

ENONCES D'EXERCICES DE MANUELS DE SECONDE ET
REPRESENTATIONS DES AUTEURS DE MANUELS

PAR A. ROBERT, J. ROBINET

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ-PARIS VII

Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels (A. Robert, J. Robinet).

Plan

Introduction : des énoncés d'exercices aux apprentissages des élèves : qu'est-ce qui gouverne les différents choix des auteurs de manuels ?

I La problématique des représentations métacognitives

- 1) définitions
- 2) intérêt pour le didacticien
- 3) premiers résultats, difficultés méthodologiques, nouvelles questions

II Exercices des manuels de seconde indifférenciée

- 1) méthode suivie
- 2) objectifs a priori des exercices
- 3) analyse des énoncés : caractéristiques et résultats

III Représentations des auteurs de manuels

- 1) analyse des indications d'ordre métamathématique dans les exercices
- 2) analyse des avant-propos
- 3) qu'en inférer sur les représentations ?
- 4) des alternatives et leurs conséquences (représentations des auteurs de l'article)

Conclusion : y aurait-il un bon choix pour les manuels ? retour à la pratique scolaire et aux représentations.

Plan détaillé de la partie II-3

a) caractéristiques de la série d'exercices, place de l'exercice dans la série.

b) forme de l'énoncé et des questions posées : de l'exercice à l'énoncé

* fermeture/ouverture de la consigne, indications

* nombre d'étapes dans chaque question, nombre de questions

* indices externes

* implicites

c) outils à utiliser

* lesquels, variété ...

* nature des indications

* changements de cadres

* nombre de méthodes possibles

d) nature de l'activité à déployer : analyse de la tâche

Introduction : des énoncés d'exercices aux apprentissages des élèves :
qu'est ce qui gouverne les différents choix des auteurs de manuels ?

Certes les exercices des manuels ne sont utilisés ni in extenso ni même régulièrement par les élèves, le professeur en rajoute certains et limite le choix pour d'autres ; enfin la résolution des exercices peut avoir des modalités très différentes, du devoir en temps limité en classe au devoir à la maison cherché collectivement. Il manque, en particulier, à toute analyse "hors de la classe" de ce type, le versant "connaissance du contrat et des coutumes de la classe" pour inférer les activités des élèves à partir des énoncés des exercices. Les modes d'évaluation peuvent tout spécialement modifier les pratiques effectives des élèves sur des textes d'exercices apparemment semblables.

Pour prendre un exemple caricatural, et hors de notre champ précis, à l'université on assiste souvent, à l'heure actuelle, à une véritable contradiction entre une certaine logique de la réussite (aux examens), et la logique de la compréhension : la première n'exige que l'apprentissage formel de la mise en fonctionnement d'un certain nombre d'algorithmes dont l'emploi est toujours téléguidé, la seconde, si elle est trop partielle, peut déstabiliser momentanément les mises en fonctionnement "bêtes" évoquées ci-dessus, et conduire à de moins bons résultats (avec, qui plus est, plus de fatigue intellectuelle inutile...). Par suite, les exercices sont résolus par les étudiants dans la seule perspective de reproduction le jour de l'épreuve et on ne peut rien en induire d'autre du côté de leur apprentissage ...

Donc on ne peut se baser sur le seul manuel pour avoir une idée des conséquences des exercices sur les apprentissages, car on ne sait ni lesquels ont été faits ni comment.

Cependant on peut estimer que la collection des exercices faits est incluse à quelque chose près dans la collection des exercices proposés par les manuels. Ceci nous autorise à étudier quand même (avec prudence) le rapport entre ces énoncés et les activités potentielles des élèves, en ayant en vue les conséquences possibles sur les apprentissages.

De plus on peut se demander si tout texte d'exercice peut amener à n'importe quelle pratique ou si, au contraire, certains énoncés

n'induisent pas déjà, en eux-mêmes, des mises en fonctionnement nécessairement très limitées par exemple. Il y a même certainement un rapport entre les habitudes que prennent les élèves et le type d'énoncés auxquels on les a habitués.

Dans ces conditions, le problème du choix des énoncés prend une réelle importance et il est intéressant de chercher à comprendre ce qui différencie les choix : nous allons les étudier et montrer dans ce travail qu'une partie des choix et des différences constatés ne sont pas aléatoires ; on peut les mettre en rapport avec certaines représentations de l'apprentissage répandues dans le milieu des enseignants et renforcées par là-même.

Nous avons attribué aux seuls auteurs des manuels ces représentations, en réalité il y a une dialectique très serrée entre les représentations des enseignants (et les auteurs en sont en général) et ce qui est présenté dans les manuels. Il y aurait là un autre sujet de recherche ! Nous prions donc les éventuels auteurs lisant ces lignes (et d'ailleurs nous en sommes...) de ne pas se sentir personnellement visés.

Dans la première partie de ce travail, nous revenons sur cette notion de représentation, en précisant ce que nous entendons par là, en montrant la nécessité de leur prise en compte et en citant quelques résultats actuels sur les représentations des enseignants.

Dans la deuxième partie nous analysons les énoncés d'exercices, en nous basant sur quelques chapitres de différents manuels de seconde. Dans la dernière partie nous en inférons certaines représentations des auteurs, que nous mettons en rapport avec les résultats évoqués dans la première partie.

En conclusion, nous proposons des alternatives et des hypothèses sur les conséquences des différents choix possibles sur les apprentissages et/ou les représentations métacognitives des élèves et nous terminons en revenant rapidement sur le problème (difficile) de la présentation du choix des exercices dans les manuels.

I La problématique des représentations métacognitives en mathématiques.

Qu'est-ce qui empêche certains enseignants de mathématiques de se taire en classe plus d'une minute, alors même qu'ils ont posé une question non triviale aux élèves ?

Qu'est-ce qui amène certains enseignants de mathématiques, en proportion relativement stable depuis des années, à faire travailler leurs élèves en petits groupes, et d'autres à rejeter systématiquement, voire violemment, cette forme d'activité ?

Ces petites questions, qu'on pourrait multiplier, relèvent en fait d'une problématique plus globale d'essai de compréhension des pratiques des enseignants de mathématiques : cette analyse est basée sur le constat, encore empirique, que les conduites en classe des enseignants ne sont pas sans cesse improvisées, qu'elles relèvent de certains choix globaux, qui ne changent pas du jour au lendemain, même si des prises de décisions peuvent être instantanées, guidées par l'actualité de la classe.

Par exemple, pour interpréter des séquences d'enseignement qu'ils n'ont pas conçues eux-mêmes, les enseignants ne vont pas particulariser leurs conduites. Au contraire ils vont adapter les consignes à leurs habitudes (compte-tenu des contraintes conjoncturelles des classes concernées).

Certes, les choix qui sont à l'origine de ces pratiques habituelles ne sont pas toujours entièrement explicites, par ailleurs ils dépendent de la personnalité et de l'histoire de l'enseignant. Mais dans tous les cas ils traduisent au moins partiellement, en terme de conduites en classe, les idées "actuelles" de l'enseignant, ses conceptions, ses convictions sur les mathématiques, la manière de les enseigner et de les apprendre.

Avant d'aborder la question de la nécessité pour le didacticien de s'intéresser à cet aspect des phénomènes liés à l'enseignement, nous allons le préciser en faisant appel aux travaux des psychologues sociaux sur les représentations.

1) Définitions

Un certain courant de psychologues sociaux considère en effet, à la suite de Moscovici, que c'est précisément pour nous ajuster au monde,

nous y conduire, identifier et résoudre les problèmes qui s'y posent que nous fabriquons des représentations (cf. D. Jodelet, Les représentations sociales, PUF 1989, p.31).

Ces représentations sont sociales, car issues tout autant de notre confrontation aux autres qu'au monde des objets qui nous entourent.

Dans l'ouvrage de synthèse déjà cité sur le sujet, D. Jodelet s'en explique ainsi (cf. p36-37) :

"On reconnaît généralement que les représentations sociales, en tant que systèmes d'interprétation régissant notre relation au monde et aux autres, orientent et organisent les conduites et les communications sociales."

Cependant dans son ouvrage Coopération, compétition et représentations sociales (DelVal, 1987), J.C. Abric définit même des représentations qu'il ne qualifie plus de sociales, mais qui sont en quelque sorte les traces individuelles d'une même représentation sociale (plus collective). Nous allons citer largement sa contribution, dans la mesure où nous lui emprunterons une partie de ses définitions.

L'auteur commence par poser la définition suivante (citant Moscovici) :

La représentation est le produit et le processus d'une activité mentale par laquelle un individu ou un groupe reconstitue le réel auquel il est confronté, et lui attribue une signification spécifique.

Il ajoute

Cette signification résulte directement des attitudes et des opinions, conscientes ou non-conscientes, développées par l'individu ou le groupe. La représentation est donc un reflet non pas de l'objet lui-même *mais des relations* complexes, réelles et imaginaires, objectives et symboliques, que le sujet entretient avec cet objet. Ces relations font de la représentation *un système symbolique organisé et structuré* dont la fonction essentielle est l'appréhension et le contrôle du monde par le sujet, en lui permettant de le comprendre et de l'interpréter. Par là la représentation permet l'adaptation du sujet et elle sera un élément essentiel pour guider ses comportements.

Il développe ensuite les deux aspects représentation comme produit et comme processus, avant d'en donner les caractéristiques et d'en évoquer les évolutions.

De la description de la représentation produit, nous retiendrons d'une part les éléments constitutifs (informations du sujet, attitudes et opinions) et d'autre part la structure interne. Ainsi l'auteur écrit-il :

Cet ensemble d'informations, d'attitudes et d'opinions est par ailleurs organisé et chaque élément de l'ensemble ne prend de signification qu'en fonction de sa place dans la structure, et des éléments qui sont en relation avec lui. L'analyse de la représentation nécessite donc le repérage des *éléments centraux de la représentation*.

Nous appelons élément central tout élément qui joue un rôle privilégié dans la représentation en ce sens que les autres éléments en dépendent directement car c'est par rapport à lui que se définissent leur poids et leur valeur pour le sujet. Cet élément central peut être par exemple une attitude fortement marquée du sujet par rapport à l'objet de la représentation, attitude qui donne dès lors une signification particulière à toutes les informations que le sujet reçoit et intègre.

Il poursuit en empruntant à Moscovici "son schéma explicatif de la dynamique de la constitution d'une représentation" en 4 phases. Les voici, telles que l'auteur l'écrit lui-même :

- Première phase : de l'objet au modèle figuratif (sélection et décontextualisation des informations)
 - Deuxième phase : du modèle figuratif à l'instrument de catégorisation (le modèle prend un statut d'évidence)
 - Troisième phase de la catégorisation au modèle actif (du statut d'évidence au contenu actif servant à diriger la conduite et à donner un sens aux événements)
 - Quatrième phase : la représentation
- Citons l'auteur

Au terme de ce processus la représentation apparaît comme constituée. Elle est un système cohérent et hiérarchisé, organisé autour du noyau imageant, elle est une vision du monde. Mais une vision fonctionnelle et normative permettant à l'individu de donner un sens à ses conduites, de comprendre la réalité à travers son propre système de référence, et de développer une activité d'assimilation et d'appropriation de cette réalité.

Les éléments essentiels qui vont permettre le maintien de la fonctionnalité du système sont les outils fondamentaux produits et intimement liés à la représentation :

- *un système d'interprétation* dont découlent les significations attribuées aux informations mais également les attentes et anticipations développées par le sujet. Le décodage dans la représentation est à la fois inductif et déductif.
- *un système de catégorisation* qui aboutit à la constitution pour le sujet d'une typologie des personnes ou des événements, instrument essentiel de la représentation, marqué par sa signification centrale, et permettant d'organiser et de structurer l'environnement dans un cadre cognitif et idéologique cohérent et non-contradictoire avec celui du sujet.
- *un langage spécifique* ou "langage thématique" (Moscovici, 1961) : la représentation appelle et nécessite la mise en oeuvre d'un langage qui lui est propre et qui vise "à répondre aux exigences du changement et de la remise en ordre de l'état des choses" (Moscovici, op. cit., p. 335). La nature et le type de mots utilisés, le vocabulaire et son étendue sont également des symptômes de la représentation et un moyen de la consolider.

Tout naturellement, sont dégagées ensuite les caractéristiques suivantes des représentations :

Toute représentation est constituée de trois éléments fondamentaux : un noyau central, un ensemble d'informations, d'attitudes et de croyances organisé autour de ce noyau central, et un système de catégorisation.

Revenons brièvement sur chacune d'elles.

En ce qui concerne le noyau central, l'auteur esquisse diverses analyses depuis 1927, et conclut

Il nous semble pour notre part que la nature du noyau central dépend à la fois :

- a) des caractéristiques individuelles du sujet et en particulier de la nature de son implication avec l'objet de la représentation et de ses attentes,
- b) des caractéristiques plus proprement sociales de l'objet, c'est-à-dire sa relation avec les normes et valeurs du système social dans lequel il baigne,
- c) de la finalité de la situation dans laquelle s'inscrivent le sujet et l'objet, et des objectifs explicites ou implicites du sujet qui élabore la représentation.

On peut distinguer deux dimensions fondamentales de ce noyau central, qui seront d'ailleurs les dimensions de la représentation :

Une dimension fonctionnelle : qui, si elle est prépondérante, privilégie dans la représentation les éléments directement perçus comme pertinents pour l'efficacité dans l'action.

Une dimension normative : susceptible de privilégier des jugements, stéréotypes, opinions admis par le sujet ou le groupe dans lequel il s'insère.

Il passe ensuite en revue les autres éléments de la représentation et insiste plus sur

" le système de catégorisation mis en oeuvre dans la représentation dans la mesure où il nous semble être l'outil essentiel de la dynamique de constitution, de maintien ou d'évolution de cette représentation."

Ainsi

La fonction centrale de la catégorisation est de permettre la découverte, la compréhension et l'organisation de la réalité.

L'environnement de l'individu est trop complexe pour être assimilé et perçu directement. La première fonction de la catégorisation est donc la *réduction* de cet environnement, par son découpage et son regroupement en grandes catégories dont le maniement est plus simple, le nombre moins étendu.

Cette réduction permet par ailleurs une *systématisation* de l'environnement. Le système de catégories instaure en effet un ordre dans la réalité. La catégorisation découpe et organise le réel, et par là lui donne une certaine structure facilitant la prise de connaissance et le contrôle des phénomènes. Cette systématisation garantit par ailleurs les possibilités de *communications* et leur efficacité. Instrument de communication la catégorisation est parallèlement un instrument *d'orientation*, un guide directeur pour le comportement.

Enfin la catégorisation permet la *cohérence interne* de la représentation, et surtout le maintien dans le temps de cette cohérence. Car l'existence de catégories produit une nécessaire activité du sujet : cette activité d'appropriation du réel à travers un système pré-établi entraîne un processus de filtrage des informations, ou même une réinterprétation d'informations apparemment contradictoires et qui doivent donc être transformées pour trouver leur place dans le système cognitif du sujet.

Quant aux processus mis en oeuvre dans cette catégorisation, ce sont les suivants (en reprenant les termes mêmes de l'auteur) :

- analogie (avec économie éventuelle d'information et fonction d'organisation)
- inférence (avec accentuation des similitudes/différences, aboutissant à un remodelage de l'objet)
- anticipation ... " L'anticipation actualise la catégorisation, comme la catégorisation facilite et détermine le type d'anticipations que le sujet produit. "
- compensation ... " Le processus de compensation est un processus qui vise le maintien du système existant, en évitant ou limitant les contradictions, et la cohérence cognitive du sujet. "

Enfin ces représentations, qui correspondent à une "activité de reconstruction mentale de la réalité (de l'objet) par un individu", sont très stables (d'où leur intérêt pour nous).
Ainsi, s'intéressant à leur évolution, l'auteur écrit

Il nous reste à dire quelques mots sur les processus d'évolution et de transformation des représentations. Dans la mesure où ces représentations sont des états organisés, stables et relativement équilibrés, toute transformation de l'un des éléments de la relation -sujet ou environnement- entraîne une transformation de la représentation dans le sens du rétablissement de l'équilibre ainsi compromis. C'est pourquoi, toute transformation de la représentation portera prioritairement sur la *transformation des éléments périphériques*, sans que le noyau central soit remis en cause. Car la remise en cause du noyau central entraînerait une transformation complète de tout le système, un bouleversement complet de l'univers d'opinions du sujet. L'évitement de cette remise en cause, comme le principe d'économie qui régit la plupart des phénomènes cognitifs, interdisent donc une transformation du noyau central tant que les éléments nouveaux peuvent être intégrés au prix d'une transformation mineure des éléments périphériques.

Ainsi, les idées (exprimables, préconscientes) des enseignants (resp. des élèves) sur les mathématiques et la manière de les apprendre et de les enseigner, envisagées dans leur relation dialectique potentielle avec les pratiques, nous paraissent bien relever de la catégorie des représentations introduites par les psychologues sociaux. Mais comme elles ne concernent qu'un aspect de la vie professionnelle des enseignants (ou de celle des élèves), nous avons adopté le terme "représentations métacognitives" pour les désigner. L'adjectif qualifie en effet la spécification que nous apportons au terme.

Reste donc tout un volant de la relation mathématiques/enseignants (resp. élèves) que nous n'incluons pas dans notre acception du terme, c'est tout ce qui correspond à l'intervention des facteurs inconscients. Reprenons en particulier nos petites questions du début de ce paragraphe: si un enseignant ne supporte pas de se taire ou de faire travailler en petits groupes, c'est peut-être tout autant, voire plus, pour des raisons liées à sa personnalité profonde que pour les conceptions qu'il va développer pour s'en expliquer (et qui ne font que rationaliser les précédentes). Mais le résultat, c'est cette conception (exprimable le cas échéant) ; l'inconscient contribue sans doute lui aussi, tout comme le social et en interaction avec lui, à la "fabrication" des représentations, mais c'est essentiellement sur le produit que nous avons choisi de travailler, non sur le processus.

Ce parti pris se justifie par plusieurs raisons. Il y a une raison méthodologique : nous pouvons avoir accès aux représentations exprimables par leurs traces, directes ou indirectes, sous forme de discours (écrit ou oral) ; et nous pouvons les mettre en relation (avant ou après leur expression) avec des conduites observables, en situation de classe par exemple.

Ceci est renforcé par le fait suivant, vérifié a posteriori : il y a, par delà les différences individuelles, de grandes régularités dans les représentations, correspondant sans doute aux médiations d'un social, de fait assez peu diversifié, sur les individus.

Une autre raison tient à notre conviction qu'on peut avoir accès par le rationnel aux composantes rationnelles des représentations méta-

cognitives : cela concerne en particulier l'activité mathématique effective des individus (contenu et forme).

Cela peut d'ailleurs impliquer, à terme, un projet d'enseignement visant à la construction chez les élèves de certaines représentations (ou, peut-être, visant à empêcher l'adoption de certaines représentations par les élèves).

Nous avons ainsi privilégié ce à quoi nous avons accès directement ou indirectement mais sans faire appel ni à l'histoire des individus ni à des interprétations psychanalytiques, prenant acte de leur intérêt éventuel pour comprendre en particulier les génèses.

Mais la prise en compte de ces représentations métacognitives intéresse-t-elle le didacticien ?

2) Intérêt pour le didacticien

Les raisons a priori du didacticien d'inclure les représentations des enseignants (et des élèves) dans son cadre théorique sont à la fois internes et externes au champ de la didactique des mathématiques.

Externes d'abord sont les raisons qui tiennent à la prise en compte des problèmes liés à la transmission de résultats de la recherche à des enseignants de mathématiques.

Les difficultés liées à une transmission "correcte" de séquences didactiques par exemple sont bien connues.

Les exemples de dénaturation involontaire des consignes sont maintenant classiques. Citons pour mémoire les interprétations suivantes (divergentes) de la consigne "laisser chercher les élèves une demi-heure" : cela va de l'enseignant qui n'intervient effectivement pas pendant ce temps, à celui qui, circulant silencieusement dans les rangs, ne peut résister à l'appel de détresse (même muet) des élèves qui sèchent (ou à rectifier, en passant, une énorme erreur qui lui a chatouillé les oreilles) ; et on voit aussi des enseignants qui ne se taisent pas plus d'une minute, convaincus comme ils le sont de la vertu quasi-exclusive des explications (claires). Et les activités des élèves ne sont pas les mêmes suivant ces attitudes : rectifier une erreur signalée par l'enseignant est plus facile que la trouver avant de la

rectifier, mais peut-être moins formateur ; avoir une indication sur la validité d'une piste est plus sécurisant que de rester dans une certaine incertitude (avant d'avoir trouvé un résultat), mais pour une prochaine fois la deuxième façon risque de laisser plus de traces ; la non-intervention de l'enseignant amène les élèves à développer plus des stratégies de contrôle, à se poser des questions de méthode, à prendre conscience qu'on peut se passer de l'enseignant, à découvrir les diversités (entre eux) et à en bénéficier...

On peut résumer en disant que la première consigne explicite citée ci-dessus semble favoriser un réel investissement "scientifique" des élèves dans le problème, en rapport avec une certaine autonomie, alors que d'autres interprétations peuvent avoir d'autres effets sur les activités des élèves.

Autrement dit, et c'était notre point de départ, une même consigne est interprétée de plusieurs façons par différents enseignants, et ceci avec éventuellement des conséquences tout à fait différentes sur les activités des élèves : nous attribuons en partie ces divergences d'interprétation aux différentes représentations en présence, dont nous prétendons qu'elles conditionnent les pratiques des enseignants et des élèves.

Mais d'autres questions se posent, qui ne sont plus du domaine de la transmission ; en particulier, si on peut apparemment corréler différentes attitudes de l'enseignant (et donc, selon nous, ses représentations métacognitives) à des modifications des activités effectives des élèves, par delà cette corrélation, y a-t-il des conséquences sur l'apprentissage des élèves, des liens de cause à effet ? Certaines conditions, comme la qualité de l'investissement des élèves, sont-elles nécessaires pour amorcer un apprentissage chez certains élèves ? Ou au contraire, par un système d'adaptation quelconque, les élèves "compensent-ils" les conséquences de tel ou tel système de représentation de leur enseignant et les résultats en terme "d'apprentissage", pour parler rapidement, sont les mêmes ?

Et quelles sont les influences respectives des représentations des enseignants successifs et des activités des élèves sur la fabrication de leurs représentations d'élèves ?

Voilà des questions qui intéressent le didacticien, et qui dépassent largement la simple transmission.

Cependant, le didacticien peut simplement imputer certains échecs dans la reproduction des séquences aux enseignants, sans rentrer dans des détails qui ne sont pas directement de son domaine d'investigation. Et même s'il en arrive, au contraire, à chercher à mettre au point une formation qui tienne compte de ces distorsions éventuelles, la recherche de leurs causes et plus encore celle des "remèdes" sort du domaine strict de l'étude du rapport enseignement/apprentissage.

C'est le cas des nouvelles questions qui se posent, notamment sur le problème de ce qu'on pourrait appeler une certaine "compatibilité" des représentations. Est-ce que des enseignants ayant des représentations analogues ou compatibles, au sens où ces enseignants auront des comportements analogues dans des situations comparables, vont engendrer chez des élèves du même type des apprentissages comparables ?

Mais les représentations des enseignants peuvent très bien ne coïncider que partiellement avec celles des auteurs de séquences par exemple. Les différences vont s'avérer alors d'autant plus subtiles qu'elles correspondent à des convictions sinon cachées, du moins pas toujours explicites.

Par exemple la conviction que les explications aident les élèves (en mathématiques) n'est que partiellement retenue par les didacticiens : à certains moments ils estiment que le silence de l'enseignant est plus efficace que n'importe quelle explication aussi lumineuse soit-elle, tout en réservant les mérites (bien reconnus) à la phase d'institutionnalisation (1)...

Il faudrait donc peut-être poser la question précédente en terme de seuil de compatibilité des représentations : au-delà de quelles différences peut-on s'attendre à des conséquences différentes certaines sur les apprentissages (toutes conditions égales par ailleurs) ?

On voit là s'esquisser un champ de recherches spécifique, qui nécessite sans doute des méthodes particulières, peut-être distinctes

(1) Ceci est bien sûr basé sur les hypothèses adoptées sur l'apprentissage (nécessité de la phase individuelle de construction des connaissances), qui nourrissent les représentations.

de celles de la didactique des mathématiques (2).

C'est pourquoi il est important de souligner qu'il y a d'autres raisons, internes à la didactique des mathématiques, de s'intéresser à ces représentations métacognitives.

Et d'abord un souci de contrôle expérimental.

De façon générale, toute ingénierie comporte des moments expérimentaux. Une première série d'expériences en classe permet de mettre au point les séquences ; elle doit être souvent suivie d'une autre série à plus grande échelle, permettant de mieux délimiter les domaines de validité des séquences et de mieux définir ce qu'il y a à transmettre aux enseignants qui seraient intéressés par une utilisation des séquences. Le plus souvent, pour mieux observer et pour ne pas faire intervenir d'éléments personnels parasites, le(s) chercheur(s) qui a conçu l'ingénierie n'expérimente pas lui-même (ni sur ses élèves) ; c'est donc un enseignant qui est chargé de l'expérience et, même s'il est associé à l'équipe de chercheurs, c'est en tant qu'enseignant qu'il doit assurer cette participation. D'ailleurs, si c'est le chercheur qui expérimente, le problème existe aussi, on ne peut être à la fois juge et partie, et ses réactions sur le vif doivent être contrôlées.

D'où le problème suivant, souligné d'ailleurs par D. Grenier en conclusion de sa thèse : comment être sûr que ce qui va se passer est bien ce qui a été prévu (compte-tenu de la réalité de la classe qui introduit nécessairement des éléments contingents), comment transmettre l'esprit des séquences ?

Car le didacticien ne peut pas tout dire ni tout prévoir, il reste nécessairement des moments où l'enseignant doit prendre des décisions en fonction des réactions des élèves. Cela fait même partie intégrante de l'incertitude du côté de l'enseignant, garantie par certains choix à l'origine de nombreuses ingénieries (type dialectique outil/objet par exemple).

Nous voilà ainsi ramenés à la question des conduites en classe, des choix qui les gouvernent et donc des représentations métacognitives des

(2) Et distinctes aussi de celles de la psychologie sociale, trop éloignées des pratiques et des contenus.

expérimentateurs.

Et la question se pose à nouveau, très générale, , de la prise en compte dans tout enseignement de mathématique des représentations métacognitives des différents partenaires pour interpréter les résultats en terme d'apprentissage.

Précisément, ce qui nous questionne ici, est le rapport (dialectique) entre les représentations métacognitives des enseignants, leurs choix globaux de gestion de leur enseignement et leurs conduites en classe, et les apprentissages. Ces derniers mettent en jeu le sens que les élèves donnent à leurs activités, qui est lié à leurs propres représentations métacognitives d'élèves.

En particulier dans quelle mesure des représentations différentes engendrent-elles des choix différents, des conduites différentes et des apprentissages différents ? (et la réciproque, déjà évoquée, dans quelle mesure peut-on définir des représentations "analogues", ou au moins compatibles, qui engendreraient des apprentissages "analogues" pour des populations comparables ?).

La question est complexe, puisqu'il y a deux articulations au moins, celle des représentations et des choix de ce qui est du ressort de l'enseignant, et celle de ces choix et des apprentissages des élèves, ce deuxième rapport pouvant être modulé par leurs réactions.

Certes, on peut nous objecter que les notions de contrat didactique et de coutume de la classe incluent toutes ces variables "individuelles". Mais comment prendre en compte les différences de significations que les acteurs du jeu dans la classe attribuent aux pratiques des uns et des autres ?

On ne peut peut-être pas toujours le réduire à du générique : ce qui est en amont de la situation didactique frappe à la porte ...

Ainsi, des questions de contrôle expérimental, des questions de transmission large, et, peut-être, des raisons de compréhension profonde de ce qui se joue dans la classe de mathématiques, amènent à un même constat : il est nécessaire d'en savoir plus sur le rapport dialectique entre les représentations des enseignants et leurs pratiques, en relation avec les apprentissages des élèves. Et cette dimension ne peut

être réduite selon nous à la seule prise en compte (néanmoins indispensable) du contrat didactique et des coutumes de la classe .

Par ailleurs, les résultats obtenus pourront s'avérer utiles en formation des enseignants : ils contribueront à mieux cerner ce qu'il faut transmettre (l'esprit et non la lettre) et comment (on ne peut pas faire l'économie d'un travail explicite sur les représentations en présence).

Cela impliquerait qu'à ce niveau c'est par un abord de type "méta" qu'il faut attaquer, d'où l'actualité de la question déjà largement abordée en ergonomie de la transmission de méthodes.

3) premiers résultats, difficultés méthodologiques, nouvelles questions.

Reprenant les analyses des psychologues sociaux citées ci-dessus nous avons donc fait l'hypothèse que l'on peut modéliser de façon productive une partie de ce qui permet à l'enseignant d'agir en classe de mathématiques par ce concept de représentation métacognitive.

Schématiquement, ces représentations sont caractérisées par leur noyau central, sans cesse renforcé (en général) par ce qui arrive et par divers systèmes d'interprétation, liés aux conduites.

Nous avons donc cherché ce qui pouvait jouer le rôle de noyau central dans les éléments sur les représentations des enseignants dont nous pouvions disposer.

Ces éléments ont été dans un premier temps des traces écrites ou orales, directes ou indirectes, provoquées ou spontanées, des représentations exprimées par des enseignants. Nous parlons de traces indirectes lorsque les questions posées, le matériel examiné, ne portent pas explicitement sur les représentations mais permet d'en étudier des émergences.

Nous avons ainsi utilisé divers questionnaires et interviews - traces directes ou indirectes, provoquées - (les textes sont joints en annexe). Nous avons essayé de mettre en rapport certaines de ces interviews et des transcriptions de séquences en classe (traces indirectes spontanées). Nous avons enfin analysé du point de vue des

représentations métacognitives exprimées par les auteurs le bulletin de l'APM depuis 1968 (traces indirectes spontanées).

Nous allons donner ici les premiers résultats, tirés du questionnaire sur des expressions directes des représentations sur les mathématiques et leur enseignement (26 réponses, orales et écrites), de l'analyse du bulletin de l'APM depuis 1968 et de l'examen superficiel de deux transcriptions de séances de cours.

Ces résultats sont donnés très rapidement, sans rentrer dans les détails (présentés en [1]), dans la mesure où il y a lieu d'affiner les méthodes d'investigation pour aller plus loin.

Le problème posé en effet par ce type de matériel, qui permet tout de même de "dégrossir" le terrain, est qu'on n'a pas de moyen de vérifier la pertinence des déclarations, leur cohérence avec les pratiques effectives ; de plus les réponses (limitées nécessairement) privilégient (en le linéarisant) un aspect des représentations, dont la diversité, voire les contradictions, la globalité en somme, ne sont pas toujours restituées.

A) Le "noyau central", premiers résultats

Une première analyse des représentations métacognitives des enseignants de mathématiques nous a amenées à préciser que ce que nous avons appelé "noyau central" de ces représentations.

Nous avons trouvé que les caractéristiques des réponses au premier questionnaire et les expressions plus indirectes trouvées dans le bulletin de l'APM relèvent de trois dimensions ou entrées (complémentaires), la dimension épistémologique (conception des mathématiques), la dimension sociale (rôle social du professeur de mathématiques et des mathématiques), et une dimension cognitivo-pédagogique, regroupant les idées sur l'apprentissage en général (scolaire ou individuel).

Les réponses au questionnaire révèlent bien des conceptions différentes; les différences portent souvent sur les pratiques à avoir en classe. Plus précisément il y a comme des pôles où se cristallisent les différences exprimées, souvent à l'articulation entre les diverses dimensions ci-dessus.

Cependant les différences entre les réponses sont souvent partielles sur telle ou telle dimension, ce qui, joint au petit nombre de réponses recueillies dans le premier temps (26), ne permet pas d'établir de corrélation (s'il y en a !) entre les diverses expressions dans chaque dimension, ni de définir des profils.

Nous avons été frappées en particulier par la différence assez discriminante suivante : l'écoute (même active) de l'enseignant (qui explique), suivie du "faire et refaire des exercices" semble souvent être associée dans une même réponse (qui les privilégie, et dans cet ordre) à la compréhension. Celle-ci apparaît ainsi comme une condition nécessaire et préalable à l'apprentissage. Ce type de réponses s'opposent, nous semble-t-il, à celles qui associent directement l'apprentissage aux activités des élèves, citées alors en premier lieu.

Cette différence est quelquefois perçue dans le rôle donné aux explications de l'enseignant, valorisées ou non, et a contrario, dans le rôle donné aux erreurs des élèves, "positivées" ou non.

Quant aux activités des élèves, le choix de ce qui en est cité peut être révélateur : il peut n'y avoir que des allusions quantitatives aux exercices (toujours jugés indispensables), ou au contraire des précisions sur le type de ces activités, leur durée relative et leur place par rapport au cours, leur rapport avec les contrôles... Autant d'éléments qui laissent imaginer des différences effectives au niveau des pratiques.

Enfin les mathématiques à transmettre sont conçues comme des outils (pour résoudre des problèmes et poser des questions, ou de façon plus restrictive des outils de calcul) par les uns, comme une théorie, ou un langage, ou des structures par d'autres, ou comme une école de rigueur par les troisièmes.

L'examen des deux transcriptions de séquences en classe, du point de vue des représentations métacognitives des enseignants impliqués, nous a montré des différences portant sur la portée des questions de l'enseignant (3), sur le temps de silence de l'enseignant (pour laisser

(3) Les questions à petite portée sont celles dont les réponses sont immédiates, mais qui n'engagent qu'une compréhension très locale (voire nulle) des élèves.

les élèves répondre par exemple), et sur l'utilisation du registre métamathématique, et . Mais nous avons été arrêtées dans nos inférences par la grande difficulté de passer directement du "local" (en classe) au "global" (conceptions effectives).

L'examen du bulletin de l'APM en revanche traduit plutôt une certaine unanimité des auteurs qui s'y expriment ; c'est seulement une évolution qui est perçue, les représentations exprimées au détour des articles relevant toutes d'un même type (apprentissage par l'action, mais l'acception de ce mot se précise petit à petit, avec un enseignant qui se tait quand il le faut, et qui intervient le cas échéant, y compris sur le plan métamathématique). Quant aux mathématiques évoquées dans ces prises de position, elles doivent être construites par chaque élève, d'où ce qui précède d'ailleurs.

B) Difficultés méthodologiques, nouvelles directions.

Ainsi notre hypothèse initiale de l'existence de différentes représentations (conceptions en relation avec les pratiques) se vérifie, et du même coup la pertinence du modèle adopté.

Mais les résultats qu'on peut obtenir par les premiers moyens envisagés sont trop vagues, trop partiels et trop peu contrôlables ; et les corrélations entre les idées des enseignants, leurs pratiques et les apprentissages des élèves sont difficiles à percevoir sur un tel matériel. Comment donc aller plus loin ?

D'une part les difficultés d'exploitation nous amènent à rechercher des éléments plus précis que des expressions générales de représentations, qui permettent de contrôler le lien entre le dire et le faire (on va privilégier donc les traces indirectes, avec une retombée pratique).

D'autre part, comme ce qui nous intéresse finalement, ce sont les rapports entre les représentations et les apprentissages des élèves, nous allons essayer de nous centrer sur des questions à propos de pratiques pouvant, selon nous, discriminer les apprentissages (et variables selon les conceptions).

Or nous avons vérifié dans les premières réponses recueillies, qu'il y a justement des divergences, sur la place, la nature et le rôle des activités des élèves

Cela nous a amenées à étudier le rapport représentations/pratiques par l'intermédiaire des choix d'exercices et de problèmes proposés aux élèves par les enseignants.

Dans un premier temps nous avons besoin d'une grille d'analyse de ces choix. Nous avons donc d'abord analysé les énoncés proposés dans les manuels, pour nous faire une idée globale de ce qui est proposé.

Nous nous sommes restreintes à l'enseignement post-obligatoire scientifique, dans la mesure où la panoplie des exercices adaptés commence à être conséquente, et que donc des choix différents sont effectivement possibles ; de plus, à ce niveau, la résolution d'exercices, y compris à la maison, individuelle, est vraiment indispensable à l'apprentissage. Rares sont les élèves de seconde et au-delà qui révisent leurs contrôles sans utiliser les exercices d'un manuel ! Enfin les élèves sont sélectionnés, ont 16 ans et plus, on peut moins tenir compte des causes sociales et/ou affectives dans leurs difficultés en mathématiques, et plus des choix pédagogiques, et des représentations !

Toutefois, nous avons encore restreint à la classe de seconde car elle est indifférenciée et recueille tous les élèves, ce qui pose problème aux enseignants de mathématiques et les force à des choix significatifs.

Il y aura donc lieu de compléter cette première analyse, en s'intéressant à la fois à d'autres niveaux, et aux pratiques individuelles des enseignants.

Signalons que dans le même temps d'autres recherches sont en cours sur d'autres traces individuelles des représentations, notamment sur les conceptions à propos du travail en petits groupes et aussi sur les rapports directs avec les apprentissages des élèves.

II Exercices des manuels de seconde indifférenciée.

1) Méthode suivie

Nous avons commencé par clarifier nos propres idées sur les différentes classifications qu'on peut proposer, en privilégiant celles qui peuvent être directement mises en rapport avec l'apprentissage (cf. 2), puis nous avons analysé les choix d'exercices (et éventuellement de problèmes) présentés dans différents manuels de seconde utilisés en 89-90 (sur un certain nombre de chapitres).

Notre ambition n'est pas l'exhaustivité, c'est le repérage de choix et de différences importants et fréquents, pouvant avoir des conséquences sur les représentations et/ou l'apprentissage des élèves. Nous avons donc comparé essentiellement dans les deux mêmes chapitres de géométrie (calcul vectoriel et barycentres) et dans un même chapitre d'analyse (fonctions de référence) les séries d'exercices de cinq manuels de seconde (indifférenciée). Cela reste partiel, et devra être complété ultérieurement par l'analyse d'autres chapitres, et sur d'autres niveaux.

Nous avons en particulier fait fonctionner une grille, inspirée de notre analyse a priori et jointe en annexe, et nous donnons en annexe quelques tableaux, extraits de la grille (seuls figurent certaines lignes, remplies à partir des chapitres étudiés).

Les résultats, présentés en 3) en regard des caractéristiques générales retenues, sont donc provisoires, ils sont en partie qualitatifs, et en partie plus quantitatifs (cf. tableaux).

Nous nous sommes limitées à l'analyse précise des textes d'exercices, dans la mesure où il n'y a pas de problèmes dans certains manuels. Nous évoquerons cependant ce qui nous semble caractériser globalement les problèmes. Nous avons naturellement été obligées de tenir compte du texte du cours correspondant aux exercices et nous avons aussi analysé les avant-propos des manuels étudiés qui révèlent eux directement des conceptions explicites des auteurs.

Cela nous a permis de dégager en 4) des hypothèses sur les conceptions (plus ou moins implicites) des auteurs que nous avons mises en rapport avec les représentations des enseignants (cf. I 3) A)) et

avec des pratiques possibles des élèves, mettant ainsi en évidence sur ce cas particulier le rapport cherché initialement.

2) Objectifs a priori des exercices

Les objectifs a priori des exercices proposés dans les manuels ne nous semblent pas spécifiques de leur origine et sont difficilement séparables de l'ensemble des activités proposées aux élèves (cours, contrôles, problèmes, différents types d'exercices, ...).

On peut les énumérer en distinguant des objectifs très conjoncturels, liés à la notion dont l'acquisition est visée, et d'autres plus liés à l'acquisition d'attitudes plus générales, habituelles et bénéfiques en mathématiques.

Ainsi, on peut espérer :

- * faire acquérir une technique, ou un type de raisonnement (les rendre mobilisables),
- * faire utiliser la notion dans des contextes différents,
- * faire prendre du sens à une notion, à une technique, à un théorème, les rendre disponibles,
- * corriger des erreurs persistantes,
- * faire retenir ce qu'il y a à retenir sur la notion,
- * entretenir des connaissances plus anciennes.

Dans le second ordre d'idées, on peut, à propos d'exercices sur une notion précise, proposer, en vue des acquisitions correspondantes, de :

- * faire conjecturer, faire généraliser, faire appliquer, faire faire des contrôles, faire apprendre à se poser des questions (pertinence de telle ou telle méthode, avantages et inconvénients - complémentarités), faire repérer les paramètres potentiels d'une situation, faire fonctionner l'analogie.

Enfin, on peut s'attacher à faire apprendre à rédiger.

Mais sur ce dernier objectif, nous ne pouvons rien avancer à la seule vue des énoncés.

Nous reviendrons sur ces objectifs a priori en les comparant à ce qu'on peut effectivement attendre des énoncés des exercices tels qu'ils sont.

3) Analyse des énoncés d'exercices : caractéristiques et résultats

Nous avons repéré quatre types de caractéristiques permettant de différencier les énoncés des exercices proposés par les manuels sur chaque sujet abordé.

Nous en précisons successivement les déterminants et résumons différentes options correspondantes des manuels analysés. Encore une fois, nous ne présentons pas systématiquement chaque manuel, nous avons au contraire essayé de choisir pour chaque facteur le(s) plus significatif(s) pour notre propos. Les exemples d'énoncés cités dans le texte sont indiqués en italique.

La grille correspondant à un certain nombre de ces caractéristiques (les plus facilement quantifiables) est jointe en annexe, avec les résultats pour un certain nombre des chapitres analysés.

Comme dans toute classification, il y a un côté arbitraire dans ce découpage, guidé cependant par le lien éventuel entre la résolution des exercices et l'apprentissage qui peut en résulter.

Les manuels sont repérés par une lettre (M., H., D., I., et T.)

a) Caractéristiques de la série des exercices et place d'un exercice dans la série.

Peuvent varier le nombre des exercices, le rapport entre eux (analogies, utilisation d'un exercice antérieur), leur ordre, leur place par rapport au texte du cours, leur présentation.

* Ainsi les titres des paragraphes où se trouve l'exercice traduisent ce qui est considéré comme caractéristique de la série ; ce peut être

- le type de problème qu'il permet de résoudre (exemple : barycentre et problèmes d'alignement)
- les valeurs de certains des paramètres qui figurent dans ce qui est censé fonctionner (exemple : barycentre de 2, puis 3 puis 4 points).
- des commentaires de type métamathématique (qui diffèrent selon la place par rapport au cours, dans le texte du cours on trouve plutôt illustration d'une méthode, ou activités, ou exercices résolus, ou thèmes, après ce cours on a plutôt exercices d'entraînement, pour chercher, pour savoir-faire, ...)

De fait, on a très souvent des listes d'exercices portant explicitement sur la même chose, souvent longues lorsque c'est le premier chapitre sur la notion mais où au fur et à mesure on change le domaine où sont pris les paramètres qui interviennent. On passe par exemple de valeurs entières de ce qui peut être choisi dans le domaine numérique, aux valeurs fractionnaires, puis négatives, puis irrationnelles, puis formelles le cas échéant.

Par exemple, dans N., on demande de construire le barycentre de deux points affectés successivement des coefficients (3 ; 6), (3 ; -2), (1 ; -4), (3/2 ; 4/3), ($\sqrt{2}/2$; $1/\sqrt{2}$), (-25/3 ; 11/6). (4)

On trouve exactement la même démarche dans H., où il s'agit d'étudier la fonction f et d'en tracer soigneusement la courbe représentative :

on passe de $f(x) = -3x + 5$ (1) à $f(x) = (5 + 3x)/2$ (4),

$f(x) = (2 - \sqrt{3})x$ (6), $f(x) = -x/\sqrt{2} + \sqrt{2}$ (7).

Voici un dernier exemple de mise en application d'une définition dans un contexte donné "de plus en plus compliqué" apparemment (manuel D.).

Il s'agit de "dire dans chaque cas si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par leurs coordonnées dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u} (0 ; 2)$ $\vec{v} (1 ; 4)$

$\vec{u} (1/7 ; 2/7)$ $\vec{v} (-1/2, -1)$

$\vec{u} (x + \sqrt{2} ; -1/\sqrt{5})$ $\vec{v} (1/\sqrt{x} ; -\sqrt{5})$

b) $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{v} = -\sqrt{2}/2\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, x, y, z, t des réels

$\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ $\vec{v} = z\vec{a} + t\vec{b}$

d) A et B sont deux points distincts du plan et I le milieu de [AB]

$\vec{u} = 2\vec{AI}$ $\vec{v} = -\vec{IB}$

e) A, B et C sont trois points alignés du plan :

$\vec{u} = \vec{BC} + \vec{AB} - \vec{AC}$ $\vec{v} = \vec{BC} - \vec{AB} + \vec{AC}$

Les auteurs là affichent un objectif : "reconnaître la colinéarité ou la non colinéarité de deux vecteurs". Ils proposent non seulement une

(4) On comprend la nécessité des premiers exemples, beaucoup moins du cinquième. Il y a là une certaine image de la complexité qui peut difficilement échapper à l'élève.

complexification du domaine numérique des coefficients mais encore ils juxtaposent tous les contextes possibles où on peut en classe de seconde faire fonctionner la notion, ce qui est plus rare et permet un changement de cadres numérique $\rightarrow$ vectoriel, et nous verrons que les changements de cadres, même explicites comme ici, sont peu fréquents dans les textes d'exercices.

Dans ces listes enfin, au fur et à mesure les exercices ont plus de questions, elles sont plus imbriquées, il y a moins d'indications (cf. ci-dessous).

Une dernière classification peut intervenir, c'est une classification par objectif interne de l'exercice, qui correspond souvent simplement à une indication de difficulté croissante.

Il peut ainsi s'agir de titres comme "exercices d'entraînement", faisant suite à "pour tester vos connaissances" (cf. N.).

De même les séries de "Vrai ou faux", "Applications", "Exercices", "problèmes", qui correspondent effectivement à une graduation des difficultés, dans le manuel T. On passe de questions ultra courtes et faisant mettre en fonctionnement un seul élément du cours, dans un contexte proche de celui du cours, à des exercices un peu plus éloignés. Le cas du manuel D. est plus intéressant.

Les exercices y sont classés en trois grandes catégories : pour démontrer, pour savoir faire, pour chercher, suivent les problèmes.

L'objectif des exercices de la première catégorie est de manière évidente de faire établir des résultats du cours par les élèves, en décomposant et en guidant pas à pas.

Ceux du deuxième type correspondent à des applications immédiates du cours ; les derniers demandent un peu plus de recherche, et peuvent avoir un objectif plus culturel (on y trouve de l'histoire, ou des habillages pluridisciplinaires).

Quant aux problèmes, ils se distinguent des exercices par la nécessité pour les résoudre de faire des enchaînements et de tenir plusieurs types de raisonnements (on trouve exactement la même chose dans T. pour les problèmes, souvent d'ailleurs issus d'autres disciplines).

De plus dans les exercices "pour savoir faire", figure ce que les auteurs appellent une grille d'objectifs (du type définir une translation, définir géométriquement une translation dont on connaît l'expression analytique...). Il s'agit de faire s'entraîner à certains types de tâches, et pas à des mises en application de théorèmes, et les auteurs ont éprouvé le besoin de souligner cette décentration par rapport au strict contenu du cours en donnant un titre à ces tâches, qui sont d'ailleurs très proches du cours.

Mais, à cette exception près, c'est très rarement le type des problèmes où la notion peut intervenir comme outil par exemple qui est utilisé pour classer les exercices, mais la difficulté et/ou ce qu'on utilise, et la même chose vaut pour les titres des paragraphes du cours, ce qui renforce chaque phénomène.

Même si dans le manuel T., on trouve comme sous-titre dans la série des exercices sur barycentres "construction", cela correspond à un sous-titre du cours où est traitée la question de la construction du barycentre, et non à l'utilisation potentielle du barycentre dans des problèmes de construction (et dans les exercices il s'agit bien d'appliquer le contenu du paragraphe en question).

On trouve dans le manuel N., en ce qui concerne le barycentre, un sous-titre plus lié à un type de problème : étude de figure, mais là, au contraire, on a choisi de faire référence à quelque chose de très gros, et pas à ce qui pourrait caractériser l'outil précis barycentre pour ces études de figures (démontrer un alignement ou un concours en particulier).

Tout se passe comme si les élèves avaient à découvrir eux-mêmes à quoi servent les outils utilisés, mais encore faut-il qu'ils se posent la question ! Pour que cette question soit pertinente en effet, il faut que l'élève soit confronté à des problèmes où l'outil à utiliser n'est pas indiqué, même implicitement, ce qui semble contradictoire avec la division en chapitres et exercices portant sur le chapitre.

Ainsi les variables qui interviennent pour classer explicitement les exercices (d'une série donnée, à la fin du chapitre) restent le plus souvent

* soit des paramètres qui figurent dans le texte des théorèmes ou des définitions (nombre de points concernés pour classer par exemple les exercices sur le barycentre - de deux, trois, puis quatre points dans les manuels H., N., et partiellement T.),

* soit les paragraphes du corps du texte ou les théorèmes eux-mêmes - qui peuvent coïncider avec ce qui précède - (repérages-coordonnées, barycentre partiel - associativité dans le manuel T., en analyse, fonctions du premier degré, du deuxième degré, racine, inverse, autres dans le manuel H.).

b) Forme de l'énoncé et des questions posées : de l'exercice à l'énoncé

* on indique ou non ce qu'il y a à démontrer, on indique ou non comment démontrer (nous reviendrons sur les indications de méthodes en c), on met un titre à l'exercice.

Par exemple on trouve des énoncés complètement fermés du type "démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en appliquant la propriété d'associativité du barycentre à l'isobarycentre des trois sommets" ; d'autres énoncés ne donnent que le résultat à démontrer : "démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes" ; d'autres nécessitent à la fois conjecture et choix de méthodes, ainsi "que peut-on dire du point M qui vérifie

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

où ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit ?.

Grâce à la grille d'analyse (cf. tableau I en annexe), on peut constater sur ces doubles fermetures/ouvertures qu'en général dans les listes d'exercices proposées à la fin du chapitre, il y a peu de titres et les indications sur ce qu'il y a à utiliser sont implicites (par la place), surtout s'il y a lieu d'appliquer les définitions ou les premiers théorèmes correspondant au sous-titre du paragraphe où figure l'énoncé.

Par contre, dans la plupart des exercices on précise ce qu'il y a à démontrer, par des consignes fermées, ne donnant pas lieu à conjecture, mais ne précisant pas toujours le type du problème, par exemple :

construire, placer, déterminer (des nombres, des équations, des points, une transformation, des coordonnées...)

établir une formule donnée (soit algébrique, soit numérique, soit vectorielle).

étudier une fonction

tracer un graphique

comparer deux fonctions

montrer que des droites sont concourantes, des points sont alignés, un quadrilatère est un parallélogramme....

Les deuxièmes questions des exercices sont souvent plus ouvertes, en particulier lorsqu'il y a à déterminer un lieu ou plus simplement un point (ce qui nécessite une conjecture) ou lorsque la tâche est intitulée "Que peut-on dire?", "Est-il possible ?" "Quelle est la nature de ... ?", "Pourquoi ... ?", "Quels sont les points tels que ... ?", "A quelle condition ... ?"

Toutefois les liens entre les questions d'un même exercice sont souvent artificiels, dictés par l'habitude de respecter le contrat suivant : ce qui est dans la première question doit servir (cf. ci-dessous).

* les questions comportent une seule étape ou plusieurs, il y a plusieurs questions dans l'exercice.

S'il y en a plusieurs, les étapes sont articulées ou non par rapport à la démarche possible de l'élève, par exemple on ne fait traiter les cas particuliers que quand ils se présentent, pas avant, ou encore on ne met pas au début des questions n'ayant pas de rapport évident avec l'exercice mais qui vont servir plus loin.

Voici des exemples, tirés du manuel N. (chapitre calcul vectoriel)

- une seule question, simple :

Deux droites D et D' sont sécantes en O , A est un point situé ni sur D ni sur D' . Construire un point B de D et un point B' de D' tels que $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OB'}$.

- une question à tiroirs :

A quelle condition une droite D' est-elle l'image d'une droite D dans une translation ? Cette condition étant remplie, trouver toutes les translations qui transforment D en D' .

- un énoncé à plusieurs questions :

a) Pour chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$\begin{array}{ll} \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} & \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ 1+a \end{pmatrix} \\ \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3a \\ -2a \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 2+a \\ a \end{pmatrix}$$

b) Soit O le centre d'un parallélogramme $ABCD$.

Démontrer que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$

En déduire que, pour tout point M du plan,

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}.$$

Dans le premier cas, il s'agit de résoudre la même tâche, apparemment rendue plus complexe par la complexification du paramètre (cf. a).

Dans le deuxième cas, il s'agit d'établir un résultat, qui aura de l'importance par la suite, mais la tâche est morcellisée et on la résoud dans un ordre tel que la première question n'apparaît comme aide à la deuxième qu'à cause du "en déduire", pas à cause d'un calcul général faisant apparaître l'intérêt de cette somme par rapport à l'autre.

* il y a des indices "externes" pouvant servir de repère.

Par exemple, dans un problème de terminale F, on trouve "étudier le sens de variation de la fonction en utilisant la dérivée", alors que les élèves ne connaissent aucun autre moyen d'étudier cette variation et que le signe de la dérivée a été étudié juste avant.

Et en C, on ne trouve pas cette indication (dans un énoncé analogue)!

* il y a des implicites dans les consignes.

Par exemple le mot "construire" est susceptible de différentes interprétations selon les endroits (ce peut être à la règle et au compas, ou non, cela peut consister à placer les éléments sur une figure ou à décrire et à discuter un algorithme de construction).

Cette confusion et la multiplicité des sens attachés à la consigne "construire" sont encore plus flagrantes au collège (cf. annexe).

L'existence et l'unicité de certains éléments sont souvent admises mais implicitement, c'est très souvent le cas dans les calculs de limites...

Quelquefois on omet de préciser que le modèle adopté est de tel ou tel type tout en le faisant utiliser (proportionnalité dans le chapitre correspondant...)

Enfin, certains implicites "momentanés" ne peuvent être évités. Par exemple, si on demande "démontrer que le point I est point commun aux

droites D et D'' , on admet que ces deux droites ont un point commun, ce qu'on va démontrer par le fait que I est sur les deux...

Cependant, nous n'avons jamais vu de manuel s'expliquant sur ce genre de problèmes.

c) outils à utiliser dans une question :

Outre les questions quantitatives déjà évoquées, on peut repérer d'autres caractéristiques :

* il y a un ou plus d'un outil mis en fonctionnement dans la question, nouveaux ou anciens : en général il n'y a qu'un outil nouveau à la fois, et mobilisé une seule fois (cf. tableau III).

Il est intéressant de repérer la mise en fonctionnement relative des différents outils présentés dans le cours : fonctionnent-ils tous, dans quelle proportion, lesquels finissent par ne plus être indiqués explicitement comme outils ...

La grille permet de répondre en partie à ce type de questions, et montre (cf tableau II en annexe) que les outils qui sont le plus sollicités sont les définitions et les premiers théorèmes cités dans le cours, pouvant souvent donner lieu à une utilisation du type algorithmique (utilisation d'une formule en particulier).

* La nature des indications, qui est éminemment variable a priori (il peut y en avoir ou pas, elles peuvent être indirectes, suggérées par la place, le sous-titre de la sous-série d'exercices, un mot ou une formule ou un théorème indicateurs ...).

Souvent, la question est fermée par rapport à ce qui est utilisé de nouveau, ouverte par rapport à "l'ancien" mis en fonctionnement.

Il y a cependant des variantes, selon les ouvrages.

Par exemple, dans le manuel M , dans les énoncés des exercices placés dans la rubrique "translation" dans la série des exercices suivant le chapitre "Calcul vectoriel", un seul ne comporte pas le mot "translation" et comporte une question ouverte (soit 10%) : c'est l'énoncé suivant :

"D et D' sont des droites sécantes, A et B des points du plan. Déterminez un point M de D et un point M' de D' tels que ABMM' soit un parallélogramme."

Huit de ces dix exercices sont dans la rubrique "translation", deux dans la rubrique "expression analytique".

Tous les autres exercices sont du type :

"Soit I le milieu du segment [AB], montrer que si t est la translation de vecteur u et $I' = t(I)$, $A' = t(A)$, et $B' = t(B)$, alors I' est le milieu de [A'B']."

En fait seuls deux exercices font fonctionner l'outil translation, l'un avec une question fermée et indication de l'outil, l'autre ouvert, les huit autres sont destinés à établir des propriétés de l'objet translation.

Dans le manuel D. il y a beaucoup de questions fermées avec indication de l'outil, mais il y a plus de questions ouvertes que dans le précédent manuel. Portant sur la translation par exemple, douze exercices figurent dans la rubrique correspondante, deux dans "pour chercher" et cinq dans la rubrique "problèmes".

Dans la première rubrique, "translation" donc, on a des questions fermées avec indications de ce qu'il y a à utiliser : il s'agit là encore de peaufiner les propriétés de l'objet.

Dans la deuxième rubrique, les deux exercices font utiliser l'outil translation, mais sans indication de méthode, l'un dans une question fermée et l'autre dans une question ouverte.

Dans la rubrique "problèmes" enfin, les exercices font tous intervenir la translation comme outil, dans des questions ouvertes sans indications de méthodes (ou presque pas car il y a un énoncé de méthode très générale).

Au total, donc, 31% d'énoncés ouverts sans indications, 39% font intervenir l'outil et non l'objet.

Nous donnons encore les résultats de la même étude pour les exercices sur la symétrie.

Rubrique	symétrie	"pour chercher"	problème
nombre exer.			
objet	D. : 1 N. : 1	N. : 5	D. : 1
outil	D. : 2 N. : 1	D. : 1 N. : 4	D. : 1
q. ouverte	D. : 2 N. : 2	D. : 1 N. : 4	D. : 2
total	D. : 3 N. : 2	D. : 1 N. : 9	D. : 2

Au total	objet	outil	quest. ouverte	total
N.	7 (53%)	5 (38%)	8 (61%)	13
D.	2 (33%)	4 (66%)	5 (83%)	6

On constate de même une certaine tendance des exercices de D. à comporter plus de questions ouvertes et plus d'énoncés où les notions dont l'apprentissage est visé sont à utiliser comme des outils de résolution.

Nous verrons dans l'étude des avant-propos que cela correspond, mais seulement partiellement, à des objectifs affichés par les auteurs.

* les outils sont à faire fonctionner dans le cadre de l'énoncé, ou bien il faut changer de cadre (et c'est indiqué ou non)

De fait, il y a très peu de jeux de cadres, et lorsqu'il y en a, ils sont explicites, et souvent dans un seul sens.

Par exemple, dans les exercices sur le barycentre, l'utilisation même de l'outil force à passer du cadre géométrique au cadre vectoriel, avec retour ou non selon la consigne au cadre géométrique : le barycentre est un point, défini par une relation vectorielle. Les exercices sont tous du même type, ou ils sont posés dans le cadre géométrique, et nécessitent un passage (explicité par l'utilisation même de l'outil) par le vectoriel avec retour au géométrique, ou ils démarrent par du vectoriel explicite, ce qu'il y a à établir relevant du cadre géométrique.

Si les auteurs veulent faire manipuler les coordonnées, ils le demandent explicitement, se plaçant d'emblée dans un repère, le plus souvent précisé.

On ne trouve pas d'exercices où le passage à l'analytique s'imposerait de par la tâche, ni d'exercices où des changements de cadres successifs, non indiqués, soient vraiment producteurs pour la résolution.

En analyse, on retrouve les mêmes régularités, le cadre graphique en particulier est presque toujours évoqué explicitement lorsqu'on doit s'y placer.

Si la règle du jeu des exercices est ^{de} ne pas mélanger les notions, les problèmes eux le permettent plus.

Or on constate qu'il y a (schématiquement) deux types de textes de problèmes : ou on fait appel à un habillage extra-disciplinaire (physique, économie...), et c'est sur la modélisation que porte la difficulté, pas sur la résolution elle-même, ou la difficulté vient de la complexité, de la longueur des calculs, voire de l'astuce à mettre en oeuvre pour trouver la solution. C'est rarement par un jeu de cadre bien choisi que l'élève peut s'en sortir.

Si dans certains problèmes du manuel D. cependant, le choix des méthodes reste aux élèves, avec en particulier l'opérationnalité du changement de cadres le cas échéant, le manque total d'indications à ce sujet, le fait que ce "paramètre" ne soit jamais pointé comme tel rend une telle "liberté" assez illusoire... Cela rejoint notre dernier déterminant dans la rubrique "outil" :

* il y a plusieurs possibilités pour résoudre l'exercice et l'énoncé n'en privilégie pas une : c'est très rare.

d) nature de l'activité à déployer dans l'exercice

On trouve les possibilités suivantes :

* faire appliquer une définition, un théorème :

- dans un contexte donné, avec des "valeurs" nécessitant plus ou moins de travail pour la mise en fonctionnement et la vérification des hypothèses,

- avec plus ou moins de transformations (d'initiatives comme nommer des éléments, introduire des quantités auxiliaires ou des éléments nouveaux) pour arriver à la mise en fonctionnement proprement dite,

- une seule fois dans la question ou plusieurs, seul élément mis en fonctionnement ou non, présence ou non d'un raisonnement ou d'une interprétation.

- * faire appliquer plusieurs fois de suite la même chose, avec une difficulté croissante,

- sur le domaine de contextualisation

- sur les transformations auxiliaires

- sur la complexité de la question où intervient la mise en fonctionnement visée

- sur l'imbrication avec d'autres éléments nouveaux ou anciens

- * faire reconnaître une définition, directement ou avec une discussion (pour être dans le champ de la définition en question).

- * faire conjecturer (question ouverte), ou faire trouver ce qu'il y a à mettre en fonctionnement (toujours à nuancer du fait de la place de l'exercice dans un chapitre donné)

- * faire interpréter un résultat (changer de point de vue, ou de cadre et/ou mise en relation de résultats)

- * faire raisonner, relier des résultats entre eux (et c'est explicite ou laissé à la charge de l'élève)

- * faire utiliser la figure en géométrie, les calculs numériques en algèbre

Disons tout de suite que le recours à la figure ou aux calculs particuliers joue dans un seul sens - justifier la nécessité de faire la démonstration d'une conjecture "probable" -.

- * faire généraliser (consignes du type : en déduire une construction, une propriété...)

De fait, on constate, en comparant avec nos objectifs a priori :

a) On ne trouve jamais d'objectifs comme faire contrôler un résultat, ou faire conjecturer un théorème, et le rôle de la figure ou des calculs est très restreint. Les généralisations sont toutes du même type, on fait passer l'élève d'un exemple générique à "quel que soit"...

b) le jeu sur les variables indiquées est assez proche dans beaucoup de manuels : tout se passe comme si les auteurs avaient comme modèle celui de la répétition, avec complexification croissante dans la contextualisation (sans jeux de cadres, nous y reviendrons).

c) on travaille "longtemps" (si on suit le manuel) sur l'objet, et on passe du travail sur l'objet à celui sur l'outil.

Autrement dit, on commence par "faire appliquer" la définition, les théorèmes ... et on ne pose des exercices où la notion intervient comme outil (n'est pas citée dans l'énoncé par exemple) qu'à la fin.

L'étiquetage des exercices par les paramètres contenus dans les définitions ou par les théorèmes successifs du cours renforce ce caractère.

De plus, souvent c'est sur des connaissances supposées acquises que portent les difficultés (interprétation nécessitant un changement de point de vue, par exemple dans un exercice sur barycentres on arrive immédiatement à $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MG}$ et on demande "en déduire une construction de M' à partir de M : il n'est plus question de barycentre !).

d) il y a très peu d'exercices où l'élève a à faire autre chose qu'une mise en application de théorèmes ou de techniques (certes éventuellement pas indiquées), ce peut être directement ou par l'intermédiaire d'une reconnaissance de la définition à mobiliser (énoncés du type "déterminer a et b pour que tel point, donné, soit barycentre de tels autres, également donnés, affectés des coefficients a et b ").

Les questions de généralisation éventuelle ne concernent que les exemples déjà génériques, pas le repérage de paramètres par exemple.

Par exemple on fait faire un exercice de construction du barycentre de deux points comme point divisant un segment dans un rapport donné, et on

donne comme dernière question "en déduire une construction du barycentre de deux points". L'élève doit réaliser que ses arguments sont valables quels que soient les points.

Dans ce genre d'exercices, plus généralement, l'élève doit à la fois être conscient de l'existence d'un "quel que soit" caché, comprendre sur quoi il porte, et réaliser la généralité de ses arguments : cela nous semble quelque peu ambitieux ...

Par contre si on lui donne à chercher l'ensemble des points tels que $MA^2 + MB^2 = 1$

on ne lui demande pas quelle généralisation éventuelle il peut imaginer, ce qui serait plus à sa portée si on le faisait faire souvent et ce qui préparerait à l'exercice précédent !

Ainsi l'image qui se dégage des textes d'exercices de trois manuels au moins de la pratique des mathématiques est peu variée, assez répétitive, très tournée vers la mise en fonctionnement de tout ce qui est algorithmisable, voire vers le fait de retenir les techniques correspondantes (à force de les utiliser), il y a peu de part à l'initiative de l'élève, et en particulier très peu d'activités de questionnement quel qu'il soit, destiné à une conjecture, un contrôle ou à un choix de méthode, ou à une généralisation éventuelle...

En conséquence, l'objectif a priori d'installer chez les élèves des outils disponibles n'est que peu rempli, c'est plutôt sur le caractère objet des concepts ou leur aspect outil mobilisable (surtout de type algorithme) qu'est mis l'accent.

Cela est renforcé par la longueur des premières listes d'exercices où l'élève doit utiliser 5, 6 fois la même chose avec des coefficients de plus en plus compliqués : il lui reste alors moins de temps et d'énergie pour le reste et il risque de s'arrêter à ces premières mises en application (sauf conseils explicites de l'enseignant, les manuels ne s'expliquant jamais à ce sujet !).

Signalons enfin que nous avons négligé ici tout un aspect qu'il faudrait prendre en compte dans le b) (forme de l'énoncé) pour l'étude d'exercices d'analyse en particulier (à partir de la première) : c'est tout ce qui concerne les notations utilisées.

III Représentations des auteurs

Avant d'inférer des résultats précédents des représentations des auteurs, nous allons exposer ce qu'ils en trahissent eux-mêmes dans leurs commentaires accompagnant les exercices d'abord (s'il y en a) et dans les avant-propos ensuite (éclairés par le rapport entre ce qui est annoncé et ce qui est fait).

1) Analyse des indications d'ordre métamathématique dans les exercices

D'une façon générale, il n'y a pas ou peu, que ce soit dans les exercices résolus ou les activités, d'indications de type métamathématique (sauf dans le manuel T., qu'il faut étudier à part): s'il y a analogie, c'est à l'élève de la trouver, s'il y a méthode, indiquée par le seul mot méthode, c'est à l'élève de l'explicitier, et d'en trouver le niveau de généralité et le domaine d'application. Cela s'apparente alors plus à une recette, et même à une recette qui garde un côté mystérieux, puisqu'il a fallu deviner sur quoi elle porte, qu'elle n'est pas justifiée, qu'on n'en connaît (sauf travail supplémentaire) ni les avantages ni les inconvénients. Même si les auteurs au début de l'ouvrage semblent penser le contraire, nous pensons que le simple fait de nommer méthode un texte d'exercices où on applique une certaine méthode et non la méthode elle-même, décontextualisée, est tout à fait insuffisant à donner des méthodes aux élèves.

Donnons d'abord quelques illustrations de ce qui est le plus fréquent.

Par exemple avant le cours sur barycentre, on fait réfléchir sur un problème de moyenne (cf. I), mais la "morale" de l'analogie n'est pas tirée dans le manuel : comment l'élève peut-il deviner de quoi il s'agit?

De même, une pratique assez généralisée dans l'ouvrage E. est la suivante : on donne un texte d'exercices, qui induit implicitement certains choix et on demande de "s'inspirer" de l'exercice pour résoudre d'autres exercices, ainsi sur les fonctions.

Ainsi, on expose à propos du barycentre deux "méthodes" pour résoudre un exercice (dans le corps du texte cette fois), c'est à dire on intitule 1ère méthode et 2ème méthode puis on donne deux textes d'exercices qui conduisent au même résultat sans indiquer à quel niveau se place la

méthode, ce qui peut revenir à ne rien donner du tout aux élèves que deux textes d'exercices ...

En revanche, dans le même ouvrage, dans l'introduction aux fonctions de référence, on indique une méthode qui en est une, mais qui est cette fois tellement générale que ce n'est pas du niveau intéressant les élèves.

On dirait que les auteurs n'ont pas envie de se placer entre le trop général et le non-décontextualisé.

Voici des exemples tirés maintenant du manuel D. On peut en effet trouver dans cet ouvrage un certain discours de type métamathématique. Ainsi "voici une méthode pour déterminer un point défini par une relation vectorielle.

Méthode :

* "Isoler le point inconnu en choisissant une origine qui sera l'un des points donnés.

Par exemple en prenant pour origine A, on écrira :

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).$$

* Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction des données

* Construire M.

Il n'est pas indiqué qu'ici M n'intervient plus que dans $\overrightarrow{AM}$, et que comme $\overrightarrow{AM}$ est égal à un vecteur constant, le problème est résolu : ici c'est la raison de la réussite de la méthode qui n'est pas explicitée, et nous pensons qu'il y a un risque que les élèves croient à un tour de passe-passe, une fois de plus.

Autre cas : "Il est demandé de réaliser une figure vérifiant certaines conditions. Voici une méthode souvent utilisée :

Méthode :

• Construire une figure sur laquelle la construction demandée est réalisée.
Pour cela on fait la construction « à l'envers » en commençant par ce que l'on doit construire.

• Faire apparaître les données.
Par exemple en traçant en couleurs différentes les données et les éléments à construire.

• Faire l'analyse de la figure.
En étudiant ses propriétés ou en faisant des constructions auxiliaires.

• Dédire une construction.
Par exemple, trouver une translation qui transforme une figure auxiliaire en la figure cherchée.

• Réaliser la construction en montrant que la figure ainsi tracée est solution.

• Discuter éventuellement la solution proposée

Voici une méthode pratique pour déterminer un ensemble de points.

Méthode :

Appelons E l'ensemble cherché.

— Tracer de nombreux points appartenant à E.

— Conjecturer que les points tracés sont éléments d'une figure F (droite, cercle, segment...).

— Définir la figure F avec précision.

— Montrer que tout point de E est élément de F, c'est-à-dire $E \subset F$.

— Chercher si réciproquement tout point de F est élément de E.

— Conclure.

Ces énoncés cette fois-ci sont à la fois très généraux et très pratiques, il n'y a pas à proprement parler de méthodes mathématiques ; il s'agirait plutôt d'indiquer des comportements de bon sens qui permettent de se donner des idées, ce qui est très utile mais reste très loin des contenus et des contextualisations éventuelles. En particulier il peut y avoir loin du "chercher la réciproque" à la mise en fonctionnement effective, sans parler des cas favorables où on peut directement trouver l'égalité de E et de F, grâce à une transformation. Ce qui nous paraît difficile est de distinguer les cas où il y a besoin d'une réciproque des autres, or précisément ce point est totalement ignoré des commentaires....

Là encore, malgré des efforts apparents, on retombe sur le trop général, ou un manque d'éclaircissements décontextualisés lorsque on est très précis.

Dans le manuel N. les commentaires métamathématiques sont réservés au texte du cours.

Qu'en est-il du manuel T., dont les auteurs ont des prétentions tout à fait différentes, comme nous le verrons ci-dessous, en matière d'apprentissage et de méthodes ? Nous nous basons essentiellement sur le chapitre barycentre pour donner les exemples (cela facilite les comparaisons).

Les commentaires de type métamathématique apparaissent déjà à plusieurs endroits du cours (introductions où on précise les objectifs, souvent en termes de cadres d'ailleurs).

En ce qui concerne les activités et les exercices résolus, ils sont quelquefois précédés d'une phrase d'introduction et souvent suivis de "commentaires" qui sont des phrases du langage commun traduisant un résultat formalisé obtenu dans l'exercice, ou de remarques qui soulignent une caractéristique des exercices.

Par exemple dans ce chapitre sur barycentres, dans le premier paragraphe qui sert d'introduction, on obtient, suite à un calcul de moyenne interprété dans le cadre géométrique (et c'est ainsi que l'activité est annoncée)

$$\vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} = \vec{0}$$

et le commentaire est le suivant :

"ainsi le point G ainsi défini apparaît comme le point moyen des points A, B et C "affectés" respectivement des coefficients 1, 2 et 3."

C'est précisément le manque d'une telle phrase que nous avons constaté dans un ouvrage précédent sur le même genre d'activités.

A la suite de plusieurs exercices qui consistent à placer le barycentre de deux points sur la droite correspondante, on trouve la remarque, en caractères plus petits :

"2) les exemples ci-dessus mettent en avant le rôle de l'abscisse de G dans le repère (A,B). Ce qui suit développe le point de vue vectoriel."

Là encore on donne aux élèves un point de repère, en termes de cadres.

Venons-en aux méthodes, qui sont assimilées explicitement à des "procédés" dans le paragraphe "constructions du barycentre".

Les auteurs leur affectent des noms et indiquent ce qui fait leur succès (la première par exemple correspond à la relation vectorielle

$$(\alpha + \beta)\vec{PG} = \alpha\vec{PA} + \beta\vec{PB},$$

la deuxième au théorème de Thalès et à la relation $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$).

Ils indiquent aussi que la seconde est souvent utilisée en physique.

Cependant, ce qu'ils exposent complètement est un exemple de mise en fonctionnement de chacune d'elles, la phrase la plus générale, en gras, étant "le barycentre est donc obtenu comme l'intersection de (PS) et (AB)" d'une part, et, en rouge cette fois, (Ce point G est donc) le barycentre de (A, α) et (B, β).

Suivent deux remarques, pratiques, sur l'attribution des coefficients et sur le rapport entre les signes de α et β et le sens des vecteurs considérés.

Plus loin, il y a un exercice résolu assorti d'une remarque où on indique que la méthode utilisée, qui là n'est pas explicitée, s'applique plus généralement.

Donc, là encore, les élèves ont à faire la part de ce qui est méthode et de ce qui est particulier à l'exercice, et ont à trouver seuls quand ça s'applique.

Et enfin, dans les "compléments", qui ne sont constitués que de problèmes (exercices résolus puis seuls énoncés) on trouve un commentaire en chapeau où les auteurs indiquent qu'ils insistent dans le paragraphe sur le rôle du barycentre dans la résolution de problèmes,

notamment les problèmes d'alignement et de concours et sur les liens avec les centres d'inertie des plaques homogènes.

Insister ici semble vouloir dire proposer des exercices où la propriété en question est utilisée. Cependant dans le premier exercice résolu proposé, c'est tout à fait implicitement que cela sert, le mot même d'alignement n'est pas imprimé !

Et il en va presque de même dans le deuxième exercice résolu, où c'est sur une propriété de milieu que l'accent semble mis, même si dans les deux cas il y a une utilisation implicite de la chose.

Il y a donc dans ce manuel un parti pris intermédiaire entre la pratique usuelle, décrite avant et ce qui serait possible, à savoir expliciter les méthodes en langage courant, en indiquant systématiquement et les raisons de leur succès, et les conditions d'application, et les points délicats dans les contextualisations, et les avantages et inconvénients comparés, en explicitant également le rôle d'outil des notions qui interviennent ... Les auteurs ont changé, mais un peu timidement, sans pousser jusqu'au bout les possibilités. Est-ce par des nécessités d'édition, est-ce par conviction que cela suffit ?

Et si les autres auteurs ont d'autres habitudes, est-ce par conviction ou par manque d'envie ou de raison de changer un état de fait bien installé, ou pour répondre à une demande bien établie par l'habitude ? Nous allons essayer de préciser cela en étudiant les avant-propos, ce qui nous autorisera ensuite à parler de représentations.

2) Analyse des avant-propos

Nous avons étudié séparément le manuel T. ; de plus nous mettons à chaque fois en regard ce qui apparaît dans les avant-propos et ce que nous avons trouvé effectivement à ce sujet dans le manuel.

A) Les trois manuels D., H., M.

Nous avons regroupé notre analyse selon les trois rubriques qui apparaissent effectivement dans les textes des avant-propos.

i) Exercices où on démontre des parties du cours

Une partie des démonstrations du cours est en effet reportée dans les exercices, et c'est un objectif explicite des auteurs.

Ils s'en expliquent ainsi :

"L'élève est appelé à démontrer lui-même certaines propriétés et certains résultats" (H.).

"Pour la clarté de l'exposé, les démonstrations de certains résultats sont l'objet d'exercices pour démontrer" (D.).

"Les thèmes les plus intéressants et les plus immédiats par rapport au cours sont donnés en exercices" (N.).

Ceci dit, il n'est nulle part indiqué, et cela nous semble manquer, si la résolution des exercices en question, et même les résultats, doivent être mémorisés, à l'égal d'une démonstration du cours, ou si au contraire il s'agit de résultats et/ou de démonstrations dont les élèves peuvent se passer : on ne sait pas ce qui distingue (le cas échéant) ce type d'exercices du cours.

Or, à y regarder de près, on constate qu'il peut s'agir d'énoncés importants pour les élèves, ainsi dans le manuel (D.) par exemple, on a :

Vecteurs colinéaires à un vecteur non nul

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires à un vecteur $\vec{w}$ non nul, montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires en examinant deux cas :

a) $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

b) $\vec{u} \neq 0$ ou $\vec{v} \neq 0$

On retrouve à un autre niveau le manque d'indications métamathématiques déjà signalé.

ii) Les exercices dits d'application

Les commentaires sont éloquents à ce sujet.

"Des exercices d'application simples permettent la mise en pratique et facilitent l'assimilation de la notion étudiée" (H.).

"(...) groupant des exercices dont la réponse est quasi immédiate (il suffit d'appliquer un résultat introduit dans le chapitre) (N.).

"Les exercices d'application immédiate sont précédés d'une grille d'objectifs qui guide leur choix. Beaucoup sont élémentaires" (D.).

Nous avons déjà largement évoqué ces exercices, ce sont ceux où il y a à traiter une tâche simple, qui consiste à contextualiser une définition ou une propriété ou une technique du cours, et les avant-propos sont ainsi parfaitement cohérents.

Il est donc clair que certains auteurs y voient un moyen d'apprentissage, les autres ne s'en expliquant ni dans un sens ni dans l'autre.

Ce que l'on peut supposer au moins à notre avis, c'est que la mise en application dans des contextes différents "épuisant" les contextes possibles peut permettre une familiarisation avec toutes les utilisations éventuelles de la propriété concernée (et peut-être engendrer en conséquence une certaine confiance des élèves) mais cela sous-entend d'avoir traité une bonne partie de ces exercices... Ceci peut jouer sur la logique de la réussite mais quant à en inférer l'impact sur l'apprentissage proprement dit, cela nous semble plus difficile, en particulier parce que cela dépend beaucoup de la manière dont l'élève traite les exercices.

c) Les exercices pour chercher et/ou les problèmes

Il y a là des points de vue exprimés qui diffèrent un peu plus.

"des exercices, des problèmes, parfois regroupés en "thèmes" permettent d'appliquer et de prolonger le cours" (H.).

Mais là encore le manque de commentaires explicites après chaque problème laisse l'élève tirer seul les conclusions éventuelles de ces activités (prolongement par exemple).

Dans le manuel N., il n'y a pas de problèmes à la fin des chapitres. Les exercices dits d'entraînement, qui suivent ceux intitulés "pour tester vos connaissances" (du type application) peuvent proposer des tâches plus complexes (mais la complexité ne porte pas toujours sur la notion à étudier mais sur des connaissances antérieures).

Pour le manuel D., il y a "des exercices pour chercher et des problèmes". Voici ce que les auteurs écrivent à ce propos

EXERCICES

Pour Démontrer : le cas échéant, ces exercices proposent de démontrer des résultats énoncés en Information.

Pour Savoir Faire : ces exercices d'applications immédiates sont précédés d'une grille d'objectifs qui guide leur choix. Beaucoup sont élémentaires. Certains sont corrigés pour faciliter le travail autonome des élèves.

Pour Chercher : ces exercices demandent un peu plus de recherche. Ils sont répertoriés par rubriques. Certains présentent un caractère historique ou pluridisciplinaire.

PROBLÈMES

Très variés, ils demandent d'enchaîner plusieurs résultats, plusieurs types de raisonnements.

En fait, on constate effectivement que les problèmes ont de nombreuses questions ouvertes sans indication de méthodes et que la notion à étudier intervient en temps qu'outil dans la résolution du problème, la complexité porte cette fois sur la notion elle-même, soit parce qu'il faut l'utiliser deux fois, soit parce qu'elle intervient dans plusieurs cadres, soit parce qu'il y a des enchaînements logiques non triviaux (à la charge explicite ou même implicite de l'élève).

Cependant là encore rien n'indique aux élèves ce que chaque problème peut leur apporter, et dans quelle mesure il est important de le chercher, pas plus qu'on n'indique que le degré de difficulté est tel qu'il y a lieu de travailler à plusieurs, par exemple.

On peut se demander si les auteurs, qui ne font allusion qu'à la seule difficulté logique de leurs problèmes, savent eux-mêmes bien pourquoi les problèmes favorisent l'apprentissage...

B) Le manuel I.

Il porte sur le programme précédent (81).

Dans le préambule, les auteurs s'expliquent surtout sur le partage du livre en thèmes et tronc commun, et évoquent peu les exercices.

Ils parlent simplement de "nombreux exercices techniques" qui sont en quelque sorte opposés, à cause d'un "à côté de", à des exercices de compléments et d'approfondissement. Par ailleurs ils évoquent "de nombreux exercices en fin de chapitre assez importants pour constituer des sujets d'étude et de réflexion."

On retrouve en fait, en moins explicite, les catégories b) et c) ci-dessus.

C) Un cas particulier : le manuel T.

En revanche, là les auteurs affichent une ambition différente, très intéressante pour notre propos, notamment "améliorer votre [d'élève] aptitude à résoudre des problèmes". On trouve d'ailleurs en exergue une citation sur la résolution de problèmes de G. Polya.

Et ce parti-pris original correspond selon les auteurs à "la prétention d'aller au-delà de la conception traditionnelle" :

"par des exercices et problèmes résolus appuyés de commentaires, remarques et applications. Leur objectif est de permettre de comprendre

puis d'assimiler les méthodes et les procédures mises en jeu dans la résolution des problèmes.

par de nombreux conseils pour clarifier et apprendre ces méthodes", donnant "idées et moyens d'attaque".

par le choix, la forme et la présentation variés", ce qui permet à chacun de pouvoir entreprendre et réussir.

Les variables didactiques ainsi affichées sont d'une part la diversité des types d'activité (et des activités d'un même type), d'autre part le fait de donner des résolutions toutes faites.

Il y a l'idée que montrer une résolution, appuyée de commentaires, permet de comprendre, la compréhension devant, semble-t-il, précéder l'assimilation, ce qui nous semble quelque peu réducteur.

Il y a aussi l'idée de l'importance du métamathématique.

Point de vue bien original, en effet, et qui respecte bien plus que les autres les réalités de l'apprentissage par la résolution de problèmes. Nous en avons déjà souligné certaines limites (au niveau de la classification encore classique des exercices, du respect de l'ordre "travail sur objet puis sur outil", de l'insuffisance d'indications pour les élèves).

3) Qu'en inférer sur les représentations ?

Il est très délicat de faire abstraction d'une part de la question de l'utilisation effective présumée du manuel, du rapport des exercices et du cours, et de la pratique des élèves (exercices en classe, à la maison, notés ou non etc...) et d'autre part de caractéristiques plus individuelles des élèves (mise à profit qualitative des exercices par exemple, par repérage de ce qui a servi).

Cependant, il nous semble qu'on peut dégager quelques éléments de ce qui précède.

Le plus frappant pour nous est l'idée qui affleure sans être explicitée dans les avant-propos, que l'on apprend le fonctionnement d'une notion en la traitant d'abord comme objet, et pas comme outil, privant en particulier ainsi les élèves de tout point de repère lié au caractère outil des notions.

Cela révèle, à notre avis, une réduction de l'apprentissage à une dimension très technique, dont nous craignons qu'elle ne soit insuffisante à certains élèves.

Une autre idée force est l'idée de graduation de l'apprentissage (exprimée d'ailleurs explicitement dans certains ouvrages), qui va avec l'idée d'une quantité nécessaire d'exercices à faire : cela se traduit par des applications successives et nombreuses, comme si on voulait faire voir tous les cas d'application possibles, d'une même propriété proposée dans des contextes de plus en plus difficiles techniquement, mais sans mélanges, ni de cadres, ni de points de vue, ni de méthodes. Cela révèle une conception à la fois quelque peu mécaniste de l'apprentissage, du type "c'est en forgeant qu'on devient forgeron", et relevant d'une vision "additive" de l'apprentissage : le simple bon sens, ou l'analogie avec l'apprentissage du ski, peuvent en effet conduire à l'idée naïve que pour apprendre, il faut mettre en fonctionnement souvent, et augmenter petit à petit la difficulté. Il y a là un modèle simpliste, qui méconnaît le rôle éventuel des erreurs et surtout leur persistance éventuelle (difficilement explicable dans un tel modèle), l'idée du saut informationnel, le fait qu'il faut que les élèves mettent en place des "théorèmes en acte" qui ne sont pas dans la stricte continuité de ce qu'on savait déjà, mais qui peuvent le généraliser, en changeant le mode d'application, voire les forcer à abandonner le recours à certaines techniques devenues inefficaces, peu économiques, ... L'image de l'apprentissage du vélo, souvent prise par G. Brousseau, permet de concevoir que ce n'est pas parce que l'on sait tenir le guidon, pédaler, démarrer, etc... qu'on sait faire du vélo !

Une troisième caractéristique qui nous semble se dégager est la méconnaissance du rôle de tout ce qui est méta, et en particulier de ce qu'est une méthode.

Pourtant certains auteurs en reconnaissent la nécessité, mais il semble qu'ils ne sachent pas bien situer ni exprimer ces méthodes, et qu'ils oscillent entre l'exposé d'une méthode trop générale pour être utilisée par les élèves, servant de justification à l'introduction de certains chapitres et la monstration de "méthodes en actes" pas assez

décontextualisées pour être apprises en tant que telles et plus proches de simples recettes... Il y a peut-être un manque de réflexion (et des divergences d'opinion) sur le rôle de tout ce qui est métamathématique dans l'apprentissage. "Dire sur" semble n'avoir pas beaucoup de rôle (ou c'est du type culture générale, voire "baratin", ou c'est à la limite de la recette), c'est le "dire" et le "faire faire" qui ont toutes les bonnes places. Rappelons toutefois le cas particulier tout à fait différent du manuel T.

Peut-on voir là aussi l'origine de certaines indications externes, extramathématiques, qui servent à reconnaître qu'il y a à utiliser telle ou telle technique, à la place de marqueurs réellement métamathématiques ?

Une dernière caractéristique est le peu de place réservé à autre chose qu'une contextualisation des notions, au mieux on propose des conjectures (mais il y a peu d'énoncés de ce type, et encore pas dans toutes les collections), il a très peu d'exercices permettant des réflexions sur les méthodes (dans un seul manuel) et pas de questions portant par exemple sur la généralisabilité de tel ou tel énoncé, ni sur le contrôle de tel résultat (ceci allant avec le renforcement du caractère algorithmique de ce qui est mis en place, l'utilisation d'algorithme étant faite pour éviter d'avoir à contrôler, cf. Chevallard)...

Le modèle implicite qui traduit le mieux ce qui se dégage de 4 manuels sur 5 nous semble être le suivant :

les élèves apprennent-comprennent-retiennent en écoutant le cours du professeur puis en faisant des exercices d'application de plus en plus "difficiles" (par les difficultés techniques et par leur imbrication) jusqu'à résoudre quelques exercices où la notion est utilisée comme outil, sans toutefois que les caractéristiques correspondantes aient été dégagées explicitement.

Quel est le lien avec les représentations usuelles des enseignants ?

Il apparaît clairement que les représentations des enseignants, que nous avons évoquées en I, correspondent partiellement à ce que nous avons pu inférer ci-dessus. Il y a bien un rapport étroit entre les conceptions

sur l'apprentissage par écoute, imitation, compréhension, et mises en application des notions, et les listes d'exercices que nous avons trouvées.

Et l'exception du manuel T. peut aussi être mise en relation avec l'autre catégorie de représentations, celles où les activités des élèves sont privilégiées.

Cependant une étude plus approfondie des manuels, et la prise en compte des pratiques effectives s'imposent pour en dire plus.

4) Des alternatives. et leurs conséquences éventuelles sur les représentations et les apprentissages des élèves (représentations des auteurs de l'article),

Nous voyons deux sortes d'alternatives : d'abord nous pensons qu'on peut aider explicitement les élèves à tirer des bénéfices autres que quantitatifs de la résolution des exercices, et que cela mérite de figurer dans les manuels, directement (par des indications métamathématiques) et indirectement (par des classements des exercices par divers caractères outils par exemple).

L'élève doit savoir qu'il y a des repères à chercher dans l'utilisation de tel ou tel outil. Par exemple il peut s'intéresser aux barycentres comme permettant de démontrer un alignement ou un concours, puis se demander au moment des homothéties si ce nouvel outil sert aux mêmes problèmes.

Il doit avoir une idée de plusieurs grilles permettant de retenir un certain nombre de propriétés qui sont toujours évoquées pour un type de notion - par exemple, en ce qui concerne les transformations on se pose les mêmes questions, qu'est-ce que cela conserve, comment sont les figures transformées des figures usuelles ...

Nous pensons qu'il n'est pas indispensable de "tout" connaître sur une notion, pour commencer à en parler sur le plan métamathématique.

Enfin, l'élève doit résoudre les exercices en conséquence. en tirant un bilan de chacun d'eux (mais il le peut), c'est d'ailleurs vraisemblablement ce que font plus ou moins explicitement un certain nombre de "bons élèves".

Autrement dit, nous ne faisons pas confiance à la seule quantité, nous estimons que la qualité des résolutions, qui doit être préparée par certains enseignements explicites, qui peuvent figurer dans les manuels, est un paramètre déterminant dans l'apprentissage.

Ensuite nous pensons que l'apprentissage des notions passe par une utilisation précoce (non exclusive) des concepts comme outils (ce qui exclut une trop grande simplification) et par des jeux de cadres nombreux, avec retours au cadre initial : l'enjeu en est la construction du sens des notions, à la fois par déséquilibre/rééquilibration et par imbrication dans un vrai problème - même petit - (en réponse à une question et pas pour une simple mise en application).

Ceci nous amène à privilégier d'autres exercices et dans un autre ordre que ce qui figure actuellement dans beaucoup de manuels.

Cela ne veut pas dire que nous bannissons les exercices plus techniques, nous pensons qu'ils doivent être mélangés aux autres. Nous pensons qu'il peut être plus efficace de ne pas séparer le technique du sens, et que ce technique s'apprend même mieux chez certains si le sens en est conçu en même temps.

Car il y a des conséquences globales sur les élèves des choix des manuels, même indépendamment des résolutions individuelles effectives.

Il y a un premier effet direct, c'est que les élèves résolvent effectivement une partie des exercices des manuels (par l'intermédiaire de l'enseignant en particulier). Le cas échéant, ils peuvent être ainsi privés de certains types d'exercices.

Par exemple, nous attribuons aux exercices comportant des jeux de cadres une grande efficacité dans la construction des connaissances, et nous pensons qu'il faut qu'il en figure un certain nombre dans chaque collection.

De même en ce qui concerne tous les effets positifs éventuels des indications métamathématiques évoquées ci-dessus.

On peut supposer de plus que les élèves infèrent (eux-aussi) de leurs activités, sans doute implicitement, quelque chose sur les mathématiques et la nature de l'activité mathématique.

La répétition de choix analogues dans tous leurs manuels successifs en ce qui concerne les exercices va contribuer, à terme, à leur faire se forger une certaine image qui peut être donc trop réductrice.

Cependant, il y a d'autres conséquences des choix des manuels sur les élèves, non seulement plus individuelles (selon les habitudes de chaque élève) mais surtout qui dépendent des enseignants et de la pratique scolaire effective, c'est ce que nous allons développer en conclusion.

Conclusion : Y aurait-il un bon choix d'exercices pour le manuel ?
Retour à la pratique scolaire et aux représentations.

Nous ne pensons pas qu'il y ait un bon choix d'exercices à présenter sur chaque notion, mais on ne peut éviter de revenir à l'utilisation effective des exercices dans la classe pour s'en convaincre et se faire une idée de ce qu'on peut attendre des choix du manuel.

D'abord un des garants de la qualité de l'enseignement est l'intérêt que prend l'enseignant à ses activités, et donc l'aménagement de nombreuses possibilités de changements. L'utilisation actuelle des textes historiques dans l'enseignement par les uns, l'adoption de travail sur logiciel par les autres nous en semblent des manifestations éclatantes.

De plus, d'une classe à l'autre, d'un programme à l'autre, il peut être nécessaire de changer l'ordre d'introduction des notions, et de réévaluer les prérequis, ce qui modifie les présentations des exercices.

Ainsi, la présentation de problèmes riches, utilisables de plusieurs façons, portant sur plusieurs cadres, où on peut faire varier des paramètres, avec tous les commentaires métamathématiques déjà évoqués, nous semble être un des objectifs, intéressant et pour l'enseignant et pour l'élève, que peut se donner un bon recueil d'exercices de manuel.

Cela ne correspond pas à un seul choix, mais plutôt à un certain type de choix : il reste à l'enseignant une latitude pour choisir tel ou tel énoncé à partir de tel exercice du manuel.

Autrement dit, cela doit aller avec une bonne connaissance des différences entre les divers énoncés que l'on peut associer à une même situation problème, en relation avec les diverses manières dont on les fait résoudre : car c'est la dialectique "~~forme~~ de l'énoncé/~~forme~~ du travail des élèves" qui est déterminante dans le lien entre les activités des élèves et les conséquences en terme d'apprentissage, plus que le strict énoncé de l'exercice. Les prises de décisions de l'enseignant à propos des activités doivent porter sur les deux choses à la fois, et cela ne peut évidemment pas figurer dans le manuel !

Car les choix de l'enseignant peuvent complètement modifier les conséquences des mêmes exercices sur l'apprentissage des élèves. Par exemple un exercice sans beaucoup d'indication peut être formateur sur le plan de la réflexion sur les méthodes, et donc réinvestissable, mais

à condition d'être proposé dans des conditions en permettant la résolution par suffisamment d'élèves (à la maison, ou avec du temps, ou en petits groupes ...). Sinon cet exercice servira à sélectionner les uns, qui n'ont déjà vraisemblablement plus besoin de cet exercice pour leur apprentissage, et à dégoûter les autres... Un énoncé plus facile en revanche, qui peut correspondre au même exercice que le précédent mais avec plus d'indications par exemple, peut servir à "entretenir" une propriété à condition d'être résolu individuellement, complètement, voire en temps limité et/ou rédigé...

On aborde ici le troisième volet, sous-jacent à notre propos, qui est le problème de l'évaluation : car, si c'est avec des exercices (et des problèmes) qu'on apprend (de l'aveu général), c'est aussi avec des exercices (et des problèmes) qu'on évalue... Et bien souvent, ce sont les mêmes.

Et il y a fort à parier que le manque de distinction habituel entre évaluation formative et évaluation sommative pèse lourd dans les choix que l'on trouve dans les manuels. Car un enseignant peut utiliser à l'heure actuelle n'importe quel texte pour les deux usages, puisque la distinction n'existe pas. Seules les toutes premières activités de mises en fonctionnement peuvent échapper à la mise de notes. D'où les habitudes actuelles, qui font porter les évaluations sur les mises en fonctionnement proposées par les manuels et le lien entre nouveaux types d'énoncés et nouveaux types d'évaluation...

Autrement dit, nous retrouvons à un autre niveau l'importance du rapport évoqué ci-dessus entre l'énoncé de l'exercice et la manière dont la résolution en est faite.

La différence entre le recueil brut d'énoncés et leur utilisation effective, qui ne peut être prise en compte par le manuel, apparaît une fois de plus, nous incitant à réclamer aux manuels des collections le plus complètes possible, réellement variées et riches, avec tous les commentaires métamathématiques indispensables aux élèves, et laissant aux enseignants un vrai choix, de vraies possibilités d'adaptation à la situation particulière de chaque classe.

Mais, pour conclure en revenant à notre thème, ce choix est en grande partie fonction des représentations des enseignants, et la dialectique entre eux, les auteurs, et les élèves, dont les attentes sont directement liées à ce que leur dit leur enseignant, rend très difficile toute initiative novatrice dans ce domaine.

Annexes

De I à III textes des questionnaires proposés aux enseignants.

IV texte d'un questionnaire élève.

V la grille.

VI à propos de la consigne "construire" au collège.

VII tableaux I (ouverture des consignes).

VIII tableaux II (utilisation relative des divers outils).

VIII tableaux III (nombre d'outils nouveaux à utiliser par question).

I

QUESTIONNAIRE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Indiquez sur quelle(s) classe(s) vous vous basez pour répondre (quitte à remplir plusieurs questionnaires).

- 1) Qu'entendez-vous par avoir des connaissances en mathématiques (pour un professionnel, pour un élève) ?
- 2) Qu'est-ce qui manque à votre avis aux enfants en échec en maths ?
- 3) Que doit faire un élève (en classe, à la maison) pour progresser en mathématiques ?
- 4) Est-ce que selon vous tous les enfants peuvent acquérir les notions des programmes de maths jusqu'en 3^e ? Jusqu'au niveau terminale B ?
- 5) Le travail collectif en petits groupes peut-il améliorer les résultats a) sur un exercice cherché en groupe ?
b) sur l'apprentissage individuel ?
- 6) Quelle partie du temps pensez-vous qu'il faille consacrer à la résolution des exercices et des problèmes en classe (précisez le cas échéant si vous distinguez différents types de problèmes) ?
- 7) Quel travail à la maison donnez-vous aux élèves ?
- 8) Quels types de devoirs à la maison donnez-vous (annales, réflexion...) ?
- 9) Quels types de contrôle donnez-vous ?
- 10) Quelles sont les principales qualités que vous cherchez à évaluer à l'écrit ?
- 11) Qu'est-ce que vous appréciez le plus chez les élèves (individuellement) ? Dans une classe ?
- 12) Qu'est-ce que vous essayez de valoriser le plus chez les élèves, dans la classe ?
- 13) Attribuez-vous un rôle important à la mémoire ? Pourquoi ?
- 14) Faites-vous un enseignement de méthodes (précisez) ?
- 15) Quels sont les conseils que vous donnez le plus souvent aux élèves, pendant la classe (en distinguant cours et exercices) ? pour le travail à la maison ?
- 16) De quoi dépend un apprentissage efficace des mathématiques ?
- 17) Si vous deviez "caractériser" les maths, que choisiriez-vous dans la liste suivante : théorie, outils pour résoudre des problèmes, langage, outils de calcul, formalisme, texte de savoir, autre ?
- 18) Êtes-vous partisan d'un enseignement d'histoire des maths ? Pourquoi ?
- 19) Qu'est-ce que les nouveaux programmes changent dans l'attitude des professeurs et des élèves (y compris par rapport à l'évaluation) ?
- 20) Que pensez-vous des groupes de niveau ?

Quelles questions importantes manquent-elles à ce questionnaire à votre avis ?

II

1) Avez-vous déjà fait travailler les élèves en petits groupes ?

Précisez si c'est

- * jamais
- * exceptionnellement
- * régulièrement (au cours de chaque année scolaire)
- * il y a longtemps
- * depuis peu de temps
- * selon les années (et alors souvent ou non)
- * selon les classes (collège, lycée, section, élèves)

2) Si vous avez déjà fait travailler vos élèves en petits groupes, comment organisez-vous les séances (dispositions matérielles, constitutions des groupes, justifications et consignes, déroulement ...)

Quels avantages voyez-vous à cette forme de travail ? Quels inconvénients ? (précisez le cas échéant selon les classes)

3) Si vous ne pratiquez pas cette forme de travail, pouvez-vous en préciser certaines raisons (inutilité, bruit-désordre, fatigue pour l'enseignant, perturbations dans le travail des élèves, manque d'efficacité pour l'apprentissage des élèves, perte de temps, bonne occasion pour les élèves pour ne pas travailler, autres...)

4) Est-ce que votre opinion peut évoluer ? Et votre pratique ?

Qu'est ce qui pourrait vous décider à faire travailler les (certains) élèves en petits groupes au cas où vous ne le faites pas encore ?

Qu'est ce qui pourrait vous décider à arrêter de le faire dans le cas contraire ?

III

Entre les contraintes de la réalité et "l'idéal" en matière d'enseignement des mathématiques

Pouvez joindre à vos réponses cette feuille (remplie à partir du point 12) ? Merci

1. Vous avez un certain nombre d'idées sur ce qu'est un bon enseignement de mathématiques : pouvez les mettre toutes en pratique dans toutes vos classes ?

* Si oui précisez ces idées.

* Si non indiquez les contraintes (ou autres) qui vous amènent à ne pas enseigner comme vous voudriez pouvoir le faire.

A chaque fois précisez ce qui n'est pas satisfaisant à votre avis.

2. Depuis combien d'années enseignez-vous ?

3. Avez-vous eu des difficultés particulières les premières années de votre enseignement ?

Si oui qu'est ce qui vous a alors aidé ? Qu'est ce qui aurait pu vous aider ?

4. Pensez-vous que "le niveau a baissé" depuis quelques années ? Si oui précisez.

5. Enseignez-vous de la même façon qu'au début de votre carrière ?

Sinon, qu'est ce qui vous semble avoir changé dans votre manière d'enseigner, et quelles sont les raisons de ces changements ?

6. Qu'est ce qui vous a le plus manqué depuis que vous enseignez ?

7. Quelle a été votre plus grande satisfaction depuis que vous enseignez ?

8. Lisez-vous, utilisez-vous la presse professionnelle ? Si oui pourquoi ?

9. Aimerez-vous suivre une formation continue en mathématiques ? en didactique des mathématiques ? Autre ?

10. Citez quatre mesures précises qui, d'après vous, pourraient contribuer à revaloriser le métier d'enseignant des mathématiques.

11. Indiquez par classe les échelles de note de vos derniers paquets de copies.

12. Etes-vous en collège ☐ lycée ☐ autre ☐

* Etes-vous MA ☐ PEGC ☐ AE ☐ capesien ☐ agrégé(e) ☐ autre ☐

* Avez-vous subi pendant vos études un an au moins de classe préparatoire

* Avez-vous suivi une formation en didactique des mathématiques ?

Si oui de quelle durée (et laquelle) ?

1. Associez un mot à "Mathématiques", "Physique", "Histoire".
2. En quoi consiste d'après vous le travail d'un mathématicien professionnel?
3. Selon vous à quoi les mathématiques servent-elles?
4. Qu'est-ce qu'un bon professeur de mathématiques pour vous? et un bon professeur de langue vivante?
5. Quelles sont les activités qui sont pour vous les plus faciles en mathématiques? Quelles sont celles qui sont les plus difficiles?
6. Quels sont les domaines des mathématiques que vous trouvez les plus intéressants? Les moins intéressants? les plus faciles? Les plus difficiles?
7. Préférez- vous un manuel de mathématiques où
 1. tous les exercices sont corrigés
 2. une partie des exercices est corrigée
 3. des indications sont fournies sur tous les exercices
 4. aucun exercice n'est corrigé
 5. il ne figure qu'une présentation du cours sans exercices
 6. autres
8. Pouvez-vous citer un ou deux mathématiciens célèbres? Quelle est leur époque? Pourquoi se sont-ils illustrés?
9. Imaginons la situation suivante: vous avez un contrôle demain, vous n'avez qu'une heure et demi de travail disponible; vous avez le choix exclusif entre les activités suivantes; que choisiriez-vous?
 1. relire et vous réciter votre cours
 2. refaire les exercices faits en classe
 3. chercher d'autres exercices dont vous avez le corrigé
 4. chercher d'autres exercices non corrigés
 5. autres
10. A votre avis que faut-il faire pour être un bon élève en mathématiques?
11. Est-ce que selon vous tous les élèves peuvent réussir en mathématiques? Pourquoi?

12. Le travail collectif en petits groupes peut-il améliorer vos résultats
1. sur un exercice de mathématiques cherché en groupe
 2. pour votre apprentissage personnel des mathématiques
13. Pouvez-vous citer une activité mathématique extra-scolaire (vie quotidienne, télévision, etc...)?
14. Autre situation: le professeur de mathématiques n'a pas fini son programme; il lui reste deux séances d'une heure; il vous propose de choisir entre
1. un cours d'une heure puis des exercices cherchés en classe
 2. un cours de deux heures très détaillé
 3. un problème sur le sujet, permettant de découvrir la notion à étudier, corrigé au fur et à mesure.

Que choisissez-vous?

15. Pendant un contrôle, vous sêchez sur le dernier problème (le reste est fait). Voici plusieurs réactions
1. vous relisez ce qui précède
 2. pour vous donner des idées vous utilisez des dessins
 3. pour vous donner des idées vous prenez des cas particuliers
 4. vous écrivez toutes les formules que vous connaissez sur le sujet
 5. vous vous paniquez et ne savez plus à quel saint vous vouer
 6. vous laissez tomber très vite
 7. vous cherchez systématiquement tout ce que vous avez à votre disposition sur le sujet
 8. vous attendez que ça vienne
 9. autres

Indiquez ce que vous faites dans ces conditions.

16. Pensez-vous qu'il est possible d'enseigner des méthodes générales pour la résolution des problèmes de mathématiques?
17. Etes-vous partisan d'un enseignement de l'histoire des mathématiques? Pourquoi?

Dans les questions 7, 9, 14, 15 indiquez simplement un numéro (le cas échéant plusieurs) sauf si vous choisissez "autres", auquel cas vous êtes priés de développer.

V La grille (pour chaque question des exercices, puis pour chaque outil)

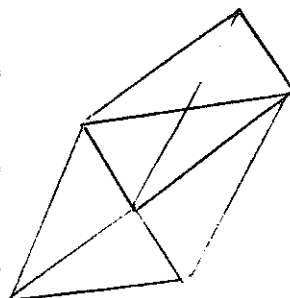
place /cours
 exercice dans une liste
 titre de la liste : sans
 réf. cours
 réf. type exer.
 réf. outil
 nombre exer peu différents
 suite d'un exercice ident.
 type du problème
 ouverture /résultat
 une étape ou plusieurs
 enchainement artificiel
 il existe des indices externes
 il existe des implicites
 ouverture /outil
 types indications : sans
 impl.
 par place
 par titre
 par précéd.
 mot indicateur
 formule indicatrice
 théorème indicateur
 cadre indicateur
 Outil(s) à utiliser
 algorithmisable
 dans quel(s) cadre(s)
 Travail sur des éléments génériques
 particul.
 changement de cadres néces.
 explicite
 implicite
 Rôle de la figure (du graphique) :
 aide à la conjecture
 guide de la démonstration
 Rôle des calculs
 mise en fonctionnement :
 un seul théorème (définition, formule)
 plusieurs " "
 outils anciens
 il y a des enchainements indiqués
 à la charge de l'élève
 plusieurs méthodes sont possibles
 interprétations demandées
 changements points de vue
 " " de cadres
 conjecture
 contrôle
 exercice généralisable
 généralisation explicitée
 applications possibles
 proposées

VI A propos de la consigne "construire" au collège (implicites et doubles statuts des mots construire, tracer, placer, par rapport à démontrer).

Exemple tiré du manuel I (4^{me}).

"Répondre aux questions placées à la suite du programme de construction illustré par la figure

- 1) tracer un triangle ABC rectangle en A.
- 2) Tracer le quadrilatère ABCD de telle sorte que ce soit un parallélogramme
- 3) Tracer le quadrilatère ACDE de telle sorte que ce soit un parallélogramme.
- 4) Tracer le quadrilatère BCEF de telle sorte que ce soit un parallélogramme.
- 5) Prolonger CA pour obtenir le segment CF.



Questions

- 1 Reproduire la figure, en respectant les angles droits et les parallélismes apparents.
2. D'après le texte du programme de construction, placer sur la figure les lettres de A à F désignant les points.
3. Qu'est ce que le parallélogramme ACDE a de particulier ? A cause de quelle propriété a-t-il cette particularité ?
4. Qu'est ce que le parallélogramme BCEF a de particulier ? A cause de quelle propriété a-t-il cette particularité ?

Réponses :

Le parallélogramme ACDE est un rectangle, parce qu'il a un angle droit (an A) *. Noter que les autres angles sont aussi droits, mais ce n'est pas à cause d'eux que ACDE est un rectangle.

Le parallélogramme BCEF est un losange parce que ses diagonales sont perpendiculaires**.

En note * : remarquons que le seul angle qui soit donné comme droit dans l'énoncé c'est l'angle BAC, qui n'est pas un angle de ACDE.

** : or il faut d'abord montrer que C, A et F sont bien alignés.

VII

	chapitre barycentre * chapitre calcul vectoriel		
N.	6%	*	29%
I.	6%	*	
H.	16%	*	
T.	5%	*	
D.	23%	*	43%

Tableau I (Pourcentage d'exercices dont la consigne est ouverte)
et les exercices "Pour chercher"

(les "problèmes" Y sont traités à part, on exclut les exercices de physique, et on n'analyse que les listes en fin de chapitre)

propriétés %(total)	objet nouveau					outil ancien	outil nouveau		
	applic. déf.	recon. déf.	coordon. baryc.	homogén.	associa.	vector.	alignem.	concou cu parallé lisme	lieux
X.									
H. (56)	41%	7%	5%		11%	48%	7%	7%	12,5%
I. (17)	54%	18%	0	0	29%	35%	12%	18%	6%
D. (30)	43%	7%	10%	0	20%	23%		10%	
T. (40)	62%	30%	7,5%	0	37,5%	62,5%	2,5%	15%	0
N.	65%	21%	12%	3%	38%		6%	9%	0

Tableaux II*III (mise en fonctionnement relative de différentes propriétés explicites du cours dans le chapitre barycentre) - EXERCICES SEULS - (listes à la fin du chapitre) - ON ENLÈVE LES EXERCICES LIÉS À LA PHYSIQUE

ancien

Outil Exer	applic déf.	recon. déf.	coordon. baryc.	homogén.	assoc.	placer droite plan	vecto riel	anal. y hq	géom
29a31									
32									
33									
34, 35									
36									
37									
38									
39									
40									
41									
42									
43, 44									
45								↔	barycentre au 1/2 //
46								↔	"
47								↔	"
48									
49								↔	barycentre au 1/2 //
50a53									
54									
55									
56									
57								↔	
58									
59									
60									
61									
63									barycentre au 1/2 //
64									
65									
66									
67									
68								↔	barycentre au 1/2 //
69								↔	barycentre au 1/2 //

les flèches
indiquent des
changements de cadres

Tableau III (manuel T. -
seuls exercices)
sur BARYCENTRES

ANCIEN

I.

Outil Exer	applic déf.	recon. déf.	coordon.	homogén.	assoc.	placer droite plan	vect.	anal.	géom
1.1									
.2							<		
.3							<		
2.1									
.2								<	outil pencil.
3.							<		
4.							<		outil
5.							<		outil
6.									outil laser
7.									
8.							<		
9.									lieu(outil)
10.									
11.a									
.b									
.c									
.d									outil (laser)

Tableau III

BARYCENTRES

ANCIEN

D.

Outil Exer	applic déf.	recon. déf.	coordon.	homogén.	assoc.	placer droite plan	vect.	anal.	géom
26.									
27. a									
. b									reconnaître appl.
28									
29									
30 a) b)									
31								→	
32 a) b) c)									
33 a) b) c)									
34 a) b) c)									ou il concerns
35 a) b)									ou il concerns
36									
37								↔	
38 a) b)									
39 a) b)									ou il concerns
40									
41									
42									

Tableau III

BARYCENTRES

Bibliographie très sommaire

A propos de représentations sociales

J.C. Abrie Coopération, compétition et représentations sociales, Editions DelVal, Suisse, 1987.

D.Jodelet (dir.) Les représentations sociales, PUF, 1989.

A propos de représentations métacognitives

E. Bautier et A. Robert [1] "Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n°41, IREM Paris SUD, Avril 1987.

[2] Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques, Revue française de Pédagogie, n°84, p.13-20, 1988.

Robert et Robinet [1] Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement, Cahier de DIDIREM, n°1, Irem Paris Sud, 1989.

Les analyses d'exercices sont très nombreuses, nous renvoyons en particulier aux publications du groupe de l'APMEP travaillant sur les manuels.

QUEQUES RESULTATS A PROPOS DES EXERCICES DES CHAPITRES "CALCUL VECTORIEL" DANS DEUX MANUELS DE SECONDE (NOUVEAUX PROGRAMMES)

Les exercices de fin de chapitre ont été analysés quant aux objets et outils qui interviennent, quant aux changements de cadres et quant à l'ouverture des questions posées ; les résultats concernant les exercices portant sur translation et symétrie ont déjà été donnés dans le texte et ne sont pas répétés ici.

DEGRE D'OUVERTURE DES QUESTIONS

Rappelons qu'on appelle "question ouverte", les questions où on ne donne pas d'indication à l'élève ni sur la réponse ni sur l'algorithme qui permet de trouver la réponse ; par exemple, construire le point M tel que $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ n'est pas une question, ouverte parce qu'elle renvoie à une tâche bien explicitée dans le cours, même chose pour trouver les coordonnées du point M où l'élève sait parfaitement ce que l'on attend de lui ; en revanche, D et D' étant deux droites concourantes en O et A un point situé ni sur D ni sur D', construire un point B de D et un point B' de D' tels que $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OB'}$ est une question ouverte.

	Questions ouvertes	Questions fermées
Manuel N (71 questions)	18%	82%
Manuel D (109 questions)	17%	83%

On peut remarquer que le degré d'ouverture des questions ne discrimine pas du tout les deux manuels et qu'en plus les questions ouvertes ne sont qu'assez peu utilisées.

MISE EN OEUVRE DES NOTIONS

Pour chaque question, nous avons noté quelle était la notion utilisée ou invoquée et si elle intervenait comme objet ou comme outil ; nous avons obtenu les résultats suivants (nous ne revenons pas sur symétrie et translation) :

Notions	Manuel N (71 questions)	Manuel D (109 questions)
Calcul algébrique		
Vecteurs	2	7
Bipoints	12	23
Total	14 soit 20%	30 soit 27%
Relation de Chasles	10 soit 14%	20 soit 18%
Définition de l'égalité de vecteurs (parallélogramme)	8 soit 11%	7 soit 6%
Définition de la colinéarité (outil)	8 soit 11%	4 soit 4%
Colinéarité (objet)	1	10 soit 9%
Définition vectorielle du milieu (outil)	9 soit 13%	10 soit 9%
Définition vectorielle ou autres du milieu (objet)	1	2
Définition de la somme de vecteurs (outil)	2	5 soit 5%
Outils géométriques anciens	3 soit 4%	2

On peut remarquer une différence avec les chapitres sur le barycentre qui introduisent un objet mathématique ; en effet dans ce chapitre, aucun objet n'est introduit, on se contente de définir l'égalité de vecteurs en prenant des représentants et on ne définit pas les vecteurs ; il n'y a donc pas d'objet sur lequel on puisse raffiner, c'est plutôt une leçon où on (ré)introduit des algorithmes : calcul vectoriel, relation de Chasles, reconnaissance sur la figure de l'équipollence de bipoints (dans un langage non utilisé dans les manuels), reconnaissance de la colinéarité grâce à une égalité entre vecteurs ou à une relation sur les coordonnées. Les activités reposant sur l'utilisation d'un algorithme sont largement majoritaires.

Dans le manuel D, il y a une utilisation des équations implicites et paramétriques des droites ($\frac{2}{3}$ des fois, il s'agit de peaufiner l'objet et $\frac{1}{3}$ des fois, l'équation sert comme outil et on indique qu'il doit servir), alors que le manuel N ne réétudie pas ce point à propos de l'introduction des vecteurs. L'étude de

D est comme pour le barycentre très centrée sur l'objet, beaucoup moins sur son utilité.

CHANGEMENTS DE CADRES

Dans les exercices de ce chapitre, les changements de cadres ne servent à rien et portant ils sont exigés dans de nombreux exercices, tout se passe comme si il fallait entraîner les élèves à faire des changements de cadres avant de leur proposer des exercices où ils auraient de l'intérêt. C'est une sorte de fonctionnement "à blanc" de l'outil, ce qui ramène à l'idée d'entraînement de type militaire.

Changements de cadres	Manuel N (71 questions)	Manuel D (109 questions)
Passage vecteurs-graphique ou graphique-vecteurs		
Bipoints	5	12
Vecteurs	0	9
Total	5 soit 7%	21 soit 19%
Passage coordonnées-vecteurs ou vecteurs-coordonnées		
Bipoints	11	3
Vecteurs	9	1
Total	20 soit 28%	4 soit 4%

Les changements de cadres sont très nombreux dans les deux manuels, ils ont en commun d'être le but de la tâche et non un outil de résolution, mais les choix des auteurs différent, les uns privilégient l'implantation géométrique des vecteurs, l'autre l'implantation numérique.

En conclusion, dans ce chapitre des outils fonctionnent, mais le fonctionnement de l'outil est le résultat de l'action et il n'y a pas eu (ou très rarement) résolution d'un problème. Cela pourrait rejoindre une conception assez pragmatique de l'apprentissage calquée sur l'apprentissage de pratiques : par exemple, les élèves apprennent à piloter un tour en fabriquant des pièces "poubelles". Mais ici les élèves ne fabriquent même pas de résultats "poubelles", leurs machines tournent à vide.

TITRE :

Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels

AUTEUR (S) :

Robert Aline - Robinet Jacqueline

RESUME :

Les auteurs rappellent la problématique des représentations métacognitives (conceptions sur les mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage). Elles proposent ensuite une grille d'analyse des exercices de manuels, et en dernière partie, elles mettent en rapport les analyses de manuels et les représentations qu'on peut en déduire des auteurs. Elles concluent à une grande uniformité des exercices, qui correspond à des attentes et des lecteurs, et des éditeurs ...

MOTS CLES :

analyses d'exercices de manuels - représentations

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

**Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE**

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1989

ISBN : 2-86612-097-3