

**ANALYSE HISTORIQUE DE L'ÉMERGENCE DES CONCEPTS
ÉLÉMENTAIRES D'ALGÈBRE LINÉAIRE**

Par Jean-Luc DORIER
Institut fourier
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ - PARIS VII

Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire

par
Jean-luc DORIER
Institut fourier
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex
France

Sommaire

Introduction

- 1- Pourquoi une étude historique ? p 5
- 2- Les approches existantes - Leurs limites p 5
- 3- Explicitation de notre méthode d'investigation p 7
- 4- Plan commenté p 7

I- La "préhistoire" de l'algèbre linéaire

- 1- Les civilisations anciennes p 10
 - a- Les Babyloniens p 10
 - b- Les Egyptiens p 11
 - c- La méthode de fausse position p 11
 - d- Les Chinois p 12
 - e- Les Indiens p 12
 - f- Les Grecs p 12
 - g- Les équations indéterminées p 14
- 2- Des Arabes jusqu'à l'après Renaissance en Occident
 - a- Les Arabes p 15
 - b- La Renaissance et ses retombées en Occident p 16

II- Les problèmes "linéaires" aux XVIIIème et XIXème siècles

p 19

- 1- Les progrès dans la résolutions des sytèmes d'équations linéaires. La théorie des déterminants p 20
- 2- Panorama des autres problèmes linéaires p 27
 - a- Le paradoxe de Cramer : un des premiers problèmes d'indépendance linéaire p 27
 - b- Autour de la notion de combinaison linéaire p 29
 - c- Les transformations linéaires et la théorie des matrices p 30
 - d- Les formes quadratiques et bilinéaires p 33
 - e- Les équations différentielles linéaires p 34

III- L'algèbre linéaire à travers l'histoire de la géométrie

- 1- La naissance de la géométrie analytique p 36
- 2- La naissance du "calcul vectoriel" p 41
 - a- Les premiers pas p 41
 - b- Les premiers systèmes de "calcul géométrique" p 43
 - i- Le calcul barycentrique de Möbius p 43
 - ii- Le calcul des équipollences de Bellavitis p 44
 - c- La représentation géométrique des "complexes" p 45
 - d- Les quaternions et les sytèmes hypercomplexes p 51
 - e- Grassmann et la théorie de l'extension p 54

IV- La naissance de l'algèbre moderne

1- Une première étape : la géométrie en dimension n	p 61
2- Les premières approches axiomatiques	
a- G. Peano	p 62
i- Sur l'introduction des "formations géométriques"	p 64
ii- Sur l'introduction des systèmes linéaires	p 65
b- Burali-Forti et Marcolongo	p 69
3- Les espaces à une infinité de dimensions	p 71
4- Vers une théorie unique	p 77

V- Aperçu de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre linéaire, principalement en France

p 81

Conclusion

p 88

Index des noms cités

p 90

Bibliographie

p 92

Introduction

1 - Pourquoi une étude historique ?

La théorie axiomatique des modules ou des espaces vectoriels est une découverte de la fin du siècle précédent qui n'a pris son essor qu'après 1920. Pourtant la résolution des équations linéaires numériques en une ou même deux ou trois variables est un problème, qui a occupé les "mathématiciens" depuis l'antiquité. Entre ces deux pôles extrêmes, que séparent des dizaines de siècles, les mathématiciens de tous les temps ont posé quelques jalons, plus ou moins décisifs et importants, et aussi plus ou moins espacés dans le temps. Chacun de ces jalons, la façon dont il se situe par rapport aux autres en fonction du contexte mathématique ambiant, sont autant de renseignements qui peuvent nous permettre de mieux appréhender le sens, la nature épistémologique des premiers concepts d'algèbre linéaire.

C'est dans ce sens qu'une étude historique de la genèse de ces concepts nous semble être un travail préliminaire nécessaire avant une étude didactique. En faisant référence au cahier *Epistémologie et didactique* de M. Artigue [AI1], nous allons brièvement argumenter cette position.

L'algèbre linéaire, telle qu'on la présente aux étudiants, est un *savoir enseigné*, au sens défini par Y Chevallard [CE], c'est-à-dire qu'elle est le fruit de la *transposition didactique* d'un *savoir savant* achevé, à l'aspect lisse et parfait. La genèse des concepts qui forment ce savoir a disparu des manuels d'enseignement. Qui pourrait d'ailleurs demander à un étudiant de refaire le chemin de ces dizaines de siècles, faits de découvertes géniales mais aussi d'avancées timides, de doutes, d'ambiguïtés, d'erreurs et de régressions même peut-être ? Il serait absurde et naïf de vouloir reconstruire à travers l'enseignement un processus historique. D'où la nécessité de construction de genèses artificielles. Pourtant si l'enseignement doit se distancier de l'évolution épistémologique réelle des concepts, on peut dire en citant M. Artigue (op. cit.) que *l'analyse de genèses historiques est un promontoire d'observation quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné, ou la base de travail, s'il s'agit d'élaborer une genèse artificielle*.

De plus, la nature épistémologique des concepts est d'autant plus importante que comme le souligne G. Brousseau [BR1-2], *l'erreur -en mathématique- est constitutive du sens de la connaissance acquise*. Cette constatation l'a amené à introduire en didactique le concept d'*obstacle épistémologique*. En ce sens la genèse historique est une aide non seulement pour détecter, dans les erreurs observées chez l'apprenant, certains obstacles épistémologiques, mais aussi pour essayer de trouver un moyen de dépasser ces obstacles, étant entendu que le transfert nécessite une analyse comparée des conditions historiques et didactiques dans lesquelles apparaît chaque obstacle. Encore une fois il faut se méfier de ne pas confondre les deux types de phénomènes et l'analyse de la genèse historique ne peut être une aide que dans la mesure où l'analyse didactique du problème est suffisante.

Ces deux raisons générales nous ont conduit à essayer d'avoir une idée plus précise de ce que contenait la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire dans une optique épistémologique, avant d'aborder l'aspect didactique pur de la question de leur enseignement.

2 - Les approches existantes - Leurs limites.

Nous donnons en début de notre bibliographie la liste des ouvrages généraux d'histoire des mathématiques et des sciences que nous avons consultés. Ils présentent dans les grandes lignes, l'évolution des concepts d'algèbre linéaire. Cependant l'aspect globalisant de ces ouvrages ne laisse pas beaucoup de place à l'explicitation des différents éléments de cette évolution. De plus dans le cas particulier de l'algèbre linéaire, qui n'a été un domaine unifié que tardivement, l'éparpillement des domaines ayant joué un rôle parfois important dans la genèse, fait que la partie de ces ouvrages exclusivement réservée à l'algèbre linéaire est souvent réduite et constituée de nombreux renvois. On découvre ainsi des éléments variés en rapport avec l'algèbre linéaire, mais leur explicitation n'est pas toujours faite avec comme premier souci d'éclairer l'histoire de celle-ci. Aussi cette méthodologie, parfaitement justifiée par la problématique de ces ouvrages, a tendance parfois à perdre le lecteur dans des méandres, où il ne retrouve pas de fil directeur.

Dans un cahier précédent [RI], J. Robinet présente une genèse des concepts d'algèbre linéaire depuis l'antiquité jusqu'à l'aube du XX^{ème} siècle. Dans une première approche, cette analyse nous semble un outil suffisant pour comprendre les aspects essentiels de cette genèse et se faire une idée suffisante du sens des concepts en jeu. Pourtant certains points tels que les liens avec l'étude des systèmes d'équations linéaires, la genèse du concept de rang ou le rôle joué par la théorie axiomatique nous semblent nécessiter une analyse plus détaillée. Par ailleurs des éléments contenus dans différents autres ouvrages laissent apparaître des points importants à éclaircir.

En outre, à notre connaissance, l'algèbre linéaire n'a pas été l'objet d'autres monographies qui étudient les principaux aspects de sa genèse.

Certains ouvrages présentent des monographies sur des sujets connexes ou même sur une partie de cette genèse. Ainsi le livre de T. Muir [MU], présente, à l'appui de nombreuses citations de textes originaux -souvent traduits-, une histoire très détaillée des déterminants. Nous avons pu y retrouver des éléments importants ayant trait à l'histoire de l'algèbre linéaire, dans une proportion cependant minime par rapport à l'ampleur de l'ouvrage. La théorie des déterminants en liaison avec l'étude des solutions des systèmes linéaires est une étape importante dans la genèse de l'algèbre linéaire, par ailleurs bien plus vaste. De plus certains résultats théoriques sur les déterminants ont aussi joué un rôle dans l'extension du calcul algébrique à des objets nouveaux, ce qui a été un facteur d'évolution important pour l'algèbre linéaire. Néanmoins la plus grosse partie de l'histoire des déterminants n'a pas de rapport ou des rapports très lointains avec l'algèbre linéaire élémentaire. Aussi le livre de T. Muir nous apporte une information précise mais partielle et non nécessairement présentée dans l'optique qui nous intéresse.

De même le livre de M. Crowe [CR] présente une étude détaillée de la genèse de l'analyse vectorielle. Il est une source intéressante pour mieux comprendre les rapports entre la géométrie ou certains domaines de la physique et l'algèbre linéaire. Ce livre étudie, en utilisant des citations et des références nombreuses, l'évolution de l'idée de système vectoriel à usage pour la physique et la géométrie, ce qui constitue une phase importante dans l'évolution de l'algèbre linéaire. Pourtant en accord avec le but fixé, cette étude présente comme des points marginaux, voire même passe sous silence des aspects de cette évolution qui laissent déjà entrevoir l'idée d'un concept plus large de vecteurs et qui sont donc des éléments fondamentaux vis à vis de l'algèbre linéaire.

Sur un autre plan l'étude faite par D. Flament de la *lineale Ausdehnungslehre* de Grassmann présente un intérêt capital par rapport à notre sujet. Ce travail riche est important pour notre recherche, dont il dépasse largement les attentes sur ce point précis de la genèse de l'algèbre linéaire.

Voilà donc un panorama, à notre connaissance assez exhaustif, de la bibliographie accessible touchant à la genèse des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire. Cet état des lieux nous a semblé insatisfaisant, par rapport à notre but, sur deux points essentiels :

- Plusieurs étapes de cette genèse ne nous semblent pas avoir été entièrement développées et éclaircies. Ce sont, dans les grandes lignes, les suivantes :

- Le lien entre l'étude des systèmes linéaires et l'émergence des premiers concepts.

- La genèse de concepts centraux tels que celui de rang.

- Le passage de résultats éparés à une théorie unifiée.

- L'apparition des premières approches axiomatiques et les raisons de leur prédominance tardive.

- Par ailleurs il nous semblait important de regrouper dans une même approche tous les points de cette genèse, même si certains avaient pu être déjà développés ailleurs. Il nous semblait en effet que ce nouvel éclairage permettrait de leur donner leur réelle importance et de mieux situer la place de chaque événement par rapport à l'ensemble. On sait que l'objectivité pure est impossible en histoire, peut-être encore moins en histoire des sciences, surtout si on a une finalité épistémologique. Ainsi il semble utile que si un passage de cette histoire a pu avoir un rôle important dans la genèse des concepts d'algèbre linéaire, il soit relaté à ce titre et dans une étude dont le but est d'explicitier cette genèse, pour mieux comprendre le sens des concepts étudiés.

Nous avons donc choisi de faire un travail de synthèse en regroupant tous les éléments qui nous permettraient de mieux comprendre ce qui avait participé à l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire et à leur regroupement dans une théorie axiomatisée des espaces

vectoriels. Et dans le même temps nous avons décidé de développer plus particulièrement et de façon originale les points qui avaient été jusqu'alors, nous semble-t-il, délaissés dans les autres analyses.

Par ailleurs, dans la mesure où ce qui est enseigné actuellement à l'université, sous le label explicite d'algèbre linéaire est avant tout la théorie axiomatique des espaces vectoriels, il nous importait tout particulièrement de nous donner comme aboutissement l'étude de l'émergence des principes élémentaires de cette théorie et les raisons sous-jacentes à sa prédominance en algèbre linéaire.

D'une façon générale, il nous a semblé important de ne pas sous-estimer la complexité du problème et en conséquence, nous avons essayé de ne négliger aucune piste tout en évaluant au mieux l'intérêt qu'on avait à l'explorer. Cependant il nous a fallu faire des choix et nous avons aussi pu oublier, faute de les connaître, certaines pistes.

Ceci nous amène à expliciter notre méthode d'investigation.

3 - Explicitation de notre méthode d'investigation

La lecture des ouvrages, que nous avons signalés plus haut, nous a permis de nous faire une idée générale des grandes étapes de cette genèse et pour certaines même, une idée plus précise de leur contenu. C'est de là aussi que viennent les principales références bibliographiques des ouvrages originaux que nous avons consultés.

Ainsi les considérations assez générales que nous faisons dans notre étude sur des points du développement des concepts d'algèbre linéaire ou même plus largement sur l'évolution des mathématiques, ce qui forme en quelque sorte le squelette ou le ciment de notre exposé est le fruit du recoupement de plusieurs lectures d'ouvrages d'histoire des mathématiques ou des sciences. En ce sens on peut considérer que cela fait partie du "domaine public", pourtant la formulation et l'organisation nous sont entièrement personnelles et n'engagent que nous.

Pour le contenu plus détaillé des points développés dans notre étude, nous avons essayé au maximum de fonder nos opinions sur les lectures d'originaux, ou d'extraits issus de compilations [SM2] ou cités dans des monographies ([CR], [MU], [FL] etc.). Nous citons alors toujours nos références le plus précisément possible en donnant la version du livre que nous avons utilisée et en signalant si c'est une traduction -nous donnons toutefois les références de la première édition entre parenthèse si elle nous est connue-. Quand nous avons jugé que cela pouvait éclairer notre propos, nous avons donné des citations de ces ouvrages. Si nécessaire, nous avons alors traduit ces passages en français.

Quand nous n'avons pu disposer d'un original, nous nous sommes contentés de rapporter ce qu'en disent les ouvrages généraux d'histoire. Dans ce cas nous avons essayé au maximum de faire le recoupement de plusieurs sources. En pratique, dans la plupart des cas, nous avons pu trouver des traces d'un même fait dans au moins trois ou quatre des ouvrages suivants : [AHM], [BO1], [DA], [SM1] et [BO], complétés le plus souvent par d'autres sources générales. Ce sont tous les cinq des ouvrages assez complets et complémentaires. Toutefois il nous est arrivé, quoique très rarement de ne trouver un élément que dans un ou deux ouvrages seulement, et de ne pas pouvoir disposer des références citées, nous avons alors préféré renoncer à mentionner ces faits.

4 - Plan commenté

Le plan que nous avons adopté correspond à une double exigence chronologique et épistémologique. Nous avons donc essayé de diviser notre étude en grandes périodes que nous avons elles-mêmes séparées selon les grands thèmes d'évolution. Nous avons ainsi distingué :

I- La "préhistoire de l'algèbre linéaire".

Dans ce chapitre nous dressons un panorama très rapide des techniques de résolution d'équations et de systèmes linéaires, en une ou plusieurs variables, connues dans différentes civilisations antiques d'Europe et d'Asie. Puis nous retraçons les principales étapes de l'évolution de l'algèbre d'abord chez les Arabes puis à travers l'Occident à la suite de la Renaissance. Nous montrons comment la naissance du symbolisme algébrique a permis de changer de point de vue dans l'étude des équations puis des systèmes linéaires, en permettant de passer du cadre numérique à celui des coefficients indéterminés réalisant ainsi la première étape importante dans la genèse de l'algèbre linéaire.

Pour ce premier chapitre, nous nous sommes contentés essentiellement de deuxièmes lectures, étant donné que les originaux sont difficiles d'accès, et nous ne prétendons pas avoir été exhaustif, ni très précis. Nous avons cependant examiné certains points dans *les Eléments* d'Euclide et *les Arithmétiques* de Diophante. Nos principales sources, à part celles citées explicitement en référence à ce chapitre sont : [SM1], [BO] et [DA].

Pendant les XVIIIème et XIXèmes siècles, l'algèbre linéaire apparaît, sans être unifiée, dans de nombreux domaines. Dans les deux chapitres suivants nous en présentons les aspects principaux en séparant ceux liés à la géométrie (chap. III) des autres (chap. II). Ce choix se justifie à nos yeux à cause des liens très spécifiques qui existent entre la géométrie et l'algèbre linéaire, et dont l'enseignement se fait d'ailleurs l'écho.

II. Les problèmes linéaires aux XVIIIème et XIXème siècles.

Nous avons essayé de proposer ici un découpage en grands thèmes.

1- Les progrès dans la résolution des systèmes d'équations linéaires. La théorie des déterminants.

Le début de ce paragraphe est inspiré du livre de T. Muir (op. cit.). Ayant une problématique générale différente, nous avons toutefois plus spécifiquement essayé de dégager en quoi la théorie des déterminants a permis de faire de l'étude des systèmes linéaires le premier terrain d'émergence des concepts de combinaison linéaire et de dépendance linéaire.

Dans la deuxième partie de ce paragraphe, nous présentons, d'après une étude personnelle de l'œuvre originale, la contribution de Frobenius à l'émergence du concept de rang, en particulier grâce à l'introduction du concept de dépendance linéaire sur les solutions et non plus sur les équations.

2- a Le paradoxe de Cramer : un des premiers problèmes d'indépendance linéaire.

A partir d'une analyse personnelle des textes originaux, nous présentons, dans ce paragraphe, une des premières situations qui a fait apparaître une application du concept de dépendance linéaire.

2-b Autour de la notion de combinaison linéaire.

2-c Les transformations linéaires et la théorie des matrices

2-d Les formes quadratiques et bilinéaires

2-e Les équations différentielles linéaires

Ces paragraphes sont des paragraphes de synthèse. Nous avons seulement partiellement pu vérifier les sources originales (quand la bibliographie est signalée). Les idées développées sont des recoupements de diverses lectures, en particulier [AHM], [BO1] et [BO]. Nous avons fait un travail plus documenté sur Gauss, Lagrange, Cayley et Eisenstein.

III L'algèbre linéaire à travers l'histoire de la géométrie.

Tout ce chapitre est sûrement le passage le plus documenté de notre étude, et nous avons utilisé plusieurs ouvrages d'histoire des mathématiques, il est donc aussi moins original. Il a été en particulier influencé par la lecture du livre de Crowe (op. cit.). Nous avons aussi essayé dans la mesure du possible de travailler sur les originaux et le travail très détaillé de D. Flament [FL] nous a beaucoup aidé pour la rédaction du paragraphe sur Grassmann.

Par ailleurs pour donner son originalité à ce chapitre, nous avons voulu dépasser dans notre analyse, le simple cadre de la géométrie et montrer dans les travaux cités ce qui préparait déjà la suite et contenait en germe, implicitement ou même explicitement les généralisations futures de la notion d'espace. C'est en effet ce qui nous a semblé être le plus pertinent par rapport à la genèse des concepts d'algèbre linéaire, et qui n'est pas toujours bien dégagé dans les autres études. Dans cet optique, la place de Grassmann est fondamentale, parce qu'à partir d'une réflexion générale philosophique il est un des premiers à avoir tant élargi la notion d'espace et à proposer un calcul géométrique généralisé. Aussi avons-nous étayé le paragraphe sur Grassmann par des détails sur sa vie personnelle, parce qu'il nous a semblé que ceux-ci pouvaient peut-être permettre de mieux comprendre ses motivations et aussi parce qu'il est également un exemple assez unique et que son isolement a certainement eu une influence sur ses découvertes comme sur leur destin.

IV La naissance de l'algèbre linéaire moderne.

Ce chapitre est essentiellement basé sur des lectures personnelles d'originaux. Nous avons voulu y retracer le passage de résultats épars à un domaine unifié de l'algèbre linéaire, où les espaces vectoriels apparaissent sous l'aspect descriptif de n -uplets. Puis nous étudions le passage progressif à la dimension infinie et parallèlement les premières axiomatisations et enfin les évolutions plus récentes qui ont conduit à la prédominance de l'approche axiomatique et à la théorie des espaces vectoriels et des modules.

Nous avons en particulier développé une étude entièrement personnelle de la première explicitation d'une définition axiomatique des espaces vectoriels par Peano, ainsi que de quelques autres définitions axiomatiques apparues au début du siècle.

V. Aperçu de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre linéaire, principalement en France.

Ce chapitre est basé sur une étude que nous avons faite des programmes officiels de mathématiques des lycées et des classes préparatoires depuis 1930, ainsi que de quelques manuels d'enseignements de niveau universitaire. Il permet de se faire une idée sommaire de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre linéaire pendant ces soixantes dernières années. Il permettra également de faire le lien avec nos préoccupations didactiques, développées dans les deux autres parties de ce travail.

I- "Préhistoire" de l'Algèbre Linéaire

1- Les civilisations anciennes

L'algèbre linéaire, telle que nous la connaissons de nos jours, est un domaine récent des mathématiques -la définition des espaces vectoriels n'a vraiment été achevée qu'au début du XX^{ème} siècle-. Pourtant on peut considérer que sa genèse participe d'un très long processus de maturation et il est intéressant de revenir aux premières civilisations antiques pour retrouver ses sources lointaines. En effet depuis que les hommes ont tenté de comprendre le monde qui les entoure, ils ont été amenés à construire des systèmes numériques et les principes élémentaires de l'arithmétique, de la géométrie, de l'astronomie ou de la musique. Cette nécessité s'est fait jour pour résoudre des problèmes pratiques liés à l'agriculture, au commerce, à la stratégie militaire, à des questions d'héritage ou de maintenance, mais aussi dans l'étude de l'astronomie, de la musique, du dessin ou de l'architecture.

Dans de nombreuses civilisations, le statut de mathématicien n'existait pas en tant que tel.

Dans l'Egypte ou la Babylone antiques, comme en Chine, les "mathématiciens", sont des fonctionnaires au service de l'appareil d'état, ils doivent en gérer les finances, les biens, l'armées et les constructions, ils sont également astrologues.

En Inde, leur activité est inséparable de la religion et de l'étude du sanskrit, on les appelle des *gyotirvids* (spécialistes des astres).

C'est d'abord chez les Grecs que la mathématique accède à un statut noble qui va de pair avec la philosophie, et c'est cette tradition qui, via les Arabes, pénétrera l'Occident et se développera à partir de la Renaissance.

Donc au début, les mathématiques et tout spécialement l'arithmétique ont, avant tout, des fonctions utilitaires. Ainsi, bien avant que le concept d'équation n'ait été acquis, grâce aux méthodes de l'arithmétique, et sous forme rhétorique, on s'est employé à résoudre des problèmes modélisables par des équations linéaires (ou affines), voire par des systèmes d'équations linéaires, en une, ou même deux ou trois variables.

Sans prétendre faire un exposé exhaustif, nous allons donner ci-dessous un panorama aussi large que possible des types de problèmes linéaires ainsi rencontrés et des techniques de résolution utilisées à différentes époques dans différentes civilisations anciennes, pour celles dont nous disposons d'éléments suffisants, pour avoir une idée précise sur l'état de leurs connaissances.

a- Les Babyloniens

Les tablettes babyloniennes montrent, que depuis le haut âge babylonien (environ 1800 av J.-C.) jusqu'à l'époque de l'Empire Séleucide (vers 300 ap J.-C.), les problèmes que se posaient leurs mathématiciens n'évolurent guère. Traduits en langage moderne, ils consistent essentiellement en la résolution d'équations linéaires ou quadratiques en une inconnue et de systèmes contenant une équation linéaire et une équation quadratique en deux inconnues. De tels problèmes étaient bien sûr posés avec des valeurs numériques explicites, et provenaient de réalités quotidiennes (répartition des récoltes, échanges de monnaies et de marchandises, calcul d'intérêts simples ou composés, calcul de taxes etc...). Leur résolution était entièrement basée sur le discours : les tablettes énoncent une suite de règles à effectuer sans donner de justification, et il n'y a aucun recours à un langage symbolique même primaire.

Le système numérique babylonien était fait d'un mélange de base soixante et de base dix, avec un principe de position. Les multiplications se faisaient en référence à des tables (certainement établies par additions successives) et les seuls rationnels connus étaient ceux dont le dénominateur est un produit de facteurs premiers de soixante (d'où l'intérêt de la base soixante, à cause du grand nombre de diviseurs). En fait ils utilisaient tous les rationnels exprimables de façon finie en base soixante, ce qui forme un anneau. Les divisions (ramenées à des multiplications) et les extractions de racines carrées (qui se faisaient en correspondance avec des tables de carrés préétablies) n'étaient alors concevables, que si elles pouvaient se mener entièrement dans cet anneau.

Néanmoins, malgré ces outils rudimentaires, les calculateurs babyloniens font preuve de beaucoup d'habileté. Pour les systèmes, la méthode utilisée revient à résoudre une des équations par rapport à une inconnue puis à substituer la solution dans l'autre équation. Dans le cas où figure l'équation $x+y=a$, on trouve également le recours à un changement de variables par $x=a/2+s$ et $y=a/2-s$ (idem avec $x-y=a$), la deuxième équation est alors en la seule variable s .

b- Les Egyptiens

Le Papyrus utilisé pour l'écriture en Egypte s'est beaucoup moins bien conservé que les tablettes d'argile babyloniennes, si bien que les sources concernant la civilisation des Pharaons sont beaucoup moins nombreuses. Les *Papyrus d'Ahmès ou de Rhind* et de *Moscou* datant tous deux d'environ 1650 av J.-C. et le *Rouleau de cuir des mathématiques égyptiennes* sont les principales. De ce que l'on peut voir, les connaissances des scribes égyptiens sur les équations linéaires étaient encore plus rudimentaires que celles des Babyloniens.

Comme ces derniers, les Egyptiens résolvait des problèmes concrets énoncés de façon rhétorique sans presque utiliser de symboles (tout au plus un signe pour l'addition et la soustraction ainsi que pour la racine carrée). Il existait deux systèmes numériques tous deux décimaux, l'un n'était pas positionnel (système hiéroglyphique), l'autre évitait la multiplication des symboles par des règles de position (système hiératique). Les seuls rationnels utilisés étaient les inverses d'entiers (ou quantième) et la fraction $\frac{2}{3}$ qui semble jouir d'un statut privilégié. Ceci obligeait à des calculs très longs pour ramener toute fraction en une somme de quantième distincts et de $\frac{2}{3}$.

On ne trouve que quelques rares exemples simples et isolés de résolution de systèmes de deux équations en deux inconnues.

La résolution des équations linéaires en une variable se faisait par essais successifs mais, malgré la lourdeur des calculs, il semble que la dextérité des scribes confèrent à cette méthode une certaine efficacité.

Un exemple célèbre du Papyrus Rhind consiste à résoudre l'équation suivante : $x + (\frac{1}{7})x = 19$ (en langage moderne).

La méthode employée est en substance la suivante :

"Prenons une unité de 7.

Une fois fait 7.

$(\frac{1}{7})$ fois fait 1.

$1 + (\frac{1}{7})$ fois fait 8.

Autant de fois qu'il faut multiplier 8 pour faire 19, il faudra multiplier 7 pour obtenir le résultat.

Une fois fait 8.

Deux fois font 16.

$(\frac{1}{2})$ fois fait 4.

$(\frac{1}{4})$ fois fait 2.

$(\frac{1}{8})$ fois fait 1.

Au total, $2 + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8})$ font 19.

Multiplions $2 + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8})$ par 7, et on obtiendra le résultat.

Une fois fait $2 + (\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8})$.

Deux fois font $4 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4})$.

4 fois font $9 + (\frac{1}{2})$.

Au total 7 fois font $16 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{8})$ qui est le résultat."

([SM1] vol.II p.436)

c- La méthode de fausse position

Cette technique, par essais successifs, est en quelque sorte l'ancêtre de la *méthode de fausse position*. Celle-ci était connue des Chinois et des Indiens et fut introduite en Europe par les Arabes. Elle sera jusqu'au XVIII^{ème} siècle au moins, la plus usitée, si ce n'est la seule connue, des méthodes de résolution des équations linéaires en une variable.

Son nom ainsi que la façon de l'appliquer ont bien sûr connu des variantes au cours des âges et des civilisations. Elle garde cependant toujours une structure de fond quasi identique.

Voici, en langage moderne, en quoi elle consiste.

Soit à résoudre l'équation $ax + b = 0$. On fait deux essais x_1 et x_2 qui donnent des valeurs v_1 et v_2 qui, en général ne sont pas 0, alors par soustraction, on obtient : $a(x_1 - x_2) = (v_1 - v_2)$.

Par ailleurs on a, $x_2 v_1 = a x_2 x_1 + b x_2$ et $x_1 v_2 = a x_1 x_2 + b x_1$

donc par soustraction : $b(x_2 - x_1) = x_2 v_1 - x_1 v_2$

En divisant les deux équations ainsi obtenues, on obtient :

$$x = \frac{b}{a} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2}$$

Bien sûr les deux divisions de la fin n'étaient, en général, pas explicites et on utilisait une forme rhétorique revenant à une règle de trois ou de proportionnalité, pour conclure.

d- Les Chinois

L'un des plus grands classiques des mathématiques de la Chine antique est *l'Arithmétique en neuf sections* (*K'iu-ch'ang Suan-Shu*). L'auteur et la date d'origine de ce traité nous sont inconnus. Cependant il est généralement reconnu qu'il date d'avant 1000 av J.-C., et on a même prétendu qu'il daterait du 27ème siècle avant notre ère!

Deux des sections ont trait aux équations linéaires. La première énonce la règle de fausse position à travers de nombreux exemples concrets. La seconde fournit maints problèmes conduisant à des systèmes de deux équations linéaires en deux inconnues, dont l'une apparaît toujours avec le coefficient 1 : $y=ax+b$ et $y=a'x-b'$. Une règle de résolution est donnée, elle revient en substance à un processus d'addition et d'élimination classique. En pratique le raisonnement devait s'appuyer sur l'utilisation de bambous, que les Chinois utilisaient à cette époque pour compter.

Ce livre eut une influence très importante dans toute l'Asie orientale pendant de nombreux siècles.

Il faut attendre probablement le premier siècle de notre ère et le mathématicien Sun-tzi, pour voir des progrès se dessiner. Ce dernier résout par une méthode d'élimination, un problème qui revient au système $2x+y=96$ et $2x+3y=144$.

A partir de ce moment, on peut dire que les techniques de résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues furent connues en Chine.

e- Les Indiens

Les sources que l'on possède concernant l'Inde antique sont beaucoup moins fiables. Il est à peu près certain, que les indiens connaissaient une forme de la règle de fausse position et que c'est d'eux que les Arabes la tiendraient.

Par ailleurs, Mahavira écrit, certainement aux environs de 850, le *Ganita-Sara-sangraha*. Dans ce traité, on trouve de nombreux problèmes, dont la résolution est équivalente à celle de systèmes de plusieurs équations linéaires à plusieurs inconnues, et qui sont résolus par une technique d'éliminations successives des inconnues.

Il est à noter que les Indiens utilisaient un système numérique décimal de position, connaissaient le zéro et les nombres négatifs et qu'ils avaient la possibilité de distinguer différentes inconnues en leur donnant des noms de couleurs, ce qui permettait de les faire intervenir en même temps, sans risque de méprise, dans des équations.

Pour se donner une idée du genre de problèmes concrets soulevés en voici un exemple proposé par Mahavira : " le prix de 9 citrons et de 7 pommes est de 107 ; le prix de 7 citrons et de 9 pommes est de 101. O toi arithméticien, dis-moi rapidement le prix d'un citron et d'une pomme, après avoir bien distingué ces deux prix. "

Malgré son caractère très réaliste un tel énoncé peut très bien avoir été créé de toutes pièces, seulement à des fins didactiques, pour l'éducation des scribes. Cette remarque est d'ailleurs valable pour les autres civilisations étudiées ici, les problèmes "à habillage" semblent en effet être une invention didactique universelle et très ancienne!

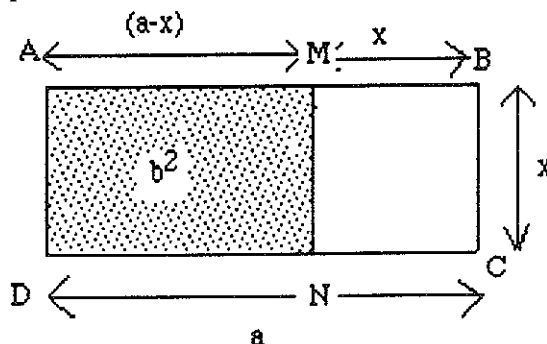
f- Les Grecs

La Mathématique grecque se caractérise surtout par la prédominance de la Géométrie. Depuis Thalès et l'école ionienne, c'est en géométrie que s'exerce l'esprit de déduction et l'art de la démonstration et même si Platon, par exemple, préconise l'entraînement au calcul pour les jeunes enfants, on peut dire que l'arithmétique et, a fortiori les prémices d'algèbre, si tant est qu'il y en ait eu, ne se sont guère développés, dans la période grecque classique.

Ainsi les nombres n'ont le plus souvent d'existence qu'à travers des représentations géométriques. l'un des facteurs de "retard" de l'algèbre grecque réside dans l'impossibilité, imposé par la prédominance de la géométrie, à additionner des grandeurs d'unités différentes (longueurs aires et volumes, ou unité de temps etc...). Les équations ne sont également

abordées que géométriquement. Ainsi dans le livre I des *Eléments*, Euclide montre-t-il comment construire un parallélogramme d'aire égale à celle d'un triangle ou d'un quadrilatère donnés, s'appuyant sur un segment et un angle donné (proposition 44 et 45).

Cette application du calcul des aires resta pendant longtemps la méthode géométrique utilisée pour résoudre l'équation linéaire $ax=b$. Il suffit de construire le rectangle de côté a et d'aire b , le deuxième côté est alors la solution cherchée. Euclide donne d'autres applications plus complexes permettant de résoudre géométriquement des équations ou systèmes d'équations. Un des plus connus est le système $x+y=a$ (ou $x-y=a$) et $xy=b^2$, qui se réduit à $x(x-a)=b^2$. Ce problème revient à trouver x tel que sur la figure ci-dessous. Les propositions 5 et 6 du livre II des *Eléments* permettent de résoudre ce problème.



De façon isolée, on trouve néanmoins quelques approches intéressantes de résolution de systèmes d'équations linéaires, indépendamment de considérations géométriques. Ainsi, aux environs de 380 av J.-C., Thymaridas de Paros, donne une règle pour résoudre le système de n équations suivant :

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} = s \\ x_0 + x_1 = a_1 \\ \dots \\ x_0 + x_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$$

Cette méthode, à laquelle il donne le nom de "fleur", est déjà la technique classique d'addition.

Les *Eléments* d'Euclide, écrits au début du troisième siècle avant Jésus Christ, ont inspiré les mathématiciens occidentaux jusqu'au début du XX^{ème} siècle, et restent encore aujourd'hui un modèle de rigueur dans la construction déductive. Selon la tradition Hellenique, dont les *Eléments* sont une sorte d'aboutissement, l'approche est essentiellement géométrique (cf précédemment). Pourtant on trouve dans le livre V, une théorie des proportions qui échappe à ce critère. On attribue parfois ce livre V à Eudoxe de Cnide (vers 400-355 av J.-C.), mais le fait est mal établi.

Jusqu'alors les Grecs utilisaient la notion de rapport, qui permettait de comparer deux grandeurs commensurables, c'est-à-dire multiples entiers d'une même unité. Or depuis Pythagore, ils avaient découvert l'existence de grandeurs incommensurables, en essayant de comparer la diagonale du carré à son côté. Euclide introduit la notion de proportion pour des *Grandeurs*, objets abstraits, qu'il ne définit vraiment nulle part, mais qui apparaissent pouvoir aussi bien être des longueurs, que des aires, des volumes, des poids, des angles ou des intervalles de temps sans aucune contrainte de commensurabilité.

Il commence son exposé par 18 définitions dont il déduit, avec les principes élémentaires du livre I, mais sans recours au postulat dont le contenu est géométrique, 25 théorèmes qui établissent les propriétés des grandeurs et des rapports de grandeurs. Pour ce qui nous occupe, la définition la plus intéressante est celle qu'il donne des grandeurs ayant la même raison ou proportionnelles :

"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième étant comparés à d'autres équi-multiples de la deuxième et de la quatrième, chacun à chacun, les premiers équi-multiples surpassent chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles."

(traduction F. Peyrard, 1819) [PE].

C'est sur cette définition essentiellement, que repose tout le livre V. En langage moderne, elle s'écrit :

$a/b=c/d$ ssi, pour tous entiers m et n :

si $ma > nb$ alors $mc > nd$

si $ma = nb$ alors $mc = nd$

et si $ma < nb$ alors $mc < nd$.

Cette définition comporte, en germe, la construction des réels par les coupures, comme la réalisera Dedekind à l'aube du XX^{ème} siècle. Mais Euclide n'avait nullement l'intention de construire un ensemble de nombres.

De plus s'il refuse l'évidence géométrique, il n'a pas non plus recours à l'arithmétique. Toutes ses démonstrations reposent uniquement sur les 18 définitions de départ, si bien que sa théorie peut apparaître comme la première de type axiomatique, utilisant des relations linéaires sur des objets abstraits. Cependant elle restera pendant de nombreux siècles, l'unique exemple d'une telle démarche.

La théorie des proportions est utilisée par Euclide, en géométrie plane dans le livre VI et ensuite en arithmétique dans les livres VII, VIII et IX.

Il faut ensuite attendre Diophante, et ses *Arithmétiques*, au III^{ème} siècle de notre ère, pour voir apparaître des études arithmétiques en tant que telles, dégagées de considérations géométriques et pourtant empreintes d'un souci de méthode et d'exposition logique.

Cette œuvre gigantesque, qui fut sûrement le fruit d'un travail collectif comporte treize livres. Les problèmes sont tous numériques, mais en général, les données ne sont explicitées qu'après un exposé théorique du problème, ce qui en élargit le contenu. De plus, Diophante utilise essentiellement une forme rhétorique classique mais il fait également intervenir quelques notations symboliques, pour la soustraction (l'addition et la multiplication sont toutes deux indiquées par la simple juxtaposition), les puissances et les racines des inconnues, mais il ne dispose que d'un symbole pour toutes les inconnues. S'il écrit de véritables équations, il ne fait par contre jamais d'opération sur celles-ci. Cette formulation intermédiaire entre la rhétorique pure et le symbolisme algébrique (achevé au XVII^{ème}), a été appelée *l'algèbre syncopée*.

Le nombre d'inconnues dans les équations considérées par Diophante, peut aller jusqu'à six. Plusieurs systèmes d'équations linéaires apparaissent et sont résolus par des méthodes de substitutions ou de changements de variables (du genre si $x+y=s$, $x=s/2+a$ et $y=s/2-a$, comme les babyloniens!). Diophante ne considère que des solutions rationnelles et positives.

Cette œuvre aura une influence durable sur les mathématiques occidentales, par ses traductions d'abord en arabe, puis en latin à la Renaissance, et les commentaires et prolongements qu'elle suscita. On ne trouve cependant pas de traces (depuis au moins le X^{ème} siècle) des quatre derniers livres et en fait, seuls les six premiers sont bien connus.

g- Les équations indéterminées

Pour le moment nous n'avons parlé implicitement, que de systèmes d'équations possédant une solution unique.

Diophante le premier a étudié la résolution d'équations ou de systèmes indéterminés, c'est-à-dire possédant plusieurs solutions. On trouve également de tels systèmes en Chine dans les œuvres de Ch'ang K'iu-Kien, vers 575, et en Inde dans les écrits de Arayabhata au début du sixième siècle.

Donnons un exemple de tels problèmes. Par exemple le problème des cent volailles chinoises. Ce problème semble être apparu au sixième siècle en Chine, on en trouve une autre version dans l'œuvre de Mahavira en Inde (vers 850), ainsi qu'une troisième version européenne, certainement introduite par les Arabes au moment de l'infiltration des idées d'Orient.

"Si un coq vaut 5 sapeks, une poule, 3 sapeks, et trois poulets ensemble, 1 sapek, combien de coqs de poules et de poulets, dont on a 100 en tout, vaudront tous ensemble 100 sapeks ?"

De tels problèmes ne sont indéterminés que dans la mesure où les conditions extérieures ne sont pas trop contraignantes. Ici par exemple, seules les solutions avec trois entiers naturels ont un sens, le problème n'a donc en fait que quatre solutions possibles.

Ces types de problèmes sont assez anecdotiques, et jusqu'au XV^{ème} siècle au moins, on ne les a considérés que comme des curiosités, que l'on traitait au coup par coup.

Diophante, par exemple, qui ne considère pas que des équations linéaires, développe des techniques très élaborées pour trouver des solutions particulières de ces systèmes indéterminés, mais qui sont tous des cas d'espèce avec des changements de variables fort habiles, mais sans réelles méthodes d'investigation, si bien qu'il n'y a aucune possibilité prédictive dans la résolution de tels systèmes.

Avec les traductions latines des *Arithmétiques* de Diophante, au début de la Renaissance, revient le goût pour les problèmes indéterminés. L'étude des solutions rationnelles (puis seulement entières avec Fermat) de telles équations constitue ce que l'on appella alors *l'analyse diophantienne*. Bachet De Meziriac (1581-1638), outre une traduction largement commentée des œuvres de Diophante, publie *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (1612 et 1624), dans lequel pour la première fois en Occident, il donne de façon systématique les solutions entières des équations du type $ax+by=c$. Il démontre également l'identité dite de Bezout sur l'existence, pour deux nombres premiers entre eux a et b , de deux entiers x et y , tels que $ax+by=1$ (Bezout en donna une généralisation dans l'anneau des polynômes à coefficients réels).

Fermat (1601-1665) qui avait eu connaissance, des ouvrages de Bachet, qu'il avait d'ailleurs largement annotés, se passionna lui aussi pour l'analyse diophantienne, et posa les fondements de la théorie des nombres, en restreignant le premier le champs d'étude aux seuls entiers. Les nombreux problèmes soulevés par Fermat ne furent pour certains résolus qu'aux siècles suivants, par ses successeurs illustres dont Euler et Gauss sont les plus connus.

2- Des Arabes à l'après Renaissance en Occident

a- Les Arabes

Dès le VII^{ème} siècle, Bagdad, au carrefour de l'Orient et de l'Occident est devenue un grand centre scientifique où les bibliothèques sont riches en ouvrages tant grecs, qu'indiens, persans ou mésopotamiens (Babylone n'est qu'à 160 km de Bagdad). Pendant deux siècles, la prospérité économique aidant, cet héritage est assimilé, et à partir du IX^{ème} siècle, se développe une véritable culture mathématique arabe qui va permettre des progrès décisifs dans l'élaboration du calcul algébrique tant abstrait que technique.

Au IX^{ème} siècle, Al-Khwarizmi publie le *Précis sur le calcul de al-jabr et al-muqabala*. Le mot "al-jabr", qui a donné le terme d'algèbre, veut dire complément ou remplissage, au départ il désignait l'opération qui consiste, pour se débarrasser d'un terme à soustraire, à l'additionner des deux côtés d'une égalité. Après Al-Khwarizmi, on trouve ce nom sur tous les traités se référant au sujet.

Cet ouvrage capital a non seulement influencé toute la mathématique arabe mais aussi par ses traductions latines, tout l'occident du Moyen-Age jusqu'à la Renaissance. L'auteur avait défini, dans des ouvrages antérieurs, un système numérique décimal (sans utilisation de symboles), il utilisait un nombre très proche de notre 0 et avait défini, entre autres, les quatre opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Il utilisait parfois des nombres irrationnels. L'arithmétique qu'il développe est entièrement rhétorique et n'utilise aucun symbole ; mais l'inconnue, son carré et la racine d'une équation ont une dénomination propre. Les coefficients des équations doivent toujours être positifs.

Al Khwarizmi ramène toutes les équations en une variable, à six types canoniques, dont l'équation linéaire, dont il fait une étude complète avec des coefficients numériques. Il ne considère jamais les racines négatives des équations. Enfin il étudie, à travers essentiellement des problèmes d'héritage (rendus ardu par la loi coranique), des systèmes d'équations linéaires en plusieurs variables, dont certaines indéterminées, qu'il résout par des méthodes de substitution.

Le gros progrès, semble-t-il, dans cet ouvrage, vient du souci de classification des équations. L'équation même prend un réel statut, qu'elle n'avait pas encore, surtout chez les Grecs, et c'est un pas décisif de l'arithmétique vers l'algèbre qui est franchi.

A partir de ce moment tout un courant, parfois influencé également par des phénomènes extérieurs, telle que la publication, au X^{ème} siècle, de la traduction des œuvres de Diophante, va progresser rapidement vers des résultats tant techniques que théoriques.

Abu-Kamil (fin du IX^{ème}, début du X^{ème} siècle), premier disciple d'Al-Khwarizmi, développe surtout les résultats sur la résolution d'équations quadratiques et les calculs sur les quantités irrationnelles du second ordre.

Avec Al-Karagi (fin du X^{ème}, début du XI^{ème} siècle), l'algèbre définit réellement son objet comme étant le calcul arithmétique sur des quantités contenant une inconnue. Dans son livre *Al-Fakhri*, Al-Karagi précise en effet que l'art du calcul a pour but la détermination des grandeurs inconnues à l'aide de ce qui est connu. De plus avant de résoudre des problèmes il prend soin d'exposer de façon assez formelle les outils de calcul qu'il va utiliser, on peut ainsi voir dans son œuvre les premiers signes d'un exposé des règles de calcul sur les polynômes.

Par la suite, et jusqu'au milieu du XV^{ème} siècle, où l'apogée est atteinte et où le déclin s'entame, les résultats théoriques s'accumulent et l'algèbre aussi bien que l'arithmétique s'enrichissent. Pourtant les résultats concernent surtout les équations de degré élevé, alors que la résolution des équations linéaires ou des systèmes ne fait pas d'avancée significative.

Il faut noter toutefois, l'évolution constante de la notion de nombre déjà bien avancée, avec Al-Khayyam, au XI^{ème} siècle. Ce dernier développe une théorie des fractions continues et fait en parallèle, une analyse philosophique, de la théorie des *proportions* du livre V des *Eléments* d'Euclide. A ce moment, les nombres irrationnels positifs sont devenus très familiers aux Arabes, alors que certains mathématiciens d'Occident refuseront de leur donner un véritable statut, encore au XVI^{ème} siècle.

b- La Renaissance et ses retombées en Occident

Avec la Renaissance, l'Occident retrouve le goût pour la mathématique grecque, le développement du commerce facilitant les échanges, on apprend aussi à connaître les grands auteurs arabes. La découverte par Regiomontanus, collectionneur allemand, des *Arithmétiques* de Diophante en 1464 et la rediffusion du *Liber Abaci* de Fibonacci (1202), qui présentait un panorama complet des connaissances arabes de l'époque sont les deux points les plus significatifs de ce renouveau de la science occidentale.

Rapidement des écoles se forment surtout en Italie et en Espagne, où se trouvent les traducteurs les plus expérimentés, mais aussi en France, en Allemagne et en Angleterre. Des résolutions d'équations de plus en plus hardies se font jour, grâce à Ferrari, Tartaglia, Bombelli ou Cardan (vers le milieu du XVI^{ème} siècle) pour ne citer que les plus illustres. Le concept de nombre évolue aussi, on commence à considérer des racines négatives d'équations et même des racines "impossibles" ou "imaginaires" qui sont, en fait des complexes. Bombelli par exemple, considère les racines des équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés des quatre signes *piu*, *meno*, *piu de meno* et *meno di meno*, qui sont en langage moderne +, -, +i, -i. Sa théorie est toutefois encore peu développée, et ce ne sont que les embryons des nombres complexes qu'il faut voir là.

L'attrait pour les mathématiques grandit rapidement, la redécouverte des écrits anciens stimule des recherches novatrices qui offrent des prolongements consistants. Le mathématicien accède alors à des emplois autres que subalternes, et son statut social et scientifique ne cesse de s'élever. Les grands du monde font de plus en plus appel aux services des mathématiciens, dont les tâches se diversifient. Le XVII^{ème} siècle voit la naissance en Europe, des Académies des sciences, sur le modèle plus précoce des sociétés italiennes. L'une des plus célèbres est celle de l'abbé Marin Mersenne qui réunissait à Paris, Pascal, Descartes, Fermat, Robertval et Desargues. Les mathématiciens prennent alors l'habitude de communiquer entre eux. Des théories même inachevées deviennent ainsi accessibles.

C'est aussi au niveau du symbolisme algébrique, que les progrès accomplis pendant la Renaissance seront particulièrement sensibles.

Si ça et là, on a vu quelques tentatives d'utilisations de symboles, telle que l'algèbre syncopée de Diophante, l'algèbre reste jusqu'au XV^{ème} siècle essentiellement rhétorique, ce qui n'en facilite pas la tâche.

Aux alentours de 1484, Nicolas Chuquet fait preuve dans son *Triparty* de beaucoup d'audace pour son époque, dans l'utilisation des symboles. Son ouvrage ne fut jamais entièrement publié, mais seulement diffusé en quelques copies manuscrites. De larges extraits furent publiés en 1880 par A. Marre dans le Bulletin Boncompagni et une des meilleures sources reste encore les plagiats de Maître Etienne de la Roche dans son *Arithmétique* publié en 1520 et 1538.

Chuquet utilise le terme de "nombre premier" pour désigner l'inconnue qu'il note 1^1 . Ainsi ce que nous noterions $5x$ aujourd'hui serait pour lui 5^1 . Il utilise des notations pour le signe somme (p), le signe moins (m), la barre de fraction, les puissances nèmes (n entier relatif) (6^3 par exemple veut dire $6x^3$ alors que 5^{2m} désigne $5x^{-2}$), les racines nèmes (R^{25} désigne la racine carrée de 5).

Par exemple :

$R^3 \text{ 5 p } R^2 \text{ 15 }^1$ est $6^2 \text{ m } 3$ par $R^3 \text{ 3 }^1$

désigne en langage moderne :

$$(5+(15x)^{1/2})^{1/3} = (6x^2-3)/(3x)^{1/3}.$$

Il énonce comme des évidences les règles d'addition des exposants dans le produit de puissances, et quelques règles de simplification dans les calculs de quotients où interviennent des puissances de x .

Ensuite il résout de nombreux problèmes numériques énoncés dans un cadre abstrait, par utilisation de la règle fausse position et surtout (c'est là son originalité) de la "Règle des premiers" qui consiste en une méthode algébrique, c'est-à-dire en des manipulations sur les expressions contenant l'inconnue selon des principes énoncés auparavant. Bien qu'il montre le plus souvent une connaissance avancée pour son époque de la notion de nombre (négatifs, irrationnels et utilisation du zéro), Chuquet n'est pas à l'abri de calculs qui nous paraissent laborieux ainsi que de lacunes ou de maladresses, surtout à propos de l'existence ou l'indétermination des solutions notamment. Néanmoins son œuvre reste un des premiers exemples d'utilisation très avancée de symbolisme algébrique, préfigurant celles de successeurs illustres tels que Cardan, Tartaglia ou Bombelli.

Au XVI^{ème} siècle, on voit se généraliser l'utilisation de notations symboliques plus ou moins habiles et entreprenantes, c'est ce que l'on a appelé *l'algèbre numéreuse*. En particulier l'utilisation des majuscules des premières lettres de l'alphabet pour désigner plusieurs inconnues, permet de mieux gérer la résolution de systèmes d'équations. Nous avons pour l'instant essentiellement parlé de mathématiciens italiens et français, mais, à la même époque, une école allemande se développe aussi qui prend le nom de *Coss* (chose, cosa en italien, couramment employée pour désigner l'inconnue). Les principaux mathématiciens allemands de cette période sont C. Rudolff, qui en 1525 introduit la notation actuelle de la racine carrée et Stifel (1487-1567).

Mais c'est surtout au mathématicien français François Viète que l'on doit le saut décisif vers le symbolisme actuel, parachevé quelques années plus tard par Descartes.

François Viète (1540-1603) était un politique ; conseiller privé d'Henri IV, il s'adonnait aux mathématiques pendant son temps libre. Son œuvre la plus célèbre est *l'Isoge in artem analyticam* (*l'Art analytique*), le terme d'analyse est à prendre ici au sens grec, par opposition à la synthèse. Plus encore que les résultats démontrés dans cet ouvrage, ce sont les notations employées qui en font l'originalité. L'innovation de Viète vient dans l'unification qu'il a réalisée de l'utilisation des nouveaux symboles de l'algèbre et de la tradition de la géométrie à utiliser les lettres pour désigner des quantités non spécifiées, ce que l'on appellerait aujourd'hui des indéterminées. Il désigne ainsi dans une équation, les coefficients indéterminés par des consonnes et les inconnues par des voyelles. Il utilise les notations Aq pour le carré de l'inconnue, Ac , pour son cube, Aqq , pour sa puissance quatrième etc... Il emploie par ailleurs, les signe + et - actuels (substituant la coutume germanique à celle latine des p et m), mais pas encore de signe d'égalité. Il ne semble pas également avoir encore compris l'intérêt d'égaliser à zéro les équations, un mérite que l'on doit encore une fois à Descartes.

Avec ces nouvelles notations fort maniables, Viète écrit de véritables expressions algébriques sur lesquelles il opère comme avec des quantités numériques. Pourtant il répugne encore à l'emploi des nombres négatifs. Il distigue trois étapes dans le processus algébrique : la *Zététique*, qui met en équation, la *Poristique*, qui concerne le maniement des expressions littérales et l'*Exégétique ou Rhétique*, qui revient au domaine initial (arithmétique ou géométrie) pour énoncer la solution définitive.

On peut donc dire que Viète fut le précurseur de ce qu'il appela lui-même la *logistica speciosa* par opposition à la *logistica numerosa* antérieure. Entre autres, Viète donna, le premier, les relations qui lient les coefficients (il a créé le mot) et les solutions d'une équation polynomiale.

Son œuvre eut une large influence. Au début du XVII^{ème} siècle, les mathématiciens adoptèrent et améliorèrent les notations qu'il avait inventées. Descartes donna le dernier coup de pinceau en instituant le symbolisme algébrique des équations, sous sa forme actuelle (en particulier par l'emploi des premières lettres de l'alphabet pour les coefficients et des dernières pour les inconnues). Les seules différences avec nos notations actuelles sont le signe égal qui sera vite remplacé par le signe moderne et la notation xx au lieu de x^2 , qui subsistera jusqu'au XVIII^{ème} siècle.

A l'aube du XVII^{ème} siècle, on peut donc dire que l'on a délimité le champ et les moyens d'action de l'algèbre. Sa dépendance vis-à-vis de la géométrie n'est guère plus qu'une habitude désuète. Descartes, en utilisant l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie, révolutionne ce point de vue. Pour lui, l'algèbre n'est pas une science, au sens où elle ne donne pas de connaissance sur le monde physique, mais il voit en elle, une possibilité de rendre les mathématiques mécaniques, et de permettre une économie d'efforts. Plaçant l'algèbre au même niveau que la logique comme une des composantes fondamentales de sa *Méthode*, il l'affranchit de la géométrie, même s'il persiste à ne pas en voir l'utilité au delà de son utilisation pour cette dernière ou l'arithmétique.

Les nouvelles découvertes en calcul infinitésimal, tout au long du XVII^{ème} siècle vont un peu eclipser l'intérêt pour l'algèbre pendant ce siècle. Elles vont aussi permettre de mieux délimiter les deux domaines d'étude donnant à l'algèbre sa réelle indépendance au sein de l'édifice mathématique, dont elle constitue depuis un des piliers centraux.

Les techniques de résolution de systèmes d'équations linéaires, n'ont finalement guère évoluées au cours de cette période ; si les calculs explicites se font au coup par coup, avec assez de succès, le problème reste toujours de pouvoir prévoir le nombre ou l'existence de solutions. Les systèmes indéterminés ne sont pas encore, non plus, un objet d'étude institué. Finalement si une résolution pratique se satisfait du savoir-faire empirique existant, il manque une étude systématique des systèmes linéaires, pour que la question soit vue dans son ensemble.

Or si nous avons décrit les grandes lignes de l'évolution de l'arithmétique vers l'algèbre, et une brève genèse des notations algébriques, c'est qu'il nous semble que ces deux évolutions représentent des passages obligés vers une étude plus théorique des systèmes d'équations linéaires, qui sera, à la fin du XVII^{ème} siècle et au cours du siècle suivant, le point de départ des premiers concepts d'algèbre linéaire.

La possibilité d'écrire formellement des équations avec plusieurs inconnues et des coefficients indéterminés représente une première étape qui permettra de considérer au moins implicitement une équation linéaire comme un objet algébrique, une forme linéaire (le mot apparaît dès le, XVIII^{ème} siècle) et donc de décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires en fonction des coefficients indéterminés des équations mais aussi des relations (de dépendance linéaire) entre les équations. Dans le chapitre qui suit, nous verrons entre autres choses, comment ces dernières évolutions se sont déroulées.

II- Les problèmes "linéaires" aux XVIIIème et XIXème siècles

Avant que l'algèbre linéaire n'apparaisse en tant que domaine à part entière et cohérent, entre la fin du XIXème et le début du XXème siècle, les mathématiciens ont soulevé et étudié de nombreux problèmes de type linéaire, qui relèveront ensuite de la nouvelle branche qui permettra de les unifier, voire de les simplifier, aussi bien que d'en résoudre de nouveaux.

La linéarité de ces problèmes était plus ou moins apparente aux mathématiciens de l'époque et si certains rapprochements furent faits, ils n'étaient en général que superficiels, si bien que la plupart de ces problèmes ont eu, malgré des similitudes qui aujourd'hui nous semblent évidentes, des évolutions indépendantes les unes des autres. Par ailleurs ces problèmes n'ont bien sûr pas tous eu le même poids dans la genèse des concepts d'algèbre linéaire, certains n'ayant que tardivement été intégrés dans la problématique linéaire n'ont même pas eu d'effet direct. Il est fort difficile d'apprécier a posteriori, la place que chacun des problèmes occupe du point de vue épistémologique ou stratégique dans cette lente maturation. Nous avons essayé, dans ce chapitre, de donner un panorama aussi détaillé et exhaustif que possible. D'une façon générale, nous avons seulement cité, sans entrer dans les détails, les problèmes qui nous ont semblé, bien que relevant a posteriori du domaine de l'algèbre linéaire, n'avoir que peu d'influence sur l'émergence d'un concept, nous avons par contre plus détaillé les situations qui nous ont paru être constitutive d'un enrichissement épistémologique par rapport à un concept aujourd'hui faisant parti de l'algèbre linéaire (comme l'étude théorique des systèmes d'équations linéaires ou le paradoxe de Cramer par exemple). Il est évident que cette tâche est subjective, et qu'il y a dans notre choix une délimitation fictive à opérer. Notre parti pris par rapport à l'épistémologie (cf introduction) ne peut que conduire à cet état de fait.

Nous avons écarté de ce chapitre les questions liées à la géométrie et à la représentation de l'espace, qui nous semblent occuper une place tellement à part et importante que nous leur avons consacré le chapitre III.

1- Les progrès dans la résolution des systèmes d'équations linéaires. La théorie des déterminants.

On a vu, dans le chapitre précédent, que depuis les Babyloniens, on savait résoudre des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Au XVII^{ème} siècle, les techniques pratiques de résolution, par élimination et substitution, sont largement utilisées pour résoudre des systèmes linéaires numériques, comportant le plus souvent autant d'équations que d'inconnues, et avec des équations indépendantes (c'est-à-dire le cas dit de Cramer où il y a unicité de la solution). Les autres cas sont regardés comme des curiosités ou des amusements dont on donne quelques solutions (dans le cas de l'indétermination) ou dont on se contente de dire qu'ils sont mal posés. La résolution de systèmes linéaires manquait donc encore d'une théorie générale, dont le premier pas devait être la résolution de systèmes à coefficients indéterminés.

Il semblerait qu'il ait fallu attendre le milieu du XVIII^{ème} siècle, pour voir ce premier pas franchi de façon décisive. Il a sûrement été motivé par l'apparition dans des problèmes de géométrie algébrique ou de mécanique de systèmes linéaires dont les coefficients sont fonctions de paramètres.

En fait, on trouve dans une lettre adressée par Leibniz, au Marquis De L'Hospital en 1693, un exposé sur une méthode pour trouver la condition d'élimination dans un système linéaire de $n+1$ équations à n inconnues ([SM2] p 267 ou [MU] T.1, V.1, pp 6-10). Cette lettre, ainsi qu'un article de Leibniz, certainement antérieur, sur le même sujet ne furent publiés pour la première fois que respectivement en 1850 et 1863, et n'eurent sans doute aucune influence sur les découvertes concernant la théorie des déterminants, qui en 1850 avait atteint sa pleine maturité.

Il est toutefois remarquable de voir que, plus de cinquante ans avant Cramer, Leibniz avait exposé clairement la première utilisation d'un déterminant.

Dans sa lettre à L'Hospital, il commence par vanter les mérites de l'utilisation d'une nouvelle notation, qu'il a mise au point, des coefficients d'un système linéaire par double numérotage. *Le nombre feint* (nom donné à sa notation qui a l'allure d'un nombre mais n'en est pas un) *étant de deux caractères, le premier (me) marque de quelle équation il est, le second (me) marque à quelle lettre il appartient*. En fait il note ij le coefficient que nous noterions aujourd'hui a_{ij} , (l'indice de variable $i=0$ repère les termes constants qu'il place en début d'équation). A voir le soin que Leibniz met à justifier les avantages de cette pratique et les allusions qu'il fait à la surprise de L'hospital, auquel il avait apparemment déjà exposé les grandes lignes de sa technique, on peut juger de l'innovation apportée ici.

Il développe ensuite la méthode d'élimination dans le cas de 3 équations à deux variables ($i=0,1,2$ et $j=1,2,3$), il insiste sur l'apport de sa nouvelle notation qui donne aux calculs *des harmonies qui non seulement (lui) servent de garantis, mais encore (lui) font entrevoir d'abord des règles ou des théorèmes*. De fait il écrit la condition d'élimination dans son cas particulier, qui n'est autre que l'annulation du déterminant du système, que Leibniz écrit, après avoir légèrement modifié ses notations :

$$1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 \quad 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1$$

$$1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 = 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2$$

$$1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 \quad 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0$$

(Avec ses notations antérieures cela donnerait :

$$10.21.32+11.22.30+12.20.31 = 10.22.31+11.20.32+12.21.30.)$$

Il en déduit ensuite, par simple induction sur la position des indices, un "théorème général, pour quelque nombre de lettres et d'équations simples qu'on puisse prendre". Il énonce sa règle en latin, nous en donnons ci-dessous une traduction.

Etant donné un nombre quelconque d'équations, qui soit suffisant pour éliminer des quantités inconnues qui n'excèdent pas le premier degré : pour l'équation finale, premièrement il faut prendre toutes les combinaisons possibles de coefficients, dans lesquelles il n'y a qu'un coefficient de chaque équation, deuxièmement une fois ces combinaisons placées du même côté de l'équation finale, elles ont des signes différents si elles ont autant de facteurs semblables qu'il est indiqué par le nombre qui est un de moins que le nombre de quantités inconnues ; les autres ont le même signe.

Un lecteur actuel peut être choqué par la façon pour le moins rapide que Leibniz a de généraliser, mais il faut savoir que cette pratique était habituelle au XVII^{ème}. Dans le cas présent, il semble que Cauchy ait été le premier à démontrer ces résultats avec toute rigueur pour un nombre quelconque de variables (vers 1812). Au moins dans cette démonstration, Leibniz s'appuie sur une notation qui semble justifier la généralisation. D'ailleurs l'auteur évalue lui-même la valeur de sa démonstration par la remarque suivante. *Une partie du secret de l'Analyse* (au sens de Platon et de Viète ou Descartes) *consiste dans la caractéristique, c'est-à-dire dans l'art de bien employer les notes (notations) dont on se sert, et vous voyez, Monsieur, par ce petit échantillon, que Viète et des Cartes n'en n'ont pas encore connu tous les mystères.*

L'algorithme de formation du déterminant, que propose Leibniz, prend dans son énoncé rhétorique, un aspect un peu ésotérique. Cet énoncé est d'ailleurs incomplet et ambigu : il oublie de préciser que dans les combinaisons de coefficients, il en faut non seulement qu'un seul par équation mais encore un seul par variable, de plus la règle des signes n'est pas très claire. Le fait qu'un déterminant ne se calcule que sur un tableau "carré" n'est pas non plus très clairement dégagé. A ce sujet, la formule *"le nombre suffisant d'équations pour éliminer les quantités inconnues"* donne un renseignement très laconique, qui montre qu'à l'époque on était peu familier avec les problèmes de dépendance linéaire.

Cependant on peut se demander pourquoi Leibniz n'a pas jugé bon de publier cette découverte, dont il semble pourtant entrevoir l'importance. Néanmoins il faudra attendre, 1748 avec Maclaurin et surtout 1750, avec Cramer, pour retrouver des résultats consistants sur la résolution générale des systèmes linéaires.

Dans son traité "Introduction à l'analyse des courbes algébriques", publié à Genève en 1750, ([MU] T.1, V.1, pp 11-14), Cramer démontre en effet que l'équation d'une courbe algébrique de degré n est déterminable quand on en connaît $n(n+3)/2$ points. Il étudie en détail le cas $n=2$. Il montre que cela revient à résoudre un système de 5 équations linéaires, obtenu en substituant les coordonnées des cinq points connus dans l'équation $A+By+Cx+Dyy+Exy+xx=0$, dont A, B, C, D et E sont les cinq inconnues. Il est ainsi amené à examiner le cas général de résolution d'un système linéaire 5×5 (non homogène).

On remarquera que le point de vue est différent de celui de Leibniz, puisque ici, on a un système "carré" et on cherche une expression générale des solutions et non une condition d'élimination.

Pour écrire les coefficients du système, Cramer utilise une lettre majuscule avec un indice placé en haut, qu'il appelle exposant en précisant qu'ils "ne marquent pas comme à l'ordinaire les puissances". Par exemple Z^2 désigne le coefficient de la variable z dans la deuxième équation. Les termes constants sont notés A^i et apparaissent de l'autre côté du signe égal par rapport au reste de l'équation.

Il énonce alors une "Règle générale" dont il dit qu'elle s'obtient à "l'examen de ces formules" (i.e. les équations du système). Cette règle dit que l'on trouve les solutions d'un système $n \times n$ en formant n fractions qui ont un même dénominateur. Cramer énonce ainsi la Règle qui lui permet de calculer ce dénominateur commun : *il a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque termes est composé des lettres ZYXV, &c., toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue comme exposants, les n premiers chiffres rangés en toutes les manières possibles.(...) On donne à ces termes le signe + ou - selon la Règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un dérangement. Qu'on compte pour chaque terme, le nombre de dérangements : s'il est pair ou nul, le terme aura le signe + ; s'il est impair, le terme aura le signe -.*

Suivent alors des exemples avec trois variables. Cette règle de formation du déterminant est plus explicite que celle de Leibniz, elle se rapproche de la version moderne. On y voit apparaître la notion de signature d'une permutation, qu'il définit par la parité du nombre de dérangements. Il y a un progrès sensible dans l'exhaustivité et la clarté de l'énoncé par rapport à la règle de Leibniz. Malgré l'aspect entièrement rhétorique, on est assez proche dans l'idée, d'un énoncé formalisé.

Par contre il n'y aucune démonstration et les résultats sont énoncés sans aucune justification, seuls les exemples et la pratique en valident le contenu.

Cramer termine sa règle en donnant le moyen de calculer les numérateurs : *"en remplaçant, dans le calcul du dénominateur, pour chaque variable, la lettre lui correspondant par un A"*.

Le problème de l'annulation du dénominateur n'est pas envisagé ce qui limite la portée théorique. En fait Cramer ne se place que dans l'optique d'une simplification pratique pour le calcul numérique explicite des coefficients de l'équation d'une courbe algébrique (son problème de départ) ; si bien que sa règle n'est qu'un algorithme de résolution donné à des fins calculatoires. Il n'empêche que cette démarche ouvre la voie aux résultats plus théoriques. En ce sens les points essentiels sont l'emploi astucieux de notations adaptées aux systèmes linéaires et l'intérêt porté à une résolution générale avec coefficients indéterminés.

La règle énoncée par Cramer eut dès sa publication, un grand succès tant auprès des mathématiciens que dans l'enseignement. Ceci fit dire au mathématicien français Gergonne que *cette méthode était tellement en faveur, que les examens aux écoles des services publics ne roulaient pour ainsi dire que sur elle ; on était admis ou rejeté suivant qu'on la possédait bien ou mal*. ([MU] T.1, V.1, p 14).

Avec Cramer, naît la théorie des déterminants, qui allait être en vogue pendant plusieurs décennies et vite dépasser le simple cadre de la résolution des systèmes linéaires. Les déterminants s'avèreront être l'un des outils les plus puissants pour l'algèbre linéaire en dimension finie et seront de fait le principal moteur à faire des théorèmes d'algèbre linéaire jusqu'au début du XX^{ème} siècle.

En ce sens une bonne partie de l'histoire des déterminants est indissociable de celle de l'algèbre linéaire. Pourtant si la théorie des déterminants a permis, une fois les fondements de l'algèbre linéaire posés, d'obtenir rapidement des résultats, elle n'a pourtant eu qu'un rôle assez modéré dans l'émergence même des concepts élémentaires d'algèbre linéaire.

L'un des points les plus décisifs de l'histoire des déterminants, dans cette fin de XVIII^{ème} siècle, est leur apparition au détour de nombreux problèmes dans des domaines assez variés (courbes algébriques, mécanique, mouvement des planètes, équations différentielles linéaires, calcul intégral, etc...). Ceci a permis de repérer, d'une façon concrète et visible, bien qu'encore superficielle et peu productive, le caractère linéaire de certains problèmes. En ce sens les déterminants ont annoncé, de façon souterraine, le caractère unificateur et simplificateur que l'on reconnaît aujourd'hui à l'algèbre linéaire en général.

En outre l'engouement que subirent les déterminants au XVIII^{ème} siècle, a fait que certains mathématiciens ont développé beaucoup d'adresse pour calculer des déterminants particuliers en dehors de toute application concrète, développant ainsi une branche un peu stérile des mathématiques où seule l'habileté technique est de mise. Nous n'allons donc pas donner ici, de récit détaillé ni exhaustif de l'évolution de la théorie des déterminants ([MU]), ce qui nous entraînerait dans trop de détails dont la plupart ne sont d'ailleurs guère significatifs par rapport à notre but. Nous allons simplement dans un premier temps, donner les grandes lignes de cette évolution, pour ce qui concerne uniquement la résolution des systèmes d'équations linéaires. Dans un deuxième temps, nous ferons allusion aux interventions des déterminants dans les problèmes linéaires que nous examinerons dans les paragraphes suivants.

Après Cramer et jusqu'en 1812, de nombreux mathématiciens essentiellement français, puis allemands (Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Hindenburg, Rothe, Gauss, Monge, Hirsch, Binet, Prasse, Wronski ...) s'attachèrent à améliorer l'énoncé de l'algorithme de formation d'un déterminant (le nom n'existe pas encore, Laplace en 1772 introduit le terme de résultante, qui sera remplacé après 1812 par le terme de déterminant introduit par Cauchy). Ils démontrent également les premiers résultats sur les déterminants en tant qu'objets d'étude indépendants. Cette période est un temps de première maturation, où les intérêts se dessinent, sans que les avancées soient très visibles.

Pour voir des progrès très significatifs, il faut attendre Cauchy qui en 1812 publie son "Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment". ([CA] T.I pp 91-169 ou [MU] T.1, V.1, pp 92-131).

Le point de vue de Cauchy est très différent de tous ceux qui l'ont précédé. Pour la première fois, on peut lire un exposé exhaustif et cohérent sur les déterminants, où l'auteur, en partant d'une définition précise, démontre de façon rigoureuse et souvent très élégante non seulement tous les résultats alors connus (mais pas forcément entièrement démontrés) mais aussi de substantiels prolongements. Le point de départ n'est nullement la résolution de systèmes linéaires, qui n'apparaît que comme une application a posteriori de la théorie.

Cauchy s'intéresse aux propriétés des *fonctions symétriques permanentes et alternées* de plusieurs variables, qu'il désignera lui-même, plus tard, par le vocabulaire actuel de fonctions symétriques et alternées. Il introduit la notion de fonction symétrique engendrée par une fonction K , notée $S(K)$ et que l'on forme en additionnant toutes les valeurs obtenues par

permutation des indices dans l'expression de K . Il faut en plus multiplier chaque terme par la signature de la permutation pour obtenir la fonction alternée, notée $S(\pm K)$. Il étudie ensuite les propriétés de ces fonctions.

Pour définir le déterminant il utilise alors un artifice fort astucieux. Il considère $S(\pm a_1 a_2^2 \dots a_n^n)$ dont il démontre qu'elle vaut $a_1 a_2 \dots a_n$ multiplié par le produit des $(a_i - a_j)$ pour $i > j$; il définit alors le déterminant comme la fonction obtenue en remplaçant les exposants par un deuxième indice. Cette modification purement formelle lui permet d'obtenir rapidement des théorèmes tels que l'annulation d'un déterminant ayant deux lignes égales (il utilise une représentation en tableau parfois bordé par une accolade, mais jamais la notation moderne avec les barres). Les résultats qu'il a établis lors de l'étude des fonctions symétriques, sont ainsi les piliers théoriques sur lesquels il s'appuie ensuite pour retrouver les résultats généraux sur les déterminants.

Il démontre les premières propriétés élémentaires, puis il définit le *système adjoint*, comme étant le système formé de ce que l'on appelle aujourd'hui les cofacteurs du système initial. Après avoir établi des relations entre cofacteurs et inconnues d'un système, il en déduit aisément les formules trouvées par Cramer qui donnent les valeurs des inconnues comme fraction dont le dénominateur commun est le déterminant du système ; pas plus que ses prédécesseurs Cauchy n'envisage le cas où ce déterminant s'annulerait.

Après quelques précisions sur les notations et l'étude du cas particulier du système que l'on nomme aujourd'hui, à tort, du nom de Vandermonde, il forme le système adjoint du système adjoint, qu'il appelle adjoint du deuxième ordre, et il montre que l'on retrouve ainsi le système initial à un coefficient multiplicatif près qui est un quotient de déterminant. On peut voir ici, la première démonstration du caractère involutif de la dualité.

Cauchy consacre une deuxième section, aux systèmes composés de deux autres systèmes. Le résultat central qu'il énonce ici, concerne le fait que le déterminant d'un tel système se trouve être le produit des déterminants des systèmes constituants. Cauchy dit avoir été inspiré dans ses recherches par les travaux de Gauss sur les formes quadratiques de deux et trois variables. Celui-ci, le premier avait écrit une transformation linéaire sur les variables (x, y, z) sous forme de tableau (ancêtre de la matrice) et remarqué que deux transformations linéaires successives donnaient encore une transformation linéaire dont il donna le tableau correspondant (cf § 2).

En même temps que Cauchy, mais indépendamment, Binet avait obtenu le résultat sur le produit de deux déterminants ; les deux amis, qui avaient pris connaissance de leurs résultats respectifs, firent d'ailleurs leur exposé devant l'Institut le même jour.

Cauchy énonce également une règle pour *dégager* un des systèmes composants, dans laquelle on reconnaît la formule d'inversion d'une matrice par transposition de la matrice adjointe et division par le déterminant.

Enfin dans une dernière section Cauchy innove entièrement, il examine des relations entre les différents mineurs d'un système et établit des résultats concernant les systèmes, qu'il qualifie de *dérivés*, obtenus à l'aide de ces mineurs. En particulier, il énonce des règles de formation du déterminant à l'aide des mineurs.

La contribution de Cauchy est essentielle sur le plan de l'élaboration de la théorie dans un tout cohérent. L'avancée dans des voies nouvelles est aussi fondamentale. Cauchy institutionnalise ainsi un nouveau cadre d'approche théorique dans lequel il englobe tous les résultats existants et qu'il prolonge dans des directions neuves. Il joue ainsi un rôle de législateur qui a porté à maturité une théorie naissante, traçant déjà le chemin de ses successeurs.

Pourtant par rapport au problème de la résolution des systèmes linéaires, la question de l'annulation du déterminant est encore évitée... Ce problème ne semble pas d'ailleurs avoir été soulevé avant le milieu du XIX^{ème} siècle. La théorie des déterminants a essentiellement évolué au début du XIX^{ème}, vers des applications nouvelles, des calculs de déterminants particuliers, et la consolidation des bases jetées par Cauchy.

La résolution de systèmes non carrés ou de déterminant nul, commence à être étudiée d'une façon systématique à partir de 1860 environ ([MU] T.2, V.3, pp 83-93).

En 1861, le mathématicien anglais H. J. S Smith énonce à l'aide des déterminants, les conditions pour qu'un système de quatre équations à deux inconnues admette une solution.

En 1862, L'italien N. Trudi montre que dans un système $n \times n$, si le déterminant est nul ainsi qu'un des déterminants obtenu en remplaçant les coefficients correspondant à une variable, par les termes constants (i.e le numérateur du quotient qui définit la variable dans un

système de Cramer), alors les $(n-1)$ déterminants ainsi formés pour chacune des autres variables sont nuls. Il montre également qu'alors une des équations se déduit des autres par combinaison linéaire.

Il montre par ailleurs que dans un système comprenant une équation de plus que de variables, si le déterminant obtenu en bordant par la colonne des termes constants est nul, alors toute équation du système est déductible des autres par combinaison linéaire, ce qui ramène à un système carré.

En 1864, R. Baltzer, en Allemagne, démontre que dans un système homogène $n \times n$, s'il existe un mineur d'ordre $k < n$ non nul et que tous les mineurs d'ordre supérieur sont nuls, le système admet des solutions autres que $(0, 0, \dots, 0)$, autrement dit le système est compatible. Il dit également d'une façon un peu vague que le système est alors indéterminé d'ordre $(n-k)$, mais l'idée de rang n'est pas encore bien dégagée.

Le mathématicien anglais C. L. Dodgson, plus connu sous le pseudonyme de Lewis Carroll, qu'il utilisa pour écrire *Alice in Wonderland*, est un des premiers à donner une étude exhaustive de la résolution des systèmes $n \times m$, dans son ouvrage *An elementary treatise on determinants*, publié à Londres en 1864. Voici dans l'ordre où il les donne, une traduction des principaux résultats qu'il y démontre :

a- Dans un système de n équations à $n+r$ inconnues, si un mineur primaire (i.e d'ordre n) n'est pas nul, le système est compatible (i.e a des solutions) ; de plus n'importe quelles valeurs arbitrairement données aux variables non connectées avec ce mineur donne une valeur unique pour les autres inconnues. (Il cite comme corollaire, que pour un système homogène de n équations à $n+1$ inconnues, dans un $(n+1)$ -uplet solution, le quotient x_i/x_j est toujours égal au quotient des mineurs primaires obtenus en éliminant la i ème (respectivement la j ème) colonne dans le tableau des coefficients.) (Prop. II)

b- Dans un système de n équations à $n-r$ inconnues, si le tableau augmenté (i.e le tableau des coefficients bordé par la colonne des termes constants) n'est pas évanescent (i.e un de ces mineurs primaire n'est pas nul), le système est incompatible. (Prop. III)

c- Dans un système de n équations à $n+r$ inconnues (r pouvant valoir 0), si le tableau non augmenté est évanescent, alors que le tableau augmenté ne l'est pas, le système est incompatible. (Prop. V)

d- Dans un système de n équations linéaires à $n-r$ inconnues, s'il y a $n-r$ équations dont le tableau non augmenté n'est pas évanescent, et si quand ces $n-r$ équations, sont bordées par successivement chacune des équations restantes, chaque ensemble de $n-r+1$ équations a un tableau augmenté évanescent, alors (1) le système est compatible, (2) il n'y a qu'une solution et (3) les équations restantes sont dépendantes des $n-r$ équations citées plus haut. (Prop. VIII)

e- Dans un système de n équations à $n+r$ inconnues, s'il y a $n-k$ équations dont le tableau non augmenté n'est pas évanescent et si quand ces $n-k$ équations sont bordées successivement par chacune des équations restantes, chaque ensemble ainsi formé de $n-k+1$ équations a son tableau augmenté évanescent, (1) les équations sont compatibles, (2) si on prend un des mineurs non nul du tableau augmenté de ces $n-k$ équations, les $k+r$ inconnues, dont les coefficients n'y sont pas contenus, peuvent se voir attribuer des valeurs arbitraires, chaque $(n-k)$ -uple de valeurs donnant une solution unique au système, et (3) les équations restantes dépendent des dites $(n-k)$ équations. (Prop. X, cor.)

Avec ces cinq cas, toutes les possibilités sont envisagées et entièrement résolues, au moins pour ce qui est de l'évanescence ou non des équations. La question de la dépendance des équations et de "la dimension" de l'ensemble des solutions est également entièrement dégagée, bien que la notion de rang du système n'apparaisse pas encore clairement.

Dodgson ajoute à la suite des théorèmes concernant plus spécifiquement les systèmes homogènes :

f- Dans un système homogène de n équations à $n-r$ inconnues, dont le tableau non augmenté est évanescent, il y a un $(n-r)$ -uple solution dont deux composantes au moins ne sont pas nulles, et $r+1$ des équations sont dépendantes du reste. Réciproquement s'il y a une solution non nulle, le tableau non augmenté est évanescent. (Prop. X, cor. xix)

Il y a dans cette proposition, en germe, l'expression d'une condition de dépendance linéaire de $(n-r)$ vecteurs d'un espace de dimension n . De plus la conclusion sur la dépendance des équations est un résultat fort intéressant. C'est sous une forme moins forte, le fait que dans un système les vecteurs lignes ont même rang que les vecteurs colonnes, ici on a seulement une majoration du rang. Ce résultat de dualité est un point clé de beaucoup de démonstrations d'algèbre linéaire en dimension finie, c'est pourquoi il est utile d'en remarquer les prémices

même sous une forme amputée. Il faudra bien sûr attendre que la notion de rang soit dégagée, avant que ce résultat ne puisse être énoncé clairement. Il énonce ensuite :

g- *Un système homogène de n équations à $n+r$ inconnues a toujours un $(n+r)$ -uple solution dont deux composantes au moins ne sont pas nulles. (Prop. XII)*

h- *Si un système homogène de n équations à $n+r$ inconnues a une solution non nulle, et si en effaçant les coefficients correspondants aux composantes non nulles de cette solution, le tableau obtenu est évanescent, alors le tableau entier est évanescent. (Prop. XV, cor.)*

g) est un résultat fondamental pour l'algèbre linéaire. Avec le langage des espaces vectoriels, il devient : $n+r$ vecteurs d'un espace de dimension n sont toujours liés, sous cette forme c'est en fait la clé du théorème de la dimension, qui dit que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.

Ensuite Dodgson énonce un critère général pour qu'un système linéaire non homogène soit compatible, qui revient à dire qu'il doit exister un mineur d'ordre m non nul, et que les équations correspondantes bordées tour à tour par chacune des équations restantes, ont un tableau augmenté évanescent.

Le traité de Dodgson passe donc en revue tous les cas de figure qui peuvent se présenter dans la résolution d'un système linéaire, qu'il soit homogène ou non, qu'il soit carré, redondant ou qu'il possède au contraire moins d'équations que d'inconnues. Il ne restera plus à ses successeurs, qu'à peaufiner la formulation et regrouper les cas en des propositions plus compactes.

Après une première tentative en 1875, le mathématicien français, E. Rouché publie en 1880 un article, *Notes sur les équations linéaires*, où il résume très clairement les différents cas de résolution d'un système d'équations linéaires ([RO] et [MU] T.2, V.3, pp91-92).

L'ambition de Rouché est de *montrer que l'on peut tout réduire à un seul théorème qui, par sa simplicité extrême et son entière généralité, mérite, ce me semble, d'attirer l'attention*. On peut dire qu'il a sûrement réussi, puisqu'on enseigne encore aujourd'hui son théorème, sous le nom de règle de Rouché.

Il commence par définir le *déterminant principal* d'un système, comme étant un quelconque des déterminants non nuls de plus grand ordre extraits du système. Ensuite il définit les *déterminants caractéristiques* comme étant tous les déterminants obtenus en bordant le déterminant principal à droite par les termes tout connus et en dessous par les coefficients de chacune des équations restantes. Il précise que pour le cas où l'ordre du déterminant principal est égal au nombre n d'équations, on conviendra que les déterminants caractéristiques sont nuls et d'ordre $n+1$. Il énonce alors son théorème général.

Pour que n équations linéaires à m inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que les déterminants caractéristiques du système soient tous nuls.

Dans cette hypothèse, le système a une solution unique ou est indéterminé suivant que l'ordre de ses déterminants caractéristiques surpasse ou non le nombre des inconnues.

Après avoir démontré fort élégamment ce théorème, en trouvant un système d'équations équivalentes définies par des déterminants, il précise le cas où tous les coefficients du système sont nuls, qu'il inclut dans son théorème en définissant alors les déterminants caractéristiques comme étant les termes tous connus.

Il donne ensuite le moyen de calculer les solutions et précise la nature de l'indétermination, en deux propositions, où n désigne le nombre d'équations, m celui des inconnues et p l'ordre du déterminant principal :

1- *Si $p=m$, ce qui suppose $n \geq m$ (...) le système a une solution unique qui est donnée par la règle suivante, qui est une généralisation de celle de Cramer.*

Le dénominateur commun des inconnues est le déterminant principal du système, et chaque numérateur s'obtient en remplaçant, dans ce déterminant principal, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée par les termes tout connus correspondants.

2- *Si $p < m$, le système est indéterminé. Les inconnues dont les indices sont ceux des verticales qui concourent à la formation du déterminant principal s'expriment en fonction des autres inconnues, qui restent arbitraires, sous la forme de fractions ayant pour dénominateur le déterminant principal ; chaque numérateur est le déterminant déduit du déterminant principal en y remplaçant par les expressions $k_1 - a_1^{p+1} x_{p+1} - \dots - a_1^m x_m, \dots, k_p - a_p^{p+1} x_{p+1} - \dots - a_p^m x_m$, les éléments de la verticale de même indice que l'inconnue considérée (...) on dit que l'indétermination est d'ordre $m-p$.*

Avec cet ouvrage on peut dire que la théorie de résolution des systèmes linéaires est quasiment achevée. Il ne restera plus dans ce domaine qu'à dégager les notions de rang du système et de dimension de l'ensemble des solutions, qui seront les fondations de la notion d'espace vectoriel de dimension finie.

Ce rôle a été rempli, en grande partie, par les travaux de F. G. Frobenius.

Dans son article "*Ueber das Pfaffsche problem*" publié en 1875 ([FR] T.1 pp 255-261), il introduit la notion d'indépendance linéaire des solutions qu'il désigne indifféremment, malgré l'ambiguïté, par les deux mots *unabhängig* (indépendant) et *verschieden* (distinct). Le premier terme était déjà employé pour l'indépendance linéaire des équations.

La définition qu'il donne est la suivante : "*des solutions $A_1(x), \dots, A_n(x)$, ($x=1, \dots, k$) sont dites indépendantes ou distinctes, si $c_1 A_a^{(1)} + \dots + c_k A_a^{(k)}$ ne peut pas s'annuler pour $a=1, \dots, n$, sans que $c_1, \dots, c_k$ ne soient tous nuls, en d'autres termes quand les k formes linéaires $A_1(x) u_1 + \dots + A_k(x) u_k$ sont indépendantes.*"

Cette définition est une innovation, elle allie l'idée de dépendance linéaire depuis longtemps utilisée pour les formes linéaires (ou les équations ce qui revient au même) à l'utilisation des "vecteurs de dimension n " repérés par leurs coordonnées, comme les avait introduits Cayley, une trentaine d'années auparavant.

Frobenius, qui semble être très au courant de tous les résultats sur la théorie des déterminants utilise, dans la suite de ses démonstrations, des résultats tels que le calcul d'un déterminant en fonction de certains de ses mineurs comme l'avait montré Cauchy ou des résultats plus récents mis au point par Kronecker ou Weierstrass.

Il démontre tout d'abord assez facilement, qu'un système homogène de m équations indépendantes à n inconnues ($n > m$) admet $(n-m)$ solutions indépendantes et que c'est le maximum de solutions indépendantes qu'un tel système puisse admettre, c'est-à-dire que $n-m+1$ solutions sont toujours dépendantes. Il dit ensuite que la solution générale de l'équation est une combinaison linéaire quelconque de ces $(n-m)$ solutions indépendantes.

Sa démonstration reste très formelle, elle repose sur l'existence de $(n-m)$ n -uplets qui peuvent compléter les lignes du tableau des coefficients du système, de façon à obtenir un déterminant $n \times n$ qui ne s'annule pas. Les cofacteurs de chacune des lignes ainsi rajoutées forment $(n-m)$ solutions indépendantes. Frobenius utilise ici le fait que si les mineurs principaux des $n-m$ solutions ne sont pas tous nuls, alors ces solutions sont indépendantes. Au passage, il montre que les mineurs principaux de $(n-m)$ quelconques solutions indépendantes se "comportent de la même façon" (i.e. s'annulent en même temps) que les mineurs principaux correspondants du tableau des coefficients des équations linéaires.

Il considère ensuite un système de m équations homogènes à n ($n > m$) inconnues qui possède $n-m$ solutions indépendantes pour tout k . Il démontre alors que l'on peut trouver une solution dont les k premiers coefficients sont nuls, les autres étant les solutions du système tronqué des k premières colonnes, ssi $k \leq (n-m)$ ou si tous les mineurs d'ordre $(n-k)$ du système des $(n-k)$ dernières colonnes sont nuls.

Frobenius s'intéresse ensuite pour un instant à des résultats plus généraux. Il montre que *dans un système homogène quelconque, dont tous les mineurs d'ordre $(m+1)$ s'annulent, les mineurs d'ordre m construits sur m lignes quelconques, se comportent de la même façon que les mineurs correspondants construits sur m autres lignes.*

De quoi il déduit que si dans un système homogène, dont tous les mineurs d'ordre $m+1$ sont nuls, on peut trouver m lignes et m colonnes qui n'ont pas tous leurs mineurs principaux nuls, alors l'intersection de ces m lignes et de ces m colonnes forme un mineur d'ordre m non nul.

Le reste de son article, autour du problème de Pfaff, concerne des résultats moins généraux, à propos des déterminants symétriques et alternés entre autres.

Avec ces résultats, Frobenius défriche le terrain, pour la notion de rang, à laquelle, sans la dégager complètement il vient de donner tout son sens ou plutôt tous ces sens. Les idées en germe chez Dodgson ou Rouché sont ici développées en tant que telles. Le problème initial sur les conditions de résolubilité et le calcul des solutions est remplacé par celui d'une description en termes d'invariant, des caractéristiques de l'ensemble des solutions. Le fait que Frobenius ne travaille qu'avec des systèmes homogènes peut laisser penser, en outre, qu'il avait saisi l'importance de la structure vectorielle qui sous-tend la structure affine des solutions d'un système avec second membre.

En 1879 dans son article *Ueber homogene totale Differentialgleichungen* ([FR], T.1, p 435), Frobenius introduit pour la première fois le terme de rang ainsi : "*quand dans un déterminant tous les mineurs d'ordre $m+1$ s'annulent, mais qu'un des mineurs d'ordre m ne s'annule pas, j'appelle m le rang du déterminant.*"

La définition est encore incomplète, puisqu'elle ne concerne que les déterminants donc des systèmes carrés. Mais la même année cette fois à propos des formes linéaires, dans son article *Theorie der linearen Formen mit Ganzen Coefficienten* ([FR], T.1, pp 504-516), il définit le rang d'un nombre quelconque de formes linéaires, en un nombre quelconque d'inconnues.

Enfin en 1905, dans son article intitulé *Zur theorie der linearen gleichungen* ([FR] T.III pp. 349-354), Frobenius reprend la plupart de son article de 1875. Il a maintenant à sa disposition les notions de rang et de matrice, ce qui facilite sa tâche et rend son exposé très clair, il donne entre autres, un critère de résolubilité d'un système non homogène. Pour ce faire il montre que le rang de la matrice comprenant les coefficients du système et la colonne des seconds membres est au plus un de plus que celui de la matrice des seuls coefficients ; le critère de résolubilité est alors que ces deux rangs soient identiques.

On peut dire qu'ainsi s'achève la longue histoire de la résolution des équations linéaires numériques. On a pu mesurer le déséquilibre qui existe, dans l'évolution, entre les deux périodes avant et après le XVIIIème siècle.

En fait il y a eu un glissement progressif dans la problématique après le virage amorcé par Leibniz et Cramer. Les résultats sont devenus de plus en plus abstraits et finalement de peu d'intérêt pour les calculateurs, qui étaient depuis longtemps satisfaits. Les systèmes d'équations numériques linéaires ne sont qu'un prétexte (central) à un domaine d'étude beaucoup plus vaste, qui jusqu'au XXème siècle restera éclaté. Nous allons maintenant en étudier quelques autres aspects.

2 - Panorama des autres problèmes linéaires

a- Le paradoxe de Cramer : un des premiers problèmes d'indépendance linéaire.

Au XVIIème siècle, les progrès sur les courbes algébriques, rendus possibles par les débuts de la géométrie analytique (cf Chap. III), sont tels que les deux résultats suivants sont communément admis :

- Deux courbes algébriques planes de degrés respectifs m et n se coupent généralement en mn points.

- $n(n+3)/2$ points déterminent une seule courbe algébrique de degré n .

Avec la correspondance que permet la géométrie analytique entre courbes algébriques planes d'ordre n et polynômes de degré n en deux variables réelles, les deux problèmes se ramènent aisément à des questions de résolution de systèmes d'équations linéaires.

En utilisant les techniques d'élimination alors connues, MacLaurin est l'un des premiers en 1720 à conjecturer le premier résultat, sans en trouver de démonstration. Euler se penche également sur la question, il entrevoit la nécessité d'introduire des points imaginaires et des points à l'infini, mais ne peut dépasser l'explicitation de cas particuliers. Bezout, qui a donné son nom au théorème, démontre le résultat d'une façon non entièrement satisfaisante du point de vue de la rigueur et seulement dans le cas où les deux courbes n'ont pas de directions asymptotiques communes. Il faudra en fait attendre les travaux de Plücker pour avoir une démonstration complète de ce résultat vers 1830.

Cependant ce résultat est, dès le milieu du XVIIIème siècle, admis bien qu'indémontré. Citons sur ce point Euler ([EU], T.XXVI, p37) : "*(...) Cette proposition, bien qu'on en trouve nulle part, à ce que je sache, une démonstration assez rigoureuse, est pourtant très certaine, comme je le montrerai ci-après ; et les conséquences, qui en ont été tirées, sont si claires qu'il ne reste pas le moindre doute de ce côté-là.*"

Cette attitude assez choquante de nos jours était tout à fait admise, encore jusqu'à une époque récente. La validité des conséquences que l'on peut tirer d'une proposition suffit à en assurer le bien fondé.

La deuxième proposition est un problème de dénombrement, une équation polynomiale de degré n en deux variables comporte $(n+1)(n+2)/2$ coefficients, qui déterminent à un facteur multiplicatif près une seule équation, il faut donc $n(n+3)/2$ relations, donc points, pour déterminer une courbe algébrique plane de degré n .

Le paradoxe auquel Cramer a laissé son nom apparaît dès que $n \geq 3$. En effet on a alors $n^2 \geq n(n+3)/2$, si bien que deux courbes algébriques de même ordre semblent avoir en commun plus de points (n^2) qu'il n'en suffit pour déterminer entièrement une seule ! On sait bien sûr que le problème vient de ce que n^2 points ne suffisent à déterminer une seule courbe d'ordre n , que lorsqu'ils conduisent à des équations indépendantes, ce qui n'est pas le cas si on prend des points communs à deux courbes... Ce fait aujourd'hui élémentaire, ne semblait donc pas clairement analysé avant Euler.

MacLaurin est l'un des premiers à relever ce paradoxe en 1720. Cramer en parle également dans son traité de 1750, *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*, celui-là même dans lequel il a introduit les déterminants. Cramer semble avoir soumis le problème à L. Euler, qui y consacra, la même année, un article intitulé *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* ([EU], T.XXVI, pp 33-45).

Dans cet article, Euler commence par énoncer les deux théorèmes cités plus haut. Il en développe ensuite les conséquences respectives, qui lui permettent de bien mettre en lumière le paradoxe, qu'il prend soin d'explicitier pour $n=3, 4$ et 5 , avant de dire que la même contradiction apparaît pour tous les ordres plus élevés.

Il réexamine alors les deux propositions et leurs conséquences et en déduit que le parallogisme ne peut découler que de la deuxième proposition, c'est-à-dire du fait qu'une courbe plane algébrique d'ordre n est définie par $n(n+3)/2$ points. Il explicite la faille en ces termes :

"(...) en réfléchissant bien sur l'état de cette proposition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $(nn+3n)/2$ points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la courbe d'ordre n , qui peut être tirée par ces points, ou ce qui revient au même, que $(nn+3n)/2$ équations ne suffisent pas à déterminer autant de coefficients (...)"

Pour illustrer cette remarque, il commence par le cas d'une droite, dont il remarque qu'elle ne peut être définie par deux points que s'ils ne sont pas confondus, ce qui revient à dire que deux équations linéaires en deux variables ne déterminent une solution unique qu'à condition que ces deux équations soient différentes entre elles, ou que l'une ne soit pas déjà comprise dans l'autre. C'est une façon rhétorique bien lourde d'exprimer que deux équations sont proportionnelles.

Il est d'ailleurs amusant de remarquer qu'Euler brouille les cartes en donnant comme exemple les équations : $3x-2y=5$ et $4y=6x-10$, comme s'il cherchait à rendre la proportionnalité moins apparante.

Il examine ensuite le cas de trois équations, et montre qu'outre le cas précédent où une équation est comprise dans une autre, il se peut qu'une équation soit comprise dans les deux autres, et il donne un exemple. On voit ici la notion de dépendance linéaire se forger au coup par coup, le passage de deux à trois équations est dans ce sens fondamental. Les systèmes de plus de trois équations n'apporteront pas ensuite de changements substantiels. De fait Euler examine encore le cas de quatre équations, puis il énonce la règle générale suivante : "*Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues, il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il faut y ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entre elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres.*"

Avec cette proposition un peu laconique, le concept de dépendance linéaire est encore imparfaitement dégagé, puisque d'une part la formulation en est purement rhétorique et que d'autre part Euler continue de distinguer le cas où deux équations sont semblables, cas qui n'a pourtant rien de spécifique, au delà des apparences et entre entièrement dans la formulation générale qui suit. C'est néanmoins pour l'époque un progrès décisif que d'avoir dégagé, par rapport à une problématique, le concept d'équations dépendantes en montrant que les conditions qu'elles déterminent sur les inconnues sont alors moins nombreuses qu'il n'y paraît.

De fait la notion de dépendance linéaire d'équations ou de formes linéaires est un concept qui s'affirmera, à la suite d'Euler, et sera très couramment employé (cf § précédent). Si bien qu'on peut dire qu'à partir de la fin du XVIIIème siècle, c'est un point acquis, qui permettra de nombreux progrès.

Dans ce même article, Euler n'est pas très loin de dégager également la notion de rang. Revenant à son problème initial, il examine les divers cas de dépendance en fonction des positions relatives des points choisis. Il montre tout d'abord que cinq points ne suffisent pas à déterminer une unique conique si et seulement si quatre de ces points sont alignés, et qu'alors toutes les coniques qu'ils définissent sont dégénérées. Pour les courbes d'ordre 3, il montre qu'il y a des cas d'indétermination pour des courbes non dégénérées, mais il ne fait pas une étude systématique.

L'examen de l'ordre 4, qu'il généralise ensuite aux ordres supérieurs, est plus intéressant. Euler dit : *"Quand deux courbes du quatrième ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entre elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre, ces 16 points seront toujours tels que trois ou plusieurs des équations qui en résultent sont déjà comprises dans les autres. de sorte que ces 16 points ne déterminent (rien de) plus que s'il y en avait que 13 ou 12 ou encore moins, et partant pour déterminer la courbe entièrement on pourra encore à ces 16 points, ajouter un ou deux points."*

Tout ceci est très empirique. Entre autres le cas où les un ou deux points rajoutés pour déterminer la courbe n'apporteraient que des équations dépendantes des autres ne semble pas avoir été envisagé. Mais on voit bien l'idée de rang se dessiner dans cette façon de compter le nombre de relations de dépendance linéaire en fonction du nombre de points utiles pour déterminer la courbe. En langage moderne on dirait qu'un système d'équations déterminées par 16 points communs à deux courbes d'ordre trois est toujours au plus de rang 13, donc qu'il existe au moins trois relations de liaisons indépendantes et qu'il faut un système de rang 14 pour déterminer entièrement une et une seule courbe algébrique plane d'ordre 4.

On a vu au paragraphe précédent que la notion de rang en germe dans beaucoup de traités sur les équations linéaires a mis longtemps avant de surgir de façon claire. Il faut dire que c'est une notion délicate et complexe, c'est aussi un des points les plus fondamentaux de l'algèbre linéaire de dimension finie.

Avec cet exemple, qui est l'un des premiers où des concepts d'algèbre linéaire apparaissent (de façon implicite) aussi clairement, on voit le chemin qu'il restait encore à parcourir et la simplification que pourra apporter la théorie linéaire dans des questions de cet ordre.

b- Autour de la notion de combinaison linéaire

En fait avant même les combinaisons linéaires d'équations, Euler avait été amené à considérer des combinaisons linéaires de solutions d'une équation différentielle linéaire. Pourtant comme d'Alembert ou Lagrange, qui l'ont suivi dans cette voie, s'il montre qu'on obtient une solution en faisant n'importe quelle combinaison linéaire, il ne se soucie pas de l'indépendance linéaire des solutions. En particulier, ces auteurs ne peuvent arriver à l'idée de base de solutions.

Le premier à avoir défriché le terrain dans ce domaine semble être Cauchy ([AHM] V.1, p 60). Il ramène la condition de dépendance des solutions à la condition de résolubilité d'un système exprimant qu'une solution et ses $(n-1)$ dérivées successives prennent des valeurs déterminées. Wronski introduira en 1815, le déterminant, qui depuis porte son nom, et qui est celui du système proposé. La condition de résolubilité revient ainsi à la non-annulation de ce déterminant.

La parenté entre les systèmes d'équations linéaires numériques et différentielles a pu être remarqué par de nombreux mathématiciens tant il est vrai que les deux domaines furent très en vogue pendant les XVIIIème et XIXème siècles. Les rapprochements resteront cependant limités dans l'emploi pour les deux domaines de déterminants. Ceux-ci jouèrent le rôle d'interface dans une dialectique qui a permis de faire progresser les deux théories en parallèle sans qu'il n'y ait réellement de communications directes.

La notion de combinaison linéaire à coefficients entiers semble être également apparue assez tôt dans des domaines distincts tels que les périodes de fonctions elliptiques ou abéliennes (Gauss, Abel, Jacobi), les nombres alébriques (Dirichlet, Gauss, Jacobi) et les formes quadratiques (Gauss). Gauss, dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* éditées en 1802, s'intéresse à de nombreux problèmes liés à ce que l'on appelle aujourd'hui la structure de $\mathbb{Z}$ -module. Cette notion ne sera cependant pas dégagée avant les travaux de Dirichlet sur les anneaux à la fin du XIXème siècle. Gauss, s'il n'essaie pas de regrouper ses résultats en une théorie générale, semble cependant conscient de certaines similitudes. Par exemple à la suite de la démonstration d'un résultat sur l'ordre des classes de formes quadratiques binaires, il ajoute : *"On remarquera sur le champ l'analogie de la démonstration du théorème précédent, avec les démonstrations des $n \approx 45$ et 49 (théorème de Fermat) ; et effectivement, la théorie de la multiplication des classes a une grande affinité avec la sujet de la section III."* ([GA2] p377 ou [GA1] T.I, p 371).

Cette remarque s'arrête cependant là, et les deux théories resteront disjointes pendant encore plusieurs décennies.

On a vu au paragraphe précédent, comment Frobenius a introduit et utilisé en 1875, l'indépendance linéaire de n-uplets dans un langage tout à fait moderne.

c- Les transformations linéaires, et la théorie des matrices

Des transformations linéaires de figures géométriques ou de courbes apparaissent très tôt, comme l'inversion chez Viète ou Fermat ou l'"affinité" d'Euler ([EU], *De similitudine et affinate linearum curvarum*, T.IX, pp.240-250). Mais la seule transformation linéaire connue et appliquée à tout l'espace restera pendant longtemps la projection. Par ailleurs les changements de coordonnées cartésiennes ou substitutions linéaires, selon le vocabulaire de l'époque, conduisent également à des problèmes très voisins de ceux liés aux transformations linéaires.

Dans son mémoire *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*, de 1770, L. Euler présente une étude très riche sur les changements d'axes orthogonaux ([EU] T.VI, pp 287-315). Ses découvertes apparaissent a posteriori, comme les premiers résultats significatifs sur les transformations orthogonales.

Il commence par remarquer que dans un tableau 3x3, si on a les six relations, qui en langage moderne reviennent à dire que les trois vecteurs colonnes sont orthonormés, alors on a les mêmes relations sur les lignes. Ce qui se traduit aujourd'hui en disant que la transposée d'une matrice orthogonale est encore une matrice orthogonale. Ensuite il déduit de ces douze relations, neuf nouvelles relations qui expriment, toujours en langage moderne, que chaque terme est l'opposé de son cofacteur. En fait Euler commet ici une négligence puisque ceci n'est vrai que dans le cas d'une isométrie négative, pour une isométrie positive chaque terme de la matrice est égal à son cofacteur. Ce résultat revient encore à dire, puisque le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1 que la matrice inverse d'une matrice orthogonale est égale à sa transposée.

Il applique alors ces résultats à l'étude des transformations linéaires $X = Ax + By + Cz$, $Y = Dx + Ey + Fz$, $Z = Gx + Hy + Iz$ telles que $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Il montre que cette condition est équivalente à six équations sur A, B, C, D, E, F, G, H et I, qui sont celles qu'il vient d'étudier. Puis il cherche à déterminer les neuf coefficients en fonction de paramètres. Il semble qu'il ait déjà en tête l'idée intuitive, qui lui servira à généraliser son étude à plusieurs variables, qu'il suffit de trois paramètres pour déterminer les neufs coefficients puisque ceux-ci sont définis par six conditions "indépendantes".

Il commence par étudier le cas de deux coordonnées, une substitution orthogonale dépend dans ce cas de 4 coefficients liés par trois relations. Il détermine alors les coefficients de la façon depuis devenue classique, c'est-à-dire en introduisant deux angles, dont chaque coefficient est un sinus ou un cosinus d'après les relations $A^2 + B^2 = 1$ et $C^2 + D^2 = 1$. Mais quand il arrive à la condition $AB + CD = 0$ qui équivaut à dire que le cosinus de la différence des angles est nul, il en déduit que cette différence est de 90° , et oublie le cas symétrique, où elle pourrait être de 270° , si bien qu'il ne prend en compte que le changement de repère avec inversion de l'orientation ou en terme de transformations, il ne considère que les symétries. Cette erreur qui revient à négliger l'orientation est cependant cohérente avec la première erreur commise par Euler et signalée plus haut. De fait elle se retrouve tout au long du traité.

Il montre ensuite qu'un changement d'axes orthogonaux, en dimension trois, peut s'écrire comme la composée de trois changements ne portant chacun que sur deux axes. Dans sa démonstration il introduit trois angles, ceux justement que nous appelons encore aujourd'hui les angles d'Euler. Il existe cependant une différence avec la pratique actuelle puisqu'en fait, à cause de son erreur initiale, Euler utilise des symétries-rotations et non les rotations, que l'on a pris l'habitude d'employer depuis.

Euler ne s'arrête pas là, il démontre un résultat analogue pour quatre puis cinq coordonnées, et même généralise à un nombre n quelconque de coordonnées. Cette étude au delà de trois coordonnées est un fait assez surprenant car il n'y a, semble-t-il, nulle part ailleurs dans l'œuvre d'Euler trace d'une idée de géométrie à n dimensions. Idée qui de plus n'était pas encore dans les courants de l'époque.

Le résultat qu'il énonce, et qui est du reste incomplet, à cause de la non prise en compte de l'orientation, revient à dire en termes modernes qu'un changement d'axes orthogonaux en dimension n peut se décomposer en le produit de $n(n-1)/2$ isométries négatives ne modifiant chacune, que deux axes à la fois. Son argumentation repose sur l'idée empirique que comme les n^2 inconnues définissant un changement d'axes dépendent des $n(n+1)/2$ conditions exprimant que les nouveaux axes sont orthonormés, elles peuvent être définies par $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$ paramètres. Mais il n'est jamais fait mention de la dépendance éventuelle des relations, qui ne sont d'ailleurs pas linéaires.

Il n'en reste pas moins, que malgré ces imperfections, ce mémoire est remarquable pour l'époque et restera pendant longtemps le seul travail valable sur le sujet.

Pour voir un progrès sensible, il faudra attendre 1846, que A. Cayley, puis C. Hermite, redémontrèrent ces résultats à l'aide des techniques plus sophistiquées de la théorie des déterminants

Dans d'autres travaux de géométrie, Euler a démontré des résultats partiels sur les isométries affines du plan et de l'espace, mais il n'en a jamais donné de classification complète.

La primeur de cette tâche semble revenir à Chasles, dans un article de 1830.

A la fin du XVIIIème siècle et dans la première moitié du XIXème, c'est essentiellement dans des travaux sur les formes quadratiques, qu'apparaissent les substitutions linéaires.

D'abord avec Lagrange pour deux variables. Dans son mémoire *Recherches d'arithmétiques* de 1773 ([LA], T.III, pp. 695-795), celui-ci s'intéresse aux nombres qui peuvent être représentés par une forme quadratique de deux variables à coefficients entiers. Il est ainsi amené à examiner les transformations de formes quadratiques par substitutions des variables en d'autres. Plus précisément il recherche les substitutions qui laissent invariantes certaines propriétés de la forme initiale. De fait sa première remarque, qu'il énonce comme une évidence, est que la substitution doit être linéaire pour que la transformée soit encore une forme quadratique, ce qu'il exprime ainsi : " *Comme la transformée doit être analogue à la proposée, il est visible qu'on ne saurait employer d'autres substitutions que celles-ci : $y=Ms+Nx$, $z=ms+nx$, s et x étant deux nouvelles indéterminées et M, N, m, n des nombres arbitraires.*" Il remarque ensuite que le discriminant, auquel il ne juge pas nécessaire de donner de nom, de la forme quadratique ainsi obtenue est le produit du discriminant de la forme initiale par $(Mn-Nm)^2$, c'est-à-dire, pour nous, le carré du déterminant de la substitution, mais il ne dégage pas cette dernière notion.

Quelques vingt-cinq ans plus tard, dans ses *disquisitiones arithmeticae*, Gauss enrichit largement les travaux de Lagrange et les élargit au cas des *formes ternaires*, c'est-à-dire avec trois variables ([GA2] ou [GA1] T.I). Il introduit une écriture "matricielle" des formes quadratiques, mais qui n'est pas la notation par matrice symétrique actuelle. Il note en effet :

$$\text{et} \quad ax^2+2bxy+cy^2 \text{ par } (a,b,c) \\ ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'xx''+2b''xx' \text{ par } \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{pmatrix}$$

Il définit néanmoins, mais sans explication, ce qu'il appelle le *déterminant* d'une forme ternaire. C'est le discriminant moderne, c'est-à-dire le déterminant de la matrice symétrique, mais la présentation de Gauss ne le laisse nullement transparaître. Rappelons, pour éclaircir cet imbroglio de noms, que le terme de déterminant, dans son sens actuel ne sera employé qu'après le mémoire de Cauchy de 1812, alors que le terme de discriminant ne sera introduit, par Sylvester, pour les formes quadratiques, qu'une trentaine d'année plus tard.

Comme Lagrange, Gauss utilise des transformations linéaires dans une grande partie de ses travaux. Ainsi pour noter la substitution linéaire qui fait passer de x, x', x'' , à $y=\alpha x+\beta x'+\gamma x''$, $y'=\alpha'x+\beta'x'+\gamma'x''$, $y''=\alpha''x+\beta''x'+\gamma''x''$, il utilise l'écriture suivante :

$$\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma' ; \alpha'', \beta'', \gamma'' \quad (S)$$

Cette notation est très proche de celle de la matrice de passage, comme on l'utilise de nos jours. Surtout Gauss lui donne de l'opérationnalité. En effet il démontre un résultat qui revient à dire que la composée de deux substitutions linéaires est encore une substitution linéaire de la façon suivante :

" *Si la forme ternaire f renferme la forme ternaire f' et celle-ci la forme f'' , la forme f renfermera aussi la forme f'' . Car on voit facilement que si f se change en f' par la substitution*

$$\alpha, \beta, \gamma ; \alpha', \beta', \gamma' ; \alpha'', \beta'', \gamma''$$

et f' en f'' par la substitution

$$\delta, \epsilon, \xi ; \delta', \epsilon', \xi' ; \delta'', \epsilon'', \xi''$$

f se changera en f'' par la transformation

$$\alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', \quad \alpha\epsilon + \beta\epsilon' + \gamma\epsilon'', \quad \alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'' ;$$

$$\alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', \quad \alpha'\epsilon + \beta'\epsilon' + \gamma'\epsilon'', \quad \alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'' ;$$

$$\alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', \quad \alpha''\epsilon + \beta''\epsilon' + \gamma''\epsilon'', \quad \alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi'' ."$$

(On aura compris qu'une forme en renferme une autre si on peut déduire la seconde de la première par une substitution linéaire.)

Cette fois la substitution est écrite en tableau, comme une matrice, mais cela n'a l'air de tenir apparemment qu'à des raisons typographiques. On reconnaît en tout cas, le produit des deux matrices de passages, qui apparaît ici pour la première fois.

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe précédent, et comme il le dit lui-même, Cauchy, dans son mémoire sur les déterminants ([CA], T.I, pp 91-92), cite cette notation de Gauss en disant qu'elle lui aurait inspiré sa formule sur le produit de deux déterminants. Il semble bien également que Cauchy ait utilisé la suite du traité de Gauss. En effet ce dernier introduit la notion de "forme quadratique adjointe", c'est-à-dire en termes modernes, dont les coefficients sont les cofacteurs de la matrice symétrique, et il montre, que quand on passe d'une forme f à une autre f' par une substitution S , on passe de la forme adjointe de f à la forme adjointe de f' par une substitution dont les coefficients sont les cofacteurs de ceux de S .

Il semble néanmoins que ces débuts des notations matricielles aient mis un temps assez long avant de se dégager. Il faut dire qu'avec la naissance de la théorie des déterminants, un amalgame entre les deux notions persistera pendant encore quelques décennies, avant que le concept de matrice ne se dégage vraiment.

Dans son mémoire, *Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, Welche der kreistheilung ihre Entstehung verdanken*, sur les formes cubiques ternaires à coefficients entiers, publiés en 1844-1845, G. Eisenstein reprend les notations de Gauss et les rend encore plus opérationnelles ([EI] T.1, pp 178-244). Il représente une substitution linéaire par ce qu'il appelle *un système* et qu'il note :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix} = (S)$$

Un pas de plus est donc franchi vers la notation matricielle actuelle, dont cette forme d'écriture est quasi-identique. L'auteur définit explicitement le déterminant d'un système ou d'une substitution, et comme pour Lagrange et Gauss, son point de départ est centré sur l'intérêt pour l'arithmétique des substitutions de déterminant 1.

Comme Gauss, Eisenstein utilise l'expression d'une substitution composée de deux autres, c'est-à-dire le produit matriciel. Il remarque d'ailleurs que ce produit n'est pas commutatif. Il utilise également le *système inverse* d'un système de déterminant 1, dont il montre qu'il a encore des coefficients entiers et un déterminant égal à 1. Il utilise la notation $1/S$ pour désigner cette nouvelle substitution.

Un des points les plus innovateurs de ce traité vient de l'utilisation systématique d'écritures algébriques portant sur les substitutions et leur multiplication. Par exemple on trouve ([EI], p 207) :

$$S \times \left(\frac{1}{S} \times S' \right) = S \times \frac{1}{S} \times S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times S' = S'$$

Un peu plus loin, il veut résoudre l'équation $S \times X = S'$, et après avoir fait remarquer que : $1/S \times S \times X = X$, il dit qu'on trouve $X = 1/S \times S'$.

Une telle liberté dans l'utilisation du symbolisme algébrique est un fait remarquable pour l'époque, où cette pratique était encore réservée aux seuls domaines numériques.

L'article de A. Cayley, *A memoir of the theory of matrices*, publié en 1858 ([CY], T.2, pp 475-496) a le mérite de rassembler pour la première fois tous les résultats connus à l'époque sur les matrices carrées et rectangulaires.

Cayley définit une matrice carrée comme étant *un ensemble de quantités arrangées en carré, e.g.*

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

Il se restreint donc en pratique aux matrices 3x3 (il utilise aussi des matrices 2x2). Il précise que *la notation de telles matrices se déduit naturellement d'une notation abrégée pour un ensemble d'équations linéaires*. La notation qu'il emploie est alors :

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Ce n'est qu'à la fin de cet article après avoir défini, les matrices rectangulaires, leur transposition et leur produit, qu'il remarque qu'en utilisant les transposés de (X, Y, Z) et (x, y, z) , c'est-à-dire en écrivant les triplets en colonne, cette notation est un cas particulier du produit matriciel. Il persiste toutefois à garder la notation en ligne qu'il semble trouver plus pratique.

Après avoir donné cette définition, Cayley annonce ses intentions et le contenu de son mémoire. Nous donnons ci-dessous, une traduction du début de ce passage, qui tout en résumant ce qui va suivre, donne une idée de la démarche adoptée.

(...) On verra que les matrices (de même ordre) se comportent comme de simples quantités ; elles peuvent être additionnées, multipliées ou composées ensemble, etc... : la loi d'addition des matrices est exactement semblable à celle de l'addition des quantités algébriques ordinaires ; pour ce qui est de leur multiplication (ou composition), Il y a une particularité car les matrices ne sont pas en général inversibles, il est néanmoins possible de former les puissances (positives ou négatives, entières ou rationnelles) d'une matrice, et donc d'atteindre la notion de fonctions rationnelle et intégrale, ou plus généralement de fonction algébrique d'une matrice. (...)

On voit clairement que l'optique adoptée par Cayley est très moderne, il est très proche de l'idée de structure algébrique, qui était il faut le dire déjà dans le vent à l'époque (cf chapitre IV). De fait il définit les lois d'addition, de multiplication par un nombre, et de produit des matrices carrés, et en énonce les principales propriétés, que l'on pourrait résumer aujourd'hui en disant que l'ensemble des matrices carrées de même ordre forme une algèbre. Notons toutefois qu'il ne mentionne pas explicitement la distributivité de la multiplication interne sur l'addition, ni la pseudo-associativité de la multiplication externe.

Cayley énonce ensuite le théorème dit de Cayley-Hamilton, c'est-à-dire que le polynôme caractéristique d'une matrice s'annule quand on substitue à l'indéterminée la matrice elle-même. Il en donne quelques applications. Ce dernier théorème est d'ailleurs le seul résultat vraiment nouveau dans ce mémoire.

Cayley garde pour la fin une approche très succincte des matrices rectangulaires, dont il pense qu'elles ont beaucoup moins d'intérêt. Il en définit la transposition et le produit.

En fait il semblerait que le mémoire de Cayley, ainsi qu'un mémoire équivalent de Laguerre datant de 1867, n'eurent pratiquement pas d'écho et de fait les résultats les plus importants sur les matrices, en particulier ceux ayant trait aux problèmes de réduction, ont pris naissance à travers l'étude des formes bilinéaires.

d- Les formes quadratiques et bilinéaires

On a vu au paragraphe précédent, comment l'étude des formes quadratiques à coefficients entiers s'est développée en relation avec l'arithmétique, grâce principalement à Lagrange, Gauss, Eisenstein et Cayley.

Parallèlement, par l'utilisation de la géométrie analytique, l'étude des formes quadratiques se développe à travers celle des coniques puis des quadriques. Fermat le premier montre que les coniques peuvent être définies comme les courbes planes représentées par une équation quadratique binaire.

Euler résoud partiellement le problème de la réduction des formes quadratiques ternaires, en vue de montrer leur adéquation avec les quadriques ([EU], T.IX, pp 379-392). Dans un traité intitulé *De superficiebus secundi ordinis* (en annexe de l'*Introductio in Analysin infinitorum* publié en 1748), il considère l'équation générale d'une surface du second ordre. Par une méthode analytique des plus simples, il montre que l'on peut par substitution linéaire, réduire l'équation à $\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma z = \alpha\alpha$ à condition qu'une certaine quantité, que l'on reconnaîtra comme le discriminant de la forme quadratique, ne soit pas nul. Il essaie alors, en utilisant ses trois angles (cf § précédent), de montrer comment se fait le changement de coordonnées, mais il reste très vague et incomplet. En particulier le fait que les nouveaux coefficients de la forme réduite sont les valeurs propres de la matrice et donc les solutions d'une équation du troisième degré est entièrement passé sous silence.

En 1758, Euler est amené à rechercher les axes d'inertie d'un solide, animé d'un mouvement uniforme. Ce problème est en fait très analogue au précédent, mais il ne semble pas s'en rendre compte. Cependant il donne cette fois une solution satisfaisante du problème, en exhibant une équation de degré trois, qu'il réduit d'abord au degré deux pour montrer ensuite qu'elle a trois racines réelles.

En 1773, Dans un article intitulé, *Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation*, Lagrange présente une solution moins "géométrique" du même problème, sans utiliser d'angle. Comme il l'explique dans son introduction, il veut en fait que les outils utilisés par Euler apparaissent comme des conséquences de sa méthode purement analytique, qui ne présuppose rien sur les propriétés des axes de rotations ([LA], T.II, pp 579-616). De fait il ramène le problème à une équation du troisième degré, dont il montrera correctement en 1788, après avoir commis une erreur dans son premier traité, qu'elle a trois solutions réelles.

Encore une fois c'est à Cauchy que revient l'initiative d'avoir achevé la question de la réduction des formes quadratiques en liaison avec la démonstration de l'existence des trois valeurs propres réelles d'une matrice symétrique réelle.

Mais à partir de la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, l'étude des formes quadratiques va prendre un essor considérable, leur étude se généralise d'abord au cas de n variables, puis elle s'élargit bientôt aux formes bilinéaires en deux séries quelconques de variables $x=(x_1, \dots, x_n)$ et $y=(y_1, \dots, y_m)$. Ce dernier pas franchi, cette théorie se confond entièrement avec celles des matrices rectangulaires et leur réduction.

Si on appelle A la matrice d'une forme bilinéaire f , on a $f(x,y)=xAty$ ainsi quand on fait un double changement de coordonnées, ${}^t x'=U{}^t x$ et ${}^t y'=V{}^t y$, on obtient une nouvelle matrice $A'={}^t UAV$. De nombreux mathématiciens ont ainsi cherché à dégager des invariants de ces matrices par certaines substitutions linéaires. Selon les préoccupations de chacun, les recherches s'appliquent aux cas où la matrice A est à coefficients entiers, réels ou complexes, ou à ceux où A est une matrice carrée symétrique, symétrique gauche ou hermitienne ... On fait aussi des distinctions selon la nature de U et V .

Ces recherches connurent une époque très prolifique, car les mathématiciens de la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle ont montré pour le sujet un grand intérêt ([AHM] pp 97-101). Les principaux résultats sont des théorèmes sur les valeurs propres, ou sur la réduction des matrices à des formes triangulaires (réduction de Jordan) ou encore des applications à l'arithmétique, entre autres.

Quelques-uns des mathématiciens les plus illustres ayant participé à l'élaboration de cette théorie sont : Jacobi, Cayley, Sylvester, Hermite, Cauchy, H.J Smith, Weierstrass, Jordan, Kronecker, Frobenius ... Ce dernier joua le rôle de législateur ; comme Cauchy pour les déterminants, il a rassemblé entre 1877 et 1880, les principaux résultats en les présentant à l'intérieur d'une théorie unifiée et complète. A partir de cette date, on peut dire que l'étude des formes quadratiques et bilinéaire aussi bien que le calcul matriciel ont atteint leur pleine maturité.

e- Les équations différentielles linéaires

Comme nous l'avons dit au paragraphe b), les équations différentielles linéaires ont été à côté des équations linéaires numériques un des principaux moteurs de l'avancée de la théorie des déterminants et de la théorie linéaire. Les précurseurs dans la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre n sont d'Alembert, Lagrange et Euler. Si tous trois remarquent que la solution générale d'une équation homogène peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de n solutions, aucun d'eux ne soulève par contre le problème de l'indépendance des solutions, par ailleurs seul d'Alembert exprime clairement que la solution générale de l'équation avec second membre s'obtient par addition d'une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Cauchy semble encore être le premier à donner, dans son cours de l'école Polytechnique, un exposé complet et rigoureux de ces résultats.

Par ailleurs, aux environs de 1770, Lagrange est amené à introduire le premier exemple d'opérateur et de dualité dans un espace fonctionnel ([LA] T.I, pp 471-668). Mais il ne peut pas bien sûr faire le rapprochement avec les mêmes notions dans le domaine des formes quadratiques, puisque celles-ci ne seront dégagées par Gauss, qu'une trentaine d'années plus tard.

Dans son étude de l'équation différentielle linéaire générale d'ordre n : $L(x)=c_0x+c_1x'+\dots+c_nx^{(n)}$ où les c_i , comme x sont des fonctions de t , Lagrange introduit de façon purement numérique et sans le désigner par un nom, une nouvelle expression en y qu'il caractérise par la relation suivante valable pour toutes fonctions y et z n fois continument dérivables et s'annulant ainsi que leurs $(n-1)$ premières dérivées en a et b :

$$\int_a^b z L(y) dt = \int_a^b y L^*(z) dt,$$

En termes modernes, L^* est l'opérateur dual de L par rapport au produit scalaire défini par l'intégrale sur $[a;b]$, dans l'espace des fonctions n fois continument dérivables et s'annulant ainsi que leurs $(n-1)$ premières dérivées en a et b .

Toutefois cette interprétation n'était pas envisageable à l'époque et le calcul de Lagrange, bien que fort hardi et astucieux, n'eut pas de suite avant longtemps.

C'est aussi à propos des équations différentielles qu'apparut l'un des premiers exemples de valeurs propres, avant que cette notion ne fût même dégagée en tant que telle. C'est de nouveau à Lagrange que l'on doit ce fait.

Celui-ci dans un article de 1762, s'intéresse aux "petits mouvements" autour de la position d'équilibre d'un système dépendant de n paramètres. Cela le conduit à un système d'équations linéaires de la forme :

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = 1 \text{ à } n)$$

où les a_{ij} sont des constantes. Il s'inspire alors de la méthode donnée par Euler pour résoudre une équation linéaire d'ordre n à coefficients constants, ce qui l'amène à chercher des solutions sous la forme $x_i(t) = y_i e^{rt}$ où r et les y_i sont des constantes à déterminer. Ce problème revient finalement à résoudre le système linéaire :

$$r^2 y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (i = 1 \text{ à } n)$$

Lagrange n'utilise pas de déterminant. Son raisonnement est très empirique, il se contente de dire qu'en essayant d'éliminer les y_i tour à tour dans les équations, on aboutit finalement à une dernière équation où l'un des y_i peut être mis en facteur d'une quantité de degré n en r^2 . L'annulation de ce polynôme en r^2 constitue donc la condition d'élimination qui est nécessaire pour obtenir une solution non nulle du système. Sans soulever le problème des racines multiples de l'équation en r^2 , il conclut que l'on peut trouver n valeurs de r^2 qui donnent les solutions cherchées, en restant très vague sur les conditions d'explicitation de la solution générale.

En termes modernes, on dirait que r^2 doit être une valeur propre de la matrice des a_{ij} . On sait qu'à la condition que la matrice soit diagonalisable, en prenant n vecteurs propres indépendants, on définit n solutions $x_i(t) = y_i e^{rt}$ qui déterminent une base de solutions.

Lagrange rencontre un problème identique dans un article de 1774 intitulé *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds* ([LA] T.VI pp 635/655-666). Il le résout de façon analogue sans toutefois mentionner la ressemblance, qu'il n'a pas dû cependant manquer d'apercevoir.

Il faudra attendre que la théorie de la diagonalisation des matrices soit achevée pour que la question de la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants soit entièrement éclaircie.

Nous arrêterons là les exemples de problèmes "linéaires" qui ont pu se présenter dans ces deux siècles, indépendamment d'une théorie unifiée. Comme nous l'avons déjà dit, nous ne prétendons pas avoir été exhaustif dans notre exposé, pourrait-on d'ailleurs l'être ? Nous pensons simplement avoir montré une assez grande variété d'exemples dans des domaines fort différents qui devrait permettre de rendre compte de l'étendue de ces questions.

Nous espérons avoir éclairé les conditions qui ont précédé et dans une certaine mesure conditionné l'apparition de l'algèbre linéaire. Pourtant si tous ces problèmes épars ont joué le rôle de catalyseurs, deux autres grands axes de développement, au moins, furent des éléments fondamentaux dans ce processus d'émergence. Ce sont d'une part les tentatives "d'algébrisation" de la géométrie accompagnées de l'élargissement de la géométrie à des espaces plus généraux et d'autre part les progrès du formalisme algébrique avec l'extension des calculs à de nouveaux objets et la naissance du concept de structure algébrique.

III - L'algèbre linéaire à travers l'histoire de la géométrie

1- La naissance de la géométrie analytique

Depuis les Grecs, la géométrie représente le domaine de prédilection des mathématiques. Au sortir de la Renaissance, l'Algèbre plus récente et moins noble, directement héritée des Arabes, ne semblait pas pouvoir exercer aussi bien les talents de l'esprit créatif. Pourtant à la suite de Viète, l'enrichissement et la plus grande maniabilité du langage symbolique ouvrent de nouveaux horizons. L'objet de l'algèbre se trouve élargi et l'on commence à entrevoir la possibilité d'appliquer les nouvelles méthodes analytiques aux démonstrations de géométrie. L'approche grecque encore en vigueur voulait que l'on donne aux équations une représentation géométrique, de façon à en justifier en quelque sorte l'existence. Cette idée est à la source par exemple du principe d'homogénéité, qui veut que l'on n'additionne entre elles que des grandeurs de même dimension (unités, carrées, cubes, etc...).

Fermat et Descartes indépendamment et presque en même temps vont renverser cette hiérarchie séculaire, ils montrent que les problèmes de géométrie peuvent être résolus par les techniques algébriques, qui permettent des progrès considérables ; ce seront les débuts de la géométrie analytique, promise à un avenir florissant et qui jouera un rôle précurseur et moteur fondamental dans l'émergence du calcul vectoriel et donc de l'algèbre linéaire. Cette étape représente l'un de ces points phares qui jalonnent l'histoire des mathématiques, elle permet non seulement de montrer avec facilité des résultats qui demandaient auparavant une grande agilité et des résultats préliminaires encombrants, mais aussi elle ouvre la porte à de nouvelles notions et permet d'envisager des problèmes radicalement différents, notamment avec l'introduction du calcul infinitésimal, qui annonce ce que l'on appellera plus tard la géométrie différentielle.

L'idée de repérer les points du plan par la longueur de deux segments convenablement choisis était déjà en germe chez les Grecs. Par ailleurs en Astronomie, dès la plus haute antiquité, on a repéré la position des points dans l'espace à l'aide de deux coordonnées angulaires, la hauteur au dessus de l'horizon et l'écart par rapport à un méridien. Mais tant qu'on ne cherche pas à exprimer une relation entre les grandeurs, cette technique reste sans suite. Dans l'œuvre d'Appolonius, on trouve explicitement des équations de coniques selon des axes de coordonnées rectangulaires, mais cette pratique reste isolée et ne débouche pas vraiment sur des résultats importants. Selon une méthode très différente, Nicole Oresme, dans la fin du XIV^{ème} siècle introduit le repérage par un système de coordonnées rectangulaires, qu'il nomme longitude et latitude et donne la condition pour que trois points soient alignés, ce qui revient à donner l'équation d'une ligne droite. Oresme propose une généralisation à la dimension trois et même à un espace de dimension quatre. Mais à cet époque les rudiments du langage symbolique et l'état de dénuement dans lequel se trouvait l'algèbre n'autorisait guère de hardiesse. Il faudra en fait attendre le XVII^{ème} siècle pour voir des progrès significatifs dans ce domaine se dessiner.

Pierre De Fermat (1601-1665) fut toute sa vie magistrat au parlement de Toulouse, par ailleurs père d'une famille nombreuse, il ne consacra aux mathématiques qu'une partie de son temps libre. De ce fait son œuvre est éclectique et éparse. Elle se compose essentiellement de courts mémoires sous forme de lettres, écrites entre autres au père Mersenne ou à Pascal, et qui ne furent en général pas publiées de son vivant. C'est en fait son fils aîné, Samuel, qui publia en 1679, une partie seulement de l'œuvre de son père, sous le titre de *Varia opera* [FE1].

L'un des mémoires les plus importants de Fermat est intitulé *Ad locos Planos et Solidos Isagoge* et est daté de 1643, bien que la correspondance semble prouver que la plupart des résultats furent établis entre 1636 et 1638 ([FE2] t.III, pp 85-96).

Fermat était un disciple de Viète, dont il avait adopté la méthode et les notations, auxquelles il restera d'ailleurs fidèle toute sa vie. Dans ce mémoire qui est l'une de ses premières œuvres connues, il met en œuvre la méthode analytique de Viète pour résoudre des problèmes de géométrie. Nous donnons ci-dessous un extrait de l'introduction de cet essai (d'après la traduction française depuis le latin in [IT1] pp 209-210)

Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. La ligne droite est simple et unique dans son genre, les espèces des courbes sont en nombre indéfini, cercle, parabole, hyperbole, ellipse, etc...

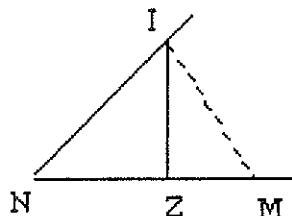
Toutes les fois que les extrémités de la quantité inconnue qui décrit le lieu suit une ligne droite ou circulaire, le lieu est dit plan ; si elle décrit une parabole, une hyperbole ou une ellipse, le lieu est solide ; pour les autres courbes, on l'appelle lieu de ligne. Nous n'ajouterons rien sur ce dernier cas, car la connaissance du lieu de ligne se déduit facilement, au moyen de réductions de l'étude des lieux plans ou solides.

Il est commode pour établir des équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles ; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide ainsi qu'on le verra clairement ci-après.

Ainsi il commence par l'équation d'une droite :

Nous donnons ici une traduction d'après la traduction anglaise tirée de [SM2] pp 389-396, nous avons respecté le nom des variables et des paramètres ainsi que la forme générale du discours, par contre pour des questions de lisibilité, nous avons remplacé la symbolique des équations encore mi-rhétorique à la façon de Viète par le symbolisme moderne (par ex z plano - d in a aequatur b in e , devient $z^2 - da = be$).

Soit NZM une ligne droite, de position donnée, avec le point N fixe. Soit NZ la quantité inconnue a et ZI (la ligne tracée pour former l'angle NZI) l'autre quantité inconnue e .



Si $da = be$, le point I décrira une ligne de position fixée. En effet nous aurons $b/d = a/e$. Ainsi le quotient $a:e$ est donné, comme l'angle Z . Donc le triangle NIZ et l'angle INZ sont déterminés. Mais le point N et la position de la ligne NZ sont donnés, et ainsi la position de NI est déterminée. La synthèse est aisée.

En n'utilisant que la similitude des triangles puis en s'appuyant sur les coniques d'Appolonius, Fermat exhibe ainsi plusieurs formes d'équations de droites et de coniques, qui en résumé et en langage moderne sont :

$m^2 - dx = by$ (droite)
 $xy = m^2$ (hyperbole)
 $m^2 + xy = ax + by$ (hyperbole)
 $x^2 = py$ (parabole)
 $b^2 - x^2 = py$ (parabole)
 $b^2 - x^2 = y^2$ (cercle)
 $b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry$ (cercle)
 $(b^2 - x^2)/y^2 = p/q$ (ellipse)
 $b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ (ellipse)

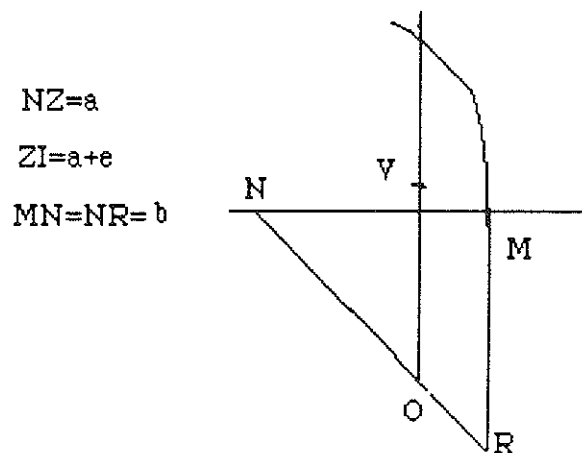
Pour ce dernier cas plus complexe Fermat utilise un changement de coordonnées ([SM2]) :

Le type d'équations le plus difficile est celui contenant des termes en ae avec a^2 et e^2 . Soit $b^2 - 2a^2 = 2ae + e^2$.

Additionnons a^2 de chaque côté de façon à obtenir $a + e$ comme facteur de l'un des membres. Alors $b^2 - a^2 = a^2 + 2ae + e^2$.

Remplaçons $a + e$ par e ; alors, d'après le développement précédent, le cercle MI satisfera l'équation ; c'est-à-dire, $MN^2 - NZ^2 = ZI^2$. Posons $VI = NZ = a$, on a $ZV = e$.

Dans ce problème, on cherche le point V ou l'extrémité de la ligne e . Il est donc nécessaire de trouver, et d'indiquer, la ligne sur laquelle le point V est situé.



Soit MR parallèle à ZI et égale à MN . Tirons NR qui coupe IZ , prolongée en O . Puisque $MN=MR$, $NZ=ZO$. Mais $NZ=VI$, donc, par addition, $VO=ZI$. Donc $MN^2-NZ^2=VO^2$. Mais le triangle NMR est connu, donc le quotient $NM^2:NR^2$ est donné, comme aussi les quotients $NZ^2:NO^2$ et $(MN^2-NZ^2):(NR^2-NO^2)$. Mais nous avons montré que $OV^2=MN^2-NZ^2$. Donc le quotient $(NR^2-NO^2):OV^2$ est connu. Mais les points N et R sont donnés comme l'angle NOZ . Donc, comme nous venons de le montrer, le point V est sur une ellipse.

Avec ces quelques extraits on saisit mieux la nature du travail de Fermat. Son idée géniale de départ consiste à repérer un point mobile par deux grandeurs (a et e), et surtout d'utiliser ses deux inconnues comme des objets algébriques à part entière, indépendamment du contexte géométrique, et même si les retours sur le cadre géométrique sont constants. Fermat n'est cependant pas entièrement dégagé de la coutume grecque, ainsi comme Viète, il ne transgresse pas le principe d'homogénéité.

Les grandeurs a et e sont en fait en langage moderne les coordonnées "cartésiennes" du point I dans un repère orthonormé dont l'origine est en N et un des axes est porté par MN. Pourtant Fermat ne désigne pas deux axes et une origine comme on a l'habitude de le faire à présent. Il se contente en fait de donner un segment [NM] qui semble jouer le rôle d'unité des abscisses, mais ce segment reste fondamentalement attaché à la figure et ne lui préexiste pas. Par ailleurs, le calcul de l'ordonnée se fait par projection sur ce même axe, ainsi les deux coordonnées ne semblent pas jouer un rôle symétrique. Les deux quantités inconnues ne reçoivent pas de noms ; dans des mémoires ultérieurs, Fermat les désignera par les termes de "portion de diamètre" et "appliquée" respectivement pour abscisse et ordonnée.

Dans la suite des démonstrations, on peut mesurer avec quelle dextérité il manipule les expressions algébriques toujours dans la tradition de Viète aussi bien qu'on voit combien il connaît les traités anciens de géométrie. Cette introduction (Isagoge) est en fait un mémoire très court d'environ huit pages, alors qu'un appendice sur des résolutions de problèmes faisant intervenir des lieux solides vient pratiquement en doubler le volume.

En conclusion de l'*Isagoge*, Fermat ajoute : "Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexplicé sur les lieux plans et solides."

Ce traité présente de fait une innovation capitale pour la mathématique de l'époque. Malgré sa brièveté, il est riche en qualités non seulement pour la nouveauté du sujet mais aussi pour le côté didactique de l'exposé, qui le rend parfois supérieur à la *Géométrie* de Descartes. On peut se demander ce qu'il aurait pu donner comme prolongements si Fermat n'avait pas souffert d'un tel isolement et avait pu confronter ses vues avec quelques disciples.

L'idée essentielle ici est que l'objet géométrique devient par l'intermédiaire de deux quantités numériques un objet algébrique. Cette sorte de mutation est la porte ouverte à des idées révolutionnaires, Fermat lui-même utilisera son idée et partant des équations de courbes "géométriques" (on dirait aujourd'hui algébriques) il détermine en appliquant sa propre méthode de recherche des extrema, l'équation de la tangente en un point. Méthode qu'il généralisera entre 1640 et 1660 aux courbes "mécaniques" (aujourd'hui appelées transcendentes). Il jetait ainsi les fondements de ce que l'on allait ensuite appeler la géométrie différentielle et qui apparaîtra comme l'une des branches les plus riches de la géométrie analytique.

En 1637, donc avant la parution de l'*Isagoge*, mais certainement après sa conception, René Descartes publie son fameux *Discours de la Méthode*. Ce traité philosophique est suivi de trois appendices :

- *La dioptrique* sur la taille des verres de lunette.
- *Les météores* qui propose une cosmogonie.
- *La géométrie*.

Ce dernier texte d'un peu plus de cent pages est divisé en trois livres. Le philosophe y aborde de nombreux problèmes de géométrie, souvent dans la tradition des anciens, mais avec des méthodes entièrement nouvelles.

Il est frappant dès l'abord, de constater, malgré l'impossibilité matérielle de plagiat, la similitude des problématiques entre Descartes et Fermat. Pourtant contrairement au second, le premier ne semble pas avoir subi directement, voire même pas du tout, l'influence de Viète et de ses disciples. Sa formation par les pères jésuites de la Flèche était faite essentiellement d'un solide enseignement élémentaire classique. On ne peut dire avec certitude ce que le jeune Descartes, qui a beaucoup voyagé, a pu lire, mais il apparaît que son œuvre est avant tout le fruit original d'un esprit travailleur et éminemment inventif. *La Géométrie* est une de ces quelques œuvres qui ont marqué profondément l'histoire des mathématiques.

Descartes apparaît comme un être vif, friand de discussions et dont les lectures sont souvent superficielles. Son génie consiste dans la qualité qu'il a à assimiler rapidement et à réaliser les synthèses les plus heureuses de ce qu'il a glané de ci de là. Ainsi le langage symbolique qu'il a déjà fixé quand il écrit les géométries semble emprunter le meilleur des différents courants de l'époque, dans une création personnelle rendant le tout cohérent. C'est d'ailleurs à peu de détails près, le langage que l'on emploie encore aujourd'hui (cf Chap. I §2-b).

L'idée de départ de Descartes est que *tous les problèmes de géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire*. Ainsi il prend une ligne qu'il nomme l'unité, pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion. Il montre alors comment les quatre ou cinq opérations de l'arithmétique (*l'extraction de racine est une sorte de division*) sont applicables en géométrie. Dans cette première étape, on pourrait croire qu'il ne se dégage guère de la tradition grecque, puisqu'en fait il justifie l'algèbre par son application à la géométrie. Pourtant le choix d'une unité montre bien une problématique distincte. Ainsi dès la troisième page Descartes fait un sort au sacro-saint principe d'homogénéité, qui depuis toujours limitait la portée de l'algèbre. Il explique que l'on peut par exemple chercher à tirer la racine cubique de $aabb-b$, pour ce faire, *il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même*. Voilà bien là, la preuve que ce n'est plus l'algèbre que l'on justifie par la géométrie mais bien une tentative "d'algébrisation" de la géométrie, c'est-à-dire que l'on utilisera tout ce dont l'algèbre dispose pour résoudre les problèmes de géométrie. en fait l'idée de Descartes, adepte de l'universalité, est de réconcilier algèbre et géométrie ; il reproche à la première d'être une science aveugle qui poursuit des calculs sans but, la géométrie lui donne un objet, quant à la seconde il lui reproche de s'enfermer dans la représentation graphique qui en limite les interprétations, l'algèbre est un moyen d'échapper à ce carcan. Descartes diffère en cela de Viète, pour qui la représentation géométrique était l'aboutissement du calcul algébrique, *l'exégétique ou rhétorique* selon ses propres termes. Descartes est en faveur d'une sorte de dialectique entre les deux modes, où la hiérarchie n'est pas de mise, la figure est le point de départ et aussi celui d'arrivée, mais c'est le calcul algébrique qui forme le noyau dur de la démonstration.

Descartes pose ensuite les fondements de sa méthode analytique en ces termes : " *Ainsi voulant résoudre un problème quelconque, on doit d'abord le considérer comme déjà fait et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, autant à celles qui sont connues qu'aux autres. Puis sans faire de différence entre les lignes qui sont connues et celles qui ne le sont pas, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous de quelle manière elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité de deux façons : ce qui se nomme une équation car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre.* "

Descartes donne ensuite une explication sur le nombre d'équations que l'on doit trouver et sur la façon de les réduire, en fonction du nombre d'inconnues, puis il consacre le Livre I à résoudre quelques problèmes élémentaires où n'interviennent que des lignes droites et des cercles.

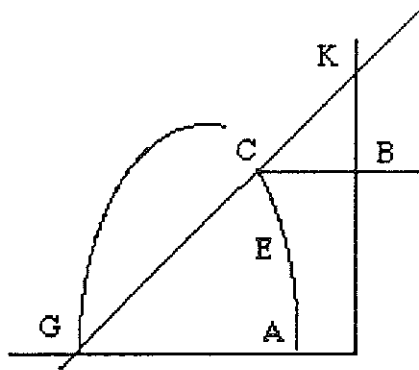
Ce principe fondamental posé, Descartes met sa méthode en pratique pour résoudre des problèmes plus complexes, généralement anciens, dont la plupart sont tirés de l'œuvre de Pappus. Comme Fermat, il donne les équations des droites et des principales formes de coniques.

Le Livre II commence par une introduction sur la nature des courbes et la différence entre les courbes géométriques, *c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte* (ce sont en fait ce que l'on appelle aujourd'hui les courbes algébriques) et les courbes mécaniques, *parce qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement* (comme la conchoïde ou la cissoïde). Il précise ensuite la distinction en ces termes : "(...) pour comprendre ensemble toutes (les lignes courbes) qui sont dans la nature, et les classer par ordre en plusieurs catégories, je ne peux rien dire de mieux que tous les points, de celles qu'on peut nommer géométriques, (...), ont nécessairement un rapport avec tous les points d'une ligne droite, et celui-ci peut être exprimé par une équation."

Compte tenu des connaissances de l'époque, il faut bien comprendre que cette équation est forcément polynomiale, on retrouve ainsi la définition des courbes algébriques actuelles. Descartes définit ensuite une classification de ces courbes géométriques par groupe de deux degrés, ainsi pour lui les courbes ayant une équation de degré un ou deux sont du premier genre, si le degré est trois ou quatre, la courbe est du deuxième genre etc... C'est à Fermat, après avoir médité sur ce point de l'œuvre de Descartes, que revient l'idée de classer les courbes géométriques indépendamment pour chaque valeur du degré de l'équation.

Voilà maintenant comment Descartes met en œuvre sa méthode pour exprimer une courbe à l'aide d'une équation.

Je choisis une ligne droite comme AB, pour rapporter à ses divers points tous ceux de la ligne courbe EC, et sur cette ligne AB, je choisis un point, comme A, pour commencer ce calcul. Je dis que je choisis et l'un et l'autre parce qu'on est libre de les prendre tels qu'on veut, car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois de quelque façon qu'on les prenne, on peut toujours faire en sorte que la ligne paraisse du même genre, ainsi qu'il est aisé de le démontrer.



Après cela prenant un point à discrétion dans la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à la décrire est appliqué, je trace à partir de ce point C, la ligne CB parallèle à GA et parce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme l'une y et l'autre x.

On voit donc que comme Fermat, Descartes ne désigne réellement qu'un seul des axes de coordonnées et une origine, et que malgré l'arbitraire qu'il laisse, ces deux éléments semblent bien être liés à la figure, ils n'ont finalement qu'une existence relative et c'est une différence fondamentale de la démarche qui consiste à poser a priori l'existence d'un repère pour tout le plan, qui pourra donc se rapporter à n'importe quelle figure. De plus il fait la mesure de l'ordonnée e , en quelque sorte par projection sur l'axe, cette façon de faire introduit de façon intrinsèque une dissymétrie entre les deux coordonnées dont on sait de nos jours qu'elle n'a pas de raison d'exister et qui de fait persistera pendant près d'un siècle. Ainsi même si le nom de Descartes reste historiquement attaché aux coordonnées que l'on appelle cartésiennes, on voit que ce dernier était encore assez loin de la forme actuelle, non seulement sur des points de détails mais aussi sur des questions plus fondamentales. Il faudra attendre la deuxième moitié du XVIII^{ème} siècle pour arriver à l'utilisation actuelle du repérage en coordonnées cartésiennes.

Dans la suite de la *Géométrie*, Descartes met en place les principales méthodes de la géométrie analytique, à travers la résolution de nombreux problèmes. Sa propre conclusion résume assez bien ce que son œuvre a pu apporter aux mathématiques.

"Mon but n'est pas de faire un gros livre, et j'essaie plutôt d'en dire le plus possible en peu de mots, comme on constatera peut-être que j'ai fait si on considère qu'ayant réduit à une même construction tous les problèmes d'un même genre, j'ai à la fois donné la façon de les réduire à une infinité d'autres différents, et ainsi de résoudre chacun d'eux d'une infinité de façons ; outre cela ayant construit tous ceux qui sont plans en coupant d'un cercle une ligne droite, tous ceux qui sont solides en coupant d'un cercle une parabole, et enfin tous ceux qui sont d'un degré plus composé, en coupant d'un cercle une ligne qui n'est que d'un degré plus composé que la

parabole ; il ne faut que suivre la même méthode pour construire à l'infini tous ceux qui sont plus composés. Car en matière de progressions mathématiques, lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas difficile de trouver les autres. Et j'espère que la postérité me saura gré, non seulement des choses que j'ai expliquées ici mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de lui laisser le plaisir de les découvrir."

Si l'œuvre de Fermat, restée non publiée pendant plus de trente ans, n'a finalement guère eu d'influence, la *Géométrie* de Descartes connut parmi ses contemporains un succès immédiat et créa une émulation sans précédent. Une nouvelle ère était née, présidée par la scission entre géométrie synthétique et géométrie analytique. Chacune des deux méthodes devait réunir ses adeptes et bientôt de vastes polémiques entre puristes et "pervers" verraient le jour, mais pour l'heure le vent était en poupe et les résultats accessibles par la méthode analytique s'étendirent à tous les domaines connus en géométrie donnant des démonstrations souvent fort simples et permettant par une nouvelle approche des découvertes jusqu'alors inaccessibles.

Pour donner quelques points de repères, disons que F. Van Schooten exprime en 1649 les premières formules de changement de repère, c'est cependant à Euler, vers 1748, que revient semble-t-il, le privilège d'avoir le premier donné des formules très claires, c'est également lui le premier qui affirme l'équivalence des deux axes de coordonnées. Wallis considère pour la première fois, en 1655, des coordonnées négatives. Newton puis Bernoulli inventent les coordonnées polaires. Avant la fin du XVII^{ème} siècle, on applique la géométrie analytique à l'espace. C'est enfin seulement dans la deuxième moitié du XVIII^{ème} siècle avec J. L. Lagrange et G. Monge, que la géométrie analytique acquièrent réellement ses lettres de noblesse et prend la forme que nous lui connaissons.

2 - La naissance du "calcul vectoriel"

a - Les premiers pas

Bien qu'elle a eu depuis ses débuts des détracteurs, la méthode analytique est rapidement devenue la méthode la plus utilisée en géométrie. Deux reproches de fond lui sont pourtant souvent fait.

Le premier tient à l'arbitraire apparemment inutile que l'on introduit par l'utilisation d'un repère. D'un point de vue philosophique choisir un système de coordonnées qui, bien que fondamental pour la résolution, n'existe pas a priori dans la question et n'apparaît plus dans la réponse, pose un problème que l'on pourrait presque qualifier d'éthique. Surtout que souvent la partie purement analytique de la résolution éloigne du sens "géométrique" de la situation et tout en amenant "naturellement" à la réponse jette un voile sur la perception visuelle que l'on pourrait avoir du problème. En outre principalement en physique le problème de l'indépendance des résultats par rapport au repère peut être dans certains problèmes un point crucial, difficile à résoudre.

Le deuxième reproche est venu avec l'amélioration des performances de la technique analytique qui avait pour corollaire avec la difficulté croissante des démonstrations, l'allongement constant des calculs impliqués dans celles-ci. Ainsi on se trouva rapidement face à des calculs qui prenaient de plus en plus de place d'autant que le formalisme algébrique n'aidait guère pour s'y retrouver, à des étapes du raisonnement où le sens "géométrique" se trouvait enfoui sous des masses d'équations et de notations.

Ces deux inconvénients ont certainement beaucoup influencé la recherche d'un calcul géométrique, c'est-à-dire intrinsèque prenant les objets géométriques eux-mêmes comme outils de calcul.

A côté du strict domaine de la géométrie, cette idée puise ses sources dans différents domaines : en physique tout d'abord, où l'on avait depuis l'antiquité l'habitude de représenter de nombreuses grandeurs par des "vecteurs" -le terme n'existe pas encore-, en opposition aux grandeurs "scalaires", mais encore dans le domaine du calcul algébrique qui n'a cessé depuis sa création de s'élargir à des catégories d'objets de plus en plus vastes.

Pour ce qui est des "vecteurs", le premiers pas vers le calcul géométrique réside dans l'utilisation du parallélogramme des forces comme moyen de représenter la résultante de deux forces. Cette pratique se rencontre déjà chez certains auteurs grecs, et elle est assez répandue aux XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles. Au début du XIX^{ème}, on peut dire qu'elle est un outil habituel dans la représentation des phénomènes physiques. Pourtant malgré l'évidente parenté de cette pratique avec le calcul géométrique, il semblerait qu'elle n'ait pas eu un rôle vraiment déterminant si ce n'est qu'elle en représente l'exemple le plus évident d'utilisation. En effet rien ne laisse penser que l'idée d'interpréter le parallélogramme des forces comme une addition de vecteurs ne

soit apparue avant que le concept de calcul géométrique ait été créé. En fait le tracé du parallélogramme n'est resté longtemps qu'un moyen pratique de figurer la résultante de deux forces, mais sans qu'on l'interprète comme une opération au sens algébrique du terme. On avait établi une correspondance pratique entre des phénomènes physiques et une réalité géométrique, mais aucun lien algébrique ne servait d'intermédiaire. Cette dernière étape apparaît plus comme une conséquence que comme vraiment un précurseur du calcul géométrique.

L'élargissement des calculs algébriques d'abord aux nombres négatifs, aux irrationnels, puis aux premiers modèles de nombres complexes a certainement eu un rôle beaucoup plus important dans la genèse du calcul vectoriel, en permettant peu à peu d'envisager l'idée de créer des opérations algébriques sur des objets, idée qui finit par se dégager entièrement du concept même de nombre.

En fait la première tentative significative pour créer un calcul géométrique semble être due à l'initiative de Leibniz vers 1679, c'est-à-dire quarante-deux ans après *La Géométrie* de Descartes. Dans une lettre à C. Huygens datée du 8 septembre 1679, Leibniz exprimant sa déception par rapport à la géométrie analytique énonce le principe d'un calcul géométrique en ces termes : ([CR] pp.3-5)

"Je ne suis toujours pas satisfait de l'algèbre, parce qu'elle ne donne pas les méthodes les plus courtes ni les constructions les plus belles en géométrie. C'est pourquoi je crois que, pour ce qui concerne la géométrie, nous avons toujours besoin d'une analyse qui soit distinctement géométrique ou linéaire et qui exprimera directement les situations comme l'algèbre exprime directement les grandeurs. Et je crois que j'en ai trouvé le moyen et que nous pouvons représenter les figures et même les machines et les mouvements par des lettres comme l'algèbre représente les nombres ou les grandeurs. Je vous envoie un essai qui me semble être important."

En introduction de cet essai, l'auteur décrit plus largement son but.

"J'ai découvert certains éléments d'une caractéristique qui est entièrement différente de l'algèbre, qui aura de grands avantages en représentant à l'esprit exactement et d'une façon fidèle à sa nature, même sans figure, tout ce qui dépend du sens de la perception. L'algèbre est seulement la caractéristique des nombres et des grandeurs indéterminés, mais elle n'exprime pas directement les situations, les angles, et les mouvements. Or il est souvent difficile d'analyser les propriétés d'une figure par le calcul, et encore plus de trouver des constructions et des démonstrations géométriques adéquates, même quand on a fini le calcul algébrique. Mais cette nouvelle caractéristique, qui s'appuie sur les figures visuelles, ne peut pas manquer de nous donner la solution, la construction et la démonstration géométrique tout dans le même temps, et de façon naturelle et dans une même analyse, c'est-à-dire dans une procédure déterminée."

On comprend mieux à la lecture de ces quelques lignes, la nature des reproches faits à la géométrie analytique et les espoirs que Leibniz fonde dans un calcul géométrique intrinsèque qui tout en ayant les avantages de maniabilité et de fiabilité de l'algèbre permettra également de rendre compte de tous les aspects spécifiques de la géométrie et qui ne sont pas pris en compte dans une résolution analytique où les outils algébriques appauvrissent les concepts en jeu et empêchent parfois même a posteriori de reconstruire le sens géométrique de la démonstration. Leibniz espérait pouvoir ainsi réconcilier algèbre et géométrie en prenant en compte dans une méthode de nature analytique le côté intuitif de la méthode synthétique.

Mais il manquera son but.

Il fonde sa *géométrie des situations* sur une relation de congruence entre ensembles de points : deux couples de points sont congruents si dans chaque couple les deux points sont à la même distance, deux triplets sont congruents si les deux triangles sont superposables etc... Il peut ainsi définir une sphère comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à AB ; AX congru à BX détermine un plan ; ABC congru à ABX un cercle ; AX congru à BX congru à CX, une droite ; AX congru à BX congru à CX congru à DX, un point etc... Leibniz applique son calcul à la résolution de quelques problèmes assez élémentaires, mais ne donnera jamais de suite, on peut penser qu'il a lui-même compris les limitations que son système lui imposerait rapidement.

Comme beaucoup de ses lettres, cet essai de Leibniz ne fut publié pour la première fois qu'en 1833, il n'était alors pas démodé et comportait des éléments intéressants, qui n'avaient finalement que peu évolué dans cet espace d'un siècle et demi. Ainsi à sa publication, la société mathématique allemande *Jablonowski Gesellschaft*, fortement intéressée par ces travaux, lança une compétition, offrant un prix à celui qui fournirait la meilleure théorie dans le prolongement des idées de Leibniz. Un mathématicien alors inconnu entra en lice et gagna, il s'appelait H. G. Grassmann. On verra pourtant que son *Ausdehnungslehre* dépasse largement la tentative de Leibniz et ne lui doit aucune sorte de paternité.

Mais revenons en 1679, et à l'œuvre de Leibniz en son temps. Bien sûr son système ne permit pas de répondre à ses espérances. Les raisons en sont finalement assez claires pour un lecteur de la fin du XXème siècle. Avec sa relation de congruence, Leibniz ne garde du bipoint finalement que la longueur, c'est-à-dire qu'il le restreint à une grandeur unidimensionnelle. Or sans comprendre son erreur, il avait lui-même annoncé en introduction que ne rendre compte que d'une grandeur ne pouvait suffire en géométrie, puisqu'il dit que l'algèbre ne rend pas bien compte des situations des angles etc... On mesure bien là l'écart entre les prévisions particulièrement justes et en avance sur leur époque, et le système réellement proposé, qui se situe bien deçà des ambitions émises en introduction. Même si sa congruence entre triplets présentait une notion plus riche, il était encore loin de l'idée de vecteur, et donc d'un calcul géométrique vraiment efficace. Un premier pas eut été de voir que AB et BA pouvait être différencié, puis de pouvoir distinguer les directions dans l'espace.

Néanmoins malgré cet échec, l'apport de Leibniz est grand, la lucidité de sa démarche fait de lui, comme d'ailleurs dans le cas des déterminants (cf Ch.II §.1), un visionnaire de génie qui a anticipé de plusieurs dizaines d'années des idées révolutionnaires. En effet son analyse de la relation entre algèbre et géométrie est non seulement un constat fort juste des limites de la méthode analytique mais encore une anticipation très réaliste des qualités que devrait posséder un calcul géométrique. Sa description rend en ce sens tout à fait compte des préoccupations qui vont agiter le monde mathématique dans la fin du XVIIIème siècle et une bonne partie du XIXème.

b - Les premiers systèmes de "calcul géométrique"

i - Le calcul barycentrique de Möbius

A. G. Möbius était professeur d'astronomie à Leipzig et ses recherches sur la mécanique céleste l'ont rapproché de la géométrie. Son ouvrage le plus célèbre est certainement *Der barycentrische Calcul (ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwicklung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet)* publié en 1827, mais dont il conçut les premiers éléments dès 1818 ([MO] T.I, pp.1-388, et [SM2] pp.670-676).

Dans ce livre exposé avec beaucoup de clarté, Möbius définit un calcul géométrique qui, sans répondre entièrement au rêve de Leibniz, permet d'éviter les principaux défauts que celui-ci reprochait aux coordonnées cartésiennes. De plus le calcul barycentrique de Möbius se rapproche en beaucoup de points du calcul vectoriel actuel.

Dès le tout début de son livre Möbius introduit une addition et une notion de rapport entre les lignes de même direction, il note au passage qu'un changement de sens correspond à un changement de signe, c'est-à-dire que $BA = -AB$. On a vu comment cette idée assez simple, mais pas encore courante à l'époque, avait fait défaut à Leibniz dans sa tentative de créer un calcul géométrique. Möbius fait preuve d'une grande liberté dans son approche des quantités géométriques. Ce qu'il note simplement AB correspond à la notion actuelle de vecteur, ou de segment orienté. Il considère également que la surface d'un triangle est orientée, suivant l'ordre des trois points qui le déterminent et définit ainsi la surface relative d'un triangle qui est une quantité avec un signe et qu'il note par les trois lettres des sommets ($ABC = BCA = CAB = -BAC = -ACB = -CBA$), de même il définit le volume relatif d'une pyramide.

Le théorème fondamental sur lequel repose sa théorie est le suivant :

" Etant donné un système de n points $A, B, C, \dots, N$, avec respectivement les coefficients $a, b, c, \dots, n$, dont la somme n'est pas nulle, il existe un et un seul point, le centroïde S , Ayant les propriétés suivantes : si on trace des droites parallèles par chaque point et par le point S , dans une direction quelconque, et si ces lignes coupent un plan quelconque en $A', B', C', \dots, S'$, respectivement, on a toujours :

$$a.AA' + b.BB' + \dots + n.NN' = (a+b+\dots+n).SS'$$

en particulier quand le plan passe par S on a :

$$a.AA' + b.BB' + \dots + n.NN' = 0."$$

Möbius traduit ce résultat d'invariance par l'écriture symbolique suivante : $aA+bB+\dots+nN=S$. Il utilise ainsi les points assignés d'un poids comme des objets algébriques. Le type d'opération en jeu ici est cependant d'une nature très spéciale. La première spécificité vient de l'impossibilité de définir la somme de points dont la somme des poids serait nul. Möbius dit qu'alors le centroïde est à l'infini, mais il ne précise pas vraiment en quel sens. Si on considère tous les points associés au poids nul comme un seul, cet élément peut être considéré comme l'élément neutre, la difficulté vient alors du fait que si cet élément peut apparaître dans une somme partielle, il n'est jamais en revanche le barycentre de points, puisque si la somme des poids est nul, le barycentre est infini.

On peut toutefois s'en tirer formellement : à condition alors de ne pas évaluer à zéro, on peut, avec le calcul barycentrique, utiliser les mêmes règles de transformation des égalités qu'avec une addition ordinaire. Möbius définit même ce qu'est une annulation : $aA + bB + \dots + nN \neq 0$, signifie d'une part que $a + b + \dots + n = 0$ et que (par exemple) $bB + \dots + nN \neq A$. Cette définition permet d'évaluer formellement à zéro, mais la difficulté conceptuelle est toujours existante : on ne peut rien dire d'une somme qui vérifie la première condition sans la seconde.

Si le calcul barycentrique n'est pas entièrement satisfaisant d'un point de vue théorique pour l'algèbre, il s'avère par contre très performant d'un point de vue pratique dans la résolution de problèmes géométriques.

Möbius montre que les points d'une droite (respectivement d'un plan et de l'espace) peuvent s'exprimer comme les barycentres de deux (respectivement trois et quatre) points. Il établit ensuite les relations de proportionnalité qui relient les coordonnées barycentriques aux distances entre les points sur une droite, aux surfaces des triangles dans un plan et aux volumes des pyramides dans l'espace. Il montre également comment on peut faire des changements de repère barycentrique. Enfin il applique les nouvelles techniques à la résolution de nouveaux problèmes.

L'invention de Möbius est une étape importante dans la genèse du calcul vectoriel, même si elle n'a finalement pas eu d'influence sur la suite des découvertes. Le calcul barycentrique ne correspond pas entièrement à l'idéal rêvé par Leibniz, puisque l'arbitraire du choix d'un repère n'est pas écarté. Pourtant il permet de travailler directement sur les objets géométriques et donc de donner plus de sens aux opérations algébriques qui ne sont plus "aveugles". Le système proposé est pourtant plus une technique de calcul pratique et particulièrement adaptée à certains problèmes que véritablement une théorie algébrique achevée.

Möbius fut l'un des premiers à avoir connaissance des travaux de Grassmann, qui dans sa théorie de l'extension incluait le calcul barycentrique comme un cas particulier. A la suite d'une correspondance assez suivie entre les deux hommes, le premier améliora sa théorie à partir des idées du second. Après la découverte et l'acceptation d'un calcul vectoriel performant en dimension trois, le calcul barycentrique n'apparaît plus aussi intéressant, pourtant il n'en reste pas moins que cette méthode est encore utilisée et qu'elle donne pour certains types de problèmes des résolutions particulièrement adaptées. Par ailleurs, les travaux de Möbius ont inspiré Von Staudt dans sa mise au point des coordonnées projectives, qui permirent de dégager la géométrie projective de toutes considérations métriques et d'en mieux comprendre la véritable nature.

ii - Le calcul des équipollences de Bellavitis

Entre 1832 et 1835, le mathématicien italien G. Bellavitis publia différents articles dans lesquels il exposa sa théorie des équipollences. Selon ses propres aveux, cette méthode lui avait été inspirée par un livre de l'abbé Buée sur une tentative de représenter les complexes par des quantités géométriques (cf § suivant). Bellavitis, quant à lui, refusa toute sa vie une légitimité aux nombres imaginaires et sa théorie des équipollences, bien que très proche de la structure des nombres complexes, appartient entièrement au domaine géométrique.

Bellavitis définit deux lignes comme équipollentes si elles sont égales (c'est-à-dire de même longueur), parallèles et dirigées dans le même sens. On reconnaîtra bien sûr la définition moderne, si bien que ses lignes ne sont rien d'autres que nos vecteurs actuels. Il définit ensuite l'addition de deux ou plusieurs lignes arrangées de façon que l'extrémité de chaque ligne coïncide avec l'origine de la suivante. Il dit que la somme ne change pas quand on remplace une ligne par une autre qui lui est équipollente, ce qui permet de définir une somme pour n'importe quelles lignes modulo l'équipollence. Il définit également le produit d'une ligne par un nombre. Il précise alors que dans une équation (sous-entendu linéaire) comportant des lignes on peut faire les mêmes opérations que dans une équation algébrique, ce qui revient à reconnaître indirectement et en langage moderne que les vecteurs munis de l'addition forment un groupe abélien.

Bellavitis se restreint ensuite au plan. Il y définit la notion d'inclinaison, qui correspond à l'angle que fait une ligne avec l'horizontale dirigée de la gauche vers la droite, l'inclinaison est donc une mesure entre 0° et 360° , en langage moderne, elle correspond exactement à l'argument de l'affixe complexe de la ligne. Il définit alors une multiplication entre les lignes : le produit de deux lignes est une ligne dont l'inclinaison est la somme des deux inclinaisons et dont la longueur est le produit des deux longueurs. Il est bien clair, et l'auteur lui-même l'a reconnu, que ceci correspond exactement au produit des affixes complexes.

Le théorème fondamental de Bellavitis est le suivant :

"Dans les équipollences, les termes sont transposés, substitués, additionnés, soustraits, multipliés, divisés, etc... En bref, on effectue toutes les opérations algébriques qui seraient légitimes si on avait affaire à des équations, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes (i.e. les opérations sont toujours définies et univoques). Comme nous l'avons dit plus haut, les équipollences non linéaires ne peuvent se référer qu'à des figures dans un même plan."

Même si le résultat de Bellavitis est très proche de ce que l'on obtient grâce à la représentation géométrique des complexes, que nous discuterons plus en détail dans le paragraphe suivant, son œuvre reste originale et méritait à ce titre une place à part dans notre étude.

On peut bien sûr critiquer les raisons un peu sectaires qui empêchèrent Bellavitis de donner une interprétation de son travail en termes de nombres complexes, il n'en reste pas moins que cet entêtement donne à sa théorie une plus grande universalité. D'abord parce qu'il définit l'addition pour toutes les lignes de l'espace (on verra que Wessel avait fait de même) ainsi que le produit par un nombre, mais aussi parce qu'il réussit à présenter une structure algébrique sur des objets géométriques sans aucun intermédiaire de nature algébrique. Du coup sa référence est l'ensemble des réels, il ne cherche pas à établir un isomorphisme, mais il reconnaît que formellement on opère sur des lignes comme sur des nombres (réels). Dans son théorème, il identifie le statut particulier des opérations linéaires. Dans ce sens il est un des précurseurs du calcul vectoriel en géométrie de l'espace, c'est le premier à définir d'un seul coup, bien qu'implicitement, la nature des objets (pour définir les vecteurs de la géométrie, on utilise encore l'équipollence de nos jours) et leur structure d'espace vectoriel.

Enfin Bellavitis se montra très habile à donner des applications de sa méthode à des résolutions de problèmes de géométrie et de physique.

c - La représentation géométrique des "complexes"

La recherche d'un calcul géométrique intrinsèque semble avoir occupé plusieurs mathématiciens de la fin du XVIIIème siècle. Un autre grand problème qui datait d'assez longtemps et devait persister jusqu'au début du XXème siècle, et était fort débattu au début du XIXème, était celui de la légitimité des racines des nombres négatifs, et de ce que l'on appelle aujourd'hui les nombres complexes (le terme est de Gauss), mais qui s'appelaient à l'époque absurdes, impossibles ou imaginaires, etc.

Or la possibilité de trouver à ces nombres un correspondant géométrique dans le plan devait d'un seul coup, permettre non seulement de donner une réponse satisfaisante au calcul géométrique plan, mais aussi de légitimer l'utilisation des nombres complexes en montrant une certaine "réalité".

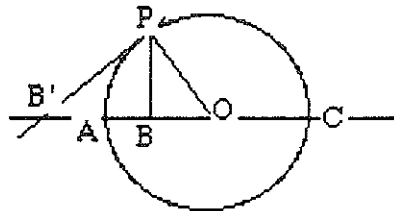
Il est remarquable de voir que le concept de représentation géométrique des complexes fut découvert à trois périodes distantes de quelques années et par au moins six mathématiciens différents, le tout très vraisemblablement de façon entièrement indépendante. Singulièrement tous sauf Gauss, c'est-à-dire : Wessel, Argand, L'abbé Buée, Mourey et Warren, n'étaient pas très connus et en marge du monde mathématique de leur temps. Ceci explique certainement en partie au moins, que bien que leurs travaux fussent tout à fait valables, ils n'eurent que peu d'influence.

En effet, il a fallu attendre que Gauss apporte sa pierre à l'édifice pour que le monde mathématique daigne s'y intéresser.

En France, Cauchy fut le premier mathématicien de renom à utiliser largement les "nombres complexes" et leur représentation géométrique, il en montra de nombreuses applications, en particulier dans ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique* ([CA] T. XIV).

On trouve une première trace de l'idée de représenter les nombres *imaginaires* par des moyens géométriques dans un texte de Wallis. Dans son *Traité d'algèbre*, publié en 1685, celui-ci essaie, à l'aide de plusieurs comparaisons imagées, de montrer que si les nombres imaginaires n'ont pas de réalité, comme pour les nombres négatifs, il n'en est pas moins possible et non absurde d'en considérer l'existence (cf extraits in [SM2], pp. 46-54). Ainsi pour lui il est naturel de considérer la moyenne géométrique de deux nombres de signes opposés, bien que celle-ci soit nécessairement un nombre *imaginaire*. Pour illustrer son propos, il donne alors une interprétation géométrique de ce fait. Sur un même axe il place trois points A, B et C dans cet ordre, tels que $AB=b$ et $BC=c$, b et c étant deux quantités positives.

Il trace alors le cercle de diamètre AC.



Il est clair que si P désigne un des points d'intersection du cercle avec la droite perpendiculaire à AC en B, la distance BP qui vaut le sinus de l'angle POB (si on prend $b+c/2$ comme unité de longueur) est égale à $\pm bc$. Wallis propose alors par analogie de représenter la moyenne géométrique de $(-b)$ et c par la tangente du même angle sur le même cercle c'est-à-dire par B'P. Mais cette interprétation n'est pas vraiment utilisée par l'auteur dans d'autres circonstances.

En fait Wallis réalise une construction géométrique en rapport avec un calcul algébrique faisant intervenir un nombre imaginaire, mais il ne réinvestit pas cette construction dans un cadre algébrique, ce manque d'opérationnalité rend sa tentative très limitée. De même il essaie ensuite plusieurs représentations géométriques, mais aucune ne s'avère très fructueuse, pour les mêmes raisons essentiellement ; si bien que si l'on peut voir en Wallis un précurseur du concept de représentation géométrique des complexes, on ne peut pas dire qu'il ait vraiment contribué à la création d'un calcul géométrique, sa préoccupation était plus de donner une légitimité aux nombres imaginaires, que de créer une structure algébrique sur les quantités géométriques.

Il faudra en fait attendre plus d'un siècle avant que des avancées significatives soient faites dans la voie de la création d'un calcul géométrique utilisant les complexes.

Dans ses œuvres, Cauchy donne un aperçu historique des découvertes dans le domaine qui nous intéresse, on y trouve les quelques lignes reproduites ici ([CA] T. XIV, p. 175, note 1) :

"Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre."

Pourtant à part par cette note de Cauchy, personne n'a jamais eu de trace de l'existence de cette première découverte. La question n'est d'ailleurs pas fondamentale, puisque quand bien même elle aurait existé, elle n'a en tout cas pas eu d'effets.

Pendant longtemps on a attribué à l'abbé Buée et à Argand, la paternité quasi simultanée de la représentation géométrique des complexes.

Du premier on présenta un *Mémoire sur les quantités imaginaires*, en français devant la *Royal Society of London* le 20 juin 1805, ce mémoire fut publié, sans traduction, en 1806 dans les *Transactions of the Royal Society*.

Le second publia un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* qui parut pour la première fois en 1806 [AR]. Mais nous reviendrons sur l'œuvre d'Argand, plus en détail plus loin.

En fait les historiens durent revenir sur ces points quand, grâce à une traduction française parue en 1897, on découvrit qu'un obscur ingénieur géomètre norvégien, nommé Wessel, avait présenté en 1797 devant l'*Académie Royale du Danemark*, un mémoire intitulé *Om directionens analytiske betegnning*. Ce texte s'avéra en effet être la première découverte (dont on ait des traces précises) de la représentation géométrique des complexes. Publiant pour la première fois de son histoire une œuvre n'émanant pas de l'un de ses membres, l'*Académie Royale du Danemark* avait fait paraître l'œuvre de Wessel en 1799. Malgré l'intérêt et la grande nouveauté du sujet ce traité ne fut pas traduit et tomba complètement dans l'oubli jusqu'en 1896 ; peu après Sophus Lie republia le texte original ; on fit paraître une traduction française l'année suivante.

Le point de départ de Wessel est géométrique, il ne cherche pas directement à justifier l'existence des nombres complexes mais selon ses propres termes *à représenter analytiquement les directions, c'est-à-dire à exprimer les lignes droites de façon que dans une équation ne faisant intervenir qu'une ligne inconnue, les autres étant connues, à la fois la longueur et la direction de la ligne inconnue puissent être exprimées*". ([WE] ou [SM2] pp. 55-66). On voit donc que la problématique de Wessel est d'élaborer des éléments d'un calcul géométrique, en fait dans la pratique Wessel ne s'intéressera qu'à un nombre très réduit de problèmes -principalement la construction et l'étude des polygones réguliers- ce qui relativise sa démarche.

Wessel commence par constater qu'avec les techniques algébriques classiques, une direction ne peut-être modifiée qu'en son opposée, si bien qu'une direction étant fixée, on ne peut considérer en même temps des lignes que dans deux directions opposées.

Il explique alors que son but est, sans en modifier les règles, de prolonger le calcul algébrique à toutes les lignes de l'espace, en prenant en compte l'infinité des directions possibles. Nous citons ci-dessous les dernières lignes de son introduction :

"Mon but dans les chapitres suivants sera :

I. D'abord de définir les règles de telles "opérations".

II. Ensuite de démontrer leurs applications quand les lignes sont dans le même plan, par deux exemples.

III. De définir la direction de lignes prises dans des plans différents par une nouvelle méthode "d'opération" qui n'est pas algébrique.

IV. Au moyen de cette méthode , de résoudre des problèmes sur les polygones plans et sphériques.

V. Finalement de déduire de la même manière les formules ordinaires de trigonométrie sphérique.

Dans la première partie, qui est celle qui nous intéresse le plus ici, Wessel part de considérations géométriques. Son point de départ concerne la variation dans la distance d'un point à un plan quand le point se déplace selon une ligne droite. Il appelle axe, la droite passant par le point et perpendiculaire au plan et distingue trois cas :

- Si la ligne de déplacement est perpendiculaire à l'axe, l'effet est nul sur la distance.
- Si elle est alignée avec l'axe (il dit alors qu'elle est directe), la distance est, d'après lui, diminuée ou augmentée d'autant que la longueur de la ligne. (Ce résultat est cependant faux, si le déplacement est tel que le point passe d'un côté à l'autre du plan!)
- Enfin quand la ligne de déplacement fait un angle oblique avec l'axe (ou est indirecte d'après son vocabulaire), seulement une partie de sa longueur est additionnée ou soustraite à la distance.

Pour expliquer l'effet de la ligne de déplacement sur la *ligne absolue* définissant la distance, Wessel définit la somme de deux lignes droites en ces termes : *"deux lignes droites sont additionnées si on les unit de telle façon que la seconde commence là où la première finit, et alors on passe une ligne droite du premier au dernier point des lignes unies."*

On retrouve dans cet énoncé la règle du parallélogramme et implicitement la notion de représentant de vecteur. Pourtant dans ce qui a précédé, en particulier dans les maladroites, on a pu mesurer combien la notion de somme de deux quantités géométriques pouvait à l'époque choquer les mentalités. Depuis les Grecs en effet, on avait l'habitude de ne caractériser les lignes que par leur longueur ; faire intervenir le sens comme le fait Wessel est déjà un fait remarquable, prendre en compte la direction, surtout dans une opération de type algébrique, représente une innovation de taille.

Dans le paragraphe deux de cette première partie, Wessel s'attache à étendre cette addition à n'importe quel nombre fini de lignes droites, dont il ne suppose pas qu'elle sont coplanaires. Il remarque que l'ordre dans lequel on additionne est sans importance, ce qui prouve qu'il utilise implicitement une relation d'équivalence sur les lignes droites (notre relation d'équipollence). Cette remarque revient bien sûr en les amalgamant à montrer l'associativité et la commutativité de la somme.

Le paragraphe trois est très court mais fort intéressant : *"Si la somme de plusieurs longueurs, largeurs et hauteurs vaut zéro, alors la somme des longueurs, la somme des largeurs et la somme des hauteurs valent chacune zéro."*

Ce court argument peut sembler anodin, il contient pourtant un des principes fondamentaux bien qu'élémentaires du calcul vectoriel en dimension trois.

Dans le paragraphe quatre, Wessel définit le produit de deux lignes se trouvant dans un même plan que l'unité. Il introduit alors, de façon assez abrupte, dès le paragraphe suivant, une ligne d'unité absolue qu'il désigne par $+1$, et une ligne unitaire, perpendiculaire et ayant même origine, qu'il désigne par le symbole $+E$. Il montre ainsi, avec les opérations définies précédemment, que -1 désigne la ligne unitaire opposée à l'unité absolue et que nécessairement $+E = \sqrt{-1}$, alors que les règles habituelles de calcul sont conservées.

Dans les paragraphes qui suivent, il établit que les rayons du cercle unité s'écrivent $\cos v + E \sin v$ et qu'enfin n'importe quelle ligne d'un plan s'écrit $r \cos v + r E \sin v$. De plus il continue de montrer que ses nouvelles opérations ne bousculent pas les pratiques déjà existantes, en particulier que l'on retrouve les formules de trigonométrie habituelles.

Ces fondations étant posées, Wessel développe ensuite le calcul des quotients et des puissance de lignes géométrique plus quelques calculs particuliers puis il donne deux applications de sa méthode à des problèmes de géométrie.

Dans un dernier temps, il développe une manière de représenter les changements de direction dans l'espace. Il commence par considérer trois unités dans des directions perpendiculaires deux à deux qu'il désigne respectivement par $+1$, $+E$ et $+η$, et montre que toutes les lignes de l'espace peuvent être représentées par une combinaison linéaire de ces trois unités. Par analogie avec ce qui précède, il pose que EE et $ηη$ sont tous deux égaux à -1 . Il définit alors la multiplication comme la rotation et l'extension d'un vecteur par l'autre. Dans ce sens, il examine le produit par $\cos u + E \sin u$ et $\cos v + E \sin v$, qui correspondent respectivement à une rotation autour de $+η$ d'angle u et autour de $+E$ d'angle v . Il montre comment ces deux opérations peuvent se combiner. Mais la difficulté apparaît dans la possibilité de représentation des rotations autour de l'axe $+1$. Ce cas n'est en fait pas envisagé par Wessel. Il paraît très probable qu'il ait buté ici et ait réalisé les sérieuses complications qu'apportent la dimension trois, sans pouvoir les surmonter.

En particulier pour pouvoir représenter les rotations autour de $+1$, il aurait fallu pouvoir définir les produits $Eη$ et $ηE$. On sait a posteriori, avec les quaternions, sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre suivant, que la solution nécessite l'introduction de quatre unités et l'abandon de la commutativité du produit. Wessel, peut-être à l'image de son époque, n'étaient pas encore assez mûrs, pour ce genre de révolution qu'Hamilton mettra de nombreuses années à mettre au point, près d'un demi-siècle plus tard. Cependant cette première tentative est un semi échec mais aussi un semi succès puisqu'elle permit à son auteur de démontrer quelques résultats intéressants en particulier de trigonométrie sphérique.

Comme nous l'avons expliqué plus haut, l'œuvre de Wessel resta ignorée, elle n'en reste pas moins la première réussite dans le domaine de la création d'un calcul géométrique et reste à ce titre exemplaire même si l'histoire lui a réservé un rôle secondaire.

Le livre de l'abbé Buée ne semble pas avoir eu beaucoup d'influence directe. Plus importante fut par contre la contribution d'Argand.

Il s'en est pourtant fallu de peu pour que son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, paru en 1806 [AR], passât inaperçu. Dans un premier temps, il ne fut pas publié et seules quelques copies -sans nom d'auteur- circulèrent dans un milieu très restreint, sans que l'audience ne semble vouloir s'élargir.

En 1813, un officier d'artillerie de Metz, J-F. Français publia dans les *Annales Mathématiques de Gergonne* (T.IV, pp.61-71) une note intitulée *Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires* (cf in [AR] pp.63-74), dans laquelle il développait les principes d'un calcul géométrique utilisant les nombres complexes. Or à la fin de cette note Français précisait : "*Je dois, au surplus, à la justice de déclarer que le fond de ces idées nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu mon frère* (Legendre la tenait lui-même d'un autre mathématicien) (...) *Je désire que la publicité que je donne aux résultats auxquels je suis parvenu puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaître, et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-même sur le sujet.*"

Bien sûr, le dit mathématicien était Argand, qui, à la lecture de la note de Français, se fit identifier. "L'affaire" suscita l'intérêt de Gergonne et de Servois. Tout ceci donna lieu à un débat resté célèbre et dont les *Annales* se firent l'écho. Tour à tour les quatre mathématiciens publièrent des notes répondant aux précédents. Finalement Argand publia un résumé remarquable de sa théorie, remaniant quelques points en s'appuyant sur les critiques de ses trois collègues ; en particulier, il donna une démonstration particulièrement satisfaisante du théorème fondamental de l'algèbre.

Parallèlement à ce débat sur la représentation des nombres complexes, Argand, Français et Servois tentèrent tous trois indépendamment et tout aussi infructueusement d'étendre le calcul géométrique à l'espace. Des trois tentatives, seule celle du dernier devait rester dans l'histoire et fut mentionnée par Hamilton, qui toutefois la connut apparemment trop tard pour pouvoir s'en être inspiré.

Contrairement à celui de Wessel, le point de départ d'Argand est algébrique. Il est en fait en ce sens plus proche de la démarche de Wallis. Comme lui, il commence par parler des nombres négatifs, dont il faut le rappeler, en ce début de XIX^{ème} siècle, la légitimité n'était pas encore acquise. Il dégage ainsi deux spécificités des nombres relatifs. *La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire ; la seconde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend 1^o l'idée*

du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées absolument; 2° l'idée du rapport des directions ou sens auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

C'est dans cette remarque que s'amorce déjà l'approche géométrique. Argand introduit en effet l'idée de sens (qu'il appelle aussi direction!) ce qui induit implicitement un modèle de représentation des réels sur un axe orienté.

Ensuite, à nouveau de même que Wallis (rien ne permet d'induire cependant une paternité), Argand se propose de chercher à exprimer la moyenne géométrique entre deux unités de directions opposées, c'est-à-dire la quantité x qui vérifie la proportion : $+1 : +x :: +x : -1$. Bien sûr, un tel x vérifie $xx = -1$ et est donc imaginaire. Voilà en quels termes Argand soulève la question et se propose de la résoudre.

"On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de 0, la progression arithmétique décroissante, car on ne peut élever x à aucun nombre positif ou négatif ; mais puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de grandeur absolue avec l'idée de direction, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives ?"

Cette réflexion nous éclaire sur la nature du débat philosophique qui est en filigrane dans tout ce qui touche à l'extension de la notion de nombre. Où se trouve donc la limite de cet imaginaire que certains cherchent à transgresser, à rationaliser pour élargir le champ du possible, alors que le poids des habitudes impose à la plupart de rester dans le domaine de ce qui a une représentation immédiate et concrète ? Argand en essayant d'analyser comment on en est venu petit à petit à ramener les nombres négatifs du côté du réel, cherche l'inspiration pour donner aux racines des nombres négatifs un aspect concret, réel. Sa réponse est simple... Encore fallait-il y penser.

"En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci à la direction négative."

De là à représenter les grandeurs réelles sur un axe, puis à considérer l'axe orthogonal passant par l'origine, il n'y a qu'un pas qu'Argand n'a plus de peine à franchir. Sur un tel axe il marque deux quantités unitaires qu'il identifie respectivement comme $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Le principe de la représentation géométrique est ainsi posé. Argand commence alors à mieux délimiter son objet, un premier pas sera de préciser les définitions des outils dont il va se servir.

Dès les premières démonstrations faisant intervenir des lignes, l'auteur remarque qu'il n'est pas nécessaire que le départ des directions soit fixé à un point unique (...) mais que KA désigne en général une grandeur égale à KA et prise dans la même direction. La notion de vecteur est ainsi déterminée bien qu'encore implicitement. Argand les appelle des lignes en direction ou lignes dirigées.

Pour relier ces lignes dirigées aux nombres complexes, il se donne alors une unité primitive et établit que les lignes parallèles à l'unité primitive s'écrivent $\pm a$ alors que les lignes qui lui sont orthogonales s'écrivent $\pm b\sqrt{-1}$. Finalement toutes les lignes dirigées s'écrivent $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui contient une partie réelle et une partie imaginaire.

Après avoir souligné l'inaptitude de dénominations telles que *absurde*, *impossible* ou *imaginaire* à désigner les racines carrées des nombres négatifs, il désigne les trois types précédents respectivement par les termes de quantité *prime*, quantité *médiane* et quantité *intermédiaire*.

Argand établit ensuite les opérations sur les nombres complexes et donne en correspondance les constructions géométriques qui s'y rapportent. Son exposé se place sous un angle de praticien plus que de théoricien, les propriétés algébriques des opérations ne sont jamais dégagées en tant que telles, ce qui est du reste la norme à l'époque. La fin de l'essai est consacrée à diverses applications du nouveau calcul.

Wessel et Argand ont bien mis à jour la même théorie et s'appliquent également à résoudre le même type de problèmes. Pourtant il est intéressant de remarquer comment leurs démarches initiales diffèrent tant sur la problématique que sur la méthode d'investigation. Le premier se place avant tout dans l'optique de recherche d'un calcul géométrique rendant compte analytiquement du concept de direction à l'aide d'une seule grandeur, alors que le deuxième

cherche à donner un sens concret à l'idée de racine de nombres négatifs. On peut suggérer que l'œuvre de Wessel est moins restrictive, en effet grâce à sa position, tout le début de son essai ne se limite pas au plan, ce n'est qu'avec la multiplication que cette restriction apparaît. Dans ce sens Wessel avait déjà jeté les fondements d'un calcul vectoriel tridimensionnel. Pourtant les idées de l'époque poussaient à reproduire le schéma des opérations connues sur les nombres réels c'est-à-dire une structure de corps et d'algèbre, ce qui ne permit pas à Wessel de prolonger son calcul géométrique à l'espace. L'existence de structures moins "complètes" n'apparaîtra vraiment qu'avec les quaternions qui sur ce point révolutionneront la notion de structure algébrique en détruisant le principe de permanence.

Sans avoir connaissance des travaux antérieurs sur le sujet, J. Warren, présenta une théorie de la représentation géométrique des complexes en 1829, dans un livre intitulé *A treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities*. La présentation de Warren est particulièrement soignée et il avait, semble-t-il, une idée assez précise des propriétés algébriques des opérations qu'il introduit.

A peu près au même moment, en 1828, en France, C. V. Mourey publie *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*. A la fin de son livre, il prétend qu'il existe une algèbre bien supérieure à celle qu'il vient d'élaborer en dimension deux, et qui s'étend à trois dimensions, mais nous ne possédons aucune trace de découvertes éventuelles.

Finalement après toutes ces publications isolées, dont les contenus n'ont fait que redécouvrir le même concept, sans jamais réussir à gagner une audience assez large pour faire école, Gauss, en 1831, grâce à un texte assez court va attirer l'attention de la communauté mathématique sur le nouveau calcul. C'est grâce à sa renommée que l'intérêt des mathématiciens va être capté et que la représentation géométrique des complexes va devenir une méthode couramment utilisée.

Gauss a prétendu qu'il avait eu l'idée d'une représentation géométrique des complexes très tôt, et il est vrai que l'on peut en voir des traces dans certains de ses écrits datant de 1799. Cependant le premier texte dans lequel on le voit exposer clairement son point de vue date de 1831. En fait l'article s'intitule *Theoria residuorum biquadraticum, commentatio secunda*. Comme son nom l'indique, il se présente plutôt comme des notes à propos de la théorie des résidus biquadratiques, que vraiment comme un exposé exhaustif sur la question de la représentation géométrique des complexes. La présentation de Gauss est très succincte est presque entièrement rhétorique. Plus que le texte en lui-même, c'est le contexte dans lequel, il fut publié qui permit de faire passer l'idée. La prise de position de Gauss joua le rôle d'amorce et permit de faire découvrir à un public très large une nouvelle théorie qui ne manquait pas de références bibliographiques. Bien sûr Gauss utilisa ensuite la représentation des complexes dans d'autres textes et contribua à en perfectionner les applications, mais il n'est pas certain qu'il ait eu une position très claire sur le bien fondé des nombres complexes et il semble bien qu'il ne leur ait jamais vraiment reconnu le statut de nombre à part entière.

L'adhésion de Cauchy est beaucoup plus franche et permet de donner aux nombres complexes la place privilégiée qu'ils occupent encore aujourd'hui au sein des mathématiques. Son *Mémoire sur les quantités géométriques* ([CA] t.XIV, pp.175-202), datant de 1847, présente la théorie de la représentation géométrique des complexes dans un exposé complet, entièrement cohérent et rigoureux et sous un aspect très moderne. Encore une fois Cauchy réalise ainsi la synthèse des travaux antérieurs, qui donna à la nouvelle théorie sa pleine maturité.

Ainsi en ce début de XIXème siècle, les nombres complexes commencèrent à changer de statut, cette transformation allait ouvrir les portes à de nouvelles recherches en particulier dans le domaine de ce qu'on appellerait l'analyse complexe. Il faudra toutefois encore plusieurs dizaines d'années pour faire tomber tous les détracteurs, qui jusqu'à l'aube du XXème siècle continuèrent leurs critiques.

Du point de vue de la géométrie et du calcul vectoriel, les conséquences dépassèrent largement la seule utilisation possible en géométrie plane. On a vu que presque tous ceux qui ont eu l'idée de la représentation géométrique des complexes, ont dans la foulée essayé de généraliser leur méthode à l'espace. Le rêve d'un calcul géométrique intrinsèque, en germe depuis Leibniz, prit en effet, avec cette nouvelle possibilité, des allures de réalité. Si bien que dans la première moitié du XIXème siècle de nombreux mathématiciens se lancèrent dans la prospection de ce que l'on appela les systèmes hypercomplexes.

d - Les quaternions et les systèmes hypercomplexes.

W. R. Hamilton acquit très jeune une solide renommée. Sa réussite exceptionnelle au *Trinity College* de Dublin fit le tour des cercles d'intellectuels dublinois. Si bien qu'alors qu'il était encore undergraduate, il se vit proposer une chaire d'astronomie et fut bientôt nommé *Royal Irish Astronomer*. A l'âge de trente-deux ans, il fut élu président de la *Royal Irish Academy*. Ses premiers travaux portaient en apparence sur l'optique, mais en fait leur contenu était entièrement mathématique. De plus la méthode géométrique mise au point dans ces recherches avait également des applications en dynamique.

C'est vers les années 1830, qu'il porta de façon décisive son intérêt sur la nature de l'algèbre. En 1835, il publie sa *Theory of conjugate functions or algebraic couples ; with an elementary essay on algebra as the science of Pure Time* ([HA1] V.III, pp.3-97), dont on trouve un résumé substantiel et commenté par l'auteur dans la préface des *Lectures on Quaternions* ([HA1] V.III, pp.117-159).

Dans cet article dont la teneur est tout autant de nature philosophique que mathématique, Hamilton élabore une interprétation de "*l'algèbre non plus seulement comme un Art, un Langage ou une science avant tout de la Quantité, mais plutôt comme une science de l'Ordre en Progression. Dans cette conception, il est entendu que la Progression dont il est question est comprise comme étant continue et unidimensionnelle : s'étendant indéfiniment en avant et en arrière, mais dans aucune direction latérale. Et bien que les états successifs d'une telle progression puissent (sans doute) être représentés par des points sur une ligne, [j'ai cependant pensé que] leur simple succession serait mieux conçue en les comparant à des instants (moments) dans le temps, débarrassés toutefois de toute référence de cause à effet ; de façon que le Temps considéré ici puisse être dit abstrait, idéal, pur, comme cet Espace, qui est l'objet de la géométrie. De cette façon [Hamilton] fut conduit à regarder l'Algèbre comme LA SCIENCE DU TEMPS PUR*".

On reconnaît bien sûr une familiarité avec Kant, mais Hamilton a lui-même dit n'avoir eu connaissance de l'œuvre du philosophe allemand qu'après avoir élaboré sa propre théorie.

Hamilton reprend ainsi en détail toutes les opérations algébriques classiques sur les nombres et en donne une interprétation en terme d'*instants* et de *moments* (*steps in time*). En les interprétant comme des retours dans le temps, les quantités négatives trouvent du coup, dans sa théorie une place de choix, qu'on ne leur accordait pas encore à l'époque, dans l'algèbre classique. Pourtant Hamilton reconnaît que dans son système, pas plus que dans le système traditionnel, il n'y a de place pour les nombres dont le carré serait négatif.

Pour répondre à cette demande, il élabore alors une algèbre sur des couples d'*instants* et de *moments*. Il définit d'abord une addition de ces couples, puis une multiplication par un "scalaire" a , qu'il interprète bientôt comme la multiplication par le couple $(a,0)$. Il cherche ensuite à définir une multiplication des couples entre eux, c'est-à-dire en fait la multiplication d'un couple de *moments* par un couple de nombres. Plus ou moins implicitement, il cherche une loi qui conserve les propriétés "habituelles" des opérations. Cette démarche n'est cependant pas encore toujours clairement explicitée. Néanmoins en suivant cette voie et en essayant de prolonger les cas particuliers déjà définis, il en arrive, après avoir explicité des critères d'esthétique et de simplicité, à la conclusion que la loi de multiplication ne peut avoir qu'une seule forme (à un "isomorphisme" près) qui est : $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Il lui est facile alors de remarquer que $(0,1)(0,1) = (-1,0)$.

Avec ses couples algébriques ou ses fonctions conjuguées, Hamilton construit donc un modèle des nombres complexes en terme de couples de réels sur lesquels on a construit des lois vérifiant certains principes de permanence. Cette démarche, qui avec les recherches ultérieures d'Hamilton va prendre encore un caractère beaucoup plus systématique et explicite, jette un regard entièrement nouveau sur la nature de l'algèbre. On peut dire qu'Hamilton, comme d'autres algébristes anglais de la même époque, qui ont des approches cependant différentes et indépendantes (cf chap IV-§1)), est un des premiers à pressentir le concept de structure algébrique. En dépit de son interprétation en terme de Temps Pur, il montre surtout qu'il est possible d'élaborer une algèbre cohérente sur des objets purement formels, en suivant une problématique uniquement interne à la nature des opérations.

Poursuivant son but, en le rendant de plus en plus formulable, Hamilton essaie ensuite d'élaborer une algèbre sur les triplets. Il lui semble en effet tout à fait normal de prolonger ses recherches naturellement dans cette voie, et comme on a pu donner des complexes une interprétation géométrique dans le plan, il espère pouvoir également donner de ces triplets une interprétation dans l'espace. Les premières opérations (addition, multiplication par un scalaire) sont créées ainsi sans difficultés. Il semble par contre beaucoup plus délicat de construire une

multiplication entre triplets. Dans ses prospections le mathématicien irlandais est en contact avec d'autres chercheurs qui poursuivent le même but, comme J. T. Graves et A. De Morgan. Les trois hommes se lancent dans des tentatives qui échouent toutes dans un premiers temps. Après une période de semi abandon, il semble que les recherches reprennent sur ce sujet au début de l'année 1843. A cette période Hamilton a clairement délimité l'objet de sa recherche. Les nouveaux nombres et leurs opérations devront dans son esprit vérifier les propriétés suivantes :

- L'associativité pour l'addition et la multiplication.
- La commutativité pour l'addition et la multiplication.
- La distributivité de la multiplication sur l'addition.
- La division ne devra pas être "ambiguë", c'est-à-dire que quels que soient les triplets T et T', il existe toujours un et un seul triplet D tel que $TD=T'$.
- La propriété des modules sera respectée, c'est-à-dire que si $a^2+b^2+c^2$ est le carré du module du triplet (a,b,c), le carré du module du produit de deux triplets est égal au produit des carrés des modules.

Les propriétés d'existence d'un élément neutre pour l'addition comme pour la multiplication n'ont jamais été explicitées par Hamilton. En fait, elles sont en quelque sorte incluses dans la définition de ce que sont une addition et une multiplication pour Hamilton. L'existence d'un symétrique pour l'addition fait de même corps avec la nature de l'opération. Si bien qu'avec ces implicites, on peut dire en langage moderne, qu'il cherche à construire sur $\mathbb{R}^3$, une structure de corps commutatif, muni d'une norme multiplicative. De plus comme il voit la multiplication externe comme un cas particulier de la multiplication des triplets : $a(b,c,d)=(a,0,0)(b,c,d)$, on peut dire qu'il cherche en plus une structure d'espace vectoriel.

Cette idée qu'une nouvelle structure algébrique devait vérifier toutes les propriétés de $\mathbb{R}$, était très forte à l'époque et les résultats sur les nombres complexes encourageaient à chercher dans cette voie. On appelait cela le principe de permanence. La découverte des quaternions devait être le premier coup porté à ce principe, puisqu'on avait dû abandonner la commutativité, il s'effondra entièrement quand Frobenius et C. S. Peirce démontrèrent, en termes modernes, que $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les quaternions sont les seuls corps qui soient une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension finie.

Après de nombreuses tentatives sur les triplets, Hamilton qui avait de plus en plus orienté ces recherches vers une interprétation des vecteurs de l'espace en vint à de nouvelles considérations. Une des idées fondamentales qui le mit sur la voie des quaternions est l'analyse qu'il fit du rapport de deux vecteurs ([HA2], T.I, pp.107-163 et [SM2] pp.677-683). Il explique que, pour rendre compte du rapport de deux vecteurs de l'espace il faut connaître le rapport des longueurs des deux vecteurs et une rotation qui permet de passer de la direction du premier à celle du second. Il est donc nécessaire de disposer de quatre éléments, *un sert à déterminer la longueur relative des deux lignes comparées, et les trois autres sont en général nécessaires pour déterminer entièrement leur direction relative. A nouveau, de ces trois derniers éléments, un représente l'inclinaison mutuelle, ou l'élongation des deux lignes, ou la grandeur de l'angle qu'elles forment, alors que les autres servent à déterminer la direction de l'axe, perpendiculaire à leur plan commun, autour duquel une rotation de l'angle précédent est effectuée, dans un sens sélectionné auparavant comme positif, pour passer (de la façon la plus simple et donc dans le plan des deux lignes) de la direction de la ligne-diviseur à la direction de la ligne-dividende.*

Cette remarque fondamentale va lui permettre, en abandonnant la voie des triplets, de mettre sur pied la théorie des quaternions, qui sont à un isomorphisme près des quadruplets de réels.

Poursuivant l'idée précédente, il considère trois rotations autour de trois axes rectangulaires, chacune d'angle droit, ce qu'il appelle des *versors*. Algébriquement ces trois rotations qu'il note i, j et k vérifient les propriétés fondamentales : $ij=k$, $ji=-k$, $ik=-j$ et $ki=j$ et $i^2=j^2=k^2=-1$. A partir de là, Hamilton construit les lois d'addition et de multiplication sur les nombres de la forme $q=w+xi+yj+zk$, où les quantités w, x, y et z sont des réels. Sur l'ensemble des quaternions ainsi définis, le principe de permanence est presque entièrement conservé à l'exception remarquable que la multiplication n'est pas commutative.

Bien que la non commutativité de la composition des endomorphismes fût connue, la découverte des quaternions fut sur ce point beaucoup plus importante et joua un rôle fondamental dans la réflexion autour du concept de loi de composition.

Les quaternions fournissent également un calcul géométrique très intéressant. Dans un quaternion on distingue en effet la partie scalaire : w, de la partie vectorielle $xi+yj+zk$. On peut représenter de façon univoque chaque vecteur de l'espace par une partie vectorielle de quaternion, ce qu'on appelle un quaternion pur. La somme et le produit par un scalaire induits de ceux sur les quaternions, fournissent ainsi la structure linéaire. Le produit de deux vecteurs

$(xi+yj+zk)(x'i+y'j+z'k)$ n'est pas un vecteur, mais il est constitué d'une partie scalaire, qui est ce que l'on appelle aujourd'hui le produit scalaire, alors que sa partie vectorielle, est le produit vectoriel. On définit sur les quaternions une conjugaison et une norme sur le modèle des complexes. Un quaternion pur se caractérise par le fait que son conjugué est égal à son opposé et la norme d'un quaternion pur correspond à la norme euclidienne. Enfin les quaternions sont particulièrement pratiques pour représenter les rotations, puisqu'à un coefficient multiplicatif près chaque q définit une unique rotation : $u \mapsto quq^{-1}$.

Hamilton et ses successeurs développèrent largement les applications des quaternions à de nombreux problèmes de géométrie aussi bien que de physique.

La popularité de l'auteur et la foi qu'il mit dans sa découverte assurèrent une célébrité internationale immédiate aux quaternions. Hamilton, qui consacra les vingt-deux dernières années de sa vie à prolonger ses recherches sur les quaternions, dont il pensait qu'ils allaient révolutionner les mathématiques, créa autour de lui une véritable école quaternioniste. Dans le domaine de la physique mathématique les deux grands héritiers d'Hamilton sont Taits et Maxwell, le premier fit découvrir au second, qui avait déjà jeté les bases de sa théorie de l'électromagnétisme, les possibilités des quaternions et les deux amis développèrent une théorie qui resta longtemps sans égale. La grande puissance des quaternions vient de la facilité d'utilisation qu'ils offrent dans les calculs vectoriels et principalement dans l'utilisation des concepts différentiels, ils permettent d'alléger des formules, donc de les rendre plus lisibles et d'en étendre le champ des utilisations.

La renommée des quaternions dépassa également les frontières du Royaume Uni. En France, A. Allégret fut un des premiers, en 1862, à publier un ouvrage sur les quaternions non écrit par Hamilton ; en Italie Bellavitis se fit l'ambassadeur du nouveau système de nombres hypercomplexes, enfin aux Etats-Unis la théorie d'Hamilton inspira l'œuvre de Benjamin Peirce, dont on a pu dire qu'elle fut la première contribution américaine originale aux mathématiques.

Pourtant les quaternions ne devaient jamais réellement révolutionner le monde des mathématiques comme le pensait leur créateur. Leur contribution originale est loin d'être négligeable, mais elle doit être relativisée. En 1894, les *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* se firent l'écho d'une querelle, qui avait éclaté entre Taits et Cayley au sujet de l'importance des quaternions, le premier soutenait que ceux-ci avaient apporté à la géométrie en dimension trois un outil sans égal, alors que le second, quoique soutenant l'intérêt des quaternions en tant que structure algébrique originale, non seulement soulignait le caractère restrictif de leur représentation limitée à la dimension trois mais aussi pensait que leur application à la géométrie n'était qu'une façon déguisée de faire des calculs sur les coordonnées cartésiennes. Il montra sur des exemples, que les simplifications apportées dans les calculs par l'emploi des quaternions, qui rendent les raisonnements plus synthétiques, masquent la signification du résultat qu'il faut traduire en termes de coordonnées cartésiennes pour le comprendre. Comme souvent, la réalité se trouve sûrement entre ces deux positions un peu extrêmes. Que les quaternions restent limités à la dimension trois est sûrement la critique de fond qui est la plus importante. Les développements ultérieurs du calcul vectoriel montrèrent combien cette restriction était un obstacle. Les dernières critiques de Cayley peuvent par contre s'appliquer à tous les systèmes de calcul vectoriel. Elles sont en fait très semblables aux reproches que Leibniz a fait à l'utilisation des coordonnées en géométrie (cf § 1).

Dans le domaine du calcul vectoriel, la découverte de Grassmann, contemporain d'Hamilton mais qui resta toute sa vie incompris, finit néanmoins, après quelques adaptations, par prendre le dessus sur le calcul avec les quaternions, on reconnut ainsi la supériorité du calcul de l'extension, comme modèle de calcul vectoriel. En physique cependant, et en particulier dans les domaines de l'électricité et de l'électromagnétisme, l'utilisation des quaternions fut plus efficace et aussi plus durable. Il n'en reste pas moins que le calcul vectoriel moderne a supplanté les quaternions dans tous les domaines, et que ceux-ci ne sont plus utilisés que comme des curiosités.

La non commutativité du produit des quaternions reste leur attrait principal ; quand C.S. Peirce et Frobenius eurent démontré, indépendamment, qu'ils représentaient le seul exemple de R -algèbre non commutative de dimension finie, qui soit aussi un corps, leur spécificité algébrique les rendit uniques, ce qui assura leur pérennité. L'abandon de la commutativité fut le point de départ de l'émergence du concept de loi de composition interne et de l'étude des propriétés de ses lois, dont Hamilton avait introduit et nommé pour la première fois les principales. Prolongeant les vues d'Hamilton, Graves et Cayley créèrent indépendamment et à deux ans d'intervalle, le premier les *Octonions* et le deuxième les *Octaves*, qui sont les mêmes objets et que l'on peut voir comme des couples de quaternions formant, en langage moderne, un

$\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension huit, muni d'un produit qui n'est ni commutatif, ni associatif. Comme la découverte des quaternions avait été guidée par la représentation des rotations dans l'espace, les octaves répondent au même problème pour la dimension quatre.

A la suite d'Hamilton et de Cayley, on se dirigea plutôt vers la recherche d'algèbre sur les n -uplets, en abandonnant l'existence d'inverses mais en essayant de conserver l'associativité du produit, ce que l'on appela, après Frobenius, les systèmes hypercomplexes.

B. et C.S. Peirce contribuèrent largement à l'avancée de cette théorie à partir des années 1870. A leur suite, vers la fin du siècle, devant l'infinité des possibilités, on en vint à poser des conditions intrinsèques sur ces systèmes. Cette théorie devait bientôt rejoindre d'autres préoccupations sur les anneaux et les corps, elle fut très en vogue parmi les élèves de S. Lie.

Un type de systèmes hypercomplexes qui joue encore un rôle important dans la théorie des groupe de Lie et en topologie différentielle porte le nom d'algèbre de Clifford. Ces nombres furent en effet découverts par W. Clifford en 1878, ils forment une $\mathbb{R}$ -algèbre non commutative de dimension $2n$, et permettent de représenter les rotations dans les espaces de dimension n .

Les quaternions n'eurent donc qu'une suprématie éphémère sur le calcul vectoriel, mais leur contribution à l'émergence de l'algèbre linéaire est beaucoup plus fondamentale, si ce n'est directe. Ils suscitèrent par effet reporté l'exploration des structures linéaires de dimension plus que trois et jouèrent un rôle fondamental dans l'émergence des concepts de loi de composition et de structure algébrique.

e - Grassmann et sa théorie de l'extension

A la même époque qu'Hamilton, en Allemagne, vécut un mathématicien qui, faute de renommée, resta toute sa vie un obscur professeur du secondaire. Pourtant ses travaux méritaient encore plus que ceux du chercheur irlandais, que l'on s'y intéressât. Même la postérité n'a qu'à moitié rendu justice à son génie méconnu. Or une bonne reconnaissance de son œuvre, à son époque, l'eût certainement placé au panthéon des mathématiciens ; le mépris de sa position et surtout la trop grande distance philosophique qui séparait Grassmann du monde scientifique de son temps, l'isolèrent d'une communauté qui ne l'accepta jamais comme l'un des siens, il n'obtint jamais de poste à l'université. On ne reconnut les mérites de ses recherches que lorsqu'elles furent enfin comprises après que d'autres travaux en eurent redécouvert des résultats partiels, quelques décennies plus tard.

H. G. Grassmann était le troisième d'une famille de douze enfants. Son père, J. G. Grassmann, théologien de formation enseignait les mathématiques et la physique au lycée de Stettin. Il publia quelques articles de recherche, en particulier une théorie de l'espace (*Raumlehre*), dont son fils fit plus tard référence. A l'opposé d'Hamilton, ce dernier était un étudiant médiocre, qui après des études sans brio obtint un poste d'enseignant au lycée technique de Berlin. Après un an dans la capitale allemande, il revint s'installer à Stettin, où il passa le reste de sa vie à enseigner dans différentes écoles secondaires. Malgré cet extérieur morne, H.G. Grassmann était un être passionné et doué d'une puissance de travail remarquable. Outre les mathématiques et la physique, il s'intéressait aux langues et à la théologie et publia des livres dans tous ces domaines, il éleva également une famille de onze enfants.

Le premier travail scientifique d'importance de Grassmann concerne une théorie du flux et du reflux : *Theorie der Ebbe und Flut*, qu'il acheva en 1840 mais qui ne fut jamais publiée entièrement de son vivant. Dans cet ouvrage, Grassmann expose déjà les principes de ce qui allait devenir en 1844 son *Ausdehnungslehre*, que l'on peut traduire par théorie de l'extension. Un extrait d'une lettre de 1847, qu'il envoya à Adhémar Barré, Comte de Saint-Venant, qui venait de publier deux ans plus tôt, un article de six pages exposant des idées proches de celle de Grassmann, bien que beaucoup moins complètes [SA], nous renseigne sur ce fait.

"Comme je lisais l'extrait de votre article sur les sommes et les différences géométriques, qui a été publié dans les "comptes-rendus", je fus frappé par la merveilleuse similitude entre vos résultats et les découvertes que j'ai faites déjà aussi tôt que 1832. (...)

J'ai conçu ma première idée de la somme et de la différence géométriques de deux lignes et plus, et aussi du produit géométrique de deux ou trois lignes lors de cette année (1832). Cette idée est en tous points identique à celle présentée dans cet extrait de votre article. Mais puisque je fus pendant longtemps occupé à des fins toutes différentes, je ne pus développer cette idée. Ce fut seulement en 1839, que je fus conduit à nouveau vers cette idée et que j'ai poursuivi cette analyse géométrique jusqu'à un point, où elle devrait être applicable à toute la mécanique. Il m'a été possible d'appliquer cette méthode d'analyse à la théorie des marées, et je fus, par là, étonné de la simplicité des calculs qui en résultèrent." ([CR] p.56).

Ces "idées" que Grassmann avait découvertes plus de dix ans avant Saint-Venant, sont les suivantes. La remarque de départ est que la ligne BA est l'opposée de la ligne AB, suite à quoi on définit la somme des lignes de même direction, puis celles de lignes quelconques en nombre quelconque (fini). La différence est définie par opposition à la somme. On a vu que ce premier pas, en germe dans le parallélogramme des forces avait été franchi par plusieurs chercheurs de cette époque. Mais les deux hommes vont plus loin, ils commencent par voir que la différentiation n'utilisant que les sommes, les différences et les multiplications ou divisions par un scalaire, le calcul différentiel peut être facilement prolongé aux quantités géométriques. Ceci permet par exemple d'exprimer la loi fondamentale de la dynamique sous forme "vectorielle".

Grassmann et Saint-Venant définissent également le produit de deux lignes comme étant l'aire relative du parallélogramme orienté, si bien que quand on inverse les termes du produit, celui-ci change de signe. Ils définissent également le produit de trois lignes ou d'un parallélogramme par une ligne comme le volume relatif du parallélépipède orienté. Ils définissent alors sur ces quantités géométriques des opérations d'addition et de soustraction et y appliquent le calcul différentiel. Chacun présente des applications à la mécanique.

On reconnaît bien sûr dans cette démarche une similitude avec les idées de Möbius. Pourtant il est important de signaler que d'abord Grassmann a dit n'avoir eu connaissance du contenu du Calcul Barycentrique qu'après avoir élaboré son propre système, et qu'ensuite il est clair que même si Möbius a eu l'idée d'aire et de volume relatifs, il n'a jamais envisagé de les concevoir comme des produits de lignes.

Le système que propose Grassmann est donc une œuvre originale. Ses vues dépassent, même dès 1840, celles de Saint-Venant. Par exemple, au lieu de considérer le produit de deux lignes comme seulement l'aire relative du parallélogramme, il le définit comme le parallélogramme lui-même si bien que deux produits sont égaux ssi non seulement les aires sont égales et de même signe mais encore si les deux paires de lignes sont dans des plans parallèles. Son produit géométrique, qui dans l'*Ausdehnungslehre* sera appelé *produit extérieur*, est donc très proche du produit vectoriel actuel, il en porte les mêmes caractéristiques mais au lieu d'être un autre vecteur, donc un objet de même nature, c'est un objet d'ordre supérieur, ceci est un des principes fondamentaux de la théorie de l'extension.

Grassmann est également amené à considérer que le produit de deux points est un vecteur. De plus il met en évidence la plupart des propriétés, ce qu'il appelle des *harmonies*, de ces lois qui lui font entrevoir les possibilités de son nouveau système.

Alors que Saint-Venant ne développa pas plus avant ses idées, ses recherches devaient mener Grassmann à l'élaboration d'une théorie d'un niveau très élevé qui reprend les quelques notions résumées ci-dessus en les englobant dans un tout beaucoup plus vaste et aussi beaucoup plus complexe. L'aboutissement de ce travail est la parution en 1844 d'un ouvrage intitulé "*Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.*"

Cette œuvre est quelque chose d'unique dans l'histoire des mathématiques. Les idées qui y sont exposées aussi bien que la forme imprégnée de considérations philosophiques, avaient à leur époque un aspect entièrement nouveau qui en rendit l'accès particulièrement difficile, si bien que la complexité de l'œuvre est sûrement la raison principale de son échec.

Dans une introduction de nature philosophique, Grassmann commence par présenter dans les grandes lignes, sa vision des mathématiques. Grassmann était certainement conscient de la difficulté d'accès de son ouvrage. Il a dit que cette introduction pouvait être sautée sans que cela ne nuise à la compréhension du reste de son ouvrage. Ceci n'est cependant pas tout à fait exact. En effet ces quelques pages, s'il est vrai qu'elles ont rebuté la plupart des premiers lecteurs à cause de leur grande généralité, sont en quelque sorte la clé du génie de Grassmann, et nous éclaire d'autant sur le contenu mathématique qui suit. D'un point de vue historique et épistémologique, elles représentent en tous cas un témoignage fondamental pour comprendre comment une telle théorie a pu émerger. Pour une étude approfondie de ce passage nous renvoyons à l'article de D. Flament [FL], sur lequel nous nous sommes appuyés.

Grassmann commence par faire une distinction entre les sciences *réelles*, qui figurent l'être dans la pensée -un être lui-même indépendant de la pensée- et les sciences *formelles*, qui ont pour objet ce qui est posé par la pensée elle-même. Au sein des sciences formelles, il distingue celles qui examinent les principes généraux (la dialectique ou logique), de celles qui examinent le particulier posé par la pensée (la mathématique pure). La mathématique pure est la science de l'être particulier en tant que devenu par la pensée. Nous appelons l'être particulier, pris dans ce sens, une forme-pensée ou tout simplement une forme. Ainsi la mathématique pure est théorie des formes. (les citations sont données dans la traduction proposée par D. Flament)

Cette distinction permet de mieux comprendre la position de Grassmann par rapport à la géométrie, celle-ci est du domaine des sciences réelles, puisqu'elle se réfère à un être réel : l'espace. La théorie qu'il se propose de créer est, elle, entièrement du domaine du formel, et la géométrie ne peut ainsi être considérée que comme une application de la théorie des formes en fonction d'une perception que l'on a du réel et de l'espace. Cette vision fondamentale permet à Grassmann d'entrevoir la possibilité d'une théorie aussi vaste qui dépasse et transcende le seul domaine de la géométrie. D'un autre côté, on peut comprendre comment de telles idées mises en avant de son propos mathématique ont pu rebuter les mathématiciens de l'époque, qui n'étaient pas prêts à envisager la géométrie et ses rapports avec l'algèbre sous cet angle. D'autant que cette prise de position va influencer toute la forme du livre. Grassmann présente en effet les concepts sous leur aspect le plus général. La géométrie lui sert d'appui intuitif, aussi bien que de terrain d'applications (il en donne certaines à la fin de chaque chapitre), mais son propos premier est une théorie essentiellement abstraite, qui l'oblige à l'introduction de nombreux concepts nouveaux associés à beaucoup de vocabulaire. Ce point de vue méthodologique qui aujourd'hui nous semble satisfaisant autant que familier était inconnu à l'époque et fut largement reproché à Grassmann.

Après ce préambule très général, l'auteur pose les piliers de sa théorie. Pour lui, *une forme créée par la pensée peut l'avoir été de deux manières : soit par un acte simple générateur, soit par un acte double de pose et de liaison ; le premier acte donne la forme continue ou la grandeur au sens étroit, le second donne la forme discrète ou forme-liaison*. De plus il distingue le concept du distinct par lequel un être devenu est coordonné à un autre particulier et le concept de l'égal par lequel il est sub-ordonné avec d'autres particuliers à un général commun. Du croisement de ces deux distinctions, dont il précise que les limites ne sont pas toujours très nette, il déduit une séparation en quatre genres qui divisent les formes. On reporte ci-dessous d'après le schéma proposé par Flament, ces quatre types :

DISCRET / DISTINCT Théorie des combinaisons	CONTINU / DISTINCT Grandeurs extensives Ausdehnungslehre
DISCRET / EGAL Théorie des nombres	CONTINU / EGAL Grandeurs intensives Théorie des fonctions calcul intégral et différentiel

Grassmann porte donc son intérêt sur ce qu'il appelle les formes continues distinctes. Il précise en ces termes sa définition : *"Le devenir continu, analysé dans ses moments, paraît telle une génération continue en fixant ce qui est déjà devenu. Dans la forme d'extension, ce qui est en train d'être engendré est chaque fois posé comme une chose distincte ; si maintenant nous ne fixons pas à chaque fois ce qui est devenu, nous parvenons au concept de changement continu. Nous appelons élément générateur, ce qui subit ce changement, et, quelque soit l'état que prend l'élément générateur lors de son changement, il est élément de la forme continue."*

Pour illustrer son propos, Grassmann donne l'exemple d'un point qui, en se déplaçant de façon continue engendre la ligne, de la même façon qu'une ligne se déplaçant selon une autre ligne engendre un parallélogramme... Ce seront dans la suite les exemples qui lui permettront de donner les premières applications de sa théorie. Il définit alors un *Domaine ou Système*, c'est *l'ensemble de tous les éléments qui peuvent être engendrés suivant la même loi*. Par exemple une droite est le domaine des points engendrés à partir d'un point et d'un déplacement dans une direction, c'est un *système de premier échelon*. Si il y a deux lois de changements distinctes (i.e. des déplacements dans deux directions), le domaine est un plan donc un *domaine de deuxième échelon*, si on ajoute une troisième direction indépendante, alors tout l'espace infini est engendré (comme système de troisième échelon) au moyen de ces trois directions.

En géométrie, on ne peut aller au delà de trois directions, mais dans l'Ausdehnungslehre, le nombre de directions indépendantes peut croître à l'infini.

Pour finir cette introduction, Grassman propose une théorie générale des formes, qui selon lui devrait précéder toutes les théories en mathématiques pures, puisqu'elle présente toutes les vérités qui ne supposent que les concepts généraux d'égalité, de diversité, de liaison et de séparation. Cette présentation, qui est d'un degré d'abstraction exceptionnel pour l'époque, est en fait une étude des structures algébriques possibles sur les formes. L'approche de Grassmann est très moderne. Après avoir défini le concept d'égalité, qui apparaît sous l'aspect plus général de relation d'équivalence, il définit ce qu'il appelle une *liaison synthétique*, qui est en langage

moderne une loi de composition interne. Une liaison synthétique est dite *simple* si elle possède les propriétés de *commutativité* et d'*associativité*. A partir d'une liaison synthétique, il définit ensuite la liaison analytique correspondante qui est en fait la loi réciproque. Il déduit alors les propriétés principales de composition avec ses deux lois, il définit la *forme indifférente* qui est l'élément neutre et il donne, dans le cas de liaisons simples, l'équivalent de la règle des signes dans la suppression des parenthèses. A la fin de cette première partie Grassmann donne le nom d'*addition* à une liaison synthétique simple et de *soustraction* à la loi analytique associée, ce qui devait éclairer tout en le rendant sceptique le lecteur de l'époque.

Ces vues particulièrement généralistes et très abstraites étaient en effet loin des habitudes de ce milieu du XIX^{ème} siècle. Il faut comprendre qu'un tel exposé pouvait choquer le lecteur au point de lui faire renoncer à poursuivre.

Dans la même verve Grassmann définit ensuite une deuxième liaison *d'échelon plus élevé suivant*, et en définit la propriété de *distributivité* par rapport à la première. Il appelle cette liaison une *multiplication*. Puis il définit la division, ou plutôt les divisions car sa multiplication n'est pas nécessairement commutative. Il établit pour finir quelques règles de calcul.

Cette introduction est donc un passage fondamental. Du point de vue du contenu, elle n'est pas vitale pour la suite, mais par sa forme et les choix tant épistémologiques que méthodologiques qui y sont faits, elle est très importante pour le lecteur et surtout pour l'historien. A sa lecture on mesure l'originalité de son auteur, et on comprend mieux la nature de son œuvre. Grassmann met à jour dans ces quelques pages des concepts entièrement nouveaux, qui jouent un rôle central dans la façon actuelle d'aborder l'algèbre linéaire, et ses relations avec la géométrie.

Sa définition du concept de générateur avec ses multiples facettes, la possibilité pour la dimension de croître à l'infini justement en rapport avec le concept de génération, l'idée que la géométrie n'est qu'une application de la théorie de l'extension beaucoup plus vaste, sont des points qui apparaissent ici pour la première fois.

La méthodologie qu'il emploie, enfin, est particulièrement moderne et révolutionnaire pour son temps. Exposer les concepts les plus généraux, pour ensuite en voir les applications concrètes comme il nous le propose ici est le point de départ de la démarche générale pour l'étude des structures algébriques, qui ne sera mise au point qu'au siècle suivant. Etant donnée l'époque, Grassmann joue ici le rôle de précurseur et est en avance de plusieurs décennies.

Commenter le détail du contenu mathématique de l'*Ausdehnungslehre* prendrait beaucoup de place et ce travail ne peut entrer dans le cadre restreint de notre étude. La matière théorique qu'il contient est vaste et pour la plupart, les concepts introduits sont neufs et très riches. Par ailleurs pour présenter les grandes lignes de la démarche de Grassmann, nous préférons nous référer à l'édition de 1862. Dans cette dernière, l'introduction telle que nous l'avons présentée ci-dessus a été supprimée, et le contenu mathématique strict a été remanié et enrichi des dernières découvertes de l'auteur, y compris par sa lecture des travaux de ses contemporains.

Dans un style qui lui reste très personnel, Grassmann a non seulement anticipé tous les grands concepts du calcul vectoriel, mais ses travaux sont aussi très proches d'une théorie des espaces vectoriels tels qu'on les envisage aujourd'hui.

Dans cette théorie, le point d'un espace général formel est l'élément de base. Une combinaison linéaire de points, dans un sens équivalent à celui de Möbius, est une forme de première espèce. En particulier si la somme des poids ou des coefficients du système de points est nulle, la forme définie est un "vecteur". On voit ici comment Grassmann réussit à déjouer la difficulté sur laquelle Möbius avait buté. Par exemple un vecteur peut être représenté par la différence de deux points : l'origine et l'extrémité. Grâce à la multiplication extérieure, on peut alors construire des formes d'espèce de plus en plus élevée (en géométrie on s'arrête à la quatrième espèce). Sur l'ensemble des formes de chaque espèce, Grassmann met en évidence une structure algébrique, qui est en fait la structure d'espace vectoriel. Grâce, à la fin de chaque chapitre, à des applications tant en géométrie que dans divers domaines de la physique, l'auteur montre comment sa théorie peut permettre de résoudre efficacement de nombreux problèmes. Il introduit outre le *produit extérieur*, dont on a vu qu'il était pour la dimension trois, l'équivalent de notre produit vectoriel, également un *produit intérieur* qui est, lui, l'équivalent du produit scalaire.

Dans l'édition de 1862, Grassmann est très proche d'une définition abstraite de la notion d'espace vectoriel, et la linéarité des opérations qu'il utilise est centrale dans son étude. Les notions formelles d'indépendance linéaire, de base ou de dimension de ce qu'il appelle un système ou domaine sont clairement dégagées. Pour la première fois, on trouve l'équivalent de la formule sur la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels :

$$\text{Dim}(F+G) = \text{Dim}F + \text{Dim}G - \text{Dim}F \cap G.$$

Enfin, bien que les principes fondamentaux soient les mêmes qu'en 1844, il s'est inspiré, surtout pour la forme de présentation, des recherches d'Hamilton et de Cayley sur les systèmes hypercomplexes. Dans ce sens, ce qu'il présente contient les fondements de ce que l'on appela à sa suite l'algèbre extérieure. Mais l'introduction d'un produit régressif, particulièrement complexe, nuit à la lisibilité de cette partie de l'œuvre de Grassmann. Il faudra attendre que H. Poincaré et surtout E. Cartan s'intéressent à nouveau à ce sujet, dont ils montrèrent l'importance en Géométrie Différentielle, pour que l'on redécouvre ce passage.

En fait l'œuvre de Grassmann, incomprise en son temps, fut l'objet de plusieurs découvertes ultérieures partielles, qui chaque fois dévoilèrent une portion de son génie, jusqu'au milieu du XX^{ème} siècle. Ce n'est que petit à petit que l'on comprit que sa théorie de l'extension était une anticipation des théories de l'algèbre linéaire et même de l'algèbre multilinéaire, alors que la plupart de ses résultats furent redécouverts par d'autres.

A la sortie de la première édition de 1844, Grassmann envoya des exemplaires de son livre à différents mathématiciens. Aucun d'eux ne daigna faire une réponse digne de ce nom, et il y a fort à parier qu'aucun ne fit réellement l'effort de comprendre ce que cette œuvre originale renfermait.

Gauss qui était certainement la figure la plus importante du monde mathématique de l'époque, se contenta de répondre une brève lettre dans laquelle il signalait qu'il avait lui-même travaillé sur un sujet voisin dont il avait publié les résultats en 1831 (la représentation géométrique des complexes) et que, très occupé, il n'avait pas le temps de se consacrer à une étude approfondie de l'œuvre.

Möbius, qui était certainement celui qui était le plus proche mathématiquement de Grassmann, a reconnu le génie de ce dernier, mais il semble ne jamais avoir accepté son approche philosophique. Dans une lettre datée du 2 février 1845, il expose très clairement son aversion en ces termes :

"Je réponds que j'ai été sincèrement heureux de voir en vous un esprit proche, mais notre familiarité touche seulement aux mathématiques, pas à la philosophie. Comme je me souviens vous l'avoir dit en personne, je suis étranger au domaine de la spéculation philosophique. Je ne suis pas préparé pour apprécier d'une façon adaptée l'élément philosophique dans votre excellent travail, qui repose à la base de l'élément mathématique, ni même à le comprendre correctement. Je me suis suffisamment rendu compte de cela lors des nombreuses tentatives d'étude ininterrompue que j'ai faites de votre travail ; à chaque fois j'ai été arrêté par la grande généralité philosophique."

Cette inaptitude avouée de Möbius à accepter ou même à comprendre le point de vue philosophique de Grassmann, montre combien ce dernier était en avance sur son époque. Grassmann, désespéré de voir que son travail était incompris, s'était résolu à demander à Möbius d'en faire un rapport. Sur la base des arguments avancés ci-dessus ce dernier refusa.

La nature du reproche de Möbius, même s'il n'est qu'implicite, est éclaircie par la correspondance de ce dernier avec le philosophe E.F. Apelt. Ce dernier pense *qu'une philosophie erronée des mathématiques est à la base du travail de Grassmann, et que le caractère essentiel de la connaissance mathématique, son côté intuitif (Anschaulichkeit), semble en être bannie. Pour lui, une théorie aussi abstraite de l'extension comme il (Grassmann) la cherche peut seulement être développée à partir des concepts, mais la source de la connaissance mathématique n'est pas dans les concepts mais dans l'intuition.*

Möbius semble se ranger à cette opinion.

C'est un débat fondamental qui se profile dans ces lettres, qui est à rapprocher du débat contemporain autour de la géométrie et de la notion d'espace, qui se prolongea jusqu'au début du XX^{ème} siècle. Est-ce que les mathématiques sont le reflet d'une réalité formalisée théorisée, dont les résultats sont validés par leur adéquation au réel ou est-ce que ce n'est qu'une pure construction de l'esprit qui ne justifie que par des raisonnements intrinsèques ? La découverte des géométries non euclidiennes fut une des grandes étapes dans le changement des mentalités à l'égard de la géométrie et finalement de la nature des mathématiques en général. La conception d'un monde mathématique clos entièrement formalisable à partir de quelques axiomes allait culminer avec l'école Bourbakiste. Cependant le débat sur la nature des mathématiques fait encore couler beaucoup d'encre, même si le XX^{ème} siècle a consacré une approche formelle de cette discipline. En tous cas, un changement de point de vue aussi radical que celui que proposait Grassmann, n'était visiblement pas fait pour convaincre la communauté mathématique de ce milieu de XIX^{ème} siècle.

Grassmann découvrant l'article de Saint-Venant en 1847, écrivit à Cauchy en lui envoyant deux copies de l'Ausdehnungslehre, une pour lui une pour Saint-Venant. Il n'eut jamais de

réponse de Cauchy, dont on ne sait pas s'il a lu le livre. Il n'a en tous cas jamais donné le manuscrit à Saint-Venant qui le réclama lui-même à Grassmann en 1853.

En 1853, Cauchy publie son mémoire *Sur les clés algébriques* ([CA] T.XI pp. 439-445), qui présente, sous une forme légèrement différente, des méthodes développées par Grassmann. Celui-ci se résolu à faire une demande de priorité à l'Académie des Sciences en 1854. La commission chargée de statuer comprenait Cauchy lui-même, et aucune décision ne fut prise. Cauchy mourut en 1857, et l'affaire fut enterrée. Peut-on accuser le célèbre mathématicien de plagiat ? C'est peu probable, mais son attitude face à la demande de Grassmann est par contre impardonnable. Saint-Venant semble avoir eu une assez bonne connaissance du travail de Grassmann et en avoir apprécié l'originalité. Cependant il n'entretint pas de correspondance et ne se fit pas non plus l'ambassadeur en France de son collègue allemand.

Hamilton semble avoir eu pour la première fois l'occasion de parcourir l'*Ausdehnungslehre* en 1852. Sa première réaction fut brutale, il pensait que pour comprendre un tel charabia, il lui faudrait apprendre d'abord à fumer ! L'année suivante, il dû reprendre sa lecture, car on trouve dans sa correspondance des éloges très flatteurs à l'égard du petit professeur allemand. Il semble avoir fait du livre une étude très détaillée et il en donne quelques éléments dans son introduction des *lectures on Quaternions*. Cependant l'appréciation d'Hamilton, alors au sommet de sa gloire, sur le travail de Grassmann fut toujours empreinte d'une certaine condescendance. Finalement au delà des éloges un peu formelles, il avait surtout retenu que Grassmann bien que l'ayant précédé dans ses découvertes n'avait pas réussi à découvrir les Quaternions, il ne compris jamais, à moins qu'il ne voulût pas l'admettre, que la théorie de Grassmann dépassait la portée de ses propres travaux.

En Italie, Grassmann reçut une certaine reconnaissance de la part de Bellavitis, qui eut connaissance de ses travaux vers 1850 et les deux hommes échangèrent quelques lettres. Par ailleurs, L. Cremona, qui semblait être un grand admirateur de Grassmann, publia en 1860 dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, un bref exposé de ses travaux.

Finalement très peu de mathématiciens avaient pris la peine de s'intéresser de près au travail de Grassmann, son livre les avait rebutés dès les premières pages. Les invendus finirent dans les décharges. Grassmann bien que fort déçu ne se découragea pas. En 1862, il propose une deuxième version de son *Ausdehnungslehre* épurée, remaniée et enrichie de façon à le rendre plus accessible et plus en relation avec les découvertes contemporaines. Outre l'introduction, de nombreuses considérations philosophiques furent gommées et un effort dans le choix du vocabulaire pour désigner les nouveaux concepts fut consenti. D'un autre côté l'approche fut repensée et la démarche devenue plus précise, fut exposée en des termes plus clairs. Bref, Grassmann répondait aux critiques de forme qui lui avaient été faites, alors que sa théorie s'était encore enrichie. En fait même si d'un point de vue mathématique strict, cette deuxième version était plus satisfaisante, la disparition de toutes les justifications de type méthamathématique rendait la lecture de ce travail, d'un niveau d'abstraction élevé, encore plus difficile que la version de 1844.

L'accueil fut aussi froid, si ce n'est plus, que la première fois. Grassmann en fut fort affecté, on ne lui connaît d'ailleurs plus de travaux mathématiques d'importance après cette date. Il concentra son énergie sur des recherches dans d'autres domaines, ainsi il finit la traduction du Sanskrit en allemand du *Rig-Veda*.

Pourtant, le temps aidant, ses idées commencèrent à être appréciées, principalement parce que d'autres les redécouvraient dans le cadre de nouvelles théories. N'ayant jamais réussi à obtenir un poste dans une université, Grassmann n'avait pas à proprement parler de disciples, si ce n'est deux de ses fils et un de ses frères. Principalement trois mathématiciens de renom se firent, de son vivant, les défenseurs des travaux de Grassmann, ce sont : Hankel, Clebsch et Schlegel. Malheureusement les deux premiers moururent trop tôt pour avoir eu une influence durable. On doit à Hankel dans sa *Theorie der complexen Zahlensysteme*, de 1867, une bonne présentation des idées de Grassmann appliquées à la représentation géométrique des nombres complexes. Ce mémoire joua un rôle assez important dans la diffusion des idées de l'*Ausdehnungslehre*. Schlegel défendit dans plusieurs articles les thèses grassmanniennes, mais cet homme trop radical n'a pas su faire la critique nécessaire qui s'imposait en fonction des nouvelles idées de l'époque et sa position trop partisane a nui à l'appréciation de sa démarche.

Grassmann mourut en 1877. En 1892, Felix Klein, l'auteur du programme d'Erlangen (1872), contacta F. Engel pour lui confier la publication des œuvres complètes de Grassmann. Celui-ci commença ce travail en 1894, en 1911 il le clôturait par la rédaction d'une biographie [GR].

La postérité rendit hommage au génie de Grassmann, quoique de façon discrète et indirecte. Gibbs et Heaviside mirent en place le calcul vectoriel moderne dans la fin des années 1870 et le début des années 80, indépendamment du travail de Grassmann. Gibbs découvrit l'*Ausdehnungslehre*, après avoir mis au point son propre système et devint un grand admirateur de Grassmann.

L'influence de Grassmann devait être plus sensible dans des domaines plus théoriques de l'algèbre. La reprise et le prolongement par Peano en 1889, des théories de Grassmann devait, après quelques décennies d'oubli, être le point de départ de la théorie axiomatique des espaces vectoriels (cf Ch. suivant). Enfin on retrouve le nom de Grassmann dans des théories encore plus modernes comme l'algèbre extérieure ou d'autres parties de l'algèbre multilinéaire.

L'œuvre et le destin de Grassmann restent un exemple presque unique dans l'histoire des mathématiques. Il est difficile de savoir si ce point d'exception peut être mis en relation, que ce soit de cause ou d'effet, avec la nature de l'algèbre linéaire... La démarche philosophique suivie par Grassmann pour arriver à sa théorie est certainement caractéristique de certaines spécificités des concepts de l'algèbre linéaire. On a vu par exemple combien étaient centraux pour lui le formalisme et les rapports de sa théorie générale avec la géométrie. De là à penser que la difficulté à faire accepter son œuvre est, pour une part au moins, due à la nature intrinsèque des concepts en jeu, il n'y a qu'un pas. Bien sûr on a vu combien la position "sociale" de Grassmann est aussi un facteur important. Il n'en reste pas moins qu'autant que ses travaux, l'accueil qu'ils reçurent est un renseignement d'ordre épistémologique important pour notre étude.

De plus lors de leur création par Grassmann, les techniques "vectorielles" qu'il utilisait n'étaient pas indispensables. Les problèmes de géométrie ou de physique qu'il résolvait avec dextérité certes, étaient résolubles, au moins en grande partie, par les méthodes classiques de coordonnées. Devant l'effort à consentir pour pouvoir entrer dans les vues entièrement nouvelles de Grassmann, le gain éventuel pouvait paraître bien mince à un lecteur pas trop motivé. Ce n'est que petit à petit que les méthodes proposées par Grassmann furent utilisées ou redécouvertes sous d'autres formes. D'illustres mathématiciens comme Peano ou Burali-Forti s'en firent les ambassadeurs dans les décennies suivantes (cf chapitre IV-2). Les travaux de Grassmann trouvèrent une application dans la théorie de la relativité, qui repose sur les principes élémentaires de la géométrie vectorielle et utilise le calcul tensoriel déjà en germe dans L'*Ausdehnungslehre* [BO].

On peut se demander toutefois si l'œuvre de Grassmann fut jamais réellement comprise dans toute sa richesse, avant que tous les outils de l'algèbre linéaire moderne ne furent mis en place et permirent a posteriori de comprendre le génie de cet homme incompris.

A la fin du XIX^{ème} siècle, le rêve de Leibniz est quasiment accompli. On peut dire que les bases d'un calcul géométrique intrinsèque sont acquises, même s'il existe encore des doutes et des interrogations. Les querelles entre quaternionistes et partisans des vecteurs et du calcul "grassmannien" n'auront vite plus vraiment de sens. Les liens entre géométrie et algèbre linéaire prennent dès lors un aspect très fort et les deux domaines suivront dans une dialectique constante une part de leur progrès en parallèle. Pourtant autant la géométrie s'émancipe dans des voies très diverses, autant l'évolution de l'algèbre linéaire devra passer par une phase de rupture progressive avec la géométrie classique. Cette dernière étape déjà entamée au cours du XIX^{ème} siècle se révélera vraiment au début du XX^{ème} siècle, où l'on étendra l'algèbre linéaire à de multiples domaines de plus en plus divers. Par exemple, on verra un langage géométrique audacieusement généralisé envahir l'analyse fonctionnelle. C'est dans la première moitié du XX^{ème} siècle que l'algèbre linéaire va ainsi devenir le domaine que nous connaissons, universel et présent dans de multiples théories.

IV - La naissance de l'algèbre linéaire moderne

Avec Grassmann, un tournant important dans l'histoire de l'algèbre linéaire est en germe. Pourtant l'œuvre de Grassmann, longtemps ignorée, n'a pu imposer ce changement de point de vue. Ce sont en fait les travaux d'autres algébristes, dont Cayley est le principal représentant, qui vont amener une évolution notable. Grâce à leurs travaux, se crée un nouveau domaine que l'on qualifiera d'algèbre linéaire et qui se distingue du calcul vectoriel et de la géométrie. Pendant une période allant d'environ 1840 à 1930, cette nouvelle branche des mathématiques rassemblera autour de la théorie des déterminants et de celle des matrices, les principaux résultats sur les espaces vectoriels vus comme ensembles de n -uplets de nombres. Dans les travaux de Hilbert, notamment, en analyse fonctionnelle, apparaît de façon systématique l'utilisation d'espaces vectoriels de dimension infinie. Ceux-ci sont plutôt vus comme des cas limites d'espaces de dimension finie. Ainsi dans un premier temps, on étend les méthodes des déterminants par des passages à la limite plus ou moins périlleux. Ce n'est que vers 1930, que l'on comprendra vraiment que la plupart des résultats peuvent être obtenus sans l'aide des déterminants et donc être prolongés à la dimension infinie. L'approche axiomatique, amorcée par Grassmann et vraiment initialisée par Peano, finira alors par s'imposer, après quarante ans d'ignorance.

1 - Une première étape : la géométrie en dimension n .

Le calcul sur les coordonnées en géométrie analytique aussi bien que l'extension de l'algèbre à de nouveaux objets, ont conduit tout naturellement à introduire les mêmes opérations que sur les triplets, sur des n -uplets pour n quelconque. Cette étape n'était nullement une révolution mais simplement une extension prévisible, d'une pratique devenue courante. Un deuxième pas qui devait, lui, demander plus d'efforts, a consisté à légitimer ces calculs sur les n -uplets. Jusqu'au début du XVIII^{ème} siècle, il n'est pas rare en effet de trouver des remarques, signalant la possibilité théorique de calculer sur des n -uplets, mais s'empressant de rajouter que cela n'a pas de sens donc -sous-entendu- pas d'intérêt.

Möbius par exemple dans son *Barycentrische Calcul*, en 1827, montre que deux figures rectilignes ou planes égales et similaires (i.e. à chaque point d'une figure correspond un point de l'autre, tels que la distance entre deux points de l'une est toujours égale à la distance entre les deux points correspondants sur l'autre) coïncident toujours alors que ceci n'est pas vrai pour des figures en trois dimensions. En analysant la méthode qui l'a conduit à ce résultat, il remarque alors que pour qu'un tel résultat soit vrai dans l'espace, *il faudrait que l'on puisse laisser un système faire une demi révolution dans un espace de quatre dimensions*. Mais il s'empresse de rajouter que *puisque un tel espace ne peut être conçu, ainsi la coïncidence est dans ce cas impossible*. ([MO] T.I pp. 181-183, [SM2] pp.525-526).

Il faudra encore quelques temps pour que des mathématiciens aventureux osent franchir l'interdit et appliquent le langage de la géométrie "classique" à des espaces de dimension supérieure et en déduisent des applications.

Le premier exemple vraiment déterminant dans cette voie est celui de Cayley. Celui-ci est l'héritier de DeMorgan et Peacock, les célèbres algébristes anglais, qui les premiers systématisèrent la recherche de nouvelles algèbres. Ceux-ci croyaient pouvoir trouver sur de nouveaux ensembles une structure possédant toutes les propriétés des nombres, comme cela avait été le cas avec les nombres complexes.

Cayley abandonne cette idée, mise en défaut par la découverte des Quaternions puis des Octaves. il définit la somme de n -uplets et leur multiplication par un scalaire et en donne les propriétés. Il définit ainsi la structure d'espace vectoriel de dimension finie, en prenant un point de vue descriptif et non axiomatique.

Ses recherches sur les transformations linéaires et sur les matrices dont il est le premier à systématiser l'emploi (cf chap II), l'amènent à dégager la plupart des concepts de l'algèbre linéaire dans ce cadre.

Une de ses premières utilisations de n -uplets à des fins géométriques apparaît dans un article (en français) de 1846 sous le titre de *Sur quelques résultats de la géométrie de position* ([CY], T.I, pp.317-328).

L'idée est très simple, il considère n points dans l'espace et il coupe les N_2 droites (N_j désigne le nombre d'arrangements possibles de j points) et les N_3 plans qu'ils définissent, par un plan. Il montre ainsi qu'il est toujours possible, quelque soit n , de trouver N_2 points situés deux à deux sur N_3 droites.

Après avoir donné une interprétation de ce résultat pour $n=5$, Cayley nous dit : "*Le théorème général I, peut être considéré comme l'expression d'un fait analytique, qui doit également avoir lieu en considérant quatre coordonnées au lieu de trois. Ici une interprétation géométrique a lieu, qui s'applique aux points dans l'espace. On peut en effet, sans recourir à aucune notion métaphysique à l'égard de la possibilité de l'espace à quatre dimensions, raisonner comme suit (tout cela pourra aussi être traduit facilement en langue purement analytique) : En supposant quatre dimensions de l'espace, il faudra considérer des lignes déterminées par deux points, des demi-plans déterminés par trois points, et des plans déterminés par quatre points; (deux plans se coupent alors suivant un demi-plan, etc...). L'espace ordinaire doit être considéré comme plan, et il coupera un plan selon un point ordinaire. Tout cela posé : en considérant un nombre n de points, et en les combinant deux à deux, trois à trois, et quatre à quatre par des lignes, des demi-plans et des plans, puis coupant le système par l'espace considéré comme plan, on obtient le théorème suivant de géométrie à trois dimensions :*

THEOREME VII. *On peut former un système de N_2 points, situés trois à trois dans N_3 droites qui elles-mêmes sont situées quatre à quatre dans N_4 plans. (...)"*

" De même en considérant un espace à $p+2$ dimensions, on obtient la proposition suivante encore plus générale :

THEOREME IX. *On peut former dans l'espace un système de N_p points, qui passent $p+1$ à $p+1$ par N_{p+1} droites, situées $p+2$ à $p+2$ dans N_{p+2} plans, ou bien pour la géométrie plane, un système de N_p points, situés $p+1$ à $p+1$ dans N_{p+1} droites."*

Bien sûr on ne peut pas encore parler ici de géométrie en dimension supérieure à trois, puisque les résultats sont tous exprimés en géométrie plane ou à trois dimensions. Mais le passage par des dimensions plus élevées est explicite et Cayley définit clairement les objets de la géométrie à quatre dimensions dont il dit qu'ils n'ont rien de métaphysique.

Cet article de Cayley est très récent dans sa carrière, on voit qu'il semble vouloir prendre des précautions par rapport à des réticences éventuelles. Il est intéressant de remarquer que bien qu'il mentionne la méthode analytique, il utilise uniquement un langage géométrique pour décrire les espaces à plus de trois dimensions.

A la suite des travaux de Cayley et de son inséparable ami Sylvester, mais aussi de ceux de Jordan par exemple, l'essor de la géométrie à n dimensions va s'accélérer. La généralisation des espaces projectifs et les débuts de la géométrie algébrique vont suivre et aider à l'élaboration des nouveaux théorèmes.

Ces débuts de l'algèbre linéaire, qui commence à exister en tant que champ unifié de concepts, voient la généralisation du langage géométrique à tous les domaines où l'on appliquait jusqu'à maintenant les résultats de la théorie des déterminants. On ne peut pas dire en ce sens qu'il y ait pléthore de résultats nouveaux. On assiste plutôt à une unification de registres jusqu'alors distincts, et à la création d'un langage issu de la géométrie mais qui devient celui de l'algèbre linéaire.

Cependant à la fin du XIX^{ème} siècle le concept de structure algébrique est encore à l'état embryonnaire, si bien que cette algèbre linéaire naissante ne s'appuie pas encore sur des bases bien définies. En 1888 pourtant, G. Peano qui appartenait déjà sur beaucoup de points au siècle suivant, avait donné, en s'appuyant sur l'œuvre de Grassmann, la définition axiomatique d'un espace vectoriel. Il fallut encore une quarantaine d'année, pour que l'on comprenne l'importance d'une telle approche.

2 - Les premières approches axiomatiques

a - G. Peano

En 1888 le mathématicien italien Giuseppe Peano a trente ans, depuis deux ans il est professeur à l'*Accademia Militare* de Turin. Son premier ouvrage d'importance est paru en 1884 et consiste en un traité de calcul infinitésimal, d'après un cours de A. Genocchi. En 1887, il publie son *Applicazioni Geometriche del calcolo infinitesimale* [PE1] dans la préface duquel il

cite Möbius, Bellavitis, Hamilton et Grassmann, d'une manière qui prouve qu'il connaissait bien ces quatre auteurs. L'analyse succincte qu'il propose de leurs œuvres et de leurs importances relatives par rapport à la problématique de la recherche d'un calcul géométrique est d'ailleurs fort intéressante.

Peano est resté célèbre pour la courbe qui porte son nom et qui remplit le plan, pour son système d'axiomes des nombres entiers -le premier du genre- et surtout comme l'un des fondateurs de la logique mathématique et un des ambassadeurs de la méthode axiomatique.

Son troisième ouvrage de taille s'intitule *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* [PE2], il parut en 1888. Comme le titre l'indique, ce travail est en grande partie inspiré de "l'Ausdehnungslehre" de H. Grassmann, il précise tout de même en introduction : "*Les formations Géométriques et les opérations qui sont exposées ici figurent dans l'Ausdehnungslehre. Mais je crois toutes nouvelles les définitions données ici, le mode de traitement et de nombreuses formules (...)*". De fait Peano a non seulement su dégager de l'œuvre de Grassmann les principaux concepts, mais il les expose d'une façon beaucoup plus attrayante et compréhensible. Il a su élaguer pour ne garder que l'essentiel. Bien sûr une certaine richesse contenue dans Grassmann disparaît sous la plume de Peano, mais ce qui reste est exposé avec rigueur et clarté dans un style très épuré où l'on sent l'influence de logiciens tels que G. Boole, E. Schröder ou C.S. Pierce, dont Peano connaissait les travaux. Dans sa qualité d'exposition, cette œuvre est assez unique pour l'époque, et fit beaucoup, bien que tardivement, pour la diffusion des travaux de Grassmann tant en Italie qu'en France.

Peano, qui à cette époque n'avait pas encore acquis la réputation de logicien qu'on lui connaît à présent, commence son ouvrage par une sorte de préambule, annoncé dans le titre, sur les "opérations de logique déductive". Dans ce chapitre d'introduction il présente un ensemble assez important de résultats de logique où il fait usage d'un langage très moderne. Il présente les opérations logiques sur les ensembles et les propositions comme des opérations algébriques et compare les propriétés de la somme et du produit avec celles de l'intersection et de l'union. On le voit aussi se poser le problème de la redondance de certains symboles et de certaines propriétés et essayer de réduire au minimum leur nombre. Sa démarche est en ce sens très proche de la démarche axiomatique dont il sera l'un des précurseurs.

Cette introduction qui représente vingt pages sur les cent soixante-dix du livre n'est pas absolument indispensable à la lecture de ce qui suit, si ce n'est pour quelques notations qui sont réutilisées. Par ailleurs la richesse du propos fait que ce chapitre aurait aussi bien pu à lui seul faire l'objet d'une publication indépendante. Peano ne nous dit pas grand chose du lien qu'il faut voir entre les deux théories. Pourtant leur juxtaposition n'est pas fortuite et doit nous interroger. Plus que par ses résultats, cette introduction semble importante par ce qu'elle représente. Comme pour la version de 1844 de l'*Ausdehnungslehre* de H. Grassmann, elle donne une certaine vision de l'auteur sur les mathématiques et sa façon de les aborder. On comprendra alors que l'approche de Peano est avant tout formelle, au sens où il s'intéresse aux relations que les objets ont entre eux, ce que l'on appellera plus tard leur structure algébrique, plus qu'à leur nature propre. Cette introduction est donc annonciatrice déjà de l'aboutissement du *Calcolo geometrico*, qui peut être vu comme le début de la théorie axiomatique des espaces vectoriels.

En effet, outre la clarté de l'exposé, et l'introduction d'applications nouvelles en mécanique et en géométrie différentielle, une des innovations de Peano est de donner, dans son dernier chapitre, des définitions très générales des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (sous le nom de *systèmes linéaires*) et des applications linéaires (sous le nom de *transformations linéaire*), qui sont très proches des définitions axiomatiques actuelles. Il étudie également les premiers concepts fondamentaux tels que : indépendance linéaire, base ou dimension (dont il voit qu'elle peut être infinie)... sous un angle nouveau. C'est certainement la première fois que l'on va aussi loin et surtout que l'on approche de l'algèbre linéaire moderne de façon aussi significative. Grassmann, comme nous l'avons dit plus haut, n'était pas loin non plus, sur certains points il avait même obtenus des résultats plus avancés que ce que propose Peano, mais il lui manquait finalement un bon point de départ, c'est-à-dire une définition claire et maniable des espaces vectoriels, sous leur forme la plus générale.

Nous allons maintenant regarder de plus près comment Peano, en reprenant les idées de Grassmann est arrivé à ce stade fondamental.

i- Sur l'introduction des "formations géométriques"

Dans le chapitre I du *calcolo Geometrico*, Peano, après avoir défini les notions de volume, de surface puis de segment orientés, définit des formations géométriques de quatre espèces différentes. Il définit également des opérations sur ces formations et en dégage des propriétés très générales qui ne dépendent pas de l'espèce. Il veut ainsi montrer que l'on peut opérer sur ces formations géométriques comme sur n'importe quels objets algébriques. Comme il le dit lui-même dans sa préface : "*le calcul géométrique consiste en un système d'opérations applicables aux êtres géométriques, analogues à celles que l'algèbre effectue sur les nombres...*". Comme ses prédécesseurs, qu'il cite, il poursuit le rêve de Leibniz de créer un calcul géométrique intrinsèque (cf Chap III).

Les considérations sur les volumes, surfaces et segments orientés sont très géométriques et assez concrètes ; Peano en profite pour introduire son vocabulaire. Puis il définit les quatre espèces d'objets géométriques d'une façon purement formelle comme des systèmes de points, segments, surfaces ou volumes affectés de nombres. Pour les désigner, il utilise la notation des combinaisons linéaires formelles. A ce stade, cette écriture n'a vraiment de sens, autre que purement formel, que pour les formations de quatrième espèce puisque Peano a défini auparavant les opérations de somme et de multiplication par un nombre uniquement pour les volumes orientés. Sur ces bases abstraites il commence à bâtir son édifice en définissant la nullité d'une formation de première, deuxième ou troisième espèce, puis une "égalité" (c'est en fait une relation d'équivalence) entre les formations d'une même espèce en se ramenant chaque fois à ce qu'il a défini pour la quatrième espèce. Il remarque immédiatement que deux formations qui ne diffèrent que par l'ordre de leurs termes sont égales. On peut remarquer au passage l'ambiguïté du mot "égal" qui désigne en fait les éléments d'une même classe d'équivalence. Peano ne fait d'ailleurs mention que de la propriété de transitivité qu'il cite comme théorème ; la réflexivité et la symétrie ne sont pas dégagées. Il s'attache ensuite à donner un sens plus concret aux formations en déterminant géométriquement les cas d'égalité pour chaque espèce.

Arrivé à ce stade, il décide de désigner points, segments, surfaces et volumes d'une part et formations de n'importe quelle espèce d'autre part par les mêmes lettres (A,B,C... pour les premiers et S,S'... pour les seconds). Il va alors pouvoir mettre en place une structure.

En effet il définit la somme de deux formations de même espèce et remarque immédiatement la commutativité (P1) et l'associativité (P2). Il détermine ensuite le produit d'une formation par un nombre (réel) et remarque les deux pseudo-distributivités $x(S+S')=xS+xS'$ (P3) et $(x+y)S=xS+yS$ (P4). Il énonce alors trois propriétés de stabilité de l'égalité avec les opérations (en se contentant de dire qu'elles sont faciles à démontrer) soit $S=S' \Rightarrow S+S''=S'+S''$ (P5); $S=S'$ et $S''=S''' \Rightarrow S+S''=S'+S'''$ (P6) et $S=S' \Rightarrow xS=xS'$ (P7) . Il dit alors que "*les équations géométriques pourront être sommées et multipliées par des nombres de la même façon que les équations algébriques*" et pour achever la ressemblance, il introduit quatre nouvelles "notations": $Sx=xS$ (N1); $-S=(-1)S$ (N2) ; $S-S'=S+(-S')$ (N3); $S/S'=x \Leftrightarrow S=xS'$ (N4).

A partir de là, Peano s'attache à définir des produits de formations entre elles et ne s'intéresse plus directement à la somme ou au produit par un nombre. On peut donc considérer (en langage moderne) qu'il a achevé la description de la structure d'espace vectoriel. Il est intéressant alors de regarder quelles sont les dissemblances entre les propriétés dégagées par Peano et la définition actuelle d'espace vectoriel.

- Peano ne dit pas explicitement ni que l'addition est une opération interne ni que la multiplication par un nombre est une loi externe, mais c'est compris dans ses définitions et il n'y a pas vraiment de raisons d'insister, ce n'est toutefois pas dégagé comme une propriété significative.

- Pour ce qui concerne la structure de groupe, Peano énonce clairement la commutativité et l'associativité, par contre les concepts d'élément neutre et d'opposé ne sont pas vraiment bien dégagés. Le symbole 0 apparaît dans la définition de la nullité d'une formation ; il est donc dit implicitement qu'il existe une formation nulle. Que sous-entend cependant Peano et surtout que doit comprendre le lecteur ? Le simple choix de vocabulaire (nul, zéro) induit-il la propriété d'être élément neutre ? Il semble bien que le rôle du zéro ne soit pas dégagé du symbolisme qu'il transporte et que la propriété d'existence d'un élément neutre ne soit pas significative pour une addition. De même la notation (N2) pourrait faire croire à l'existence et la définition d'un

opposé, mais cela reste au niveau de la notation. D'ailleurs les propriétés énoncées ne sont pas suffisantes pour prouver que $(-1)S$ (même si on le note $-S$) est l'opposé de S ; il faudrait, outre $1S=S$ et (P4), une propriété induisant $0S=0$. Pour les mêmes raisons si la notation (N3) définit une soustraction, celle-ci n'a a priori aucune raison d'être l'opération opposée de l'addition. Peano semble donc définir des notions seulement liées à l'addition en fonction de la multiplication externe. En fait une autre hypothèse consiste à penser qu'il comprend l'existence d'un opposé et d'une soustraction dans le mot même d'addition et qu'il ne juge donc pas utile de faire mention de ces propriétés. Ses notations feraient alors référence à des choses implicitement connues. Dans les deux cas néanmoins on peut constater ici une faiblesse dans la construction de Peano. Cette faiblesse est pourtant le reflet d'une perception assez générale à l'époque et prouve combien le concept de loi de composition était encore mal défini.

- Il reste les quatre axiomes de la structure d'espace vectoriel:

(A1) $(x+y)S=xS+yS$ (A2) $x(S+S')=xS+xS'$ (A3) $x(yS)=(xy)S$ et (A4) $1S=S$

Peano en énonce deux (A1) et (A2) qui sont respectivement les propriétés (P4) et (P3). Mais il n'est fait aucune mention des deux autres, et ils ne sont pas déductibles des propriétés énoncées par ailleurs. Par contre, ils sont facilement vérifiables avec les définitions de Péano.

Or l'axiome (A4) sert un peu de lien entre les deux opérations: il est en effet fondamental pour permettre de donner à nS la signification de "la somme de n fois S ". Comme pour l'élément neutre et l'opposé on peut supposer que pour Peano, cette écriture est implicitement contenue dans les propriétés d'une addition.

(A3) comme (A1) et (A2) est une règle de calcul nécessaire à la bonne coexistence des deux lois. Il est plus étonnant que Peano ne la cite pas.

Les propriétés (P5) (P6) et (P7) n'apparaissent pas dans la définition actuelle d'un espace vectoriel. Or ce sont des propriétés de l'égalité (au sens d'identité) à l'égard de n'importe quelle loi, elles ne sont donc pas déductibles des axiomes mais sont d'un autre domaine encore plus général. Dans l'optique de Peano les choses sont un peu plus complexes du fait que son égalité est une relation d'équivalence liée à la nature des objets. Ces propriétés énoncent donc des identités entre classes d'équivalence. La démarche de Peano est ici similaire à celle de Grassmann, qui avait lui aussi mis en relief la notion de classes d'équivalence d'objets géométriques et la stabilité des lois par rapport aux relations.

La notation (N1) n'est pas très importante, elle permet simplement de ne pas se soucier dans les écritures de la position du scalaire par rapport au vecteur. Cette habitude a disparu en langage moderne.

(N4) prépare déjà la suite sur la multiplication des formations entre elles. Elle n'a pas d'intérêt pour la structure linéaire à proprement parler.

On voit ainsi que les deux démarches, l'actuelle et celle Peano, ne vont pas sans quelques différences. Néanmoins si l'on néglige des points secondaires tels que l'importance accordée par Peano à "l'égalité" entre formations ou les notations (N1) et (N4), que lui manquait-il alors pour avoir donné un énoncé complet des axiomes de la structure d'espace vectoriel ? Essentiellement quatre points : l'existence d'un élément neutre, d'un opposé, l'axiome (A4) et l'axiome (A3).

On a vu que les trois premiers points sont en quelque sorte compris implicitement dans les définitions des opérations. Au lieu d'être reconnues comme des propriétés et d'être identifiées comme telles, ce sont pour Peano des vérités inhérentes à la nature des objets en jeu. L'existence de l'élément neutre et d'un opposé apparaîtra plus clairement avec l'étude de la structure de groupe, on verra que Peano lui-même comprendra la nécessité de A4. L'oubli de l'axiome A3 est d'une autre nature, cela nous étonne de la part de quelqu'un d'aussi scrupuleux que Peano, mais cette maladresse sera réparée au dernier chapitre où la pseudo-associativité apparaît.

Dans les chapitres suivants Peano reprend les grandes lignes de l'Ausdehnungslehre (version 1862) dans un exposé très élagué et particulièrement bien construit. Comme Grassmann, il donne des applications à la fin de chaque chapitre. Il montre, en particulier, que dans l'espace, si trois vecteurs sont tels que leur produit, qui est en fait leur déterminant, est non nul, tout vecteur s'écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs.

ii- Sur l'introduction des systèmes linéaires

Le neuvième et dernier chapitre est de nature tout à fait différente, Peano y définit ce qu'il appelle des "sytèmes linéaires". Pour lui ce sont des ensembles caractérisés par deux opérations et certaines propriétés élémentaires, ou axiomes, qu'il énonce.

Il s'inspire, sans que ce soit explicite, des propriétés dégagées pour les formations géométriques dans le chapitre I, qu'il essaie de généraliser. On peut voir dans ce chapitre, l'efficacité du choix fait dès le début, de fonder le calcul géométrique sur des bases initiales minimales (presque axiomatiques) : cela permet une généralisation presque immédiate.

La définition des systèmes linéaires de Peano est, semble-t-il la première définition axiomatique d'un espace vectoriel réel. Cependant elle est déjà très proche de la définition actuelle. Pour mieux mesurer la distance qui séparerait Peano de ce que l'on utilise aujourd'hui comme définition, nous donnons ci-dessous une traduction littérale de l'introduction du chapitre IX du *calcolo Geometrico*.

N.B. Nous avons fait nous-même cette traduction et nous avons choisi de garder les tournures impersonnelles et sur le mode passif, même si elles ne sont pas toujours en accord avec la grammaire française, parce qu'elles nous semblent mieux rendre compte du texte original.

"Transformations de systèmes linéaires.

72. Il existe des systèmes d'êtres pour lesquels sont données les définitions suivantes :

1. Il est défini l'égalité de deux êtres a et b du système c'est-à-dire qu'il est défini une proposition, indiquée par $a=b$, qui exprime une condition entre deux êtres du système, satisfaite par certains couples d'êtres, et pas par d'autres, et qui satisfait aux équations logiques :

$$(a=b)=(b=a), (a=b) \ll (b=c) < (a=c)$$

(Dans le symbolisme actuel : $(a=b)$ ssi $(b=a)$ et si $(a=b$ et $b=c)$ alors $(a=c)$.)

2. Il est défini la somme de deux êtres a et b , ce qui veut dire qu'il est défini un être, indiqué par $a+b$, qui appartient aussi au système donné, et qui satisfait aux conditions :

$$(a=b) < (a+c=b+c), a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Et la valeur commune des deux membres de la dernière égalité sera indiqué par $a+b+c$.

(la première égalité veut dire si $(a=b)$ alors $(a+c=b+c)$.)

3. Etant donné a un être du système, et m un nombre entier et positif, avec l'écriture ma nous entendons la somme de m êtres égaux à a . Il est facile de reconnaître étant donné $a, b...$ des êtres du système, $m, n...$ des nombres entiers et positifs, que

$$(a=b) < (ma=mb) ; m(a+b)=ma+mb ; (m+n)a=ma+na ; m(na)=(mn)a ; 1a=a.$$

Nous supposons qu'il soit attribué une signification à l'écriture ma , quelque soit le nombre réel m , de façon que les équations précédentes soient encore satisfaites. L'être ma sera dit produit du nombre (réel) m par l'être a .

4. Enfin nous supposons qu'il existe un être du système, que nous dirons être nul, et que nous indiquerons par 0, tel que, quelque soit l'être a , le produit du nombre 0 par l'être a donne toujours l'être 0, ou

$$0a = 0.$$

Si à l'écriture $a-b$ on attribut la signification $a+(-1)b$ on déduit :

$$a-a=0 ; a+0=a.$$

DEF. Les systèmes d'êtres pour lesquels sont données les définitions 1,2,3,4, de façon que soient satisfaites les conditions imposées, sont dits systèmes linéaires.

On déduit que si $a, b, c...$ sont des êtres d'un même système linéaire, $m, n, p...$ des nombres réels, toutes les fonctions linéaires homogènes de la forme $ma+nb+nc+...$ représentent un être du même système.

Les nombres réels et les formations d'une même espèce de l'espace constituent des systèmes linéaires.

Les formations de première espèce sur une droite ou dans un plan, les vecteurs du plan ou de l'espace constituent de même des systèmes linéaires etc... Mais les points de l'espace ne constituent pas un système linéaire parce que leur somme, d'après la définition donnée, ne donne plus des points, mais des formations quelconques de première espèce. (...)"

Bien sûr Peano ne prend pas la peine de poser l'existence des lois avant d'en exposer les propriétés, mais mélange plutôt un peu les deux démarches, il ne parle pas non plus d'axiomes mais de définition données (a priori). Pourtant on peut dire que sa présentation de la structure de système linéaire est axiomatique, au sens moderne du terme.

La remarque qu'il fait immédiatement après avoir donné sa définition, qui consiste à dire que toute combinaison linéaire d'éléments d'un système linéaire appartient à ce même système, nous montre qu'il a tout à fait saisi la spécificité d'un espace vectoriel. Cette remarque élémentaire est cependant fondamentale car elle est le point d'appui des premières

démonstrations de propriétés de la structure, on sait qu'elle est aussi caractéristique de la notion de sous-espace vectoriel.

Reprenons maintenant en détail chacun des points de la définition précédente.

Le paragraphe 1 est consacré à la définition de "l'égalité". Peano y définit en fait une relation d'équivalence ; pourtant s'il énonce les propriétés de symétrie et de transitivité, il ne fait pas mention de la réflexivité (il y a déjà une amélioration par rapport au chapitre I puisqu'il parle de la symétrie). En fait une relation qui serait symétrique et transitive pourrait ne pas être d'équivalence si et seulement s'il existait des éléments en relation avec aucun autre (pas même avec eux-mêmes). En effet si pour tout a il existe b tel que aRb par symétrie on a bRa et par transitivité comme aRb et bRa on a aRa donc la relation est réflexive. Or dans le paragraphe 3, Peano avec sa définition de la multiplication par un entier positif impose que $1a=a$ donc a est toujours en relation avec un autre élément ($1a$) et "l'égalité" est donc bien réflexive. Du point de vue de la cohésion de l'édifice, il n'y a donc pas de faille possible, il n'empêche que, du point de vue de la démarche, il y a dans cet oubli une faiblesse. Comme on l'a dit pour le chapitre I, ce point a cependant une place un peu périphérique par rapport à la structure même, puisque pour les espaces vectoriels modernes la question de l'égalité est réglée en amont de la définition de la structure. Par ailleurs ce point est assez spécifique des formations géométriques puisqu'il n'est pas du tout général que les espaces vectoriels apparaissent, hors le cadre de la géométrie, comme des ensembles de classes d'équivalence d'objets plus connus.

Le paragraphe 2 commence par la définition de la somme de deux "êtres" (ou vecteurs en langage moderne), calquée presque mot pour mot, sur la définition moderne de loi de composition interne. Peano impose ensuite trois propriétés : la compatibilité avec l'égalité, la commutativité et l'associativité. Ce sont les mêmes que dans le chapitre I, l'élément neutre et l'opposé ne sont pas encore cités.

Dans le paragraphe 3, il commence par définir à partir de la somme, la multiplication des êtres par les nombres entiers et positifs. Il en cite cinq propriétés qui sont outre la compatibilité avec l'égalité, les restrictions à $\mathbb{N}$ des quatre axiomes modernes des espaces vectoriels. On peut s'interroger sur ce choix que Peano n'explique pas. Il y a bien sûr la ressemblance avec ce qu'il a dit sur les formations géométriques, mais d'une part nous n'avons pas plus de justifications à ce stade et surtout, il a rajouté ici deux propriétés par rapport au chapitre 1. Il est tout à fait frappant que Peano arrive de but en blanc sur les quatre "bonnes" propriétés. Bien sûr, c'est sûrement le fruit de plusieurs tâtonnements, dont il ne fait pas mention, cela n'en reste pas moins remarquable. Pour les deux distributivités et la pseudo-associativité, on peut se dire qu'une certaine ressemblance avec les propriétés déjà émises dans les recherches sur les systèmes hypercomplexes a pu guider Peano. Pour le quatrième axiome, les explications sont moins faciles. On peut avancer l'hypothèse que de voir la multiplication externe comme le prolongement de la multiplication "naturelle" par les entiers (la structure de $\mathbb{Z}$ -module des groupes commutatifs), a dû aider Peano à dégager cette propriété que $1a=a$, comme fondamentale.

En effet, pour définir la multiplication par un réel, il suppose que l'on sache attribuer un sens à ma pour m réel quelconque de façon à prolonger la multiplication par les entiers naturels, c'est-à-dire que, non seulement cette multiplication coïncide sur les entiers naturels, mais aussi qu'elle vérifie les cinq mêmes propriétés, donc les quatre axiomes de la définition moderne et la compatibilité avec l'égalité. Cette façon un peu intuitive de voir la multiplication externe est un point original. Peano aurait très bien pu faire disparaître cette démarche de la définition et n'en donner que les résultats. S'il a préféré en laisser une trace, c'est sûrement qu'il la juge importante. Or dans la définition moderne on remarquera que ce point de vue est presque entièrement gommé.

Dans le paragraphe 4, Peano suppose l'existence d'un "être nul" qui est le résultat de la multiplication de n'importe quel "être" par le nombre 0. Ceci est un peu contradictoire avec ce qui précède puisque en 3 on est censé avoir donné une signification à tout " ma " donc en particulier à " $0a$ ". Hormis ce problème de déontologie, on peut se demander si ce 0 ainsi défini a le même statut qu'un élément neutre pour l'addition (au sens moderne).

Il est clair que dans la définition moderne, où 0 est défini comme élément neutre pour l'addition, on déduit des axiomes que $0a=0$, pour tout a . Peano nous dit au contraire que si tous les $0a$ sont identiques, alors avec les autres axiomes on déduit : $a+0=a$ et $a-a=0$, si on donne à $a-b$ la signification de $a+(-1)b$. Il ne fait pas les démonstrations, mais en effet, en n'utilisant que des propriétés qu'il a énoncées auparavant, on a les égalités suivantes :

$$a+0 = 0+a = 0a+1a = (0+1)a = 1a = a ,$$

$$\text{et } a-a=a+((-1)a) = (1a)+((-1)a) = (1+(-1))a = 0a = 0.$$

La définition de Peano est donc équivalente à la définition actuelle. Elles sont très semblables, la seule différence est que Peano remplace l'existence d'un élément neutre et d'éléments symétriques, par la propriété que tous les $0a$ doivent être égaux.

Il nous semble utile ici de faire quelques remarques sur les axiomes de la structure d'espace vectoriel.

1 - L'existence d'un neutre et de symétriques ou une propriété équivalente comme celle de Peano est indispensable dans les axiomes.

En effet posons $E=\{a,b,c\}$ avec :

$$a+a=a, b+b=b, c+c=c, a+b=b+a=a+c=c+a=b+c=c+b=c,$$

et $\lambda a=a, \lambda b=b$ et $\lambda c=c$ pour tout λ réel. $(E,+,.)$

$(E,+,.)$ possède toutes les propriétés de la structure d'espace vectoriel sauf qu'il n'y a pas d'élément neutre (donc pas de symétrique) pour l'addition. Bien sûr $0a, 0b$ et $0c$ sont distincts.

2 - Par contre la commutativité de l'addition se déduit des autres propriétés (que ce soit avec le système d'axiome de Peano ou l'actuel).

En effet on a pour tout a et b de E :

$$a+a+b+b=2a+2b=2(a+b)=a+b+a+b,$$

en simplifiant alors à gauche par a et à droite par b on obtient :

$$a+b=b+a.$$

On pourrait donc avoir une définition des espaces vectoriels ne comportant que l'associativité de l'addition, les deux distributivités, la pseudo-associativité, $1a=a$ et $0a=0b$ pour tout a et b . Cette façon de voir les choses privilégie en quelque sorte la loi externe.

Il est fort probable qu'à la suite de Peano, on ait préféré la définition actuelle, parce qu'elle rappelle mieux celle de groupe. Quand on a commencé à regarder l'algèbre comme l'étude des structures plutôt que comme l'étude des équations, la classification des ensembles selon leurs ressemblances a aussi amené à comparer les différentes structures entre elles. Ainsi la structure d'espace vectoriel est-elle apparue comme une sur-structure de celle de groupe commutatif. De fait on comprend mieux pourquoi on a préféré la définition actuelle à celle de Peano, qui contient cependant une propriété de moins et semble dans certains cas pouvoir donner des vérifications moins lourdes.

Par ailleurs, l'addition est la première des deux lois et il semble peut-être plus "logique" de mettre dans les axiomes les propriétés de cette loi, plutôt que des propriétés de la loi externe qui permettent de les déduire. C'est peut-être aussi une des raisons pour lesquels on a gardé la commutativité de l'addition dans les axiomes alors qu'elle est totalement déductible des autres axiomes.

Néanmoins Peano réussit à donner une définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel en tous points équivalente à la définition actuelle, très peu différente et en tous cas pas moins efficace si ce n'est plus. C'est surtout un des premiers exemples d'explicitation d'une structure algébrique, par la donnée d'un ensemble hypothético-déductif de définitions données a priori.

Après avoir donné cette définition Peano définit de façon identique à ce qui se fait encore de nos jours, les notions de dépendance linéaire, d'indépendance linéaire, de dimension et de coordonnées. Pour la dimension il dit que c'est le *nombre maximum d'êtres indépendants entre eux que l'on puisse prendre dans un système linéaire*. Cependant il n'a pas introduit le concept de famille génératrice et donc sa notion de dimension n'a pas encore tout le sens qu'on lui donne aujourd'hui. En effet il n'a pas les moyens de démontrer que toutes les familles libres maximales sont aussi génératrices minimales et qu'elles ont le même nombre d'éléments. Il montre en définissant les coordonnées qu'une famille libre maximale est génératrice et que chaque vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de la famille. De plus on peut penser qu'implicitement Peano a compris que toute famille libre maximale a toujours le même nombre d'éléments. Ainsi il présente ce que l'on appellerait en langage actuel un changement de base en prenant pour deuxième famille libre maximale une famille ayant le même nombre d'éléments que la première, il montre ainsi comment calculer les coordonnées dans la nouvelle famille. Cette imperfection dans la théorie proposée par Peano est quelque peu surprenante et mérite à ce titre d'être signalée, d'autant que Grassmann, bien qu'ayant une théorie moins claire, semble, lui, avoir mieux saisi ce point, le concept de dimension est dans une certaine mesure plus richement exploité dans l'*Ausdehnungslehre*.

Peano remarque également qu'un système linéaire peut avoir un nombre infini de dimensions. Dans les applications à la fin du chapitre, il dit que l'ensemble des polynômes de degré au plus n , est un système linéaire de dimension $n+1$ et que l'ensemble des polynômes quelconques possède une infinité de dimensions. C'est le seul exemple d'espace de dimension infinie qu'il donne, on peut donc penser que l'idée qu'il en a est surtout comme "état limite" d'un espace de dimension finie dont la dimension grandit de plus en plus.

Peano définit ensuite une *transformation linéaire*, qu'il dit être une *opération distributive*. De façon générale, il définit la notion application linéaire d'un espace vectoriel quelconque dans un autre. Il réserve aux endomorphismes le nom de *substitutions*. Puis il remarque que l'on peut définir sur des transformations linéaires des opérations d'addition, de multiplication par un scalaire et de multiplication (à condition que l'ensemble d'arrivée de la première soit l'ensemble de départ de la seconde). Il donne les principales propriétés de ces opérations, en particulier il remarque la non commutativité du produit.

Il ne dit cependant pas que l'ensemble des substitutions d'un système linéaire est lui-même un système linéaire. Cette lacune peut nous étonner, mais il faut bien avoir à l'esprit que les idées exposées ici sont déjà très en avance sur leur époque et on ne peut reprocher à Peano d'avoir manqué même de si près cette remarque. Accepter les opérateurs linéaires comme eux-mêmes de simples objets algébriques, qui peuvent avoir la même structure que les objets sur lesquels ils opèrent est un pas de plus dans la formalisation qui ne sera vraiment franchi que lorsque la notion de structure algébrique sera devenue courante.

Peano démontre ensuite qu'une transformation linéaire est entièrement connue par la donnée des images des éléments d'une famille libre maximale. Il propose alors une notation, analogue aux substitutions en notant dans une matrice $2 \times n$ les éléments de la famille au dessus de chacune de leur image. Cette notation permet de rendre compte des opérations entre transformations, mais elle est bien sûr moins pratique que la notation matricielle actuelle que Peano n'a pas utilisée.

Enfin très brièvement Peano propose quelques éléments de calcul infinitésimal généralisés aux vecteurs et à leurs transformations.

Ce que nous venons de résumer couvre douze pages du livre de Peano. Pourtant, cela contient aussi une première tentative d'étude systématique d'une structure définie par des axiomes.

Les concepts les plus fondamentaux sont ainsi bien dégagés, bien sûr il y a quelques lacunes. Ainsi le concept de dimension est encore un peu flou, surtout à cause de l'absence de la notion de famille génératrice et il n'est pas question de sous-espace vectoriel. Mais Peano a construit les premières fondations, ce qui représente l'étape fondamentale. Il faudra plusieurs années avant que l'on ne comprenne l'importance d'une telle approche, et que l'on prolonge et reprenne l'étude des espaces vectoriels dans cette voie.

b - Burali-Forti et Marcolongo

Parmi les premiers successeurs de Peano on trouve le duo formé par C. Burali-Forti et F. Marcolongo, qui ont certainement beaucoup fait pour la diffusion des idées de Grassmann et de Peano.

Le premier a écrit en 1897, une *introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* [BU1], dans laquelle il reprend les principales idées de l'*Ausdehnungslehre*, en les rendant plus accessibles et plus au goût du jour. Dans sa préface il retrace un bref historique du calcul géométrique en insistant sur la suprématie de Grassmann dans ce domaine, et en reconnaissant l'importance du travail de Peano pour rendre l'*Ausdehnungslehre* accessible.

Entre 1907 et 1908, les deux mathématiciens publient cinq notes dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, [BU2] qui mettent au point et unifient les notations, et par là les méthodes, du calcul vectoriel. En 1909, ils publient *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria alla meccanica et alla fisica-matematica*, dont une traduction française paraît l'année suivante [BU3]. Cet ouvrage est un bilan des résultats et des utilisations du calcul vectoriel, et en particulier de ses liens avec la géométrie analytique. On y trouve l'aboutissement des notes précédemment publiées dans les *Rendiconti di Palermo*, sur l'unification des notations et de nombreuses applications du calcul vectoriel à la géométrie et à la physique. Dans la préface les auteurs rendent à nouveau hommage à Grassmann et à Peano. De plus on trouve en appendice, une étude des formes de deuxième, troisième et quatrième espèces, selon la théorie de Grassmann, où les auteurs essaient de dégager des propriétés communes de ces objets géométriques, un peu comme l'avait fait Peano. Ils ne se posent toutefois pas le problème de la

minimalité du nombre de propriétés, qu'il faudrait considérer pour obtenir un système hypothético-déductif suffisant. Ils n'ont donc apparemment pas dans l'idée de donner une définition axiomatique.

Pourtant la même année, ils publient *Omografie vettoriali* [BU4], qui commence par une définition très générale des *systèmes linéaires*, selon le vocabulaire de Peano. Cette définition peut être considérée comme une définition axiomatique, mais elle comporte cependant trop de propriétés au départ, voici en effet son contenu :

"Soient U une classe d'êtres et $a, b, \dots$ des éléments quelconques et $m, n, \dots$ des nombres réels. On définit la somme $a+b$ de deux éléments quelconques de U et le produit ma ou am , d'un élément quelconque a de U par un nombre réel m , de façon que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (1) $a+b$ est un élément déterminé de U ;
- (2) il existe un élément de U , que l'on indiquera par 0 , nul pour l'opération $+$, c'est-à-dire tel que quelque soit l'élément a de U , on a $a+0=a$;
- (3) $a+b=b+a$;
- (4) $a+(b+c)=(a+b)+c$;
- (5) $a+c=b+c$ équivaut à $a=b$;
- (6) ma est un élément déterminé de U ;
- (7) $ma=0$ équivaut à $m=0$ ou $a=0$;
- (8) pour $m \neq 0$ $ma=mb$ équivaut à $a=b$;
pour $a \neq 0$ $ma=na$ équivaut à $m=n$;
- (9) $m(a+b)=ma+mb$; $(m+n)a = ma+na$;

Si toutes ces conditions sont vérifiées, on dira que U est un système linéaire. "

Cette définition est assez surprenante et nous allons la regarder de plus près. La première question qu'il faut se poser est de savoir si elle est équivalente à la définition actuelle. A priori, il y a plus de propriétés que les axiomes que l'on donne aujourd'hui, mais il en manque aussi trois : l'existence d'un opposé pour tout élément, $m(na)=(mn)a$ et $1a=a$.

Or considérons R avec l'addition habituelle et comme loi externe : $m*a=-ma$, on obtient ainsi un ensemble qui possède toutes les propriétés énoncées par Burali-forti et Marcolongo dans leur définition, pourtant il ne vérifie pas la pseudo-associativité - $m*(n*a)=mna$ et $(mn)*a=-mna$ - ni $1*a=a$.

Si par contre on rajoute à la définition ci-dessus la propriété de pseudo-associativité, on a $m(1a)=ma$ donc par (8), on obtient que $1a=a$. En utilisant alors (9) et (7) on obtient : $(-1)a+1a=0a=0$, donc l'existence d'un opposé pour tout élément. Ainsi pour que la définition précédente soit équivalente à la définition actuelle, il suffit de rajouter la pseudo-associativité.

Par ailleurs dans cette définition des propriétés se déduisent des autres. Ainsi grâce à (2), (5) et (9) on a que $0a=0a+0=0a+0a$ donc que $0a=0$, de la même façon on a que $m0=0$, donc une partie de (7) se déduit des autres propriétés. Par ailleurs $ma+(-m)a=0a=0$, en utilisant ceci et (9) dans (7) on montre que c'est équivalent à (7) (moyennant : $1a=a$).

Il n'est pas très utile d'essayer de montrer dans le détail comment cet ensemble de propriétés peut se réduire à un système minimal non redondant, d'autant plus que le point de départ n'est pas entièrement exact de toutes façons. Il ressort de la courte analyse précédente que la définition proposée, bien que sur beaucoup de points semblable à celle de Peano ou celle que l'on utilise actuellement, est en définitive plutôt maladroite, puisqu'elle est à la fois redondante et plus faible que la définition actuelle alors qu'elle comporte plus "d'axiomes". Il est étonnant de voir, que bien que les auteurs eussent eu connaissance du livre de Peano, ils n'aient pas repris sa définition. C'est sans doute une preuve que la notion d'axiome et l'intérêt d'un système hypothético-déductif minimal n'étaient pas, en ce début de siècle, des idées faciles à concevoir.

Toutefois, en dépit de ce mauvais départ, dans la suite de ce premier chapitre, les auteurs reprennent les idées de Peano de façon très semblable. Ils proposent même des résultats significativement plus avancés sur deux points :

- Ils définissent un espace de dimension n comme un système linéaire qui possède n éléments indépendants et tel que toute famille de $n+1$ éléments est liée. On voit donc un progrès par rapport à la définition de Peano (cf plus haut), dans laquelle n'apparaît pas la deuxième condition. Cependant cette deuxième condition peut être obtenue comme une conséquence de l'existence d'une famille génératrice finie, ce qui est un des résultats les plus fondamentaux de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Le mettre dans la définition est trompeur, cela impose le résultat mais évite, voire empêche, d'en donner une démonstration. L'amélioration de la théorie sur ce point n'est donc pas très sensible, c'est remplacer un implicite par une ambiguïté, substitution peu convaincante dont on peut se demander si elle est vraiment positive.

- Après avoir remarqué comme Peano, que l'on peut additionner et multiplier par un scalaire les applications linéaires de U dans U', Burali-Forti et Marcolongo disent explicitement qu'elles forment elles mêmes un système linéaire. Comme nous l'avons signalé plus haut, ce point est important, il montre une maturité par rapport au concept d'espace vectoriel. C'est en effet un signe d'une bonne acquisition de ce concept que de pouvoir le faire fonctionner à un degré plus élevé d'abstraction.

Cet ouvrage n'est donc guère plus important que celui de Peano, il est même en quelque sorte en régression sur le plan de l'axiomatique. Pourtant c'est un des premiers ouvrages où une définition abstraite de la structure d'espace vectoriel est le point de départ de la théorie, dans le livre de Péano, elle en était l'aboutissement. En ce sens ce livre est capital. Il semblerait que sa diffusion ait permis de faire connaître cette définition des espaces vectoriels (on verra par exemple qu'on en retrouve la trace chez Banach) même s'il ne permit pas plus d'imposer l'approche axiomatique en algèbre linéaire.

3 - Les espaces à une infinité de dimensions.

Après avoir prolongé les résultats de la géométrie analytique à des espaces de dimension n quelconque, il était tentant de résoudre des problèmes linéaires faisant intervenir des suites infinies de nombres. Les progrès sur la convergence des séries et l'étude des fonctions analytiques allaient ainsi bientôt permettre de franchir ce pas et de généraliser les résultats de la théorie des déterminants et de l'algèbre linéaire en dimension n à une infinité de dimensions, sans encore utiliser de théorie axiomatique des espaces vectoriels.

Dès la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, on trouve quelques pas aventureux dans ce sens, mais les justifications sont souvent bien minces et les résultats se contentent de généralisations purement formelles et en quelque sorte gratuites. Un des premiers exemples de traitement rigoureux de ce genre de questions se trouve sous la plume de H. Poincaré.

Dans un article de 1886, qui s'intitule *Sur les déterminants d'ordre infini* ([PO], T.5, pp.95-107), celui-ci fait référence à un problème résolu par M. Hill, en 1877, dont il se propose de faire une démonstration plus rigoureuse. A propos d'un problème sur le mouvement de la lune, M. Hill avait été amené à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \Theta w = 0$$

où Θ est une série de la forme : $\Theta_0 + 2\Theta_1 \cos t + \dots + 2\Theta_n \cos nt + \dots$

Une solution de cette équation est donnée par la série de terme général $b_n e^{(n+c)it}$, où les quantités b_n et c sont déterminées par les deux conditions suivantes :

1° La série en question est convergente

2° Les équations linéaires en nombre infini suivantes :

$$(1) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\Theta_{n-p} b_p) - (n+c)^2 b_n = 0 \quad \text{pour } n \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty.$$

sont satisfaites.

Poincaré démontre d'abord le lemme suivant. Il considère un système d'une infinité d'équations en une infinité de variables ayant des 1 sur la diagonale. Si on désigne par $a_{n,p}$ le terme général, on a donc, $a_{n,n}=1$. Il montre alors que si la série à double entrée de terme général $a_{n,p}$ ($n \neq p$) converge absolument alors la suite des déterminants D_n , obtenus en ne prenant que les n premières équations et les n premières variables, converge. Il montre qu'avec la même condition, la suite des déterminants partiels où on aurait inversé l'ordre des lignes ou des colonnes ou remplacé une ligne par une suite de termes bornés par une constante converge également. Il parle dans ce cas de *déterminant infini*.

Il applique ensuite ce lemme au cas des équations (1). En posant $a_{n,p} = \Theta_{n-p} / (\Theta_0 - (n+c)^2)$, il se ramène au cas où les éléments de la diagonales valent 1. Il choisit alors c de façon que le déterminant infini noté D(c), du système ainsi formé soit nul, alors en remplaçant les éléments

de la ligne d'indice 0 par la série des x_i , il obtient un nouveau déterminant infini qui est une fonction linéaire des x_i , il note A_i les coefficients des x_i . Il montre alors que si on remplace la série des x_i par successivement les séries des $(a_{n,p})_{n \in \mathbb{Z}}$, pour p variant de $-\infty$ à $+\infty$, on trouve à chaque fois un nouveau déterminant nul : pour $p \neq 0$, car dans le système il y a deux lignes identiques et pour $p=0$, car c'est $D(c)$. La suite des A_i apparaît ainsi comme des solutions b_n pour les équations (1).

Nous avons voulu détailler un peu le contenu de la démonstration pour bien montrer quel était le genre de calculs en une infinité de dimensions qui se faisaient à l'époque en utilisant la théorie des déterminants. On voit que l'on est ici plus dans le domaine de l'analyse infinitésimale que dans celui de l'algèbre, si ce n'est que les séries rencontrées ont des termes indéterminés. Il est d'ailleurs significatif à ce titre que l'article que nous venons de citer soit dans un chapitre des œuvres de Poincaré que les éditeurs (vers 1950) ont dénommé *Algèbre de l'infini*.

Ce type de démarche consistant à faire de l'algèbre linéaire en dimension infinie, en utilisant les résultats de la dimension finie et de la convergence des séries sera utilisé et amélioré pendant encore quelques décennies.

Ces méthodes seront particulièrement explorées entre autres par Hilbert ([HI], T.3, pp.94-140), Töplitz [TO], Schmidt [SC], Volterra, Hadamard, Von Neumann, Riesz, Fréchet, Fredholm etc....

Hilbert qui est sans doute le plus illustre de ceux-ci, est aussi celui qui a mis au point le plus de résultats dans ce domaine. Au cours de recherches sur les équations intégrales, il crée la géométrie des espaces fonctionnels. Il est amené ainsi à considérer des formes bilinéaires en une infinité de variables. Les problèmes de convergence des séries l'amènent alors à introduire l'espace H , qui portera son nom, qui est constitué des suites infinies de complexes dont la série des carrés des modules est sommable. Il établit ensuite une théorie des formes bilinéaires sur l'espace H , introduit des notions de produit scalaire, de fonctions orthogonales, de norme, de projection et même de dualité sur des espaces de dimension infinie et inaugure ainsi l'utilisation du langage géométrique dans l'analyse fonctionnelle. En fait, les véritables raisonnements d'algèbre linéaire se font en dimension finie grâce à des projections orthogonales sur des espaces euclidiens isomorphes à $\mathbb{R}^n$, les résultats en dimension infinie sont ensuite obtenus par des passages à la limite.

Dans tous ces travaux les outils fondamentaux d'algèbre linéaire ne sont guère différents de ceux déjà utilisés par Frobenius ou Cayley, mais les objets sur lesquels ils sont appliqués, sont de nature très différentes. On s'habitue peu à peu à une généralisation du langage de la géométrie à des problèmes entièrement détachés de la géométrie. De plus toutes les notions linéaires sont étendues dans le domaine de l'infini, on parle de famille infinie de vecteurs, de matrice et de déterminant infinis, on utilise ainsi des opérateurs linéaires dans des espaces de type H , même des notions comme celle de valeur propre sont étendues à la dimension infinie, Hilbert par exemple établit les résultats fondamentaux de la théorie spectrale des formes bilinéaires bornées sur H .

Ainsi, lors des deux premières décennies du XXème siècle, les applications de la théorie linéaire, c'est-à-dire essentiellement des déterminants et des formes bilinéaires, avec leurs ramifications, deviennent très étendues et commencent à toucher à pratiquement toutes les branches de mathématiques. Dans le même temps, comme nous l'avons déjà signalé, on commence à entrevoir que les résultats obtenus par les déterminants ne sont pas absolument nécessaires à la plupart des démonstrations et que l'on peut plutôt raisonner à partir des concepts de dépendance linéaire et de rang pour arriver à des résultats en dimension finie, qui se généralisent plus facilement à la dimension infinie. On trouve une des premières traces explicite de cette attitude dans un article de Töplitz datant de 1909 [TO]. L'auteur s'y intéresse aux solutions des systèmes linéaires en une infinité d'équations ne comportant chacune qu'un nombre fini de variable, ce qu'il appelle un système *Zeilenfinit*.

Dans son introduction, il distingue parmi les théorèmes sur la résolution des systèmes linéaires (finis) ceux dans lesquels les déterminants interviennent dans le contenu de l'énoncé, de ceux pour lesquels les déterminants ne sont qu'un outil dans la preuve. Il cite alors trois théorèmes du deuxième type. Il propose ensuite des démonstrations n'utilisant pas la théorie des déterminants, mais les concepts de dépendance linéaire et de rang et montre enfin que ces théorèmes se généralisent alors facilement au cas des systèmes *Zeilenfinit*. Cette démarche

conduit Töplitz a l'idée qu'il serait intéressant d'introduire une notion de rang généralisé qui pourrait prendre pour valeur non seulement un entier, mais aussi l'infini dénombrable. Il ne prolonge toutefois pas cette idée.

Malgré la grande généralité de ces travaux et leur audace par rapport à ce qui s'était fait jusque là, personne n'ose, n'a l'idée ou ne voit la nécessité, d'introduire une théorie générale basée sur des axiomes de structure et la définition de Peano reste toujours ignorée.

Il est difficile de vraiment savoir comment s'est amorcé le tournant décisif qui allait peu à peu donner à l'approche axiomatique la place qu'on lui connaît aujourd'hui. Le passage de la dimension trois aux dimensions finies quelconques puis à la dimension infinie "dénombrable", fut relativement lent et pour sa réalisation, on dut combattre de nombreuses réticences, mais jusque là, l'évolution s'était faite dans une certaine continuité d'approche, comme une généralisation progressive mais somme toute assez naturelle de concepts au spectre de plus en plus large. Cependant la généralité de plus en plus grande des espaces envisagés de même que la diversité des domaines abordés par les nouvelles méthodes sont autant de raisons qui ont favorisé l'émergence d'une nouvelle approche. Par ailleurs comme Töplitz, certains mathématiciens commencèrent à préférer des méthodes n'utilisant pas les déterminants, dont la généralisation à un nombre infini de dimension n'allait pas sans poser des problèmes tant conceptuels que pratiques. Un des premiers mathématiciens à avoir lancé un programme d'étude organisé autour d'une approche axiomatique des problèmes liés aux opérateurs linéaires sur les espaces fonctionnels est S. Banach.

En 1920 Le jeune Banach, soutient sa thèse de Doctorat à l'université de Léopold (Pologne). Cette thèse publiée deux ans plus tard, s'intitule *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* ([BA], V.II, pp.306-348).

Après avoir cité les travaux de plusieurs de ses illustres prédécesseurs sur les équations fonctionnelles, il se propose de généraliser certains de leurs résultats à des espaces de fonctions encore plus généraux. Mais en définitive c'est une nouvelle approche qu'il propose permettant d'englober dans une même théorie unifiée tout ce qui concerne le sujet. Voilà en quels termes Banach la présente :

"L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui."

On reconnaît bien sûr explicitement les étapes de la démarche adoptée dans le cas d'une étude de structure algébrique au sens moderne du terme. Et c'est bien en fait ce que fait Banach dans la suite.

La structure qu'il définit est ce que l'on appelle aujourd'hui d'espace de Banach, c'est-à-dire d'espace vectoriel normé complet. Il définit celle-ci par la donnée de trois séries d'axiomes. La première série correspond à la structure d'espace vectoriel, la deuxième à la définition d'une norme et la troisième à la définition de la complétude.

Pour les deux dernières définitions, Banach donne exactement les définitions actuelles. Sa définition d'un espace vectoriel est plus intéressante, la voilà telle qu'il la donne :

"Soit E une classe composée tout au moins de deux éléments, d'ailleurs arbitraires, que nous désignerons par exemple par X, Y, Z, ...

a, b, c désignant les nombres réels quelconques, nous définissons pour E les deux opérations suivantes :

1) l'addition des éléments de E

$$X + Y, X + Z, \dots$$

2) la multiplication des éléments de E par un nombre réel

$$aX, bY, \dots$$

Admettons que les propriétés suivantes sont réalisées :

I₁. $X+Y$ est un élément bien déterminé de la classe E,

I₂. $X+Y = Y+X$,

I₃. $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$,

I₄. $X+Y=Y+Z$ entraîne $Y=Z$,

I_5 . Il existe un élément de la classe de E déterminé Θ et tel qu'on ait toujours $X + \Theta = X$,

I_6 . $a.X$ est un élément bien déterminé de la classe de E ,

I_7 . $a.X = \Theta$ équivaut à $X = \Theta$ ou $a = 0$,

I_8 . $a \neq 0$ et $a.X = a.Y$ entraîne $X = Y$,

I_9 . $X \neq \Theta$ et $a.X = b.X$ entraîne $a = b$,

I_{10} . $a.(X+Y) = a.X + a.Y$,

I_{11} . $(a+b).X = a.X + b.X$,

I_{12} . $1.X = X$,

I_{13} . $a.(b.X) = (a.b).X$.

Nous introduisons en même temps les définitions suivantes :

(a) $-X = (-1).X$

(b) $(X-Y) = X + (-1).Y$.

Toutes les règles algébriques des signes $+$ et $-$ et de la multiplication (d'un élément de E par un nombre) restent valables pour un système E . Comme exemples d'un tel système peuvent servir : les vecteurs, les formes de Grassmann, les quaternions, les nombres complexes. etc."

Tout d'abord remarquons que Banach ne donne pas de nom à cette structure intermédiaire, mais en fait il ne donnera pas non plus de nom à la structure complète.

Sa définition semble être inspirée de celle donnée par Burali-Forti et Marcolongo (cf §-2-b de ce chapitre). Elle en diffère essentiellement sur les seuls deux points suivants :

- Elle possède toutes les propriétés de la définition de Burali-Forti, mais dans les propriétés 4, 8 et 9, Banach met des implications où ses deux prédécesseurs avaient mis des équivalences.

- Elle possède en plus les propriétés 12 et 13.

Elle est donc toujours redondante mais elle est cette fois équivalente à la définition actuelle. Regardons en effet les choses de plus près.

- Les axiomes numérotés 7, 8 et 9 peuvent être déduits des autres et ne sont donc pas utiles dans la définition.

- Les axiomes 1 et 6 expriment la stabilité des lois dans l'ensemble E .

- A part l'axiome 4, les 7 axiomes restant sont ceux que l'on utilise aujourd'hui dans la définition d'espace vectoriel (il ne manque que l'existence des opposés).

- L'axiome 4 exprime la régularité de l'addition et se substitue, par rapport à la définition moderne, à l'existence d'un opposé pour chaque élément de E .

En effet de 11 et 7 on déduit que $0.X + 0.X = 0.X = 0.X + \Theta$ et donc par 4, que $0.X = \Theta$; grâce à 11 et 12 on montre alors que $1.X + (-1).X = 0.X = \Theta$ et de même que $(-1).X + 1.X = \Theta$ donc X admet $(-1).X$ comme opposé.

De plus la régularité est bien un axiome utile. En effet $\mathbb{R}$ muni de la multiplication et de la loi externe de puissance en posant que $0^\lambda = 0$, pour tout λ réel, est un ensemble qui possède tous les axiomes d'espace vectoriel, sauf la régularité de la multiplication ou l'existence d'un symétrique pour 0, ce qui revient au même problème.

Ainsi il est clair que l'on obtient ici une définition équivalente à celle utilisée actuellement ou à celle de Peano.

- Comme précédemment la commutativité de l'addition peut se déduire du reste des axiomes.

- De plus ici, à condition de garder la commutativité de l'addition, on peut déduire l'existence d'un élément neutre pour l'addition des axiomes 1, 2, 3, 4, 6, 10, 11, 12 et 13. En effet pour cela il suffit, comme on l'a vu précédemment de montrer que pour tout X et Y on a $0.X = 0.Y$ (cet élément est alors le neutre en effet par 11 et 12 : $X + 0.X = 1.X + 0.X = (1+0).X = 1.X = X$). Or on a toujours grâce à 11 : $0.X + 0.X = (0+0).X = 0.X$ donc $0.X + 0.Y = 0.X + 0.X + 0.Y = 0.X + 0.Y + 0.Y$, grâce à 2 et 4 on déduit alors en simplifiant à droite par $0.X$ et à gauche par $0.Y$ (ce qui demande la commutativité ou une double régularité) que $0.X = 0.Y$.

Donc le système de propriétés proposé par Banach est redondant, il peut se réduire aux axiomes 1, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 13 et au choix 2 ou 5. Mais il définit bien la structure d'espace vectoriel au sens actuel.

Banach se rendra compte de la redondance de sa définition puisqu'en 1932 dans sa monographie intitulée *Théorie des opérations linéaires* ([BA], V.II, pp.19-217) on trouve une définition axiomatique des espaces vectoriels ne comportant que ce minimum d'axiomes (il a gardé la commutativité et écarté l'existence du neutre).

Cette monographie, qui est une œuvre d'une très grande richesse, est une synthèse de plusieurs travaux antérieurs et il est fort probable que Banach ait vu la redondance de ses premiers axiomes avant de publier ce livre. On peut noter par exemple que dans un article de 1929 intitulé : *Sur les fonctionnelles linéaires* ([BA], V.II, pp.375-380), il considère dès les premières lignes *un ensemble vectoriel normé E*, mais il n'en précise pas la définition. Par contre au paragraphe suivant il définit clairement la notion de sous-espace vectoriel en ces termes : "*un ensemble $G(\subset E)$ sera dit linéaire, lorsqu'il contient toute combinaison linéaire $a_1x_1+a_2x_2$ de deux quelconques de ses éléments x_1, x_2 .*"

On ne peut pas assurer que Banach ait eu connaissance des travaux de Peano, mais il est clair en tout cas qu'il en prend la suite, pour ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels. Pourtant son but est tout autre, nous sommes maintenant très loin de la géométrie et même de l'*Ausdehnungslehre*. Banach donne les exemples des formes de Grassmann ou des quaternions mais c'est seulement à titre indicatif, il utilise, lui, des espaces fonctionnels donc de dimension infinie. En ce sens l'approche axiomatique lui est d'un grand secours puisqu'il élargit le concept d'espace vectoriel et n'a plus, comme ses prédécesseurs, à se ramener systématiquement à une infinité dénombrable de coordonnées par projection et limite de séries. Les espaces de Hilbert apparaissent alors comme des cas particuliers des espaces de Banach plus généraux.

Cependant les études de Banach ne sont pas du domaine de l'algèbre linéaire pure, puisque ce sont surtout les structures topologiques qui l'intéressent dans les problèmes d'analyse fonctionnelle. Cependant son étude des opérateurs linéaires permettra de faire progresser cette théorie d'une façon sensible.

Nous donnons ci-dessous quelques extraits de la préface de la *Théorie des opérateurs linéaires* ([BA], V.II, pp.19-21), qui nous éclaire sur la perception de Banach sur la nature et l'importance des théories linéaires.

"La théorie des opérations linéaires, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle : il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations. (...) Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiment approfondie n'est possible qu'à l'aide de la théorie des opérateurs. Telles sont aujourd'hui la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien pour sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prêtent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites linéaires, qui correspondent à celle des formes linéaires $a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$ de l'algèbre.

La notion d'opérateur linéaire peut être définie comme suit. Soient E et E_1 deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément zéro sont supposés définis. Soit $y=U(x)$ une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de E_1 (dans le cas où E_1 est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de fonctionnelle). Si, quels que soient x_1 et x_2 de E, on a $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$. l'opération $U(x)$ s'appelle additive. Si en outre E et E_1 sont des espaces métriques, c-à-d. que dans chacun d'eux la distance des éléments est définie, on peut considérer les opérations $U(x)$ continues. Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent linéaires.

Dans ce livre je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux (...) Je donne aussi des interprétations des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques. (...) "

La première partie de cette préface nous montre combien Banach comme apparemment la plupart des mathématiciens de son époque, commençait à voir l'importance de l'étude des transformations pour mieux comprendre la nature des objets. Klein avec le *programme d'Erlangen* (1872) avait déjà compris et admirablement mis en œuvre ce principe pour l'étude des différentes géométries. Depuis la fin du XIX^{ème} siècle cette tendance s'était amorcée, avec Banach elle arrive à une phase décisive.

La deuxième partie de cette préface nous donne un résumé des concepts élémentaires qui sous-tendent l'œuvre de Banach. On pourra remarquer que sa définition des espaces E et E_1 est un peu hâtive, puisqu'il n'y fait pas allusion à la loi externe. On peut se demander pourquoi il ne se contente pas de dire que E et E_1 sont des espaces vectoriels, ce qui lui aurait évité cette périphrase elliptique et finalement inexacte. Cette attitude nous laisse supposer que le concept d'espace vectoriel n'était pas en 1932, encore très familier dans la communauté mathématique. Comme nous l'avons signalé plus haut, dans le corpus du livre, Banach donne une définition axiomatique des espaces vectoriels qui est plus complète. On a vu qu'elle équivalait à la définition actuelle ou à celle de Peano tout en étant un peu différente, elle est aussi formée de "vrais axiomes", c'est-à-dire qu'il n'y a pas de redondance.

Par ailleurs la définition d'un opérateur linéaire qu'il donne dans la préface est celle qu'il reprend dans le livre même, elle peut choquer le lecteur actuel. En effet elle privilégie l'aspect topologique sur l'aspect algébrique, elle est surtout restrictive puisqu'elle ne concerne que les espaces métriques et qu'elle exclut les opérateurs linéaires non continus (au sens actuel). Mais Banach définit aussi les opérateurs *homogènes* (i.e. $U(aX)=aU(X)$) ; ainsi un opérateur linéaire actuel est pour Banach un opérateur additif homogène. Cette distinction avec les habitudes actuelles ne joue donc finalement que sur un choix de vocabulaire.

Dans la suite du livre, l'auteur introduit plusieurs structures algébriques, à commencer par celle de groupe. Cependant Banach ne prend pas la peine faire la remarque qu'un espace vectoriel est un groupe. La jugeait-il comme trop trivial pour être signalée ? On ne peut pas douter qu'il se l'était faite à lui-même, c'est donc un choix et non un oubli. L'étude des structures emboîtées est devenue un point si familier pour un mathématicien de la fin du XX^{ème} siècle, que ce choix nous surprend, il nous rappelle aussi que l'approche de Banach était très nouvelle pour son temps et que certaines règles implicites de ce type d'étude n'étaient pas encore mises en place.

Rentrer dans les détails des résultats démontrés par Banach dépasserait le but que nous nous sommes assignés au début de cette analyse. De plus la nature de ses travaux relèvent plus du domaine de la topologie et de l'analyse fonctionnelle qu'à proprement parler de celui de l'algèbre linéaire. Il est cependant important de remarquer que c'est un des premiers exemples où des concepts très généraux d'algèbre linéaire sont utilisés dans un cadre axiomatique, par ailleurs certains des concepts utilisés par Banach ne sont déjà plus élémentaires (valeurs propres ou dualité par exemple). Or il introduit concrètement de nombreux espaces vectoriels fonctionnels auxquels il applique les résultats de sa théorie, elle-même élaborée dans un cadre entièrement abstrait.

Avec les travaux de Banach, s'établit également la spécificité de l'algèbre linéaire en dimension infinie. Dans la *théorie des opérateurs linéaires*, il met au point les principaux résultats sur la dualité, définie pour la première fois de façon tout à fait générale. En particulier, il donne le premier exemple d'espace non isomorphe à son dual. D'autre part il définit la notion de *dimension linéaire*, qui est le pendant de la dimension pour les espaces de dimension infinie. Ce concept ne se définit que par comparaison : E est de dimension linéaire inférieure à F , si il est isomorphe à un sous-espace vectoriel fermé de F . Cette notion seulement valable dans un cadre topologique permet de comparer la "taille" des espaces vectoriels fonctionnels. Ainsi après avoir établi quelques résultats en particulier sur la dimension des espaces L^p , Banach pose la question de savoir s'il existe des espaces ayant même dimension linéaire mais n'étant pas isomorphes. Dans le livre qui nous intéresse, la réponse à cette question reste ouverte, mais la même année avec S. Mazur, Banach présente une note qui sera introduite par E. Cartan à l'Académie des Sciences de Paris dans laquelle, ils donnent un exemple de tels espaces vectoriels ([BA], V.II, pp.431-433).

L'œuvre de Banach est certainement l'un des premiers exemples où une définition axiomatique des espaces vectoriels a été indispensable pour atteindre les résultats énoncés. Du même coup le type de problèmes soulevés est très éloigné de celui qui a permis aux premiers concepts d'algèbre linéaire d'apparaître, nous sommes en apparence en effet, complètement

détachés de l'étude des systèmes d'équations linéaires. Pourtant rappelons que dans sa préface Banach compare les opérateurs linéaires aux formes linéaires de l'algèbre (cf passage cité plus haut). En ce sens cette filiation lointaine, qui part des premières résolutions antiques de problèmes linéaires en une variable, est encore présente.

Ainsi la théorie axiomatique des espaces vectoriels, qui n'avait jamais réussi vraiment à convaincre, trouve ici sa pleine justification -a posteriori- au sujet de problèmes fort éloignés de ceux qui en avaient permis une première ébauche. Ce premier pas franchi, les besoins de la science moderne allaient peu à peu faire en sorte que l'on rassemble tous les résultats d'algèbre linéaire en une seule théorie de nature axiomatique, restructurant ainsi de façon opaque pour le lecteur non averti, la longue et méandreuse genèse de concepts dont les multiples facettes se fondirent en un seul moule.

4 - Vers une théorie unique

Pour boucler la boucle, il nous faut maintenant voir comment toutes ces questions d'abord éparses qui ont participé même faiblement à la genèse des concepts modernes d'algèbre linéaire ont été relues et regroupées dans une théorie unique et unificatrice, centralisant dans un contexte abstrait les résultats des différents domaines vus sous un même éclairage. Cette étape de reconstitution a demandé un esprit de synthèse très fort autant qu'une bonne connaissance de nombreuses théories, pour certaines encore en cours.

Mais avant tout il nous faut essayer de comprendre quelles sont les raisons qui ont pu amener une telle réorganisation des connaissances autour d'un même pôle. Il ne semble pas qu'il y ait eu de nécessité absolue interne aux mathématiques ou même venant des applications de l'algèbre à des domaines extra-mathématiques. Les causes d'un tel changement semblent plutôt être de nature philosophique ou esthétiques, elles sont peut-être aussi bien matérielles.

Il semble en effet qu'au début du XX^{ème} siècle les mathématiques ont subi de profond bouleversements dans leur organisation, à cause d'un accroissement prodigieux des travaux et des résultats ainsi que de l'interdépendance de plus en plus forte et complexe entre les différents domaines. Le vieux cloïsement Algèbre, Analyse et Géométrie, se trouva du même coup ne plus rendre compte d'une réalité beaucoup moins sectorialisée. Dans le même temps la priorité donnée à l'étude des transformations sur les objets eux-mêmes et la généralisation du concept de structure algébrique offrirent la possibilité d'une organisation plus adaptée de l'édifice mathématiques. Dans ce nouveau schéma organique, l'algèbre linéaire venait en quelque sorte trouver à point une place privilégiée allait pouvoir changer de statut.

Il semble ainsi, qu'en ce début de XX^{ème} siècle, l'histoire de l'algèbre linéaire prenne un nouveau tour. Bien sûr de nouveaux concepts et résultats ainsi que des ramifications plus riches vont continuer de se développer au gré des nouvelles découvertes et des nécessités de celles-ci, mais les concepts élémentaires ont atteint une maturité informelle telle, que l'élaboration des fondations de la théorie de l'algèbre linéaire va répondre, comme nous allons le voir, avant tout à des nécessités didactiques, esthétiques ou "métacognitives" plutôt qu'à un réel besoin des mathématiques dans leur fonctionnement "élémentaire".

Aussi notre étude qui s'est fixée pour but de retracer la genèse des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire, touche à sa fin. Nous allons, à partir de maintenant, nous désintéresser des ouvrages de recherche pure pour porter notre attention sur les livres de synthèse ou d'enseignement qui vont prendre le relais dans cette dernière phase de l'élaboration des fondements de la théorie axiomatique des espaces vectoriels.

Depuis la fin du XIX^{ème} siècle et après la découverte des notes d'E. Galois, avec les travaux de nombreux mathématiciens comme Kronecker, Dirichlet, Kummer Dedekind, Weber, E. Noëther, Artin etc... L'algèbre prenait peu à peu l'allure moderne qu'on lui connaît aujourd'hui. En 1871, Dedekind republie le *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet et rajoute un supplément dans lequel il définit, en en donnant pour la première fois des définitions de type axiomatique, les structures d'anneau, d'idéal, de corps et de module ([DE], suppléments XI, pp. 434-640). Dedekind est aussi le premier à considérer les extensions de corps comme des espaces vectoriels. Par ailleurs en 1898, dans son *Traité d'algèbre*, Weber donne la première définition très générale et de caractère axiomatique de la structure de groupe (toutefois encore différente de l'actuelle) ([WE], V.II, pp.3-7).

Une première synthèse des nouvelles théories d'algèbre est due à E. Steinitz, dans des travaux datant de 1910 et regroupés sous le titre de *Algebraische Theorie der Körper* [ST]. Ce livre est une première tentative d'exposé systématique des résultats d'algèbre par l'étude des

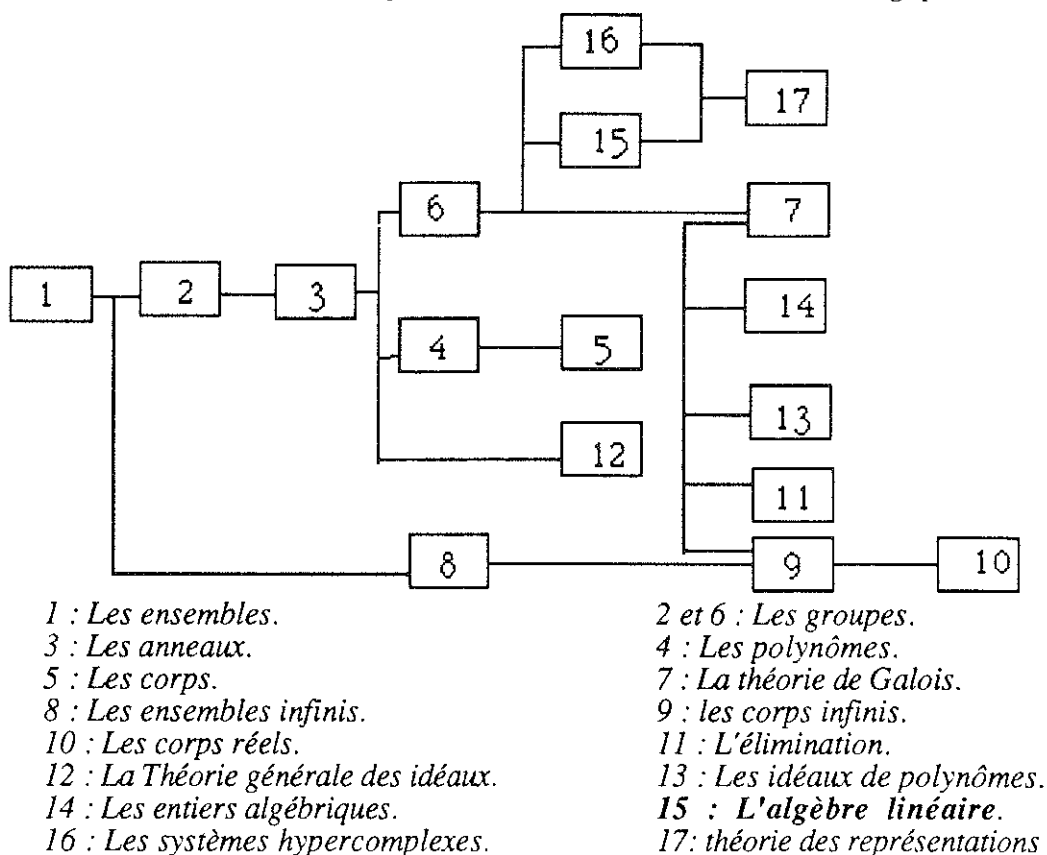
structures définies axiomatiquement de façon très moderne. Sur le plan de l'algèbre linéaire, il est toutefois fort discret, ce qui en fait son principal défaut. Comme beaucoup d'œuvres de précurseurs, il a été préféré par la suite à des ouvrages plus achevés, mais qui se sont inspirés de près ou de loin de cette première tentative.

Ainsi en 1930-1931, Van Der Waerden publie sa *Moderne Algebra* [VA1], qui est un pas de plus dans la refonte des théories algébriques et en particulier qui marque un progrès décisif dans le domaine de l'algèbre linéaire et plus largement de la linéarisation de l'algèbre. Cet ouvrage aux qualités didactiques incontestables et qui s'adresse d'ailleurs à des étudiants, donne une présentation complète et entièrement réorganisée de quasiment toutes les théories algébriques de l'époque sous leur aspect le plus récent. Il eut un succès très grand à travers le monde. Son auteur en proposa plusieurs rééditions, la première en 1937-1940 et la dernière et cinquième édition en 1967. Par ailleurs l'ouvrage fut traduit en anglais pour la première fois, d'après la deuxième version allemande, en 1949-1950 [VA2].

Nous donnons ci-dessous l'organigramme proposé par Van der Waerden, pour la lecture des différents chapitres (d'après la première version), ce qui nous donnera une idée non seulement du contenu mais encore des relations faites par l'auteur entre les différents domaines.

" *FIL DIRECTEUR*

Vue d'ensemble sur les chapitres des deux volumes et leurs liens logiques.



On voit dans ce schéma que l'organisation du livre de Van Der Waerden est très proche de ce qu'on fait encore actuellement. L'algèbre linéaire occupe apparemment une place périphérique, à côté des systèmes hypercomplexes (que l'on commençait d'ailleurs à appeler des algèbres). En fait Van Der Waerden introduit des concepts linéaires avant le chapitre 15.

Dans la première version, il ne définit pas explicitement la notion d'espace vectoriel avant ce chapitre, mais dans le chapitre 5 (à propos des corps), il considère des extensions de corps comme des espaces vectoriels et consacre un paragraphe à la notion de dépendance linéaire sur un corps ([VA1], T.1, pp95-99 ou [VA], T.1, pp. 99-104).

Il commence par se donner un anneau G , contenant un corps D , ce qui est un cas particulier d'espace vectoriel. Pourtant dans tout le paragraphe, il n'utilise jamais d'autre produit que le produit des éléments de l'anneau par ceux du corps ce qui fait que ses démonstrations et ses résultats resteraient valables dans le cas le plus général d'un espace vectoriel sur Δ . D'ailleurs dans la deuxième édition, sans presque rien modifier du contenu de ce chapitre, Van

Der Waerden considère au lieu de G , un module sur Δ , c'est-à-dire un espace vectoriel, (sauf que le corps Δ n'est pas forcément commutatif).

Dans les deux versions le but de l'auteur est de définir le degré d'une extension de corps, ceci revient donc à définir la dimension de G vu comme espace vectoriel sur Δ -ce qui n'est dit explicitement que dans la version de 1940-. Voici comment il s'y prend.

Il commence par définir ce que veut dire qu'un élément de G dépend linéairement sur Δ d'autres éléments de G . Puis il définit le fait que plusieurs éléments de G sont linéairement indépendants. Il donne alors les deux théorèmes élémentaires suivants :

1 - *Chaque u_i est linéairement dépendant des $u_1, \dots, u_n$.*

2 - *Si v est linéairement dépendant des $u_1, \dots, u_n$, mais pas des $u_1, \dots, u_{n-1}$, alors u_n est linéairement dépendant des $v, u_1, \dots, u_{n-1}$.*

En cinq corollaires, et avec des démonstrations analogue à ce que l'on fait encore aujourd'hui, il arrive ainsi au résultat fondamental suivant :

- si deux systèmes de vecteurs sont équivalents (i.e. chaque vecteur de l'un dépend linéairement des vecteurs de l'autre) et que les vecteurs de chacun sont linéairement indépendants, alors ils ont le même nombre de vecteurs.

Nous dirions aujourd'hui que deux systèmes libres engendrant le même sous-espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs. Mais à quelques distinctions de vocabulaire près c'est le même résultat.

Ensuite il définit les parties de G de *rang fini*, comme des ensembles dont tous les éléments dépendent linéairement sur Δ , d'un nombre fini de leurs éléments, ce qui sous-entend qu'il a fait une distinction très claire entre les espace de dimension finie et les autres. Il peut alors définir la notion de dimension qu'il appelle le *rang linéaire*.

Dans un sixième et dernier corollaire, il démontre enfin qu'un sous-espace d'un espace de rang fini sur D est lui-même de rang fini et de rang linéaire inférieur. Il établit alors la loi de multiplicité dans le cas de deux extensions de corps superposées : $[F:H]=[F:G][G:H]$.

Dans la deuxième version, Van Der Waerden consacre le chapitre suivant à l'application de ces résultats à la résolution des systèmes d'équations linéaires sur un corps quelconque.

Dans les deux versions on voit donc que Van Der Waerden arrive de façon entièrement abstraite avec très peu de présupposés et aucune utilisation de déterminants ou même de systèmes d'équations à donner de façon très claire, les fondements essentiels de la théorie axiomatique des espaces vectoriels de dimension finie. Cette étape est capitale, et l'auteur semble l'avoir compris. Dans le chapitre 15, qui s'intitule *Algèbre linéaire*, l'auteur commence par définir la notion générale de module (à droite) sur un anneau unitaire (non nécessairement commutatif).

Dans un premier temps il donne la définition suivante : " *un module à droite sur un anneau K est un groupe abélien, avec K comme domaine multiplicatif à droite satisfaisant les règles suivantes en plus de celles de groupes :*

$$(a+b)\lambda = a\lambda + b\lambda$$

$$a(\lambda + \mu) = a\lambda + a\mu$$

$$a.\lambda.\mu = a\lambda.\mu."$$

Il note M_0 l'ensemble des éléments du module qui multipliés par l'unité de K donnent 0 et M l'ensemble de ceux qui donnent eux-mêmes. Il remarque alors que tout élément d'un module s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de M_0 et d'un élément de M : $a=(a-1.a) + 1.a$.

Se fondant sur cette remarque il décide de ne plus considérer que des modules dans lesquels l'unité de K est un opérateur unitaire, ce qui revient à rajouter dans les axiomes la propriété $1.a=a$. Il obtient ainsi la définition moderne de module dont les espaces vectoriels sont un cas particulier quand l'ensemble des opérateurs est corps (commutatif).

Dans un premier paragraphe, il garde cette définition générale et définit de façon tout à fait moderne les principales notions élémentaires : dépendance linéaire, base, composantes des vecteurs sur une base, applications linéaires, matrices. Il montre que deux modules ayant des bases comportant le même nombre d'éléments sont isomorphes et que l'ensemble des matrices carrés d'ordre n est une algèbre.

Dans le deuxième paragraphe, l'auteur considère que K est un corps et que M est de rang

Dans le deuxième paragraphe, l'auteur considère que K est un corps et que M est de rang fini. Il redémontre que la dimension est unique en la caractérisant comme la longueur de la chaîne quand on décompose M , en une succession de sous groupes distingués de façon irréductible et non répétitive. Il utilise donc un résultat de la théorie des groupes, mais il signale également la démonstration du chapitre 5, faite pour les extensions de corps (cf plus haut). Il donne (ou redonne dans le cas de la deuxième version) une interprétation de ces résultats appliqués à la résolution des systèmes d'équations linéaires à coefficients dans un corps quelconque.

Dans les paragraphes suivants, que nous ne détaillerons pas, Van Der Waerden établit les principaux résultats élémentaires de la théorie des modules et des représentations et donne des démonstrations dans un cas très générale des résultats fondamentaux de la réduction des matrices et de l'étude des formes quadratiques et hermitiennes.

On trouve donc dans cet ouvrage, et ce dès la version de 1930, les principaux résultats élémentaires d'algèbre linéaire traités dans un cadre abstrait très général, sous une forme quasi identique à ce qui se fait encore aujourd'hui. On peut donc dire qu'à cette date s'achève en quelque sorte la longue genèse des concepts les plus élémentaires, enfin regroupés -à des fins avant tout didactiques et esthétiques- dans une théorie générale axiomatisée. Dans le même temps, on l'a vu au chapitre précédent, l'analyse fonctionnelle permet de dégager clairement la notion de dualité et de préciser les résultats de l'algèbre linéaire en dimension infinie.

Ainsi après 1930, l'algèbre linéaire moderne est née. Encore hésitante elle n'a pas entièrement défini ses frontières, ni unifié tous ses résultats, mais ce ne sont plus que des détails et déjà les prolongements sont en cours (en algèbre multilinéaire et avec les modules essentiellement). Depuis cette branche des mathématiques n'a cessé non seulement d'accroître ses ramifications mais encore de gagner de plus en plus de domaines mathématiques ou paramathématiques dans ses applications. L'inflation de "linéarité" dans les théories et les modélisations a rendu cet outil indispensable à un nombre sans cesse croissant d'utilisateurs si bien qu'il serait trop long, si ce n'est impossible de faire une liste de toutes les applications possibles, ce à quoi nous ne nous risquons pas.

Pour conclure notre analyse nous allons maintenant rapidement regarder quelle évolution l'algèbre linéaire a suivi dans l'enseignement français, ce qui est le dernier stade d'évolution d'une théorie arrivée à maturité dans ses fondements.

V - Aperçu de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre linéaire, principalement en France.

L'utilisation des vecteurs en géométrie est vraiment apparue de façon significative dans les programmes du secondaire dans les années 1930. On distinguait à cette époque les notions de vecteurs libres, liés ou glissants. Les techniques de calcul vectoriel firent ainsi leur entrée dans le système éducatif du second degré français, créant un certain renouveau, bien que très relatif, dans la géométrie, mais ne bouleversant pas vraiment les habitudes. Cette situation n'évolua guère jusque dans les années soixante.

Avec le livre de Van Der Waerden, "l'algèbre moderne" a touché peu à peu les étudiants des troisièmes cycles universitaire de tous les pays occidentaux. Une génération de mathématiciens, à laquelle appartient par exemple J. Dieudonné, pour ne citer que lui, a ainsi découvert le nouveau visage de l'algèbre à travers ce livre aux qualités didactiques incontestables et dont les exercices ne pouvaient laisser indifférents les esprits curieux et aventureux.

Le mouvement qui a conduit à cette métamorphose était parti, nous l'avons vu, de l'école allemande essentiellement, petit à petit cependant le relais semble être d'abord passé aux mains des américains. Ainsi en 1941, avant même la parution de la première traduction anglaise du livre de Van Der Waerden, G. Birkhoff et S. Mac Lane publient la première édition de leur livre *A survey of Modern Algebra* [BI-ML1]. Cet ouvrage touchera de nombreuses promotions d'étudiants à travers ces multiples rééditions - la dernière semble dater de 1967-. On y trouve une approche didactique de l'algèbre moderne destinée aux étudiants *undergraduate* -équivalent des premiers cycles français-. Dans leur préface, les auteurs précisent qu'ils ont voulu faire comprendre l'approche formelle et abstraite de l'algèbre moderne, mais en en donnant de nombreuses applications concrètes. De plus pour favoriser la participation active des étudiants ils proposent de nombreux exercices tant sur des résultats de la théorie formelle que sur des applications pratiques.

De fait les grandes qualités de cet ouvrage, en ont fait un classique du genre. La place qu'y occupe l'algèbre linéaire est grande et fondamentale, et la présentation qui en est faite est, malgré quelques différences dans les toutes premières versions, très voisine de ce qu'on trouve encore dans la plupart des manuels actuels. Petit à petit des théories plus tardivement achevées telles que la dualité ou l'algèbre multilinéaire ont été rajoutées aux différentes rééditions.

En 1967, conscients des progrès encore faits depuis 1941 dans l'organisation de l'algèbre, les mêmes auteurs ont publié un ouvrage intitulé *Algebra*, qui se place à un niveau sensiblement plus élevé que le *survey*, mais poursuit les mêmes buts didactiques pour les mêmes étudiants *undergraduate* aussi bien que pour leur aînés. Les auteurs ont centré leur exposé autour de la théorie des catégories dont ils ne font toutefois pas un exposé général, mais qu'ils essaient d'illustrer et d'utiliser pour clarifier leur présentation. En 1970, J. Weil présente une traduction française en deux volumes de la deuxième édition, préfacée par J. Dieudonné [BI-ML2]. Cette dernière parution eut un certain succès en France parmi les étudiants des universités et des classes préparatoires.

D'un autre côté, à la suite de l'œuvre de Banach, l'utilisation de l'algèbre linéaire s'est généralisée en analyse fonctionnelle, qui restera le domaine privilégié de création d'espaces vectoriels. Les premiers résultats significatifs d'analyse fonctionnelle n'ont cependant jamais fait l'objet d'enseignement avant les deuxième cycles universitaires. A ce niveau ils furent par contre introduit assez tôt et ont pris depuis une ampleur de plus en plus grande. A titre indicatif, signalons que la première édition du fameux livre de W. Rudin, qui est encore aujourd'hui une référence de choix sur le sujet, date de 1968 [RU]. Ce domaine des mathématiques représente aujourd'hui une part importante de l'enseignement des mathématiques pour la maîtrise, et cette situation est peut-être un des facteurs importants qui ont conduit à un enseignement précoce de l'algèbre linéaire élémentaire.

Il est difficile de savoir quand l'enseignement de l'algèbre linéaire est apparu, en France, sous sa forme moderne. Il est certain que l'initiative est venue de certains professeurs dans leurs universités et d'abord pour les étudiants des troisième et second cycles. Ce n'est que dans le

courant des années cinquante que l'on a envisagé de l'introduire dès les premiers cycles. Et encore l'évolution fut lente et ce n'est qu'à la fin de la décennie, que l'algèbre linéaire a fait son entrée dans les programmes officiels des concours aux grandes écoles scientifiques, environ dix ans avant l'introduction de la définition axiomatique des espaces vectoriels en classe de seconde et du théorème de la dimension en classe de première...

En 1947, sous le pseudonyme collectif de N. Bourbaki, un groupe de mathématiciens français publie, le chapitre 2 (intitulé *Algèbre linéaire*) du livre II (Algèbre) de la première partie (les structures fondamentales de l'analyse) de ses *éléments de mathématiques* [BO2]. Cette gigantesque œuvre est devenue rapidement une référence unique dans tous les domaines des mathématiques et a eu, et a encore, une influence sans pareille sur les mathématiques et principalement sur leur enseignement, surtout en France, mais aussi dans le reste du monde où elle bénéficie d'une grande notoriété. Pour ce qui concerne l'algèbre linéaire, le présent volume présente tout d'abord la notion la plus générale de module à gauche sur un anneau (comme Van Der Waerden). Les espaces vectoriels apparaissent alors comme des modules unitaires sur un corps. Les notions élémentaires d'algèbre linéaire sont présentées de façon entièrement formelle et selon un ordre logique très soigné qui ne concède rien à la rigueur. Bien sûr c'est avant tout un traité pour initiés et on ne peut pas dire que ce soit en ce sens un livre d'enseignement mais plutôt un livre de synthèse et de référence. Cependant son influence est certaine dans les choix de présentation ou de vocabulaire qu'ont pu faire les professeurs dans leur cours ou les auteurs pour la rédaction de leur manuel d'enseignement. L'impact des éléments de mathématiques, et du séminaire créé par le même groupe, est en quelque sorte de nature sociale, puisqu'il a agi de façon déterminante dans la communauté mathématique entre 1950 et 1970, on peut ainsi parler de l'avant et de l'après bourbakisme.

C'est essentiellement dans l'après bourbakisme que se développent les premières tentatives d'enseignement de l'algèbre moderne, et en particulier de l'algèbre linéaire, d'abord dans les seconds cycles puis dans les premiers cycles des universités françaises.

Jusqu'au début des années soixantes, l'infiltration des mathématiques modernes (le mot était lancé), ne touchait que très partiellement les premiers cycles.

Du côté des classes préparatoires aux Grandes Ecoles, il fallait vaincre la machine administrative. La première brèche est ouverte avec la réforme de 1956, qui réorganisa non seulement le fonctionnement administratif des classes préparatoires, mais aussi le contenu de ce qu'on y enseignait.

Le *précis de Mathématiques spéciales* de R. Gouyon doit, au dire de son auteur, son contenu au programme du concours d'entrée à l'école Polytechnique de 1956 [GO]. Or on y trouve la définition suivante des espaces vectoriels :

" *Considérons un ensemble d'éléments dont chacun est défini par une suite de n nombres d'un corps K :*

$$A = (a^1, a^2, \dots, a^n), B = (b^1, b^2, \dots, b^n), \text{ etc.}$$

Généralisant la définition d'un vecteur par ses composantes cartésiennes, nous dirons que l'ensemble (E_n) des éléments de ce type est un espace vectoriel à n dimension pourvu que soient définies :

$$1^\circ \text{ L'égalité } A=B \text{ par les } n \text{ conditions } a^1 = b^1, a^2 = b^2, \dots, a^n = b^n$$

$$2^\circ \text{ L'addition, par } A+B = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, \dots, a^n + b^n);$$

$$3^\circ \text{ La multiplication par un scalaire, du corps } K, \text{ par :}$$

$$\lambda A = (\lambda a^1, \lambda a^2, \dots, \lambda a^n) . "$$

Dans la suite l'auteur définit, les notions de dépendance linéaire et de bases et démontre en utilisant des techniques de résolution de systèmes linéaires que toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments. Il introduit les matrices et les présente comme des transformations d'espaces vectoriels puis il applique ces résultats à l'étude théorique des systèmes d'équations linéaires et aux résultats élémentaires sur les déterminants.

Cette présentation de l'algèbre linéaire paraît donc particulièrement anachronique en 1956, malgré les revendications de nouveauté, explicitées dans l'introduction par l'auteur. Ce livre qui présente par ailleurs d'autres qualités est paru en 1958 et sera encore publié en 1961.

Cependant à la rentrée de 1956, par un texte officiel, remanié en 1963 et 1965, l'algèbre moderne fait son entrée dans les programmes des classes préparatoires aux Grandes Ecoles.

Il faudra en fait attendre encore quelques années avant que les livres d'enseignement se mettent dans le bain. Ainsi en 1956, J. Bass publie la première édition de son *Cours de mathématiques* [BS], mais il faut attendre la quatrième édition de 1968 pour y voir l'algèbre linéaire y prendre l'allure qu'on lui connaît aujourd'hui.

En 1963 P. et M.L. Dubreil publient leurs *leçons d'algèbre moderne*, qui est l'un des premiers livres français d'enseignement sur le sujet [DU]. Les espaces vectoriels y sont traités en dimension quelconque et à l'aide de l'axiome de Zorn, les auteurs y démontrent fort élégamment l'existence de bases infinies et de supplémentaires dans un espace quelconque. Ce livre s'adresse bien sûr essentiellement à des étudiants au moins en licence.

Les premiers cours présentant l'algèbre sous une forme moderne et d'un niveau accessible en premier cycle, et publiés par des maisons d'édition, apparaissent surtout à partir du milieu des années soixante. Ces ouvrages n'ont pas tous la même approche et leurs qualités didactiques sont certainement très distinctes ; il nous serait cependant trop long d'en faire une analyse ici, aussi nous contenterons-nous de donner dans un ordre chronologique les références de quelques ouvrages qui ont, semble-t-il, eu une influence en France :

- P.R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Princeton University Press 1941 / D. Van Nostrand Co. Inc., 1958.

- Queysanne, *Algèbre MP et spéciales A et A'*, Armand-Colin, Collection U série Mathématiques dirigée par A. Revuz, Paris, 1964.

- S. Lang, *Algebra*, Addison - Wesley Publishing Co. Inc., 1965.

- Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann éd., Paris, 1966.

- L. Chambadal et J-L. Ovaert, *Cours de Mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.

- G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau, *Traité de mathématiques spéciales (4 tomes)*, Masson, Paris, 1967.

- A. Doneddu, *Algèbre et géométrie - math sup et spé*, Dunod, Paris, 1968.

La plupart de ces ouvrages ont été l'objet de rééditions qui sont encore pour certaines utilisées par les étudiants actuels. Pour ce qui concerne l'algèbre linéaire ils ont tous un contenu minimal commun assez identique et que l'on peut assez bien résumer par ces quelques lignes d'un texte officiel de 1967 [PG], fixant le programme minimum de mathématiques des premières années des premiers cycles de type MP (mathématiques-physique) dans les facultés des sciences :

"Algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

- Espace vectoriel, sous-espace vectoriel, famille génératrice, famille libre, espace de dimension finie, base

- Application linéaire, noyau, image, rang, espaces d'applications linéaire, composition des applications linéaires

- Calcul matriciel.

- Formes multilinéaires alternées de degré maximum. Déterminants

- Equations linéaires"

La présentation des concepts de l'algèbre linéaire est sensiblement identique dans tous ces livres et héritée plus ou moins directement de Bourbaki, même si les modules ont disparu et si il y a un effort pour rendre les démonstrations plus accessibles et moins dépouillées.

Dans le même temps l'enseignement secondaire fait preuve d'un immobilisme assez remarquable. En 1960, la géométrie analytique dans l'espace n'est enseignée de façon élémentaire que dans la classe de mathématiques élémentaires (équivalent de la terminale C). En 1967, on trouve une ligne dans les programmes stipulant qu'une étude des structures algébriques élémentaires pourra être faite de façon non systématique, à l'occasion des divers points du programme. Cependant dans le courant des années soixante, un vaste débat allait s'ouvrir qui conduirait à la fin de la décennie à une réforme de fond de l'enseignement secondaire, connue sous le nom fameux de "réforme des maths modernes". L'enseignement de l'algèbre linéaire est un des points clefs de cette réforme, jusque-là ignorée par les programme elle allait en effet en devenir un des éléments centraux, principalement à cause des liens qu'elle entretient avec la géométrie.

En 1963, A. et G. Revuz publient le deuxième tome des cours de l'APMEP sur les espaces vectoriels [RE1], le premier tome publié l'année précédente portait sur les structures de groupe, anneau et corps. Dans l'introduction de ce livre, A. Revuz insiste sur le fait qu'il s'adresse à des enseignants à qui il doit permettre de compléter leur culture mathématique. Il présente cependant son point de vue sur ce qui devrait être enseigné, selon lui, à propos des espaces vectoriels non seulement en propédeutique (premier cycle universitaire) mais aussi dans le secondaire des lycées. Ce fait est important surtout quand on sait qu'A. Revuz fit partie de la commission Lichnerowicz qui aboutit à la fin des années soixante à l'introduction de l'algèbre linéaire

moderne dans les lycées. Il n'est d'ailleurs pas inintéressant de compléter la lecture des cours de l'APMEP par celle de *Mathématiques moderne - Mathématiques vivantes*, [RE2], sorte de petit pamphlet paru également en 1963, qui nous renseigne tant sur la position personnelle de Revuz que sur la situation de tension qui régnait alors au sein de la communauté mathématique face au problème de la rénovation de l'enseignement des mathématiques.

En 1964 paraissent également deux livres célèbres portant sur les rapports de la géométrie avec l'algèbre linéaire et qui tous deux tout en se plaçant au dessus de la mêlée, font des propositions plus ou moins implicites pour l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre linéaire dans le secondaire. Ce sont : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* de J. Dieudonné [DI] et *l'enseignement de la géométrie* de G. Choquet [CH].

Le premier présente la géométrie comme un cas particulier de l'algèbre linéaire : il lui suffit de rajouter aux axiomes d'espace vectoriel un axiome sur la dimension (trois vecteurs du plans ou quatre vecteurs de l'espace sont toujours linéairement dépendants), et les axiomes d'existence d'un produit scalaire. Il retrouve ainsi les principaux résultats des géométries euclidienne et affine à deux et trois dimensions.

Le deuxième est moins systématique et construit une axiomatique de la géométrie, *qui part des notions tirées du monde sensible* (parallèle perpendiculaire et distance) et qui sans être un simple cas particulier de l'algèbre linéaire, permet toutefois *d'utiliser très vite les outils souples et féconds de l'algèbre*.

Ces deux ouvrages ne se veulent pas, tout comme le cours de l'APMEP, être un cours type pour des élèves mais s'adressent avant tout aux enseignants, les auteurs prennent cependant, plus ou moins explicitement (cf la longue introduction de Dieudonné) des positions sur l'enseignement, et celles-ci auront leur poids dans la suite des débats.

Toute la communauté mathématique de l'époque n'était pas entièrement acquise aux idées nouvelles et certains défendaient encore le maintien du "classicisme" dans l'enseignement secondaire. L'écart dans l'approche entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur devenait pourtant tel, que le premier ne semblait plus du tout préparer au second. Les conservateurs durent finalement céder et dans la fin des années soixante, les maths modernes font leur entrée dans l'enseignement secondaire. Beaucoup d'encre a coulé et coulera encore à propos de cette réforme et nous ne nous risquerons pas à verser notre pièce dans un dossier déjà bien épais.

Nous contentant des faits, nous reproduisons seulement les quelques lignes des programmes officiels de 1969, touchant à l'algèbre linéaire.

En seconde C :

" Introduction de la locution "espace vectoriel"- Exemples : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fonction affines, fonctions en escalier, fonctions affines par intervalle.

Combinaison linéaire de vecteur du plan, définition de l'indépendance et de la dépendance linéaire.

Définition d'une base du plan vectoriel.

Coordonnées d'un vecteur du plan dans une base déterminée. Coordonnées d'une somme, du produit par un nombre. Condition de dépendance linéaire de deux vecteurs. Interprétation vectorielle d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre.

Exemples : forme linéaire, homothétie vectorielle, projection vectorielle du plan sur une droite, d'une droite sur une autre.

Application affine du plan vectoriel dans lui-même, translation, définition d'une droite affine du plan vectoriel, représentation paramétrique d'une telle droite.

Définition d'un segment du plan vectoriel, d'une partie convexe. Exemples, intersection d'ensembles convexes.

Groupe des dilatations du plan vectoriel . Exemple de sous-groupes remarquables.

Représentation cartésienne (affine) dans le plan. Coordonnées d'un point, changement de coordonnées, par translation.

Equation cartésienne d'une droite. Equation d'une droite définie par un point et un vecteur, par deux points. Interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables. Résolution géométrique des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues."

Ce programme présente donc l'algèbre linéaire essentiellement par ses applications à la géométrie plane mais avec un parti pris de formalisme et l'introduction du vocabulaire et des définitions les plus généraux.

La même année, le programme de première C propose de présenter plus ou moins les mêmes notions dans le cadre de l'espace à trois dimensions. En 1970 viennent se rajouter l'étude des espaces de dimension finie quelconque, avec le théorème de la dimension (toutes les bases ont le même nombre d'éléments), l'étude des applications linéaires avec la définition du noyau et de l'image et l'équivalence entre injectivité et surjectivité et la représentation matricielle (limitée à $n=2$ ou 3) et enfin l'étude des espaces affines.

Le programme de terminale C est surtout consacré à la classification des transformations affines et vectorielles du plan et de l'espace avec en particulier l'étude détaillée des isométries et des similitudes affines et vectorielles.

Ces programmes, que l'on peut qualifier d'ambitieux, avaient pour but de donner aux élèves un aperçu des principales notions d'algèbre linéaire à travers la géométrie, tout en introduisant les premiers concepts de façon tout à fait générale et formelle. Cet enseignement se substitua dans une certaine mesure à l'enseignement "classique" de la géométrie. Il ne nous appartient pas ici d'en juger les défauts et les qualités. Signalons simplement comme un fait observable, que cette approche formelle ne parût pas aussi simple aux élèves ni aux enseignants que l'avaient pensé les artisans de la réforme. Pour diverses raisons, qui ne tiennent peut-être pas qu'à la nature intrinsèque des mathématiques, les maths modernes telles qu'elles furent enseignées semblent avoir repoussé quelques générations d'élèves. L'algèbre linéaire, à laquelle on reproche aisément d'être trop abstraite, a apparemment particulièrement rebuté les élèves des lycées.

Les programmes de 1969 sont restés en vigueur, sans modification fondamentale, jusqu'en 1981, où une nouvelle réforme (celle de la seconde indifférenciée) les a à nouveau sensiblement modifiés. Les perspectives d'un enseignement de masse et les constats d'échec dans l'enseignement des "maths modernes" ont favorisé un certain recul de l'algèbre linéaire. Ainsi dans le programme de la seconde "indifférenciée", n'apparaît plus d'enseignement de l'algèbre linéaire en tant que telle.

En classe de première S, il fut réduit à ces deux phrases : *"Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme. Il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan et de l'espace."*

En Terminale C, on conserva cependant la théorie générale des espaces vectoriels de dimension finie, avec dans les grandes lignes : le théorème de la dimension, la représentation matricielle, l'interprétation géométrique de la résolution des systèmes d'équations linéaires, la notion de supplémentaire, les projections et symétries, mais pas de calcul matriciel. Le tout est accompagné du commentaire suivant : *"Il s'agit de mettre ces notions en œuvre sur des exemples variés en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbb{R}^n$, dans les exercices, l'entier n sera numériquement fixé (de façon raisonnable)."*

On assiste ici à un recul très net de l'enseignement de l'algèbre linéaire, surtout sensible bien sûr au niveau des contenus. Mais le report intégral sur la terminale a créé un effet de raccourcissement dans le temps d'enseignement qui a rendu le programme de la terminale trop ambitieux, signant ainsi l'arrêt de mort à court terme de l'algèbre linéaire au niveau des lycées.

En effet dans les nouveaux programmes de 1985 (encore en vigueur en 1990, à quelques modifications de détail près) on peut dire que l'algèbre linéaire a quasiment disparu de l'enseignement secondaire. A peine en trouve-t-on quelques traces en géométrie ou à propos de la résolution des systèmes linéaires.

En seconde, il ne reste que la représentation graphique des systèmes linéaires 2×2 , et les techniques de résolution numérique, ainsi que les rudiments des géométries vectorielle et analytique planes.

En première S, le programme de géométrie présente quatre objectifs dont un est *la pratique de l'outil vectoriel*, avec ce commentaire : *"le calcul vectoriel n'est pas à considérer comme une fin en soi et le passage aux coordonnées doit tenir une place modeste, il est essentiel de centrer les activités autour de l'étude des configurations. (...)".* Le produit scalaire et l'orthogonalité sont toutefois explicitement au programme.

En terminale C, on trouve l'enseignement de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires, mais sans étude systématique. *On soulignera son aspect algorithmique, mais la mise en forme de l'algorithme est hors programme.*

Pour la géométrie, les directives sont les suivantes :

" Approfondir la géométrie du plan et de l'espace à travers l'étude d'objets géométriques et de l'action des transformations sur ces objets.

A propos de l'études des projections et des transformations, la linéarité des applications vectorielles associées doit être mise en évidence et exploitée, mais l'étude des applications linéaires et a fortiori des applications affines n'est pas au programme. (...)

Outil vectoriel : barycentre, repère et base, produit vectoriel et produit mixte. Déterminant de deux vecteurs du plan."

On peut donc dire que l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les lycées, s'il a été ambitieux à ses débuts n'a fait qu'un passage fulgurant, puisqu'en moins de vingt ans, il a presque entièrement disparu des programmes. En cette fin de XXème siècle, un élève sortant de terminale C, c'est-à-dire du plus haut niveau mathématique des lycées, en sait moins que les contemporains de Cramer sur la résolution des systèmes linéaires, ignore totalement la notion d'espace à plus de trois dimensions et a sur le calcul vectoriel, des conceptions voisines de celles que l'on avait au milieu du XIXème siècle. Ce n'est pas forcément une critique mais un constat mettant en parallèle l'évolution de l'algèbre linéaire en tant que théorie mathématique et en tant que sujet d'enseignement.

Dans le même temps des modifications de programme sont aussi intervenues dans les programmes des classes préparatoires scientifiques.

Une première refonte apparaît en 1972, faisant suite à l'introduction des maths modernes dans le secondaire. Les additions de programme en algèbre linéaire sont principalement l'étude des espaces affines, les notions élémentaires d'algèbre multilinéaire et l'étude des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens. Il est bien stipulé que l'étude des modules et des groupes opérant sur un ensemble restent hors du programme. Jusqu'en 1987, le programme des classes de mathématiques supérieures et spéciales est resté assez stable et l'enseignement de l'algèbre linéaire n'y a guère évolué, au moins officiellement. Suite aux réformes de 1985, dans l'enseignement secondaire, il a fallu faire des réajustements en 1987. Nous citons ci-dessous les extraits du texte officiel de ces programmes, en rapport avec notre sujet :

" Les allègements :

a) Structures algébriques usuelles.

Le vocabulaire à connaître a été allégé notamment en ce qui concerne les anneaux, les corps ainsi que l'algèbre linéaire. le champs d'étude a été restreint : pour toute l'algèbre linéaire et pour les polynômes on s'est placé dans le cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.(...)

c) Chapitres comportant des difficultés conceptuelles ou techniques importantes :

En algèbre linéaire : l'étude de la dualité est reportée en deuxième année, celle des automorphismes orthogonaux n'est conservée qu'en dimension inférieure à trois, en relation avec la géométrie.

L'étude des transformations géométriques a été réduite à l'essentiel : les transformations $z \rightarrow a \operatorname{conj}(z) + b$ et la réduction des antidéplacements de l'espace ont été supprimés. (...)

2) Lignes directrices :

b) En algèbre générale : le seul objectif visé est la mise en évidence, à partir des situations courantes figurant au programme, de quelques structures élémentaires. Il n'est donc pas prévu d'étudier systématiquement les structures (groupe, anneau, corps), il convient de se limiter au vocabulaire strictement indispensable.

c) En algèbre linéaire : l'objet est double. Disposer d'un vocabulaire général commode pour l'étude des problèmes linéaires intervenant dans l'ensemble du programme ; avoir une bonne maîtrise des espaces de dimension finie et de leurs relations avec les espaces K^n .

La résolution des systèmes linéaires, l'inversion des matrices et la théorie du rang constituent des objectifs importants. En revanche pour la réduction des matrices, il s'agit d'une prise de contact et toute étude systématique de la réduction n'est pas au programme.

d) L'étude de la géométrie sera l'occasion de nombreux problèmes utilisant de l'algèbre linéaire et de l'analyse et inversement, elle servira le plus souvent possible de guide pour l'intuition dans ses disciplines."

Le recul est ici moins franc que dans l'enseignement secondaire. Il est encore un peu tôt pour bien mesurer l'impact de la disparition de l'algèbre linéaire du secondaire dans les performances au début du supérieur. Il n'est pas impossible cependant que cela impose quelques allègements supplémentaires dans les programmes des premières années de l'enseignement du supérieur, c'est une tendance qui se dessine déjà dans les premiers cycles de certaines universités.

Pourtant l'importance de l'algèbre linéaire dans les autres théories mathématiques n'a cessé de croître au cours du XXème siècle, et rares sont les mathématiciens qui peuvent se passer de cet outil qui est également présent dans de nombreuses modélisations scientifiques (en physique, chimie, biologie, économie, statistique etc...).

Conclusion

Il est difficile de tirer des conclusions générales après une telle étude, sans en réduire la portée. Nous allons cependant essayer de dégager de ce travail, les éléments essentiels qui composent la genèse des premiers concepts d'algèbre linéaire afin de mieux cerner les grands traits de leur nature épistémologique.

Les concepts d'algèbre linéaire ont eu très rapidement une nature polymorphe. Ils apparaissent, même implicitement, à des périodes parfois très rapprochées, dans différents domaines : les systèmes d'équations linéaires, la géométrie, l'arithmétique, l'étude des quadriques, les transformations linéaires, les équations différentielles, etc...

Cependant l'étude des systèmes linéaires a été, dès le départ, un domaine privilégié. Elle a été à l'origine de l'émergence des tout premiers concepts, et a aussi été le cadre de l'élaboration des premiers résultats théoriques même informels. En particulier le concept de rang s'est dégagé pas à pas de l'étude de plus en plus approfondie des systèmes linéaires, depuis le paradoxe de Cramer jusqu'aux travaux de Frobenius. Ce concept nous semble jouer un rôle central dans la théorie des espaces vectoriels de dimension finie, il est aussi l'objet des premières démonstrations très spécifiques de ce domaine. Or on a pu voir que son émergence a nécessité de nombreuses adaptations et changements de point de vue.

Par ailleurs, même si l'étude des systèmes linéaires a connu une période moins productive entre la fin du XVIII^{ème} siècle et la fin du siècle suivant, la généralisation aux systèmes en une infinité de variables a été pendant la fin du XIX^{ème} et le début du XX^{ème} siècle, le cadre principal où se faisaient les progrès dans l'étude des espaces de dimension infinie.

Ainsi l'étude des systèmes linéaires a eu un rôle durable et important dans la genèse des concepts d'algèbre linéaire, non seulement à leurs débuts, où elle en était le cadre principal de développement, mais encore récemment même si c'est sous un aspect généralisé.

La géométrie a été aussi un des cadres privilégiés du développement des concepts d'algèbre linéaire. Elle a joué le rôle d'observatoire duquel sont parti les généralisations de plus en plus vastes. C'est une sorte de laboratoire d'essai, qui a permis de mettre au point les idées maitresses, que l'on a exportées ensuite, avec le vocabulaire, à d'autres domaines. C'est principalement la généralisation du concept d'espace qui a permis l'éclatement, or ce phénomène est complexe et relève de plusieurs causes dont il est difficile d'évaluer les importances relatives.

Il faut bien distinguer cependant la généralisation par l'étude des structures et la généralisation par augmentation du nombre de coordonnées. Ces deux aspects sont complémentaires par rapport à l'algèbre linéaire mais ils ont eu des sources et des conséquences différentes. Nous avons pensons l'avoir bien montré plus haut.

Longtemps une unification implicite des "concepts linéaires" s'est faite autour de certains aspects de la théorie des déterminants. Et puis la définition descriptive des espaces vectoriels comme n -uplets de nombres a rassemblé la plupart de ces résultats, de façon encore très informelle et sans qu'il y ait de réelle théorie centrale. L'œuvre de Grassmann et les premières approches axiomatiques à la fin du XIX^{ème} siècle offraient des outils théoriques plus puissants et proposaient un cadre plus général, mais il furent ignorés pour des raisons diverses, dont le fait qu'on n'en voyait pas l'utilité.

Le passage à une théorie axiomatique regroupant tous les concepts a été tardif. Les raisons qui l'ont justifié tiennent essentiellement à des soucis didactique et d'organisation. Cette unification est un des aspects d'une transformation générale de l'édifice des mathématiques qui s'est opérée dans la première moitié du XX^{ème} siècle, faisant de l'algèbre non plus l'étude des équations mais l'étude des structures. Par ailleurs, les applications à des espaces de fonctions, et principalement les travaux de Banach ont montré l'intérêt théorique de l'approche axiomatique pour rendre compte des résultats de l'algèbre linéaire en dimension infinie.

Ainsi l'utilisation de la théorie axiomatique des espaces vectoriels comme cadre privilégié (voire unique) de l'étude des concepts et des résultats de l'algèbre linéaire est une découverte et un choix récents. Ce choix obéit essentiellement à un souci d'organisation, l'unification et la simplification de l'étude de différents domaines avec des outils et des méthodes semblables. Il n'est pourtant réellement nécessaire que dans le cadre des espaces de dimension infinie et pour des questions non élémentaires.

Voilà les grandes lignes de cette genèse, que nous avons pu dégager. Ils sont les points phares qui nous donnent les éléments fondamentaux pour donner un sens plus précis aux concepts élémentaires d'algèbre linéaire, pour mieux connaître leur nature épistémologique.

INDEX DES NOMS CITES DANS LES CHAPITRES II, III ET IV

Nom prénom(s)	dates	nationalité	Pages
ABEL Niels Heinrich	1802- 1829	N	29
ALEMBERT Jean le Rond d'	1717- 1783	F	29, 34
ARGAND Jean Robert	1768- 1822	CH/F	45, 46, 48 - 50
ARTIN Emil	1898- 1962	A/D	77
BALTZER Heinrich	1818- 1887	D	24
BANACH Stefan	1892- 1945	P	73 - 77
BARRE Adhémar Comte de St-Venant	1797- 1886	F	54 - 55, 58 -59
BELLAVITIS Giusto conte	1803- 1880	I	44 - 45, 53, 59
BEZOUT Etienne	1739- 1783	F	15, 22, 27
BINET Jacques	1786- 1856	F	22, 23
BUEE l'abbé		F	44, 46, 48
BURALI-FORTI Cesare	1861- 1931	I	60, 69 - 71, 74
CARROLL Lewis (voir DODGSON)			
CAUCHY Augustin Louis	1789- 1857	F	21, 22- 23, 29, 31, 32 34, 45, 46, 50, 59
CAYLEY Arthur	1821- 1895	GB	26, 31, 32-33, 34 53 - 54, 61 - 62
CHASLES Michel	1793- 1880	F	31
CLEBSCH Rudolf	1833- 1872	D	59
CLIFFORD William	1845- 1879	GB	54
CRAMER Gabriel	1704- 1752	CH/F	21-22, 27-28
CREMONA Antonio Luigi	1830- 1903	I	59
DEDEKIND Julius Wilhem Richard	1831- 1916	D	77
DESCARTES René du Perron	1596- 1650	F	16, 17- 18, 39- 41
DIRICHLET Gustav Peter Lejeune	1805- 1859	D	29, 77
DODGSON Charles (Lewis Carroll)	1832- 1898	GB	24-25
EISENSTEIN Ferdinand	1823- 1852	D	32
ENGEL Friedrich	1861- 1941	D	59
EULER Leonhard	1707- 1783	CH	15, 27- 29, 30- 31, 33, 34, 35
FERMAT Pierre de	1601- 1665	F	15, 16, 29, 30, 33 36 - 38, 40
FRANCAIS Jacques-Frédéric	1775- 1833	F	48
FRECHET Maurice	1878- 1973	F	72
FREDHOLM Ivar Erik	1866- 1927	S	72
FROBENIUS Georg Ferdinand	1849- 1917	D	26-27, 34, 52
GAUSS Carl Friedrich	1777- 1855	D	15, 22, 23, 29, 31 - 32, 33, 34, 45, 50
GERGONNE Joseph Diaz	1771- 1859	F	48
GIBBS Josiah Willard	1839- 1903	GB	60
GRASSMANN Hermann Günter	1809- 1877	D	34, 53, 54 - 60, 61 62 - 71
HADAMARD Jacques	1865- 1963	F	72
HAMILTON William, Rowan	1805- 1865	IRL	51 - 54, 59
HANKEL Hermann	1839- 1873	D	59
HEAVISIDE Oliver	1850- 1925	GB	60
HERMITE Charles	1822- 1901	F	31, 34
HILBERT David	1862- 1943	D	61, 72
HILL George William	1838- 1914	USA	71
HOSPITAL Guillaume Marquis de l'	1661- 1704	F	20-21
JACOBI Carl Gustav Jacob	1804- 1851	D	29, 34
JORDAN Alexis Claude Thomas	1814- 1897	F	34
KLEIN (Christian) Felix	1849- 1925	D	59

Les noms sont donnés dans l'ordre alphabétique

INDEX DES NOMS CITES DANS LES CHAPITRES II, III ET IV

Nom prénom(s)	dates	nationalité	Pages
KRONECKER Leopold	1823- 1891	D	26, 77
KUMMER Ernst	1810- 1893	D	77
LAGRANGE Joseph Louis	1738- 1813	F	22, 29, 31, 33, 34 - 35
LAGUERRE Edmond Nicolas	1834- 1886	F	33
LEIBNIZ Gottfried Wilhelm von	1646- 1716	D	20 - 21, 42 -43, 44
LIE Marius Sophus	1842- 1899	N	46, 54
MACLAURIN Colin	1698- 1746	GB	21, 27- 28
MARCOLONGO		I	69 - 71, 74
MAXWELL James Clerk	1831- 1879	GB	53
MOEBIUS August Ferdinand	1790- 1868	D	43 - 44, 55, 58, 61
MONGE Gaspard	1746- 1818	F	22
MORGAN Augustus De	1806- 1871	GB	61
MOUREY		F	45, 50
NEUMANN Carl Von	1832- 1925	D	72
NOETHER Amalie Emmy	1882- 1935	D	77
ORESME Nicole	1320- 1382	F	36
PEACOCK George	1791- 1858	GB	61
PEANO Giuseppe	1852- 1932	I	60, 61, 62 - 69, 69 - 71, 73
PEIRCE Benjamin	1809- 1880	USA	53, 54
PEIRCE Charles Sanders (fils de Benjamin)	1839- 1914	USA	52, 54, 63
POINCARÉ Jules Henri	1854- 1912	F	71 - 72
RIESZ Frédéric	1880- 1956	H	72
ROUCHE Eugène	1832- 1910	F	25- 26
SAINT-VENANT Comte De (Voir BARRE)			
SCHLEGEL	1843- 1905	D	59
SCHMIDT Erhard	1876- 1959	D	72
SERVOIS	1767- 1847	F	48
SMITH Henry John Stanley	1826- 1883	GB	23, 34
STEINITZ Ernst	1871- 1928	D	77 - 78
SYLVESTER James	1814- 1897	GB	31,34, 62
TAITS		GB	53
TOEPLITZ Otto	1881- 1940	D	72 - 73
VAN DER WAERDEN			78 -80
VANDERMONDE Alexandre Théophile	1735- 1796	F	22, 23
VIETE François	1540- 1603	F	17, 30
VOLTERRA Vito	1860- 1940	I	72, 75
WALLIS John	1616- 1703	GB	45 - 46
WARREN		GB	45, 50
WEBER Heinrich	1842- 1913	D	77
WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm	1815- 1897	D	26, 34
WESSEL Caspar	1745- 1818	N	45, 46- 48, 49- 50
WRONSKI Josef Maria	1776- 1853	P/F	29

Les noms sont donnés dans l'ordre alphabétique

Références bibliographiques

Pour faciliter la lecture nous avons regroupé au début les ouvrages généraux. Puis nous avons ordonné les autres références, par chapitre, dans l'ordre où nous les citons dans le texte.

Ouvrages généraux d'histoire et encyclopédies :

- [AHM] - *Abrégé d'histoire des Mathématiques* (2 Vol.), sous la direction de J. DIEUDONNE - Hermann, Paris, 1978.
- [BO1] - N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Coll. *Histoire de la pensée n°IV*, Paris, 1960.
- [EU] - *Encyclopædia Universalis*, France S.A., Paris, 1968.
- [EB] - *Encyclopædia Britannica*, C.C Gillepsie Ed., Scribners, 1970-1978.
- [HGS] - *Histoire générale des sciences* (4 vol.), publiée sous la direction de R. TATON, Presses Universitaires de France, Paris, 1958.
- [DSB] - *Dictionary of scientific bibliography* (16 vol.), sous la direction de C. C. GILLEPSIE, Charles scribner's sons, New-York, 1970.
- [ESM] - *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Gauthier-Villars et Teubner, Paris-Leipzig, 1904-1914.
- [EM] - *Encyclopédie méthodique - Mathématiques* (3 vol.), par MM D'ALEMBERT, L'Abbé BOSSUT, De La LANDE, Le Marquis de CONDORCET et Alïi, (Paris 1784) /ACL ed., Paris 1987.
- [DA] - A. DAHAN-DALMEDICO et J. PFEIFFER, *Une histoire des mathématiques - Routes et dédales*, ed. du Seuil Coll. Point Sciences, Paris, 1986. (Première édition sous le titre *Routes et dédales*, Etudes vivantes, Paris, 1982.)
- [BO] - C. B. BOYER, *A history of Mathematics*, John Wiley & sons, Inc., New-York, 1968.
- [SM1] - D. E. SMITH, *History of Mathematics* (2 vol.), Dover publications, Inc., New-York, 1958.
- [SM2] - D. E. SMITH, *A source book in mathematics*, (McGraw-Hill Book Co., Inc., 1929) / Dover publications, Inc., New-York, 1959.
- [IT1] - J. ITARD, *Essai d'histoire des mathématiques*, réunis et introduit par R. Rashed, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1984.
- [RC] - *La Rigueur et le Calcul*, Groupe inter-IREM épistémologie et histoire des Mathématiques, CEDIC, Paris, 1962.
- [MFA] - *Mathématiques au fil des âges*, Groupe inter-Irem épistémologie et histoires des mathématiques, Bordas/Gauthier-Villars, Paris 1987.
- [IR] - *Bulletin spécial Inter-IREM histoire des mathématiques et épistémologie*, Irem de Lille, 1979.
- [RO] - *Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG*, Cahier de Didactique des mathématiques n°19, IREM de Paris VII, 1986.
- [CR] - M. CROWE, *A history of vector analysis - The evolution of the idea of a vectorial system*, University of Notre-Dame Press, Notre-Dame (USA) - London, 1967.

Références spécifiques à l'introduction :

- [AI1] - M. ARTIGUE, *Epistémologie et didactique*, Cahier DIDIREM n°3, IREM de Paris VII, Juin 1989.
- [BR1] - G. BROUSSEAU, *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, XXVIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain La neuve, 1976.
- [BR2] - G. BROUSSEAU, *les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, in "Recherches en Didactique des Mathématiques", Vol. 4-2, pp.164-198, 1983.
- [CE] - Y CHEVALLARD, *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble, 1985.

Références spécifiques au chapitre I :

- [UN] - *Le courrier de l'UNESCO - Voyage au pays des mathématiques*, Paris, novembre 1989.
- [HE1] - T. L. HEATH, *A history of Greek Mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- [HE2] - T. L. HEATH, *A manual of Greek Mathematics*, (Oxford University press 1931) / Dover Publications, Inc., New-york, 1963.

- [HE3] - T. L. HEATH, *Euclid's Elements*, (translated with introduction and commentary by), (Cambridge University Press) / Dover Publication Inc., New-York, 1956.
- [HE4] - T. H. HEATH, *Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Algebra*, (Cambridge University Press, 1885-1910) / Dover Publication Inc., New-York, 1964.
- [PE] - F. PEYRARD, *Les œuvres d'Euclide*, (traduites littéralement par), (C-F. Patris, Paris, 1809) / Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1966.
- [IT2] - J. ITARD, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, coll. *Histoire de la pensée* n°X, Paris, 1961.

Références spécifiques au chapitre II :

- [MU] - T. MUIR, *The theory of determinant in the historical order of development (2 tomes, 4 volumes)*, (St Martin Press Inc., 1906-1923) / Dover Publications Inc., New- York, 1960.
- [CA] - A. L. CAUCHY, *Œuvres complètes (26 vol.)*, Gauthier-Villars, Paris, 1882-1956.
- [RO] - E. ROUCHE, *Notes sur les équations linéaires*, in *Journal de l'Ecole Polytechnique*, quarante-huitième cahier, tome XXIX, pp 221-228, Gauthier-Villars, Paris, 1880.
- [FR] - F. G. FROBENIUS, *Gesammelte abhandlungen (3 vol.)*, édité sous la direction de J-P. Serre, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-york, 1968.
- [EU] - L. EULER, *Opera omnia (62 Vol.)*, Orell Füssli Turici, Lausanne, 1911-1976.
- [LA] - J-L. LAGRANGE, *Œuvres complètes (14 Vol)*, Gauthier-Villars, Paris 1867-1892.
- [GA1] - C.F. GAUSS, *Werke (12 vol.)*, Göttingen, 1870-1927.
- [GA2] - C.F. GAUSS, *Recherches arithmétiques (Disquisitiones Arithmeticae)*, traduction de A.C.M. Poulet-Delisle, Courcier, Paris, 1807.
- [EI] - G. EISENSTEIN *Mathematische werke (2 vol.)*, Chelsea publishing company, New-York, 1975.
- [CY] - A. CAYLEY, *The collected mathematical papers (13 vol.)*, (Cambridge at the university press 1889)/ Johnson reprint corporation, New-York, 1963.

Références spécifiques au chapitre III :

- [FE1] - P. DE FERMAT, *Varia Opera de Pietri de Fermat Senatoris Tolosani*, Toulouse 1679, Edition réimprimée par heliotoypie Berlin 1861.
- [FE2] - P. DE FERMAT, *Oeuvres*, 4 tomes et un supplément, publiées par les soins de P. Tannery et C. Henri, Paris 1891-1912.
- [DE1] - R. DESCARTES, *Le discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, Leyden 1637.
- [DE2] - R. DESCARTES, *la géométrie*, réédité et préfacé par M. Leclerc et J-C. Juhel, ed. de L'AREFPPI, Nantes 1984.
- [MO] - A.F. MOEBIUS, *Gesammelte Werke (4 Vol.)*, Dr. Martin Sändig oHG, Wiesbaden, 1967.
- [WE] - C. WESSEL, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, traduit par H.G. Zeuthen, ed. H. Valentiner et T.N. Thiele, Copenhagen-Paris, 1897.
- [AR] - R. ARGAND, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, nouveau tirage de la deuxième édition préfacée par M. J. Hoüel et augmentée d'une introduction de M. J. Itard, Blanchard, Paris, 1971. (premier tirage 1874).
- [HA1] - W. R. HAMILTON, *Collected mathematical papers (3 tomes)*, edited for the Royal Irish Academy by H. Halberstam and R. E. Ingram, Cambridge at the university press, 1967.
- [HA2] - W. R. HAMILTON, *Elements of quaternions (2 Vol)*, ed. C.J. Joly, reprint of the second edition (first published in Dublin, 1866) by Chelsea Publishing Co, New-York, 1969.
- [SA] - A. BARRE, Comte de SAINT-VENANT, *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la mécanique*, in *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 21, Paris, 1845.
- [GR] - H. G. GRASSMANN, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke, (3 Vol.)*, Leipzig 1894-1911.
- [FL] - D. FLAMENT, *Die lineale Ausdehnungslehre (1844) de Grassmann*, in *comptes-rendus du colloque 1830-1930 : Un siècle de Géométrie*, à paraître chez Springer.
- [BO] - G. BOULIGAND, *Leçons de géométrie vectorielle, préliminaire à l'étude de la théorie d'Einstein*, Vuibert, Paris, 1924.

Références spécifiques au chapitre IV :

- [PE1] - G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Fratelli Bocca editori, Turin, 1887.
- [PE2] - G. PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Fratelli Bocca editori, Turin, 1888.
- [KE] - H. C. KENNEDY, *selected works of Giuseppe Peano*, Translated and edited by, University of Toronto Press, 1973.
- [BU1] - C. BURALI-FORTI, *Introduction à la géométrie différentielle selon la méthode de H. Grassmann*, Gauthier-Villars, Paris 1897.
- [BU2] - C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*, in *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* :
 - Note I, T. XXIII, pp.324-328 (1907) ;
 - Note II, T. XXIV, pp.65-80 (1907) ;
 - Note III, T. XXIV, pp.318-332 (1907) ;
 - Note IV, T. XXV, pp.352-375 (1908) ;
 - Note I, T. XXVI, pp.369-377 (1908).
- [BU3] - C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Eléments de calcul vectoriel, avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique-mathématique*, A. Hermann, Paris, 1909.
- [BU4] - C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica*, G.B. Petrini di Giovanni Gallazio, Turin, 1909.
- [PO] - H. POINCARÉ, *Oeuvres complètes* (11 tomes), publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par la section de Géométrie et avec la collaboration d'A. Châtelet, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
- [HI] - D. HILBERT, *Gesammelte habhandlungen*, (3 tomes), (Berlin, 1932-1935)/Chelsea publishing company, New-york, 1965.
- [SC] - E. SCHMIDT, *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, in *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* tome XX, pp. 53-77, 1908.
- [TO] - O. TOEPLITZ, *Ueber die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, in *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* tome XXVIII, pp. 88-96, 1909.
- [BA] - S. BANACH, *Oeuvres*, (2 vol), éditions scientifiques de Pologne, Varsovie 1967-1979.
- [DE] - P-J LEJEUNE DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, avec des suppléments de R. Dedekind, Chelsea Publishing Co., New-York, 1968.
- [WE] - H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, (3vol), (reimp.) Chelsea publishing Co., New-york, 1908-1962.
- [ST] - E. STEINITZ, *Algebraische Theorie der Körpern*, (Hasse-Baer, de Gruyter, Berlin Leipzig, 1930)/ Chelsea publishing Co., New-York, 1950.
- [VA1] - B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, (2 Vol.), Julius Springer, Berlin, 1930-1931.
- [VA2] - B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern algebra*, trad. de la 2ème éd. allemande par F. Blum (V.I) et T. J. Benac (V.II), Frederick Ungar publishing co., New-York, 1949-1950.

Références spécifiques au chapitre V :

- [BI-ML1] - G. BIRKHOFF - S. MACLANE, *A survey of modern algebra*, The MacMillan company, New-York, 1941.
- [BI-ML2] - S. MACLANE - G. BIRKHOFF, *Algèbre*, trad. De J. Weil, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [RU] - W. RUDIN, *Real and complex analysis*, MacGraw-Hill book company New-york, 1966.
- [BO2] - N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique, algèbre linéaire*, Hermann, Paris, 1947.
- [GO] - R. GOUYON, *Précis de mathématiques spéciales*, Librairie Vuibert, Paris, 1958.
- [BS] - J. BASS, *Cours de mathématiques*, (2 vol.), quatrième éd., Masson, Paris, 1968.
- [DU] - P. DUBREIL - M-L. BUBREIL-JACOTIN, *Leçons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1961.

[PG] - *Facultés des sciences - Premier cycle d'enseignement - Programme et organisation*, Arrêté du 30 juin 1966 vu D. n°66-411 du 22-6-1966 ; A. 22-6-1966, MEN-Direction des enseignements supérieurs, Institut Pédagogique National, Paris, 1967.

[RE1] - A. et G. REVUZ, *Le cours de l'APMEP- II Espaces vectoriels*, APMEP, Paris 1963.

[RE2] - A. REVUZ, *Mathématiques modernes-Mathématiques vivantes*, OCDL, Paris, 1963.

[DI] - J. DIEUDONNE, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Col. Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1964.

[CH] - G. CHOQUET, *l'enseignement de la géométrie*, Col. Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1964.

TITRE :

Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire

AUTEUR :

Jean-Luc DORIER

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juin 1990
ISBN : 2-86612-100-7