre de condition, il faut nourrir le système par des questions, par du nouveau, de l'étonnement, on va regarder tout ce qu'il faut gérer. Il faut de l'équilibre entre le nouveau et l'ancien, rappeler que ce qu'on fait a de l'intérêt, et en même temps apporter des trucs nouveaux pour que ça avance. Les maîtres sentent ça très bien. Comment le sentent-ils? Quels sont les indices qui permettraient à quelqu'un de voir qu'à un moment donné il y a un enjeu? L'indice le plus simple c'est que s'il n'y a pas d'enjeu, les gens se désintéressent complètement de ce qui se passe. Je prends le truc au niveau zéro: qu'est-ce qui prouve que dans une société, il y a un enjeu commun, comment le montrer, où le chercher ce truc là? On ne l'a peut-être pas bien cherché, on devrait pouvoir reprendre ce genre de travaux, mais la forme sous laquelle on l'avait abordé n'était pas très bonne et n'a pas donné de résultat, je vous la livre comme ça pour mémoire. On a dit: *"écoutez, c'est pas difficile, quand il regarde une classe, est-ce que le maître est sensible à ça? Il y a des classes où il n'y a pas de bruit mais c'est parce que tout le monde dort, il y a des classes où il y a un bruit raisonnable qui est l'indice d'une activité raisonnable. Qu'est-ce qui va distinguer la pagaille d'une saine activité, est-ce que ça se sent ?"*. Alors on a pris des morceaux de films...

Dans la première partie, j'ai parlé de théorie des situations mais il faudrait savoir si cette théorie est pertinente, si elle décrit quelque chose. Vous avez l'air de croire que c'est bien parce que c'est cohérent, je me sers de la théorie des jeux pour donner une signification aux choses, je montre des tas d'endroits où ça a l'air de décrire quelque chose, mais en fait il faut pouvoir déduire des choses de cette théorie si elle est consistante, et il faut montrer des phénomènes qu'elle permet de décrire c'est-à-dire il faut montrer que la théorie est pertinente, il y a des parties de la théorie qui sont concrètement significatives. On a cherché de manière un peu directe, peut-être, à voir si l'investissement des élèves était un objet observable. Alors on s'y est pris comme on s'y prend à Bordeaux pour dire dans quelle mesure les gens qui goûtent le vin ont, ou non, une opinion objective. Est-ce que quand on dit qu'*un vin a de la cuisse*, ça a du sens ou pas? On prend un certain nombre de taste-vin, on leur présente un certain nombre de vins divers, et puis on leur demande de dire dans quelle mesure ces vins-là ont de la cuisse ou pas. Ils mettent entre 0 et 10, ou bien chacun donne un ordre décroissant de cuisse pour le vin. La question est alors de savoir s'ils sont d'accord ou pas: si tous les ordres sont tels que les appréciations sont données comme au hasard, ils auront beau prétendre qu'ils s'accordent, il n'y aura rien derrière leur baratin, c'est pas vrai. Si maintenant tous ces gens qui ne savent pas décrire de façon convenable pour des béotiens comme nous ce que c'est qu'un vin qui a de la cuisse, sont à peu près d'accord pour ranger les vins dans un ordre raisonnable, ça veut dire qu'ils sont sensibles à quelque chose, que ce n'est pas le hasard. Deuxième acte, qu'est-ce qu'il y a? On essaie de caractériser les vins que l'on a proposés à l'aide d'observables divers, le degré d'alcool, la couleur, etc... et on va chercher parmi tous ces caractères ceux qui pourraient être reliés à la cuisse pour essayer de fabriquer avec ces trucs-là un ensemble d'indices pour simuler le jugement des goûteurs.

Alors si les experts sont les maîtres, ils ont la possibilité de dire devant une leçon si ça accroche ou pas, si les enfants sont motivés ou pas, bref s'il y a un enjeu pour les enfants ou pas. On va leur présenter des classes et on va leur demander de dire ce qu'ils pensent: on l'avait fait avec des films, ce qui n'est forcément la chose la plus intelligente parce dans le film beaucoup de choses sont perdues, mais pour avoir une certaine objectivité, il fallait ça. On avait découpé des morceaux de films où l'on voyait des enfants qui avaient une certaine activité pendant un certain temps, et puis on présentait aux gens 10 ou 15 séquences de quelques minutes, et on leur demandait de dire s'ils avaient l'impression que les enfants s'étaient investis dans l'activité ou pas. On essayait de contrôler aussi le biais introduit par le film, c'est-à-dire qu'on avait quelques personnes qui avaient regardé les séquences et qui avaient donné leur avis aussi. On ne pouvait pas être très nombreux dans la classe à regarder la situation, et déjà quand les gens étaient dans la salle à côté c'était à travers quand même une image qu'ils voyaient la classe, et on était déjà dans les conditions du film.

Voilà, on a cherché quels étaient les indices dans les comportements des élèves, et finalement, on n'a pas trouvé grand chose de bien fiable. On a trouvé ça pour des choses qui sont déjà symboliques, mais pour des choses effectives comme celles là... Si vous voulez, **les signes que les gens trouvent pour l'investissement des élèves, ce sont des signes qui sont donnés volontairement pour des signes d'investissement par les élèves.** C'est-à-dire que si vous interrogez un élève, ça fait partie de son métier d'élève de donner au professeur une image positive de ce qu'il est, de son investissement: par exemple, il ne va pas parler avec le maître comme il parle avec les élèves. Il va satisfaire des obligations de classe. Vous avez beaucoup de comportements des élèves qui sont contrôlés par l'obligation: vous avez des élèves avec l'air intelligent, l'air de participer à la classe, vous les interrogez, paf, c'était tout à fait mécanique, ils renvoyaient des feed-back mécaniques au professeur qui continuait à penser que ça allait très bien puisqu'il avait des retours.

C'est pour ça que les leçons de type dogmatique ne marchent pas: les gens peuvent très facilement fabriquer une image positive de l'élève, et le prof ne le sait pas, de temps en temps le prof s'arrête et introduit dans son discours un certain nombre de moments qui ont au moins une fonction phatique, qui ont pour objet de maintenir en haleine l'interlocuteur. Alors on s'arrête, et on dit: *"qu'est-ce que vous pensez de ce que j'ai dit sur la première partie?".(Rires)*

S'il y a des gens intéressés à la méthode statistique (méthode des juges et des situations) je peux retrouver quelques textes dans lesquels on avait raconté ça, qui n'ont d'ailleurs jamais été publiés dans des revues de didactique : on avait la faiblesse à l'époque de ne vouloir publier que des résultats positifs.

Des questions sur la première partie? Ça ne vous a pas paru trop formel? C'est un instrument de travail, ce n'est pas pour le plaisir de dire on mathématise l'enjeu, c'est fait pour en parler avec une représentation qui va apparaître comme commune.

Question de C. H.: *il me semble que vous distinguez un enjeu maître et un enjeu élève, c'est nouveau pour moi, je ne vois pas trop bien dans quoi intervient le remplissage du temps didactique: pour moi c'est un objet maître, parce que j'étais partie sur une explicitation de ce qu'était l'enjeu pour l'élève, comment on devait faire pour qu'une situation mathématique ait suffisamment d'enjeu et il me semble que vous partez aussi sur un enjeu du maître qui consisterait à bien remplir son temps?*

Entre autres. **Il y a autant d'enjeux,** ai-je dit, **que de jeux, que de situations.** Quand on a étudié les situations, on en a étudié les composantes. Une situation didactique effective est un empilement de jeux, et je dirais même, c'est plus compliqué que ça: on a beaucoup travaillé sur la notion de conception, à la suite en particulier des travaux des psychologues, et puis Chevallard a voulu substituer à ça les rapports au savoir. Traduit en termes de situations, ça voudrait dire que chaque situation effective ou potentielle porte ses réactions d'individus. Il n'y a pas lieu de dire qu'un enfant a nécessairement une conception, parce que des situations différentes peuvent révéler des réponses qui peuvent être non contradictoires, qui sont conditionnées par la situation et que, par conséquent, un enfant aurait des possibilités de conceptualisation des choses qu'il serait en mesure d'envisager, des (pas "une") conceptions et qu'il mettrait en oeuvre dans des situations un peu différentes,... une espèce de clivage. Par exemple le fait pour un élève d'avoir répondu faux à un problème n'est pas forcément le révélateur de sa conception personnelle, c'est simplement un état, il a répondu ça, il se peut très bien que dix minutes après, il ait complètement changé, il ait viré, sa possibilité de répondre juste s'est trouvée complètement activée, l'autre détruite par la situation, et vous voyez sa conception a une certaine labilité, ce n'est pas un truc fixe, on voudrait que les élèves soient une solidité, or en réalité les élèves ont des possibilités d'investir les situations sur des modes divers.

Et ce clivage-là expliquerait qu'on n'arrive pas à cerner la conception d'un élève, chaque fois que vous bougez la situation, vous révélez des possibilités différentes. C'est effrayant, parce que jusque là au moins on pouvait s'accrocher à quelque chose, on disait: *"on travaille sur l'élève, l'élève est là et à l'intérieur il y a quelque chose"*. Dès lors qu'on considère que l'élève est un espèce d'empilement de potentialités de relations avec les autres, avec les choses, sur quoi on travaille, comment est-ce qu'on va pouvoir unifier, à quoi va-t-on pouvoir le juger ? La tentative de Chevallard est un peu drastique, il est vraisemblable qu'il y a des choses pour lesquelles on peut identifier et on l'a fait, on ne va pas jeter tout ce que les psychologues cognitivistes ont fait pour rattraper ce point de vue. Il y a des choses qui sont fixes, d'autres qui ne le sont pas.

Le savoir de l'élève était ce qu'on imaginait comme enjeu le plus important d'une situation a-didactique, et déjà le voilà qui éclate. L'éclatement de cet enjeu avait été fait par les types, par les composantes de situations, par exemple l'enjeu relativement à un certain savoir qui fonctionne comme connaissance et pas comme savoir parce qu'il s'agit d'une situation d'action, l'enjeu d'un savoir qui va fonctionner comme savoir parce que la situation va être une situation sociale dans laquelle le savoir se montre en tant que tel, non pas comme moyen, comme outil mais comme objet de savoir. Cet éclatement-là on le trouve pour les enjeux, autrement dit chaque situation va porter des enjeux que l'on va considérer comme spécifiques de cette situation, et la difficulté de la relation didactique va être de faire durer dans le temps ce qui mérite de durer, les événements qui se passent dans une classe qui n'ont pas de descendance dans les comportements des élèves ne sont pas inutiles mais vont ...

Ce qu'il est important de théoriser dans la relation didactique, c'est ce qui va durer ou avoir des conséquences, et donc c'est à travers ce qui se fait dans le temps qu'il faut regarder le sens d'une relation didactique. Au début pour bien montrer ça, j'utilisais une métaphore: si vous photographiez une classe, vous pouvez inférer que le maître est celui qui est debout, celui qui a la bouche ouverte, mais vous ne savez pas au fond quel rôle il joue, ce qu'il est en train de dire. Il faut prendre une partie signifiante dans la durée pour identifier un certain nombre de choses. Ce qui est important du point de vue didactique, c'est ce qui va déterminer une niche dans le temps suffisamment grande pour que les choses y existent, les savoirs y existent, les connaissances y existent et qu'il y ait des conséquences, c'est-à-dire produisent des apprentissages, des transformations de savoir.

L'enjeu, je ne sais pas si je réponds, mais il est clair que **l'enjeu pour le maître dans une leçon, c'est autant de rendre possible la leçon suivante que de faire apprendre aux élèves un certain contenu précis comme un objet complètement assumé.** Ça ne veut pas dire qu'il n'y a pas cet objectif d'enseigner, il ne sont pas indépendants, néanmoins il y a des maîtres qui vous diront: *"je ne peux pas faire cette leçon si je n'ai pas fait celle-là avant"* et vous regardez les apprentissages et vous ne trouvez pas de dépendance entre les apprentissages, c'est-à-dire que les élèves auraient pu apprendre le contenu de la deuxième leçon aussi bien avant le contenu de la première, c'est même peut-être au cours de la deuxième qu'ils ont appris ce qui faisait l'objet de la première mais le discours du professeur, lui, l'organisation de son travail ne pouvait pas se faire dans un autre sens, autrement dit il **y a une contrainte interne dans l'action du professeur qui l'oblige à faire certaines choses,** et à les faire publiquement de manière à ce que les élèves puissent assumer le fait qu'il l'ont fait.

Je vais prendre un autre exemple. A un examen, en DEUG, en licence, vous recevez des étudiants, ils ont 10, ça ne veut pas dire qu'ils savent tout le programme qu'on leur avait enseigné, loin de là, on estime que ça peut aller. Mais l'année suivante, on va faire comme si tout ce qu'on avait enseigné avait été appris, et il va y avoir plein de choses que le type n'avait pas bien appris, et il va falloir qu'il assume la responsabilité de le savoir, et s'il ne le sait pas, il va le bosser, l'utiliser, on passe: le statut officiel du savoir de l'année suivante c'est d'intégrer des savoirs non nécessairement acquis de la première. Mais si vous n'aviez pas fait la première année, l'élève ne serait pas obligé de faire comme s'il les avait déjà appris. Je ne sais pas si mon exemple vous paraît convaincant. Il faut qu'un nombre suffisant d'élèves aient vu votre première leçon pour que vous puissiez exiger dans la deuxième, de la part de ceux qui avaient compris, et de ceux qui n'avaient pas compris qu'ils fassent l'effort suivant pour comprendre.

Autrement dit, **dans le contrat didactique, vous héritez de votre contrat précédent et de vos actes, et cette chaîne de conditions est indispensable pour le professeur, c'est donc un des enjeux**: un des enjeux d'une leçon c'est : *"qu'est-ce que je peux faire maintenant que je ne pouvais pas faire hier ?"*

Je fais une parenthèse là: vous prenez un professeur avant une leçon et vous lui demandez quels sont ses objectifs: *"je veux que les élèves fassent ça..."*, et puis vous le prenez après la leçon, et vous lui demandez quels sont les résultats de la leçon, ce qu'il peut faire maintenant qu'il ne pouvait pas faire avant. Eh bien, vous allez constater que le professeur va vous donner une liste bien plus longue de résultats qu'il ne pouvait vous donner une liste d'objectifs. Il s'est passé plein de choses exploitables, pas forcément projetées, qui vont permettre au maître d'avancer dans le dialogue didactique avec les élèves, il va utiliser des faits ou des phénomènes pour mettre l'élève dans la condition d'apprendre.

Je ne suis pas sûr que ma réponse bien longue vous satisfasse. Donc **il y a autant d'enjeux que de jeux qui vont représenter une partie.**

Le professeur joue un jeu avec ses élèves, il joue un jeu ambigu par moments, par exemple il apporte de l'information. Son enjeu quand il apporte de l'information c'est quand même que ce qu'il dit soit nouveau pour les élèves. Le professeur doit faire avancer visiblement les connaissances qu'il demande aux élèves, et quand l'élève a fini, il faut qu'il sache ce qu'on a fait de nouveau, qu'il ait un moyen d'identifier ce qu'on va lui demander de faire, ce qu'il a appris. Une activité dont les maîtres ne donnent pas la lecture, une activité d'enseignement que les élèves ne traduisent pas en termes d'apprentissage va leur apparaître comme vide d'intention. Ce qui risque de m'arriver aujourd'hui!... *(rires)*

Je me cramponne à votre question parce qu'elle est ma justification. Il y en a une qui m'a posé une question, je la prends, l'ennui c'est que j'en mets trop...

Dans la deuxième partie, on va regarder un certain nombre d'enjeux. Par exemple, dans la situation, l'économie psychique: je vais prendre le maître, puisqu'on m'a demandé de traiter la situation didactique. Pour les besoins professionnels, pour que l'élève lui fasse confiance, pour que le maître puisse proposer aux élèves des apprentissages ou des problèmes dont les élèves ne sont pas du tout sûrs qu'ils vont savoir les faire, mais ils ont bon espoir, il faut qu'ils aient confiance dans le maître, sinon c'est une violence faite: les adultes ne supportent pas qu'on leur pose un problème comme ça au coin d'un couloir avec l'injonction de le résoudre, ils ne sont pas du tout en mesure de faire ça.

Parenthèse: un des enjeux de l'enseignement... **On a beaucoup appuyé sur le fait de rendre les élèves autonomes, eh bien c'est un enjeu qui doit être absolument soumis à une analyse et à des forces contraires.**

Tous les enjeux que l'on va regarder rentrent à l'intérieur de régulations, il n'y en a aucun qui soit ... Ah je ne l'ai pas dit dans l'analyse générale: l'analyse de l'enjeu c'est l'analyse de la régulation à l'intérieur de laquelle il rentre, qu'est-ce qu'on fait des gains, qu'est-ce qu'on fait des pertes, comment on les réinvestit, il ne suffit pas de regarder les gains et les pertes. On veut rendre les enfants autonomes parce qu'on a l'impression que c'est un gage de fonctionnement des connaissances qu'on leur transmet: oui, à court terme, oui. Mais si je regarde le cours suivant, l'autonomie est un obstacle à l'apprentissage parce que justement, le fait d'être autonome vous conduit à une forme de refus de l'apport extérieur, ce refus se cristallise du point de vue culturel en une position d'adultisme, l'adulte c'est celui qui théoriquement est responsable, il ne sait peut-être pas les lois, mais s'il les enfreint, on le met en taule, il n'est plus un enfant, il est responsable de ses actes, c'est lui qui doit répondre. Pour apprendre, pour se soumettre au maître et aux exigences de l'apprentissage, il ne faut pas être trop adulte, il faut admettre qu'on est encore enfant, qu'on a le droit à l'irresponsabilité, qu'on a le droit à l'erreur. Ça doit se convertir mais enfin il faut un espace, vous avez des petits adultes qui ne peuvent plus rien apprendre, des petits messieurs qui savent tout, qui raisonnent ça comme rien, et qui, en fait, sont complètement bouclés, fermés du côté de l'apprentissage, ils ne peuvent plus rien investir dans cet acte de devenir. Vous voyez qu'**il y une contradiction entre l'acceptation de se voir en devenir et l'acceptation d'une position sociale de responsabilité totale au sujet de ce que l'on fait.** Donc, il faut rendre les enfants autonomes, mais pas n'importe où, n'importe comment, et sous conditions. Alors bon, vous pouvez m'objecter qu'on peut apprendre toute sa vie en étant autonome, oui oui oui! Ce que vous recherchez c'est l'autonomie effective, et ce qui tuera votre situation d'enseignement, c'est l'autonomie symbolique. Autrement dit, vous voulez les effets de l'autonomie et vous ne voulez pas sa lecture sociale. Il faut donc que l'élève puisse être autonome sans se sentir autonome pour éviter de boucler son truc. Est que vous voyez la pertinence de la distinction que j'essaie de faire? Il faut trier ça si on veut rendre compte des équilibres que doit gérer le maître.

Je disais donc qu'**il y a une économie psychique à gérer.** Pour que le maître fonctionne bien, il a besoin d'une confiance, d'une position affective des élèves, cette confiance a priori des élèves vis-à-vis du maître, le désir de lui plaire, le désir de faire quelque chose non pas pour soi seulement mais pour d'autres raisons qui sont de remplir ses obligations vis-à-vis du maître. Le maître a souvent besoin de ces choses là, c'est un adjuvant qu'il trouve confortable: si les gens vous aiment bien, ça vous aide bien et ça les aide aussi dans le travail qu'ils auront à faire avec vous. Donc, le maître recherche d'une certaine manière l'affection de ses élèves, c'est un enjeu de la situation didactique, le maître, lui, à titre privé, veut avoir de l'estime et de l'affection de la part de ses interlocuteurs, il cherche, il quémande auprès des élèves un appui affectif, s'il ne l'obtient pas souvent, ça va mal aller, pour diverses raisons. Et ça, c'est son économie psychique, il faudrait voir dans quelle mesure la leçon lui coûte, du point de vue psychique, pourquoi cet altruisme qui va consister - vous connaissez les paradoxes de la situation didactique - à vouloir des choses qu'on ne peut pas obtenir, à devoir cacher ce qu'on veut. Tous les paradoxes de la situation didactique coûtent énormément du point de vue psychique: il faut avoir envie d'obtenir ça, il faut avoir envie que les gamins apprennent sans qu'on ait les moyens de les obliger, ça consomme des forces, de l'énergie psychique et pour ça le maître a besoin d'appui affectif. Donc il a besoin de la considération et de l'affection de ses élèves. Je dessine mal cette économie psychique dans la classe, mais elle est évidente et en même temps elle est déontologiquement mauvaise: l'apprentissage ne doit pas fabriquer de lien d'asservissement de l'élève à son maître, il ne doit pas le faire d'abord pour le savoir, et ensuite pour le reste, mais je ne m'intéresse pas à la pédagogie, je ne m'intéresse qu'au savoir. Le savoir doit fonctionner rapidement d'une manière autonome pour l'élève, sans la dépendance par rapport à l'opinion du maître, par rapport à ce que le maître voulait. Vous voyez je redescends au niveau des connaissances et des rapports à la connaissance. L'assujettissement affectif de l'élève risque de l'enfermer dans l'infantilisme dont j'ai parlé tout à l'heure, c'est-à-dire cette idée *"moi je suis petit, gentil avec le maître, j'essaie d'être mignon, etc"*, **il faut que le maître gère ces rapports affectifs avec les élèves avec économie, qu'il n'en demande pas trop, juste ce qui est nécessaire, le minimum, et qu'il permette aux élèves de rompre le fil dès que c'est nécessaire, quitte à le renouer pour autre chose. Et quand un beau jour l'élève s'en va, il faut que la relation affective puisse se rompre.**

Ça va être la même chose pour l'apprentissage. Je prends l'élève cette fois-ci. L'élève doit investir un apprentissage du point de vue affectif: *"Ah, comme ça serait bien si je savais faire ça, si je savais faire mon problème"*. Et puis on sait faire le problème et on s'aperçoit qu'il y a autre chose après. *"Si je savais bien taper à la machine, j'écrirais des livres"*. Eh bien voilà, on sait taper à la machine et on n'écrit pas de livre. Autrement dit, chaque fois l'apprentissage fonctionne sur un crédit qui n'est jamais avalisé, mais qui doit être converti en nouveau crédit, ce que j'appelle la chaîne du sens, mais cette chaîne du sens doit être objectivée dans la relation: chacun de nous peut créer cette chaîne du sens dans une voie complètement personnelle ou au contraire dans une voie sociale ou culturelle.

Deuxième point

1

L'enjeu dans les situations socialement isolées, et je donnerai quelques exemples de rapports entre l'élève et la situation elle même: **qu'est-ce que l'élève attend d'une situation a-didactique, qu'est-ce qu'il peut espérer avoir?** Il va y avoir le plaisir et l'apprentissage. L'apprentissage, c'est déjà quand même une mise en réserve, ce n'est pas la même chose. Je joue, je résous parce que c'est intéressant, je ne suis pas conscient d'apprendre quelque chose, je ne me prépare pas à faire autre chose, je fais. Quand je résous un problème, j'angoisse, je ne sais pas trouver, je cherche un truc, j'en essaie un autre puis à un moment donné, j'ai l'impression que ça va marcher, je résous mon problème. **Je n'ai pas d'enjeu d'apprentissage, j'ai un enjeu d'action** en quelque sorte, le plaisir de maîtriser une situation, de me prouver que je peux le faire, tout un tas de choses. L'enjeu de la réalisation de la situation et l'enjeu de l'apprentissage ont quelque chose de contradictoire d'une certaine manière, parce que apprendre, c'est finalement puiser, contre la logique de ce qu'on fait, des forces pour faire quelque chose qu'on ne sait pas encore: j'apprends mes tables, je m'embête à réciter des trucs dont je n'ai aucun usage, ce n'est justifié par rien, et je dois le savoir pour pouvoir par la suite faire des choses, paraît-il, faire des opérations ou je ne sais quoi.

Est-ce que vous voyez qu'investir l'apprentissage, c'est se préparer à un avenir qu'on ne connaît pas encore par une activité formelle, quand l'apprentissage est conscient. Maintenant, si sans le savoir j'apprends des choses en faisant mes problèmes, là je n'ai pas conscience d'avoir appris, c'est le maître qui va me révéler éventuellement qu'en faisant ce problème j'ai retrouvé la méthode de Tartempion bien connue des spécialistes. Mais je n'ai pas appris la méthode, on me l'a révélée, je la sais, je m'en souviens, je l'ai produite sur un autre mode. Donc, apprendre, connaître, savoir vont relever d'un enjeu différent, **l'apprentissage qui a pour but de connaître et celui qui a pour but de savoir ne sont pas les mêmes.**

Alors on pourrait regarder les rapports de l'élève avec l'apprentissage, les rapports de l'élève avec un autre élève, avec sa position d'élève plutôt: quel est l'enjeu de l'élève en tant qu'élève?

Plaisir, réalisation, c'est l'enjeu de l'élève en tant qu'acteur.

Apprentissage (de connaissances ou de savoir) c'est l'enjeu de l'élève en tant qu'apprenti, ce n'est pas le même. Dans une leçon vous pouvez avoir une formidable gestion de la situation en tant qu'action et un enjeu nul du point de vue apprentissage, il faut bien voir ça.

Il y a l'enjeu de l'élève en tant qu'élève, l'élève n'est pas seulement un apprenti, c'est quelqu'un qui regarde son apprentissage et qui en quelque sorte le finalise ; sa gestion des savoirs, de son avenir, de l'usage qu'on fait de ce qu'il sait, ce n'est pas la même chose que savoir. Par exemple un élève qui a payé assez cher un savoir et qui s'aperçoit qu'il ne lui sert pas, qu'on ne l'interroge jamais là-dessus, que ça n'a pas de fonction didactique, va avoir une position d'élève, déçu, pas une position d'apprenti, mais d'élève. Son enjeu, sa mise n'a pas été gratifiée. Donc il faut que le maître soit conscient que l'élève a un enjeu d'élève dans l'activité didactique, et que par conséquent il faut rendre compte à cet élève de l'usage que l'on a fait de son temps et de ses apprentissages. C'est pourquoi les maîtres prennent grand soin, quand ils le peuvent, de gérer ça en disant: *"vous vous rappelez, on avait dit ça, on l'avait appris, regardez là, maintenant ça sert, vous avez fait ça..."*. Ils vont chercher à gonfler chez les élèves l'impression que toutes les minutes de l'apprentissage ont été finalisées dans ce que le maître propose par la suite. c'est ce que j'appelle **l'enjeu d'élève.** Je peux continuer comme ça: l'enjeu de l'élève auprès du professeur, par exemple.

Le maître lui, qu'est-ce qu'il investit dans une situation a-didactique? Qu'est-ce qu'il investit dans une situation didactique? Il est sûr qu'il y a des contradictions. Le maître investit des choses qu'il ne connaît pas forcément, il n'est pas nécessairement conscient de ce qu'il est en train de satisfaire quand il fait sa classe. Je cite souvent l'exemple d'un inspecteur qui avait vu un de ses maîtres au moment d'une leçon de gym. Le maître envoyait toujours la balle un peu trop haut, un peu trop fort, et quand c'était lui qui avait la balle, les gamins ne l'attrapaient pas. L'inspecteur lui avait demandé pourquoi il envoyait la balle un peu haut, et il avait dit que c'était pour les faire sauter, pour les faire agir, mais il satisfaisait autre chose avec ça, cette exigence didactique couvrait un besoin psychique de montrer une certaine supériorité, de satisfaire l'image qu'il se faisait du sportif qu'il était par rapport aux petits enfants qu'il avait. Je fais un procès à quelqu'un que je ne connais pas, donc ça ne me gêne pas.

On a beau dire, quelque part il faut se satisfaire de la différence, le professeur pour rester le professeur a besoin de nourrir la différence avec ses élèves, donc les enseignements qu'il donne ne doivent pas réduire la distance entre son savoir et celui de ses élèves, et alors il va le maintenir en voulant toujours avoir un problème de plus, une possibilité de plus pour se récupérer, il ne peut pas travailler au niveau des élèves. Et certains maîtres vont sans le savoir, pour augmenter leur bulle phénoménologique, l'idée qu'ils se font d'eux-mêmes, mettre des gamins en échec, sans se rendre compte qu'ils jouent un jeu qui n'est pas sain, pour les gamins. D'un autre côté, il faut bien les faire sauter et leur proposer des épreuves raisonnables, mais le fait de ne pas satisfaire à travers son activité cette espèce de besoin psychique est impossible, ce qu'il faut, c'est le savoir.

Dans la salle : *"mais inversement, il peut bien lancer la balle pour faire croire que l'enfant sait l'attraper"*.

Absolument. Il est forcément quelque part un "deus ex machina", le problème c'est qu'il le sache et qu'il voie ce que cette situation a comme effet sur lui, être le maître de ce que vont faire et devenir les élèves c'est effrayant et c'est grisant, c'est toute l'écologie psychique du prof qui est derrière. Ces enjeux-là (je ne vais pas vous dire que les élèves-maîtres doivent être je ne sais quoi...) il nous faut savoir qu'ils sont derrière la relation didactique. Ça a été dénoncé. Comment l'étudier ?...

2

Deuxième paragraphe de la deuxième partie : **la conversion d'enjeux: le transfert et le contre-transfert, qu'est-ce qu'on échange dans les rapports didactiques ?** J'en ai parlé longuement tout à l'heure: on échange l'ignorance contre le savoir, ce que ça satisfait et ce que le savoir rapporte et ce qu'il coûte, on échange l'un contre l'autre.

L'ancien et le nouveau: il me parait inutile de rappeler tous les paradoxes de la relation didactique: le maître veut à la fois que l'élève produise le savoir comme une réponse personnelle à une situation raisonnable, le but c'est ça, et en même temps il faut qu'il montre quelque part que s'il n'était pas là et s'il ne portait pas l'information, l'élève ne pourrait pas le faire. Pourquoi est-ce qu'il y a quelque chose à apprendre, parce qu'il y a un problème qu'on ne sait pas résoudre sans ça, donc il y a quelque chose à savoir. Donc le maître ne peut pas dissimuler qu'il enseigne quelque chose, le savoir existe, savoir-faire etc... L'élève doit voir qu'avant il ne savait pas et que maintenant il sait, mais du même coup ça nie l'idée de la construction autonome du savoir. Bon, je ne vais pas rappeler tous ces paradoxes là.

Il y a plusieurs théories pour expliquer comment on passe d'un domaine dans un autre. Vous avez une théorie T_1 qui rend compte d'une certaine catégorie de phénomènes et puis une théorie T_2 qui rend compte d'une catégorie de phénomènes différents, et puis vous avez l'objet réel, il se trouve que vous avez un fait qui peut s'expliquer par l'une ou par l'autre de ces théories ou bien vous avez un fait qui dépend de l'une ou de l'autre des théories, comment est-ce que ce fait va être expliqué, exposé, quels vont être les rapports entre les théories?

Je m'abstrais un peu de mon truc. Les gens voudraient qu'il y ait la didactique générale, en fait nous avons des morceaux de théories, on essaie de théoriser, on s'est toujours défendu de faire de la didactique générale même si ce qu'on disait s'appliquait à bien d'autres morceaux. Il n'y a pas en physique de physique générale comme théorie, il y a un enseignement de physique générale, mais il n'y a pas de théorie générale de la physique, vous avez l'optique, l'électricité ou la thermodynamique qui sont des théories de catégories de phénomènes, peut-être qu'elles appliquent des principes et des méthodes métaphysiques de même ordre, mais il n'y a pas une théorie générale de la physique, du milieu physique, des objets physiques.

Là, en didactique, je prétends qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une théorie générale de l'enseignement, ou une théorie générale du savoir, même si par là on entend par moments "savoir" sans trop dire de quel savoir il s'agit. Alors un fait observé va pouvoir recevoir des catégories d'explications très différentes: psychologiques, psychanalytiques, mathématiques et autres, et souvent le problème était de savoir quels étaient les rapports entre ces théories. L'un peut expliquer ce qui s'est passé en termes de psychologie, l'autre pour des raisons purement logiques, le troisième pour d'autres raisons, alors on disait en général *"les phénomènes sont surdéterminés, ils existent parce que à la fois ils sont compatibles avec le fonctionnement de plusieurs ordres de raisons, plusieurs théories, et puis quand même les chaînes de causes peuvent être différentes, et à un moment donné peuvent proposer si on veut agir sur les faits des décisions contradictoires."* Tant que les décisions sont compatibles, on peut admettre la surdétermination, mais à partir du moment où vous avez des phénomènes ou des décisions incompatibles avec l'une ou l'autre, il faut préciser quels vont être les rapports de ces théories. Alors on a travaillé là-dessus, en particulier pour les phénomènes d'économie psychique dont je parle beaucoup aujourd'hui, il y a les travaux de Claudine Blanchard-Laville sur les transferts et contre-transferts de l'enfant ; ces travaux ne sont pas satisfaisants, c'était difficile, ça a donné lieu à une habilitation néanmoins, ils ne sont pas du tout centrés sur la nature du savoir, très peu ou très mal. Les gens ont l'idée que ces phénomènes agissent en complémentarité avec les autres. La théorie des rapports de ces théories serait la complémentarité, et c'est un type qui s'appelle Devereux qui a développé cette idée. Au fond, on pourrait imaginer, puisqu'il s'agit d'un jeu, que les enjeux dans la classe sont le résultat d'un faisceau d'enjeux complémentaires, et les situations auraient une certaine indépendance, les enjeux cognitifs seraient indépendants des enjeux psychiques, il n'y aurait pas de rapport entre eux, simplement une possibilité pour l'élève de réaliser ses besoins psychiques dans des situations problématiques, par exemple un élève qui aurait tendance à se satisfaire dans la compétition, dans le gain trouverait dans certains types de situations une occasion de satisfaire ses besoins et donc accepterait volontiers les défis, les choses comme ça. D'autres élèves chez qui le défi serait une situation psychologiquement insupportable ne pourraient pas entrer dans ce jeu-là et échoueraient et le maître devrait trouver autre chose dans les raisons possibles pour l'élève de faire ce qu'on lui demande. Une autre théorie qui essaie de se faire jour, mais qui n'a pas à mon avis le statut de méta-théorie est la complémentarité qui, si vous voulez, ressemble beaucoup à (on emploie le mot depuis 20 ans) la dialectique en disant qu'il y a des ordres de choses qui se répondent, c'est-à-dire par exemple dans l'a-priori, l'a-priori permet de fabriquer un état et cet état a posteriori est modifié et ça fait une dialectique de l'a-priori et de l'a-posteriori.

Les situations d'action permettent de fabriquer des connaissances qui changent la lecture du réel, et permettent d'entreprendre de nouvelles actions avec des conditions différentes, c'est la dialectique de l'action, et puis il y a des interférences entre ces dialectiques là, c'est-à-dire créations trop nombreuses de connaissances, qui requièrent assez naturellement une formulation, une identification de ces connaissances et une transformation en savoirs.

C'est un peu naïf ça, on a un peu travaillé là dessus, mais ce n'est pas formellement faux. La complémentarité est une théorisation de ce sentiment-là, complémentarité de la dialectique. L'autre théorie que l'on essaie d'avancer, c'est la conversion, c'est-à-dire que pour que les phénomènes de type social et de type psychologique concourent, soient co-présents, il faut qu'il y ait un instrument de conversion d'une théorie à l'autre, c'est-à-dire quelque chose qui ait du sens à la fois dans l'une et dans l'autre.

Je vais donner un exemple misérable que vous me pardonnerez, je n'ai pas trouvé mieux: si vous regardez un fer à repasser, vous pouvez le regarder sous des théories différentes, du point de vue électrique, ou du point de vue thermique. Il n'y a pas une indépendance complète, si vous mettez un circuit électrique trop puissant par rapport à ce que le fer peut diffuser comme chaleur, la température va monter au dessus du seuil et la résistance va péter. Donc il faut qu'il y ait entre les deux systèmes, électrique et thermique, quelque chose qui permette le fonctionnement des deux: c'est la conversion classique *-loi de Joule -* entre la puissance délivrée en terme d'électricité et la chaleur produite en terme de thermique, et donc il y a un objet qui a du sens dans les deux théories et qui permet le passage.

Autrement dit, si **j'ai un phénomène de didactique qui est réellement sensible à un phénomène de type psychologique, il faut qu'il y ait un objet qui ait du sens dans les deux,** il faut que je dise par quel objet didactique le psychisme va s'exprimer dans cette situation. Alors je crois que ça a un rapport avec l'enjeu puisque c'est finalement l'enjeu, le désir qui va être le moteur de toutes ces conversions, comme dans le problème de la bobine, il y a une certaine ressemblance entre la situation formelle et la situation symbolique vécue par l'individu et elle permet l'investissement parce que ça joue le même jeu.

3

Troisième point: **il faut s'interroger sur les problèmes d'objectivation de l'enjeu pour l'élève.** Objectivation de l'enjeu, quel rôle ça joue? Si vous voulez, il y a là toute une série de réflexions relatives à l'enjeu donné à voir et l'enjeu réel, l'enjeu que l'on peut dire et l'enjeu que l'on ne peut pas dire.

Il y a pour alimenter le désir dans la relation didactique des choses qui doivent rester cachées. C'est encore un effet des paradoxes, je ne vais pas y revenir: vous ne pouvez donner exactement à voir à l'élève ce que vous voulez exactement qu'il fasse, qu'il atteigne. Si vous le faites, vous allez avoir plein d'échecs, vous allez casser le jeu du désir, vous avez plein de choses qui ne vont pas se passer. Alors évidemment, il faut donner quelque chose à voir, et il ne faut pas que ce soit complètement bidon, et il faut admettre qu'il y a une marge nécessaire entre ce qui est dit et ce qui va être fait, que la récupération de ce qui a été fait et n'a pas été dit soit possible par exemple. Le dit et le non dit jouent un rôle très important dans la relation didactique, on avait sorti ces objections à l'époque. C'est tout à fait important d'avoir des objectifs, c'est tout à fait important de faire en sorte que les élèves puissent avoir accès à un certain nombre d'objectifs et puissent voir par eux-mêmes comment ça marche, c'est tout à fait important qu'ils puissent suivre avec leur propre épistémologie la progression de leur apprentissage et du fonctionnement du savoir, il faut que les enfants participent à la création du savoir, il y a un rôle co-didactique à jouer avec le professeur, mais vous ne pouvez pas rendre compte aux élèves de tous les enjeux d'une situation, le paradoxe est simple, il faudrait qu'ils sachent où on veut en venir, tout ce qu'ils ont à apprendre pour comprendre la position de ce qu'on est en train de leur dire, donc il ne peut pas, c'est impossible et donc il va y avoir une marge entre le dit et le non dit, une place pour la révélation, la relecture, la réorganisation, la compréhension, la rectification de la mauvaise compréhension que l'on a pu avoir. Et si on ne fait pas admettre à la société que c'est comme ça, on ne résoudra ni le problème de la formation des maîtres, ni celui de la formation des élèves, et pas davantage si on n'admet pas qu'il y a un savoir pour la formation des maîtres qui est un "dit professionnel" mais un "non dit" pour les élèves, si on n'apprend pas aux maîtres à contrôler ce que j'appelle la perméabilité didactique, c'est-à-dire la difficulté pour le maître, quand il s'arc-boute pour faire comprendre quelque chose à l'élève, qu'il va donner à l'élève toutes les explications qu'il connaît pour expliquer ses erreurs, pour l'aider à apprendre et lui dire ce qu'il faut faire, à ne pas faire passer dans son discours le trop plein de didactique ou de méta-didactique qu'on lui a appris, à ne pas donner à l'élève le diagnostic, (ce que ne fera jamais un médecin, qui ne dira jamais à un malade d'apprendre la formule du paramino-phényl-acétyl-machinchouette).

Il y a une distance entre le discours professionnel de la recherche en didactique et des maîtres entre eux, et le discours du maître dans sa classe, tout aussi professionnel. Pour arriver à faire vivre les termes qui restent dans le domaine des maîtres et les y faire rester et ne laisser paraître que ce qu'il est raisonnable de dire avec les élèves, c'est très difficile, en mathématique on a du mal à maintenir ça, vous avez une descente permanente dans le vocabulaire des élèves des termes qu'on a utilisés avec les profs pour les former, à tort ou à raison. cette perméabilité didactique que l'on commence à observer, à mesurer est représentée par la quantité de méta-didactique dans le discours. Ça donne évidemment des arguments aux gens pour dire de ne pas enseigner la didactique: sinon les maîtres vont faire des conneries, vont faire des faux trucs, tiendront de faux discours, donneront des exercices... De même quand on montre aux maîtres les erreurs des élèves, ah, ça les satisfait parce que ces erreurs semblent tout d'un coup avoir changé de statut, au lieu d'être des erreurs de l'enseignement, ça devient une caractéristique habituelle et générale de l'élève: l'élève fait des erreurs comme le maçon fait des maisons. Les erreurs des élèves, du moment que c'est un objet social, qu'elles ont été décrites peuvent devenir un objet d'étude et pas seulement un objet de crainte, de refus. Alors on commence à étudier et à classer les erreurs des élèves et le maître commence à identifier dans son discours avec les élèves les erreurs qu'ils font: c'est bien normal, il va se servir des classifications théoriques pour, dans le discours aux élèves, rectifier: *"ah, voilà une erreur que l'on fait souvent, je vous la dénonce"*, et il va identifier ça en termes.

Il faut comprendre que les **révélateurs des enjeux du maître et de l'élève sont quelquefois très visibles, et nous ne les regardons pas.** Par exemple, le maître est tellement arc-bouté vers la construction du savoir - la construction du savoir est un ensemble de connaissances organisées visiblement comme des conséquences les unes des autres, liées par des raisons. L'instrument du traitement des connaissances en termes de savoir, c'est leur organisation dans des systèmes de connaissances où ces connaissances apparaissent comme rationnelles, comme raisonnables, comme justifiées par des raisons, par un discours. Et on peut considérer que **beaucoup de phénomènes dans la classe sont l'effet de causes, et pas de raisons**, quand je veux que l'enfant apprenne et que je lui fais répéter, eh bien ce qu'il va savoir, il ne le saura pas pour des raisons, il le saura comme effet de certaines causes, la répétition. On fait confiance à des mécanismes qui sont des causes pour obtenir des effets qui sont des faits d'apprentissages, d'enseignement, didactiques. Alors, regardez ce qui va se passer: chaque fois que l'élève va bien répondre, le professeur va interpréter sa réponse en termes de raisons. Tout ce que l'élève fait de bien, c'est parce que c'est conforme à la raison, mais quand l'élève va se tromper, la plupart du temps, on va chercher des causes de l'échec. S'il répond mal, ce n'est pas parce qu'il a des raisons de répondre mal, c'est parce qu'il y a des causes à son échec. Est-ce que vous voyez qu'il y a là un indice énorme qui montre où est l'enjeu du professeur, qui est de transformer tout ce qu'il a fait, essayé de faire - en fait des causes, il essaie de causer l'apprentissage - en raisons. Prenons une leçon ordinaire, et on va regarder tout ce que le professeur va faire pour faire lire après coup à l'élève tout ce qui lui est arrivé non pas en termes de causes historiques, mais en termes de raisons du savoir, et d'effacement des causes. Alors si vous demandez au maître de faire ressurgir les erreurs, ça peut être une bonne chose, ça peut soulager le maître, ça peut soulager l'élève, mais vous faites surgir dans la classe tout le système des causes et des effets de ce qui se passe et qui va prendre la place des raisons que vous voulez enseigner, et le professeur n'arrêtera pas de faire la chasse aux erreurs, de les expliquer par ceci et par cela, et il n'obtiendra pas forcément le rapport qu'il souhaitait avec les raisons.

J'ai l'air de dire tout le contraire de tout ce qu'on dit depuis des années, ce n'est pas pour le plaisir de dire le contraire, c'est pour dire que chaque chose est entre des feed-back, notre travail est de trouver les indices des équilibres nécessaires qui permettent aux gens de corriger un peu.

L'objectivation de l'enjeu, j'ai parlé du dit et du non dit, de la dialectique du désir en tant qu'outil d'action et du désir en tant qu'espoir. **On pourrait faire correspondre à la dialectique outil/objet une dialectique désir/plaisir, où le plaisir est l'instrument en quelque sorte instantané de l'action du maître ou de l'élève et le désir est l'objet de l'organisation des situations futures.** Donc, il faut que le maître travaille en même temps sur la représentation de ce que les élèves se font de ce qu'ils vont faire et qu'il trouve dans ce qui se fait actuellement des preuves, pas des preuves intellectuelles mais des raisons d'alimenter ce désir futur.

La dépendance entre les enjeux: vous allez me dire que je n'ai pas traité le sujet, parce que je n'ai pas fait la liste des composantes. Les enjeux, je les ai peut être énumérés rapidement, les enjeux cognitifs par exemple, les connaissances, le fait de connaître.

Il y a dans la connaissance elle-même quelque chose qui peut être tout à fait positif mais encore faut-il le lire comme tel.

Les capacités... Connaissance et capacité de connaissance sont deux choses différentes. Les maîtres veulent développer des habiletés, des capacités, c'est-à-dire des choses relatives à des possibilités à venir...

Les composantes de l'enjeu, vous êtes tout à fait capables de faire ça.

Les savoirs sont l'objet d'un enjeu cognitif, parce qu'ils satisfont un certain rapport aux connaissances. Vous avez des connaissances, le fait de prendre conscience de vos connaissances, d'avoir un mot pour les dire et de les identifier les transforme d'une certaine manière en savoir et vide les connaissances du danger que contiennent les choses non dites, les choses qu'on doit utiliser sans savoir les analyser, mais en même temps c'est un enjeu culturel: le savoir c'est ce qui permet de communiquer avec les autres.

Ça réfère à des types de situations: une situation qui fait fonctionner la connaissance, une situation a-didactique. Par exemple je vais développer les connaissances, je fais fonctionner les savoirs dans des situations soit de preuve soit de débat soit de gestion des questions. On confond trop souvent dans la dialectique de la validation, et je l'ai fait moi-même, une situation qui fait fonctionner des preuves, des démonstrations, des réponses alors qu'**on néglige beaucoup le travail qui consiste à faire dévolution aux élèves du droit de poser des questions en tant qu'objet social intéressant, pas de demander quelque chose au maître, mais de présenter quelque chose comme une question qui va être intéressante pour la communauté,** c'est-à-dire de gérer l'autre côté de l'avancement du débat, c'est-à-dire pas seulement la réponse, mais la question. Or c'est beaucoup plus difficile socialement de poser une question que de donner une réponse, une réponse a déjà un caractère social, on peut donner une réponse à titre privé, ça ne coûte pas trop trop cher même si on se trompe, tandis que présenter une question au public, c'est vouloir que les autres s'intéressent à quelque chose, il faut que la question soit une bonne question (c'est quoi une bonne question?) c'est très difficile de savoir ; par exemple, en mathématique, il y a beaucoup plus de gens qui sont de bons résolveurs de problèmes que des poseurs de questions. Il faut déjà avoir un statut dans la communauté mathématique pour se permettre de poser une question, parce que si vous avez au bout du couloir un type qui vous donne la réponse, vous avez l'air couillon, vous avez l'air de ne pas avoir réfléchi. Vous trouvez ça fréquemment dans la gazette des mathématiciens: un type propose quelque chose triomphalement, il a fait marcher son ordinateur pendant quarante heures et il a obtenu la réponse à un problème qui lui paraissait difficile, et dans les numéros suivants, il y a mon collègue Lion de Nouvelle-Calédonie nouvellement promu qui dit *"j'ai pris ma craie, j'ai regardé"*, et qui donne la réponse en 12 lignes, il y en a deux qui font ça, qui donnent la réponse. Le premier, évidemment, a l'air malin. Ça fait partie de la règle du jeu, heureusement, c'est publié dans la gazette, ce n'est pas ouvert au public. Si on savait que les mathématiciens qui veulent jouer les patrons dans les IUFM sont capables de se planter comme ça, on ne leur demanderait pas de venir! **Poser des bonnes questions, c'est difficile, on prend des risques plus grands,** il faut s'y connaître, il faut y tâter pour poser un problème, pour dire aux autres *"voilà un problème intéressant"*, il faut avoir beaucoup de choses, il faut avoir une surface sociale. Ça ce n'est pas un objectif et ce n'est pas un enjeu de la situation didactique, au contraire, soigneusement le professeur se réserve les questions et réserve les réponses aux élèves, parce que ça a une signification. Alors convertir ça et faire de proposer des questions aux autres (un jeu didactique) et commencer à comprendre qu'est-ce qui est un bon problème, qu'est-ce qui n'en est pas un, qu'est-ce qui est un problème qu'on connaît déjà, qu'on peut faire, et un problème qui pose un peu plus de difficultés, c'est mettre les élèves dans la position de connaisseur vis-à-vis de ces choses, et c'est un enjeu important dans la situation. Alors je corrige mal une erreur ancienne: on a beaucoup étudié les réponses des élèves, on n'a pas beaucoup étudié leurs questions, parce qu'on n'avait pas d'instrument très bon pour le faire, il faut avancer dans ce domaine.

J'ai donc dit **enjeu épistémologique**, enjeu d'apprentissage (ça m'ennuie apprentissage parce que ça fait penser à apprentissage des savoirs) plutôt **enjeu d'adaptation** : dans une situation vous pouvez proposer un problème à une forme de gratification, s'adapter à une situation c'est quelque chose de plus. Vous avez des situations qui ne sont pas des bonnes situations didactiques, ce sont des situations que l'on peut utiliser à usage didactique, mais ce ne sont pas des situations d'apprentissage, elles ne permettent pas à l'élève de développer une connaissance personnelle ; s'il sait il répond, s'il ne sait pas il ne peut pas répondre. **Entre investir une situation où il faut répondre et s'adapter à une situation, il y a une différence.**

Je vais m'arrêter. J'aurais voulu voir enjeu affectif, enjeu professionnel chez le maître. Les enjeux commandent des styles chez l'élève et chez le maître dans les situations didactiques ou a-didactiques. Nous avons proposé beaucoup de situations qui correspondaient au jeu. La modélisation en termes de jeu a permis une ingénierie en termes de jeu qui repose chez l'élève sur certains sentiments. Quand c'est une situation pour l'élève isolé, c'est la compétition, c'est relever le défi, c'est gagner, c'est flatter le phallus. Chez l'élève par contre, s'intégrer, faire comme les autres, c'est par exemple un enjeu qu'on n'utilise pas beaucoup, et qui est extrêmement puissant. Les élèves sont prêts à faire n'importe quoi pour faire comme les autres, ce que les autres font quand vraiment ils le font et que c'est quelque chose que tout le monde fait, les élèves veulent pouvoir le faire, ils veulent grandir, ils veulent être comme les autres. Et trop souvent, on fait du savoir un instrument de différenciation chez les élèves qui va aller à l'encontre de ce désir d'être comme les autres. Il faut utiliser le désir d'intégration des élèves, donc donner des choses où tout le monde le fait. Ce n'est pas parce qu'un exercice est réussi par tout le monde qu'il n'est pas intéressant, qu'on n'en a pas besoin pour un discours sur l'apprentissage ou sur l'enseignement. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut à chaque fois donner un exercice réussi par tout le monde. Il faut gérer ça, minimiser les inconvénients...

Voilà ma copie sur le sujet. Je me suis senti comme un élève à l'examen, parce que le sujet n'était pas très attendu. Vous me mettrez une note. Quand je donne des résultats de recherche, je suis dans une position favorable, mais quand je réponds à un contrat d'enseignement, je suis dans l'inconnu, je ne sais pas du tout si je satisfais à l'attente des gens.

Question: *en quoi ce qui a été dit là concerne spécifiquement les maths, et en quoi ça ne serait pas de la didactique générale, en quoi ça s'applique à quelque chose de particulier qui est les maths?*

Je vais essayer d'être bref. J'ai derrière la tête des tas d'exemples tout à fait précis et spécifiques des mathématiques et dont je ne suis pas du tout convaincu que ça correspondrait à un autre domaine. En mathématique, il y a un truc très spécifique qui est que vous ne pouvez pas trop faire vivre de théories contradictoires, d'opinions contradictoires. Vous pouvez vivre avec une certaine incompatibilité, mais vous prenez le risque de dire des bêtises à un moment donné. Or quand vous apprenez, si vous faites fonctionner les savoirs qu'on vous enseigne, vous apprenez fatalement des choses fausses. Ailleurs ça aura peu d'inconvénient: par exemple, en anglais, au lieu de l'apprendre avec l'oreille, vous l'apprenez dans les livres. Résultat, vous entendez et lisez les mots avec une prononciation française, vous ne reconnaissez jamais un mot qu'un Anglais va prononcer et vous avez des obstacles insurmontables après pour apprendre l'anglais parce que vous l'avez appris de façon fausse, dans des conditions inadéquates. C'est un problème, bien sûr, on pourrait regarder. Mais si vous voulez, je ne crois pas que ce soit constitutif du savoir comme le rapport à l'erreur en mathématique. Exemple concret, je prends le travail de Ratsimba-Rajohn. Nous avions voulu savoir si les conceptions pouvaient être rejetées facilement ou pas quand elles faisaient obstacle. On avait deux conceptions des rationnels que j'avais identifiées: par partage de l'unité et par commensuration. On peut définir les rationnels par l'une ou l'autre des méthodes, qui nous apparaissaient comme des conceptions différentes. Il y avait toute une catégorie facile à comprendre et résoudre avec l'une et pas avec l'autre. On pouvait identifier ces deux conceptions. Il y en a une qui est culturellement dominante: c'est le partage de l'unité, l'unité intermédiaire c'est la manière actuelle de lire les fractions, c'est elle qui sert pour tous les objets pratiques. Par contre pour les mathématiciens, ce qui a toujours été producteur, c'est la conception commensuration, c'est ce qui a été producteur des connaissances et on peut expliquer pourquoi, et il se trouve que justement les objets mathématiques qui sont producteurs de certaines connaissances, et il n'y a pas forcément d'accord entre les deux: ce qui est producteur de connaissance n'est pas forcément la conception qui va permettre un bon contrôle des situations dans lesquelles on rencontre ça. Ce ne sont pas les mêmes usages de la logique que font les logiciens mathématiciens et les automaticiens. Ce n'est pas la même théorie des statistiques qui va permettre à la fois de maîtriser à l'aide de la théorie de la mesure et d'un tas de choses les connaissances des statistiques et ce qui va permettre à quelqu'un qui veut faire un usage des statistiques d'utiliser convenablement les méthodes et de les apprendre. Il n'y a pas d'adaptation universelle des savoirs, il y a des adaptations à des environnements divers. Je reviens à mes moutons. On avait donc dit, puisque la pression sociale est forte, la pression culturelle effondrera de toute manière toutes les tentatives que l'on fera pour enseigner une autre manière de savoir. Les gens qui doivent faire des réformes travaillent dans l'autre sens: ils disent qu'il faut changer, ils changent tout avec l'espoir que ça va tenir. En général, ça ne tient pas. On voulait savoir dans quelle mesure enseigner un savoir provisoire faisait obstacle à l'enseignement futur. Alors on s'est mis dans la position d'enseigner le savoir étrange, la commensuration, et d'essayer de faire vivre cette connaissance de la commensuration et de voir, quand on voudrait enseigner l'autre, si ça jouait vraiment le rôle d'obstacle et de quelle manière on pouvait vaincre cet obstacle, faciliter la compréhension. Ratsimba-Rajohn a montré que bien que la commensuration ne soit pas la conception culturelle dominante, bien que ce ne soit pas celle du maître du tout (chaque fois qu'il voulait donner une explication, il la donnait naturellement avec le partage de l'unité, il devait se faire violence pour rester dans le système des élèves), le fait d'avoir enseigné ça au début, toutes les expériences faites avec les enfants pour développer de façon pratique la connaissance par partage de l'unité renforçaient la connaissance initiale, c'est-à-dire renforçaient le modèle par commensuration. Ça finissait par disparaître, mais on voyait à quel point l'enseignement initial pèse. C'est la conclusion de Ratsimba-Rajohn.

On voyait à la fois ce qu'était une conception, ce qu'était un obstacle, et comment un obstacle épistémologique est un obstacle didactique important, et qu'il faut y aller doucement avec l'usage des obstacles épistémologiques, ils sont incontournables, et en même temps si on s'y prête, on risque de les accentuer, de les transformer en obstacles didactiques. Ça pose des problèmes qu'on ne sait pas résoudre, qu'on ne présente pas bien d'ailleurs. Sur ce point-là, l'élève a un savoir ancien et doit l'abandonner pour apprendre un savoir nouveau. L'analyse des raisons pour lesquelles il le ferait peut renvoyer à des théories très différentes. Dans un obstacle épistémologique, vous avez des raisons objectives d'abandonner un savoir, parce qu'il est inadéquat, il n'est pas efficace, et vous avez des raisons personnelles de le faire qui vont à l'encontre des précédentes: abandonner quelque chose qui a marché, qui était simple, qui permettait de comprendre et de résoudre n'est pas facile. En mathématique, il va y avoir un retour en permanence sur ce qu'on fait, les raisons qu'on a de le faire, et une reprise de ces raisons, une réorganisation, une resymbolisation permanente. Dans aucun autre domaine de connaissances vous n'avez un usage aussi répété du changement de formulation.

J'essaie d'accumuler les raisons de montrer que les points que j'ai soulevés qui apparaissent comme susceptibles d'être généraux sont ceux sur lesquels il y a le plus d'usure en mathématique, parce que c'est là-dessus que sans arrêt on roule. Qu'est-ce qui se passe avec les enfants, là: ils admettent bien comprendre une chose, mais chaque fois qu'ils apprennent quelque chose, c'est une raison pour apprendre quelque chose de nouveau qui va modifier ce qu'ils savaient déjà. Il y a très peu de continuité, l'hérédité en mathématique est une hérédité par la raison et pas du tout par les faits. Sans arrêt, il faut avoir une attitude réflexive par rapport à ce qu'on a appris, le modifier. Ce refoulement de la part du sujet de ses investissements précédents me paraît être une caractéristique très très forte en mathématique. **Il ne faut pas chercher la didactique dans une spécificité interne aux mathématiques et unique.** Mais je crois que lorsque vous avez toute une série d'indices qui sont fortement convergents -c'est comme pour la cuisse, je ne connais pas de mesure de la cuisse, mais il y a plein de choses qui concourent à faire dire qu'un vin a de la cuisse ou pas-**là, c'est pareil. Il y a plein de phénomènes qui sont beaucoup plus importants, décisifs en mathématiques qu'ailleurs. Alors leur conjonction est un objet d'étude qui m'apparaît spécifique.**

C'est vrai que dans mon discours, on pourrait croire qu'il n'y a rien du point de vue mathématique, alors que chacune des choses que j'ai dites peut être illustrée par des recherches sur des objets mathématiques: on peut montrer que la manière de manipuler Thalès en quatrième va conduire à l'abandon de tout un tas de conceptions antérieures. Le problème de l'abandon, du rejet de connaissances antérieures, l'échange entre l'ancien et le nouveau va être quelque chose de très vif. Pourquoi est-ce que les mathématiques sont un objet particulièrement important de conflits affectifs et cognitifs, est-ce seulement parce qu'on s'en sert pour la sélection sociale ? Je ne sais pas, mais je ne suis pas sûr. Je crois qu'il y a aussi dans ce type de connaissances des obstacles objectifs qui rebutent beaucoup les gens et qui sont des difficultés objectives pour les professeurs de mathématiques. Il faut qu'ils fassent accepter ce type de savoir - aimer, n'en parlons pas - accepter comme un service civil. On demande aux élèves d'apprendre beaucoup de mathématiques dont il est faux de dire qu'elles leur serviront plus tard, c'est un mensonge éhonté, surtout sous la forme où on les leur enseigne. C'est faux de dire que le théorème de Thalès va leur servir. Vous vous en êtes souvent servi, en dehors de quelques trucs dont vous vous rappelez justement parce que vous avez trouvé ça magnifique? Bon, en fait, **on demande aux élèves d'apprendre beaucoup de mathématiques parce qu'on veut culturellement avoir une société qui a un rapport aux mathématiques relativement familier.** On veut recruter relativement facilement des professeurs de mathématiques d'un bon niveau, on veut avoir des ingénieurs qui soient bons en mathématiques. Un peu comme si on voulait avoir des sportifs de haut niveau: il faut qu'il y ait de l'argent mais il faut aussi une activité sportive, des gens diront le contraire, mais il faut un intérêt du public pour les sports, une pratique personnelle, des stades un peu partout, des tas de choses, il faut qu'il y ait dans la société un souci pour le sport. Pour les mathématiques, on veut un rapport aux connaissances mathématiques qui s'inscrive dès l'enfance, et donc on veut faire vivre ça. Il faut payer le prix, et on ne veut pas le payer. On veut cueillir les rentes sans payer. On ne veut pas dire aux élèves qu'on leur demande un service.

ANNEXE 2

Références d'autres documents pour travailler en formation des maîtres

Recensement : H. Péault

(Documents issus de diverses publications, principalement des Actes des colloques COPIRELEM)

Remarque : Les seules références mentionnées ici sont celles qui se rapportent à une utilisation directe en formation des maîtres, à l'exclusion des autres. En particulier, dans la plupart des Actes des colloques, de nombreux articles proposent des activités pour l'école élémentaire ou maternelle qu'il est toujours possible d'exploiter en formation. Ils n'ont pas été pris en compte ici, sauf s'ils sont présentés avec un "mode d'emploi" en formation des maîtres.

Le **plan** proposé est quelque peu arbitraire et vise seulement à faciliter la recherche :

1. Comptes-rendus d'activités en formation des maîtres
   - résolution de problèmes et activités numériques
   - soustraction
   - multiplication
   - division
   - décimaux
   - géométrie
   - proportionnalité
   - premiers apprentissages numériques
   - maternelle
   - formation des maîtres autres que de l'école élémentaire
   - stages "évaluation-réponse"
   - utiliser La Villette en formation des maîtres
   - aide lors des stages

2. Documents (pour les formateurs) utilisables en formation des maîtres
   - Histoire des mathématiques
   - Comparaison de situations d'apprentissages
   - Proportionnalité
   - Analyses critiques d'activités

3. Fiches de travail pour les maîtres en formation

1 Comptes-rendus d'activités en formation des maîtres

Résolution de problèmes et activités numériques

sans titre

Auteur : Robert NEYRET, PEN Grenoble

Date : 1989

in : "Actes du XVIème colloque inter-IREM des PEN", BORDEAUX, mai 1989 - compte-rendu du groupe "*Apports de la didactique en FP*" (p. 101-113)

Résumé : Description d'un module "*Résolution de problèmes*" et d'un module "*Numérique en CP-CE1*", présentation des outils utilisés et compte-rendu de la discussion de groupe. Celle-ci a porté sur 4 thèmes : Présentation de la formation des FP1 à Grenoble, la pratique de l'observation d'élèves en situation de résolution de problème, l'analyse didactique d'un projet de séquence, l'analyse de documents vidéo.

Titre : ***"Une tentative de sensibilisation des normaliens à certains concepts de didactique"***

Auteur : Michel WOROBEL, PEN Auxerre

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, extrait du compte-rendu du groupe de travail : "*Utilisation de la didactique en formation des maîtres*", (p. 107-108)

Résumé : Séance autour de la résolution d'un problème, où sont mis en jeu des problèmes de rapport au savoir analogues à ceux évoqués dans les articles "*Les transvasements*" et "*La vache et le paysan*" du présent recueil

Soustraction

Titre : ***"Situations soustractives au CE 1, avant et après apprentissage"***

Auteur : collectif

in : "Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré" première partie - Publication de l'I.F.M. de Grenoble (numéro 19, avril 1987)

Résumé : descriptif de 6 séances de formation : analyse a priori de la situation "les aimants", analyse de productions d'enfants, exposés, entretiens de normaliens avec des élèves de CE 1...

Multiplication

Titre : ***"Un enseignement sur la multiplication en formation initiale"***

Auteur : Denis BUTLEN, PEN Melun, IREM Paris 7

Date : 1988

in : "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Actes de l'université d'été, Olivet, Juillet 1988 p. 194-201

Résumé : Exposé d'un travail effectué sur la multiplication avec des élèves-instituteurs et visant aussi l'abord de certaines notions de didactique (analyse de situations fondamentales, variables didactiques, jeu de cadres, dialectique outil-objet,...)

Division

Titre : ***"Situations-problèmes de division et procédures"***

Auteur : collectif

in : "Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)" - première partie - Publication de l'I.F.M. de Grenoble (numéro 19, avril 1987)

Résumé : descriptif de 6 séances de formation : Résolution par les normaliens d'une situation de division, analyse de protocoles d'élèves, observations dans une classe et analyse des protocoles recueillis, exposés,...

Titre : ***"Compte-rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N"***

Auteur : Suzy GAIRIN-CALVO, PEN Bordeaux

Date : mai 1987

in : "Actes du XIVème colloque inter-IREM des PEN", ANGERS, mai 1987 (p. 81-86)

Résumé : Résumé du contenu d'un travail réparti sur environ 18 heures. On trouvera des précisions dans le compte-rendu du groupe "*Dans quelle mesure la didactique des mathématiques peut-elle devenir un objet d'enseignement en formation initiale ?*", p. 71-80 ainsi que dans celui du groupe "*Quelles propositions pour une organisation cohérente des activités mathématiques à l'école normale ?*" p. 95-99

Titre : ***"Division en formation initiale"***

Auteur : Hervé PEAULT, PEN Angers

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988" (p. 86-93)

Résumé : Compte-rendu d'une dizaine de cours en FP1 sur l'étude de la division. Activités largement inspirées de celles proposées dans le document de l'IFM de Grenoble cité plus haut.

■ *Décimaux*

Titre : *"Ordre dans les décimaux"*

Auteur : collectif

in : "Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré" première partie - Publication de l'I.F.M. de Grenoble (numéro 19, avril 1987)

Résumé : descriptif de 6 séances de formation : apports théoriques d'ordre mathématique, exposés sur les problèmes didactiques liés aux décimaux, analyse et dépouillement de tests, passation d'entretiens en CM 2,...

■ *Géométrie*

Titre : *"Utilisation du document «La fleur» en FP 1"*

Auteur : Marie-Lise PELTIER, PEN Rouen

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, extrait du compte-rendu du groupe de travail : *"Utilisation de la didactique en formation des maîtres"*, (p. 91-99)

Résumé : Mise en situation des normaliens sur un problème de reproduction d'une rosace à 8 branches, puis étude avec eux de la situation vécue et de son transfert à l'école élémentaire (à partir du document "La fleur" paru dans le bulletin 371 de l'APM)

Titre : *"Reproduction de figures géométriques - Activités en formation initiale"*

Auteur : Hervé PEAULT, PEN Angers

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, extrait du compte-rendu du groupe de travail : *"Utilisation de la didactique en formation des maîtres"*, (p. 100-106)

Résumé : Présentation de deux activités de reproduction de figures permettant un travail à la fois sur le plan géométrique et sur le plan didactique

■ *Proportionnalité*

Titre : *"Didactique ou proportionnalité ?"*

Auteur : Jean-Marie GUIGNARD, PEN Poitiers

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, extrait du compte-rendu du groupe de travail : *"Utilisation de la didactique en formation des maîtres"*, (p. 109-114)

Résumé : Activité conduite en formation initiale et continue à partir d'énoncés de problèmes proposés à des élèves de CM ; ceux-ci sont ensuite étudiés avec les stagiaires pour une analyse des énoncés et des résultats obtenus.

■ *Premiers apprentissages numériques*

Titre : *"Apport de la didactique des disciplines dans la formation des maîtres. Un exemple pris en mathématiques : les apprentissages numériques en GS-CP"*

Auteur : D. Ortolland, PEN Lille

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, annexe au compte-rendu d'un groupe de travail (p. 128-129)

Résumé : Analyse de l'évolution de la conception des apprentissages numériques, conséquences pour la formation des maîtres, exemple de travaux réalisés au CRFMAIS de Lille.

■ *Maternelle*

Titre : *"Situations de partage de collections"*

Auteur : collectif

in : "Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré" première partie - Publication de l'I.F.M. de Grenoble (numéro 19, avril 1987)

Résumé : descriptif de 4 séances de formation : analyse de chroniques, entretiens de normaliens avec des enfants de CP, dépouillement des entretiens, exposé sur les activités de partage à l'école maternelle (seul le plan en est indiqué).

Titre : "***Mathématiques à l'école maternelle : quelle formation à l'école normale ?***"

Auteur : Groupe de travail des colloques de Guéret et Quimper, animé par Jeanne BOLON

Date : 1986

in : "Actes des 12ème et 13ème colloques inter-IREM des PEN de mathématiques", Guéret (1985), Quimper (1986), p. 135-152 (Publication IREM Paris 7)

Résumé : Ce compte-rendu d'un groupe de travail présente d'abord des options concernant les mathématiques à l'école maternelle, avec quelques directions de travail pour les normaliens, puis des exemples d'activités : une approche de l'espace pour normaliens et enfants, utilisation de jeux de société, étude d'une fiche, observation d'enfants.

Titre : "***Les apports de la didactique des mathématiques à l'école maternelle***"

Auteur : groupe A3 du colloque de Rouen, animé par M.H. SALIN

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988 (p. 99-111)

Résumé : Débat sur le thème : "*que faire en maths, dans la formation des maîtres, à propos des apprentissages en maternelle* ?". Plusieurs participants font des suggestions d'activités. En Annexe 3, p. 109-111, Michèle KERNEIS et Thierry BAUTIER donnent des indications sur le contenu d'un stage de F.C. de 2 semaines sur le thème "*Mathématiques à l'école maternelle*".

Titre : "***Mathématiques en maternelle***"

Auteur : C. Berdonneau, PEN Rouen

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, extrait du compte-rendu du groupe de travail de même titre (p. 241-242)

Résumé : Echange sur les contenus et méthodes de travail en EN sur ce thème, identification de dangers...

Formation des maîtres autres que de l'école élémentaire

Titre : "***Premier compte-rendu de travail***"

Auteur : Danielle ORTOLLAND

Date : avril 1985

in : "Actes du XIVème colloque inter-IREM des PEN", ANGERS, mai 1987 (p. 107-114)

Résumé : Compte-rendu d'un travail réalisé en 84-85 dans le cadre de la formation d'instituteurs spécialisés, visant à leur donner des références en didactique, avec notamment un travail centré sur l'études des variables didactiques des situations. Joint en annexe du compte-rendu du groupe : "*Place de la didactique dans la formation des instituteurs de l'enseignement spécialisé*" (p. 101 sq.)

Autre référence : voir aussi "***Travail sur les variables didactiques avec les stagiaires du CRFMAIS***", Danielle ORTOLLAND, in "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Actes de l'Université d'été, Olivet, Juillet 1988 (IREM de Bordeaux)

Titre : "***Stratégies de formation pour les professeurs de collège et de lycée***"

Auteur : groupe de travail animé par M.H. Salin

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, (p. 120-137)

Résumé : Interrogations sur les possibilités, pour les PEN, de participer à la formation des professeurs de collèges et lycées ; propositions tenant compte des compétences acquises en formation des maîtres. En annexes : CR d'un stage "Rénovation-collège" (Livry-Gargan), CR d'un stage PAF de 6 jours sur le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques (IREM Bordeaux), Exemple de travail en didactique au CRFMAIS de Lille, "Les missions des professeurs d'école normale" (IREM Rennes)

Titre : "***Formation de formateurs par et pour la production de documents pédagogiques***"

Auteur : Chantal D'HALLUIN, Université Lille 1

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, (p. 54-64)

Résumé : Conférence sur la formation de formateurs au CUEEP de Lille, présentant notamment la stratégie de "double piste" (s'analyser en tant que formé pour s'améliorer en tant que formateur) et les deux tactiques : formation par et pour la production, formation par et pour la recherche.

Stages "évaluation-réponse"

Titre : "***Formations organisées dans le cadre de l'opération «Evaluation-réponse»***"

Auteurs : groupe de travail animé par R. Charnay et J. Douaire

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, (p. 243-244)

Résumé : Echange d'informations sur les actions menées et amorce d'un bilan

Utiliser LA VILLETTE en formation des maîtres

Titre : "***Comment utiliser la Cité des Sciences et spécialement l'inventorium pour la formation des maîtres...***"

Auteur : Brigitte ZANA, La Villette

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, compte-rendu d'un groupe de travail (p. 191-222)

Résumé : Description de l'inventorium, de ses objectifs et examen de son intérêt en formation des maîtres.

Aide lors des stages

Titre : "***Aide aux normaliens en stage***"

Auteur : Marcelle PAUVERT, PEN Livry-Gargan

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, compte-rendu du groupe "*Aide aux normaliens en stage*" (p. 79-89)

Résumé : Un premier point expose différentes modalités de stage ; un second point situe l'acte pédagogique au centre de la réflexion ; un troisième point propose des travaux réalisés en mathématiques par des élèves-maîtres dans une perspective d'utilisation future pendant les stages.

Titre : "***S'adapter à la fonction de ZIL***"

Auteur : Nicole GAUDELET, IEN Les Ulis

Date : 1990

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, compte-rendu du groupe "*S'adapter à la fonction de ZIL*" (p. 115-117)

Résumé : Analyse de la fonction de ZIL et de ses particularités et propositions d'activités d'aide.

2
Documents (pour les formateurs) utilisables en formation des maîtres

Histoire des mathématiques

sans titre

Auteur : H. PLANE

Date : 1989

in : "Actes du XVIème colloque inter-IREM des PEN", BORDEAUX, mai 1989, compte-rendu du groupe "*Apport d'une dimension historique dans l'enseignement des mathématiques*" (p. 125-129)

Résumé : Après le compte-rendu d'un travail de groupe, présentation de 2 fiches de travail, l'une sur la définition par Chasles de sa relation, l'autre autour d'un texte d'Al Banna al Marrakushi sur la division par 7.

sans titre

Auteur : PEN, EN Val d'Oise

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988, compte-rendu du groupe "*Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire de l'enseignement des mathématiques pour la formation des maîtres*" (p. 143-169)

Résumé : Après le compte-rendu d'un travail de groupe, présentation de fiches de travail, l'une sur la visite d'une exposition "*Du caillou à l'ordinateur*", une autre sur la numération égyptienne et une troisième sur l'analyse d'un extrait de "*La Disme*" de Stevin.

sans titre

Auteur : Michel Mérigot, IREM de Nice

in : "Actes du XVIIème colloque des PEN", PARIS, mai 1990, compte-rendu du groupe de travail *"Histoire des mathématiques"* (p. 223-240)

Résumé : Propositions d'utilisation de documents historiques en formation des maîtres. Documents joints : 1- La division : *"Traité d'arithmétique"* de Barrême (1788) ; 2- La division : *"Arithmétique"* de F. Le Gendre (1754) ; 3- Exemples d'opérations manuscrites ; 4- Mesure des surfaces et surface d'un cercle : *"Cours de mathématiques"* de Bézout (1782) ; 5- Le compas de proportion.

Comparaison de situations d'apprentissages

sans titre

Auteur : Roland CHARNAY, PEN, Bourg-en-Bresse

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988 (p. 57-68)

Résumé : Fiche de travail sur la comparaison de 3 situations d'apprentissage au CM sur la proportionnalité ; fiche de travail sur la comparaison de 3 projets de travail au CP sur le thème de la décomposition des nombres. On trouvera, p. 50 à 54, le compte-rendu d'un débat de groupe sur ces fiches de travail.

Proportionnalité

Titre : ***"La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée..."***

Auteur : ouvrage collectif issu des colloques inter-IREM des PEN de Guéret et Quimper

Date : 1988

Editeur : IREM de Rouen

Résumé : Le document comprend plusieurs parties, et notamment un gros travail de recensement d'activités sur la proportionnalité. On trouvera, p. 15-18 un exemple de progression vers la proportionnalité en formation professionnelle s'appuyant sur le contenu du document.

Analyses critiques d'activités

sans titre

Auteur : René BERTHELOT, PEN Pau

Date : Juin 1988

in : "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Actes de l'université d'été, Olivet, Juillet 1988 p. 72-76

Résumé : Questionnaire (utilisé par l'auteur comme évaluation en FP et pour lequel il propose un corrigé) sur un problème de l'école élémentaire. Le problème de base est : *"On veut acheter avec des pièces de monnaie (1 F, 2 F, 5 F, 10 F) un objet coûtant 27 F. Il faut en prendre le moins possible. Quel est le plus petit nombre de pièces qu'il faut avoir pour réunir la somme exacte ?"*. Les questions portent sur l'étude mathématique de la solution attendue et l'analyse didactique de la situation.

sans titre

Auteur : non précisé

Date : 1988

in : "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Actes de l'université d'été, Olivet, Juillet 1988 p. 95-99

Résumé : Questionnaire et corrigé sur l'étude de la description d'une séquence didactique : *"Le tableau à double entrée"*; étude a priori de la leçon.

sans titre

Auteur : non précisé

Date : 1988

in : "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire", Actes de l'université d'été, Olivet, Juillet 1988 p. 100-103

Résumé : Questionnaire et corrigé sur l'étude de la description d'une séquence didactique : *"Le codage d'objets"*; étude a priori de la leçon.

3
Fiches de travail pour les maîtres en formation

Titre : "***Etude des opérations : plan préparatoire***"

Auteur : Dominique VALENTIN, PEN Antony

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988 (p. 69-70)

Résumé : Canevas de travail permettant à des normaliens de prendre en charge l'étude d'une opération. On trouvera, p. 54-55, le compte-rendu d'un débat de groupe sur cette fiche.

Titre : une fiche "***Analyser un projet de séquence***" et une fiche "***Observer, analyser une séquence***".

Auteur : Roland CHARNAY, PEN Bourg-en-Bresse

Date : 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988 (p. 73-75)

Résumé : La première fiche se propose d'être une aide pour l'analyse d'un projet de séquence visant l'apprentissage par les élèves d'un contenu nouveau, la seconde a pour but d'aider à l'observation effective d'une séquence.

Titre : "***Auto-évaluation personnelle après le 2ème stage***"

Auteur : E.N. Val d'Oise

Date : mai 1988

in : "Actes du XVème colloque inter-IREM des PEN", ROUEN, mai 1988" (p. 127-129)

Résumé : Document d'évaluation de stage rédigé dans la perspective d'une auto-évaluation formative et concernant l'ensemble du travail de la classe. Présenté en annexe du compte-rendu du groupe "*Evaluation des compétences professionnelles*" du colloque de Rouen

Titre : "***Guide pour l'observation d'une séquence de maths***"

Auteur : Régine DOUADY, Denis BUTLEN, Claire LETHIELLEUX

Date : 1987

in : "Actes du XIVème colloque inter-IREM des PEN", ANGERS, mai 1987 (p. 87-88).

Résumé : Voir p. 81 du présent recueil.

sans titre

Auteur : Jeanne BOLON

in : "Actes du XIVème colloque inter-IREM des PEN", ANGERS, mai 1987 (p. 89-92).

Résumé : Fiches récapitulatives à l'usage des normaliens présentant une bibliographie et des indications générales d'ordre didactique. 4 fiches : *"résolution de problèmes", "proportionnalité", "mesures d'un point de vue mathématique", "décimaux"*.