INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

2

JUIN 1989

CAHIER DE DIDIREM

LA GENESE DU CALCUL ALGEBRIQUE (Une esquisse)

PAR J. ROBINET

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE-PARIS VII

LA GENESE DU CALCUL ALGEBRIQUE (une esquisse)

De nombreux articles font état des difficultés des élèves à partir de la quatrième dans la manipulation du calcul algébrique. Une expression telle que $(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$ reste incompréhensible pour un bon nombre d'élèves. On peut se demander comment et pourquoi est né ce formalisme algébrique, s'il correspond à une économie dans certains types de problèmes (cf. C.Laborde qui a montré que le langage symbolique sert à désigner, rappeler, renvoyer, tout cela sans équivoque, etc...); de plus, il est intéressant de savoir si sa naissance s'est faite rapidement ou non, avec ou sans difficultés? Utilise-t-on dans l'enseignement ce formalisme dans les mêmes conditions et avec les mêmes motivations que les mathématiciens qui l'ont inventé? Si nous arrivons à répondre à ces questions, peut-être comprendrons-nous mieux pour quelles raisons le formalisme du calcul algébrique reste hermétique à certains et peut-être trouverons-nous quelques indications pour en améliorer l'enseignement .

Pour essayer de traquer au plus près le pourquoi et le comment de la naissance du calcul algébrique nous avons utilisé principalement les écrits des historiens et des épistémologues à propos de l'arithmétique et de l'algèbre. Plus précisément, nous indiquerons par une écriture différente les citations ou traductions que nous utiliserons. Après la lecture de tous ces textes nous sommes tentées de partager la genèse du calcul algébrique en deux périodes bien distinctes que l'on pourrait appeler "l'avant-Viète" et "l'après-Viète" car l'intervention de ce mathématicien français de la deuxième moitié du seizième siècle semble déterminante dans le développement du calcul algébrique.

AVANT VIETE

Cette période couvre un très grand nombre de siècles, car dès la plus haute antiquité Babylonienne et Egyptienne on trouve des textes montrant la résolution de problèmes d'algèbre

Exemples de problèmes égyptiens

(Problème 76 du papyrus de Rhind).
*** Pains de 10 , 1000 échangés contre des pains de 20 et 30 . Combien?**

Solution rédigée par le scribe:

$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	Faire pour trouver 30	1	$2\frac{1}{2}$
$(1\frac{1}{2})$	(1)		/10	25
Total $2\frac{1}{2}$			Total 12	

Faire la base de 1000 pains en farine : 100 hekat (unité de céréales) , faire 12 fois cela donne 1200.

De manière moderne, on algébrise par: $\frac{1000}{10} = \frac{x}{20} + \frac{x}{30}$.

Le scribe a calculé $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{2\frac{1}{2}}{30}$, le calcul de droite est la division de 30 par $2\frac{1}{2}$.

*** Calcul d'un rectangle (problème 6 du papyrus de Moscou) . Si on te donne un rectangle de 12 de surface, $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ de la longueur pour largeur.**

Le scribe a écrit: **Calcule avec $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ pour trouver 1. Il vient $1\frac{1}{3}$. Calcule avec ce 12 qui est dans la surface $1\frac{1}{3}$ fois. Il vient 16. Calcule sa racine carrée.** Il vient 4 pour la longueur. Son $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, soit 3 pour sa largeur.

En langage moderne, $l*L=12=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})*L^2$. Le scribe a effectué $1:(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=1+\frac{1}{3}$ puis $12*(1+\frac{1}{3})=16$ puis $\sqrt{16}=4$ et $4*(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=3$ donc L=4 et l=3.

Ces deux problèmes sont extraits de : L'algèbre et le calcul en Egypte Antique par O.Keller , document de l'Irem de Lyon n°54 Juin 1986.

<u>Exemple de problème babylonien (1700 av J.C.)</u>

Mon côté , de la surface j'ai soustrait , 14 .30 ; 1 l'unité tu poses. La moitié de 1 tu fractionnes 30 et 30 , tu multiplies 15 à 14.30 , tu ajoutes 14.30.15 ; 29.30 est la racine carrée 30 que tu as multiplié, à 29.30 tu ajoutes 30 le côté du carré .

Les Babyloniens calculent en base 10 et 60, en langage moderne on écrirait donc $x^2-x=(14*60)+30$, x^2-x est le début de $(x-\frac{1}{2})^2$ soit en base 60 $x-\frac{30}{60}$. Donc

$(x-\frac{30}{60})^2=(14*60)+30+\frac{15}{60}$ ou encore $(x-\frac{30}{60})^2=14.30.15$ et sur une table de carrés on peut lire que $(29.30)^2=14.30.15$ donc $x=\frac{30}{60}+29+\frac{30}{60}$ soit $x=30$.

Ce problème est extrait de "Mathématiques au fil des âges" écrit par le groupe Irem-Epistémologie et histoire et paru chez Gauthier-Villars Paris 1987. C'est le deuxième des 24 problèmes du second degré que comporte la tablette 13901 du British Museum.

Dans le livre II des éléments d'Euclide, on trouve une démonstration géométrique de l'égalité $(a+b)^2= a^2 + b^2 + 2ab$, le produit ab n'est pas ici un nombre mais l'aire du rectangle de longueur a et de largeur b. Il n'y a pas à proprement parler de calcul algébrique puisque ab est d'une nature différente de a et de b .

Toute cette période antique est caractérisée par l'utilisation du discours dans la résolution des problèmes. Il y a très peu de formalisation : certes les nombres sont écrits en écriture symbolique mais il n'existe pas de signe opératoire. Le premier essai de formalisation apparaît dans les travaux du mathématicien grec Diophante que l'on situe vers 300 après J.C.

DIOPHANTE

L'inconnue est définie par Diophante comme contenant un nombre indéfini d'unités, il la représente par ς'. Par contre x^2 est représenté par Δ^{γ}, x^3 par K^{γ}, x^4 par $\Delta^{\gamma}\Delta$, x^5 par ΔK^{γ}, x^6 par $K^{\gamma}K$. Diophante écrit $K^{\gamma}\bar{\alpha}\Delta^{\gamma}\bar{\iota}\ \bar{\gamma}\ \varsigma\bar{\varepsilon}\ \mathring{M}\bar{\beta}$ pour $x^3 +13x^2 + 5x + 2$, le signe + est omis et les nombres sont formalisés par des groupes de lettres surlignés par exemple : $\bar{\iota}\ \bar{\gamma} =13$ et $\mathring{M}\bar{\beta}=2$ $\mathring{M}$ signifiant que x n'intervient pas, il s'agit donc d'une succession de monômes sans signe additif, pour marquer le signe - on trouve le signe Ψ écrit la tête en bas et tous les monômes négatifs sont placés après les positifs. Pour l'égalité, il semble que les scribes qui ont recopié successivement les oeuvres de Diophante aient écrit ι, mais la notation initiale était, d'après Cajori, ι^{σ}.

Ceci dit, Diophante utilise son symbolisme pour abréger son écriture, mais il n'opère pas dessus lorsqu'il résout des problèmes. Pour la démonstration, il utilise le discours et des exemples numériques ; enfin, comme les Egyptiens et les Babyloniens, il ne traite que des petits problèmes isolés .

Exemple

"Diviser un nombre donné en deux nombres ayant une différence donnée". Etant donné le nombre $\bar{\rho}$ (100), et la différence $\mathring{M}\bar{\mu}$ (40). Pour trouver les nombres, prenons le plus petit nombre $\varsigma\bar{\alpha}$ (x). Alors le plus grand nombre sera $\varsigma\bar{\alpha}\ \mathring{M}\ \bar{\mu}$ (x+40).

Alors les deux ensemble donnent $\varsigma\bar{\beta}$ $\overset{o}{M}$ $\bar{\mu}$. Mais ils doivent donner $\overset{o}{M}$ $\bar{\rho}$, donc $\overset{o}{M}$ $\bar{\rho}$ est égal à $\varsigma\bar{\beta}$ $\overset{o}{M}$ $\bar{\mu}$. Je prends $\overset{o}{M}$ $\bar{\mu}$ unités de $\bar{\rho}$ et de même $\bar{\mu}$ des $\bar{\beta}$ nombres et $\bar{\mu}$ unités. Les $\varsigma\bar{\beta}$ (2x) sont égaux à $\overset{o}{M}$ ξ (60). Alors chaque ς devient $\overset{o}{M}$ $\bar{\lambda}$ (30).

Les deux nombres demandés sont $\overset{o}{M}$ $\bar{\lambda}$ pour le plus petit et $\overset{o}{M}$ $\bar{o}$ pour le plus grand et la preuve est claire.

En langage moderne on traduirait la démonstration de Diophante en :
$x+x+40=100 \Leftrightarrow 2x+40=100 \Leftrightarrow 2x+40-40=100-40 \Leftrightarrow 2x=60 \Leftrightarrow x=30$.
Ce texte est tiré des "travaux perdus de Diophante" écrit par R.Rashed .

C'est dans un tout autre domaine que les mathématiciens indiens vont contribuer à faire progresser le calcul algébrique.

Apports des Indiens dans le développement du calcul algébrique

Les Indiens vont aider au progrès de la formalisation en mettant au point une numération extrêmement performante : la numération décimale de position telle que nous l'utilisons aujourd'hui. La première trace de numération décimale de position avec un zéro, ayant toutes les propriétés opératoires actuelles, se trouve vers 692 après J.C. (le premier document vraiment incontestable datant de 876). De plus, les Indiens utilisent fréquemment les nombres négatifs qu'ils distinguent des nombres positifs en les surmontant d'un point. Pour les opérations, ils n'ont pas de symbole, parfois ils utilisent une abréviation du mot désignant l'opération ; ils n'ont pas non plus de signe pour désigner l'égalité mais ils superposent les expressions qui sont égales, de même ils désignent les fractions en écrivant l'un au dessous de l'autre le diviseur et le dividende. L'inconnue est désignée par des mots abrégés : rupa (abrégé en "ru") désigne le nombre qui n'est pas le coefficient de l'inconnue ; caroni (abrégé en "c") placé devant un nombre désigne la racine carrée de ce nombre ; yavat-tavat (abrégé en "ya") désigne l'inconnue; yavat-varga donne "yav" pour le carré de l'inconnue. Pour désigner d'autres inconnues, ils prennent des abréviations de noms de couleurs : "ca" pour calaca qui veut dire "noir" désigne la deuxième inconnue, par exemple.

En règle générale, les Indiens utilisent leur formalisme pour mathématiser des petits problèmes, présentés souvent comme des historiettes, mais ils opèrent assez peu sur l'écriture symbolique et leurs argumentations reposent essentiellement sur le discours.

On peut cependant trouver des traces d'essais de systématisation dans le traitement de l'équation du second degré en écriture symbolique ; par exemple,

yav 0 ya 10 ru $\dot{8}$
yav 1 ya 0 ru 1
Brahmagupta écrit : "ces soustractions étant faites , on a :

yav 1 ya $\dot{1}0$

ru $\dot{9}$.
Maintenant du nombre, multiplié par 4 fois le carré et ajouté à 100 fois le carré du terme du milieu, la racine carrée étant extraite et diminuée du milieu, le reste est 18 divisé par 2 fois le carré donne la valeur."

(cité d'après le livre de Colebrook "Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta et Bhaskara" par F.Cajori dans "A history of mathematical notion"). En langage moderne, Brahmagupta part de $10x-8=x^2+1$ qu'il transforme en $x^2-10x=-9$, il multiplie par 4, soit $4x^2-40x=-36$ puis il ajoute 100, il obtient alors $4x^2-40x+100=64$ soit encore $(2x-10)^2=8^2$ d'où il conclut $x=9$.

Avec Bhaskara (12ième s.), il y a un progrès dans le traitement des écritures symboliques et dans le traitement des équations du second degré. Par exemple, toujours cité dans le livre de Cajori, on trouve:

"Si on a 3 inconnus , 5 noirs , 7 bleus tous positifs ,combien font-ils avec 2 négatifs , 3 et 1 des mêmes respectivement , ajoutés ou soustraits?
ya 3 ca 5 ni 7 somme ya1 ca 2 ni 6

ya $\dot{2}$ ca $\dot{3}$ ni $\dot{1}$ différence ya 5 ca 8 ni 8 ."

Ce qui revient à dire en langage moderne, $A=3x+5y+7z$ et $B=-2x-3y-z$ $A+B=x+2y+6z$ et $A-B=5x+8y+8z$, on peut conjecturer qu'il y a ici un souci d'établir des résultats sur des écritures.

Ces résultats ne sont établis que sur des exemples explicites, mais suffisamment généraux pour qu'on puisse éventuellement en tirer des "règles" de calcul.

Etudions un autre exemple, tiré de "Mathématiques au fil des âges" (déjà cité):

"La cinquième partie de la troupe moins 3, élevée au carré, était allée dans une caverne, un singe était en vue, dis combien ils étaient?

Ici la troupe est ya1. La cinquième partie est ya $\frac{1}{5}$ moins 3 c'est ya $\frac{1}{5}$ ru $\frac{\dot{1}5}{5}$. Ceci élevé au carré donne yava $\frac{1}{25}$ ya $\frac{\dot{3}0}{25}$ ru $\frac{250}{25}$. Ceci est égal à la troupe ya1. En réduisant les deux côtés de l'équation au même dénominateur et en faisant des soustractions identiques, l'équation devient yava1 ya$\dot{5}5$ ru0

yava0 ya 0 ru2$\dot{5}$0 en multipliant par 4 et en ajoutant un nombre égal au carré de 55, les racines extraites sont ya 2 ru $\dot{5}5$
ya 0 ru 45 ."

On peut traduire ceci en langage moderne par :

$\frac{x^2}{25} - \frac{30x}{25} + \frac{250}{25} = x$ soit $x^2 - 55x = -250$ ou $4(x^2-55x)+55^2 = -1000+ 55^2$ soit encore $(2x - 55)^2 = 45^2$ d'où $2x - 55 = 45$. Bhaskara remarque alors que l'on trouve deux valeurs 50 et 5, mais que 5 ne convient pas, en effet dans l'énoncé on divise 5 par 5 puis on retranche 3 et ceci est impossible car -2 ne peut pas être un nombre d'individus.

On peut noter que le traitement de l'équation du second degré est le même que celui de Brahmagupta : soit à résoudre $ax^2+ bx = c$, on multiplie par 4a on obtient $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$, on ajoute b^2 des deux côtés, et on a $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$ ou encore $(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$. Mais Bhaskara prend en compte le fait que l'équation du second degré peut avoir deux racines, ce qui n'est pas évident chez Brahmagupta, (cela vient peut-être de l'influence des découvertes arabes, voir plus loin).

Bien que les résultats soient présentés comme solutions de problèmes posés sous forme de devinettes, ce qui leur donne un peu l'allure de "recettes", **on peut reconnaître chez les Indiens les prémisses du calcul algébrique et de la théorie des équations. Ils ont amené une numération très performante, l'utilisation de nombres négatifs et de nombres irrationnels et, enfin, un symbolisme un peu plus élaboré que celui de Diophante.** Ces travaux, de même que ceux des mathématiciens grecs et en particulier ceux de Diophante, sont bien connus des mathématiciens arabes ; ceux-ci vont faire avancer le calcul algébrique, non pas en améliorant la formalisation, mais en se posant et en résolvant des problèmes "théoriques" d'algèbre, ils vont en effet étudier de manière systématique la théorie des équations .

APPORTS DES ARABES DANS LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

AL KWARIZMI

Au IX^ième^s., il va, d'une part, introduire la numération décimale avec tous ses algorithmes et, d'autre part, étudier systématiquement les équations du second degré qu'il classe en six types (il n'utilise pas les nombres négatifs) : $ax^2= bx$, $ax^2= c$, $bx= c$, $ax^2+ bx = c$, $ax^2+ c = bx$, $ax^2=bx+c$. Al Kwarizmi donne, pour la résolution des équations, des argumentations (au moins pour les trois derniers types) qui restent très proches des explications géométriques des "Eléments" d'Euclide. De même, il explicite le fait que certaines équations ont deux solutions (il étudie aussi le cas de la racine double) mais il n'utilise pas les nombres négatifs et peu les nombres irrationnels.

ABU KAMIL

A la fin du IX^ième^s. et au début du X^ième^s., il poursuit et améliore les travaux d'Al Kwarizmi ; il calcule comme les Indiens sur les nombres négatifs et sur les irrationnels (en particulier, il utilise des résultats du type :

$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}$ mais il utilise aussi plusieurs inconnues ce qui lui permet le choix d'inconnues auxiliaires dans des problèmes complexes.

AL KARAGI et AL SAMAW'-AL

Plus tard (fin X^{ième}, début XI^{ième}s.), les "Arithmétiques" de Diophante sont traduites en arabe et vont influencer les Arabes ; l'algèbre devient explicitement l'arithmétique de l'inconnue, elle consiste en des calculs sur des expressions indépendamment des grandeurs représentées (longueur, surface ...). Al Samaw'al écrit que l'algébriste doit "opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithmétique opère sur les nombres". On trouve dans les travaux de ces Arabes, des règles portant sur des quantités négatives comme $-(-ax^n)=ax^n$ sans qu'il y ait de référence à une quantité plus grande dont elles seraient soustraites ou encore des calculs complexes sur des expressions dont la forme moderne serait $\sum_{i=-p}^{i=+p} a_i x_i$ où les a_i sont des nombres explicites , des rationnels positifs ou négatifs . Al Samaw'al palliait la difficulté de calculer sur de telles expressions, due à l'absence de formalisation, par l'utilisation de tableaux, ainsi $\sum_{i=-p}^{i=+p} a_i x_i$ est représenté par la suite des coefficients : a^{-p}, a^{-p+1}, ...,a^{-1}, a^0, a^1, ..., a^{p-1}, a^p ; par exemple, il représente l'expression $2x+3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ par le tableau:

2	3	-1	2
x	1	x^{-1}	x^{-2}

cette symbolisation en tableaux lui permet de multiplier x^{-1} par x en se déplaçant d'une colonne vers la droite et de diviser en se déplaçant d'une colonne vers la gauche. Cette technique lui permet des calculs très complexes comme l'extraction de la racine carrée de $25x^6-30x^5+9x^4-40x^3+8x^2-116x+64-48x^{-1}+100x^{-2}-96x^{-3}+64x^{-4}$.

Le problème d'Archimède (trouver un plan qui coupe la sphère en deux calottes dont le rapport des volumes est un rapport donné), exposé dans son traité "Sur la sphère et le cylindre", a, semble-t-il, lancé l'intérêt pour les équations du troisième degré, et c'est

AL KAYYAM

mathématicien arabe du XI^{ièmes}. qui va faire la théorie des équations du 3^{ième} degré. Il définit précisément l'algèbre : "...[c'] est un art scientifique dont l'objet est le nombre entier et les grandeurs mesurables, en tant qu'inconnus mais rapportés à une chose connue par laquelle on peut les déterminer ; ...". Pour lui, une équation nécessite à la fois une démonstration "algébrique" et une construction géométrique, et il insiste sur le fait qu'il constate (sans le construction géométrique, et il insiste sur le fait qu'il constate (sans le démontrer) qu'il ne peut fournir les racines de certaines équations du $3^{ième}$ degré par radicaux et qu'il est obligé de s'appuyer sur les "sections coniques" d'Apollonius. Il donne une classification des équations du $3^{ième}$ degré et des constructions géométriques des racines ; il étudie les équations sous une forme générale : coefficients positifs quelconques mais sans aucun symbolisme (c'est quand même un progrès par rapport aux études précédentes où les divers types d'équations étaient toujours représentés par des exemples typiques).

On peut dire que les mathématiciens arabes ont fait énormément progresser le calcul algébrique abstrait, et cela est d'autant plus surprenant qu'ils n'utilisaient que peu d'écriture symbolique (sauf les tableaux d'Al Samaw'al). Mais ils ont transposé tous les calculs arithmétiques aux calculs sur l'inconnue et ils ont fait la première étude générale d'un type d'équation ; ceci montre qu'un pas est fait de la preuve par l'utilisation d'exemples typiques vers la démonstration quantifiée.

Al Kayyam peut nous servir de transition pour passer à la deuxième grande période de l'histoire du calcul algébrique à savoir:

L'APRES VIETE

Les découvertes de Viète ne sont pas issues de rien, elles ont été largement préparées par le travail des mathématiciens antiques et arabes comme nous l'avons déjà vu, mais aussi par le travail de certains mathématiciens européens du $15^{ièmes}$. qui d'une part redécouvrent les mathématiques grecques et d'autre part s'initient aux mathématiques arabes. Ils ont poursuivi le travail dans deux directions :

* A propos du symbolisme :

On a vu que des symboles étaient utilisés pour l'inconnue et ses puissances chez Diophante et chez les Indiens et que les mots "chose" et "racine" la désignaient chez les Arabes. Certains mathématiciens du $15^{ièmes}$. essaient d'élaborer une notation plus commode à l'aide d'abréviations des mots "res" et "radix" ou "causa" et "cosa" qui sont des traductions de "chose" et "racine". Chez Regiomontanus (1470) , on trouve ξ et $\tilde{C}$ pour "res" et "census". Rudolph puis Stiffel développent un système de notations pour l'inconnue et ses puissances $x=\tilde{\chi}$ et A,B,C,D pour les autres inconnues, idée reprise et développée par Butéo (1559).

*A propos de la théorie des équations:

Le développement de cette théorie est inséparable de celui du calcul algébrique abstrait, puisque toute cette formalisation allait à rendre plus aisé le traitement des équations. Au $16^{ièmes}$., l'équation du $3^{ième}$ degré est résolue de manière algébrique comme l'avait prévu Al Kayyam. C'est l'école italienne qui s'est attaquée à ce problème. Il semble à peu près certain que c'est Scipione del Ferro qui a donné le premier une formule de résolution par radicaux des équations de la forme $x^3+ax=b$ (en notation moderne), formule qui amène Cardan (1501-1576) et ses élèves à calculer sur des racines carrées de nombres négatifs, alors que le statut des nombres négatifs n'était pas encore clairement établi : Bombelli, abordant le cas irréductible des équations du 3ième degré, décide d'opérer au moyen des racines carrées des nombres négatifs en leur appliquant les mêmes règles qu'aux racines carrées des nombres positifs (Algebra 1572); il considère les racines d'équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés de 4 signes possibles : piu pour +, meno pour -, piu di meno pour $+\sqrt{-}$, meno di meno pour $-\sqrt{-}$ et il énonce des règles pour additionner et multiplier des nombres précédés d'un de ces quatre éléments. Bombelli énonce donc de manière consciente des règles de calcul sur de nouveaux nombres, faisant faire ainsi des progrès au concept de loi de composition. Ce sont donc tous ces travaux antérieurs qui ont permis à François Viète (1540-1603) de faire évoluer profondément les notations mathématiques. Nous avons déjà vu que l'usage des lettres en algèbre était déjà largement répandu à cette époque ; cependant avant Viète l'usage des lettres en algèbre ressemble fort à l'usage des lettres en géométrie du temps des Grecs, c'est à dire que les lettres servent à nommer des objets mais qu'il n'y a ensuite ni rappel, ni renvoi, ni a fortiori construction, ni opération sur cette écriture. Si une figure est construite petit à petit on attache à chaque nouveau point une lettre nouvelle, sans aucun rapport avec celles qu'on a déjà utilisées. On peut quand même trouver quelques exemples où le symbole utilisé se réfère aux symboles précédents : si A et B sont deux points, (AB) est le nom de la droite qui les joint mais c'est assez rare et, par exemple, l'intersection de deux droites D et D' porte rarement un nom qui évoque son mode d'obtention. Pour ce qui est de l'algèbre avant Viète, on peut donner des exemples tout à fait semblable du fonctionnement du symbolisme ; Maurolico, par exemple, utilise des lettres pour représenter des nombres, mais s'il les additionne, il nomme la somme d'une lettre qui est sans rapport avec les lettres la composant. Seule l'utilisation de l'inconnue est régie par un algorithme (limité, puisque le carré de l'inconnue porte souvent un nom qui ne rappelle pas celui de l'inconnue), Viète a eu l'idée de combiner la méthode traditionnelle et une méthode plus algorithmisée. Il a pensé à indiquer par des lettres non seulement les inconnues ce qui était habituel en calcul algébrique, mais aussi les indéterminées ce que l'on avait fait de tous temps en géométrie ; d'autre part il opère sur les expressions algébriques comme on avait pris l'habitude de le faire dans les équations . Ce que nous noterions $\frac{x(a-b)}{x+b} = y$ était écrit par Viète de la manière suivante: $\left\{\frac{\begin{matrix}\text{H in D}\\ \text{-F in D}\end{matrix}}{\text{F + D}}\right\}$ aequabitur A. Le problème des dimensions se règle en affectant chaque lettre de sa dimension en latin : l'inconnue x^3 se note A cubus et le paramètre a^3 s'écrit F solidum. Ce système présente l'avantage, bien connu maintenant, mais complètement nouveau à l'époque de Viète, que l'écriture synthétique : $ax^2+ bx + c = 0$ représente TOUTES les équations du second degré et permet de donner des preuves modernes par des démonstrations quantifiées au lieu des preuves par exemple typique, fournies par Diophante ou Al Karagi. (Al Kayyam faisait déjà des démonstrations "modernes" mais de manière extrêmement lourde puisqu'il n'utilisait que la rhétorique et pas du tout de formalisation). Le calcul de Viète, bien que, comportant toutes les idées du calcul abstrait moderne, semble à nos yeux bien peu maniable surtout lorsque les expressions comportent des degrés élevés : A cubocubus in E quadratocubus aequabitur Z cubocubocubus in C planum. Pour une puissance générale, il écrit "potestas" et s'il y en a une deuxième, il écrit "gradus" : A potestas + $\frac{\text{E potestate - A potestate}}{\text{E gradui + A gradui}}$ in A gradum pour $x^m + \frac{y^m - x^m}{y^n + x^n} x^n$. La notation exponentielle va finir par s'imposer grâce aux travaux de Descartes, mais en fait, elle était déjà en gestation dans les écrits de N.Chuquet qui écrit $\frac{30.m.1^1}{1^2.p.1^1}$ pour $\frac{30-x}{x^2+x}$ ou plus généralement 3^2 pour $3x^2$. De même Stevin écrit : "1(3) sera égal à -2(2)+12(1)+48" pour $x^3=-2x^2+12x+48$. Pour ce qui est du signe "=", il a été introduit pour la première fois par Recorde vers 1557, mais il a été ensuite abandonné et c'est Thomas Harriot qui le réintroduit dans Artis analyticae praxis, London 1631, en même temps que les signes "<", ">" et l'usage des minuscules pour désigner les inconnues. Il écrit : $\frac{\frac{aaa}{b}}{d} = \frac{aaa}{bd}$ et aaa-3.baa +3.bba=+2.bbb a pour racine 2.b, ce que l'on peut traduire en langage moderne par $\frac{\frac{x^3}{b}}{d} = \frac{x^3}{bd}$ et $x^3-3bx^2+3b^2x=2b^3$ a pour racine 2b. Il ne manque pour avoir le formalisme moderne que les parenthèses dont la mise au point a été assez longue et hésitante:

-On a tout d'abord utilisé des lettres pour le même usage, par exemple, J.Wallis dans "Treatise of Algebra" (Londres, 1685) utilise √b:2+√3 et même des écritures redondantes comme √b:√5+1:.

-On a aussi utilisé des soulignages ou des surlignages, ces derniers ont donné l'idée à Descartes d'écrire $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ au lieu de √.2-√2. mais il n'utilise le surlignage que dans ce cas particulier. Par contre Van Schooten l'utilise systématiquement quand il édite les travaux de Viète en 1646. Là où Viète écrivait B in$\left\{\begin{array}{l}\text{D.quadratum}\\ \text{+B in D}\end{array}\right.$, il écrit $\overline{\text{D quad.+B in D}}$.

Pour ce qui est de l'usage des parenthèses ou des accolades, il apparaît d'abord chez Bombelli puis chez Viète qui utilise des accolades et une écriture en colonne; mais ces signes sont supplantés par les surlignages et dans la seconde moitié du 17ième siècle, ils sont moins utilisés que dans la première moitié. Mais vers 1728, L.Euler et D.Bernoulli utilisent systématiquement les parenthèses qui seront définitivement adoptées avec l'usage des machines à écrire.

Avec les notations de Viète améliorées par Harriot et Descartes, on peut dire que le calcul algébrique abstrait a atteint son plein développement ; en

Avec les notations de Viète améliorées par Harriot et Descartes, on peut dire que le calcul algébrique abstrait a atteint son plein développement ; en effet grâce à cette nouvelle écriture, Viète et surtout Harriot ont exprimé les racines en fonction des coefficients d'une équation ce qui va être fondamental pour le développement ultérieur de la théorie des équations. Ce qu'il y a de plus révolutionnaire et de plus producteur dans l'innovation de Viète, c'est donc l'introduction systématique des lettres pour représenter les indéterminées qui remplace l'étude des différents types d'équation par l'étude d'un type général d'équation. On est passé, grâce à Viète de l'étude de problèmes particuliers à l'étude de classes de problèmes et donc de leur structure.

C'est au niveau de la simplification des démonstrations que se situe le plus grand progrès, on peut d'ailleurs comparer le traitement du même problème par Diophante et par Viète. La démonstration de Diophante est détaillée en page 3, on peut la comparer à celle de Viète (extraite du premier livre des zététiques dans "La Nouvelle Algèbre de M.Viète", Vaulezard, corpus des oeuvres de philosophie en langue française, Fayard, Paris 1986):

"Estant donné la diférence de deux costez et l'aggrégé d'iceux ; trouver les costez.

Soit donné la diférence des deux costez B, l'aggrégé d'iceux D, il faut trouver les costez. Soit le moindre costé A, le majeur sera A+B, donc la somme des costez sera 2A+B ; Mais la mesure est donnée D, par quoy 2A+B sont égaux à D, laquelle équation est réduite par l'antithèse de B sous contraire affection de signe, en 2A égaux à D-B et le tout estant divisé par 2 ; A sera égal à $\frac{D-B}{2}$.

B soit 40, D 100, A vaudra 50-20 c'est 30 et A+B 70, leur somme 2A+B 100, leur différence 40, conforme au requis.

Ou soit le majeur costé E, donc le moindre sera E-B partant l'aggrégé des costez 2E-B : mais D est posé pour la mesure aggrégé ; donc 2E-B sont égaux à D, laquelle équation se réduict par addition de B, en 2E égaux à D+B, puis prenant la moitié du tout, E sera égal à $\frac{D+B}{2}$.

Par quoy E vaudra 70. E-B, 30 desquels la diférence est 40 et la somme 100, donc estant donné la diférence des costez et l'aggrégé d'iceux : on trouvera les costez."

On voit la différence essentielle entre le traitement de Viète et celui de Diophante : Diophante dit que si on prend deux nombres, par exemple, 100 et 40, on peut trouver deux nombres dont la somme est 100 et la différence 40. Il fait une démonstration suffisamment générale pour convaincre le lecteur que l'on pourra, en utilisant le même algorithme, trouver les deux nombres cherchés quelque soient les deux nombres donnés.

Viète, lui, démontre que pour tous nombres D et B , on peut toujours trouver deux nombres dont la différence est D et la somme B, il suffit de prendre pour le premier $\frac{D+B}{2}$ et pour le deuxième $\frac{D-B}{2}$. La démonstration par exemple typique donnera la solution par le même algorithme dans tous les cas, mais il faudra, à chaque fois, refaire intégralement le calcul ; l'autre démonstration, par contre, est universelle puisque le calcul est fait une fois pour toutes et qu'il n'y a qu'à substituer la valeur des données dans l'expression littérale pour avoir le résultat. Il semble que le premier traitement ait été bien antérieur au deuxième et que ce dernier ait été rendu possible par l'introduction de lettres pour désigner les indéterminées .

En conclusion on peut dire qu'il y a deux grandes étapes dans la constitution du calcul algébrique abstrait: la première est caractérisée par l'introduction de noms pour désigner l'inconnue et ses puissances et par des calculs faisant intervenir cette inconnue comme si c'était un nombre, la deuxième est caractérisée par l'introduction de lettres pour désigner les coefficients indéterminés de l'inconnue. Ces deux constructions sont très décalées dans le temps et ne répondent pas tout à fait aux mêmes motivations. L'arithmétique de l'inconnue apparaît, au début, pour simplifier la mathématisation de problèmes pratiques (en vue de leur traitement) ; l'introduction des lettres pour nommer les indéterminées répond à un problème moins directement pratique, il s'agit de faire progresser la théorie des équations en exprimant les racines en fonction des coefficients des équations .

Pour les didacticiens cherchant les problèmes qui sont à l'origine des divers concepts des mathématiques , il y a matière à réflexion car il semble que le calcul algébrique puisse se diviser en deux parties répondant à deux fonctions différentes :

*L'arithmétique de l'inconnue permettant de mathématiser puis de résoudre des problèmes pratiques (arithmétiques en particulier),

*Le calcul littéral permettant d'écrire des relations et de traiter tous les problèmes pratiques relevant de la même structure et donc donnant l'accès à cette structure et par conséquent à la résolution des problèmes complexes de la même manière que des problèmes plus simples relevant de la même structure.

Pour répondre aux interrogations du début, on peut, tout d'abord, affirmer que le formalisme algébrique a été introduit pour simplifier ou rendre possible la résolution des problèmes; l'arithmétique de l'inconnue, même si on n'agit pas sur les formules, résume l'énoncé de manière synthétique et aide à la mathématisation. Pour ce qui est du calcul sur les indéterminées, il rend possible les démonstrations quantifiées qui, sans lui, sont d'une telle lourdeur qu'elles deviennent impossibles dès que le problème est un peu complexe ; elles peuvent alors remplacer avantageusement les démonstrations par exemple typique qui perdent, elles aussi, de l'élégance et de la fonctionnalité lorsque le nombre de cas à étudier se multiplie. De plus, il semble que le calcul algébrique ait au collège un statut assez différent de celui mis en lumière par cette étude : le calcul algébrique est assez souvent introduit comme un objet à étudier et non comme un outil; l'étude des règles formelles du calcul algébrique précède largement, en classe de quatrième, l'utilisation de l'arithmétique de l'inconnue dans la résolution de problèmes arithmétiques. Enfin, dans les problèmes arithmétiques à la portée des élèves du collège, l'utilisation de l'inconnue n'apparaît pas forcément comme une économie pour tous les enfants. En effet, le problème "Montrer que la somme de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 3" peut être traité sans l'aide du calcul algébrique par des enfants qui manipulent aisément la langue naturelle ou le calcul mental, et les problèmes très difficiles à traiter sans algébrisation du type "Montrer que la somme de trois nombres entiers impairs consécutifs, augmentée de 1, est un multiple de 12" est hors de portée des enfants débutants en calcul algébrique (cf. Y.Chevallard "enseignement de l'algèbre et transposition didactique", document de l'Irem d'Aix-Marseille, Luminy (1986)).

Pour résumer schématiquement, l'étude de la genèse historique du calcul algébrique met en relief son caractère "outil" et c'est son aspect "objet" que les élèves du collège rencontrent en priorité ; on peut penser que ce fait, en plus de la difficulté réelle de son fonctionnement attestée par la lenteur de sa mise en place, peut expliquer en partie les difficultés rencontrées par les élèves dans son apprentissage . Mais, il est assez évident que tout cela ne peut expliquer à soi seul les problèmes rencontrés dans l'enseignement de ce calcul, on peut penser à bien d'autres facteurs; par exemple, l'habitude qu'ont les enfants de ne donner des résultats arithmétiques que complètement effectués (5+3 n'est pas une réponse admise à l'école, il faut répondre 8) va tout à fait à l'encontre du fonctionnement du calcul algébrique où "effectuer" n'a pas d'intérêt mais où il faut éventuellement "développer"... Notre étude a donc permis de donner certains éléments de réponse, mais beaucoup de travail reste à faire avant que l'on puisse concevoir des stratégies d'enseignement victorieuses pour le plus grand nombre.

BIBLIOGRAPHIE

*__Actes de l'université d'été__ de l'histoire des mathématiques (6 au 13 juillet 1984) publiés par l'Irem du Maine (1986).

*__F.Cajori__ - A history of mathematical notations. Open court. La Salle, Illinois. (1928).

*__Y.Chevallard__ - Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. Documents de l'Irem d'Aix-Marseille, Luminy (1986).

*__A.Dahan-Dalmedico__ - Repenser l'histoire de l'algèbre . Fundamenta scientiae , Vol.6 N°4 , pp. 379-392 , 1985.

*__A.Dahan-Dalmedico et J.Pfeiffer__-Une histoire des mathématiques "routes et dédales"-Collection "points-sciences", Editions du Seuil. Paris (1986).

*__J.Dhombres__ - Nombre , mesure et continu . Cedic Fernand Nathan . Paris (1978).

*__G.Guitel__ - Histoire comparée des numérations écrites . Flammarion . Paris (1975).

*__E.Harper__ - Ghosts of Diophantus . Educational studies in mathematics N°18 pp.75-91 . (1987) .

*__G.Ifrah__ - Histoire universelle des chiffres . Seghers . Paris (1981).

*__Irem groupe "épistémologie et histoire"__ - Mathématiques au fil des âges . Gauthier-Villars . Paris (1987) .

*__O.Keller__ - L'algèbre et le calcul en Egypte antique . Document de l'Irem de Lyon N°54 - Juin 1986 .

*__C.Laborde__ - Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : langue naturelle et écriture symbolique. Thèse d'état : Université de Grenoble I (1982).

*__R.Rashed__ - Entre l'arithmétique et l'algèbre . Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes . Les belles lettres . Paris (1984) .

***R.Rashed** - Les travaux perdus de Diophante . Revue "Histoire des sciences" N°27 pp.97-122 (1974) et N°28 pp.3-30 (1975) .

Notre site WEB

http://iremp7.math.jussieu.fr

IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

La genèse du calcul algébrique (une esquisse)

AUTEUR :

ROBINET Jacqueline

RESUME :

L'ouvrage débute par des questions sur la naissance du formalisme algébrique, les raisons pour lesquelles les mathématiciens l'ont introduit et sa place dans l'enseignement actuel . L'objectif est l'étude de la genèse historique du calcul algébrique pour essayer de mieux comprendre les difficultés des élèves en algèbre. Cette genèse est constituée en deux parties. La première étape est caractérisée par l'introduction de noms pour désigner l'inconnue et ses puissances (études des Egyptiens, de Diophante, des Indiens et des Arabes). La deuxième étape est caractérisée par l'introduction par Viète de lettres pour désigner les coefficients indéterminés de l'inconnue. L'analyse faite met en évidence le caractère « outil » du symbolisme, tandis que dans l'enseignement on trouve qu'il a un caractère « objet » De plus, dans l'enseignement, l'étude des règles algébriques précède l'arithmétique de l'inconnue, en opposition au parcours historique. L'auteur pense que ces faits sont liés aux difficultés des élèves

MOTS CLES :

Didactique-mathématiques-recherche-algèbre-arithmétique-histoire-dialectique-outil/objet-formalisme algébrique

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal 1989
ISBN : 2-86612-095-7