IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

78

Nov. 1989

CALCUL MENTAL, CALCUL RAPIDE

COUNTER RECKONING IN 1514
From the title-page of Köbel's *Rechenbiechlin*, Augsburg, 1514

D. BUTLEN, M. PEZARD

objectif: Présenter une expérimentation sur le calcul mental du CP au CM2

sujet: Calcul mental et résolution de problèmes

niveau: Classes de l'Ecole Elémentaire CP au CM2
6e - 5e

public: Instituteurs en Formation initiale et Formation continue

UNIVERSITE-PARIS VII

CALCUL MENTAL, CALCUL RAPIDE

COUNTER RECKONING IN 1514

From the title-page of Köbel's *Rechenbiechlin*, Augsburg, 1514

D. BUTLEN, M. PEZARD

Cette recherche a été menée dans le cadre de l'I.R.E.M de Paris VII par Denis BUTLEN et Monique PEZARD, elle porte sur des activités de calcul mental qui ont été faites dans des classes de l'école élémentaire, du CP au CM2.

Cet exposé relate des activités faisant intervenir les structures additives et multiplicatives. Cette expérimentation porte également sur les points suivants :

- liaison calcul écrit , calcul mental,
- conception des nombres et multiplication,
- résolution mentale et écrite de problèmes multiplicatifs et de dénombrement.

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE

CALCUL MENTAL, CALCUL RAPIDE, UNE EXPERIMENTATION DU CP AU CM2

PREMIER CHAPITRE : PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE TRAVAIL

A) OBJECTIFS DE TRAVAIL

Nous poursuivons un double objectif lors de cette expérimentation :

- d'une part diagnostiquer, mettre en évidence les conceptions des nombres chez les élèves du CP au CM2, notamment exhiber les conceptions des élèves en difficulté;
- d'autre part, nous avons un objectif d'apprentissage, nous voulons :
  * avoir une action sur ces conceptions, les enrichir, les diversifier et étendre leur domaine de disponibilité lors des calculs,
  * avoir une action sur les procédures de calculs mises en oeuvre afin de les diversifier (en fonction de la nature des calculs et des nombres y intervenant), en créer d'autres éventuellement.

B) POURQUOI LE CALCUL MENTAL , NOS HYPOTHESES DIDACTIQUES

Nous avons choisi le calcul mental pour plusieurs raisons :

1) Le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour tester les conceptions numériques des élèves et leur disponibilité.

C'est un moment où l'on peut mettre à distance les algorithmes écrits et de ce fait, avoir accès plus aisément aux conceptions numériques : le temps étant limité, la nécessité de calculer rapidement amène les élèves à abandonner, dans bien des cas, les algorithmes opératoires standards, sûrs mais trop lents, et à mettre en oeuvre des procédures révélatrices des conceptions qu'ils se font des nombres, ces conceptions étant évidemment liées à la numération (décimale), aux propriétés des opérations (fonctionnant souvent de façon implicite).

Prenons un exemple : calcul du produit 32 x 25 :

Si le calcul est fait par écrit, on ne peut tester que l'aptitude de l'élève à mettre en oeuvre un algorithme écrit (si celui-ci a été construit) et la maîtrise de celui-ci.
Si le calcul est fait mentalement et vite, l'élève peut être amené à abandonner cette technique au profit de procédures plus économiques mais nécessitant des décompositions additives ou multiplicatives des facteurs et ceci en liaison avec

les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité...). Voici plusieurs types de calculs possibles :

. 32 x 25 = 30 x 25 + 2 x 25 = 3 x 10 x 25 + 2 x 25
= 3 x 250 + 2 x 25 =750 + 50 = 800
. 32 x 25 = 30 x 25 + 2 x 25 = 10 x 75 + 50 = 750 + 50 = 800
. 32 x 25 = 32 x 20 + 32 x 5 = 32 x 2 x 10 + 32 x 5
= 64 x 10 + 160= 640 + 160 = 800
. 32 x 25 = 32 x 20 + 32 x 5 = 32 x 10 x 2 + 32 x 5
= 320 x 2 + 32 x 10 / 2 = 640 + 320 / 2 = 640 + 160= 800
. 32 x 25 = 8 x 4 x 25 = 8 x 100 = 800
. 32 x 25 = 32 x 100 / 4 = 3200 / 4 = 800
. 32 x 25 = 32 x 50 / 2 = 1600 / 2 = 800
. 32 x 25 = 30 x 20 + 2 x 20 + 30 x 5 + 2 x 5
= 600 + 40 + 150 + 10 = 800
etc....

L'élève choisit telle ou telle procédure par un souci d'économie pouvant porter sur la mémoire, sur la disponibilité des décompositions des nombres, sur la fatigue due aux calculs intermédiaires, etc...

A travers des activités de calcul mental nous avons donc plus particulièrement regardé les décompositions additives et multiplicatives des nombres, de même nous nous sommes intéressés aux représentations des élèves en difficulté en mathématique.

<u>2) Le calcul mental nous semble être un moment priviligié de l'apprentissage pour :</u>

- enrichir les représentations numériques et leur domaine de disponibilité,
- accroître la familiarisation de l'élève avec les nombres et les opérations,
- faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations,
- enrichir, diversifier, étendre les procédures de calcul et ceci,du fait des raisons exposées ci-dessus, mais aussi de raisons liées à la forme de travail effectué.

Les séances de calcul mental sont des espaces de travail intensif :

- du point de vue individuel : les élèves travaillent vite, changent plus ou moins rapidement de techniques, de démarches, sont amenés à en explorer de nouvelles.
- Du point de vue collectif : on peut constater une réelle émulation, une dynamique dans la classe. De plus, s'il y a explicitation, les élèves sont amenés à comparer les différentes procédures, à effectuer un choix parmi celles-ci, ce choix dépend

de la nature des données et des calculs à effectuer, et de ce fait ils enrichissent leurs capacités calculatoires.

Ce sont en général des activités motivantes.

On constate un gain de temps provenant de l'économie réalisée par le non recours à l'écrit et par le rythme, la succession rapide des activités.

Enfin le calcul mental peut être un lieu priviligié pour affirmer certaines stratégies de résolution de problèmes, nous le verrons sur un cas particulier : le jeu de l'autobus.

3) Parallèlement à ces deux points, nous nous sommes intéressés au rôle joué par le maître dans la conduite des activités de calcul mental .

Nous sommes partis d'un a priori : une séquence de calcul mental n'est un lieu réel d'apprentissage que si le maître a le souci constant (c'est malheureusement une pratique peu répandue) de faire expliciter les procédures mises en oeuvres par les élèves. Nous pensons qu'il faut que l'élève, certes obtienne le bon résultat, mais aussi réfléchisse à la façon dont il a procédé pour l'obtenir.

D'autre part, nous nous sommes intéressés au rôle, au moment, à la place de l'institutionnalisation des procédures lors de ces activités. Nous serons amenés à comparer les effets de différentes formes d'institutionnalisation dans la suite de cet exposé.

C) LE CHOIX DES ACTIVITES

Parmi les différentes activités de calcul mental que nous avons menées dans les classes, nous en exposerons ici deux grands types :

1) Des activités mettant en jeux les stuctures additives :

Elles portent donc sur l'addition et la soustraction, nous parlerons notamment :

- "du jeu de l'autobus" : *"dans un autobus il y a n personnes, à un arrêt, il monte a voyageurs et il en descend b, combien y a-t-il de voyageurs quand l'autobus repart ?"*
- de compter et de décompter de n en n, à partir d'un certain rang,
- d'additions mentales.

2) Des activités portant sur la multiplication .

A savoir :

- décompositions multiplicatives de nombres,
- multiplications par 2, 4, 10, multiple de 10...
- multiplications par 11, 15, 19, 21....

- calculs de produits.

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons plus particulièrement aux résultats et procédures des élèves en difficulté.

Sans rentrer dans les détails des raisons de ce choix, précisons seulement:
- que nous avons choisi le "jeu de l'autobus" car cette situation nous semble intéressante pour enrichir les structures additives,
- que nous n'avons pas fait d'activités de recherche systématique de décompositions additives de nombre car ce type d'activités est en général fait par les maîtres de l'école élémentaire. Par contre la raison inverse nous a conduit à pratiquer ces recherches pour les décompositions multiplicatives.

D) LA POPULATION TESTEE :

Les différentes activités se sont déroulées dans plusieurs classes, du CP au CM2, de la région parisienne et de la ville de Moulins (Allier).

1) Classe de CE2 de Madame H'LIMI Gisèle (Melun 77).

Il s'agit d'une classe de CE2 de l'école annexe de l'E.N.M de Seine et Marne (Melun 77). Cette classe comporte 24 élèves (au mois de mai, un élève a changé d'école). Les séances de calcul ont lieu une fois par semaine environ, les activités ne sont pas toutes décrites dans cette étude. La maîtresse a classé les élèves en 5 niveaux, pour les mathématiques : A, B, C, D et E , (cf annexe 2).

- 8 élèves sont de niveau A,
- 6 élèves sont de niveau B,
- 3 de niveau C,
- 5 de niveau D,
- 2 de niveau E.

2) Classes de Moulins (03 - Allier).

a) Classe de CE1 de Madame FLOUZAT

C'est une classe d'une école d'application. C'est en fait une classe à deux niveaux (CP - CE1), ce qui explique le faible effectif en CE1 (8 élèves). C'est une classe jugée plutôt bonne par la maîtresse :

1 élève se détache de l'ensemble.
4 élèves ont un niveau jugé satisfaisant
2 élèves sont plus irréguliers.
1 élève (Laure) est en difficulté.

Les séances de calcul mental ont eu lieu environ 1 fois par semaine, au long de l'année scolaire, elles durent 45 minutes.

b) La classe de CE2 de M. CHERASSE.

C'est une classe de l'école annexe à l'école normale, jugée plutôt bonne par le maître. Deux enfants sont particulièrement en difficulté : l'un plutôt à cause de la lecture, l'autre dans toutes les disciplines; sur 18 élèves :

- 5 ont un niveau très satisfaisant,
- 8 ont un niveau satisfaisant,
- 3 sont en difficulté.

c) Classe de CP de Madame DESARMENIEN.

C'est une classe de la même école que la classe de CE1. L'effectif est de 16 élèves.

d) Classe de CM2 de Monsieur RICHARD.

C'est une classe de l'école annexe à l'école normale. L'effectif est de 22 élèves, pratiquant fréquemment des activités de calcul mental.

e) Classe de mademoiselle GERARD.

Il s'agit de la classe de CM1 de l'école de l'avenue Maurice Ocagne dans le 14eme arrondissement de Paris. Il y a 20 élèves répartis de la façon suivante

- niveau A : 2 élèves,
- niveau B : 6 élèves,
- niveau C : 3 élèves,
- niveau D : 7 élèves,
- niveau E : 2 élèves.

La moyenne d'âge des élèves est de 10 ans 3,5 mois au 1 / 04 / 86. Cette classe est jugée plutôt faible en mathématiques par la maîtresse. Les séquences ont eu lieu pendant un trimestre, à raison de deux fois trente minutes par semaine.

Nous avons mis en oeuvre un dispostif assez lourd dans le but de recueillir des données sur l'évolution des savoir-faire en fonction des niveaux scolaires.

E) PROBLEMES METHODOLOGIQUES

Nous nous sommes heurtés, dès le début, à un problème d'ordre méthodologique pour conduire cette expérience. Nous devions :

- pour diagnostiquer l'état des représentations numériques et leur disponibilité, avoir accès aux procédures de calcul des élèves et, de ce fait, nous avons été amenés à leur faire epliciter ces procédures après coup.
- Pour faire évoluer les représentations, nous appuyer sur ces explicitations, sur ces démarches et ceci en situation de classe.

Pour remplir ce double objectif, nous avons utilisé deux méthodes :

1)

1) énoncé de la consigne,
2) les élèves écrivent sur ardoise ou sur papier, le résultat,
3) le maître interroge certains élèves pour expliquer leur méthode de calcul,
4) il demande s'il y a d'autres procédures de calcul,
5) il demande combien d'élèves utilisent chaque méthode,
6) éventuellement, il fait comparer l'efficacité de ces procédures (suivant l'objectif visé).

Cette méthode soulève quelques questions portant :
- sur la véracité de la procédure explicitée,
- sur le but de l'activité (trouver le résultat ou expliciter la méthode).

D'autre part il est difficile de différencier l'aspect diagnostic et l'aspect apprentissage. Il reste néanmoins que cette méthode donne une photographie floue, mais souvent suffisante pour faire évoluer la classe.

2) Pour notre expérience, nous avons mis en place un autre dispositif pour "récupérer" l'information, le processus est le suivant :

1) énoncé de la consigne,
2) les élèves inscrivent (sur une feuille par exemple) les calculs intermédiaires et le résultat final avec éventuellement un codage adéquat.

De même, cette méthode soulève les questions suivantes :
- changement de la tâche (notamment le recours à la mémoire est transformé),
- changement éventuel des procédures utilisées, dû au recours à l'écrit. Il est évident que l'analyse des comportements doit en tenir compte.

Ceci étant dit, il nous était nécessaire, à certains moments, de faire le point de façon précise et individuelle sur l'état de chaque élève et de la classe dans son ensemble.

DEUXIEME CHAPITRE : ACTIVITES PORTANT SUR LES STRUCTURES ADDITIVES

A) LE JEU DE L'AUTOBUS

1) Enoncé standard et objectifs de l'activité.

L'énoncé standart est le suivant :

> *"dans un autobus il y a n voyageurs, à un arrêt il en monte a et il en descend b, combien y-a-t-il de voyageurs après le départ de l'autobus ?"*

Il y a deux types de procédures pour résoudre ce problème.

- Une procédure E portant sur les états qui revient à considérer un état initial E1 (n personnes), à lui appliquer une transformation T1 (ajouter a), à en déduire un état intermédiaire E2 (n+a = n' voyageurs), à appliquer à E2 la transformation T2 (retrancher b) et à déduire un état final E3 :

  [(n+a) - b = n' - b = n"].

$$E1 \xrightarrow{T1} E2 \xrightarrow{T2} E3$$

$$n \xrightarrow{+a} \underset{n'}{n+a}$$

$$n' \xrightarrow{-b} \underset{n''}{n - b}$$

- Une procédure T portant sur les transformations : elle revient à considérer un état initial E1 (n voyageurs) à évaluer une transformation T3 obtenue par composition des transformations T1 et T2 (a - b), à appliquer cette transformation à E1 afin d'en déduire l'état final E2 :

  n' = n + (a - b).

Les travaux de G. Vergnaud montrent que ces procédures correspondent à des étapes cognitives différentes des sujets. Notre but était de faire acquérir aux élèves la procédure T. Le calcul mental nous semblait ici un outil privilégié pour cela. En effet, en fonction des données numériques, il peut être mentalement plus avantageux d'adopter telle ou telle stratégie.

2) Les variables didactiques de la situation

Les variables numériques : nous avons choisi de faire varier les données n, a et b sur trois domaines numériques :

* le domaine D1 défini par $n < 100$, $a < 10$ et $b < 10$
* le domaine D2 defini par $n > 100$, $a < 10$ et $b < 10$
* le domaine D3 défini par $n < 100$, $a > 10$ et $b > 10$ et $|a-b| < 10$.

Dans les trois cas, n est nettement supérieur à a et b.
Dans le cas des domaines D1 et D2 , nous analyserons les résultats et procédures des élèves en fonction de l'existence ou non de ce que nous avons appelé "un passage à la dizaine," à savoir, par exemple :

$$n + a - b = 22 + 9 - 3 = 31 - 3 = 28$$

par contre un calcul du type :

$$27- 4 + 3$$

ne présente pas de passage à la dizaine.
Nous aurions pu exposer ici une analyse plus fine des effets des variables numériques mais nous nous sommes aperçus que ces 3 domaines suffisent à expliquer les différentes procédures et performances des élèves.

Les variables liées au contexte : nous avons proposé plusieurs types d'énoncés suivant les moments et les classes, afin de ne pas lasser les élèves ou afin de justifier les valeurs prises par les données numériques : jeux de billes avec pertes et gains, dans un train... (au lieu d'un autobus), jeu de la grand mère (je suis à n pas de ma gand-mère, elle me dit d'avancer de a pas puis de reculer de b pas, où suis-je?). Les élèves dans chaque cas ont reconnu le même problème, ce ne sont que des changements de circonstances qui ont pour but de relancer l'activité et l'intérêt.
Nous avons également, et ceci systématiquement, proposé l'énoncé standard ou bien l'une des variantes exposées ci-dessous,il s'agit soit d'inverser les termes "montent" et "descendent",soit de prendre : $a - b > 0$, $a - b < 0$ ou $a - b = 0$.
En fonction des niveaux de classes et des résultats à l'activité standard, nous avons proposé des questions intermédiaires qui avaient pour but de donner du sens à la tâche; cela donnait les énoncés suivants :

"Dans un autobus il y a n personnes, il en monte a et il en descend b, après l'arrêt y-a-t-il plus, moins ou autant de voyageurs ?

ou bien :

"Dans un autobus, ..., après l'arrêt y-a-t-il plus, moins, autant de voyageurs, combien en plus, ou combien en moins ? "

3) Analyse de la tâche

L'énoncé était donné oralement, le nombre n était inscrit au tableau; selon les cas (cf voir premier chapitre, E) les élèves écrivaient seulement le résultat, ou bien pouvaient ou devaient écrire des calculs intermédiaires. Nous avons déjà souligné que ces impératifs méthodologiques changaient la tâche de l'élève, notamment le rapport à la mémoire.

Intéressons nous ici, à la tâche à effectuer par l'élève dans le cas où l'activité est uniquement mentale.

- Quelque soit la procédure mise en oeuvre (type E ou T), l'élève doit :

  * mémoriser les données intervenant dans le problème : n, a, et b,
  * traduire a et b en transformation : une "montée de a voyageurs" doit se traduire par "ajouter a", une "descente de b voyageurs" doit se traduire par "retrancher b".

- Dans le cas d'une procédure de type E, l'élève doit :

  * effectuer deux calculs (une addition et une soustraction)
  $n + a = n'$
  $n' - b = n''$
  * mémoriser le résultat intermédiaire n', retenir et noter le résultat final n''.

Cette procédure présente l'avantage :

- de pouvoir effectuer les calculs dans l'ordre induit par l'énoncé (ce n'est toutefois pas toujours le cas, ainsi quand $b > a$, certains élèves inversent l'ordre des calculs, ce qui les conduit à assumer une surcharge de travail en mémoire).
- Revient à limiter le coût en mémoire (mémorisation de n, n', a, b, et de leur signe).

Toutefois les valeurs de n, a et b peuvent intervenir sur la difficulté des calculs à effectuer, ainsi :
38 -5 + 3
est plus facile que :
32 -5 + 3
ou que :
52 - 27 + 28

- Dans le cas d'une procédure de type T, l'effort du sujet ne porte pas sur les mêmes choses. Il doit :

  * mémoriser plus longtemps l'état initial n
  * évaluer !a-b! et en déterminer le signe
  * retraduire cette nouvelle transfomation en opération et effectuer le calcul :
  $n + (a - b) = n'$ et inscrire ce résultat.

Cette procédure peut simplifier les calculs ainsi :
52 + (28 - 27) = 80 - 27 = 53
peut devenir
52+(28 - 27) = 52 + 1 = 53
toutefois elle impose un effort de mémorisation et parfois nécessite pour certains élèves des inversions d'ordre par rapport à l'énoncé (ainsi -27 + 28 est plus difficile que 28 - 27).

Nous nous sommes donc attachés à :

- repérer en fonction des données n, a et b et de la familiarisation avec le problème, les procédures de résolution des élèves;
- repérer en fonction des procédures, les performances de réussite;
- comparer suivant les niveaux de classe, procédures et résultats ;
- évaluer l'évolution de ces procédures et performances en fonction des données numériques, du degré de familiarisation avec le problème, du contexte proposé et des niveaux scolaires.
- évaluer l'impact des prises de décision du maître notamment en ce qui concerne l'explicitation des procédures et leur institutionnalisation.

<u>4) Présentation de la succession des activités portant sur le jeu de l'autobus dans les différentes classes testées.</u>

Nous présentons ici le déroulement des activités portant sur le jeu de l'autobus dans une classe de CE1, deux classes de CE2, une classe de CM1 et une classe de CM2.

Le déroulement n'a pas été le même dans chaque classe, il diffère notamment sur :

- le choix des données numériques,
- le rythme des activités,
- les prises de décision du maître,
- les"habillages" proposés.

Les différents contextes proposés seront notés ainsi
- Le problème initial est le suivant :

PI : *"Dans un autobus il y a n voyageurs, à un arrêt, il en monte a et il en descend b, combien y a-t-il de voyageurs quand le bus repart ?"*

- Nous distinguons d'autres énoncés présentant quelques différences avec le précédant :

PI' : même texte avec inversion des termes "*monte*" et "*descend*"

PI1 : *"dans un autobus il y a n voyageurs, à un arrêt, il en monte a et il en descend b, y-a-t-il moins, autant, plus de voyageurs quand le bus repart ?"*
PI'1 : même texte que PI1 avec inversion des termes "*monte*" et "*descend*".
PI2 : même texte que PI1 avec en plus la question: "*combien y en a-t-il en plus ou en moins?"*.
PI'2 : même texte que PI'1 avec la question précédente en sus.
- L'habillage est parfois différent mais se ramène au même problème :

Variante 1 : (V1) jeu de billes avec pertes et gains.
Variante 2 : (V2) dans un train... (au lieu d'un autobus).
Variante 3 : (V3) un enfant avance de a pas et recule de b pas...

Cet habillage sera reprécisé lors de la description des séances. Nous allons essayer de montrer comment ces différents facteurs sont intervenus sur la réussite des élèves.

a) Classe de CE1

Dans cette classe, la progression adoptée visait à faire évoluer les procédures des élèves étape par étape, les activités se découpent en plusieurs phases :

1. présentation du jeu avec le contexte PI ou PI' avec $a < 10$ et $b < 10$, explicitation et comparaison des procédures.
2. présentation du jeu avec les mêmes contextes mais $10 < a < 20$ et $10 < b < 20$.
3. devant l'echec massif des élèves le maître décide alors :
   . de présenter le jeu avec le contexte PI1 (ou PI'1)
   . puis avec le contexte PI2 (ou PI'2)
   . et enfin de rependre la présentation 3

b) Classe de CE2 de Moulins :

Nous distinguerons les phases suivantes :

1. présentation du jeu avec contexte PI ou PI' et $a < 10$, $b < 10$, explicitation et comparaison des procédures (fevrier).
2. présentation du jeu avec les mêmes contextes (avril, mai, juin), mais $10 < a < 20$ et $10 < b < 20$.
   Explicitation et comparaison des procédures : introduction par le maître d'une notation fontionnelle pour décrire les procédures de type T et utilisation de la décomposition (de a ou de b) additive, (exemple si $a = 14$ et $b = 19$ alors $19 = 14 + 5$).

c) Classe de CE2 de Melun

Dans cette classe la maîtresse ne suivra pas le même rythme, notamment l'augmentation en valeur absolue des terme a et b viendra plus tard, de plus elle n'insistera pas autant sur l'explicitation et le codage des procédures de type T, nous distinguerons les phases suivantes :

- présentation du jeu avec le contexte PI et PI', $0 < a < 10$, et $0 < b < 10$, explicitation, comparaison des procédures (2 séances en février).
- idem avec $0 < a < 10$ $0 < b < 10$ mais avec n situé entre 100 et 200 ou 700 et 800, (2 séances en février mars, variante 2). Un travail a été effectué en mathématiques sur les opérateurs et leur composition, reprise de ci-dessous (1 séance en mars).
- après une intérruption d'environ 2 mois de ce type d'activité, reprise en juin avec un contexte différent (variante 3), avec $100 < a < 200$ et $100 < b < 200$ (ou $30 < a < 40$ et $30 < b < 40$). Recours au même pour expliciter les procédures du type T, puis retour au jeu de l'autobus (habillage PI ou PI') avec $10 < a$, $10 < b$ mais $|a-b| < 10$.

d) Classe de CM1 de Paris :

Dans cette clase, il y a eu 6 séances sur le jeu de l'autobus se déroulant entre le 29/4/86 et le 3/4/86, l'habillage utilisé était PI, PI' ou la variante VI (jeu de bille). La succession des activités est sensiblement la même que celle menée dans le CE2 de Moulins.

e) classe de CM2 de Moulins :

Présentation du jeu avec $40 < a < 50$, $10 < a$, $10 < b$, $|a-b| < 10$ (2 séances).

5) Analyse des procédures et performances des élèves,suivant les niveaux de classes testées

5-a) Analyse des procédures et performances des élèves, par classe, dans le cas où les variables appartiennent au domaine D1

5-a-1) analyse des résultats par classe

Nous distinguerons pour les classes de CE2 et CM1, deux types de problèmes :
- les jeux dont les calculs ne font pas intervenir un passage à la dizaine (exemple : 24 + 5 - 3).

- Les jeux ou intervient un passage à la dizaine (signalés dans les tableaux ci-dessous par une astérisque (ex. 53 + 7 - 3).

Tableau n° 1 : résultats de la classe de CE2 de Moulins

jeu / bonnes réponses	jeu n° 1	jeu n° 2	jeu n° 3	jeu n° 4 (*)	jeu n° 5 (*)	jeu n°6 (*)	jeu n° 7 (*)
4 bonnes réponses (nb d'élè.)	7	8	12	4	7	8	13
3	3	3	4	5	2	4	3
2	2	3	2	5	4	3	1
1	1	2	-	2	3	2	-
0	4	1	-	1	1	1	1
élèves présents (nombre)	17	17	18	17	17	18	18
% de bonnes réponses sur l'ensemble de la classe par jeu	61 %	72 %	88 %	63 %	66 %	72 %	77 %

Tableau n° 2 : résultats de la classe de CE2 de Melun

jeu / bonnes réponses		jeu n° 2 (*)	jeu n° 3	jeu n° 4 (*)
4 bonnes réponses	5	0	12	3
3	4	5	5	7
2	5	6	3	5
1	4	4	1	4
0	2	5	2	4
élèves présents (nombre)	20	20	23	23
pourcentage de bonnes réponses sur l'ensemble de la classe par jeu	58 %	40 %	76 %	51 %

Tableau n° 3 : résultats de la classe de CM1

jeu bonnes réponses	jeu n° 1	jeu n° 2	jeu n° 3 (*)
4	5	5	4
3	6	4	6
2	3	5	8
1	2	1	1
0	-	1	1
élèves présents	16	16	20
% de réussite	71 %	68 %	64 %

(*) signifie l'existence "d'un passage à la dizaine" (exemple 24 + 8 - 3)

D'après ces trois tableaux, nous constatons que :
- dans les trois classes, les exercices faisant intervenir un passage à la dizaine sont au moins bien réussis que les autres (c'est moins net en CM1 toutefois).
- Que la familiarisation avec le jeu joue un rôle important (classes de CE2.
- Qu'il y a peu de différence à ce stade entre CE2 et CM1.

Les erreurs relevées dans les classes sont de plusieurs types :
- prise en compte que d'une seule transformation (personnes qui monte), cette erreur disparaît avec une plus grande familiarisation avec le jeu,
- prise en compte d'un seul type de transformation (addition à n de a et de b), cette erreur disparaît également au cours des séances,
- erreur d'addition ou de soustraction,
- persistance du dernier facteur intervenant dans les calculs
ex : 25 - 2 = 23 et 23 + 3 = 26 au lieu de 25 - 2 = 23 et 23 + 5 = 28 pour le calcul de 25 - 2 + 5).

5-a-2) Analyse des procédures des élèves

Dans chaque classe, le maître s'attachait à faire expliciter et comparer quand c'était possible, les procédures de calcul utilisées par les élèves.
Dans les trois classes, au premier jeu, tous les élèves utilisent des procédures de type E.
- Dans la classe de CE2 de Moulins au 2e jeu, 2 élèves remarquent "*que 5 personnes qui montent et 3 qui descendent cela revient à en faire monter 2*" , mais ces élèves hésitent à passer au bilan lors des calculs; dans la suite des jeux, trois élèves utiliseront systématiquement une procédure de type T et obtiendront toujours une bonne réponse; malgré l'explicitation de ces procédures, les autres élèves n'évolueront pas.

- Dans la classe de CE2 de Melun, le résultat est identique (seuls 2 élèves utilisent des procédures de type T).
- Dans la classe de CM1, à la fin de jeu n¯2, la maîtresse propose de résoudre collectivement un jeu (36+6-6, quatre élèves proposent le résultat 36 car "*6 personnes montant et 6 descendant, cela s'annule*" . A la 3ème série (jeu n¯3) 7 élèves sur 20 utlilisent des procédures de type T, les autres restant à des procédures de type E.

Ainsi nous constatons que dans les trois classes, la facilité à effectuer mentalement les 2 opérations n + a = n' et n' - b = n" favorise un emploi des procédures E.

5-a-3) Le cas particulier de la classe de CE1 :

Les enfants font les deux opérations à la suite l'une de l'autre (procédures E) mais certains ne savent que faire des voyageurs qui descendent : ils ajoutent a à n mais ne tiennent pas compte de b . Il faut préciser que l'étude de la soustraction vien juste de débuter; cela peut expliquer pourquoi certains enfants ont du mal à traduire numériquement le nombre de voyageurs qui descendent . Lors des explicitations des procédures et à la demande du maître il semble acquis pour la classe que si b = a, "*ça revient au même*". De même certains élèves semblent compendre que si a = 3 et b = 2, "*ça fait un de plus*". Mais en aucun cas cela ne se traduit par une évaluation de la transformation au cours du calcul.

5-b) Analyse des procédures et des performances des élèves dans le cas où les données appartiennent au domaine D2.

Cela ne concerne que la classe de CE2 de Melun, 3 séances sont consacrées au jeu de l'autobus (plus exactement ici au jeu du train) avec n compris entre 100 et 200 dans la première séance et entre 700 et 800 dans la seconde.

A la première séance, 4 exercices font intervenir un calcul sans passage à la dizaine et 4 exercices font intervenir un passage à la dizaine : la premère série n'est réussie qu'à 68 % (contre 75 % à la séance précédente) par contre la seconde série est réussie à 64 % (contre 51 % à la séance précédente).

A la seconde séance, la maîtresse proposent les mêmes types d'exercices, dans le même ordre. La première série est réussie à 71 %, la deuxième à 30 %.

A la 3ème séance (reprise avec 100< n <200) les réussites sont respectivement de 83 % et 50 %.

Nous constatons :
- que l'augmentation seule de n fait chuter, au moins dans un premier temps, les performances des élèves,
- que les erreurs sont du même type que celles enregistrement en 5-a avec toutefois un accroissement des erreurs de calcul dues à la taille du facteur n,

- que cette augmentation de n ne fait pas évoluer les procédures, 4 élèves utilisent des procédures de type T et un enfant hésite entre T et E.
Entre la 2ème et 3ème séance, la maîtresse a travaillé avec les élèves sur la notion d'opérateur et sur la composition d'opérateurs, cela n'a pas d'influence sur l'évolution des procédures en calcul mental.

5-c) Analyse des procédures et des performances des élèves dans le cas où les données appartiennent au domaine D3.

Le domaine de variation des données est donc a >10 b >10 $|a-b|<10$

5-c-1) Le CM2 de Moulins (22 élèves)

Procédures observées : au cours du premier jeu, quelques élèves seulement travaillent directement sur les transformations mais lors de l'explicitation des des procédures , cette méthode est mise en évidence et reconnue par l'ensemble de la classe comme étant plus rapide. Elle est ensuite adoptée par tous.

Tableau n°4 : quelques effectifs :

N / jeu	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	total élèves	% de bonnes réponses
premier jeu	2	5	3	4	3	1	2	1	-	-	-	22	68%
deuxième jeu	3	3	5	6	1	1	1	1	1	-	-	22	72%

Néanmoins , environ un quart de la classe a de mauvais résultats (note < 5). Ce sont des élèves qui par ailleurs ont des difficultés en mathématiques.

Exemple de jeu proposé :

[45] - 18 + 21 [46] - 23 + 26
[48] - 24 + 22 [49] + 24 - 29

5-c-2) La classe de CM1 de Paris :

Tableau n° 5 : performances des élèves de CM1

jeu bonnes réponses	jeu n° 1 (3 exercices)	jeu n° 2 (4 exercices)	jeu n° 3 (5 exercices)
5 (nbre d'élèves)	-	-	4
4	-	2	5
3	9	3	2
2	3	5	1
1	4	6	2
0	3	3	3
Total des élèves présents	19	19	17
% de bonnes réponses	64 %	58 %	59 %

Le passage au domaine D3 s'est fait dans cette classe lors d'un cinquième exercice de la troisième séance (déjà décrite) , 10 élèves emploient une procédure de type T au lieu de 7 à l'éxercice précédent (domaine D1).
Nous relevons 11 bonnes réponses sur 17.
Lors des explications du jeu n¯1, la maîtresse insiste sur les procédures du type T, cela conduit 14 élèves à l'employer, ce nombre diminue lors du jeu n°2 car n est alors choisi supérieur à 100. Au jeu n°3, pour n > 100, la quasi totalité des élèves emploient des procédures de type T, avec plus ou moins de succès.

5-c-3) Le CE2 de Moulins

Dans cette deuxième étape (passage de D1 à D3), pour éviter les calculs, les enfants devraient donc être amenés à travailler directement sur les tranformations.
Lors de la correction de l'exercice, cette nouvelle procédure est explicité par le maître qui utilise une notation fonctionnelle :
Exemple : 38 voyageurs au départ : a = 10   b = 17

$$38 \xrightarrow{-17} 21 \xrightarrow{+10} 31$$

En décomposant 17 en 10+7, le maître explique que cela revient" *à faire descendre 7 passagers*" (puisque lorsque a=10 et b=10, cela "*revient à ne rien faire*").

Cette procédure est reprise sur d'autres exemples, toujours avec le souci de voir *"à quoi ça revient"*.

- Si a=b, le bilan ne semble pas poser de problème aux enfants : *"ça revient à ne rien faire"*.
- Si a = b, par exemple b > a : on décompose b en (b - a) + a

Ex : a=14 b= -19

```
         +14              -19
        --------->      ---------->
                          -14-5
[54]    -----------------------------> [49]
         +14 - 14          -5
        --------------->  ----------->
         (Bilan nul)
        ------------------------------->
                 -5
```

"ça revient à faire descendre 5 voyageurs"

Remarques : la formulation elle même est difficile :
- "est-ce-qu'il est monté plus de voyageurs qu'il n'en est descendu ?"
- "il descend des voyageurs *en plus*" se traduit par une soustraction,

de même : "il descend les voyageurs *en moins*" se traduit par une addition.
Le jeu suivant porte donc sur le domaine D3
Voici les exercices propsés :

[38] - 17 + 10
[63] + 18 - 14
[54] + 14 - 19
[49] - 13 + 18

Les résultats de ce jeu sont :

<u>tableau n¯6 : classe de CE2 de Moulins</u>

Bonnes réponses	4	3	2	1	0	% de bonnes réponses
Effectifs	4	5	4	3	1	62%

- Si on compare ce tableau avec le tableau n¯1, on note qu'il y a plus d'erreurs: cela s'explique par le fait que les enfants calculent directement et que ces calculs sont plus difficiles. (procédures de type E mojoritaires).
- Il paraît intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus après explicitation par le maître de la transformation :

Tableau n°7 donnant l'évolution du nombre d'erreurs avant l'explicitation par le maître de la transformation / après.

2ème jeu / 1er jeu	O	1	2	3	4
0	2	-	-	2	-
1	3	1	1	1	-
2	-	-	3	1	-
3	1	1	1	-	-
0	-	-	-	-	1

On peut faire les remarques suivantes :
- Pour 6 élèves, le nombre d'erreurs est stable,
- 6 élèves progressent, notammment un qui de 3 erreurs passe à 4 réponses justes.
- 5 élèves régressent, notamment 2 qui passent d'un nombre d'erreurs nul à 3 erreurs.

Dans un premier temps, le passage par le calcul des transformations ne semble donc pas être un facteur de progrès pour les élèves, alors qu'il devrait, en principe, simplifier les calculs.
Par la suite, plusieurs jeux sont proposés - les valeurs de a et b sont en général comprises entre 10 et 20 - Le nombre de voyageurs au départ est toujours inférieur à 100.

exemple :

Avant dernier jeu :
[48] + 15 - 12
[57] - 17 + 13
[39] - 14 + 19
[51] + 17 - 21

Dernier jeu :
[69] - 14 + 20
[49] + 18 - 23
[57] - 19 + 14
[63] + 21 - 17

Tableau n° 8 : Evolution des résultats et des procédures

	jeu du 18/03	22/03	25/03	6/05	16/05
% de bonnes réponses	56 %	50 %	65 %	71 %	76

Remarque : Il n'y a pas eu de séances au mois d'avril, à cause des vacances de printemps. Une séance de "rappel" a eu lieu avant le 6/05 pour remettre le jeu en mémoire.
On observe un net progrès dans l'évolution du pourcentage de bonnes réponses. Cette progression des résultats peut s'expliquer :
- d'une part, par un certain apprentissage des enfants qui se fait au cours des divers exercices proposés.
- d'autre part, par un changement de procédure et en particulier par un recours à un calcul direct sur les transformations. En effet, au début, seuls 3 ou 4 élèves (les meilleurs) évaluaient directement les transformations. Ce nombre n'a cessé de croître au cours des séances suivantes, surtout après explicitation par le maître de cette procédure. Pour savoir exactement qui travaille directement sur les transformations, nous avons demandé aux enfants d'expliciter par écrit leurs procédures (ce qui change un peu le jeu, mais permet d'avoir une évaluation précise pour chaque élève).
Pour le jeu du 6/05, 10 élèves(sur 18) travaillent directement sur les transformations. Les autres effectuent les calculs dans l'ordre proposé par l'énoncé, parfois en décomposant les nombres :
ex : "il monte 15 voyageurs. Il en descend 12" est traduit par :
"+ 10 + 5 - 10 - 2"
Il faut noter que pour 3 élèves, on ne peut rien dire car la procédure n'est pas explicitée.
Pour le jeu du 16/05, il y a maintenant 15 élèves qui travaillent directement sur les transformations :
La plupart explicitent leurs calculs en réutilisant les notations du maître :
exemple : "Il monte 20 voyageurs; il en descend 14" est traduit par :

$$\xrightarrow{+20} \quad \xrightarrow{-14} \quad = \quad \xrightarrow{+6}$$

mais certains ne précisent par le signe :

$$\xrightarrow{-19} \quad \xrightarrow{+14} \quad = \quad \xrightarrow{5}$$

ce qui est à l'origine de quelques erreurs.
Un élève écrit : *"14 et 20 = 6 ."*
Lors de ce dernier jeu, 1 seul élève ne compose pas, il décompose les nombres :
+ 20 - 10 - 4
Un élève cherche le complément du plus petit nombre au plus grand, *"14 pour arriver à 20 = 6"*, elle traduit ensuite par une addition ou une soustraction. Tous ses résultats sont justes.
Un élève (toujours le même) ne fait rien .

5-c-4) Le CE2 de Melun

Dans cette classe le jeu de l'autobus avec un habillage différent a été repris au mois de juin (dans un premier temps sous une forme identique) puis en simulant le*"jeu de la grand mère"*: (séance du 9/ 6/86)
Enoncé : *"ma grand mère me dit d'avancer de n pas puis de reculer de b pas, je suis à la position de départ n, ou suis-je après avoir bougé ? "*
Les enfants miment dans la cour les mouvements sur des petits nombres puis résolvent le problème par écrit (voir annexe 1) puis par oral. Dans chaque cas ils devaient expliciter leurs procédures.
Cette activité a permis un très net "déblocage" de la situation. Une autre séance à été faite le 2/6/86 sur le jeu de l'autobus avec des nombres plus grands, à savoir :

133 + 123 - 131 = 131
147 - 132 + 145 = 134
152 - 139 + 133 = 146
165 + 44 - 33 = 176
142 + 26 - 37 = 131

Après explicitation des procédures,les élèves, sauf Eric, se mettent d'accord sur la nécessité de composer. Notons toutefois des échecs importants dans les calculs.
La maîtresse décide de changer l'habillage du problème (avancer de n pas, reculer ensuite), un mime de l'activité est fait puis des polycopiés sont distribués .

Voici les résultats. Voir le tableau n°9 : jeu de la grand-mère

Nous constatons que la classe rejoint les résultats de la classe de CE2 de Moulins. En effet :

- 3 élèves seulement ne composent pas les transformations,
- 4 éleves ont toutes leurs réponses justes,
- 5 élèves font moins de 3 erreurs sur 24 calculs,
- les 3/4 des élèves ont plus de la moitié de bonnes réponses,
- un seul élève refuse de faire l'activité (Eric : élève très perturbé à ce moment !)

Nous constatons que la taille des facteurs a et b est déterminante pour le passage des procédures E à T. D'autre part un autre type d'habillage du problème et un retour à l'écrit (voire au mime) à été dans cette classe nécessaire pour un progrès généralisé des élèves.

Nous constatons que les élèves en difficulté sur cette épreuve sont très largement dans les niveaux E et D (ce sont ceux qui composent le moins !)
L'activité a été reprise mentalement, les résultats et stratégies diffèrent très peu.

Tableau n°9 : jeu de la grand-mère

niveau scolaire	NOM	NOMBRE DE BONNES REPONSES																								
		24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A (8)	Agnes			22																						
	Aude						19																			
	Elsa	24																								
	Guenaëlle		23																							
	Guillaume	24																								
	Gregory		23																							
	Thomas								17																	
	Valérie	24																								
B (6)	Christine			22																						
	Fabrice									16																
	Mathieu																	8								
	Nicolas													12												
	Sandra	24																								
	Virginie									16																
C (3)	Charlotte																			6						
	Jean-Remy				21																					
	Vincent											14														
D (4)	Eric																									0
	François (Abs)																									
	Julien																				5					
	Patrick																							2		
	Phillipe																9									
E (2)	Daniel																									0
	Gérard																		7							
	Total %	4	2	2	1		1		1	2		1		1			1	1	1	1	1			1		2

Nous constatons donc :
- que le recours au mime avec 1 habillage s'y prétant (avance, recule) a été nécessaire pour faire progresser les procédures.
-que les variables didactiques (taille des nombres) ont été décisives pour "imposer" les stratégies de composition.
-que ces deux facteurs ont permis aux élèves de se comprendre entre eux, les élèves "composant", grace à un support mimique se sont fait comprendre des autres et les ont convaincu que leur méthode est plus sûre et plus économique.

5-c-5) Comparaison de ces classes

La progression suivie par les maîtres respectifs de ces deux classes diffèrent :
- sur le moment où sont introduites des valeurs de a et b appartenant au domaine D3
- sur l'insistance mise sur la nécessité d'utiliser les procédures de type T et l'apport d'un codagede cette transformation , s'appuyant selon les cas sur une décomposition additive des nombres.
Dans les deux cas, les élèves de CE2, dans leur ensemble, utilisent finalement la procédure T. Toutefois l'institutionnalisation plus rapide, jointe à l'utilisation du domaine D3, permet aux élèves de Moulins de progresser plus vite, et évite le recours au mime effectué par la maîtresse de Melun.
Notons qu'une progression identique adoptée au CM1 permet d'obtenir le même résultat . Enfin notons que les élèves de CM2 adoptent plus rapidement que les autres ce type de procédure.

Il nous reste à tempérer le rôle jouer par la "taille" des variables intervenant dans ce jeu, en étudiant ce qui s'est passé dans la classe de CE1

5-c-6) étude de la classe de CE1 (de Moulins)

- Pour tenter d'amener les enfants à travailler directement sur les transformations, nous choisissons comme dans les autres classes des valeurs de a et b "plus grandes" ($10 < a < 20$; $10 < b < 20$) et assez proches. Mais, alors qu'au CE2 cette démarche a permis de faire évoluer les procédures, au CE1, c'est la déroute....

Le jeu de l'autobus, tel qu'il est présenté, s'avère trop difficile. Pour faire évoluer les procédures il est nécessaire de prévoir plusieurs étapes :

1 - Demander seulement aux enfants s'il y a moins, autant, ou plus de voyageurs quand le bus repart.
2 - Demander s'il y a autant, plus ou moins de voyageurs et combien en plus ou en moins.

3 - Demander le nombre de voyageurs quand le bus repart.

- La 1ère étape n'est pas franchie aussi facilement qu'on aurait pu le croire. Il y a confusion entre plus et moins, et même avec autant. Les enfants ont du mal à faire le bilan quand il est négatif.
Lors du 1er exercice proposé, 3 enfants seulement (sur 8) ne font pas d'erreurs.
Lors du 2ème exercice , on n'observe plus que deux confusions (plus/moins et plus/autant).

- La 2ème étape pose aussi problème, surtout lorsque le bilan est négatif ; mais après plusieurs essais, les résultats sont corrects ; on n'observe plus qu'une seule ereur (-3 au lieu de +3)

- Lors de la 3ème étape, les difficultés s'accumulent. Il faut accomplir 3 tâches successives :
    - Evaluer s'il y a moins, autant ou plus de voyageurs,
    - évaluer combien de voyageurs en plus ou en moins,
    - donner le nombre de voyageurs quand le bus repart.

Cette multiplicité des tâches est source de nouvelles difficultés chez les élèves. Alors que les étapes 1 et 2 semblaient franchies, on retrouve de nouveau les mêmes erreurs :
- confusion de plus et de moins,
- erreur dans l'évaluation de l'écart (en valeur absolue)
- erreur sur le nombre de voyageurs quand le bus repart (alors que la transformation est bien évaluée)

exemple de jeu proposé :

15 + 20 - 18
26 + 17 + 12
22 + 19 - 19
37 + 17 - 18
43 + 16 - 19

En découpant les tâches et en y consacrant un certain temps, on peut amener des élèves de CE1 à travailler directement sur les transformations. Quand il y a une seule tâche à accomplir, elle est relativement bien réussie. Mais il suffit de les multiplier pour provoquer une chute des résultats et une réapparition des erreurs.
Dans l'ensemble, les résultats obtenus au cours de cette expérience sont tout de même irréguliers. Il aurait fallu plus de temps pour juger des acquis effectifs des élèves.

6) Etude des procédures et perfomances des élèves en fonction de l'évaluation de leurs connaissances en mathématiques.

6-a) classe de CE1

Nous avons fait la moyenne sur 20 des notes obtenues aux 3 derniers jeux proposés :

Tableau n° 10 : moyenne sur 20 des notes obtenues

4 groupes de niveau :

TS : niveau très satisfaisant
S : niveau satisfaisant
P : niveau passable (résultats irréguliers)
D : élève en difficulté

	N < 10	10 ≤ N ≤ 12	N > 12	Total
TS	-	1	-	1
S	-	2	2	4
P	1	1	-	2
D	-	1	-	1
Total	1	5	2	8

On peut faire les remarques suivantes :
- ce n'est pas l'élève jugé le meilleur qui obtient les meilleurs résultats,
- pour des enfants jugés irréguliers, les performances peuvent être très différentes :
  * l'une fournit très peu de réponses. C'est une élève lente, qui par ailleurs s'exprime difficilement.
  * l'autre obtient d'assez bons résultats (12/20)
- les résultats de l'élève dite en difficulté sont à considérer avec des réserves, en effet, cette élève regardait un peu trop souvent sur ses voisins....

6 - b) classe de CE2 de Moulins

Nous avons fait 4 groupes de niveau :

groupe 1 : les "forts" (5 élèves)
groupe 2 : les "moyens assez forts" (8 élèves)
groupe 3 : les "moyens plutôt faibles" (3 élèves)
groupe 4 : les élèves en difficulté (2élèves).

Pour les résultats au jeu de l'autobus, nous avons fait la somme des bonnes réponses fournies lors des 5 dernières séances, ce qui donne une note sur 20, notée N.
Nous avons alors fait 3 catégories de notes :

Tableau n°11 : tri croisé des résultats par rapport au classement d'ensemble de la classe

	$N < 10$	$10 \leqslant N \leqslant 12$	$N > 12$	Total
TS	-	1	-	1
S	-	2	2	'
P	1	1	-	2
D	-	1	-	1
Total	1	5	2	8

On peut faire les commentaires suivants :
- Dans l'ensemble, les résultats sont assez bons puisque 15 élèves (sur 18) obtiennent une note supérieure à 10 ; plus précisément, 13 élèves obtiennent une note supérieure à 13.
- En ce qui concerne la répartition dans les différents groupes, il n'y a pas de grosse surprise :
    * Les élèves du groupe 1 ont une note supérieure à 15 sauf un qui a 14.
    * Les élèves du groupe 2 ont une note entre 10 et 15, sauf un élève, plus faible qui n'obtient que 6.
    * Pour les élèves du groupe 3, il faut noter l'assez bonne performance de 2 d'entre elles, qui obtiennent 12.
    * Parmi les 2 élèves du groupe 4 : l'un obtient 0. L'autre fait une bonne performance. Il faut noter que cet élève est classé dans le groupe 4 surtout à cause de ses mauvais résultats en français.
    * Si on regarde les procédures utilisées, on remarque que l'élève du groupe 2 qui n'obtient que 6 est justement celui qui ne travaille pas directement sur les transformations.
    Les 2 autres élèves qui ont une note inférieure à 10 essaient d'évaluer la transformation, mais se trompent dans le signe. Cette erreur se retrouve chez 2 élèves du groupe 2.
- Enfin, il faut noter la très bonne performance de 3 élèves qui ont travaillé dès le début sur les transformations et qui obtiennent ici 19, 20, 19. Ce sont 3 élèves du groupe 1.

6-c) Classe de CE2 de Melun.

(voir Annexe 2).

A la 1ère séance du jeu, seuls les élèves de niveau A sont au dessus du résultat moyen de la classe. Notons toutefois la bonne performance de Philippe et Daniel (respectivement de niveau D et E).
A la 2ème séance, deux élèves (Jean-Rémi, niveau C et Guillaume, niveau A) utilisent des compositions de transformations. A cette séance le groupe B semble "décoller" et se rapprocher du groupe A, il en est de même pour le groupe C. Par contre les groupes D et E restent loin derrière (sauf Gérard). Aux 3ème et 4ème séances l'écart s'accroît d'une part entre le groupe A et les autres, d'autre part entre les groupes B et C et les groupes D et E. Notons que les élèves utilisant des procédure T se répartissent ainsi :

- niveau A : 2
- niveau B : 1
- niveau C : 1

Par la suite, l'analyse du tableau n° 9 montre que les élèves qui restent en difficulté sont dans les groupes D et E (niveau de réussite comme niveau des procédures).

6 - d) Classe de CM1 de Paris

Tableau n° 12 : performances des élèves par niveau (sur l'ensemble des activités).

% de réussites Niveau	0%-25%	26%-30%	51%-75%	76-100%	total par niveau
A	-	-	1	3	4
B	-	-	1	3	4
C	-	1	1	1	3
D	1	2	4	0	7
E	-	1	0	1	2
Total des élèves	1	4	7	8	20

Ce tableau montre que les élèves de niveaux A et B réussissent (en moyenne) mieux que les autres élèves (niveau D et C), notons toutefois la bonne performance de Davy (élève de niveau E) qui obtient 77 % de réussite sur l'ensemble des activités.

6- e) conclusion

Nous constatons que les performances enregistrées à ce jeu sont conformes dans l'ensemble aux performances enregistrées en général, en mathématiques. Notons toutefois que certains élèves en grande difficulté habituellement peuvent obtenir ici de bons résultats (cf Davy en CM1), la faiblesse des effectifs ne permet toutefois pas de généraliser ces résultats.

7) Conclusions portant sur le jeu de l'autobus

7-a) analyse des procédures

* Quand les nombres a et b sont compris entre 0 et 9, les enfants effectuent mentalement les opérations l'une à la suite de l'autre dans l'ordre proposé. Seuls, quelques élèves (en général les meilleurs) composent de façon systématique les opérateurs.
Les données de départ n'imposant pas une composition des transformations, la grande majorité des élèves n'en voit pas la nécessité et n'en tient pas compte, même après explicitation.

* Quand les nombres a et b sont plus grands (avec $|a - b|$ relativement petit), nous avons constaté que la procédure utilisant la composition des transformations se diffuse et est adoptée par la quasi totalité des élèves.
Ceux qui n'utilisent pas cette procédure sont des élèves très faibles.

* Il faut toutefois noter que les observations précédentes ne sont pas vérifiées au CE1 . La composition des transformations, à ce niveau, reste difficile, il semble souhaitable d'adopter une progresion permettant de faire franchir les étapes une par une par les élèves (voir analyse du CE1) et de disposer de temps pour le faire.

7-b) analyse des résultats

- Lors de la 1ère phase (domaine D1 : a et b inférieurs à 10) nous constatons que les exercices sont mieux réussis :
  - quand il n'y a pas de passage à la dizaine,
  - quand l'ordre des opérateurs est +, -,
  - quand le nombre a est le plus grand,
  - quand le nombre n est petit.
- Les élèves de bon niveau réussissent nettement mieux que les autres.
- Lors de la 2ème phase (domaine D 3), nous constatons au début, un fléchissement des réussites. Au fur et à mesure des séquences, le pourcentage de réussite s'améliore pour se stabiliser, par exemple en CE2, CM, aux environs de 60 %.
Le choix des données (valeurs de a et de b) et même l'explicitation collective des procédures utilisées par les élèves ne suffisent pas à faire évoluer l'ensemble de la classe. Une institutionnalisation des savoir-faire est nécessaire pour que la majorité des élèves adopte les procédures les plus performantes.

Celle-ci doit toutefois être précédée par des phases de recherche et de familiarisation avec le problème.

7-c) relevé des erreurs les plus fréquentes

Nous avons observé au départ (principalement dans une des classes) une difficulté à traduire le problème numériquement. Les erreurs proviennent principalement :
- d'une difficulté à mémoriser toutes les données,
- d'une difficulté à évaluer le "signe" de l'opérateur composé (alors que l'écart est souvent correctement évalué); cette difficulté est renforcée lorsque le signe de l'opérateur composé est - , ou lorsque le nombre de voyageurs qui descendent est donné en premier,
- d'un manque de temps.

7-d) Les performances enregistrées par les élèves à ce type d'activités sont semblables à celles enregistrées, en général, en mathématiques.

7-e) Le calcul mental permet aux élèves de progresser dans cette activité

En effet, par écrit, la technique est suffisamment performante pour ne pas justifier un changement de procédures.

B) AUTRES ACTIVITES ADDITIVES

1) Introduction

Deux types d'activités sont ici décrites :
1. Compter, Décompter de n en n.
2. Additions orales.

Pour chaque type d'activités, nous proposons une comparaison selon les différents niveaux de l'école élémentaire (du CP au CM2).
Cette comparaison porte :
- sur les procédures utilisées par les élèves du CP au CM2
- sur les résultats et les erreurs observés.

2) Activités proposées aux différents niveaux

2-a) Activités proposées au CP

- Compter de 1 en 1, de 2 en 2
- Décompter de 1 en 1.

- Autres activités :
  - Activités concernant la suite des nombres : un nombre étant donné, trouver celui qui vient juste avant, juste après, juste avant terminé par un certain chiffre (en particulier par 0).
  - Activités concernant des écritures additives, il s'agit en particulier de :
    - Rechercher des compléments à 10 :
      ex : compléter 6 + 2 + . = 10
    - Entourer ce qui fait 10 dans une écriture additive :
      ex : 6 + 1 + 4 + 2
    - Décomposer un nombre en une somme de 3 termes :
      ex : 8 = . + . + .
    - Comparer des écritures additives.

2-b) Activités proposées au CE1

- Compter de n en n : n = 2,3,4,7,9,10,11.
- Décompter de n en n : n = 1,2,3,4,10.
- Jeu de la grenouille.
- Exercices de calcul rapide :
  - Trouver le complément à 10 ou à la dizaine supérieure : ex 36 + . = 40
  - Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines, par exemple :
    37 + 10 = .
    43 + . = 63
  - Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition à plusieurs termes :

ex : 23 + 15 + 4 + 3 + 5
- Dans une somme, décomposer l'un des nombres en nombre entier de dizaines et d'unités
ex : 27 + 16 = 37 + .
- Décomposer l'un des nombres pour aller à la dizaine supérieure :
ex : 27 + 16 = 30 + .

- Additions mentales.

2-c) Activités proposées au CE2

- Compter de n en n : 3,4,8,9,12,14,17,18.
- Décompter de n en n : 3,4,9,10,12,14,17,18.
- Calcul rapide (voir CE1).
- Additions orales.

2-d) Activités proposées au CM. (voir CE1)

- Compter, décompter de n en n avec n = 7,9,11,12,15,17.
- Additions mentales.

2-e) Méthode de travail

Pour l'exercice compter, décompter de n en n, il s'agit :

- soit d'un travail individuel sur fiche : le premier nombre est écrit sur la fiche, à partir de ce nombre, l'élève doit compter ou décompter de n en n.

- soit d'un travail collectif oral : le maître intérroge les élèves à tour de rôle, dans un ordre quelconque. Un secrétaire note les résultats. On ne s'arrête pas s'il y a une erreur.

Si le travail individuel sur fiche permet une évaluation plus précise des performances de chacun, il risque d'être un obstacle au développement de stratégies de calcul mental. En effet, quand ils écrivent les nombres, les enfants, ayant un support écrit, ont plus tendance à "poser l'opération dans la tête" et donc à reproduire les techniques de calcul écrit, plutôt que de rechercher de nouvelles techniques mentales. Si on veut faire apparaître ces dernières, il faut donc privilégier le travail collectif oral.

3) Quelques commentaires sur les activités proposées au CP

Nous traiterons dans un paragraphe particulier les activités de comptage et décomptage.

3-a) Activités concernant la suite des nombres

Exemple : Un nombre étant donné, trouver celui qui vient :

- juste avant,
- juste après,
- juste avant terminé par un certain chiffre,
- juste avant terminé par 0.

Ces exercices ne sont pas très bien réussis. Environ la moitié des enfants font des erreurs. Certains élèves, les plus faibles, fournissent très peu de bonnes réponses.

Erreurs observées dans l'exercice juste avant - juste après :
- Erreur dans la dizaine : 29 - 20 ou bien : 19 - 10 -
cette erreur est très fréquente.
- Enlever 1 ou ajouter 1 aux nombres de la ligne précédente : 23 - 24 - 22 - 28 - 26.
- Ecrire des nombres proches : 26 - 28 - 27
- Pour un enfant, il est vraiment difficile d'interpréter :129 - 28 - 7 - 218 - 20 - 4.
- Reprise du chiffre des unités du nombre donné : 30 - 20 - 10 - 20 - 40
- autres exemples : 51 - 50 - 52 - 49 - 51 - 52

Erreurs observées dans l'exercice : "juste avant terminé par un chiffre" (0 ou non)
- Erreur dans la dizaine : 23 - 40 - 43 - 40 (terminé par 3)
- Confusion avec juste avant.
- Confusion avec juste après.
- Confusion avec juste après et terminé par 0.

Les élèves du cours préparatoire semblent donc avoir des difficultés pour maîtriser la suite des nombres, le passage des dizaines est particulièrement révélateur.

3-b) Activités concernant des écritures additives

- Les exercices *compléments à 10, compléter* $6 + 2 + . = 10$, *Entourer ce qui fait 10* sont bien réussis.
- Les décompositions en 3 termes :

ex : 8
4 + 4
. + . + .

2 méthodes sont utilisées :

a) Trouver 3 nombres différents des 2 premiers.

b) Garder un nombre et décomposer le 2ème, cette méthode est la plus utilisée.

Dans cet exercice, plus de la moitié des élèves font des erreurs.

- Les comparaisons d'écritures additives : le maître peut faire varier la difficulté selon qu'il reprend ou non les mêmes termes, dans un ordre différent ou non.
exemple : comparer 14 + 4 + 2 et 14 + 5 + 2
Cela est bien réussi.
Les enfants calculent les sommes des 2 derniers nombres (puisque 14 est repris) ou bien comparent les nombres 2 à 2

4) Jeu de la grenouille (au CE1)

Devant les difficultés de certains enfants pour décompter nous avons proposé un autre exercice : le jeu de la grenouille.
Une grenouille fait des bonds en arrière de longueur constante n sur une droite graduée.
Elle part d'un nombre a fixé. Sur quels nombres va-t-elle s'arrêter ?
Il s'agit en fait d'un habillage particulier du décomptage de n en n : les enfants procèdent de la même façon : ils énumèrent (n - 1) termes et écrivent le n-ième.
Un seul élève (le meilleur de la classe) traduit le problème sous forme d'une addition à trou : 0 + n = a
Un autre élève propose d'utiliser une décomposition du nombre n.
En utilisant l'énumération, cet exercice est bien réussi dans l'ensemble, la seule erreur relevée consiste à faire avancer la grenouille au lieu de la faire reculer.

5) Compter - Décompter de n en n

5-a) Procédures utilisées au différents niveaux.

Remarquons tout d'abord que les enfants de CP et de CE1 ont souvent du mal à expliquer comment ils ont procédé pour faire un calcul. Il a donc été parfois difficile de connaître précisément la procédure utilisée par chaque élève. De plus, certains enfants changent de procédure lors du comptage ou du décomptage.

5-a-1) P1 : Procédure utilisant l'énumération

Elle consiste à "compter tout bas" (n-1) termes et à écrire le nième. Elle est souvent accompagnée d'un comptage sur les doigts. Pour les petites valeurs de n (n = 1,2,3,4,7 et même 9) c'est la seule procédure utilisée au CP et au CE1. On la retrouve au CE2 et au CM1, mais elle est beaucoup plus rare et s'observe surtout chez les élèves en difficulté. Au CM2, elle disparaît complètement. On peut remarquer que pour ces niveaux, CE2 et CM, les valeurs proposées pour n sont plus grandes, les élèves sont alors conduits à rechercher des procédures plus performantes.

Au CE1, aucun élève ne déclare ajouter n à chaque fois, comme si le rapprochement avec l'addition n'était pas fait, cette absence de référence à l'addition nous a d'ailleurs conduit à formuler la consigne différemment : "*ajouter n à chaque fois à partir de .... .*" au lieu de "*compter de n en n à partir de....*"
De même : "*enlever n à chaque fois à partir de .....*" au lieu de "*décompter de n en n à partir de ....*"

Quelques additions mentales sont alors apparues lors de l'explicitation des stratégies

5-a-2) P2 : Procédures faisant intervenir des décompositions additives ou soustractives de n :

On peut envisager différentes décompositions de n :
- Décomposition arbitraire :
ex : 164 + 7 = (164 + 2) + 5
- Décomposition de n pour aller à la dizaine supérieur (ce qui nécessite l'emploi des compléments à 10)
ex : 164 + 7 = (164 + 6) + 1
- Décomposition "décimale" de n :
ex : 164 + 12 = (164 + 10) + 2
- Décomposition soustractive de n par rapport à la dizaine supérieure :
ex : 9 = 10 - 1 ; 18 = 20 - 2

5-a-3) Analyse des décompositions utilisées selon la valeur de n et les niveaux de classe

n = 2,3,4,8... (valeurs de n inférieures à 9).

Au CP et au CE1, les décompositions de n utilisant l'addition n'apparaissent pas. Il semble que les décompositions additives des petits nombres (n < 1O), pourtant travaillées dès le cours préparatoire, ne soient pas reconnues par la suite comme des outils et ne sont pas disponibles au CE1.

Au CE2, les décompositions additives de n sont encore peu utilisées (pour n < 10), beaucoup d'élèves comptent ou décomptent sur leurs doigts (procédure P1) ou effectuent mentalement leurs calculs à l'aide de la technique écrite.
Toutefois, lorsque n est plus "grand" (n = 8), une bonne partie des élèves de CE2 utilise la décomposition 8 = 10 - 2 ;
Certains élèves déclarent décomposer 8 "*comme ça la arrange*" (pour aller à la dizaine supérieure par exemple) on les trouve parmi les meilleurs.

Au CM, on a pu observer une utilisation plus grande des décompositions additives de n pour n = 7, en effet pour décompter par 7, les élèves de CM2 ont utilisé soit la décomposition 7 = 4 + 3, soit 7 = 10 - 3. Le calcul "de tête", qui consiste à utiliser mentalement la technique écrite n'a pas été utilisé pour décompter par 7, alors qu'il l'avait été lors du comptage par 7. Le décomptage oblige davantage les élèves à utiliser des décompositions additives (ou soustractives)

n = 9

Au CE1, les enfants effectuent mentalement le calcul puis, ayant écrit le début de la suite des nombres, observent que "*à chaque fois on ajoute une dizaine et on enlève une unité* " : ils appliquent donc cette règle par la suite mais il n'est pas sûr que la liaison soit faite avec la décomposition 9 = 10 - 1

Au CE2, seulement la moitié des élèves utilise cette décomposition pour le comptage de 9 en 9 : les autres utilisent soit P1 (2 élèves sur 18), soit la technique écrite, soit une décomposition de 9 "adéquate" permettant de passer à la dizaine supérieure :
ex : (25 + 5) + 4 ou (34 + 6) + 3 (1 élève sur 18).
Remarquons que ces dernières décompositions ne sont utilisées que par un seul élève qui se trouve dans le groupe des meilleurs de la classe.
Par contre, quand il s'agit de décompter de 9 en 9, la majorité des élèves de CE2 utilise 9 = 1O - 1, cette décomposition a été vue lors du comptage et se trouve donc disponible.

n = 10.

Cette valeur de n n'a été proposée qu'au CE1. Les enfants remarquent, dans la suite des nombres, que " *les dizaines changent*" et "l*es unités restent*. Mais il ne semble pas évident pour tous qu'ajouter 10 revient à ajouter 1 au chifffre des dizaines (il en est de même pour enlever 10).
Certains enfants (parmi les plus en difficulté) utilisent la procédure P1.

n = 11.

Le cas est analogue à n = 9.

n > 11 (n = 12, 14, 15, 17, 18).

Ces valeurs de n n'ont été proposées qu'au CE2 et au CM.

n = 12 , n = 14

C'est la décomposition canonique 12 = 10 + 2 ou 14 = 10 + 4 qui apparaît le plus, d'autres décompositions sont proposées par les meilleurs élèves :
ex : 23 + 12 = (23 + 7) + 5 *Allez à la dizaine supérieure*
27 + 12 = (27 + 3) + 9

21 + 14 = (20 + 15) et 14 = 15 - 1.
Ces procédures sont jugées difficiles par les autres élèves.

n = 15, 17, 18

Là aussi, c'est la décomposition canonique 15 = 10 + 5, 17 = 10 + 7 ou 18 = 10 + 8 qui apparaît le plus. Mais il faut y ajouter la décomposition faisant intervenir la dizaine supérieure : 15 = 20 - 5, 17 = 2O - 3, 18 = 20 - 2. Les autres décompositions additives (par ex : 17 = 14 + 3) sont très rares et, comme précédemment, sont proposées par les meilleurs élèves "*quand ça les arrange*".
On peut remarquer qu'au CM2, la procédure faisant intervenir 17 = 20 - 3 est utilisée spontanément par les élèves alors qu'au CE2, elle est induite par le maître (qui demande de trouver une autre procédure en faisant remarquer que17 n'est pas loin de vingt).
Une fois cette procédure mise en évidence, elle est majoritairement utilisée lors du décomptage par 17 (de même pour décompter par 18, les enfants utilisent 18 = 20 - 2).

De façon générale, les procédures de type P2 sont plus largement utilisées dans les exercices de décomptage, en particulier lorsque n > 10. En effet, les enfants ont du mal à calculer mentalement une différence et sont donc conduits à trouver une autre procédure. Cette difficulté du "calcul de tête" est moindre dans le cas d'une addition car les enfants sont plus familiarisés avec l'algorithme écrit.

5-a-4) P3 : Calcul "de tête"

Cette procédure consiste à appliquer mentalement la technique écrite.

Au CE1, elle constitue, avec P1, les seules procédures où il y a découverte d'une règle, puis application de cette règle.

Au CE2, cette procédure est largement utilisée, surtout lors des premiers exercices. Par la suite, des procédures plus efficaces (faisant intervenir des décompositions additives ou soustractives) sont proposées par les meilleurs élèves, explicitées devant toute la classe et réutilisées par un nombre de plus en plus grand d'enfants.

Au CM, les procédures de type P2 apparaissent plus rapidement mais, au CE2 comme au CM certains élèves, plutôt en difficulté, en restent à la reproduction mentale de la technique écrite.

5-a-5) P4 : Utilisation d'une régularité dans la suite des nombres, d'une période:

Dès le CP et le CE1, les enfants sont capables de repérer des régularités dans la suite des chiffres des unités ou des dizaines, puis de les utiliser pour poursuivre l'écriture de la suite des nombres de n en n.
C'est le cas pour n = 9, 10, 11 mais au CE1, cela est perçu comme une règle du jeu que l'on applique mécaniquement, sans être capable de la justifier à l'aide d'une décomposition additive de n.

Autres exemples :
- Compter de 8 en 8 à partir de 10 (au CE2) : après observation des premiers termes, les élèves découvrent la période et appliquent cette règle pour poursuivre.
- Compter de 15 en 15 à partir de 28 : (CE2 et CM2) les élèves de CE2 observent l'alternance du chiffre des unités 8 - 3 - 8 - 3... mais sont incapables de l'expliquer. L'intervention du maître est nécessaire pour faire la liaison avec la décomposition 15 + 15 = 30.

Enfin, les régularités observées ne sont pas toujours bonnes, ce qui induit beaucoup d'élèves en erreur.
ex : cas d'une élève de CE2 qui devait décompter de 3 en 3 à partir de 68 :
...... 59 - 58 - 55 - 50 - 48 - 45 - 40 - 38 - 35 - 30.......

5-b) Quelques résultats et erreurs aux différents niveaux.

5-b-1) Quelques résultats au CP

Si compter de 1 en 1 ne pose pas trop de problème, il n'en va pas de même pour décompter : les erreurs observées sont nombreuses :
- lors d'un changement de dizaine :
30 - 20
31 - 29
23 - 20 - 10
- Erreur sur le chiffre des dizaines :
31 - 20
29 - 18
25 - 14
29 - 9
- Compter au lieu de décompter.
- Compter de 2 en 2 (confusion avec l'exercice précédent)

Les premiers résultats ne sont pas très bons :

ex : Décompter à partir de 33. (travail individuel écrit)

Tableau n°13 : N est le nombre de termes écrits sur la fiche.

nombre d'erreurs	N < 10	10 ⩽ N ⩽ 20	N > 20
0	-	2	4
1	-	-	4
2	1	-	-
3	-	-	-

- 5 enfants sur 16 sont donc en échec.
- Parmi ceux qui écrivent plus de 20 nombres, 6 vont jusqu'à 0.

Après plusieurs séances d'entraînement, on note un progrès certain.
Exemple : décompter de 78 à 45 :
- 10 enfants réussissent,
- 1 enfant va jusqu'à 56,
- 2 vont jusqu'à 45 avec 1 erreur,
- un élève va jusqu'à 72 puis saute à 30-39-38-37......
- 2 élèves écrivent très peu de termes (3 et 10).

Ces trois derniers élèves ont par ailleurs beaucoup de difficultés en mathématiques.

Pour le comptage de 2 en 2, les erreurs sont du même type que pour décompter :
- compter de 1 en 1 (depuis le début ou de temps en temps),
- erreur sur le chiffre des dizaines : 24-16-28-20....
- 1 élève compte correctement jusqu'à 22 puis écrit 44-66-88.
- autres erreurs : 16-100-20 ?
  30-33-34-36-38......

Au début, on observe jusqu'à 4 erreurs pour un élève. De plus, 4 enfants donnent un petit nombre de termes (inférieur à 10). Là aussi, il faut un certain temps d'apprentissage avant d'obtenir des résultats satisfaisants :

ex : Compter de 2 en 2 à partir de 11 :
- 13 enfants comptent correctement jusqu'à 77
- les 3 autres vont jusqu'à 67 avec 2 ou 3 erreurs :
- exemples d'erreurs :
  48-52-53-55.......
  19-22.....
  48-55-54-56-58......
  68-77

Ces 3 enfants sont les mêmes que ceux qui ont des problèmes pour décompter.

Les résultats obtenus lors du décomptage sont légèrement inférieurs à ceux obtenus pour le comptage : le comptage en arrière, même de 1 en 1, s'avère difficile au cours préparatoire. Le passage des dizaines pose problème. Ces difficultés pour le comptage en arrière et le passage des dizaines ont été aussi

observées par les psychologues (article de M. FAYOL dans RFP). On peut d'ailleurs remarquer que l'on rencontre le même problème chez les adultes ayant à manipuler des bases autres que dix.
Néammoins, un apprentissage régulier amène à des résultats satisfaisants pour l'ensemble de la classe.

5-b-2) Au CE1

Compter de 10 en 10 est bien réussi, sauf pour une élève (celle qui est en difficulté) qui écrit 5-55.... puis 95-155, cette dernière erreur se retrouvant 2 fois par la suite : 195-255....... 295-355.

Décompter par 10 est aussi bien réussi. On trouve néanmoins, chez un élève, la confusion avec compter par 10.

Compter de 11 en 11 suscite plus d'erreurs : 3 élèves (sur 8) ont tous leurs résultats justes. Pour les autres, les erreurs (au maximum 2 par élève sauf pour Laure) sont du type :
- ajouter 10
- changer le chiffre des centaines plutôt que celui des dizaines par exemple : 110 - 201-313 -414 - 515
- ajouter 12

Le cas de Laure est particulier : elle compte d'abord de 10 en 10, puis de 100 en 100, puis de 1000 en 1000.....

Décompter de 11 en 11 s'avère encore plus difficile : seuls 2 élèves fournissent une bonne réponse. Exceptée Laure (pour laquelle, tout est faux), les autres font 1, 2, ou 3 erreurs du type :
- erreur sur le chiffre des dizaines : 125 - 104 ou bien 113 - 92
- erreur sur le chiffres des unités :
  125 - 116 (on "ajoute 1, on retranche 1")
  125 - 113 (on enlève 1 de trop)
  114 - 106

Le plus remarquable est le petit nombre de résultats écrits par certains enfants : une élève qui avait écrit 17 nombres lors du comptage n'en écrit plus que 4 quand il s'agit de décompter, et cela pendant un temps équivalent. De façon générale, les enfants éprouvent beaucoup plus de difficultés pour décompter que pour compter. Nous avons pu le constater à tous les niveaux, du CP au CM2. Ici, le nombre de termes écrits lors du décomptage est nettement inférieur au nombre de termes écrits lors du comptage. Quand on leur demande de décompter, les enfants sont beaucoup plus lents et font plus d'erreurs.

Compter de 9 en 9 est bien réussi par 3 élèves (aucune erreur). Les autres font 1 ou 2 erreurs, en particulier sur le chiffre des dizaines : 40 - 59 ; 140 - 159.

Une élève fait 5 erreurs (ajoute 10 ou 8). Le cas de Laure est encore à étudier à part : elle semble ajouter 1 au chiffre des centaines et enlever 1 au chiffre des unités :
...408 - 407 - 405 - 404 - 403 - 401 - 400 - 509 - 508 - 507 - 505 - 504 - 503 - 501 - 500

5-b-3) au CE2

Pour les petites valeurs de n (n = 3,4), les enfants réussissent bien le comptage mais, quand il s'agit de décompter, 50% font des erreurs.

Cette relative réusssite dans le comptage devient nettement plus incertaine quand n augmente (n = 8 par exemple), on observe de nouveau beaucoup d'erreurs.

L'utilisation de décompositions (9 = 10 - 1 par exemple) conduit des élèves à des erreurs lors du décomptage : après avoir enlevé une dizaine, ils enlèvent une unité au lieu de l'ajouter). On retrouve ce type d'erreur pour des valeurs de n plus grandes (n = 18 = 20 - 2, par exemple).

Exemples d'erreurs observées lors du décomptage de 3 en 3 :
- Erreur dans la dizaine, ex : ...... 31 - 18 -....
- Enlever 2 (ou un autre nombre) à un moment : l'erreur devenant périodique :
62 - 60.....42 - 40.....22 - 20
62 - 58.....52 - 48.....42 - 38
- Ajouter 3.
- Décompter de 4 en 4.
- Autres exemples : ...59 - 58 - 55 - 50 - 48 - 45 - 40 - 38 - 35 - 30....(on observe une certaine périodicité).
... 68 - 67 - 65 - 62 - ......

Pour n > 10, lors du comptage de n en n , le pourcentage d'erreurs varie de 5% à 50%, avec une moyenne d'environ 25 %.

On remarque que, lorsqu'il est proposé en fin de séquence, un tel exercice est souvent mal réussi car les élèves sont fatigués.

Le pourcentage d'erreurs est plus important pour le décomptage de n en n, il se situe autour de 35 % (voir tableaux 14 et 15).

Tableau 14

N nombre d'erreurs	< 10	$10 \leq N \leq 15$	$15 \leq N \leq 20$	> 20	total
0	2	1		2	6
2	2	-		-	2
3	-	1		-	2
> 3	-	-	1 (6 erreurs)	1 (1O erreurs)	2
total	4	2	3	3	18

Quelques erreurs observées.
- Oubli d'une opération, par exemple : pour ajouter 10 + a, ajouter seulement 10 ou ajouter seulement a
- le chifffre des unités est juste, mais il y a erreur sur celui des dizaines ou l'inverse : en particulier, le cas d'un nombre à 3 chiffres avec 0 comme chiffre des dizaines est davantage source d'erreurs.
- Erreur sur le chiffre des centaines, les 2 autres étant justes.
- Pour faire -10 suivi de -b faire seulement - 10 ou seulement -b
- Cas particulier :
. enlever 22 au lieu de 18 car 18 = 20 - 2
. enlever 27 au lieu de 13 car 13 = 20 - 7

- Compter de 15 en 15 pendant 2 minutes, individuellement et par écrit (à partir de 9) : voir le tableau 15 où N désigne le nombre de termes écrits sur la fiche.

Tableau 15

N nombre d'erreurs	N < 10	$10 \leq N \leq 20$	N > 20	Total
0	3 4	6 4	7 7	16 16
1	 1	2 2	1 1	3 4
2		3 	 3	3 3

NB : les nombres en haut à gauche désignent les effectifs pour le comptage, les nombres en bas à droite désignent les effectifs pour le décomptage.

Remarques sur ces résultats :
- Pour la majorité des élèves (13 sur 18) : $10 < N < 20$
- L'erreur la plus fréquente est d'ajouter 5 au lieu d'ajouter 15 : en particulier, certains élèves ajoutent 20 une fois sur 2, ce qui semble indiquer qu'ils ont remarqué une certaine régularité.
- Par rapport aux résultats d'ensemble, il faut noter la bonne performance d'une élève de niveau jugé passable.
- Les résultats sont évidemment moins bons qu'au CM2, mais 2 élèves de cette classe obtiennent des résultats supérieurs à la majorité des élèves de CM2.

On peut faire quelques remarques sur ces derniers résultats:
- Le nombre d'erreurs pour l'ensemble de la classe est à peu près le même pour les 2 exercices.
- Il y a de très grandes disparités entre les élèves : pour certains $N = 4$ ou 5, alors que pour d'autres N est voisin de 30 !
- Pour le comptage : $5 < N < 28$
- Pour le décomptage : $1 < N < 34$

le temps donné pour décompter étant un peu plus long, on retrouve le fait que les élèves sont plus lents quand il s'agit de décompter.

Compter, décompter de 17 en 17

tableau 16

N nombre d'erreurs	$N \geq 20$	$10 \leq N \leq 20$	$N < 10$	total
0	4 2	8 5	2 8	14 15
1	3 3	3 3	1	7 6

NB : les nombres en haut à gauche désignent les effectifs pour le comptage, les nombres en bas à droite désignent les effectifs pour le décomptage. N désigne le nombre de résultats écrits sur la fiche

Temps donné :
- Compter : 3'
- Décompter : 4'

Pour les 2 exercices, le nombre d'erreurs est à peu près le même.
- Quand il s'agit de décompter, il y a plus d'élèves pour lesquels N est inférieur à 10.
- Comme précédemment, on observe de grandes disparités entre les élèves :

pour le comptage : $6 < N < 37$

pour le décomptage : $2 < N < 37$

Ce sont en général les mêmes enfants qui ont des difficultés pour compter et pour décompter,quelque soit la valeur de n.

5-c) Conclusion

5-c-1) Evolution des procédures en fonction des niveaux

La procédure P1 fondée sur l'énumération (compter tout bas (n - 1) termes et écrire le nième, éventuellement à l'aide des doigts) est employée par tous les enfants de CP et de CE1. Cette procédure, que l'on peut juger comme "primaire" n'est plus utilisée au CE2 et surtout au CM1, que par les élèves en difficulté, elle disparaît au CM2.

Par contre, les procédures P2 qui utilisent une décomposition de n, plus élaborée, ne se rencontrent pas au CP ni au CE1. Au CE2 et au CM1, elles sont d'abord employées par les meilleurs élèves, puis elles se généralisent à l'ensemble de la classe qui reconnaît leur efficacité. Néanmoins certains élèves, ceux qui sont le plus en difficulté, continuent à utiliser une procédure d'énumération ou effectuent les calculs "de tête" grâce à la technique écrite.

Du CP au CM2, on constate donc une nette évolution des procédures avec, un saut qualitatif du CE1 au CE2. Cette évolution sans doute est due à une meilleure connaissance des décompositions additives (ou soustractives) des nombres et à un répertoire additif plus étendu.

5-c-2) Une fois de plus, on constate que ce sont les meilleurs élèves qui proposent plusieurs procédures et qui sont capables d'en changer *"comme ça les arrange"* suivant les valeurs de n ou du nombre donné.

Certains "bons élèves peuvent toutefois utiliser des procédures jugées primaires dans des cas très particuliers :

Nous pouvons citer l'exemple d'un élève de CM1 qui, pour n = 4, déclare :*"je fais un temps rythmé (9) 10 - 11 - 12 - (13)"* . Mais il n'utilise plus cette procédure dès que n est supérieur à 4.

5-c-3) L'explicitation des procédures utilisées permet aux élèves plus faibles de découvrir et d'utiliser d'autres procédures plus efficaces que les leurs. Le maître a un rôle important à jouer, d'une part dans l'explicitation des procédures effectivement utilisées, d'autre part dans la recherche de procédures plus efficaces qui pourront ensuite être employées.

5-c-4) Dès le CP et le CE1, les enfants sont capables de repérer des régularités dans la suite des chiffres des unités ou des dizaines. Mais d'une part les régularités observées ne sont pas toujours bonnes, ce qui induit beaucoup d'élèves en erreur. D'autre part cela est percu, surtout chez les petits, comme une règle du jeu que l'on applique mécaniquement, sans être capable de la justifier.

6) Additions mentales

6-a) Quelques remarques préliminaires

- Si on veut amener les enfants à développer des stratégies propres au calcul mental, il faut leur proposer des exercices uniquement oraux. En effet, si les nombres sont écrits sur une feuille (ou au tableau), il leur suffit de réinvestir la technique écrite pour trouver le résultat.

- Dans le cas d'un exercice purement oral, la technique écrite, qui nécessite plusieurs mises en mémoire, n'est guère performante et on observe beaucoup d'erreurs.

- Des exercices préparatoires de calcul rapide semblent nécessaires pour amener les enfants à utiliser des techniques propres au calcul mental :

exemple : 37 + 28
On peut envisager 2 stratégies différentes :
1. Décomposer l'un des nombres et ajouter en premier un nombre entier de dizaines : (37 + 20) + 8 ou (30 + 28) + 7
2. Décomposer l'un des nombres pour arriver à la dizaine supérieure et ajouter le complément :
(37 + 3) + 25 ou (28 + 2) + 35

6-b) Quelques exercices proposés en calcul rapide

Ces exercices visent à développer chez les élèves des stratégies de type 1 ou 2 : Ils sont proposés par écrit et individuellement.

Trouver le complément à 10 ou à la dizaine supérieure :
ex : 6 + . = 10
36 + . = 40
66 + 4 = .
. + 4 = 50

Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines :
ex : 37 + 10 = .
43 + . = 63
. + 20 = 79
30 + . = 76
158 + . = 178
. + 234 = 254

Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition à plusieurs termes

Les nombres sont dans ce cas écrits au tableau

ex : 27 + 15 + 4 + 3 + 5 ; 16 + 27 + 45 + 3 + 5 ; 23 + 28 + 17 + 2 + 12

Les enfants ont alors intérêt à utiliser les groupements amenant à un nombre entier de dizaines.

Décomposer l'un des nombres en nombre entier de dizaines + nombre d'unités

ex : 27 + 16 = 37 + .
21 + 35 = 51 + .

il faudra alors expliciter : 37 provient de (27 + 10).
Comme 16 = 10 + 6, il reste à ajouter 6.

Décomposer l'un des nombres pour aller à la dizaine supérieure :

ex : 15 + 7 = 20 + .
27 + 16 = 30 + .
29 + 18 = 30 + .

Cet exercice suppose une bonne connaissance des compléments à 10 et des décompositions de nombres :
ex : 30 provient de 27 + 3
comme 16 = 3 + 13, il reste à ajouter 13.

6-c) Analyse des résultats des élèves à ces activités préparatoires

Au CE1, les exercices de types a) ou b), après un certain entraînement, sont assez bien réussis, sauf pour Laure qui ajoute les deux nombres au lieu de chercher le complément :

ex : 38 + 78 = 40 + .
52 + 22 = 30 + .

Dans les exercices de type c) la recherche de groupements pour obtenir un nombre entier de dizaines n'est pas le fait de tous les enfants . Deux seulement procèdent ainsi pour tous les calculs. Les autres font un ou deux groupements au début, ou font les calculs dans n'importe quel ordre.

En fait, les enfants ont tendance à utiliser mentalement la technique écrite, et donc à séparer chaque nombre entre chiffre des dizaines et chiffre des unités, ce qui les conduit à des erreurs car, après avoir ajouté les unités, ils oublient des dizaines. Cette stratégie peut tout de même conduire à une réussite, surtout si les nombres proposés ne sont pas 'trop grands"

exemple : 6 + 13 + 24 + 17 + 8 + 2

Procédure : 2 + 8 = 10
10 + 7 = 17
17 + 4 = 21
21 + 13 = 34
34 + 6 = 40

40 + 20 = 60
60 + 10 = 70

Il faut se rappeler qu'on a encore 2 dizaines et 1 dizaine à ajouter.

Pour des enfants de CE1, il semble donc difficile de considérer un nombre "globalement" et de faire directement 17 + 13 = 30, sans décomposer comme dans la technique écrite.
Bien que les exercices sur les compléments à 10 et à la dizaine supérieure soient relativement bien réussis en tant que tels, ils ne sont pas réutilisés ensuite dans d'autres situations. Dans les additions à plusieurs termes, les enfants ont du mal à repérer les groupements formant un nombre de dizaines. Le même type d'exercice proposé au CE2 est assez bien réussi.
Exemple : 1 + 22 + 18 + 7 + 3 + 4 + 16 + 19

15 élèves répondent correctement,
4 font une erreur de retenue,
un élève ne finit pas le calcul,
4 ne donnent pas de réponse.

Les procédures observées sont :

- Calcul pas à pas, dans l'ordre où se présentent les nombres,
- Recherche de groupements à condition de pouvoir écrire les résultalts intermédiaires.

Au CE2 comme au CE1, la recherche de groupements "intéressants" ne semble pas systématique. De plus, quand les calculs se font dans le désordre, les enfants ont du mal à se rappeler quels nombres ont déjà été ajoutés. Ils ressentent la nécessité d'un support écrit.

Au CE1, les exercices de type e) sont très mal réussis. La moitié des enfants n'ont pas compris. Ils n'ont rien répondu ou bien ils ont écrit le chiffre des unités seulement :
ex : 27 + 16 = 30 + 3
39 + 18 = 40 + 7
Ou bien encore, ils ajoutent les unités :
ex : 25 + 8 = 30 + 13

Cela confirme les difficultés des enfants à utiliser le complément à la dizaine supérieure.

Les exercices de type d) ne sont pas réussis par tout le monde : 3 élèves ne comprennent pas et donnent très peu de réponses.
Une élève ajoute :
ex : 33 + 18 = 43 + 51
L'élève en difficulté ajoute tous les nombres en présence : 38 + 51 = 100 + 1.
Il faut remarquer les nombreuses erreurs lorsqu'il s'agit d'ajouter un nombre se terminant par 9, le phénomène "de compensation" (ajouter 1 à un terme et

enlever 1 à l'autre) qui semblait naturel aux élèves de CE2 ne l'est plus du tout au CE1.

Exemples d'erreur rencontrées :

- écriture du seul chiffre des unités : (très fréquente)
49 + 35 = 50 + 4
- Reprise du 2nd nombre : 19 + 5 = 20 + 5

Après un temps d'apprentissage, on note tout de même un certain progrès chez les élèves, sauf pour deux enfants, le pourcentage de bonnes réponses passe de 57 % à plus de 70 %.

6-d) Additions orales proprement dites

6-d-1) Procédures observées au CE1

Malgré les exercices de calcul rapide, il a été pratiquement impossible de faire adopter des stratégies de calcul mental aux élèves de CE1. Tous continuent à poser l'opération dans la tête, seul le meilleur élève semble comprendre que pour calculer 29 + 17, on peut se ramener à 30 + 16.

Ces difficultés sont sans doute liées à une connaissance peu approfondie du répertoire additif. En fait, pour un élève de CE1, il semble plus facile de décomposer un nombre en unités et dizaines et d'appliquer la technique écrite que de considérer les nombres "30" et "16" globalement et de faire mentalement 30 + 16.

La technique écrite utilisée mentalement est tout de même performante, si le temps laissé pour chaque addition est suffisammment long : le pourcentage de bonnes réponses est de l'ordre de 80 %.

6-d-2) Procédures obsevées au CE2

La procédure, consistant à décomposer le second nombre de façon à ajouter d'abord un nombre entier de dizaines, minoritaire au début, est devenue majoritaire. Les élèves se rendent vite compte qu'elle est plus fiable que celle qui consiste à "poser l'opération dans sa tête".

Les autres procédures observées sont :

- utiliser mentalement la technique écrite en commençant ou non par les unités :
exemple : 35 + 24
5 + 4 = 9 30 + 20 = 50
ou
30 + 20 = 50 5 + 4 = 9
- Passer à la dizaine supérieure, surtout quand un des nombres se termine par 9, par exemple : 49 + 24 = 50 + 23 = 73

Ce passage est beaucoup plus rare quand le nombre ne se termine pas par 9. Les enfants explicitent cette procédure en disant "*si j'ajoute 1 à l'un des nombres, il faut enlever 1 à l'autre nombre pour ne pas changer le résultat*".
De même : 48 + 35 = 50 + 33.

6-d-3) Procédures observées au CM2

Au CM2, les additions proposées concernent des nombres à 3 chiffres, les procédures observées sont de 3 types :

- Compter l'opération dans la tête en utilisant la technique écrite : malgré sa complexité due à de nombreuses mises en mémoire, cette procédure est majoritaire dans la classe (environ 15 élèves sur 22).

- Ajouter d'abord les centaines, puis les dizaines, puis les unités :

ex : 575 + 346 = (500 + 300) + (70 + 40) + (5 + 6)

Cette procédure est utilisée par 4 ou 5 élèves.

- Décomposer le 2ème nombre selon les centaines, les dizaines et les unités :

ex : 575 + 346 = (((575 + 300) + 40) + 6)

6-d-4) Quelques résultats

au CE2, les exercices de calcul rapide sont bien réussis, les quelques erreurs observées sont :

- celles dues à une reprise du même chiffre des unités, poids du dernier facteur:

ex : 45 + 25 = 65 (le nombre souligné était
37 + 67 = 97 celui demandé)

- celles dues à une erreur sur le chiffre des centaines :

ex : 158 + 120 = 178
234 + 220 = 254

- les additions orales sont assez bien réussies :

Tableau 17

nombre de bonnes réponses	10	9	8	7	6	5	2	0	total
Effectifs	5	2	2	4	1	2	1	1	18

- la moitié des élèves obtient une note supérieure ou égale à 8 (sur 10).
- 4 élèves seulement on une note inférieure ou égale à 5; parmi eux 2 sont plutôt faibles et 2 ont des résultats d'ensemble plutôt moyens, mais irréguliers.

Au CM2

Tableau 18 : (N : nombre de bonnes réponses, sur 5 demandées)

N	5	4	3	2	1	0	total
effectifs	6	5	7	4	-	-	22

Bien qu'utilisant mentalement la technique écrite, les enfants obtiennent d'assez bons résultats.

Pour essayer de faire évoluer les procédures, le maître a demandé de faire les calculs en utilisant une procédure à l'exclusion de toute autre.
En admettant que les enfants aient dans l'ensemble joué le jeu, le pourcentage de bonnes réponses est le suivant :

procédure 1 : 71 %
procédure 2 : 50 %
procédure 3 : 52 %

La procédure 1, malgré sa complexité, reste donc la plus performante.

Après un certain entraînement, les résultats sont plutôt bons puisque le pourcentage de bonnes réponses atteint 80%.

6-e) Conclusion

Dans la classe de CE1 où nous avons travaillé, les enfants ne semblent pas suffisamment "mûrs" pour utiliser des stratégies propres au calcul mental faisant intervenir des décompositions additives (ou soustractives) de nombres. Pour faire une addition orale, ils reproduisent mentalement la technique écrite.

Il faut attendre le CE2 pour que ces stratégies apparaissent et soient utilisées d'abord par certains élèves (en général les bons élèves), puis progressivement par la majorité de la classe.

Comme pour l'exercice compter, décompter, on observe donc un saut qualitatif entre le CE1 et le CE2.

Les travaux des psychologues (M. FAYOL) ont aussi mis en évidence cette étape importante du CE2 pour le comptage mental. Avant, pour effectuer des additions et soustractions mentales simples, les enfants utilisent des procédures de comptage par pas de un.

Après, les enfants procèdent comme les adultes à une récupération directe en mémoire à long terme des résultats.

Entre les deux, le CE2 est une période de transition "au cours de laquelle s'effectue le passage de la méthode reconstructive à la méthode reproductive".

Au début, l'intervention du maître est importante pour faire expliciter les procédures, mais leur diffusion progressive à une bonne partie de la classse est surtout due à une reconnaissance de leur efficacité par les enfants.

Là encore, comme pour l'exercice "compter-décompter", on constate que l'explicitation des procédures est toujours bénéfique, en particulier pour les élèves les plus faibles. Néanmoins, certains élèves en restent à la reproduction mentale de la technique écrite, ce sont en général ceux qui sont le plus en difficulté; comme cette technique nécessite de nombreuses mises en mémoire, elle est source de beaucoup d'erreurs.

Le cas de la classe de CM2 est un peu particulier, les élèves étaient tellement bien entraînés à "compter de tête" qu'il n'ont pas éprouvé la nécessité d'employer une autre procédure. D'ailleurs le "calcul de tête" s'est révélé pour eux très performant.

Comme dans toute activité mathématique, le temps d'apprentissage est fondamental. Dans toutes les classes, les élèves ont progressé en calcul mental, à l'exception de quelques enfants très en difficulté (une au CE1 et un au CE2).

TROISIEME CHAPITRE : ACTIVITES AUTOUR DES ECRITURES MULTIPLICATIVES ET DU CALCUL DE PRODUITS

Nous décrivons ici une première expérimentation menée sur le thème du calcul mental et des structures multiplicatives. Elle nous a permis de préciser nos hypothèses de recherche. Nous décrivons dans la seconde partie de cette brochure des activités spécifiques aux structures multiplicatives. Il nous a semblé toutefois digne d'intérêt de décrire cette première étape.

A) BUTS ET DESCRIPTION DES ACTIVITES

En observant dans les classes ordinaires ou d'application, nous constatons bien souvent que les seules désignations de nombres utilisées par les élèves sont celles de la numération orale, celles de la numération écrite ou liées à celle-ci.

Les désignations multiplicatives ne sont pas, en général, un objet d'apprentissage.

Cette carence trouve peut être son origine dans l'accent mis sur la construction d'un algorithme écrit qui nécessite l'emploi des décompositions additives et la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Lors de calculs oraux de produits, certaines décompositions sont utilisées :
- des décompositions additives liées à l'utilisation de l'associativité,
- des décompositions multiplicatives liées à l'utilisation de l'associativité.

Interviennent également la mémoire, la connaissance d'un répertoire multiplicatif restreint ("tables") ou large, la commutativité etc...

Nous nous sommes donc proposés de travailler les questions suivantes :

1 - Quelles connaissances de la multiplication les élèves mobilisent-ils pour exhiber des décompositions multiplicatives d'entiers ?

2 - Quelles sont les décompositions de nombres et les propriétés de la multiplication utilisés lors des calculs oraux de produits ?

3 - Le calcul mental permet-il d'enrichir les décompositions employées et les procédures de calcul ?

Nous ne donnerons que des éléments de réponse à partir des activités pratiquées dans des classes de CE2, CM1 et CM2. Ces activités portent sur :

- les décompositions multiplicatives d'entiers (classe de CM1),

- les produits itérés dont un des facteurs est 2 (classes de CE2 de Melun et de de CM1),
- les produits par 10, par un nombre entier de dizaines (classe de CM1),
- les produits par 11 (classe de CM1),
- le calcul de produits de 3 nombres (classe de CE2 de Melun),
- le produit d'un nombre pair par un multiple de 5 (classe de CM2).

Lors de l'analyse des procédures et résultats, nous insisterons plus particulièrement sur ceux des élèves en difficulté.

En particulier, la classe de CM1 qui comportait 9 élèves en difficulté (niveaux D et E, classement effectué par la maîtresse) nous a permis des observations interessantes sur ce point.

B) ANALYSE DES PROCEDURES ET DES RESULTATS

B-1) Décompositions multiplicatives d'entiers

Cette activités a été proposée en CM1.
Les nombres proposés sont :
160 = 25 x 5
600 = 2 x 2 x 2 x 3 x 52

B-1-a) Analyse de la tâche

Un entier étant donné, il s'agit d'en donner une écriture multiplicative et de vérifier que celle-ci ne fait pas partie de la liste déjà constituée au tableau.

A partir d'une écriture proposée, l'élève peut en trouver une nouvelle en divisant l'un des facteurs par un de ses diviseurs et en multipliant l'autre facteur par ce nombre.

ex : 80 x 2 puis 40 x 4

Il peut trouver une écriture par une procédure de multiplication à trous.

Il peut également utiliser un répertoire multiplicatif simple et les propriétés de la multiplication :

ex : 2 x 8 = 16   d'où 20 x 8 = 160

B-1-b) Résultats des élèves

pour 160

80 x 2 (Sandrine)

160 x 1 (Oriane)
4 x 40 (Nicolas)
20 x 8 (Patrick)
16 x 10 (Sandrine)
32 x 5 (Sandrine)
64 x 2,5 (Sandrine)
128 x 1 (Grégoire, qui fait une erreur sur les décimaux).

Les propositions justes émanent des meilleurs élèves. Sandrine en particulier, utilise les nombres décimaux.
La stratégie utilisée est celle de la multiplication d'un facteur par 2, division de l'autre facteur par 2, cette stratégie s'apparente à la technique de multiplication égyptienne, en fait elle s'appuie sur un procédé de compensation.

Pour 600

600 x 1 (Barbara)
150 x 4 (Patrick)
75 x 8 (Marina)
32,5 x 16 (Marina, erreur non rectifiée)
100 x 6 (Orianne)
60 x 10 (Cécile)
12 x 50 (J. Bruno)
25 x 24 (Nicolas)
120 x 5 (Madani)
16,5 x 32 (Patrick)
2 x 3 = 6 donc 200 x 3(Cécile)

La consigne est respectée sauf pour la réponse d'Audrey (5 x 100 + 100), la procédure de division pour 2 de l'un des facteurs, multiplication par 2 de l'autre se diffuse.
Nicolas, un très bon élève, utilise la même procédure avec le facteur 3.
Il y a explicitation de la stratégie "*multiplier par 2, diviser par 2*".
L'associativité de la multiplication est utilisée : 100 x 6 = 10 x 60
2 x 3 = 6 et 200 x 3 = 600

B-1-c) conclusion

Lors du premier exercice, seuls les meilleurs élèves fournissent des réponses pertinentes, utilisant une stratégie de "compensation" (multiplication par 2 d'un facteur, division par 2 de l'autre facteur).

Lors du deuxième exercice, la stratégie utilisée diffuse vers des élèves jugés plus moyens.

On aurait pu étudier si cette stratégie pouvait se généraliser en utilisant un nombre impair.

Un élève faible utilise l'associativité de la multiplication pour donner de nouvelles décompositions.

B-2) Multiplication par 10, par un nombre entier de dizaines (classe de CM1)

Après plusieurs exercices proposés oralement avec explicitation des règles (multiplication par 10) et des procédures (utilisation de l'associativité) nous proposons les tests suivant : 10 x 161 ; 13 x 20 ; 25 x 30

B-2-a) analyse de la tâche

Outre la mémorisation des nombres donnés, la multiplication par 10 ne nécessite que l'emploi d'une règle (règle des "zéros").

La multiplication par un nombre entier de dizaines nécessite une décomposition multiplicative, l'emploi de l'associativité, le calcul d'un produit puis la règle de multiplication par 10 (ou le contraire).

Les produits à calculer sont simples et peuvent faire partir du répertoire multiplicatif (13 x 2 = 26 ; 25 x 3 = 75)

B-2-b) résultats de la classe

tableau 20

produits type de réponses	10 x 161	13 x 20	25 x 30
réponses justes	12	9	8
non réponses	2	4	5
réponses fausses	4	5	5
total	18	18	18

Tableau 21 : résultats des élèves en difficulté

produits type de réponses	10 x 161	13 x 20	25 x 30
réponses justes	3	2	1
non réponses	2	4	5
réponses fausses	3	3	3
total	8	8	8

B-2-c) Analyse des erreurs des élèves en difficulté

Franck multiplie par 100.
Cécile ajoute une centaine.
Cécile généralise la règle d'adjonction des chiffres 0 :
25 x 30...153...1530
Les autres erreurs portent sur le calcul des produits.

B-2-d) conclusion

On remarque un taux d'échec important pour un exercice (50 % et 56 % pour les deux derniers).

Pour les élèves en difficulté, nous notons beaucoup de non réponses ce qui témoigne de leurs difficultés de concentration et de mémorisation, une compréhension ou mémorisation insuffisante de la consigne (Franck, Cécile), ou la difficulté à organiser le calcul.

B-3) Multiplication par 11 d'un nombre de 2 chiffres (classe de CM1)

B-3-a) Procédures observables

- Décomposition de 11 en 10 + 1 et utilisation de la distributivité, multiplication par 10, calcul d'une somme.
ex : 17 x 11 = 17 x (10 + 1)
17 x 10 + 17
170 + 17

- Emploi d'une règle
ab x 11 = (a x 100 + (a + b) x 10 + b) = a (a+b)b
ainsi : 17 x 11 = 187

- Décomposition de l'autre nombre et distributivité
ex : 15 x 11 = (10 x 11) + (5 x 11)

- Autres, en particulier : opération de tête

B-3-b) Résultats obtenus

Un premier test a lieu le 22/4, il s'agit de calculer : 7 x 11 et 13 x 11.
Après une phase d'apprentissage où l'accent est plutôt mis sur la première procédure (la règle 2 ne sera jamais évoquée), un deuxième test a eu lieu le 23/5/86 portant sur : 23 x 11 ; 15 x 11 ; 40 x 11.

Pour chacun de ces calculs, plusieurs procédures peuvent être performantes en particulier pour le dernier (4 x 11) x 10 = 440 qui utilise une décomposition multiplicative de 40 et l'associativité

tableau 21 : résultats de la classe

produits type de réponses	7 x 11	13 x 11	23 x 11	15 x 11	40 x 11
réponses justes	20	7	14	13	8
non réponses	0	0	0	0	3
réponses fausses	0	13	4	5	7
total	20	20	18	18	18

tableau 22 : résultats des élèves en difficulté

produits type de réponses	7 x 11	13 x 11	23 x 11	15 x 11	40 x 11
réponses justes	10	1	5	3	2
non réponses	0	0	0	0	2
réponses fausses	0	9	3	5	4
total	10	10	8	8	8

Le taux de réussite est faible, en relation avec le faible niveau de la classe. On note cependant une augmentation de la réussite après une phase d'apprentissage de la multiplication par 11 d'un nombre à deux chiffres (35 % à 75 %). Ce taux retombe à 45 % pour le dernier item ; cela est peut être du à une hésitation entre deux procédures. On note également un progrès après la phase d'apprentissage chez les élèves en difficulté, progrès moindre que pour l'ensemble de la classe.

B-3-c) Analyse des erreurs des élèves en difficulté

- Lors du premier test
  - 13 x 2 s'agit-il de la lecture de 11 comme 2 ? (Valérie, Audrey)
  - extension de la règle de répétition des chiffres avec des variantes
    7 x 11 = 77 donc 13 x 11 = 333 (Barbara) ou bien 223 (Davy, Cécile)
  - Mauvais calcul avec la distributivité

13 x 11 = (10 x 11) + 3 = 113 (Orianne)
13 x 11 = (10 x 11) + 13 = 123 (Marina)

- Lors au deuxième test
  - Barbara est passée d'un essai de règle à la première procédure (décomposition de 11 en 10 + 1 et distributivité) avec une erreur.
  23 x 11 = (23 x 10) + 3 = 233
  15 x 11 = (15 x 10) + 1 = 151
  - Cécile essaye d'utiliser la même procédure, elle fait trois fois la même erreur :
  23 x 11 = (23 x 10) + 11 = 241
  15 x 11 = (15 x 10) + 11 = 161
  40 x 11 = (40 x 10) + 11 = 411 (erreur retrouvée chez 3 élèves)

On note la réussite de David, Franck, Valérie.

<u>B-3-d) Conclusion</u>

On note l'importance de la phase d'apprentisssage et d'explicitattion de procédures qui font évoluer positivement l'ensemble de la classe, néanmoins les élèves de niveau faible font beaucoup d'erreurs.
Lors de ces séquences, nous avions remarqué que certains élèves réussissent mieux lors des exercices purement oraux. Ils sont en effet stimulés par l'attente de la classe.

<u>B-4) Multiplication d'un nombre pair par un multiple de 5 (classe de CM2)</u>

<u>exemples</u> : 24 x 15 ; 32 x 15 ; 12 x 35....

<u>B-4-a) Procédures de calcul mental observables</u>

- <u>Décomposition additive de l'un des deux nombres et emploi de la distributivité simple</u>

exemple : 24 x 15 = (24 x 10) + (24 x 5)
12 x 35 + (10 x 35) + (2 x 35)

- <u>Décomposition multiplicative de l'un ou des 2 nombres, associativité et emploi du répertoire multiplicatif (restreint ou élargi)</u>

exemples : 24 x 15 = 12 x 2 x 3 x 5. = 36 x 10 = 360.
24 x 15 = 12 x 2 x 15 = 12 x 30
12 x 35 = (35 x 2) x 6

<u>B-4-b) Procédures observées et résultats</u>

Multiplication par 15

Au début, la procédure majoritaire consiste à décomposer 15 en 10 + 5 et à utiliser le distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (distributivité simple)
Par la suite, la procédure majoritaire est :
24 x 15 = 24 x 10 + (24 x 10) : 2
Il s'agit d'une procédure mixte faisant intervenir distributivité simple et décomposition multiplicative.
Aucun élève ne fait intervenir une autre décomposition multiplicative de 15 ou de 24.

Quelques résultats

tableau 23 : N désigne le nombre de bonnes réponses (sur 10 demandées)

N	10	9	8	7	6	3	2	0	total
effectif	3	7	4	2	1	2	1	2	22

Après un certain entraînement, cet exercice est bien réussi. Mais il y a toujours un quart de la classe (5 élèves) qui enregistre de mauvais résultats : ce sont ceux qui,par ailleurs, ont des difficultés en mathématiques.

Pour inciter les enfants à utiliser des décompositions multiplicatives, le maître a divisé la classe en 2 groupes :
- Un groupe utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- L'autre groupe doit décomposer les nombres sous forme d'écritures multiplicatives, puis on échange le rôle des 2 groupes.
En admettant que les enfants aient bien joué le jeu, on constate effectivement une baisse de près de 50 % des bonnes réponses. Les décompositions multiplicatives des nombres semblent très peu disponibles au CM2.
Elles sont donc tès peu utilisées dans les calculs.

Multiplication d'un nombre pair par un multiple de 5

exemple : 12 x 35

la seule procédure observée est la distributivité simple :
35 x (10 + 2)
ou 35 x (2 + 10).

Le maître demande d'autres façons de décomposer 12, en particulier en utilisant la multiplication, cela permet d'expliciter une autre procédure possible : (35 x 2) x 6 exemple : 24 x 25

Procédures observées
12 x (2 x 25)
24 x (20 + 5)
25 x (25 - 1)
(6 x 4) x 25
24 x 5 x 5

Remarque : les enfants ont effectivement cherché des décompositions multiplicatives, mais certaines ne semblent pas très performantes (ex : 24 x 5 x 5). Le maître doit expliquer que le choix de la procédure dépend des nombres en question et que, selon la "nature" de ces nombres, il faut trouver une procédure efficace.

C) CONCLUSION

Au cours de ces exercices portant sur la multiplication, nous avons remarqué que :
- les décompositions additives sont employées majoritairement en association avec la distributivité dès le CE2.
- Les décompostions multiplicatives et la propriété d'associativité sont peu disponibles, même en CM2 et après une période d'apprentissage. Les décompositions proposées par les élèves de CM2 sont exhibées à l'aide de l'associativité en utilisant le plus souvent le facteur 2.

Nous proposons plusieurs éléments d'explication :
- l'accent est mis, au cours de la scolarité, sur les décompositions additives et la distributivité dans les classes en générale, et donc les élèves sont davantage familiarisés avec celles-ci.
- Les décompositions additives utilisent le plus souvent la numération décimale (complément à 10, à un nombre entier de dizaines), les décompositions multiplicatives nécessitent une bonne connaissance du répertoire multiplicatif ("employé à l'envers" de l'emploi usuel -lors du calcul écrit par exemple-). Elles peuvent également nécessiter l'emploi d'un répertoire multiplicatif "élargi" peu familier aux élèves de cet âge.
- Dans la plupart des cas, les décompositions additives et la distributivité sont assez performants.

Dans la classe de CM1, nous avons remarqué que la complexité de la tâche : mémorisation, concentration, décompositions, utilisation des propriétés des opérations met très souvent les élèves faibles en échec. Néanmoins, une analyse assez fine des erreurs permet d'observer une évolution des procédures employées, après une phase d'apprentissage. La trop courte période d'observation ne permet pas de conclure sur la solidité des acquis.

QUATRIEME CHAPITRE : CONCLUSION

Essayons de répondre aux questions que nous nous sommes posées au début de l'expérience.

1. Une pratique systématique du calcul mental a permis d'enrichir les conceptions numériques des élèves et de diversifier les procédures de calcul mental. Cette évolution doit tenir compte de l'existence d'étapes cognitives différentes. Nous avons pu le constater pour le jeu de l'autobus et por les autres activités additives et multiplicatives. Dans le cas des activités additives, la première étape se caractérise parl'utilisation de techniques "primitives" de comptage : énumération ou opérations posées dans la tête.
La deuxième étape correspond à la mise en oeuvre de techniques utilisant des décompositions additives ou soustractives des nombres.
Dans le cas du jeu de l'autobus, nous avons observé la hierarchie des procédures énoncée par G. Vergnaud. Pour notre expérience, le passage de la première à la deuxième étape correspond au passage du CE1 au CE2. Ce saut qualitatif peut s'expliquer par une meilleure connaissance du répertoire additif, par une plus grande familiarisation avec les opérations et par un début d'apprentissage des fonctions numériques.
Dans le cas des activités multiplicatives, nous avons constaté que les décompositions multiplicatives sont très peu disponibles au CM1 et au CM2. Les élèves font en général appel à des décompositions additives, lors de calculs de produits et utilisent la distributivité "simple" de la multiplication par rapport à l'addition.

2. Le maître a un rôle très important à jouer dans l'explicitation des procédures mises en jeu par les élèves. Pour qu'une activité de calcul mental soit intéressante, il est indispensable que le maître fasse :
- expliciter les priocédures utilisées par les élèves.
- Comparer ces procédures, afin que chaque élève puisse déterminer, en fonctions de ses conceptions numériques, la procédure la mieux adaptée. Celle-ci n'est pas forcément la même pour tous les élèves. Ce travail permet la diffusion de nouvelles tecniques, stratégies de calcul dans toute la classe.
- Il est toutefois indispensable, comme le montre l'expérience sur le "jeu de l'autobus, de'institutionnaliser certaines procédures.

3. En ce qui concerne les élèves en difficulté, nous avons constaté un décalage dans le temps dse performances, en particulier lors des passages d'étapes cognitives.
Ainsi des élèves faibles de CM mettent en oeuvre des procédures "primitives" (énumération, opérations posées dans la tête), parfois de façon durable, analogues à celles utilisées par une majorité d'élèves de CE1.
Cela se vérifie aussi pour le "jeu de l'autobus". Les élèves qui rencontrent des difficultés en calcul mental sont les mêmes que ceux qui sont en difficulté en

mathématique en général.Au début de l'expérience, ces élèves ne mettaient en oeuvre qu'un seul type de procédure, voire aucun. La diffusion des procédures utilisées par leurs pairs, si elles sont reconnues comme efficaces, leur permet de progresser.

DEUXIEME PARTIE

CALCUL MENTAL DE PRODUITS

RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS

PREMIER CHAPITRE : PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE TRAVAIL

1) BUTS DE LA RECHERCHE

Nous avons travailler dans deux directions :
1-a) poursuite de la recherche sur le calcul mental entreprise précédemment au cours préparatoire, cours élémentaire et cours moyen (voir première partie). Nous nous sommes intéressés cette fois-ci au calcul mental de produits dans un CM2.
Notre objectif est double :

1. mettre en évidence les différentes conceptions des nombres chez les élèves de CM2, ainsi que leur disponibilité dans les calculs proposés.
Les psychologues se sont intéresssés à la représentation en mémoire des nombres. D'après les travaux cités par M.FAYOL dans (2), il apparaît que celle-ci présente, pour ce qui concerne la suite numérique, de grandes similitudes chez l'enfant jeune et l'adulte : "il s'agirait d'une sorte de ligne mentale numérique sur laquelle interviendraient des effets liés à la "distance symbolique : les comparaisons prendraient d'autant moins de temps que les nombres occupent des positions distanciées l'un par rapport à l'autre...".
Toutefois au fur et à mesure de la pratique scolaire des opérations cette conception va se complexifier (avec l'apprentissage de la multiplication notamment) : "l'organisation en mémoire reposerait à 5 ans sur la succession (addition un à un), à 8 ans sur l'addition en général et à 12 ans, aussi sur la multiplication." (M.FAYOL).
La conception en mémoire des nombres s'organise peu à peu en un "réseau mental" qui, d'après les recherches actuelles, se structure comme les classiques tables d'addition et de soustraction : le délai d'accès à un nombre résultat apparaît alors dépendant du nombres de lignes et de colonnes à "parcourir" mentalement.
Nous nous sommes particulièrement intéressés :
- aux décompositions multiplicatives liées à l'associativité de la multiplication,
- à la disponibilité de ces décompositions dans les calculs de produits.
- à l'évolution des procédures de résolution en fonction de la taille des données numériques.

2. Agir sur ces conceptions et les faire évoluer au cours de l'apprentissage.

Les calculs de produits ont été l'occasion :
- de faire expliciter les différentes procédures mises en oeuvre par les élèves de CM2, de les comparer et de les faire évoluer (notamment en jouant sur la taille des données numériques).

- d'enrichir les conceptions numériques des élèves (notamment celles des élèves en difficulté)
- de faire fonctionner les propriétés des opérations (commutativité - associativité - distributivité).

1-b) Résolution de problèmes multiplicatifs liés :

1. à la combinatoire,
2. à la numération dans une base donnée : constitution de groupements correspondants aux puissances de la bases.

Au départ, la question était de déterminer si le calcul mental pouvait être une aide à la résolution de problèmes : en particulier, un apprentissage avec de petits nombres pouvait-il déboucher sur une meilleure compréhension du problème ?

Quels seraient, a priori, les avantages des "petits nombres" ?

1. Avec de "petits nombres", l'élève peut plus facilement représenter le problème (par exemple dans le cas de problèmes de combinatoire, il peut utiliser des arbres ou des ébauches d'arbres, des tableaux ... il peut même établir la liste exhaustive de tous les cas. Nous faisons l'hypothèse que les "petits nombres" permettent de donner du sens à des problèmes complexes. Toutefois il se peut que les stratégies qu'ils induisent ne soient pas forcément pertinentes pour des nombres plus grands.

Cette hypothèse nous a amenés à tester la résistance de procédures et conceptions élaborées avec de "petits" nombres" lors du passage à des nombres plus grands".

2. Avec de "petits nombres", le recours au calcul mental est plus simple et plus rapide. L'élève peut ainsi explorer dans un temps assez bref, différentes voies permettant de résoudre le problème. Cette phase de tâtonnement, utilisant le calcul mental, peut être déterminante pour trouver la (ou les) procédures conduisant à la réussite.

3. La résolution de problèmes est une activité complexe qui passe aussi par l'utilisation de la mémoire : comme nous l'avons dit dans l'introduction, les travaux des psychologues (cités par J.F Richard dans (3) et par M. Fayol dans (2)) montrent que la mémoire à court terme est limitée et qu'il y a "concurrence entre les activités de stockage de l'information et les activités de traitement".
L'exercice d'activités cognitives non automatisées est très coûteux mentalement et peut donc pertuber les possibilités de mémorisation des élèves.

En se limitant à des calculs sur des "petits nombres" (le plus souvent automatisés et donc peu coûteux), on peut espérer libérer de "l'espace mental" pour la compréhension de la structure de problème.

2) CHOIX DES ACTIVITES

1) calcul mental

Nous avons proposé uniquement des calculs de produits de deux facteurs, en faisant varier la taille de ces facteurs.

2) En relation avec le calcul mental, notre choix a porté sur la résolution de problèmes multiplicatifs, en particulier faisant intervenir le produit cartésien de 2 ou 3 ensembles.

3) METHODE DE TRAVAIL

1) Présentation de la classe

Nous avons travaillé dans la classe de Madame Carpentier à l'école Dunoyer de Segonsac à Antony.

C'est une classe de CM2 jugée de niveau plutôt faible par la maîtresse.

Sur 27 élèves :
- 10 ont un an de retard,
- 3 ont deux ans de retard,
- 2 ont deux ans d'avance.

Selon la maîtresse, la répartition des élèves peut se faire ainsi :
- groupe A (très satisfaisant) : 6
- groupe B (satisfaisant) : 5
- groupe C (tout juste passable) : 12
- groupe D (insuffisant) : 4

On observe en effet que plus de la moitié des élèves se trouve dans des groupes C et D.

2) méthode de travail

Les séquences ont eu lieu une fois par semaine pendant trois mois. En général, la séquence est divisée en deux parties :
- une, consacrée au calcul mental de produits (1/2 heure environ),
- l'autre à la résolution de problèmes multiplicatifs (1/2 également).

Pour le calcul mental, nous avons adopté la méthode suivante :

1. Calcul de produits avec au moins un facteur à un chiffre : les élèves inscrivent leurs résultats sur une ardoise et explicitent oralement leurs méthodes de calcul.

2. Calculs de produits faisant intervenir 2 facteurs à 2 chiffres : les élèves disposent d'une feuille de papier pour inscrire leurs résultats et, si besoin, leurs calculs intermédiaires. Mais en aucun cas, ils ne doivent poser l'opération, les séquences ont été enregistrées au magnétophone.

DEUXIEME CHAPITRE : CALCULS MENTAUX DE PRODUITS

1) Analyse a priori

Nous avons distingué, selon la taille des nombres, 2 types de produit :

a) n x n' ou n' x n avec
- n' : nombre à 1 chiffre
- n : nombre à 2 chiffres

b) n x n' ou n' x n avec
- n' : nombre à 2 chiffres
- n : nombre à 2 chiffres

En effet, dans le cas a), l'utilisation mentale de l'algorithme écrit reste performante alors qu'elle ne l'est plus du tout dans le cas b).
Dans ce dernier cas, les élèves sont contraints à trouver des procédures de calcul différentes de celles du calcul écrit.

Dans les 2 cas, la distributivité simple utilisant une décomposition additive de n ou de n' est toujours performante.
Dans le cas a), elle est plus intéressante par rapport à n.
Dans le cas b), cela dépend de la valeur de n et de n' :
ex 74 x 15 :
il semble plus intéressant de calculer
74 x 10 + 74 x 5
plutôt que :
15 x 70 + 15 x 4
Mais pour 7 x 12, il est sans doute plus facile de calculer 7 x 10 + 7 x 2.

La double distributivité est une procédure complexe, qui ne peut apparaître que si l'élève peut garder des traces écrites de ses calculs intermédiaires (ce qui est le cas dans la classe où nous avons travaillé). Sinon, elle nécessite trop de mises en mémoire pour être performante dans un calcul purement mental.

cas a) : les valeurs proposées pour n' sont 2, 4, 5, 7, 8, 9.
4 et 9 sont des valeurs particulières :

pour n' = 4 : on peut utiliser l'associativité de la multiplication liée à la décomposition 4 = 2 x 2.
Pour n' = 9 : la décomposition 9 = 10 - 1 est performante.
Pour n' = 5 : la décomposition 5 = 10 : 2 est intéressante dans la plupart des calculs.

cas b) : les valeurs proposées pour n' sont 20, 30, dizaines entières, puis 11, 15, 33. Les valeurs sont intéressantes pour les décompositions additives ou multiplicatives associées :

n' = 11 : la décomposition 11 = 10 + 1 est performante.
n' = 15 : la décomposition 10 + (10 : 2) est intéressante dans beaucoup de calculs :

exemple : 36 x 15 = 360 + 180 = 540

On peut aussi utiliser : 15 = 30 : 2

n' = 25 : il y a plusieurs décompositions multiplicatives associées :
25 = 5 x 5 ; 25 = 50 : 2 ; 25 = 100 : 4

De façon générale, l'utilisation de décompositions multiplicatives peut être performante lorsque l'on multiplie un nombre pair par un multiple de 5.
2.n x 5 n' = 10.n x n'

exemple : 35 x 16 = (7 x 5) x (2 x 8) = 560
7 x 10 x 8

Dans la pratique, cela revient à mutliplier par 2 le multiple de 5 et diviser par 2 le nombre pair.

35 x 16 = 70 x 8 = 560
n' = 22 ou n' = 33

L'utilisation de l'associativité de la multiplication liée à la décomposition :
22 = 11 x 2 (ou 33 = 11 x 3) est intéressante en calcul mental.

Remarque : il n'est pas toujours facile de déterminer, lors d'un calcul avec traces écrites, s'il y a eu utilisation d'une telle décomposition ou simplement de la distributivité :

exemple : 22 x 56 = 1120 + 112
peut s'interpréter comme :
(56 x 20) + (56 x 2) (distributivité / 22)
ou bien comme :
(56 x 2) x 11 (utilisation de 22 = 2 x 11 et 10 + 1)

2) Procédures effectivement utilisées par les élèves

2-a) Cas a : n x n' ou n' x n avec
- n : nombre à 2 chiffres
- n' : nombre à 1 chiffre

<u>1. Addition réitérée</u> : n x n' = n +......... + n
n' fois

Dans le cas où n' = 2 : ele se réduit à la recherche du double

<u>1. bis : Distributivité simple par rapport à n avec addition</u> (dans le cas n' = 2)
<u>exemple</u> : 2 x 54   4 + 4 = 8
50 + 50 = 100
108

<u>2. Distributivité simple par rapport à n</u> : n est décomposé additivement selon la numération décimale en dizaines + unités

<u>2'. Distributivité simple par rapport à n'</u> :

<u>exemple</u> : 32 x 5 = 32 x 2 + 32 x 3
7 x 54 = 4 x 54 + 3 x 54

<u>2". Distributivité simple par rapport à n' : n' est décomposé par référence à la dizaine supérieure</u> : (cas particulier n' = 9 = 10 - 1).

<u>3. Algorithme écrit utilisé mentalement</u>

<u>4. Associativité</u> (cas particulier n' = 4 = 2 x 2)

<u>5. Procédures mixtes</u> :

<u>exemple</u> : 4 x 6 :   2 x 60 = 120
120 + 120 = 240
240 + 8 = 248

<u>2-b) Fréquence d'utilisation de ces procédures</u> :

- <u>Pour n' = 2</u> : les procédures 1 et 1 bis (calcul du double) sont majoritaires.

- <u>Pour n' = 4</u> : les procédures 2 et 3 semblent majoritaires, l'utilisation de l'associativité liée à la décomposition multiplicative 4 = 2 x 2 est très rare. Quand elle existe, c'est plutôt sous la forme "calcul du double du double" (avec l'addition).

<u>exemple</u> : 16 x 4
16 + 16 = 32
32 + 32 = 64
ou sous forme hybride :
16 x 4

16 x 2 = 32
32 + 32 = 64

- Pour n' = 5 et n' = 7, les procédures 1 et 2 apparaissent aussi à ce moment là mais c'est la procédure 3 (algorithme écrit) qui est largement majoritaire, du moins tant que les calculs sont oraux. En effet, quand la maîtresse demande aux élèves d'expliciter par écrit leurs calculs, alors la distributivité (procédure 2) devient majoritaire.

Pour n' = 7, on note une erreur provenant de la confusion entre addition et multiplication.
n x 7 = (n x 4) x 3

- n' = 9 : Au début, l'agorithme écrit est largement majoritaire puis, après explicitation de la procédure 2", celle-ci devient majoritaire quand l'élève doit trouver au moins deux procédures de calcul. Cette procédure 2" est largement argumentée dans la classe : il y a discussion pour savoir si on peut l'étendre à tous les produits (*"est-ce que ça marche pour 8 ?*) - Au cours de la recherche, une élève trouve une autre procédure pour n' = 5, non utilisée jusque là, s'appuyant sur :
5 = 10 / 2

- Lors de la séance suivante, où les valeurs de n sont plus grandes, on note :
  - une utilisation plus importante de la procédure 2 (distributivité par rapport à n).
  - Quelques utilisations de la procédure 2".

La procédure 2" n'est donc pas employée spontanément par les élèves. Elle n'apparaît que lorsque la maîtresse insiste pour rechercher d'autres procédures.

2-c) Cas b : n x n' avec
!n : nombre à 2 chiffres
!
!n' : nombre à 2 chiffres

on constaste l'emploi des procédures suivantes :

1. Addition réitérée.

2. Algorithme écrit utilisé mentalement.

3. Distributivité simple par rapport à n avec décomposition additive de n (selon la numération décimale ou non).
exemple (78 = 70 + 8 ; 78 = 60 + 18 ; 78 = 75 + 3)

4. Distributivité simple par rapport à n' avec décomposition additive de n'

4'. Persistance d'un facteur (cette procédure est erronée).

exemple	facteur 11 :	11 x 12	120 + 11 = 131
	facteur 15 :	15 x 12	150 + 15 = 165

5. Distributivité simple par rapport à n ou n' avec décomposition soustractive faisant référence le plus souvent à la dizaine supérieure, mais aussi au multiple de 5 immédiatement supérieur.

6. Double distributivité.

8. Associativité liée à une décomposition multiplicative de n ou de n'.
exemple : 22 = 2 x 11 ; 15 = 3 x 5 ; 25 = 50 : 2

2-d) Fréquence de ces procédures :

- Pour n' = 11 : c'est la première fois que les élèves doivent faire mentalement un produit de nombres à 2 chiffres. On observe de ce fait beaucoup d'erreurs lors des premiers calculs.

D'autre part, ils doivent expliciter par écrit leurs calculs intermédiaires, et ont alors tendance à rechercher le plus possible de méthodes différentes : cela explique :

- la très grande diversité des procédures observées.
- Le fait qu'il n'y a pas, dans ce cas, de procédure majoritaire : les procédures 1, 3, 4, 5, 6, sont effectivement utilisées.

- Pour n' = 15 : les procédures 3, 4 sont majoritaires. Il semble que la distributivité par rapport au 2 ième facteur du produit soit privilégiée.

- Pour n' = 25 : lors des premiers calculs, la distributivité simple protant plutôt sur le 2 ième facteur est très largement majoritaire. Mais, après intervention de la maîtresse portant sur les différentes façons d'écrire 25 (on note d'ailleurs que la décomposition multiplicative 5 x 5 n'apparaît pas), on observe une plus grande diversification des procédures : en particulier, quelques procédures de type 8 apparaissent, mais elles sont très rares. On note aussi une plus grande utilisation de la double distributivité, surtout quand le 2ième facteur est assez "grand", et cela sans insistance particulière de la maîtresse.

Quelques cas particuliers de produits :

25 x 80 : - 3 élèves utilisent une procédure de type 8 :
(25 x 40) x 2 ou (25 x 8) x 10
- Certains élèves sont tentés d'utiliser la distributivité par rapport à 80 et se trompent : (25 x 8) + 25

25 x 25 : Un élève propose (100 x 100) : 8
L'exemple est repris collectivement. Les enfants ont du mal à voir où se trouve l'erreur. De plus, ils ne savent pas diviser par 4 mentalement.

- Pour n' = 22 : les procédures 3, 4 (Distributivité) sont toujours majoritaires. L'utilisation de la double distributivité est importante surtout quand le 2e facteur est plus "grand" (trentaine et surtout quarantaine et plus).
La décomposition multiplicative 2 x 11 n'apparaît qu'après intervention de la maîtresse pour rechercher d'autres méthodes de calcul, mais elle reste très rare.

On observe plusieurs erreurs dues au poids du facteur 2 :

		44 x 68
exemple	22 x 34	11 x 17
		70 x 22

- Pour n' = 33 : les procédures utilisées sont du même type que pour n' = 22. Les décompositions multiplicatives (en particulier 3 x 11) sont toujours très rares, chez 4 élèves seulement.

Quelques produits particuliers

15 x 33 : un élève calcule (33 x 30) : 2 on peut expliquer cela par une référence à un multiple de 10 proche de 33 ou par le poids du facteur 30, ou encore par l'apprentissage d'autres décompositions multiplicatives du même type (ex : 25 = 50 : 2), cette procédure n'est jamais apparue lors des autres multiplications par 15.

33 x 74 : on note une utilisation paradoxale de l'addition réitérée :

33 +.... +33
7 fois

- Pour n' = 20, 30, ... un nombre entier de dizaines : les calculs sont bien réussis, les enfants appliquent la "règle des zéros", c'est à dire écrivent un zéro à droite de l'écriture du nombre. Mais l'application de cette règle semble davantage un automatisme qu'une référence à l'associativité.

3) Conclusion

La taille des nombres semble être une variable didactique pertinente pour l'évolution des procédures utilisées par les élèves.

En effet :

- l'addition réitérée n'apparaît que pour les petites valeurs de n' : n' = 2,4 mais aussi 7. Elle ne se trouve plus qu'à l'état de traces par la suite.

- De même, l'agorithme écrit n'est utilisé mentalement que pour les petites valeurs de n' (cas a) où il est majoritaire (sauf pour n' = 9, après intervention de la maîtresse).
Dans ce domaine numérique, cette procédure est en effet pertinente mais elle disparaît complètement quand n et n' sont des nombres à 2 chiffres.

- La distributivité simple avec décomposition additive est majoritaire à partir de n' = 7 (sauf pour n' = 9 et aussi 20, 30).
Elle est renforcée par la demande d'explicitation par écrit des calculs intermédiaires.
Elle porte plutôt sur le 2e facteur (en liaison avec le sens de l'écriture?) mais ce n'est pas systématique. Cela dépend essentiellement des données du calcul.

- L'utilisation de la double distributivité devient importante lorsque les 2 facteurs sont des nombres à 2 chiffres, dont l'un est supérieur à la trentaine.
Mal maîtrisée, elle est source d'erreurs :

<u>Exemple d'erreurs observées</u>

<u>1. Oubli des termes rectangles</u> (assez fréquente)

25 x 68   20 x 60 + 5 x 8

1. bis : 1 seul produit : 20 x 60

<u>2. distributivité par rapport à un seul facteur</u> :

25 x 25	20 x 5 + 5 x 5 (20 + 5) x 5	ou	33 x 74	30 x 70 + 30 x 4 (70 + 4) x 30

<u>3. Persistance d'un facteur</u> :

25 x 68   20 x 20 + 5 x 68

<u>4. Erreur sur un produit seulement</u> :

22 x 34   20 x 30 + 2 x 4 + 2 x 3

<u>5. Autres erreurs</u> :

25 x 25   20 x 20 + 5 x 50

- La distributivité simple avec décomposition soustractive est présente à chaque résolution d'exercice. Son emploi est le fait de quelques élèves, mais ce ne sont pas toujours les mêmes ; le plus souvent, il est lié à la volonté de rechercher d'autres méthodes de calcul.

- Si l'on excepte les cas n' = 4 et n' = 20, 30, ..., les décompositions multiplicatives n'apparaissent pas naturellement, mais seulement après intervention de la maîtresse. Même dans les cas où elles pourraient être performantes (n' = 22, 25, 33 ...) elles sont très minoritaires. Il en est de même pour les décompositions faisant intervenir un quotient (n' = 25 = 50 : 2 = 100 : 4) la décomposition 5 = 10 : 2 n'est apparue qu'une seule fois, lors d'une recherche. L'utilisation de 15 = 10 + (10 : 2) n'est jamais apparue. Il semble donc que les écritures multiplicatives sont très peu disponibles chez les élèves de la fin du cycle primaire. En fait, ces résultats peuvent s'expliquer : en effet, la distributivité simple additive combine d'une part la vision de la multiplication comme addition réitérée, d'autre part la décomposition décimale des nombres qui est à la base de la technique écrite. Elle est donc facile d'accès. De plus, contrairement à la distributivité double, elle est directement utilisable de manière fiable. Tout cela explique son succès et son renforcement comme stratégie dominante au cours des exercices. Par contre, les décompositions multiplicatives n'ont pas la même généralité d'emploi. De plus, les opérations qui justifient leur efficacité ne sont pas toujours les plus pratiquées par les élèves.
Ainsi, on peut "*sortir des tables*" (par exemple 33 = 3 x 11) ou bien utiliser la division (ex : 25 = 100 : 4).
Enfin, alors que la distributivité simple peut être "automatisée", il n'en est pas de même pour les décompositions multiplicatives où l'élève doit à chaque fois "*inventer*". Pour promouvoir ces dernières, il est donc nécessaire de prévoir un apprentissage spécifique.

TROISIEME CHAPITRE : RESOLUTION DE PROBLEMES MULTIPLICATIFS

A) OBJECTIFS DE L'EXPERIENCE - TYPES D'ACTIVITES

Dans cette seconde partie de notre travail, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la résolution de problèmes faisant intervenir la multiplication.

Notre objectif principal était de mettre en évidence des relations entre calcul mental et calcul écrit. Nous voulions voir dans quelle mesure des procédures de résolution mentale pouvaient intervenir dans la résolution écrite d'un problème.

Notamment, nous voulions déterminer les conditions qui permettent à un élève d'aborder la résolution d'un problème multiplicatif comportant des données numériques "grandes" sachant qu'il est capable de commencer à résoudre mentalement (ou de résoudre totalement) un problème du même type faisant intervenir des données numériques "plus faibles".

Cela nous a conduit à tester le domaine de validité de certaines procédures et de certaines représentations mises en oeuvre lors de cette résolution mentale.
Les problèmes traités sont les suivants :

1) problèmes multiplicatifs et produit cartésien

- *Trouver tous les déguisements que l'on peut faire avec 3 types de vêtements.*
- *Trouver toutes les quilles que l'on peut construire avec 3 types de matériaux.*
- *Trouver tous les menus que l'on peut composer avec 3 types de plats.*

Nous avons choisi des activités faisant intervenir le produit cartésien de 3 ensembles, les études portant sur ce point (voir en conclusion) s'attachent surtout à analyser les produits cartésiens de 2 ensembles dans le cas où le cardinal est petit.

2) problèmes de dénombrement :

- *5 personnes se rencontrent et se serrent la main, combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?*
- *Dans un championnat de football, il y a 20 équipes, chaque équipe rencontre les autres deux fois (match aller - match retour). combien y-a-t-il eu de matchs disputés ?.*
- *Dans un championnat de basket il y a 20 équipes, chaque équipe rencontre les autres une fois, combien y-a-t-il eu de matchs effectués ?*

3) Problèmes de numération : voir Marie Jeanne Perrin-Glorian, cahier de didactique 24 des mathématiques de l'IREM de Paris VII.

4) Invention d'énoncés de problèmes dont la résolution nécessite d'effectuer uniquement 2 multiplications dont les facteurs sont imposés par le maître.

B) PROBLEMES DE COMBINATOIRE

B.1. Problèmes multiplicatifs et produit cartésien.

Nous nous proposons de faire calculer aux élèves le cardinal du produit cartésien de 3 ensembles finis A, B et C.

Voici un énoncé de problème posé :

MENU

1 entrée au choix
- *Carotte à l'orange*
- *Sardine*
- *Pizza*
- *Pamplemousse*
- *Friand au fromage*
- *Potage*
- *Céleri rémoulade*
- *Salade composée*
- *Oeufs durs, mayonnaise*
- *Betteraves et maïs*
- *Endives en salade*
- *Quiche*

1 plat au choix
- *Ravioli gratinés*
- *Poulet rôti, haricots beurre*
- *Steak haché, coquillettes*
- *Grillade de porc haricots bretons*
- *Hachis parmentier*
- *Blanquette de veau riz créole*

1 dessert au choix
- *Mousse au chocolat*
- *Pommes au four*
- *Compote*
- *Pêches au sirop*
- *Lait gélifié*
- *Flandise*
- *Ananas*

Combien peut-on composer de menus différents comprenant une entrée, 1 plat et 1 dessert ?

Notre but est d'analyser les procédures de résolution des élèves, de classifier les différents types de représentations proposées et de tester la résistance de ces procédures et représentations selon le domaine de variation des données numériques.

B-1-a) Variables de la situation

B-1-a-1) les variables numériques :

Nous avons défini deux domaines :

- le domaine D1 : les cardinaux finis des ensembles A, B, C sont tous choisis compris entre 0 et 5.
- le domaine D2 : les cardinaux sont compris entre 6 et 30.

B-1-b-2) les variables liées au contexte

Afin de diversifier les énoncés et de ne pas lasser les élèves nous avons proposé différents énoncés du même problème.

V1 : problème de menu (voir ci-desus)
V2 : même problème avec des jouets (type, couleur, mode de fonctionnement).
V3 : avec des quilles
V4 : déguisements

Voici les différents énoncés proposés

V1 : voir ci-dessus (domaine D2)

V2 :
(domaine D1)

Un marchand vend plusieurs types de jouets, ce sont :
- soit des avions, soit des bateaux, soit des autos, soit des camions,
- leur couleur peut être bleue, rouge, ou blanche
- ce sont soit des jouets à friction, soit à clé
Combien y-a-t-il de types différents de jouets ?

V3 :
(domaine D1)

Un marchand de jouets veut fabriquer des quilles
- la tête peut-être ronde ou carrée
- elles peuvent être rouges, bleues, jaunes ou vertes,
- elles peuvent être en plastique, en bois ou en terre cuite.
Combien de sortes de quilles le marchand pourra-ti-il fabriquer ? .

V4 :
(domaine D2)

Les élèves de l'école, pour le carnaval, se déguisent. Ils ont le choix entre 23 chaqpeaux, 14 pantalons et 25 vestes. Combien de déguisements différents peuvent-ils composer?

NB : Notons que les élèves doivent dénombrer le cardinal du produit cartésien. La notion de triplet n'est pas un objectif de l'activité.

B-1-b) Analyse de la tâche de l'élève

- Quelque soit l'énoncé proposé, l'élève est confronté à une structure multiplicative.
- Il peut se donner ou élaborer une représentation adéquate de la situation. Nous nous attendions à voir apparaître les représentations suivantes qui font partie éventuellement du savoir enseigné des élèves (au moins dans le cas du produit de 2 ensembles).

RA : représentation en arbre :

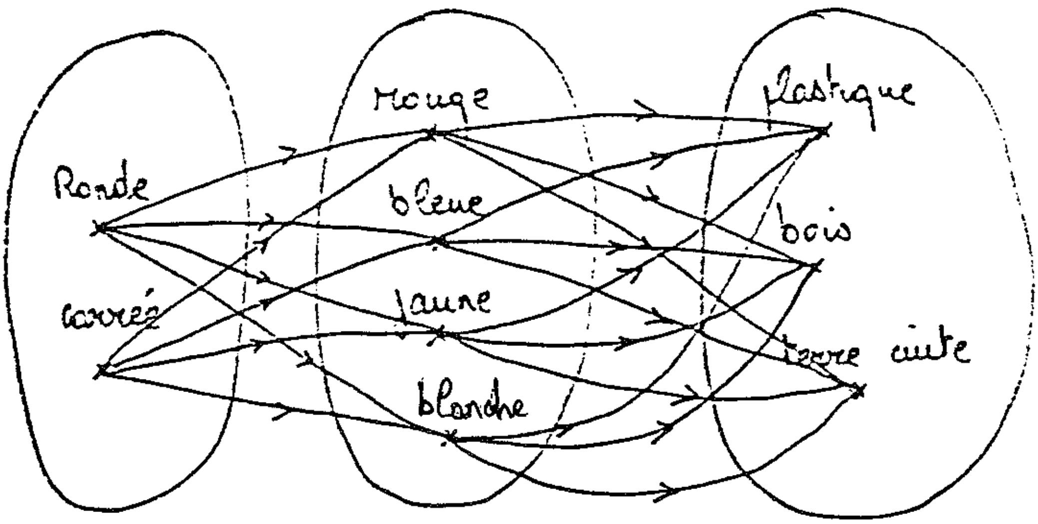
- Ronde
  - rouge
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - bleue
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - jaune
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - blanche
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
- Carrée
  - rouge
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - bleue
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - jaune
    - plastique
    - bois
    - terre cuite
  - blanche
    - plastique
    - bois
    - terre cuite

RC : un ou plusieurs tableaux cartésiens

	rouge	bleue	jaune	blanche
ronde	RR	RBe	RJ	RBa
carrée	CR	CBe	CJ	CBa

	RR	RBe	RJ	RBa	CR	CBe	CJ	CBa
Plastique	RRP	RBeP	RJP	RBaP	CRP	CBeP	CJP	CBaP
bois	RRB	RBeB	RJB	RBaB	CRB	CBeB	CJB	CBaB
terre cuite	RRT	RBeT	RJT	RBaT	CRT	CBeT	CJT	CBaT

RS : diagrammes sagittaux



Les études faites précédamment sur ce sujet (notamment par S. MAURY et M. FAYOL) montrent que les élèves, dans le cas où le cardinal de A, B, et C sont petits peuvent être amenés à dressser une liste exhaustive de toutes les solutions possibles et à produire ou non un codage adéquat.
Nous noterons REL une liste exhaustive organisée utilisant un codage avec des lettres, REC une liste utilisant un codage chiffré, pour désigner les différents triplets de A x B x C.
Nous noterons REM une liste exhaustive organisée n'utilisant pas de codage

REL : liste exhaustive organisée, utilisant un codage littéral.

reprenant le codage du tableau cartésien

RRP RBeP RJP RBaP CRP CBeP CJP CBaP
RRB etc...

REC : liste exhaustive des solutions organisée, utilisant un codage chiffré :

ronde --> 1	rouge --> 3	plastique --> 7
carrée--> 2	bleue --> 4	bois --> 8
	jaune --> 5	terre cuite--> 9
	blanche --> 6	

la liste peut alors se traduire par :

137	147	157	167
138	148	158	168
139	149	159	169
237	247	257	267
238	248	258	268
239	249	259	269

- suivant la représentation adoptée et l'état d'élaboration de cette représentation, les élèves peuvent :
  . dans le cas RE, dénombrer sans passage par une multiplication le nombre de solutions trouvées, nous noterons Ml ce type de procédure.
  . dans le cas de la recherche exhaustive ou dans les autres cas, traduire en terme de produit et produire un double produit comme solution, nous appellerons :
    M2 : la procédure se traduisant par le produit Card A x card B x card C et ne privilégiant pas de facteurs particuliers.
    M31 : procédure se traduisant par 2 produits effectués par étape, à savoir (card A x card) x card C.
    M32 : la procédure se traduisant par card A x (card B x card C). Les ensembles A, B et C étant donnés dans cet ordre par l'énoncé.

B-1-c) Déroulement de l'expérimentation

L'expérimentation s'est faite en 3 phases :

1) phase n° 1 :
- la maîtresse donne aux élèves le problème sous la variante V1. (Séances du 16/12/86 et 18/12/86).
- devant l'échec systématique des élèves à trouver le résultat et même dans bien des cas à produire une représentation adéquate, la maîtresse conduit un premier bilan des productions des élèves portant sur les tentatives de calculs et les essais de représentation. elle fait comparer ceux-ci et demande aux élèves d'essayer de "dessiner" et de trouver le nombre de menus différents que l'on peut composer avec l'entrée : "carotte".
- ensuite il y a retour à une recherche par groupe et enfin comparaison lors d'un deuxième bilan des productions des élèves.

2) phase n° 2 : la maîtrese propose la variante V2 (séance du 18/12/88)

3) phase n° 3 : test individuel, les élèves doivent résoudre les problèmes V3 et V4 (séances 3 mois après).

B-1-d) Analyse des résultats et des procédures : phase n° 1

1) la 1ère phase de recherche ne donne aucun résultat correct. Les élèves ne reconnaissent pas d'emblée un problème de type multiplicatif. Dans le meilleur des cas, ils effectuent une multiplication et une addition.

Exemples de production : (Cf. annexe 1)

. Cécile effectue le produit card A x (card B + card C) soit 13 x 12
. Delormel effectue le même produit mais en deux temps :
(card A x card B) + (card A x card C)
. david repérant qu'il y a 3 types de plats effectue
(card A x 3) + (card B x 3) + (card C x 3) soit 12 x 3 + 6 x 3 + 7 x 3
. Cheber multiplie au hasard les données (l'un des calculs donne la réponse juste).
. Suite à une tentative de la maîtresse pour expliquer la consigne (est-ce que les 27 élèves de votre classe peuvent par exemple, manger un menu différent), certains élèves font intervenir dans leur calcul cette nouvelle donnée.
Ainsi Audray calcule 27 x (12 + 6 + 7) soit 27 x (card A + card B + card C) d'autres calculent 3 x (12 + 6 + 7) x 27.

Ainsi nous voyons que dans cette première recherche peu d'élèves reconnaissent une structure multiplicative et quand c'est le cas, ils n'en voient qu'un aspect. Le produit cartésien des 3 ensembles n'est pas perçu, il ne fonctionne en aucun cas comme modèle implicite (tout au plus, ce modèle fonctionne pour deux ensembles : le premier (les entrées) et le second (réunion des plats et desserts).
Dans cette première étape, il y a très peu de représentations (la consigne ne l'impose pas, seul un conseil oral étant donné aux élèves ne produisant rien : "*essaie de faire un dessin*".

Les représentations sont les suivantes :

- Quelques tentatives pour dresser des listes plus ou moins organisées mettant en oeuvre un codage numérique, ou pour construire des arbres ; (Cheber - Fréderic - annexe 2).
- Quelques exemples de menus (Sourraya - annexe 2).
- Des dessins figuratifs (David - annexe 2)

2) Face à l'échec massif des élèves, la maîtresse est amenée à une première simplification du problème : détermination d'un produit partiel : elle demande combien de menus on peut constituer avec l'entrée "carottes" et conseille de faire un dessin.

Cette étape intermédiaire permet d'obtenir un certain nombre de représentations qui sont des tentatives plus ou moins réussies d'organisation d'une recherche exhaustive.

Nous pouvons citer :

- des représentations du type R.E.C, souvent mal organisées (certains élèves faisant varier simultanément les 2ème et 3ème éléments du triplet (Bertrand - annexe 3)
- des représentations du type R.E.L, souvent là encore mal organisées (Audray - annexe 3)
- quelques tentatives d'arbres souvent peu maîtrisés (Frédéric et Jean-Luc - annexe 3) parfois semi-additifs (Marion annexe 3).

3) Dans un second bilan, la maîtresse s'appuyant sur des élèves ayant trouvé le bon résultat ou ayant proposé une bonne représentation (complète) amène la classe à comprendre les démarches permettant de trouver le résultat intermédiaire et propose de résoudre le problème général. Les élèves dans leur majorité voient alors qu'il suffit de multiplier celui-ci (42) par le nombre d'entrées. Cette conduite de l'activité ne permet toutefois pas aux élèves de prendre pleinement conscience des rôles symétriques joués par les 3 ensembles.

B-1-e) phase n° 2 : variante V2

Afin d'assurer une meilleure compréhension de la structure du problème, la maîtresse propose, une nouvelle simplification portant sur les variables numériques.

Le changement d'habillage ne pose pas ici de problème de compréhension.

Lors de cette phase, le problème est bien réussi par les élèves, ceux-ci produisent dans leur immense majorité des représentations complètes (du type RA ou REL ou REC) qui leur permettent de dresser la liste (exhaustive) de toutes les solutions possibles. Ils traduisent cette démarche par double produit M2 4 x 3 x 2 = 24 (cas rare), mais surtout par des calculs du type M31 ou M32.

Il est difficile à ce stade de comparer les deux phases et surtout de juger de l'impact de la phase V2, car celle-ci, du fait des petits nombres, favorise une recherche exhaustive (signalée comme la procédure la plus fréquente par MAURY (4). Le résultat est confirmé ici.

En effet, la résolution de V1 nécessite :

- soit de passer par un calcul intermédiaire (s'appuyant sur une recherche ou un début de recherche exhaustive) puis de reconnaître la structure multiplicative du problème.
- soit d'entrevoir d'emblée celle-ci (à partir d'une représentation en arbre par exemple) afin d'effectuer le produit card A x card B x card C.

Afin de juger des effets de l'apprentissage effectué et notamment de l'impact d'une recherche portant sur des petits nombres, nous avons passé 12 semaines après, un test portant sur les variantes V3 et V4 (respectivement faisant intervenir les domaines D1 et D2).

B-1-f) Analyse des résultats et procédures des élèves au test

1) analyse de la variante V3 (domaine D1)

- analyse des résultats et des erreurs : 22 élèves sur 26 trouvent le résultat, un élève effectue la multiplication 24 x 3 (ce qui revient à multiplier le cardinal du produit cartésien par le nombre d'ensembles -résultat du poids du facteur 3 à la fois nombre d'ensembles et cardinal de l'un de ceux-ci- 2 élèves font une erreur de calcul et un élève ne fournit aucune réponse.

- analyse des représentations : nous constatons une grande variété de représentations : tableau cartésien, double diagramme saggital, arbre, listes numérotées ou codées avec des lettres, mixtes (arbre et liste ou bien arbre et diagramme) : on peut noter toutefois une majorité de recherches exhaustives s'appuyant sur un modèle privilégié : l'arbre.

- analyse des procédures :

. la procédure la plus fréquente est un dénombrement de tous les cas possibles s'appuyant sur une liste exhaustive ou sur 1 arbre complet (13 élèves dont 3 seulement arrivent au résultat : (3 x 4) x 2.

. 8 élèves seulement traduisent leur recherche par un calcul de produit : 2 M2, 6 M31 ou M32.

- conclusion : nous pouvons donc conclure cette analyse par les résultats suivants :

- très peu d'élèves (2 sur 26) fournissent comme écriture finale le produit card A x card B x card C, significatif d'une "vision" multiplicative du problème (en particulier de "l'arbre") ; les autres mènent à l'aide de listes organisées ou à l'aide d'une représentation en arbre, une recherche plus ou moins exhaustive, cela les conduit à dénombrer un à un ou paquets par paquets, les éléments du produit cartésien.

- cela peut laisser penser que la représentation sous forme d'arbre si elle est performante, ne permet pas de donner aux élèves une vision multiplicative de ce type de problème.

- 22 élèves toutefois sur 26 réussissent cet exercice.

2) analyse de la variante V4 (domaine D2)

Les élèves comme dans le cas ci-dessus étaient incités à produire une représentation illustrant leur démarche, celle-ci toutefois n'était pas obligatoire.

analyse des résultats et des erreurs :

. 14 élèves sur 27 produisent une réponse exacte, à l'exception d'une élève qui fait un dessin (figuratif) de vêtements, tous les autres ne font que des calculs et ne les accompagnent d'aucune représentation.

. 3 élèves produisent des résultats partiels (2 erreurs de calcul, et une mauvaise lecture de l'énoncé 24 x 14 x 25 au lieu de 23 x 14 x 25). Dans les 2 premiers cas les élèves ébauchent des listes numérotées.

. 1 élève ne fournit aucune réponse

. les 9 réponses totalement erronées se répartissent de la façon suivante.

* un élève calcule la somme de 25 premiers nombres entiers,
* 5 élèves "disent" qu'il n'y a que 14 déguisements,
* 3 élèves multiplient 2 à 2 les différentes données et en font la somme.

Analyse des représentations :

Tous les élèves (sauf une déjà citée) produisent comme représentation, quand celle-ci existe (8 sur 27) des listes numérotées (dans 7 cas sur 8) ou des débuts de listes. Celles-ci ne les conduisent jamais au succès, car n'étant pas complètes ils ne peuvent les utiliser pour dénombrer un à un ou paquets par paquets les solutions.

Conclusion

- Nous constatons donc un net progrès par rapport à la phase n°1 dû sans doute à l'apprentissage réalisé et au fait que les élèves ont su reconnaître (pour 17 d'entre eux) un problème multiplicatif ; il est significatif que les élèves répondant correctement au problème n'aient pas jugé utile de faire des représentations.

- Les représentations (listes ou arbre) semblent être nécessaires dans un premier temps, mais dans le cas du domaine D2, elles peuvent être un handicap car elles conduisent à une recherche exhaustive de tous les cas.

- L'apprentissage réalisé sur des petits nombres a permis à de nombreux élèves de reconnaître un type de problème : ils ont pu se construire des techniques de recherche exhaustive.
Mais ces techniques peuvent devenir un obstacle à la compréhension de la structure multiplicative du problème si elles sont construites uniquement dans le domaine des "petits nombres".
Toutefois, cet obstacle peut être surmonté dans le cadre d'une progression du type : Problème complexe (Domaine D2) - 1ère simplification de structure :

calcul d'un produit partiel dans le domaine D2 - Seconde simplification dans le domaine numérique D1- Retour au problème complexe dans le domaine D2.

B2) Autres problèmes de combinatoire

Dans un premier temps nous avons proposé aux élèves le problème suivant :

P1 : *20 équipes de foot-ball (dont on donne la liste) de première division participent au championnat, chaque équipe rencontre les autres deux fois (match aller, match retour). Combien y-a-t-il de matchs disputés ?*

Puis 12 semaines après, les deux problèmes ci-dessous afin de tester le résultat de l'apprentissage effectué précédemment :

P2 : 5 personnes se rencontrent et se serrent la main, combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

P3 : *Dans un championat de basket, il y a 25 équipes, chaque équipe rencontre les autres une fois, combien y-a-t-il de matchs disputés ?*

Ce sont trois problèmes de combinatoire pouvant se résoudre par un calcul de produits. Notre but est de tester les performances, démarches et représentations mises en oeuvre par les élèves lors de la résolution, de tester l'effet de l'apprentissage réalisé en P1 sur P2 et P3 et ceci dans le cas où les données intervenant sont soit "petites", soit plus importantes.

B-2-a) Etude du problème P1

La passation a eu lieu le 19/12/86, elle était individuelle, chaque élève devait résoudre sur une feuille le problème. Puis il y a eu un bilan dirigé par la maîtresse s'appuyant sur les explications fournies par les élèves. Celui-ci a eu lieu lors d'une seconde séance.
Lors de cette seconde séance, les élèves devaient auparavant résoudre le problème P1' (même texte mais il n'y a plus que 8 équipes).
Le principe de l'expérimentation est donc le même que celui exposé au paragraphe B-1. Nous avons là encore deux domaines de variation pour les données numériques. Signalons toutefois que les problèmes P2 et P3 sont un peu différents du problème P1.

B-2-a-1) analyse a priori des procédures de résolution possibles

- la procédure PRO1 : chaque équipe rencontrant les autres deux fois, elle dispute donc 19 matchs aller, 19 retour, soit 38 matchs. Chaque match faisant intervenir 2 équipes, comme il y a 20 équipes il y a donc 380 matchs (38 x 10).

- <u>la procédure PRO2 :</u> chaque équipe fait 19 matchs-aller, il y a 20 équipes, cela fait donc 380 matchs (19 x 20 et prise en compte de la symétrie du problème).

Ces deux procédures ne font pas intervenir la symétrie du problème au même moment.

- <u>procédure PRO3 :</u> la première équipe dispute 19 matchs aller,la deuxième dispute 18 matchs aller..., il y a donc

    19 + 18 .... + 1 = 190 matchs aller

    il y a de ce fait 380 matchs.

- <u>procédure PRO4 :</u> la première équipe dispute 38 matchs, la seconde 36 matchs, ..., la 20ième 2 matchs, il y a donc

    38 + 36 .... + 2 = 380 matchs.

Ces deux dernières procédures ne font pas jouer des rôles identiques aux différentes équipes. Elles sont liées à une recherche exhaustive des solutions, de plus elles sont très proches d'une vision additive du problème alors que les procédures PRO1 et PRO2 sont plus proches d'une vision multiplicative.
Les représentations attendues diffèrent quelque peu de celles attendues en B1.

- listes exhaustives avec ou sans codage (numérique ou littéral),
- diagrammes sagittaux,
- arbre.

<u>B-2-a-2) Analyse des productions et erreurs des élèves (première phase de recherche)</u>

. 10 élèves sur 26 fournissent une réponse exacte (à savoir 380 matchs),
. 3 élèves fournissent une réponse fausse :

    19 x 2 x 20 = 38 x 20 = 720
    20 x 19 = 380 et 360 x 20 = 7600
    20 x 20 = 400

Les bonnes réponses correspondent toutes au calcul 20 x 19 = 380. Les deux premières erreurs proviennent d'une mauvaise prise en compte de l'existence des matchs aller-retour. La dernière revient à considérer qu'une équipe peut se rencontrer avec elle-même (mauvaise compréhension de l'énoncé ou erreur d'inattention). Les autres élèves ne finissent pas leur calculs ou ne répondent pas (5 non réponses).

<u>Analysons les représentations produites par les élèves</u>

Nous avons relevé :

- 4 ébauches d'arbres codés avec des nombres
- 5 débuts de liste ne faisant intervenir que des couples disjoints (voir annexe 4).
- 1 énumération par équipe du nombre de matchs à disputer (voir annexe 4).
- 5 listes de matchs (éventuellement numérotées) des équipes se rencontrant.

Soit donc 15 tentatives pour représenter le problème sans tenir compte de la symétrie de celui-ci (matchs aller-retour).
- 11 tentatives de représenter le problème en tenant compte de la symétrie se répartissant de la façon suivante :
- 2 ébauches de diagramme sagittaux symétriques (voir annexe 4).
- 7 ébauches d'arbres numérotés ou codés avec des lettres prenant en compte les matchs A-R (voir annexe 4).
- 2 énumérations de tous les matchs possibles (voir annexe 4). Nous pouvons noter que le 1er type de représentations fournit seulement 2 bonnes réponses (sur 15), le second type en fournit 8 (sur 11).

Analyse des procédures

Compte tenu des représentations, nous constatons que :
. la procédure PRO1 n' est utilisée qu'une seule fois,
. la procédure PRO2 est utilisée 11 fois (vision additive 19 + 19 +19 + ...)
. la procédure PRO3 est ébauchée une fois

Nous constatons que dans cette première phase, un nombre important d'élèves sont en échec, ceux qui amorcent une recherche sont conduits à dresser une liste exhaustive s'appuyant le plus souvent sur une énumération citée des matchs qu'ils arrivent en général à généraliser quand ils prennent en compte la symétrie du problème. cette recherche les amène à passer d'un début d'addition réïtérée à un produit.

B-2-a-3) Deuxième phase : problème P1, recherche collective

Après une première simplification (recherche du problème P'1), quand on leur repose le problème plus complexe P1, les élèves obtiennent de bons résultats et utilisent le plus souvent la procédure PRO1 et PRO2, dans des cas plus rares la procédure PRO3. Les représentations sont du même type (mais complètes) que ci-dessus.

B-2-b) Analyse du test

B-2-b-1) Variante P2

18 élèves sur 26 répondent correctement à la question, 3 élèves ne tiennent pas compte de la symétrie du problème, 1 élève fait une erreur de calcul, 2 élèves répondent 5 x 5 = 25 (prise en compte du seul facteur 5), 1 élève n'a rien compris au problème. Dans le cas de "petits nombres" il y a donc un fort pourcentage de réussite.
La procédure majoritaire est la procédure PRO3 correspondant à une recherche exhaustive (15 élèves), les autres procédures n'existent qu'à l'état de traces. Peu d'élèves traduisent le résultat sous la forme d'un produit : il n'y a pas de vision multiplicative du problème (qui demande une prise en compte de la symétrie ; 3 élèves seulement).
La représentation majoritaire est l'arbre ; on relève quelques dessins figuratifs et quelques diagrammes sagittaux.

B-2-b-2) Variante P3

Cette passation est beaucoup plus mal réussie
- un seul élève trouve le bon résultat par une recherche exhaustive des solutions et par une addition 24 + 23 +22 ... + 1 (procédure PRO3).
- 8 élèves ne répondent pas.
- 16 élèves entament une recherche exhaustive et essaient de la traduire par une multiplication (fausse car il ne prennent pas en compte la symétrie : 24 x 24 ou 25 x 24 ou 25 x 25).
Les représentations reviennent à faire ou à entamer une recherche exhaustive (diagramme sagittaux, listes, arbres. 1 seule élève MARION (voir annexe 4) décompte les branches de l'arbre). Ces recherches prennent souvent en compte la symétrie des rôles joués par les équipes mais ne débouchent pas lors des calculs sur un bon résultat.
Nous pouvons donc conclure que si la recherche exhaustive (s'appuyant sur des représentations) permet de résoudre la variante P2, celle-ci induit une structure additive qui conduit à l'echec les mêmes élèves quand les nombres sont plus grands (variante P3), en effet il faut abandonner cette recherche, et la généraliser, la traduire par un produit ou une addition des n premiers nombres. La recherche effectuée sur des petits nombres n'apporte pas ici de résultats significatifs? Les résultats enregistrés à ce test sont plus faibles que ceux enregistrés à la phase n°1 (variante P1); cela nous conduit à penser que ces notions sont très instables chez des élèves de CM2.Le problème reste difficile pour des élèves de CM2.

C) UN PROBLEME DE NUMERATION : LE PROBLEME DES OEUFS

Voir en annexe 5 les textes correspondant à ce type de problème.

C'est un problème multiplicatif, lié à la numération de position puisqu'il fait intervenir des groupements du 1er ordre (les boîtes), du 2nd ordre (les cartons) et du 3e ordre (les caisses) par un nombre fixe jouant le rôle de base.
Ce problème a déjà été proposé dans des classes de CM2, 6e, 5e, 4e, par M.J. PERRIN (1)
Les résultats obtenus dans ces classes ne sont pas très bons : il s'agissait pourtant d'une 2ième passation, trop peu d'élèves ayant abordé le problème lors de la 1ère. (Il est vrai que le problème se situait à la fin d'un test comportant par ailleurs d'autres questions).
Parmi les élèves ayant effectivement abordé le problème, en CM2 : le taux de réussite totale est de 12 % (30 % de réusite partielle).
Ce taux passe à 20 % en 6ème, jusqu'à 38 % en 5ème et 4ème. Même en 4ème, ce problème est source de difficultés : sur une classe de 19 élèves, 15 abordent le problème avec une réussite totale de 60 %.
Nous avons proposé le même problème en pré-test. Nous voulions voir si une familiarisation avec le problème et un apprentissage avec de petits nombres (dans le cadre d'un travail sur d'autres problèmes multiplicatifs) pouvaient déboucher sur des meilleurs résultats.

1°) <u>Pré-test</u>
<u>Analyse a priori</u> :
2 procédures mènent au résultat correct :
(I) : calcul du nombre d'oeufs par boîte, carton, caisse puis multiplication et addition finale :
ex : 6 oeufs par boîte, 36 oeufs par carton, 216 oeufs par caisse pour 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.
(50 X 216) + (3 X 36) + (2 X 6) = 10920
(II) : conversion des caisses en cartons, des cartons en boîtes, des boîtes en oeufs et addition finale :

50 caisses --> 50 X 6 cartons --> 1800 boîtes	--> 10800 oeufs
3 cartons --> 18 boîtes	--> 108 oeufs
2 boîtes	--> 12 oeufs
	10920 oeufs

Procédures observées (même classification que M.J PERRIN dans (1))
- Réussite totale soit avec la procédure I, soit avec la procédure II
- Réussite partielle c'est à dire une procédure correcte avec erreur(s) de calcul ou non terminée (ex : pas d'addition finale)
- (c) : il manque des multiplications par 6 :

ex : 2 X 6 + 3 X 36 + 50 X 6 ou 2 X 6 + 3 x 36 + 50 X 36
- (C2) : parmi les procédures (c) nous distinguons celle où l'élève ne multiplie qu'une fois par 6 pour les boîtes, les cartons ou les caisses :
ex : 2 X 6 + 3 x 6 + 50 x 6
- (d) : multiplications enchaînées : 6 X 2 = 12 ; 12 X 3 = 36 ; 36 X 50 = 1800

Résultats (27 élèves)

Réussite totale (procédure I)	:	5	18 %
Réussite partielle	:	1	
(c)	:	2	
(c2)	:	6	
(d)	:	8	
(e)	:	1	
(f)	:	2	
autres	:	2	

En fait, il serait plus juste de compter 3 réussites totales car 2 élèves arrivent au bon résultat, mais en utilisant une démarche plutôt aléatoire.
Même si on considère que les élèves qui se limitent au nombre d'oeufs par boîte ou par carton sont sur la "bonne voie", on peut dire que la majorité est en échec devant ce problème. A partir de là, nous avons proposé des séquences d'apprentissages construites sur deux idées :
reprendre le même problème :
1) avec des petits nombres
2) en supprimant le groupement le plus élevé : les caisses

2°)Phase d'apprentissage

1ère séquence : nous avons proposé une version simplifiée du problème :

"Dans une usine, on range les oeufs dans des boîtes et des cartons.
on met :
6 oeufs dans chaque boîte
6 boîtes dans 1 carton
on a rempli 3 cartons et 2 boîtes. Combien d'oeufs ont été emballés ?

Chaque élève recherche individuellement le problème, puis les solutions proposées sont explicitées collectivement : sur 24 élèves présents :
5 trouvent la bonne réponse
4 n'abordent pas le problème
8 élèves trouvent 108 (36 X 3 : nombre d'oeufs dans 3 cartons) mais :
- soit ils s'arrêtent là, comme s'ils avaient épuisé toutes leurs ressources, alors que le nombre d'oeufs dans les boîtes semble plus simple à trouver.
- soit ils continuent un calcul : ex 108 X 2 ou 108 X 3
les autres font soit des multiplications enchaînées, soit des multiplications au hasard, par 6, sans se soucier de la signification de leurs calculs.
D'ailleurs, au cours de la phase collective, même les élèves qui ont trouvé la bonne réponse ont du mal à dire ce que représentent leurs calculs.

ex : 6 X 6 = 36 : nombre d'oeufs dans un carton
36 X 3 = 108 ____________ 3 ______
Malgré l'insistance de la maîtresse, beaucoup d'élèves n'ont toujours pas compris le problème à la fin de la séquence.

<u>2e séquence</u> : Nous avons proposé une autre version du problème avec des petits nombres, mais en gardant le groupement d'ordre supérieur :

"Dans une usine, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.
On met :
6 oeufs dans chaque boîte
6 boîtes dans chaque carton
6 cartons dans chaque caisse
On a rempli 3 caisses, 2 cartons, 5 boîtes.
Combien d'oeufs a -t-on emballé?".

Comme précédemment, la recherche individuelle est suivie d'une phase collective d'explicitation des solutions. Pour aider ceux qui n'arrivent pas à démarrer, la maîtresse conseille de faire un dessin.
Sur 27 élèves présents :
- 3 font un raisonnement juste, mais un seulement donne le bon résultat. Les 2 autres font des erreurs de calcul.
- 4 ne font toujours rien (dont 3 sont les mêmes que lors de la séquence précédente).

- les autres utilisent des procédures du même type que celles définies pour le pré-test.
Toutefois, on observe que le nombre de cartons est souvent multiplié par 36, ce qui provient sans doute de la séquence précédente. Mais le nombre de caisses est multiplié soit par 6, soit par 36.
Un élève fait un mélange entre la base six et la base dix : 6 X 5 = 30 ;
60 X 2 = 120 ; 600 X 3 = 1800 ; 1800 + 120 + 30 = 1950
Tous les élèves font des dessins représentant les caisses, les cartons, les boîtes, mais ces représentations ne semblent pas les aider beaucoup.

<u>3e séquence</u> : Devant les difficultés éprouvées par les enfants, nous décidons de faire 2 groupes :
groupe I : (10 élèves)
les élèves qui réussissent au moins partiellement et qui participent lors des phases collectives.

groupe II : (15 élèves)
les élèves qui ont beaucoup de difficultés pour "entrer" dans le problème.
Le groupe I travaille seul pendant que la maîtresse s'occupe collectivement du groupe II.
Nous proposons une 3e version du problème avec un changement d'habillage et de base :

"un libraire emballe ses livres dans des boîtes, des cartons, des caisses. IL met :

5 livres dans une boîte
5 boîtes dans un carton
5 cartons dans une caisse
Il a rempli 2 caisses, 3 cartons, 4 boîtes.
Combien de livres a-t-il emballé ?
De plus, le groupe I doit résoudre le problème inverse :
"le libraire a emballé 535 livres.
Combien de boîtes, de cartons, de caisse a-t-il rempli " ?

Résultats du groupe I.

- Pour le 1er problème : 9 élèves sur 10 trouvent le bon résultat, ce qui est encourageant.
- Pour le problème inverse : 1 élève trouve le résultat très vite, les autres sont plus lents, mais réussissent (sauf 2) en procédant par tâtonnement : recherche de multiples de 125 approchant le plus possible 535 :

4 X 125 = 500	il y a 4 caisses	il reste 35 livres
1 X 25 = 25	il y a 1 carton	il reste 10 livres
2 X 5 = 10	il y a 2 boîtes.	

Dans la recherche du plus grand multiple de 125 inférieur à 535, un élève s'arrête à 2 X 125. Pour les 2 problèmes, les résultats de ce groupe sont encourageants.

Résultats du groupe II

Avec les enfants, la maîtresse met en évidence le nombre de livres dans une boîte, un carton, une caisse. Mais, malgré ces informations, tous ne sont pas capables de trouver le nombre de livres emballés.

3°) Post-test (environ un mois après le pré-test).
Il comporte 2 parties :
- la partie I est analogue au pré-test avec changement d'habillage et changement de base.
- la partie II est le problème inverse : c'est un problème de divisions successives par 8. Plusieurs procédures peuvent être envisagées :

1. Divisions successives par 8 :

il y a 2 caisses
6 cartons
4 boîtes.

2. On cherche d'abord le nombre de caisses remplies :
2a : par soustractions successives :
1440 - 512 = 928 928 - 512 = 416
2b. Par division :
2c. Recherche du plus grand multiple de 512 inférieur à 1440 :
512 X 2 = 1024 1440 - 1024 = 416
2d. Par additions successives
512 + 512 = 1024 1440 - 1024 = 416

la démarche est la même pour le nombre de cartons remplis et le nombre de boîtes remplies.

Remarque : pour utiliser cette procédure, il faut savoir que :

il y a 8 livres dans une boîte
64 livres dans un carton
512 livres dans une caisse

Résultats du Post-test. (26 élèves)

a) problème I.

Réussite totale (procédure I)	: 7
Réussite partielle	: 4
(c)	: 3
(c2)	: 1
(d)	: 8
autres	: 3

Comparaison Pré-test - Post-test.

On observe un progrès qualitatif entre le pré-test et le post-test puisque le nombre de réussites totales passe de 5 (et même seulement 3) à 7.
Les réussites partielles sont aussi plus nombreuses au post-test. De plus, parmi les élèves classés "autres", 2 font un raisonnement presque correct mais multiplient le nombre de caisses par 8^4 au lieu de 8^3.
Les procédures (d) restent stables en nombre : 3 élèves sur 8 ne changent pas de procédure, les autres progressent. Lors du post-test, la qualité des procédures est meilleure :
- une seule élève fait des multiplications au hasard
- il n'y a plus d'élèves faisant 1 seul calcul sur les trois (procédures (e) et (f)).

Les élèves qui progressent avaient utilisé lors du pré-test des procédures (c2), (c), (d), (e) et (f).
Ceux qui étaient classés "autres" ne progressent pas. On peut aussi remarquer que les élèves qui étaient restés "secs" lors des séquences d'apprentissage réussissent totalement ou partiellement au post-test.

En conclusion, on peut dire que l'apprentissage joue ici un rôle non négligeable, mais plus de la moitié de la classe reste incapable de résoudre ce problème correctement.

b) Problème inverse (II).

Procédures effectivement utilisées par les élèves :

- (2c)
- (2d)
- division par 8 : une élève pose la division 1440 : 8
  une autre donne le résultat (180) sans aucune explication
- (3) : recherche de multiples de 8 par tâtonnement pour s'approcher le plus près possible de 1440 :
  ex : --> 8 X 100 = 800 ; 8 X 15 = 120 ; 8 X 29 = 232 ; 200 X 8 = 1600..........

--> Un élève écrit 6 X 8 = 48 puis cherche des multiples de 48 : 48 X 20, 48 X 21.... etc jusqu'à 48 X 30 = 1440, il conclut alors à 30 caisses, 48 cartons et 6 boîtes.
Nous disons qu'il y a réussite partielle quand l'élève trouve seulement le nombre de caisses et / ou le nombre de cartons avec possibilité d'erreurs de calcul.

Résultats : (26 élèves)

- Non réponse + calculs aberrants	: 9
- (3)	: 5
- Division par 8	: 2
- (2c) + (2d) sans réussite	: 1
- Réussite partielle	: 3
- Réussite totale	: 6

Tous les élèves qui réussissent totalement ou partiellement utilisent une procédure de type (2c) ou un mélange (2c) (2d). Un seul élève utilise une procédure (2c) (2d) sans réussir : il cherche des multiples de 128 et écrit :
128 X 11 = 1408
1440 - 1408 = 32
il conclut alors à 11 caisses et 4 cartons. Les résultats à ce problème ne sont pas bons:
- on note beaucoup de non réponses ou de calculs aberrants
- les divisions successives par 8 n'apparaissent pas : seules 2 élèves calculent 1440 : 8 mais ne vont pas plus loin.
En fait, seulement 4 élèves reconnaissent ici un problème de division : outre les 2 cités ci-dessus, 1 élève pose des divisions successives par 3 et une autre effectue une division par 2, puis par 5 , la division conduit ici les élèves à une impasse. Ceux qui réussissent utilisent des procédures de type (2c) (2d), cela peut s'expliquer car tous ceux qui ont réussi le problème I réussissent aussi le problème II (sauf 2). Il avaient donc comme informations
le nombre de livres dans une caisse : 512
le nombre de livres dans un carton : 64
le nombre de livres dans une boîte : 8
les 2 élèves qui ne réussissent pas le problème II, réussissent partiellement ou emploient une procédure de type (3). Cela provient sans doute du fait que la situation n'est pas une situation traditionnelle de partage. De plus, les divisions successives sont difficiles à interpréter, les quotients et les restes représentant tantôt des boîtes, tantôt des cartons.

4°) Conclusion

- L'apprentissage et la familiarisation avec le problème sont effectivement à l'origine d'un certain progrès.
- L'utilisation de petits nombres a permis une meilleure approche, en particulier grâce aux représentations. Mais cela n'est pas suffisant car, quand les nombres sont plus grands, il faut abandonner les représentations et anticiper la solution.

Bien qu'il ne fasse intervenir que des notions mathématiques du cours moyen (Numération de position - multiplication - division pour le problème inverse), ce problème des oeufs reste complexe au CM2. Il faudrait voir si à d'autres niveaux (6°, 5°), un apprentissage serait plus efficace.

D. INVENTION DE PROBLEMES MUTIPLICATIFS

L'apprentissage de la multiplication passe non seulement par la résolution de problèmes multiplicatifs, mais aussi par la production, par les élèves eux-mêmes, de textes de problèmes.
Un but essentiel de l'école élémentaire est bien d'apprendre aux enfants à résoudre des problèmes : pour cela, il est nécessaire de travailler au niveau du contrat qui s'est établi entre le maître et les élèves à ce sujet, pour tenter de l'expliciter et de le faire évoluer. (voir (7)).

1°) Nos objectifs.

Nous voulions essayer de déterminer comment des enfants de CM2 conçoivent un problème multiplicatif avec 3 facteurs. Nous pensons qu'en se limitant à 2 facteurs, il n'y aurait eu aucune difficulté.)
En particulier, nous nous sommes posé les questions suivantes :
- la taille des nombres intervient-elle ?
- la présence de nombres décimaux est-elle source de difficultés ?
- les 3 facteurs sont-ils pris en compte dans l'énoncé ? Y-a-t-il d'autres données ?
- les questions posées ont-elles un lien avec les données ?

A ce sujet, des travaux ont montré que les énoncés de problèmes fournis par les enfants sont souvent cohérents dans la forme, mais pas toujours dans la logique (9)
- Peut-on résoudre le problème ?
- Quelles sont les opérations qui interviennent ? Les grandeurs ?
- Les enfants ont-ils tendance à reproduire des textes de problèmes déjà vus en classe ?
- Peut-on obtenir des acquis dans ce domaine ?

2°) Déroulement et analyse des productions

1ère phase : La classe est divisée en 6 groupes. A chaque groupe, on donne un produit de 3 facteurs : a X b X c

consigne : " *inventer un problème dont la solution est a x b x c*

produit proposés : 3 X 7 X 6 ; 34 X 12 X 16 ; 6 X 4,5 X 18 (2 fois) ; 127 X 99 X 7 (2 fois).
Les enfants discutent entre eux, proposent, hésitent et finalement sont assez longs à produire un texte.

<u>2e phase</u> :
- Affichage des problèmes inventés
- Résolution collective de ces problèmes par la classe
- Rectification éventuelle des énoncés.

<u>Voici les textes obtenus</u> :

n°1 - *3X7X6*
"Il y a 3 enfants qui veulent acheter 6 stylos à 7 F l'un.
Quel est le prix total des 6 stylos ?"

n°2 - *127X99X7*
"Il y a 127 élèves qui veulent s'inscrire aux études sportives.
Chaque mois, ils payent 99 F. Il y a 7 moniteurs.
Combien chaque moniteur va recevoir d'argent ?"

n°3 - *6X4,5X18*
"Dans un magasin, il y a 6 caisses de 18 livres. Chaque livre coûte 4,5 F.
Combien pourrai-je acheter de livres ?
Combien je paierai ?"

n°4 - *34X12X16*
"Il y a 12 poules dans une ferme, chaque poule pond 34 oeufs en 16 jours.
Combien y-a-t-il d'oeufs ?"

n°5 - *127X99X7*
"La mère de Frédérick lui a donné 100.000F. Elle lui dit d'acheter ce qu'il veut. Il décide d'acheter :
- une montre à 100 F
- 2 ordinateurs à 1000 F
- un radio - réveil à 250 F
- 3 raquettes de Lendl à 700 F l'une
Combien Frédérick a-t-il dépensé d'argent ?

n°6 - *6X4,5X18*
"un vendeur de patates se fait livrer 18 sacs de 4,5 kg, en 6 semaines, combien aura-t-il de kg de patates ?"

<u>Remarques à propos de ces énoncés</u> :

- Pour 2 groupes, la question est rajoutée au dernier moment, sur demande de la maîtresse.
- Le cas du groupe n°5 est tout à fait particulier puisque aucune donnée n'est prise en compte. Frédérick a une personnalité forte et semble avoir dicté ses désirs aux autres sans tenir compte de la consigne.

- La dernière version du groupe n°6 arrive après plusieurs propositions d'énoncés faisant intervenir uniquement des additions.
-Dans le problème n°3, il y a 2 questions qui s'enchaînent.

Analyse des énoncés

On observe que (excepté le cas n°5)
- les questions sont toujours en rapport avec 2 ou 3 facteurs du produit. Cetains énoncés (n° 1 et n° 6) manquent de précision, ce qui explique que 2 données sur 3 seulement sont nécessaires pour répondre à la question.
- Pour les opérations mises en jeu :
- il y a toujours une multiplication, mais la 2e opération n'en est pas forcément une. Elle peut d'ailleurs ne pas exister (n° 1 et n° 4)
- les grandeurs évoquées sont
  soit discrètes (nombre d'objets, de personnes)
  soit continues (temps - masse)
- les nombres décimaux mesurent des prix ou des masses.

Après résolution collective de ces problèmes et mise en évidence des ambigüités, les textes sont modifiés. Le groupe n°5 est invité à inventer un autre problème.

Voici les textes définitifs obtenus : on remarque une uniformisation des énoncés. De plus ; l'intervention de prix amène une désymétrisation du problème, le rendant ainsi plus accessible.

n°1 *"3 enfants veulent acheter 6 stylos à 7 F l'un pour chacun. Quel est le prix total des stylos ?"*

n°2 *"127 élèves veulent s'inscrire aux études sportives. Chaques enfant paie 99 F par mois. Pour 7 mois, combien les enfants auront-ils payé ?"*

n°3 *"j'achète 6 caisses de 18 livres chacune. Chaque livre coûte 4,5 F. Combien paierai-je ?"*

n°4 *"Dans une ferme, il y a 12 poules, chaque poule pond 34 oeufs par jour. En 16 jours, combien y-aura-t-il d'oeufs ?"*

n°5 *"Dans un lac, il y a 99 pélicans, chaque pélican pêche 7 poissons par jour.*
Combien de poissons vont pêcher les pélicans en 127 jours ?"

n°6 *"Un vendeur de pommes de terre se fait livrer 18 sacs de 4,5 kg chacun, par semaine. En 6 semaines, combien aura-t-il de kg de pommes de terre ?"*

3e phase : Travail individuel.
Chaque élève doit inventer un problème dont la solution est 127 X 99 X 7.
Résultats :
- 9 élèves (sur 24 présents) répondent correctement à la consigne
- les 3 facteurs du produit sont toujours pris en compte dans l'énoncé, sauf dans un cas (c'est une élève très en difficulté).

- Opération mise en jeu :

- Pour 6 élèves, il n'y aucune multiplication.
- Pour 9 élèves, il y a : soit une multiplication seule soit une multiplication et une autre opération différente.
- Pour 7 élèves il y a une addition et pour 2, 2 additions.

Les productions individuelles sont donc moins performantes que les productions de groupes. La discussion, la communication entre élèves semble indispensable pour ce type de tâche, à condition bien sûr qu'il n'y ait pas de "mauvais leader" dans les groupes, comme cela s'est produit pour le n°5.

4e phase : Post-Test.

Chaque élève doit individuellement inventer un problème dont la solution est 365 X 100 X 8.

Résultats

- 13 élèves (sur 27 présents) répondent correctement. Il est intéressant de comparer avec l'exercice précédent pour voir si les résultats sont stables :
sur ces 13 élèves :
- 5 sont stationnaires
- 6 ont "progressé"
- 2 étaient absents pour le 1er exercice.

Sur les 9 élèves ayant réussi précédemment :
- 5 sont stationnaires
- 4 ont "régressé".

On ne peut donc pas dire qu'il y ait stabilité. De plus, 5 élèves fournissent seulement un début de texte, un ne répond pas du tout.

- Opérations mises en jeu : on n'observe plus la diversité des opérations de l'exercice précédent. Seul un élève propose une multiplication suivie d'une addition. Les autres proposent une seule multiplication ou 2 multiplications enchaînées ou non (ex : 8 X 100 et 8 X 365 correspondant à 2 questions).

- Beaucoup de problèmes rappellent celui des oeufs (boîtes - cartons - caisses). Mais un seul énoncé de ce type correspond à une bonne réponse.

Conclusion

Pour ce type d'exercice, les résultats sont instables. On ne peut pas parler de progrès, sinon que les élèves sont plus sensibilisés à la multiplication (moindre diversité des opérations mises en jeu lors du post-test). Inventer un problème multiplicatif (avec 3 facteurs) reste une tâche complexe pour des élèves de CM2 ; cela nécessite sans doute un temps d'apprentissage beaucoup plus long.

E) CONCLUSION

Le travail effectué sur les problèmes multiplicatifs montre que:

- Les élèves de CM2 ne sont capables de résoudre des problèmes de combinatoire que par une recherche exhaustive des différents cas possibles.Celle-ci devient vite caduque lorsque le problème fait intervenir des données numériques plus importantes.
- Les élèves de CM2 ont encore une " vision additive" des problèmes multiplicatifs, celle-ci semble renforcée par les représentations qui ont été construites lors de l'étude de problèmes de dénombrement.
- Le passage de petits nombres à de grands nombres ne permet pas, seul, de faire évoluer les procédures et les représentations des élèves.

Cela nous conduit à penser que le produit cartésien, s'il fonctionne de façon implicite dans le cas de deux ensembles ayant des cardinaux "petits" n'est plus aussi opératoire dans des cas plus complexes.

TROISIEME PARTIE

CONCLUSION GENERALE

Essayons de répondre aux questions que nous nous sommes posés au début de l'expérience:

1- A propos du calcul mental

Une pratique systématique du calcul mental a permis d'enrichir les conceptions numériques des élèves et de diversifier les procédures de calculs. Cette évolution doit tenir compte de l'existence d'étapes cognitives différentes : nous avons pu le constater pour le jeu de l'autobus et pour les autres activités additives et multiplicatives. Dans le cas des activités additives, la première étape se caractérise par l'utilisation de "techniques primitives" de comptage: énumération ou opérations posées dans la tête.
La deuxième étape correspond à la mise en oeuvre de techniques utilisant des décompositions additives ou soustractives des nombres.
Le passage de la première étape à la deuxième étape correspond, pour notre expérience, au passage du CE1 (7-8 ans) au CE2 (8-9 ans). Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ce saut qualitatif a aussi été mis en évidence dans les travaux des psychologues cités par M.FAYOL dans (2). Il peut s'expliquer par une meilleure connaissance du répertoire additif, une plus grande familiarisation avec les opérations et un début d'apprentissage des fonctions numériques.

Dans le cas du jeu de l'autobus, nous avons observé la hiérarchie des procédures explicitées par G. Vergnaud: quand le niveau cognitif des élèves le permet (à partir du CE2 pour notre expérience), l'utilisation du calcul mental favorise la mise en oeuvre de procédures plus "évoluées".
Dans le cas des activités multiplicatives, nous avons observé que les décompositions multiplicatives sont très peu disponibles au CM1 et CM2. Les élèves font appel à des décompositions additives mettant en jeu la distributivité.

Le maître a un rôle très important à jouer dans l'explicitation des procédures utilisées par les élèves. Pour qu'une activité de calcul mental soit enrichissante, il est indispensable que le maître fasse:

- expliciter les procédures mises en oeuvre par les élèves (qu'elles conduisent ou non à un résultat juste).
- Comparer ces procédures, afin que chaque élève puisse déterminer, en fonction de ses conceptions numériques, et par souci personnel d'économie, la procédure la mieux adaptée. Celle-ci n'est pas forcément la même pour tous les élèves. Ce travail permet la diffusion de nouvelles procédures dans toute la classe. Toutefois, si cela est indispensable, ce n'est pas toujours suffisant : ce travail doit être complété par une institutionnalisation de certaines procédures et par une automatisation de certains calculs. Nous rejoignons sur ce point J.P. Fischer, en particulier dans le cas du passage à la dizaine pour l'addition et la soustraction et dans le cas des décompositions multiplicatives.

En ce qui concerne les élèves en difficulté, nous avons constaté un décalage dans le temps pour le passage des différentes étapes cognitives. Ainsi certains élèves faibles du CM mettent en oeuvre des procédures "primitives" (énumération, opérations posées dans la tête), parfois de façon durable, analogues a celles utilisées par une majorité d'élèves de CE1. Cela se vérifie aussi pour le jeu de l'autobus. Les élèves qui ont des difficulté en calcul mental sont les mêmes que ceux qui ont des difficultés en mathématiques en général: au début de l'expérience, ces élèves ne mettaient en oeuvre qu' un seul type de procédures (voire aucun). La diffusion de diverses procédures dans la classe, si elles sont reconnues comme efficaces par ces élèves, leur permet de progresser.

2- A propos des problèmes multiplicatifs

Il nous paraît nécessaire de situer nos travaux par rapport à d'autres résultats, notamment d'évaluer le poids des variables numériques.
Janine Rogalski dans (5) signale que l'objet de savoir "produit cartésien" n'est pratiquement pas objet d'enseignement à l'école élémentaire et dans le premier cycle du second degré; elle remarque qu'il "fonctionne comme connaissance implicite et non comme objet d'enseignement, que la connaissance de l'enfant issue de ses activités socio-cognitives générales prend beaucoup plus de place dans son développement cognitif que la connaissance institutionnalisée".
Elle souligne l'importance de l'étude de cette acquisition "spontanée" (prise dans le sens d'une construction extra-scolaire) "pour analyser ce qui se passe dans l'école lors de l'enseignement de notions relevant du champ conceptuel dans lequel on peut situer le produit cartésien".
D'autres études (9) confirment cela et montrent que le produit cartésien n'est pas étudié en temps que tel dans l'enseignement et qu'il prend un statut implicite censé fonctionner lors de la modélisation de situations pouvant s'y référer.
S. Maury et M. Fayol dans (4) s'intéressent aux procédures utilisées par les élèves lors de la résolution de deux problèmes de combinatoire mettant en jeu un matériel relevant du domaine de l'électricité. Du point de vue mathématique, il s'agit de l'énumération des éléments du produit cartésien de deux ensembles ayant chacun quatre éléments. Ils soulignent que:

- "la réussite est conditionnée dans les deux cas par l'utilisation d'une procédure d'énumération systématique"
- le schème E x F est disponible chez les enfants de 9-10 ans
- le travail en groupe a une incidence positive sur les résultats (notamment au CM1).

Ces différentes recherches ne portent donc que sur le produit cartésien de deux ensembles aux cardinaux "petits".

Le produit cartésien, un fonctionnement implicite ?

Le produit cartésien fonctionne de façon implicite lorsqu'il ne fait intervenir que deux ensembles aux cardinaux "petits". Notre recherche montre que ce n'est plus le cas quand on augmente les cardinaux et même, dans une plus faible mesure quand on passe de 2 à 3 ensembles; cela nous semble lié aux représentations mises en jeu et aux procédures sous-jacentes à ces dernières.
En effet les représentations produites par les élèves ne visent qu'à conduire à bien une recherche exhaustive des différents cas possibles; elles privilégient, de ce fait, une démarche additive ("paquets par paquets" dans le meilleur des cas), pour dénombrer le cardinal de l'ensemble produit.
Elles ne sont plus valides, lors d'une augmentation importante des cardinaux ou du nombre des ensembles intervenant dans le produit. Il y a là un saut informationnel qui ne fonctionne pas de lui même. Les élèves doivent abandonner la recherche exhaustive, parallèlement ils doivent "épurer" les représentations qui sous-tendent cette recherche afin d'en dégager la structure multiplicative (c'est particulierement le cas de la représentation en arbre).
Notre expérimentation montre que la familiarisation avec le problème dans le cas de petits nombres ne débouche que sur une reconnaissance du type de problème. Pour que cette familiarisation ne se limite pas à une recherche exhaustive de toutes les solutions il est nécessaire d'adopter une progression permettant de surmonter les difficultés liées à la structure du problème d'une part, à la taille des nombres d'autre part, à savoir :
- problème complexe : produit cartésien de trois ensembles de cardinaux "assez grands"
- simplification éventuelle de structure: passage de trois ensembles à deux ensembles (produit partiel)
- simplification éventuelle portant sur la taille des nombres: trois ensembles de cardinaux "petits"
- retour au problème initial.

Signalons toutefois que ce dispositif se révèle moins performant dans le cas des autres problèmes de combinatoire que nous avons étudiés. Ce type d'activités reste difficile pour des élèves de CM et semble davantage relever du premier cycle; une recherche reste à conduire à ce niveau. Il nous semble nécessaire, toutefois, d'essayer de dépasser dès le CM la phase première de recherche exhaustive en jouant sur les variables de la situation. Par contre, il nous paraît inutile de consacrer beaucoup de temps à l'étude du produit cartésien et de ses représentations au CP et CE.
Cette recherche n'a pas pu prendre en compte tous les aspects de la pratique du calcul mental et de ses incidences sur l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire. Des recherches restent à mener sur les points suivants :

- quel est l'effet d'une pratique de calcul mental sur l'apprentissage du calcul algébrique au collège (de 12 à 16 ans) ?
- Quel est l'effet d'une résolution mentale de problèmes faisant intervenir de "petits nombres" sur la résolution écrite de problèmes de même type faisant intervenir des variables numériques "plus grandes" ?

BIBLIOGRAPHIE

(1) L'enfant et le nombre M. Fayol

(2) Revue Française de Pédagogie n° 70. "Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ?" par M. Fayol.

(3) Revue Française de Pédagogie n° 60. " Mémoire et résolution de problèmes " par J.F. Richard.

(4) Recherche en Didactique des Mathématiques. Volume 7-1 (1986) : "Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens 1 et 2 " par S. Maury et M. Fayol.

(5) Cahiers de didactique des mathématiques n° 12 et 13 : " A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge pré-scolaire et scolaire."
" Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité" par J. Rogalski.

(6) Revue Française de Pédagogie n° 60. "Représentation imagée et résolution de problèmes" par M. Denis

(7) Grand N numéro 47. " Calcul mental, calcul rapide " par D. Butlen et M. Pézard.

(8) "Commment les enfants apprennent à calculer " par R. Brissiaud.

(9) "Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au C.E." D.Butlen.

(10) Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 2-3 (1981) . " Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de trois à six ans" par J.P. Fischer.

(11) Recherche en Didactique des Mathematiques. Vol 9-2. " Complexité de compréhension et d'execution des opérations arithmétiques élémentaires" par J.P. Fischer.

(12) Revue Française de Pédagogie n°80. "L'automatisation des calculs élémentaires à l'école " par J.P. Fischer.

(13) Arithmetic Problems Formulation and Working Memorie Load - M. Fayol, H. Habdi, J.E. Gombert - Laboratoire de Psychologie - Université de Bourgogne - Dijon - 1987.

ANNEXES

Annexe 1

[illegible]

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 6 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ \times\ 7 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 12 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 3 \\ \hline 75 \end{array}$$

1 école

13 x 12 =

1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

+1 x 13 = 13

156

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 675 \\ \hline 2025 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 13 \\ \hline 39 \\ 130 \\ \hline 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 7 \end{array}$$

26 + 130 = 156

avec les carottes en entrée on fait 42 menus différents

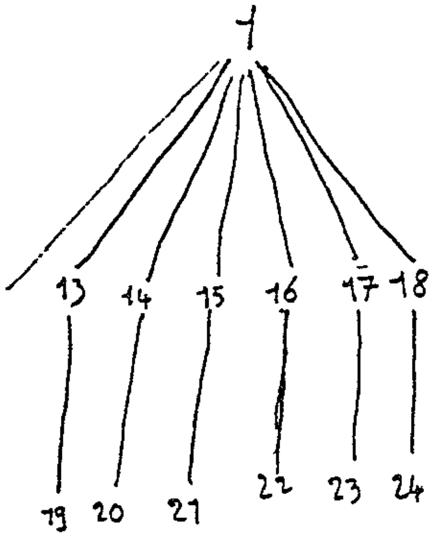
avec les sardines en entrée, on fait 42 menus

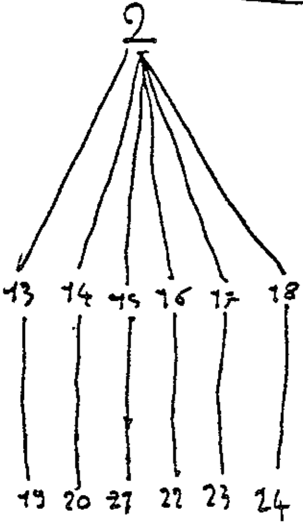
12 x 42 = 504 on fera 504 menus différents

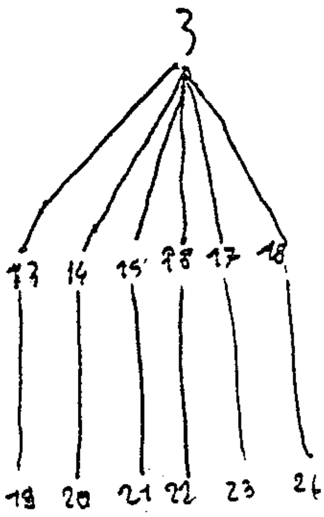
504 = 12 x 6 x 7

Annexe 2

Frédéric







Cheber 2

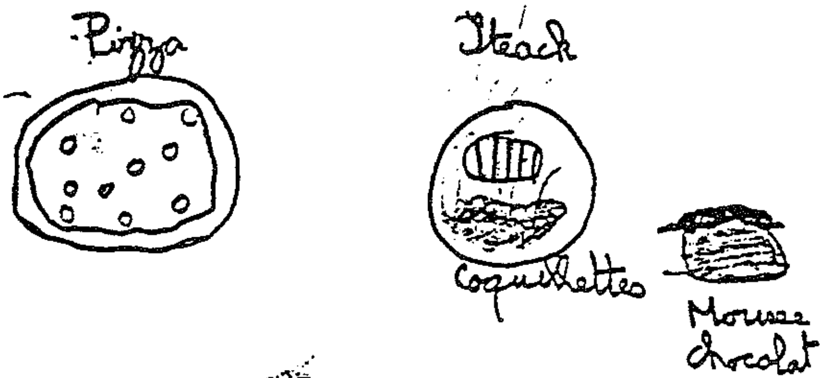
$$\left.\begin{array}{l} 0\,1\,7 \\ 0\,1\,8 \\ 0\,1\,9 \\ 0\,1\,10 \\ 0\,1\,11 \\ 0\,1\,12 \\ 0\,1\,13 \end{array}\right\} 7$$

Pizza
Ravioli gratinés
Mousse au chocolat

David

25 x 27 = 175 + 500 = 675 la classe
3 x 27 = 81
675 x 3 = 2025

Annexe 2



12 x 3 = 66
6 x 3 = 18
7 x 3 = 21

66
+ 18
+ 21
105

25
x 3
75

Menu Souraya 2.)

Pizza.
Hachis parmentier
Mousse au chaucolat

Menu

Friand au fromage
Green haché

Compote

Menu

Sardine
Riz créole
Pêche au sirop

Annexe 3

1 — 13 — 19
1 — 14 — 20
1 — 15 — 21
1 — 16 — 22
1 — 17 — 23
1 — 18 — 24

avec les carottes en entrée on fait 42 menus différents

1 — 13 — 20
1 — 13 — 21
1 — 13 — 22
1 — 13 — 23
1 — 13 — 24
1 — 13 — 25

1 — 15 — 19
1 — 15 — 20
1 — 15 — 22
1 — 15 — 23
1 — 15 — 24
1 — 15 — 25

avec les sardines en entrée on fait 42 menus différents

1 — 14 — 19
1 — 14 — 21
1 — 14 — 22
1 — 14 — 23
1 — 14 — 24
— 25

1 — 16 — 19
1 — 16 — 20
1 — 16 — 21
1 — 16 — 23
1 — 16 — 24
— 25

1 — 17 — 19
1 — 17 — 20
1 — 17 — 21
1 — 17 — 22
1 — 17 — 24
— 25

1 — 18 — 19
1 — 18 — …
1 — 18 — …
1 — 18 — …
1 — 18 — …
— 24
— 25

12×42 = 504 on fera 504 menus différents

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 42 \\ \hline 24 \\ 480 \\ \hline 504 \end{array}$$

Jean Luc

Audrey 8.

C.a.L
R.G
M a C

C.a.L
P.R.H.b
P. a.F

C.a.L
S.H,C
C

C.a.L
G.d.P,H.b
P. a.S

C.a.L
H.P
L.G
C.a.L
B.d.V,R.C
F

MARION

Annexe 3

Carotte à l'orange
6 plats
7 deserts
13

Sardine
6 plats
7 deserts
13

Pizza
6 plats
7 deserts
13

Pamplemouss
6 plats
7 deserts
13

Friand au fromaage
6 /
7 /
13

Potage
6 /
7 /
13

Céleri rémoulade
6 /
7 /
13

Salade composée
6 /
7 /
13

Oeufs durs, mayonnaise
6 /
7 /
13

Betteraves et maïs
6 /
7 /
13

Endives en salade
6 /
7 /
13

Quiche
6 /
7 /
13

Carotte à l'orange

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 7 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 42 \\ \hline 24 \\ +\ 480 \\ \hline 504 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 12 \\ \hline 26 \\ +\ 130 \\ \hline 156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 156 \\ \times\ 3 \\ \hline 468 \end{array}$$

$(13 \times 12) = 156$

$(156 \times 3) = 468$

~~[illegible]~~ 12
12 + 6
6 + 7
25

Bertrand

Annexe 3

~~1-13-19~~
1-13-19
2-14-20
3-15-21
4-16-22
5-17-23
6-18-24
7-19-25

25-13-1
24-12-2
23-11-3
22-10-4
21-9-5
20-8-4
19-7-3

18-6-2
17-5-1

Annexe 4

2

chez lui | chez lui

Sochaux 19×2
St Etienne ⇒ 19×2
Rennes ⇒ 19×2
Racing Club P ⇒ 19×2
Auxerre ⇒ 19×2
Bordeaux ⇒ 19×2
Brest ⇒ 19×2
Laval ⇒ 19×2
Le Havre ⇒ 19×2
Lens ⇒ 19×2
Lille ⇒ 19×2
Marseille ⇒ 19×2
Metz ⇒ 19×2
Monaco ⇒ 19×2
Nantes ⇒ 19×2
Nancy ⇒ 19×2
Nice ⇒ 19×2
Paris SG ⇒ 19×2
Toulon ⇒ 19×2

20 equipes 2×20 40

20×19 = 380×20 = 7600

Aller			Retour				
1	11	00	1	11	1	00	11
2	12	00	2	12	2	00	12
3	13	00	3	13	3	00	13
4	14	00	4	14	4	00	14
5	15	00	5	15	5	00	15
6	16	00	6	16	6	00	16
7	17	00	7	17	7	00	17
8	18	00	8	18	8	00	18
9	19	00	9	19	9	00	19
10	20	00	10	20	10	00	20

DESNOS Karine

1 Auxerre
2 Bordeaux 2
3 Brest
4 Laval 2
5 Le Havre
6 Lens 2
7 Lille
8 Marseille 2
9 Metz
10 Monaco 2

1 Nantes
2 Nancy 2
3 Nice
4 Paris ST Germain 2
5 Racing Club de Paris
6 Rennes 2
7 ST Etienne
8 Sochaux 2
9 Toulon
10 Toulouse 2

$7 \times 54 = 7 \times 50 + 7 \times 4$

$= (30 \times 7) + (20 \times 7) + (2 \times 7) + (2 \times 7)$ ← rédécompose

$= 50 + 4 = 54 \times 5 \times 2$?

$= (7 \times 50) + (7 \times 4)$

$= 350 \quad 28$

378

$3 \times 32 = 32 \times 10 = 320 - 32 = 288$ ×

$9 \times 54 = 10 \times 54 = 540 - 54 = 486$ ×

Annexe 4

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 2 \\ \hline 40 \end{array}$$

Auxerre
Brest
Laval
Le Havre

A
B

A B	B A	L A	B B etc....
A B	B B	B	B
A L	B L	L	L
A H	B H	H	H
A L	B L	L	L
A L	B L	L	L
A M	B M	M	M
A M	B M	M	M
A M	B M	M	M
A N	B N	N	N
A N	B N	N	N
A N	B V	N	N
A P	B P	P	P
A R	B R	R	R
A R	B R	R	R
A St E	B St E	St E	St E
A S	B S	S	S
A T	B T	T	T
A T	B T	T	T
19	19	19	19

19 etc........

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times\ 19 \\ \hline 380 \end{array}$$

$7 \times 54 = 378$

$7 \times 4 = 28 + 7 \times 5 = 35$ X

$28 + 35 = 378$

$54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 + 54 = 378$

108 108 108 54

216 162

378

$10 \times 32 = 320$

$320 - 32 = 288$

$9 \times 54 = 486$

$9 \times 5 = 45 + 9 \times 4 = 36$

$45 + 36 = 486$

$54 \times 10 = 540$

$5 \times 38 = 190$

Annexe 5

Pré - Test :

Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses

On met 6 oeufs dans chaque boîte
6 boîtes ——— carton
6 cartons ——— caisse

On a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.
Combien d'oeufs ont été emballés ?

Post - Test

Problème I

Un libraire emballe ses livres dans des boîtes, des cartons, des caisses.

Il met 8 livres dans chaque boîte
8 boîtes ——— carton
8 cartons ——— caisse

Il a rempli 50 caisses, 6 cartons, 3 boîtes
Combien de livres ont été emballés ?

Problème II

Dans une autre librairie, on emballe aussi les livres par boîtes de 8. On met 8 boîtes dans un carton et 8 cartons dans une caisse.

On a emballé 1440 livres.
Combien a-t-on rempli de caisses ?
de cartons ?
de boîtes ?

ANNEXE N°6 Le jeu de l'autobus - classe de CE2 de Melun - quelques résultats (bonnes réponses)

Niveau scolaire	NOMS	6/02/86 S	6/02/86 A	17/02/86 S	17/02/86 A	27/02/86 S	27/02/86 A	6/03/86 S	6/03/86 A	18/3/86 S	18/3/86 A	Total S	Total A	O.S.P	Sexe	Nombre d'erreurs S	Nombre d'erreurs A
A (8)	Agnes	3	2	4	4	4	4	4	3	1	1	13	14	En	F	1	6
	Aude	1	2	4	2	4	3	4	3	4	4	17	14	CM	F	3	6
	Elsa	2	2	4	0	3	3	3	1	2	4	12	9	En	F	8	11
	Guenaëlle	3	0	2	2	2	2	2	0	3	3	12	7	En	F	8	13
	Guillaume	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	20	19	CM	G	0	1
	Grégory	4	3	4	3	4	4	4	4	4	3	20	17	CM	G	0	3
	Thomas	4	3	4	3	4	4	4	2	4	2	20	14	OE	G	0	6
	Valérie	/	/	4	2	4	4	2	2	4	3	14/16	11/16	OE	F	2/16	3/16
B (6)	Christine	1	0	4	1	3	4	4	1	[illegible]	4	16	10	CS	F	4	10
	Fabrice	2	2	3	3	4	3	3	0	3	/	12	8	CS	G	8	12
	Mathieu	/	/	3	3	3	2	2	0	3	1	11/16	6/16	CS	G	5/16	10/16
	Nicolas	4	3	4	4	1	3	4	0	3	1	16	11	OE	G	4	9
	Sandra	1	1	4	2	3	2	2	0	4	0	16	6	CM	F	4	14
	Virginie	1	1	3	1	3	1	3	0	4	0	14	9	CM	F	6	11
C (3)	Charlotte	2	2	1	1	1	1	2	0	2	0	8	4	CS	F	12	16
	Jean-Remy	/	/	4	3	3	4	4	4	3	3	14/16	14/16	CS	G	2/16	2/16
	Vincent	2	1	3	3	3	3	3	0	4	0	15	7	OE	G	5	13
D (5)	Eric	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	OE	G	20	20
	François	0	0	0	0	0	1	1	0	/	/	1/16	1/16	PL	G	15/16	15/16
	Julien	1	1	2	3	2	2	3	0	4	2	12	8	CS	G	8	12
	Patrick	3	0	2	1	2	3	1	0	4	1	12	5	OE	G	8	15
	Philippe	3	2	3	0	3	1	3	2	3	2	15	6	CM	G	5	14
E (2)	Daniel	4	3	/	/	4	2	4	0	4	2	16/16	7/16	OE	G	0/16	9/16
	Gerard	/	/	4	2	1	2	2	2	4	2	11/16	8/16	OE	G	5/16	8/16
	Total pourcentages	49/84 58%	34/84 40%	70/92 76%	47/92 51%	65/96 68%	62/96 64%	68/96 71%	29/96 30%		42/84 50%	324/456 71%	217/456 48%			132/456 29%	239/456 52%
		49% 83/168		63% 117/184		66%											

S : sans passage à la dizaine

A : avec passage à la dizaine

En : enseignant
CM : cadre moyen
OE : ouvrier-employé
CS : cadre supérieur
PL : profession libérale

NB : les élèves dont le nom est souligné sont des élèves "composant les transformations."

- annexe 7 -

Prénom : Mathématique Date :

		POSITION DEPART	ORDRES	POSITION ARRIVEE		
A	Aude	138	Av 129 - Rec 131			
	Elsa	130	Av 145 - Rec 132			
	Valérie	155	Av 33 - Rec 51			
	François	154	Av 144 - Rec 133			
B	Thomas	112	Av 51 - Rec 20			
	Fabrice	129	Av 150 - Rec 165			
	Virginie	134	Av 180 - Rec 180			
	Mathieu	141	Av 145 - Rec 155			
C	Christine	109	Av 164 - Rec 135			
	Gwénaelle	137	Av 148 - Rec 150			
	Eric	128	Av 136 - Rec 128			
	Agnès	146	Av 108 - Rec 118			
D	J. Rémi	151	Av 38 - Rec 50			
	Daniel	122	Av 118 - Rec 110			
	Charlotte	140	Av 39 - Rec 40			
	Vincent	150	Av 115 - Rec 130			
E	Julien	143	Av 77 - Rec 90			
	Guillaume	117	Av 20 - Rec 5			
	Sandra	127	Av 132 - Rec 137			
	Philippe	159	Av 40 - Rec 60			
F	Nicolas	115	Av 115 - Rec 100			
	Gérard	135	Av 135 - Rec 135			
	Patrick	143	Av 75 - Rec 85			
	Grégory	148	Av 175 - Rec 190			

TITRE :

Calcul mental, calcul rapide

AUTEUR (S) :

Butlen Denis
Pezard Monique

RESUME :

Ce fascicule relate une expérience de 2 ans menée dans des classes de l'école élémentaire (du CP au CM2) sur le calcul mental et sur la résolution de problèmes multiplicatifs.
Les activités de calcul mental portent sur :

- compter, décompter , ...
- activités additives : jeu de l'autobus, complément à 10, à 100, additions mentales, ...
- activités multiplicatives : décompositions multiplicatives d'un nombre, calcul mental de produits, ...

Les activités portant sur la résolution de problèmes multiplicatifs traitent de la question de la taille des nombres intervenant dans les énoncés, de leur rôle dans l'apprentissage.

MOTS CLES :

Élémentaire-premier cycle-didactique-formation-maîtres-addition-calcul mental-calcul numérique-combinatoire-dénombrement-entier-multiplication-nombre-numération-opération-problème-soustraction

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Novembre 1989
ISBN : 2-86612-061-2