USAGE
DE L'ANALYSE,
OU
LA MANIERE DE L'APPLIQUER
à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie ſimple & compoſée, à reſoudre les Problêmes de ces ſciences & les Problêmes des ſciences Phyſico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral. Ces derniers calculs y ſont auſſi expliqués & démontrés.

Par un Prêtre de l'Oratoire.

TOME II.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univ. rue Galande près de la rue du Fouare, aux Armes de l'Univerſité.

MDCCVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

SECONDE PARTIE.

Usage de l'Analyse dans la résolution des Problêmes de la Geometrie & des sciences Physico-mathematiques, en employant le calcul differentiel.

PEMIERE SECTION.

Où l'on explique le calcul differentiel & les principes dont il dépend.

PRINCIPE DU CALCUL DIFFERENTIEL PRIS DES ANCIENS GEOMETRES.

500. C'EST une chose ordinaire aux anciens Geometres de regarder deux quantités comme étant égales quand elles different moins entr'elles qu'aucune grandeur finie & déterminée, tant petite qu'elle puisse être, en demeurant finie ou bornée.

C'est sur ce principe qu'en concevant des polygones inscrits & circonscrits au cercle, dont les côtés allant en diminuant de plus en plus à l'infini, font que le perimetre & l'aire de ceux de ces polygones qui ont les côtés les plus petits, approchent le plus du perimetre & de l'aire du cercle; ils supposoient qu'on pouvoit concevoir un polygone inscrit & un autre circonscrit de tant de côtés, & par consequent de côtés si petits, que la difference entre ces deux polygones, & à plus forte raison la difference de l'un & de l'autre d'avec le cercle, fût moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée; Et ils regardoient le dernier, pour ainsi dire, de ces polygones inscrits & le dernier de ces circonscrits comme égaux entr'eux & au cercle; ce qu'ils n'auroient pû faire qu'en concevant les côtés de chacun de ces polygones comme infiniment petits, & comme y en ayant une infinité; puisque pendant qu'ils demeureroient finis & déterminés, la difference du polygone inscrit & du circonscrit seroit finie, & de même leur difference d'avec le cercle feroit auſſi finie, & l'on ne pourroit pas ſuppoſer ces trois figures égales, comme il leur étoit neceſſaire de le faire, afin que leurs preuves fuſſent démonſtratives. C'eſt par ce principe que ſont démontrées la plûpart des propoſitions du *12e Liv. d'Euclide.*

501. On s'eſt heureuſement aviſé de notre temps de donner des expreſſions propres à ces differences infiniment petites, leſquelles differences pendant qu'elles ſont réelles ont des raports entr'elles tres réels, & qui ſont égaux aux raports des grandeurs finies, par le moyen deſquelles ces raports des differences peuvent être exprimés. La methode de trouver les expreſſions des differences & de leurs rapports, eſt ce qu'on appelle *le calcul des differences*, ou *le calcul differentiel*; par le moyen duquel on trouve d'une maniere courte & facile une infinité de raports entre les lignes droites & courbes geometriques & méchaniques qu'on auroit bien de la peine à trouver par d'autres voyes; & comme les grandeurs entieres que l'on peut comparer ont des differences qui ont des expreſſions qui les leur rendent propres, on peut retourner de ces differences aux grandeurs entieres qu'on appelle *ſommes* ou *integrales*, & les trouver par le moyen de leurs differences: Ce retour des differences aux grandeurs integrales dont elles ſont les differences, eſt ce qu'on nomme *le calcul integrale*. Par le calcul differentiel on trouve les expreſſions des differences des grandeurs integrales, & l'on fait ſur ces expreſſions les operations que fait l'Algebre ſur les grandeurs algebriques; par le calcul integral on trouve les expreſſions des grandeurs integrales dont on a l'expreſſion des differences.

UTILITE'S DE CES CALCULS.

502. DEPUIS qu'on a employé ces calculs dans l'uſage de l'Analyſe, on a non ſeulement reſolu d'une maniere plus courte & plus aiſée la plûpart des plus difficiles Problêmes qu'on avoit reſolus par le calcul ordinaire; mais on a fait des découvertes ſurprenantes dans la Geometrie compoſée & dans les ſciences phyſico-mathematiques, comme on le peut voir dans *les Memoires de l'Academie*, dans *les Actes de Leipſic*, dans *l'Analyſe des Infiniment Petits*, dans *les Ouvrages de M. Newton*, & dans tous les autres où l'on employe ces calculs.

On applique ces calculs aux courbes méchaniques, comme aux courbes geometriques, & l'on découvre par leur moyen les proprietés des unes & des autres avec la même facilité.

Il n'est point necessaire dans ces calculs d'ôter les signes radicaux, ce qui ôte l'un des plus grands embarras du calcul ordinaire, outre que ces calculs sont ordinairement plus courts d'eux-mêmes que ne sont les ordinaires.

Ces calculs suivent la nature dans la resolution des Problêmes physico-mathematiques, laquelle n'agissant que par le mouvement & les figures, commence & agit ordinairement par des degrés infiniment petits à chaque instant du temps, chacun de ces instants étant aussi infiniment petit.

Enfin on réduit par ces calculs la Geometrie composée ou la Geometrie de toutes les courbes à la Geometrie simple des figures rectilignes, ce qui la réduit à toute la simplicité possible, & ce qui met les Geometres en état de la porter à toute la perfection possible.

Le principe du calcul differentiel sert à démontrer sans calcul plusieurs propositions de la Geometrie composée.

CE principe que dans la comparaison des grandeurs finies on peut regarder comme nulles des differences qu'elles ont entr'elles, plus petites qu'aucune grandeur déterminée, ou infiniment petites (on n'entend que la même chose par ces deux expressions); ce principe, dis-je, suffit pour démontrer sans calcul & d'une maniere tres simple plusieurs propositions de la Geometrie composée, que l'on ne démontre qne par de longs circuits. En voici quelques exemples sur la cycloïde.

503. Si l'on mene par un point quelconque f de la cycloïde FIG. XXXV. l'ordonnée fFB parallele à la base DE qui rencontre le cercle generateur en F, qu'on tire la corde FA, & qu'on mene par f la droite fa parallele à la corde FA, fa sera la tangente au point f; Car en mettant le cercle generateur dans la situation eaf, où son point f décrit la partie f infiniment petite de la cycloïde, il est évident qu'en menant la corde fe, on peut concevoir que cette corde fe tournant à cet instant sur le point e, comme sur un centre, décrit par son extremité f un arc f infiniment petit, qui fait la petite partie f de la cycloïde: or ef étant le rayon de ce petit arc, est perpendiculaire à la tangente de ce petit arc f; fa perpendiculaire

à *ef*, & parallele à *FA*, eſt donc la tangente de ce petit arc *f* ou de ce point *f* de la cycloïde; d'où il ſuit auſſi que *fe* eſt parallele à *FE*.

504. Pour entendre les propoſitions ſuivantes, il faut remarquer que ſi l'on envelope la courbe *SKD* d'un fil également tendu par tout, qui ſoit comme colé ſur cette courbe, & qui lui ſoit égal en longueur, qu'on develope enſuite la courbe en commençant au point *D*, & que l'extremité *D* du fil pendant le developement inſenſible que l'on fait de la courbe *DKS*, décrive la ſeconde courbe *DPA*; la premiere courbe *DKS* s'appelle *la developée* de la ſeconde courbe *DPA*; chacune des parties du fil comme *PK* détachées les unes aprés les autres de deſſus la develope *DKS*, s'appellent *les rayons de la developée*; & la courbe *DPK* eſt la courbe formée par le developement du fil de la developée. Ces choſes ſuppoſées: FIG. XLI.

505. Il eſt évident que chaque rayon *KP* de la developée eſt égal à la partie developée *DK* de la courbe *DKS*, ſi ce n'eſt quand le fil qui envelope la developée eſt plus long ou plus court que la courbe qu'il envelope; car dans le premier cas le rayon de la developée eſt égal à la partie de cette courbe qui eſt developée, & de plus à la ligne droite dont on ſuppoſe que le fil ſurpaſſe la courbe qu'il envelope; & dans le ſecond cas il n'eſt égal qu'à la partie de la courbe qu'on ſuppoſe qu'il envelopoit.

506. Que chaque rayon *DKP* de la developée eſt une tangente de la developée; car le reſte *SC* du rayon *KP* demeurant comme collé à la developée, le point *K* eſt la particule de la developée du point *K*, & le rayon *KP* ne fait qu'une ligne droite avec cette particule & en eſt le prolongement; ainſi le rayon *KP* eſt la tangente de la developée en ce point *K*.

507. Que chaque rayon *KP* de la developée eſt perpendiculaire au point *P* à la courbe *DPA*. Car on peut concevoir que le rayon *KP* à l'inſtant qu'il forme la particule *P* de la courbe *DPA*, ſe meut ſur le centre *K*, & qu'il forme un arc infiniment petit *P* qui eſt la particule *P* de la courbe *PDA*. Or le rayon *KP* eſt perpendiculaire au petit arc *P* ou à la petite partie de la tangente au point *P*, laquelle petite partie eſt en même temps le petit arc formé par le rayon *KP*, la particule *P* de la courbe *DPA*, & la petite partie de la tangente.

Supposons à present que DPA est une cycloïde dont le cercle generateur est AFE, la base DE égale à la demi-circonference AFE, & qu'il faille trouver la longueur PK du rayon de la developée au point P, & ensuite qu'elle est la nature de la courbe DKS qui est la developée de la cycloïde DPA.

508. Pour trouver la longueur du rayon PK, il faut concevoir que PG est une partie infiniment petite de la cycloïde, que PK est la perpendiculaire de la cycloïde au point P, & que GK l'est au point G; à cause qu'on suppose GP infiniment petite, les deux perpendiculaires PK, GK peuvent être considerees comme partant du même point K de la developée qui est comme le centre autour duquel le fil ou le rayon PK est conçu tourner lorsqu'il forme la particule PG; qu'on mene les ordonnées PFB, GHM, qui rencontrent le cercle generateur aux points F & H par où il faut mener les cordes EF, FA, EH, HA; enfin qu'on conçoive décrits des centres K & E les petits arcs fl, FL, les petits triangles rectangles FLH, flh seront semblables & égaux; car, 1°, les hypothenuses HF, hf sont égales, puisque par la formation de
454. la cycloïde* $Ef = FP$ (à cause des paralleles fP, FE), & que FP est égale à l'arc AHF, & par la même raison $Eh = HG =$ à l'arc AH; ainsi $Ef - Eh = hf =$ à l'arc AF $-$ l'arc $AH =$ l'arc FH. 2°. $hl = Gh - Pf =$ à la corde $EH -$ la corde $EF = HL$; par consequent le petit côté ou le petit arc fl est égal au petit côté ou au petit arc FL. D'où il suit que les rayons de ces petits arcs qui sont Kf & EF sont égaux : mais fP par la formation de la cycloïde est égale à la corde EF; par consequent le rayon KP est double de la corde EF. Et comme la même démonstration convient à tout autre rayon representé par KP, il est évident que chaque rayon PK de la developée de la cycloïde est toujours double de la corde correspondante EF du cercle generateur, & que par consequent SA est double du diametre AE.

509. Pour trouver la nature de la developée DKS de la cycloïde, il faut mener De perpendiculaire à la base DE de la cycloïde & égale à EA ou à son égale ES, décrire sur le diametre De le demi-cercle DIe; tirer la corde DI parallele à Pf & à FE, qui fera par consequent l'angle fDI égal à son alterne DEF, ce qui sera cause (les cercles DIe, AFE étant égaux), que

ces cordes *DI*, *EF* ſeront égales, & leurs arcs égaux, & que *DI* ſera auſſi égale à *fK* qui eſt égale à *EF*; & menant *IK*, elle ſera égale & parallele à *Df*. Ces choſes ſuppoſées:

La baſe *ED* étant égale à la demi-circonference *AFE*, & *FP* ou ſon égale *Ef* étant égale à l'arc *AHF**, le reſte *fD* *454.
de la baſe eſt égal à l'arc *EF* & à l'arc *DI* qui eſt égal à *EF*; l'ordonnée *KI* de la developée *DKS* menée d'un point quelconque *K* au cercle *DIe*, étant égale à *Df*, eſt parconſequent égale à l'arc *DI*; & comme il eſt évident que la démonſtration peut s'appliquer à tout autre point de la developée, la proprieté de cette developée eſt que chaque ordonnée *KI* eſt égale à l'arc correſpondant *DI* du cercle *DIe*. Et comme c'eſt la proprieté de la cycloïde*dont *DIe* eſt le cercle ge- *454.
nerateur, la developée *DKS* de la cycloïde *DPA*, eſt elle-même une cycloïde égale à la premiere *DPA*, puiſque le cercle generateur de l'une eſt égal à celui de l'autre: Elle eſt ſeulement dans une autre ſituation; le point *D* de la developée répond au point *A* de la cycloïde *DPA*, & le point *S* de la premiere au point *D* de la ſeconde.

510. Comme l'on a démontré que chaque partie *KP* du fil developé eſt double de la corde correſpondante *DI*, & comme la partie *KP* du fil developé eſt égale à la partie developée *DK* de la cycloïde *DKS*; il s'enſuit que chacun des arcs *DK* d'une cycloïde eſt double de la corde correſpondante *DI* du cercle generateur, & que la cycloïde *DKS* eſt double du diametre *De* du cercle generateur.

REMARQUES.

I.

Où l'on explique ce qui reſtoit à faire pour donner la regularité aux horloges.

511. IL eſt à preſent évident que ſi l'on donne à deux lames de cuivre *SK*, *Sk* la courbure *SK* d'une cycloïde *SKD*, dont le cercle generateur *DIe* ait pour diametre *De* la moitié de la longueur du pendule *SP* ou de ſon égale *SA*, qu'on ſuppoſe être la longueur du pendule dont les vibrations ſont preciſément d'une ſeconde; & que l'on ſuſpende le pendule *SA* ou *SP* au point *S* entre ces deux lames de cuivre par une ſoie déliée, de façon que quelque mouvement que le poids

de l'horloge imprime au pendule *SP*, ce pendule ſoit toujours la tangente de la cycloïde *SK* ou *Sk*; il eſt, dis-je, évident que le centre de peſanteur ou d'oſcillation *P*, décrira dans toutes ſes vibrations des arcs de cycloïde *AP*, leſquel-
* 499. les par conſequent* ſeront toutes d'une égale durée. Ce qui reſtoit à demontrer de ce qu'il faut faire pour donner toute la juſteſſe poſſible aux horloges; & c'eſt pour cela qu'on a choiſi ici ces Exemples de la cycloïde.

II.

512. Comme l'on peut regarder des grandeurs infiniment petites par raport aux grandeurs finies dont elles ſont les differences, on peut regarder de même des grandeurs comme infiniment grandes par raport à d'autres finies qui deviennent égales à zero par raport à ces grandeurs infiniment plus grandes; on démontre facilement par là pluſieurs propoſitions de Geometrie; par exemple on a déterminé par là la ſituation des aſymptotes de l'hyperbole art. 400, en ſuppoſant qu'elles ſont des tangentes de l'hyperbole à des points infiniment éloignés du centre de l'hyperbole. De même dans les Problêmes où entrent les triangles rectangles dont un côté augmente toujours pendant que l'autre demeure le même, ou bien diminue toujours, en ſuppoſant que ce dernier côté eſt égal à zero par raport à l'autre, ou que celui-ci devient infini; alors le côté infini & l'hypotenuſe deviennent paralleles. De même quand un angle aigu va toujours en diminuant, en le ſuppoſant égal à zero, ou infiniment petit, & ſes côtés infiniment grands; on a le cas où les deux côtés deviennent paralleles.

C'eſt ainſi qu'en ſuppoſant qu'un des foyers de l'ellipſe demeurant immobile, l'autre s'éloigne à l'infini, l'ellipſe devient une parabole, & qu'on trouve par le même calcul pluſieurs proprietés communes à ces deux figures.

Ces ſuppoſitions, dont l'eſprit apperçoit la verité, abregent en pluſieurs cas les reſolutions du Problême, & les rendent generales.

Explication du calcul differentiel.

PREMIERE SUPPOSITION OU DEMANDE.

513. TOUTES les lignes droites & courbes, & toutes les figures des ſurfaces & des ſolides, peuvent être regardées comme formées ou décrites par le mouvement ; les lignes droites par le mouvement d'un point qui n'eſt point détourné dans ſa direction ; les courbes par le mouvement d'un point qui étant détourné à chaque inſtant de ſa direction, ne décrit aucune ligne droite finie, mais une infinité de petites lignes droites chacune infiniment petite, & qui font enſemble deux à deux des angles qui ne different de la ligne droite, ou de l'angle de 180 degrés, que d'un angle infiniment petit. Les angles ſont formés par le mouvement d'une ligne droite mobile autour du ſommet, & de même les triangles ; les figures des ſurfaces par le mouvement d'une ligne droite ou courbe qui ſe meut le long d'une autre droite, de façon que pendant tout le mouvement la ligne droite ou courbe qui ſe meut, demeure toujours parallele à elle-même ; par exemple, un rectangle peut être regardé comme formé par le mouvement de la ligne qui en fait la hauteur le long de la baſe ; la ſurface d'un cylindre par le mouvement d'une circonference qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant la direction de l'axe du cylindre ; les figures ſolides par le mouvement d'une figure plane qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant une ligne droite ; les priſmes & les cylindres ſont ainſi formés par le mouvement de leur baſe. Une infinité de ſurfaces courbes & les ſolides qu'elles comprennent, peuvent auſſi être regardés comme formés par le mouvement d'une figure plane autour d'une ligne droite, comme la Sphére par le mouvement d'un demi-cercle autour de ſon diametre, & la ſurface de la Sphére par le mouvement de la demi-circonference ; de même les cylindres par le mouvement d'un rectangle autour de ſa baſe regardée comme axe ; les ſolides paraboloïdes, ellipſoïdes, &c. par le mouvement d'une demi-parabole & d'une demi-ellipſe autour de ſon axe. C'eſt ainſi que les anciens Geometres ont conſideré les formations des lignes & des figures.

PREMIERE DE'FINITION.

CHACUNE des quantités (il ſuffit de conſiderer ici les lignes droites & courbes) qui augmente inſenſiblement ou qui diminue inſenſiblement dans la formation des lignes & des figures, s'appelle *variable* ou *changeante*; & les lignes qui n'augmentent ou ne diminuent point, & demeurent égales pendant que les autres changent, s'appellent *conſtantes.*

SECONDE SUPPOSITION OU DEMANDE.

514. CHAQUE partie de temps finie, quelque petite qu'elle ſoit, eſt diviſible à l'infini comme l'étendue, & ces parties de temps infiniment petites, dont il en faut une infinité pour faire une partie finie de temps, s'appellent *des inſtants.* Il en eſt de même de la viteſſe, du mouvement, & de toute grandeur.

SECONDE DE'FINITION.

515. L'AUGMENTATION ou la diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque inſtant par une viteſſe infiniment petite, dans la formation d'une ligne ou d'une figure, eſt ce qu'on appelle *une difference.* Les lignes changeantes droites & courbes ſont marquées par les lettres des inconnues x, y, z, u, &c. les lignes conſtantes par les lettres des connues a, b, c, &c. & l'on ſe ſervira de la lettre d pour marquer les differences; ainſi dx ſera la difference de la ligne changeante x; dy ſera la difference de la ligne changeante y; & ainſi des autres.

516. Fig. XLII. Par exemple, que l'on conçoive la ligne droite BC à l'origine A de la droite $ABbH$, & que cette ligne BC ſe meut toujours parallelement à elle-même ſuivant $ABbH$, & qu'en même temps un point C qui part de A ſur la droite BC ſe meut auſſi le long de BC en allant de B vers C, de maniere qu'il ſe trouve toujours dans une courbe quelconque ACc qu'il décrit par ſon mouvement; qu'on ſuppoſe auſſi la partie finie AC de la courbe déja décrite par le point C, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe infiniment petite la partie infiniment petite Cc de la courbe, & en même temps que la droite BC parcourt la partie infiniment petite Bb = (en menant Cd parallele à Bb) Cd. Qu'on nomme la coupée chan-

geante $AB(x)$; l'ordonnée changeante $BC(y)$; l'arc de courbe changeant $AC(u)$; l'on marquera ainsi les differences, $Bb = Cd(dx)$, $dc(dy)$, $Cc(du)$; & comme le petit arc $Cc(du)$ eſt conçu comme une droite infiniment petite qui eſt en cet endroit une partie de la courbe, & qui etant prolongée en T, eſt la tangente aux points C & c, qu'on ſuppoſe infiniment proches l'un de l'autre, les raports des trois petites differences $Cc(du)$, $Cd(dx)$, $dc(dy)$ dans le petit triangle Ccd, ſont égaux aux raports des trois côtés correſpondants $CT(t)$, $BT(s)$, $BC(y)$ du triangle ſemblable TCB formé par la tangente $CT(t)$, la ſoutangente $BT(s)$, & l'ordonnée $BC(y)$.

517. On peut auſſi conſiderer la courbe AC comme formée par le point C qu'on ſuppoſe partir du point A pris comme un centre ou pole dans un point de la courbe, ou en quel endroit on voudra du plan de la courbe, lequel point C ſe meut de telle maniere le long de la droite AC pendant que cette droite tourne autour du pole fixe A, qu'il ſe trouve toujours dans la courbe AC qu'il décrit par ſon mouvement. Suppoſé que la partie finie AC de la courbe ſoit déja décrite par le point C, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe infiniment petite l'arc infiniment petit Cc, & qu'on tire Ac & du centre A le petit arc de cercle Cr, qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe peut être regardé comme une petite droite, & qu'on nomme le rayon $AC(z)$ & l'arc $AC(u)$, & le petit arc de cercle $Cr(dx)$, Cc ſera du, rc ſera dz; & en concevant la petite partie cC prolongée qui ſera la tangente de la courbe au point C, & par le pole A une perpendiculaire At au rayon Ac mené de A à c qui rencontre la tangente en t; le petit triangle Ccr formé par les trois differentielles $Cc(du)$, $Cr(dx)$, $cr(dz)$, ſera ſemblable au triangle fini cAt, & les trois differences auront entr'elles les mêmes raports que les trois côtés de ce triangle cAt.

COROLLAIRE I.

518. On voit par ces formations des courbes, qu'on peut regarder une courbe comme un polygone, ou quand elle ne ſ rentre pas en elle-même, comme une partie de polygone qui a une infinité de côtés dont chacun eſt infiniment petit, & chacun de ces petits côtés fait en même temps une partie

de la courbe, une partie de la tangente de la courbe en ce point là, & pour ainſi dire le côté infiniment petit d'un polygone d'une infinité de côtés inſcrit à la courbe.

COROLLAIRE II.

519. ON peut conſiderer chaque partie infiniment petite d'une courbe, par exemple *Cc*, comme formée par le mouvement d'un point *C* qui eſt pouſſé par deux forces, l'une ſuivant la direction *Cd*, & l'autre ſuivant *dc* dans la premiere forma-
* 516. tion,* de façon que la viteſſe de la premiere ſoit à celle de la ſeconde, comme *Cd* à *cd*; & ſuppoſé qu'on achevât le parallelograme dont *Cd* & *cd* ſont les côtés angulaires, il doit
* 316. décrire *Cc* qui eſt la diagonale de ce parallelograme*, & chaque viteſſe par les côtés eſt à la viteſſe par la diagonale, comme chacun de ces côtés eſt à la diagonale décrite dans le même temps; ainſi la viteſſe(u) par *Cd*(*dx*) eſt à la viteſſe(*u*) par *Cc*(*du*), comme *dx* à *du*; & de même la viteſſe(v) par *cd*(*dy*) eſt à la viteſſe(*u*) par *Cc*(*du*), comme *dy* à *du*; & les viteſſes par les côtés ſont entr'elles comme ces côtés *Cd*(*dx*), *cd*(*dy*).
* 304. Et, à cauſe de l'égalité du temps, $T =^{*} \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$. Ce qu'on peut facilement appliquer à la ſeconde formation.

REMARQUE.

520. ON pourroit auſſi nommer par une lettre toute autre quan-
FIG. XLII. tité variable, comme une partie des figures des ſurfaces ou des ſolides qui vont en augmentant ou en diminuant inſenſiblement, comme le ſegment *CAC*, l'eſpace *ABC*, le ſolide formé par cet eſpace en tournant autour de l'axe *AB*, &c. par exemple nommant *z* une partie de figure variable, ſa difference qui ſeroit une partie infiniment petite comme *CAc* du ſegment *CAC*, comme *CBbc* de l'eſpace *ABC*, ſeroit *dz*. Mais comme les figures s'expriment en Algebre par le produit de pluſieurs lettres, comme un rectangle par le produit *ab* de ſes deux côtés; un priſme par le produit *abc* de ſa baſe par ſa hauteur; il eſt plus utile dans les Problêmes ſur ces figures, de marquer leurs differences par des produits, par exemple $BC \times Bb = ydx$ marquera le petit eſpace *CBbc* qui eſt la difference de l'eſpace changeant *ABC*.

PROBLÊME,

QUI CONTIENT LE CALCUL DIFFERENTIEL.

TROUVER la difference d'une quantité quelconque qui contient des grandeurs changeantes.

PREMIER CAS.

521. QUAND les changeantes sont simplement lineaires, & ne sont point multipliées les unes par les autres, (il n'importe pas qu'elles soient multipliées par des constantes, puisque les constantes n'ont point de differences), & qu'elles sont simplement jointes les unes aux autres par les signes $+$ & $-$; il ne faut que prendre les differences de toutes les changeantes, & les joindre ensemble par les mêmes signes, & l'on aura la difference que l'on cherchoit.

Ainsi la difference de $x - y + z = a$, est $dx - dy + dz = 0$; la difference de $ax - by + cz = ab$, est $adx - bdy + cdz = 0$; la difference de $\frac{aa}{b}x - \frac{bc}{a}y + \frac{cc}{c}z = ab$, est $\frac{aa}{b}dx - \frac{bc}{a}dy + \frac{cc}{c}dz = 0$; la difference de $x\sqrt{a} - y\sqrt{b} + z\sqrt{c} = ab$, est $dx\sqrt{a} - dy\sqrt{b} + dz\sqrt{c} = 0$. La raison de cette pratique est évidente quand les lignes vont en augmentant, car la seconde y est la premiere y plus la difference dy dont la seconde surpasse la premiere; il en est de même des autres: Mais comme l'on ne veut que l'expression de la seule difference, il faut simplement marquer dy.

REMARQUE.

522. D'où l'on voit que quand une changeante y va en décroissant, c'est la premiere y qui surpasse la seconde y de la difference dy, ainsi la seconde y est $y - dy$; & dans ce cas il faut changer le signe de la difference de la seconde y; par exemple si x augmente, & que y diminue, la difference de $x + y$ sera $dx - dy$, & la difference de $x - y$ sera $dx + dy$. Neanmoins en suivant la regle du premier cas dans la résolution d'un Problême, on retrouve ordinairement les grandeurs négatives qui avoient des differences négatives, ce qui les doit faire prendre du côté opposé*. Cependant il est plus à propos de suivre la remarque. * 281. & 182.

SECOND CAS.

523\. QUAND pluſieurs changeantes ſont multipliées les unes par les autres, &, ſi l'on veut, qu'il y ait auſſi des conſtantes dans leurs produits; il faut multiplier la difference de chacune ſeparément par le produit des autres, & la ſomme des produits ſera la difference que l'on cherchoit.

Pour trouver la difference de $xy = ab$, il faut multiplier la difference dx de x par y, & la difference dy de y par x; & la ſomme $ydx + xdy = 0$, ſera la difference de $xy = ab$, ou ſimplement $ydx + xdy$ ſera la difference de xy.

De même ſi l'on a le produit $xyz = abc$, la difference ſera $yzdx + xzdy + xydz = 0$; ou $yzdx + xzdy + xydz$ ſera la difference de xyz; la difference de axy ſera $aydx + axdy$; & ainſi des autres.

La raiſon de cette regle eſt que pour multiplier les differences de x & de y l'une par l'autre, il faut concevoir que x eſt devenue $x + dx$, & y eſt devenue $y + dy$; & le produit de ces deux quantités eſt $xy + ydx + xdy + dxdy$; & comme l'on ne veut que les differences, il faut ôter la grandeur finie xy, & il reſte pour la difference du produit xy, la ſomme $ydx + xdy + dxdy$; mais $dxdy$ eſt une grandeur infiniment petite par raport à $ydx + xdy$, c'eſt pourquoi il la faut auſſi négliger, & il ne reſte que $ydx + xdy$ pour la difference de xy que l'on cherchoit.

En voici une autre démonſtration. On peut concevoir chaque difference dx & dy de x & de y partagée par la moitié, & concevoir, 1°, que x eſt diminuée de la moitié de ſa difference, & qu'elle eſt devenue $x - \frac{1}{2}dx$; & de même que y eſt devenue $y - \frac{1}{2}dy$, & leur produit ſera $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. On peut auſſi concevoir, 2°, que x & y ſont augmentées chacune de la moitié de leur difference, que x eſt devenue $x + \frac{1}{2}dx$, & que y eſt devenue $y + \frac{1}{2}dy$; & leur produit ſera $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Or il eſt clair qu'en retranchant la premiere ſomme des produits de la ſeconde, on aura pour reſte exact $ydx + xdy$, & que ce reſte eſt égal à la difference du produit xy. Pour le repreſenter à l'imagination, il n'y a qu'à faire un rectangle qui aille en augmentant, dont x ſoit la baſe & y la hauteur, & prendre d'abord $x - \frac{1}{2}dx$ & $y - \frac{1}{2}dy$, & y diſtinguer les rectangles que donne leur produit, & prendre ensuite $x + \frac{1}{2}dx$ & $y + \frac{1}{2}dy$, & marquer les rectangles que donne leur produit, & l'on verra que les deux petits rectangles $ydx + xdy$ sont la difference du rectangle entier xy.

Cette démonstration supposée, il est évident que la difference de xyz, ou du produit de tant de changeantes qu'on voudra, est la somme des produits de la difference de chacune de ces changeantes par le produit des autres changeantes; car il n'y a qu'à prendre le produit des deux xy comme une seule grandeur u, & la difference de xyz sera égale à la difference de uz. Or la difference de uz est $zdu + udz$; & mettant les valeurs de du & de u à leur place, on aura la difference de xyz égale à $xzdy + yzdx + xydz$; & ainsi des autres.

COROLLAIRE I.

524. Il suit de là que la difference d'une puissance quelconque d'une changeante x, est le produit de la difference dx de cette changeante par la puissance de la même changeante dont l'exposant est moindre d'une unité que celui de la premiere, multiplié par l'exposant de la premiere; ainsi la difference de xx est $2xdx$; la difference de x^3 est $3xxdx$; celle de x^4 est $4x^3dx$; & en general celle de x^n est $nx^{n-1}dx$.

Car $ydx + xdy$ étant par le second cas la difference du produit de xy, il est évident qu'en supposant $y = x$, ce qui donne $dy = dx$, & en mettant dx au lieu de dy, & x au lieu de y, dans $ydx + xdy$, on aura $xdx + xdx = 2xdx$. Ce qu'il est facile d'appliquer aux puissances plus élevées.

525. Quand il y a des constantes pour les coéficients des puissances des changeantes, elles demeurent dans les differences de ces puissances; ainsi la difference de ax^3 est $3axxdx$; la difference de ax^n est $nax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{1}{2}xx$ est $\frac{1}{2} \times 2xdx = xdx$; la difference de $\frac{a}{n}x^n$ est $ax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{x^n}{a}$ est $\frac{n}{a}x^{n-1}dx$; la difference de x^ny^m est $nx^{n-1}y^mdx + mx^ny^{m-1}dy$; & ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

526. QUAND une fraction a au dénominateur une ou plusieurs changeantes ou leurs puissances, on sçait qu'on les peut met-

tre au numerateur en mettant le signe — devant leur exposant; ainsi $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, $\frac{ax^n}{by^m} = \frac{a}{b}x^ny^{-m}$, $\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$; & ainsi des autres. D'où l'on voit que la difference de ces fractions qui ont des changeantes au dénominateur, se trouve comme celle des produits; ainsi la difference de $\frac{1}{x} = x^{-1}$, est $-1x^{-1-1}dx = -x^{-2}dx$; la difference de xy^{-1} est $y^{-1}dx - 1xy^{-2}dy$; la difference de $\frac{x^3y^{-4}}{a}$ est $\frac{3}{a}xxy^{-4}dx - \frac{4}{a}x^3y^{-5}dy$; la difference de $\frac{a}{b}x^ny^{-m}$ est $\frac{an}{b}x^{n-1}y^{-m}dx - \frac{am}{b}x^ny^{-m-1}dy$.

COROLLAIRE III.

527. LES racines des puissances des changeantes pouvant être regardées comme des puissances elles mêmes, dont les exposans sont des fractions, on en trouve les differences comme celles des puissances (premier Corollaire); ainsi la difference de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; la difference de $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, est $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}-1}dx = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{2}dx\sqrt{ax}$; en general la difference de $ax^{\frac{1}{n}}$ est $\frac{a}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}$ est $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{an}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx$; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}}$ est $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}y^{\frac{p}{q}}dx + \frac{ap}{q}x^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}-1}dy$; la difference de $\sqrt{\overline{x^2 - y^2}} = \overline{x^2 - y^2}^{\frac{1}{2}}$, est $\overline{\frac{1}{2} \times 2xdx - \frac{1}{2} \times 2ydy} \times \overline{x^2 - y^2}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{xdx - ydy}{\sqrt{\overline{x^2 - y^2}}}$; la difference de $\sqrt{\overline{ax - xx}} = \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}}$, est $\overline{\frac{1}{2} \times adx - \frac{1}{2} \times 2xdx} \times \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{\overline{ax - xx}}}$; la difference de $\frac{ay^{m+n}}{p} - x^m \times \overline{a \mp x}^n = 0$, est $\frac{am + an}{p}y^{m+n-1} - mx^{m-1}dx \times \overline{a \mp x}^n \mp ndx \times -x^m \times \overline{a \mp x}^{n-1} = 0$.

REMARQUES.

I.

528. QUAND il arrive que quelques-unes des grandeurs changeantes vont en diminuant, pendant que les autres augmentent, les differences de celles qui diminuent étant négatives*, il faut changer le signe de chaque produit particulier où

* 521.

où ſe trouvent ces differences négatives. Par exemple ſi les y diminuent pendant que les x augmentent, la difference de xy doit être $ydx - xdy$; c'eſt à dire, il faut changer le ſigne du produit particulier xdy où ſe trouve la difference négative $-dy$.

II.

529. Quand on a une fois l'expreſſion des differences des grandeurs changeantes, on fait enſuite ſur ces expreſſions les operations ordinaires de l'Algebre; ainſi le produit de dx par dy eſt $dxdy$; le quarré de dx eſt dx^2; ſa troiſiéme puiſſance eſt dx^3; & ainſi des autres operations.

III.

Où l'on explique quelques principes du calcul integral.

530. Les quantités dont on a enſeigné à trouver les differences, ſont les *integrales* de ces differences; ainſi x eſt l'integrale de dx; xy eſt l'integrale de $ydx \pm xdy$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ eſt l'integrale de $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ eſt l'integrale de $\frac{3}{2}dx\sqrt{ax}$; & en general ax^n eſt l'integrale de $nax^{n-1}dx$; & ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

531. La methode de retrouver les integrales dont on a les differentielles, eſt ce qu'on nomme *le calcul integral*, dont on parlera dans la troiſiéme Partie. Quand on reſout des Problêmes de Geometrie & des ſciences Phyſico-mathematiques, qui ſont ſoumis à ce calcul, on trouve d'abord des équations qui contiennent des differences; & remontant enſuite de ces differences à leurs integrales, on a les reſolutions de ces Problêmes. Ceux qui veulent faire uſage du calcul integral, doivent ſe rendre tres familieres les methodes qu'on vient de donner, pour trouver les differences des quantités quelconques qui contiennent des changeantes, en faire eux-mêmes beaucoup d'exemples, & bien remarquer les integrales d'où ils ont tiré ces differences; ils acquereront par là une tres grande facilité de retrouver tout d'un coup, ſans avoir beſoin des regles, les integrales de beaucoup de differences qui ſe preſenteront dans la réſolution des

Problêmes, & qui leur donneront tout d'un coup les resolutions qu'ils cherchoient.

532. Ce seul exemple ax^n est l'integrale de la difference $nax^{n-1}dx$, peut servir de formule pour trouver la pluspart des integrales de chaque difference particuliere qui n'aura qu'une seule changeante x, en comparant la difference particuliere dont il faudra trouver l'integrale à la difference $nax^{n-1}dx$, & supposant qu'elle represente cette difference particuliere, & que l'integrale ax^n represente l'integrale que l'on cherche. Car il est visible que pour retourner de la difference $nax^{n-1}dx$ à l'integrale ax^n, il faut, 1°, élever x à la puissance dont l'exposant surpasse d'une unité l'exposant $n-1$, & l'on aura $x^{n-1+1}=x^n$, & mettre dans la difference cette quantité à la place de x^{n-1}, & elle deviendra $nax^n dx$. 2°. Il faut diviser cette quantité par la difference dx de x lineaire, multipliée par $n-1+1=n$; c'est à dire, il faut diviser $nax^n dx$ par ndx, & le quotient sera l'integrale ax^n.

Ainsi pour trouver l'integrale representée par ax^n de la difference $\frac{adz-2zdz}{2\sqrt{az-zz}}=\frac{\overline{adz-2zdz}}{2}\times\overline{az-zz}^{-\frac{1}{2}}$; on supposera $az-zz=x$, $1=a$, $-\frac{1}{2}=n-1$; par consequent $-\frac{1}{2}+1=+\frac{1}{2}=n-1+1=n$, $dx=adz-2zdz$, & $\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}=x^n$. Pour avoir la grandeur à diviser, il faut mettre dans la difference proposée cette valeur de x^n, & la grandeur à diviser sera $nax^n dx=\frac{\overline{adz-2zdz}}{2}\times\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}$; le diviseur sera $ndx=\frac{1}{2}\times\overline{adz-2zdz}$; & faisant la division, on trouvera l'integrale $ax^n=\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{az-zz}$.

533. Il est necessaire de remarquer que les constantes n'ayant point de difference, une integrale jointe par le signe + ou — avec une constante, a la même difference qu'auroit cette integrale seule; c'est pourquoi quand on retrouve l'integrale d'une difference, il faut quelquefois lui ajouter ou en retrancher une constante, afin d'avoir l'integrale exacte de cette difference. On donnera dans la troisiéme Partie la Regle qui sert à trouver cette grandeur constante.

On n'a mis ici la remarque précedente & l'avertissement, que pour donner à ceux qui commencent une idée du calcul integral.

IV. REMARQUE.

534. Les grandeurs constantes n'ayant pas de difference, quand des grandeurs changeantes sont egales à une constante, leurs differences sont égales à zerò; si $x + y = a$, $dx \pm dy = 0$, ce qui donne $dx = \mp dy$; si $axy = abb$, $aydx \pm axdy = 0$, ce qui donne $ydx = \mp xdy$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{\mp x}{y}$; si $xy^{-1} = a^2$, $y^{-1}dx - xy^{-2}dy = 0$; ainsi $dx = xy^{-1}dy$, & $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$. Cette remarque sert dans la resolution de plusieurs Problêmes.

V.

535. Quand on compare une integrale, c'est à dire une grandeur changeante finie qui a sa difference comme $y + dy$, avec une autre grandeur finie; il faut en ôter la difference, qui étant infiniment petite, ne peut point être comptée avec son integrale; ainsi $\frac{y+dy}{z}$ doit être ainsi marquée $\frac{y}{z}$: Car il faut une infinité de differences ou de grandeurs infiniment petites pour faire une grandeur finie.

COROLLAIRE IV.

Où l'on explique la maniere de trouver les differences des suites, ce qui servira dans la 3^e^ Partie à en trouver les integrales, & à en faire des formules generales.

PREMIER CAS.

536. POUR trouver la difference d'une suite qui n'a qu'une même grandeur changeante, ordonnée comme on la voit ici (A) $x^m \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$ &c. 1°, il faut supposer (B) $K = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} +$ &c. & l'expression précedente sera changée en celle-ci (C) $x^m K^p$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura (D) $mx^{m-1}K^p dx + px^m K^{p-1}dK$, qu'il faut changer en cette équivalente (E) $mx^{m-1}K \times K^{p-1}dx + px \times x^{m-1}K^{p-1}dK$, & lui donner cette forme (F) $\overline{mKdx + pxdK} \times x^{m-1}K^{p-1}$. 3°. Il faut dans cette derniere F mettre les valeurs de K & de dK prises de l'équation B, qui sont $K = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} +$ &c. & $dK = \overline{nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1} + 3nex^{3n-1} + \text{\&c.}} \times dx$, à la place de Kdx & de dK; & l'on aura

$$\left.\begin{array}{l} ma + mbx^n + mcx^{2n} + mex^{3n} + \text{\&c.} \\ \quad + pnbx^n + 2pncx^{2n} + 3pnex^{3n} + \text{\&c.} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1}K^{p-1}.$$

Il est évident que c'est la difference de la suite ou de l'integrale A que l'on cherchoit.

SECOND CAS.

537. POUR trouver la difference d'un produit de plusieurs suites, comme de A. $x^m \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p + \&c. \times \overline{f + gx^n + hx^{2n}}^q + \&c.$ 1°. il faut supposer B. $K = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \&c.$ & C. $l = f + gx^n + hx^{2n} + \&c.$ & l'expression A sera changée en celle-ci D. $x^m \times K^p l^q$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura E. $mx^{m-1}K^p l^q dx + px^m K^{p-1} l^q dK + qx^m K^p l^{q-1} dl$, qu'il faut changer en cette équivalente E. $mx^{m-1}K \times K^{p-1} l \times l^{q-1} dx + px \times x^{m-1} K^{p-1} l \times l^{q-1} dK + qx \times x^{m-1} K \times K^{p-1} l^{q-1} dl$, & lui donner cette forme F. $\overline{mKldx + pxldK + qxKdl} \times x^{m-1} K^{p-1} l^{q-1}$. 3°. Il faut prendre les valeurs de $Kldx$, de $xldK$, & de $xKdl$ dans B & C; (c'est à dire, multiplier la valeur de K prise dans B, par la valeur de l prise dans C, & multiplier leur produit par dx; prendre la valeur de dK dans B, & la multiplier par xl, & prendre la valeur de dl dans C, & la multiplier par xK), & substituer ces valeurs dans les termes $mKldx + pxldK + qxKdl$ de F, & l'on aura

$$\left.\begin{array}{lll} maf & + magx^n & + mahx^{2n} \\ & + mbfx^n & + mcfx^{2n} \\ & & + mbgx^{2n} \\ & & \\ & + pbfnx^n & + 2pcfnx^{2n} \\ & & + pbgnx^{2n} \\ & & \\ & + qagnx^n & + 2qahnx^{2n} \\ & & + qbgnx^{2n} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1} K^{p-1} l^{q-1}.$$

C'est la difference de la suite A que l'on cherchoit.

TROISIÉME CAS.

538. POUR trouver la difference de A. $x^m K^p \times \overline{f + gx^n + hx^{2n}}$ &c. où l'on suppose B. $K = a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \&c.$ & que l'exposant de la suite $f + gx^n + hx^{2n} + \&c.$ est l'unité, il ne faut pas supposer cette derniere suite égale à une seule lettre, mais il faut changer l'expression A en cette équiva-

lente C. $fx^m K^p + gx^{m+n} K^p + hx^{m+2n} K^p +$ &c. & enſuite, 1°, on prendra la difference de C. qui eſt D. $mfx^{m-1} K^p dx + pfx^m K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^{m+n-1} K^p dx + pgx^{m+n} K^{p-1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{m+2n-1} K^p dx + phx^{m+2n} K^{p-1} dK +$ &c. qu'on changera en ſon équivalente E. $mfx^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pfx \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^n \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pgx^{n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + phx^{2n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK +$ &c. à laquelle on donnera cette forme F. $\overline{mfKdx + pfxdK + \overline{m+n}\, gx^n Kdx + pgx^{n+1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} Kdx + phx^{2n+1} dK + \text{\&c.}} \times x^{m-1} K^{p-1}$. 2°. Il faut prendre dans B la valeur de K & la difference de K, c'eſt à dire la valeur de dK; & après avoir multiplié la valeur de K par dx, mettre le produit dans le premier terme de F à la place de Kdx; multiplier de même x par la valeur de dK, & mettre le produit dans le ſecond terme de F à la place de xdK; ſubſtituer de même à la place de $x^n Kdx$ dans le troiſiéme terme de F le produit de la valeur de K par $x^n dx$, & celui de la valeur de dK par x^{n+1} dans le quatriéme terme de F à la place de $x^{n+1} dK$; celui de la valeur de K par $x^{2n} dx$ dans le cinquiéme terme à la place de $x^{2n} Kdx$; & celui de la valeur de dK par x^{2n+1} dans le ſixiéme terme à la place de $x^{2n+1} dK$ &c. & l'on aura

$$\text{G.} \quad \left.\begin{array}{llll} maf + mabx^n & & + macx^{2n} & + \text{\&c.} \\ & + pbfnx^n & + 2pcfnx^{2n} & + \text{\&c.} \\ + \overline{m+n} \times agx^n & & + \overline{m+n} \times cgx^{2n} & + \text{\&c.} \\ & & + pbgnx^{2n} & + \text{\&c.} \\ & & + \overline{m+2n} \times ahx^{2n} & + \text{\&c.} \\ & & + pbhnx^{3n} & + \text{\&c.} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1} K^{p-1}.$$

C'eſt la difference de A que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

539. Il faut dans ces ſuites qu'il n'y ait qu'une même inconnue x, & que les expoſants des termes de chacune ſoient la même progreſſion arithmetique $o, n, 2n, 3n$, &c. & que ſi les expoſants ſont poſitifs dans l'une, quand il y en a pluſieurs mul-

tipliées les unes par les autres, comme dans le second & le troisiéme cas, ils soient aussi positifs dans les autres; & s'ils sont négatifs dans l'une, ils le soient aussi dans les autres.

II.

540. Il faut se rendre les trois cas précedents tres familiers, & surtout le 3^e, où supposant $K^{p-1} = \overline{a + bx^n + cx^{2n} + \&c.}^{p-1}$, il y a deux suites multipliées l'une par l'autre; & bien remarquer que dans la difference G. chaque terme est multiplié par $x^{m-1}K^{p-1}$; que le premier terme $mafdx \times x^{m-1}K^{p-1}$, ne contient qu'une constante maf multipliée par $dx \times x^{m-1}K^{p-1}$; que le second terme outre cela est multiplié par x^n, le troisiéme par x^{2n}, & ainsi de suite; que l'integrale A du 3^e cas dont la difference G est telle qu'on vient de le marquer, a tous ses termes multipliés par x^mK^p, sçavoir, le premier n'est qu'une constante f multipliée par x^mK^p, mais dans le second terme son coéficient constant est multiplié de plus par x^n, & est $gx^{m+n}K^p$; dans le troisiéme terme le coéficient constant est de plus multiplié par x^{2n}, & est $hx^{m+2n}K^p$, & ainsi de suite.

III.

541. D'où l'on voit que quelque nombre de suites qu'il y ait de multipliées les unes par les autres dans une difference comme H. $x^{m-1}K^{p-1}l^{q-1}dx \times \overline{\alpha + \beta x^n + \kappa x^{2n}} + \&c.$ où l'on suppose $K = a + bx^n + cx^{2n} + \&c.$ $l = f + gx^n + hx^{2n} + \&c.$ on connoît toujours les exposants de x, K, l dans chacun des termes de la suite qui est l'integrale de cette difference H. car le premier terme doit être une constante multipliée par $x^mK^pl^q$; au second terme il doit y avoir $x^{m+n}K^pl^q$; au troisiéme terme, $x^{m+2n}K^pl^q$; & ainsi de suite. Ce qu'il faut bien remarquer pour la troisiéme Partie.

IV.

Sur l'exactitude des démonstrations du calcul differentiel & integral, c'est à dire sur la certitude des résolutions que l'on trouve par ces calculs.

542. Quand les anciens Geometres démontroient des raports de plusieurs figures, comme que les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres; que les pyramides

de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes, &c. ils ſe ſervoient pour faire la démonſtration de figures inſcrites ou circonſcrites, dont les côtés diminuant toujours à l'infini, faiſoient qu'on en pouvoit concevoir d'inſcrites dont les côtés étoient infiniment petits, & leſquelles à cauſe de cela differoient moins des grandeurs où elles étoient inſcrites qu'aucune grandeur donnée ; mais la diſtinction de ces differences infiniment petites ne duroit que pendant la démonſtration, & parcequ'elle leur étoit neceſſaire pour faire la démonſtration ; & ils ſuppoſoient que ces differences s'anéantiſſoient à la fin de la démonſtration, & que la figure inſcrite devenoit exactement la figure même dans laquelle elle étoit inſcrite ; car il eſt évident que ſans l'évanouiſſement de cette difference infiniment petite, le raport qu'ils vouloient démontrer n'auroit pas été démontré dans l'exactitude geometrique.

De même dans la methode generale des tangentes des courbes geometriques de l'article 371, on fait la diſtinction de la partie *Cc* de la ſecante de la parabole (fig. 19) pendant tout le calcul, & on ne pourroit pas faire le calcul pour trouver la tangente par cette methode ſans cette diſtinction de la partie *Cc*, ou, ce qui en eſt une ſuite neceſſaire, des parties *Ce*, *ec* ; mais pour avoir la tangente, on ſuppoſe que cette partie *Cc* de la ſecante s'évanouit, & devient nulle.

De la même maniere quand on employe le calcul differentiel & integral dans la réſolution d'un Problême, on regarde les differences infiniment petites comme prêtes à s'évanouir, & on ne les regarde ſubſiſtantes que pour le calcul & pour découvrir ce qu'on cherche pendant qu'on le cherche ; & au moment que le calcul fait trouver la réſolution qu'on cherche, on regarde ces differences comme s'évanouiſſant & comme devenant nulles ; & par là la réſolution que l'on cherchoit eſt dans la même exactitude geometrique que le ſont les concluſions des anciens Geometres, & la découverte exacte que l'on fait des ſoutangentes par la methode de l'article 371.

Des differences ſecondes, troiſiémes, &c.

543. ON ne voit rien dans l'ancienne Geometrie qui ait raport aux differences ſecondes, troiſiémes, &c. mais auſſi les anciens

Geometres se sont bornés à des Problêmes qui n'en avoient pas besoin : On s'est ouvert de notre temps une voye pour la résolution des Problêmes qui penetre à l'infini, & qui s'étend à toutes les courbes qu'on peut imaginer, geometriques, méchaniques & parcourantes; l'on a eu besoin, pour n'être arrêté nulle-part, de distinguer dans plusieurs Problêmes, outre les premieres differences, des secondes differences, des troisiémes, & ainsi à l'infini.

On en a vû la possibilité en ce que la grandeur étant divisible à l'infini, 1°, l'on peut concevoir une progression geometrique $\div\!\!\div a, b, c, e, f, g$, &c. dont le premier terme a soit une grandeur finie, le second b soit une difference premiere infiniment petite par raport à a, c une difference seconde par raport à la difference premiere b, de maniere que c soit infiniment petite par raport à b, & de même e par raport à c; & ainsi de suite; de façon que le raport infini des deux premiers termes a & b, regne dans toute la progression. C'est de cette sorte qu'on aura une progression de differences premieres, secondes, &c. en élevant $\overline{x+dx}^n$ à la puissance dont n est l'exposant; car on trouvera la suite $x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} x^{n-2} dx^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} x^{n-3} dx^3 +$ &c. dont le premier terme contient une grandeur finie, le second une premiere difference dx, le troisiéme une seconde difference $dx \times dx$ ou dx^2; & ainsi de suite : Et l'on peut voir une semblable progression geometrique dans la Geometrie ordinaire; car si l'on suppose dans la seconde figure l'ordonnée du cercle ED si petite, qu'elle soit une difference premiere prête à s'évanouir, & tout proche de l'extrémité B du diametre AB; il est évident que la grandeur finie AD sera à une difference premiere ED, comme cette difference premiere ED est au reste DB du diametre, lequel reste DB est par consequent infiniment petit par raport à la difference premiere ED; & par consequent ce reste est une difference seconde; & l'on pourroit concevoir aisément une difference troisiéme, en supposant que la difference ED est le diametre d'un cercle, & continuer cela à l'infini. (Fig. II.)

2°. On a aussi vû la possibilité de ces differences secondes, troisiémes, &c. en faisant attention à la formation des lignes & des figures par le mouvement; par exemple si le point C (Fig. XLII.)

aprés

aprés avoir décrit la partie finie AC de la courbe, étant mû ensuite le long de BC, qui elle-même se meut parallelement sur AB, décrit en un premier instant la partie infiniment petite Cc (du) de la courbe, pendant que BC parcourt dans le même instant Bb ou son égale Cd (dx), & que le point C s'avance sur bc depuis d jusqu'à c, & parcourt dc (dy) sur la droite bc: En concevant des mouvemens semblables dans le second instant suivant, & que bc a parcouru $bH = ce$, & que le point C a décrit une seconde partie ef infiniment petite de la courbe, & qu'il a avancé sur la droite bc venue en Hf de la longueur infiniment petite ef; on trouvera des differences secondes. Car si l'on suppose le mouvement de la droite BC sur $ABbH$ uniforme, & qu'ainsi $bH = ce = Bb = Cd$ (dx); mais que la vitesse du point C sur cette droite Hf en s'éloignant de l'axe AB, est continuellement avancée ou retardée, en prenant cette derniere supposition, le second accroissement ef (dy) sera moindre que le premier accroissement dc (dy), & $dc - ef$ qui sera leur difference, sera une difference seconde; & de même $Cc - cf$ sera une difference seconde; puisque chacune de ces differences secondes doit être infiniment petite par raport à sa difference premiere, comme cette difference premiere est infiniment petite par raport à la grandeur finie dont elle est la difference premiere. Si l'on fait attention au mouvement du 3^e instant, on y trouvera de même des differences troisiémes, & ainsi à l'infini.

On trouve de même des differences secondes & troisiémes, &c. dans les espaces; car le petit espace Crc est infiniment petit par raport à la difference premiere CAc du segment AC, & par consequent Crc est une difference seconde de ce segment. De même l'espace Cdc est infiniment petit par raport à la difference premiere $CBbc$ de la figure CAB. Il est facile de trouver ainsi des differences secondes & troisiémes dans les figures solides.

Enfin on a vû l'utilité de cette distinction des differences secondes & troisiémes, &c. dans la résolution de plusieurs beaux Problêmes, c'est pourquoi on les a aussi réduites au calcul que voici.

Suppositions ou demandes, & définitions.

I.

544. L'on marque ainsi les differences secondes, troisiémes, &c.

des differences premieres; la difference de dx eſt ddx ou d^2x; la difference de d^2x eſt $dddx$ ou d^3x, & ainſi à l'infini; de même ddu, d^3u, d^4u, &c. ſont les differences ſecondes, troiſiémes, quatriémes de u; & ainſi des autres. On nomme auſſi les differences premieres, les differences du premier genre; les ſecondes, les differences du ſecond genre, &c. Les puiſſances d'une difference premiere ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. ainſi $dxdx$ ou dx^2; $dxdxdx$ ou dx^3; dx^4, &c. ſont des differences du ſecond genre, du troiſiéme, du quatriéme, &c. & il faut remarquer que d^3x eſt $dddx$; mais dx^3 eſt $dxdxdx$, &c. Les produits des differences de differentes changeantes ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. comme $dxdy$, $dxdy^2$, dx^2dy^2, &c.

II.

545. Comme les grandeurs finies changeantes ſont les integrales des differences premieres, de même les integrales des differences ſecondes ſont des differences premieres; les integrales des differences troiſiémes ſont des differences ſecondes; & ainſi des autres. Et comme un nombre fini de differences premieres ne fait qu'une difference premiere, & qu'il faut une infinité de differences premieres pour faire une grandeur finie; il en eſt de même des differences ſecondes à l'égard des premieres; des troiſiémes à l'égard des ſecondes, &c.

III.

546. Comme une grandeur finie conſtante n'a point de difference, de même quand une difference premiere eſt ſuppoſée conſtante, elle n'a point de ſeconde difference, c'eſt à dire ſa ſeconde difference, & par conſequent les ſuivantes ſont zero. D'où l'on voit que comme une integrale changeante + ou — une conſtante a la même difference que s'il n'y avoit point de conſtante, ce qui eſt cauſe que pour retourner à l'integrale, il faut quelquefois, aprés avoir trouvé l'integrale de la difference, ajouter à cette integrale une conſtante finie, ou l'en retrancher; il faut quelquefois de même en retournant des differences ſecondes aux premieres qui en ſont les integrales, ajouter ou retrancher une difference premiere conſtante pour avoir l'integrale complete.

IV.

547. Lorſque pluſieurs changeantes comme x, y, z, &c. augmentent ou diminuent enſemble, on en conſidere ordinaire-

ment une, laquelle on veut, comme recevant à chaque instant des accroissemens égaux, ou des diminutions égales, & par consequent la difference de cette changeante est considerée comme constante qui n'a pas de seconde difference pendant que les autres en ont, parcequ'elles reçoivent des accroissemens inégaux, ou des diminutions inégales. Pour le representer à l'imagination, supposé que Cc, cf soient deux parties infiniment petites de la courbe, & que Cc qui est aussi une partie de la tangente en C, soit prolongée en g; que du centre c avec le rayon cf on tire l'arc fi; qu'on prolonge ef en g; qu'on mene par f, fl parallele à ce, & par l & i, lm, in paralleles à Hf; en supposant, 1°, l'accroissement Cd (dx) constant, c'est à dire $Cd = ce(dx)$, il est évident que les triangles rectangles Cdc, ceg sont semblables & égaux; par consequent $eg = dc = dy$; d'où l'on voit que $dc(dy)$ va en diminuant, puisque le second dy qui est ef est moindre que le premier qui est dc; leur difference est $eg - ef = fg$; ainsi fg est la difference seconde ddy; & quand les dy vont ainsi en diminuant, la difference seconde $fg\,(-ddy)$ est négative; ce qu'il faut bien remarquer. Par la même raison ig est ddu, étant la difference de $cg = Cc = du$, & de $cf = ci$; & les Cc, $cf(du)$ allant en diminuant, $-ddu$ est négative. 2°. Si l'on suppose $dc(dy) = ef = lm$, c'est à dire dy constant, les triangles rectangles Cdc, cml seront semblables & égaux; & l'on verra que me sera ddx, & li sera ddu. 3°. Si l'on suppose $Cc(du)$ constant, c'est à dire $Cc(du) = cf = ci$, les triangles rectangles Cdc, cni seront semblables & égaux, & ne sera ddx, & iK sera ddy. Il faut remarquer que quand on suppose une difference constante comme dx, son integrale x n'est pas pour cela constante, puisque sa difference est dx; mais elle n'a point de differences secondes, troisiémes, &c. FIG. XLII.

PROBLÊME II.

548. *TROUVER les differences des expressions qui contiennent des differences.*

ON les trouvera de la même maniere qu'on trouve les differences premieres par le premier Problême; & il suffira ici, pour le faire concevoir, d'en mettre quelques exemples.

Pour trouver la difference de xdx, on regardera ce produit comme composé des deux grandes changeantes x & dx.

& on prendra la difference de chacune multipliée par l'autre, & on trouvera $dx^2 + xddx$ pour la difference que l'on cherchoit; d'où il ſuit que la difference de dx^2 eſt $2dxddx$. La démonſtration eſt ſemblable à celle qu'on a donnée pour trouver la difference des produits xy, xx, &c. D'où il ſuit que la difference de $\frac{1}{dx} = dx^{-1}$ eſt $dx^{-1-1} - ddx = -\frac{ddx}{dx^2}$; la difference de $\frac{ydy}{dx} = ydydx^{-1}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $dy^2dx^{-1} + yddydx^{-1} = \frac{dy^2}{dx} + \frac{yddy}{dx}$; mais en ſuppoſant dy conſtante, la difference de $ydydx^{-1}$ ſera $dy^2dx^{-1} - ydydx^{-2}ddx = \frac{dy^2}{dx} - \frac{ydyddx}{dx^2}$; la difference de $du^2 = dx^2 + dy^2$, en ſuppoſant dx conſtante, ſera $duddu = dyddy$; en ſuppoſant dy conſtante, elle ſera $duddu = dxddx$; en ſuppoſant du conſtante, elle ſera $dxddx = -dyddy$; & en ne ſuppoſant aucune de ces differences conſtante, elle ſera $duddu = dxddx + dyddy$; La difference de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $ddu = dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; en ſuppoſant dy conſtante, elle eſt $ddu = \frac{dxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en ſuppoſant du conſtante, elle eſt $o = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, qui ſe réduit à $dxddx = -dyddy$. La difference de $my^{m-1}dy = dx$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $\overline{mm - 1m} \times y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = o$. De même la difference de $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = o$. La difference de $\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-1}$, en ſuppoſant dx conſtante (on ne peut pas ſuppoſer dy conſtante, parcequ'il y a ddy qui ſeroit zero ſi dy étoit conſtante,) eſt $3dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-1} - dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-2}$, qu'on peut réduire, ſi l'on veut, à cette expreſſion équivalente $-\frac{3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la maniere de trouver les differences de toute quantité qui contient des differences quelconques.

SECTION II.

L'usage de l'Analyse dans la résolution des Problêmes de Geometrie composée, en se servant du calcul differentiel.

AVERTISSEMENT.

549. LORSQU'ON veut resoudre un Problême de Geometrie ou des sciences Physico-mathematiques par le calcul differentiel & integral, on commence toujours la résolution par le calcul differentiel, & l'on trouve d'abord l'équation du Problême, laquelle contient des differences, dont il ne faut plus que chercher les integrales, pour avoir la résolution du Problême.

Quand il arrive qu'on peut ôter les differences de l'équation du Problême qui en contient, sans avoir recours aux integrales, (par exemple si dx, ou dx^2, ou ddx, &c. se trouve dans l'équation du Problême, & qu'on puisse faire en sorte qu'elle se divise exactement par les mêmes differences, cela ne laissera dans l'équation que des grandeurs finies sans difference,) alors le Problême se resout par le seul calcul differentiel. C'est de cette sorte que sont resolus par le seul calcul des differences les Problêmes de l'excellent Livre de *l'Analyse des Infiniment Petits de Mr le Marquis de l'Hôpital*, où l'on voit un usage perpetuel de l'Analyse dans les résolutions des Problêmes par le moyen du calcul differentiel: Mais dans la plûpart des Problêmes la résolution s'acheve par le calcul integral. On fera remarquer ici que dans l'application de l'Analyse à la Geometrie composée, en se servant du calcul differentiel & integral, l'on trouve ordinairement des formules generales qui donnent la résolution de tous les Problêmes semblables, en substituant simplement dans ces formules les valeurs qui conviennent aux Problêmes particuliers. On mettra ici celles de ces formules qui sont le plus d'usage, & qui ont le plus d'étendue, afin que dans la breveté qu'on est obligé de donner à ce huitiéme Livre, les Lecteurs qui commencent, ne laissent pas d'y trouver la methode de resoudre les Problêmes les plus utiles de la Geometrie composée, & ce qui leur est necessaire pour entendre les nouvelles découvertes, & pour en faire eux-mêmes.

Les formules des tangentes & des autres lignes qui ont rapport aux tangentes.

550. FIG. XIX. Si l'on imagine que ACc est un courbe quelconque dont Cc est une partie infiniment petite, & qui est par consequent une petite partie de la tangente au point C; qu'on mene des points C, c les ordonnées CB, cb sur le diametre AB; qu'on prolonge la tangente cC en S où elle rencontre le diamettre prolongé BA, & qu'elle rencontre aussi au point T la tangente AT du sommet A; qu'on tire aussi Ce parallele au diametre AB qui rencontre cb en e & AT en t; enfin qu'on mene CD perpendiculaire à la tangente au point C qui rencontre le diamettre au point D.

Quelque angle CBA que fassent les ordonnées BC avec le diametre AB, le petit triangle Cec sera toujours semblable à chacun des triangles CBS, ATS, CTt. Supposant $AB = x$, $BC = y$, l'on aura $Ce = Bb = dx$, $ec = dy$, & à cause des triangles semblables Cec, CBS, on aura $ec(dy) . Ce(dx) :: BC(y) . BS = \frac{ydx}{dy}$, qu'on supposera, pour abreger, $= S$.

Formule de la soutangente. $BS(s) = \frac{ydx}{dy}$; *d'où l'on déduit* $AS = BS - AB = \frac{ydx - xdy}{dy}$, *qu'on supposera* $= s$.

Les triangles semblables Cec, SAT, donnent aussi $Ce(dx) . ec(dy) :: AS\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right) . AT = \frac{ydx - xdy}{dx}$, qu'on supposera $= \theta$; d'où l'on aura $Tt = At$ ou $CB - AT = \frac{xdy}{dx}$, qu'on supposera $= \tau$.

Ces quatre formules pour trouver les lignes $BS(S)$, $AS(s)$, $AT(\theta)$, $Tt(\tau)$, sont toujours les mêmes, quelque soit l'angle des ordonnées avec le diametre. On suppose pour les suivantes que cet angle est droit, ce qu'il faut bien remarquer.

Nommant l'arc AC de la courbe ACc, u; la partie Cc infiniment petite de cette courbe sera $= du$; & comme elle est l'hypothenuse du petit triangle rectangle Cec, l'on aura $\overline{Cc}^2 (du^2) = \overline{Ce}^2 + \overline{ec}^2 (dx^2 + dy^2)$; ainsi $Cc(du) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Les triangles rectangles semblables Cec, CBS donnent $ec(dy) . Cc(\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: BC(y) . CS = \frac{y}{dy}\sqrt{x^2 + dy^2}$, qu'on supposera $= T$; ainsi $CS(T) = \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, est la formule de la tangente. Les mêmes triangles donnent aussi $Ce\,(dx)$. $Cc\,(\sqrt{dx^2 + dy^2})$ :: $AS\,(\frac{ydx - xdy}{dy})$. $ST = \frac{ydx - xdy}{dxdy} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on supposera = t; d'où l'on déduira $CT = CS - ST = \frac{x}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on supposera $= t$.

Les triangles rectangles semblables Cec, BCD, (car ils ont chacun un angle droit Cec, CBD, & de plus ôtant de chacun des angles droits BCe & DCc l'angle commun DCe, les angles eCc, BCD sont égaux,) donnent $Ce\,(dx)$. $Cc\,(\sqrt{dx^2 + dy^2})$ :: $CB\,(y)$. $CD = \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on supposera $= P$. C'est la formule de la perpendiculaire CD. Les mêmes triangles donnent encore $Ce\,(dx)$. $ec\,(dy)$ :: $CB\,(y)$. $BD = \frac{ydy}{dx}$, qu'on supposera = p. C'est la formule de la soûperpendiculaire BD; d'où l'on déduit $AD = AB + BD = \frac{xdx + ydy}{dx}$, qu'on supposera $= p$; & $SD = SB + BD = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dxdy}$, qu'on supposera $= \pi$.

On a mis toutes ces formules pour faire concevoir dans la suite ce que l'on entend par la *methode inverse des tangentes*.

Usage de ces formules.

EXEMPLE I.

1. QUAND on veut trouver quelqu'une de ces lignes par raport à une courbe particuliere, par exemple la soutangente S, il faut par le moyen de l'équation de cette courbe particuliere, prendre la valeur de $\frac{dx}{dy}$; par exemple si l'on veut la soutangente de la parabole dont l'équation est $yy - px = 0$, il faut prendre les differences, & l'on aura $2ydy = pdx$, ce qui donnera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$; il faut ensuite substituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{2yy}{p}$; & mettant pour $2yy$ sa valeur $2px$, l'on aura $S = 2x$: ce qui fait voir que dans la parabole la soutangente S est égale au double de la coupée x. Et quand on veut la soutangente pour un point déterminé, il n'y a qu'à mettre la valeur déterminée de x qui convient à ce point là dans $S = 2x$, & la soutangente sera déterminée pour ce point là. Il faut faire la même chose pour les autres courbes. Il faut de même pour les autres formules, trouver par les équations des courbes particulieres, les valeurs des differences dy, dx, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

en grandeurs finies qui ne contiennent plus de differences, & les ſubſtituer dans les formules, & après la ſubſtitution, l'on aura les valeurs que repreſentent ces formules.

EXEMPLE II.

552. FIG. XIX. TOUTES les courbes geometriques peuvent être repreſentées par l'équation generale $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$, dans laquelle x marque les coupées AB, y les ordonnées BC; car dans les équations de toutes les courbes geometriques, ne pouvant y avoir que quatre ſortes de quantités qui en compoſent les termes; les premieres qui ne contiennent de changeante que x ſans y; les ſecondes qui ne contiennent que y; les troiſiémes des x & des y mêlés enſemble, & les quatriémes un terme tout connu ou conſtant; le premier terme de l'équation generale repreſente les premieres; le ſecond, les ſecondes; le troiſiéme, les troiſiémes; & le quatriéme repreſente le terme conſtant de celles qui en ont un; f, g, h repreſentent les coéficients; & m, n, r, s repreſentent les expoſans des changeantes x & y. Cela ſuppoſé, il faut trouver par cette équation generale, la ſoutangente de toutes les courbes geometriques.

1°. Il faut prendre les differences des termes de l'équation generale, & l'on aura $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1}y^s dx + shx^r y^{s-1}dy = 0$; d'où l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$.

2°. Il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule de la ſoutangente $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{-ngy^n - shx^r y^s}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente de toutes les courbes geometriques, ou plutôt une formule pour les trouver, en ſubſtituant dans cette expreſſion generale de la ſoutangente, les valeurs des indéterminées f, g, h, m, n, r, s, priſes des équations de chaque courbe geometrique dont on voudra avoir la ſoutangente.

Avertiſſement.

On n'a mis ce ſecond Exemple, que pour faire voir aux Lecteurs la beauté de l'Analyſe, & l'avantage particulier qu'elle a de faire appercevoir à l'eſprit le nombre infini de toutes les courbes geometriques, ſous une expreſſion auſſi ſimple

ſimple qu'eſt l'équation generale qui précede, & de lui faire découvrir par un même calcul, en ſe ſervant de cette équation, des proprietés qu'il voit clairement leur convenir à toutes.

REMARQUES.

I.

553. QUAND la quantité que l'on trouve par le moyen de l'équation d'une courbe particuliere pour la valeur de $\frac{dx}{dy}$, eſt une fraction, & qu'en voulant, par exemple, une ſoutangente déterminée pour un point particulier de la courbe, la ſubſtitution des valeurs déterminées de x & de y pour ce point-là, rend le numerateur & le dénominateur chacun égal à zero; il faut continuer de prendre la difference du numerateur, & enſuite celle du dénominateur, & les diviſer l'une par l'autre, & ſuppoſer la nouvelle fraction égale à $\frac{dx}{dy}$; & après avoir ſubſtitué dans cette nouvelle fraction les valeurs déterminées de x & de y, prendre dans cette équation la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & la ſubſtituer dans la formule $s = \frac{ydx}{dy}$; & l'on aura la valeur de la ſoutangente, qui convient à ce point-là. Si la ſubſtitution des valeurs déterminées de x & de y rendoit encore le numerateur & le dénominateur de la nouvelle fraction égaux chacun à zero, il faudroit continuer de prendre les differences du numerateur & du dénominateur de la nouvelle fraction, & continuer l'operation comme on vient de le dire.

II.

554. La conſideration des tangentes d'une courbe a de grands uſages; on en mettra ſeulement ici quelques-uns. 1°. Chaque partie infiniment petite de la courbe, étant une partie infiniment petite de la tangente à ce point de la courbe, les angles que font entr'elles les tangentes des points infiniment proches de la courbe, ſont ceux des petites parties de la courbe.

2°. Si l'on trace ſoi-même les tangentes d'une courbe qui rentre en elle-même comme d'une ellipſe, en commençant au ſommet, on verra que les ſoutangentes BS, BS, &c. FIG. XLIII.
priſes ſur un diametre AB, augmentent à meſure que l'on prend des points qui vont du ſommet A vers le point D, où ſe termine le diametre conjugué, & qu'elles s'augmentent en allant du côté S vers l'origine; qu'au point D du

diametre conjugué, la ſoutangente KS devient infinie, la tangente DE ſe détachant là de la ſoutangente à laquelle elle devient parallele en ce point D; & qu'enſuite les ſoutangentes bs des points c, c pris depuis le diametre conjugué D vers la ſeconde extremité (a) du diametre, paſſent de l'autre côté, & ſe trouvent au côté oppoſé à l'origine, & vont toujours en diminuant; de maniere que ſi l'on fait les premieres poſitives, les ſecondes ſeront négatives; & au point D du paſſage des poſitives aux négatives, la ſoutangente devient infinie.

Si l'on commence à mener les tangentes du ſommet D du ſecond diametre par tous les points C, C de la courbe, juſqu'aux points S, S du premier diametre aA, prolongé vers S, on verra que les ſoutangentes BS, BS vont en diminuant juſqu'au ſommet A du premier diametre, où la ſoutangente devient zero, & continuant enſuite de mener les tangentes cS, cS par les points c, c, juſqu'à la ſeconde extremité d du ſecond diametre, on verra que les ſoutangentes BS vont enſuite en augmentant juſqu'au point d, où la ſoutangente devient encore infinie, étant parallele à la ſoutangente.

Si l'on mene hors de l'ellipſe une droite $a\alpha$ s s parallele au diametre, les ſoutangentes a s, a s des points C, C, pris depuis le ſommet A, juſqu'au diametre conjugué D, priſes ſur cette parallele depuis le point a qui répond à l'origine A, ſeront du côté des négatives, & depuis le diametre conjugué D, elles ſeront du côté des poſitives, & les premieres iront en augmentant, & les ſecondes en diminuant; & au point D, qui eſt le paſſage des négatives aux poſitives, la ſoutangente ſera infinie, parceque la tangente De ſe détache en ce point-là de la ſoutangente, & lui devient parallele; & ſi l'on mene les tangentes en commençant au point D par tous les points D, C, C, A, c, c, d, les ſoutangentes α s négatives ſur $a\alpha$ s, iront en diminuant juſqu'à celle du point A, où la ſoutangente ſera zero, après quoi elles deviendront poſitives vers la gauche, & iront en augmentant juſqu'à la ſoutangente du point d, qui ſera infinie.

Après s'être rendu cette remarque bien familiere, on aura, 1°, une marque pour connoître quand on a une équation d'une courbe par raport à une droite donnée, ſi elle tourne ſa concavité ou ſa connexité vers cette droite; car en trouvant les ſoutangentes de deux ou trois points proches de l'origine, il n'y aura qu'à voir ſi elles augmentent poſitivement ou négativement; dans le premier cas elle eſt concave vers la droite donnée; dans le ſecond, elle eſt convexe.

On verra clairement, 2°, que quand une ſuite de grandeurs, comme de ſoutangentes ou autres, eſt d'abord poſitive, & devient enſuite négative, l'expreſſion indéterminée commune à chaque grandeur de cette ſuite, devient au point du paſſage égale à zero ou à l'infini; elle eſt égale à zero quand les poſitives ou négatives vont d'abord en diminuant & enſuite en augmentant; elle eſt égale à l'infini, quand elles commencent par augmenter, & qu'après le paſſage elles vont en diminuant; ce qu'il faut bien remarquer; & en ſuppoſant l'expreſſion indéterminée de chaque grandeur de cette ſuite égale à zero ou à l'infini, cela ſert à déterminer la valeur de l'inconnue de cette expreſſion, par exemple de l'ordonnée y, ou de la coupée x aux points des paſſages des grandeurs poſitives aux négatives, ou des négatives aux poſitives.

3°. On vient de remarquer que les tangentes aux ſommets du diametre ſont paralleles aux ordonnées; par conſequent ſi l'on conſidere le petit triangle dont du petite partie de la courbe eſt l'hypothenuſe, dx petite partie du diametre eſt un côté, dy petite partie de l'ordonnée eſt le ſecond côté, aux ſommets du diametre, on verra que l'hypothenuſe du ſe détache du petit côté dy, & lui devient parallele; & par conſequent le petit côté dx entre ces paralleles devient zero par raport à chacune des paralleles qui devient indéterminée ou infinie. De même les tangentes aux ſommets des ſeconds diametres conjugués aux premiers, ſont paralleles aux premiers diametres, c'eſt à dire, elles ſont paralleles aux coupées x; & à ces ſommets l'hypothenuſe du ſe détache du petit côté dx & lui devient parallele, & par conſequent le petit côté dy devient en cet endroit là zero par raport au côté dx & à l'hypothenuſe du, qui ſont devenus paralleles & indéterminés ou infinis.

4°. Cette derniere remarque donne lieu à cette autre, que les ordonnées y du côté concave de la courbe vont en augmentant depuis le ſommet juſqu'au diametre conjugué où eſt la *plus grande* y, & enſuite elles vont en diminuant juſqu'à l'autre extrémité du diametre; & au contraire du côté où la courbe tourne ſa convexité, les y vont en diminuant depuis l'origine juſqu'au point où ſe termine le diametre conjugué où eſt *la moindre* y, & enſuite les y vont en augmentant; ainſi au point de la plus *grande ordonnée* y du côté concave, & de la *moindre* du côté convexe, dans le petit triangle fait des du, dx, dy; dy eſt zero. En prenant auſſi toutes les paralleles aux coupées x, terminées au diametre conjugué, pour les x; on verra que depuis un des ſommets D ou d du diametre conjugué, les x vont en augmentant du côté concave juſqu'au ſommet A du premier diametre, où ſe trouve *la plus grande* x, aprés quoi les x vont en diminuant juſqu'à la ſeconde extrémité d du diametre conjugué; & au contraire du côté convexe en concevant une ligne hors de l'ellipſe parallele au diametre conjugué, les x priſes ſur cette parallele vont en diminuant depuis celle qui ſe termine au ſommet D du diametre conjugué juſqu'à la moindre de toutes les x qui ſe termine au ſommet A du premier diametre, aprés quoi elles vont en augmentant; par conſequent au point de *la plus grande* x du côté concave, & de *la moindre* x du côté convexe dans le petit triangle, le côté dx devient zero. D'où l'on voit que dx & dy ne peuvent pas être dans ces cas là chacune égales à zero, ni avoir un raport fini.

5°. Les remarques qu'on a faites par raport à l'ellipſe, pour fixer l'imagination, doivent s'apliquer à toutes les courbes où les appliquées vont en augmentant, & enſuite en diminuant du côté concave, & le contraire du côté convexe, & de même les coupées; & elles ſuffiſent pour en faire faire de ſemblables ſur toutes ſortes de courbes.

II.

Des quantités qu'on appelle les plus grandes & les moindres, & les formules pour les trouver.

DE'FINITION.

555. LORSQU'ON a l'équation d'une courbe où les x ſont les coupées, & les y les ordonnées, & qu'on veut ſçavoir le point où ſe trouve la plus grande ou la moindre ordonnée y, comme auſſi celui de la plus grande ou de la moindre coupée x, c'eſt à dire la valeur déterminée de x qui convient a ce point de la plus grande ou de la moindre ordonnée, &, ſi l'on veut, celle de cette plus grande ou moindre y; & de même la valeur de y ou de x au point de la plus grande ou moindre x;

cela s'appelle une queſtion ou un problême *des plus grandes & des moindres.*

Comme auſſi ſi l'on a une quantité changeante compoſée de ſeules x ou de ſeules y, & que cette quantité aille en augmentant, & enſuite en diminuant ; ou en diminuant, & enſuite en augmentant, & qu'on veuille ſçavoir de toutes ces quantités changeantes qui ont une même expreſſion, celle qui eſt la plus grande ou la moindre ; il faut concevoir cette quantité comme étant l'ordonnée d'une courbe, & la ſuppoſer, ſi elle ne contient que des x, égale à y ; ou, ſi elle ne contient que des y, égale à x ; & concevoir que les x ſont les coupées, & y l'ordonnée égale à la quantité propoſée ; & il s'agira de trouver la plus grande ou la moindre y comme dans les courbes ; & ce ſera auſſi *un Problême des plus grandes & des moindres.*

Formules pour trouver les plus grandes & les moindres.

556. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$ eſt la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* y ; & $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$ ſera la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* x ; où ſimplement $dy = 0$, & $dy =$ à l'infini, qu'on marque ainſi $dy = \infty$, ſont les formules pour trouver les *plus grandes* & les *moindres.*

USAGE DES FORMULES.

QUAND on a l'équation d'une courbe où il faut trouver les plus grandes & les moindres, ou une expreſſion d'une quantité changeante reduite à l'équation d'une courbe, en la ſuppoſant égale à une changeante y ; il faut prendre les differences de cette équation, & reduire au premier membre $\frac{dy}{dx}$, & le reſte de l'équation differentielle où il n'y a plus de dy ni de dx au ſecond membre ; & quand on cherche la plus grande ou la moindre y, prendre pour formule $\frac{0}{dx}$; c'eſt à dire, ſuppoſer que le numerateur eſt zero, & tirer de l'équation qui en reſulte, en y employant auſſi l'équation même de la courbe propoſée, la valeur ou les valeurs de x ; & l'on aura la valeur déterminée de x au point de la plus grande ou de la moindre y ; & l'on peut auſſi déterminer la valeur de cette plus grande ou moindre y, puiſque x eſt déterminée. Si l'on cherche la plus grande ou la moindre x, il faut ſe ſervir de la formule $\frac{dy}{0}$, c'eſt à dire, ſuppoſer le dénominateur égal à zero, & par cette équation déterminer les valeurs de x & de y. Si l'on ne peut pas trouver de valeurs, ni zero, pour la plus grande ou moindre x & y, & qu'on n'en trouve que d'imaginaires, c'eſt une marque que la courbe n'en a pas. On diſtinguera quand la quantité que l'on trouve par la methode eſt une plus grande ou une moindre, *par la ſeconde Remarque, nom. 2.*

Pour trouver, par exemple, les *plus grandes* & les *moin-*
*379. *dres* de la courbe dont l'équation eſt* $\frac{a}{p}yy = \frac{1}{4}aa - xx$; 1°. on prendra les differences de l'équation, & l'on aura $\frac{a}{p}ydy = -xdx$; ce qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{ay}$; & en mettant au lieu de y ſa valeur $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-px}{a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}}$.

2°. On ſupoſera, ſuivant la formule $\frac{0}{dx}$, le numerateur $= 0$; ce qui donnera $-px = 0$; & diviſant par $-p$, on aura $x = 0$: c'eſt la valeur de x au point de la plus grande y. En ſubſtituant cette valeur de $x = 0$ dans la propoſée, au lieu de x, on trouvera la plus grande $y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Pour trouver la plus grande x, on ſuppoſera, ſuivant la formule $\frac{dy}{0}$, le dénominateur $a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx} = 0$; ce qui donnera $x = \frac{1}{2}a$, qui eſt la valeur de la plus grande x; & la ſubſtituant dans la propoſée, au lieu de x, on trouvera que la valeur de y au point de la plus grande x, eſt $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{1}{4}ap} = 0$; c'eſt à dire, y eſt zero à ce point là.

voyez p. 912.

REMARQUES.

I.

557. On remarquera que quand on trouve pluſieurs valeurs de x pour la plus grande ou la moindre y, ordinairement la courbe a pluſieurs y plus grandes ou moindres, ou les unes moindres, & les autres plus grandes; ce qu'il faut auſſi remarquer quand on cherche les plus grandes ou les moindres x. On pourra les connoître par la 3^e^ remarque ſuivante.

II.

558. On remarquera auſſi que $\frac{0}{dx}$ eſt la même choſe que dy infiniment petite par raport à dx, ou $dy = 0$; & $\frac{dy}{0}$ eſt la même choſe que dy infinie par raport à dx, ou dy égale à l'infini.

III.

559. Enfin ſi l'on fait attention aux points de la plus grande &

de la moindre y, auſquels la tangente eſt parallele aux x; on verra que y n'y reçoit aucun accroiſſement ni diminution, & qu'ainſi dy eſt zero à ces points : & qu'il en eſt de même de dx, qui devient zero aux points de la plus grande & de la moindre x, auſquels la tangente eſt parallele aux y, x ne recevant à ces points là ni accroiſſement ni diminution, & où par conſequent dy eſt infinie par raport à dx, n'étant plus bornée par la petite baſe du, & en étant détachée en ce point là : Mais que ſi dx & dy devenoient chacune zero, ou avoient un raport fini, il n'y auroit ni *plus grande* ni *moindre*.

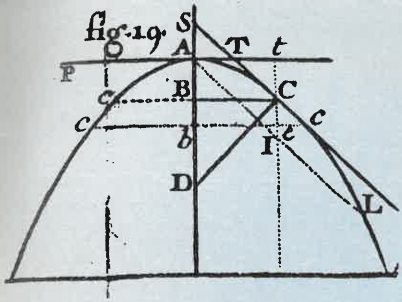

fig. 19.

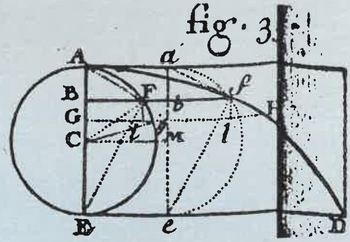

fig. 3.

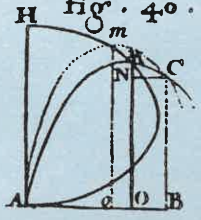

fig. 40.

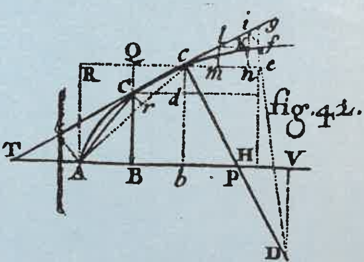

fig. 42.

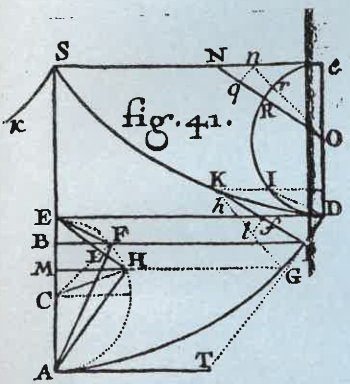

fig. 41.

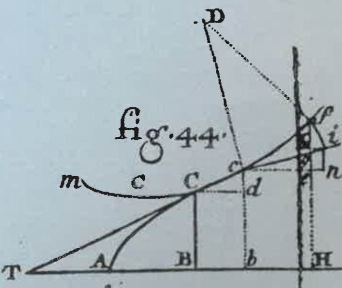

fig. 44.

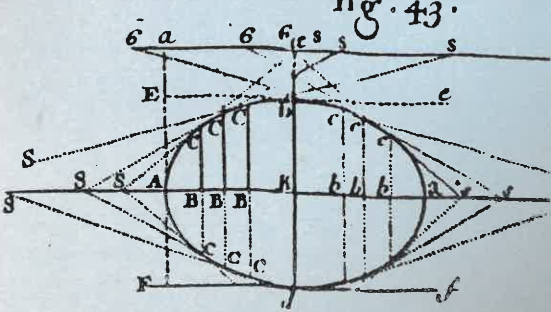

fig. 43.

IREM de l'Université de PARIS 7

Octobre 1989

L'*Analyse démontrée (1708)* de REYNEAU est le premier ouvrage didactique exposant le calcul infinitésimal après les découvertes du XVII~~I~~ème siècle et exploitant, à la fois, les idées de Newton et de Leibniz.
L'extrait du deuxième tome, ici reproduit, donne les bases du calcul différentiel et de ses applications.