

**QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL
SUR
LES DIFFERENTIELLES**

M.ARTIGUE, J.MENIGAUX, L.VIENNOT

**PUBLIC:
Enseignants de
mathématiques et de physique
de l'enseignement supérieur**

**ANNEXE: mise au point théorique rédigée par
D.ALIBERT et M.ARTIGUE**

DIFFUSE PAR L'I.R.E.M. ET LE L.D.P.E.S.

UNIVERSITE PARIS 7

**QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL
SUR
LES DIFFERENTIELLES**

M.ARTIGUE,J.MENIGAUX,L.VIENNOT

PUBLIC:

**Enseignants de
mathématiques et de physique
de l'enseignement supérieur**

**ANNEXE: mise au point théorique rédigée par
D.ALIBERT et M.ARTIGUE**

DIFFUSE PAR L'I.R.E.M. ET LE L.D.P.E.S.

Ce fascicule est issu d'une recherche pluridisciplinaire en didactique, mène dans le cadre du G.R.E.C.O. DIDACTIQUE ET ACQUISITION DES CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES, et à laquelle ont participé également:

M.Hallez	(I.R.E.M., Paris 7)
J.M.Courdille	(L.D.P.E.S., Paris 7)
D.Grenier	
M.Legrand	
F.Richard	(Equipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble I)

QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL SUR LES DIFFÉRENTIELLES

Les questionnaires qui suivent ont été construits pour faire apparaître clairement certaines difficultés ou simplement certains aspects des différentielles peu mis en lumière par les exercices les plus habituellement proposés.

Les questionnaires prennent selon les cas la forme d'une question d'apparence plutôt mathématique, ou plutôt physique. Or précisément l'un des aspects des différentielles visés ici est d'être un objet à usage interdisciplinaire. La plupart de ces questions peuvent donc se révéler profitables dans le cadre d'une discipline comme de l'autre, et a fortiori dans un enseignement explicitement interdisciplinaire.

Les questions sont regroupées en fonction des aspects sur lesquels elles attirent principalement l'attention.

Pour chaque rubrique, le lecteur trouvera une courte introduction suivie de questionnaires accompagnés le plus souvent d'un "corrigé" et des réponses d'étudiants les plus fréquemment observées.

Pour ne pas alourdir exagérément introductions et corrigés, on donne en annexe un bref récapitulatif sur définition, propriétés et usages des différentielles.

Les différentes rubriques, qui, bien sûr, s'imbriquent mutuellement, sont les suivantes:

- I Les différentielles, pour quoi faire ?
- II Différentielles et calculs d'incertitude
- III Exactitude des calculs, rigueur des démonstrations
- IV Aspect fonctionnel des différentielles

Que le lecteur ne soit pas surpris de trouver, proposés à l'analyse des étudiants, des textes formulés de façon incorrecte, imprécise ou abrégée: ces textes sont issus du matériel **usuel** de l'enseignement. Il nous a paru important de soumettre précisément **ce type de texte** à une analyse rigoureuse.

I Les différentielles, pour quoi faire?

L'annexe de ce fascicule aborde relativement en détail cette question. Rappelons ici l'essentiel.

Les deux registres essentiels d'utilisation des différentielles sont :

- a) le calcul approché
- b) la mise en équation de problème par procédures intégrales et différentielles.

Pour ces deux registres, il s'agit de pallier une non linéarité des phénomènes étudiés.

* Le registre du calcul approché comprend l'estimation de l'accroissement d'une fonction au voisinage d'une valeur connue, plus largement l'étude locale de courbes et de surfaces.

* Le second registre, celui de la mise en équation de problèmes concernant des phénomènes non linéaires mène, lui, à des résultats de type global : calcul de grandeurs par procédure d'intégration, mise à jour de dépendances fonctionnelles valables sur le domaine.

En revanche les critères de légitimité des procédures peuvent, eux, être soit de type global (voir en annexe "le point de vue intégral") soit de type local, variationnel (voir en annexe "le point de vue différentiel").

Deux questionnaires q1 et q1', l'un proposé dans le cadre d'un enseignement de 1er cycle universitaire de physique, l'autre à des étudiants de licence de mathématiques, explorent la question de l'utilité des différentielles de manière très large, et sous forme déclarative. Les suivants mettent les étudiants en situation de réagir sur des cas spécifiques.

QUESTIONNAIRE Q1

Vous avez fait de la physique jusqu'au baccalauréat sans différentielles. Elles vous ont été introduites au premier semestre de votre première année universitaire. Pouvez-vous caractériser les situations où elles sont nécessaires ? Donnez, si possible, des exemples.

QUESTIONNAIRE Q 1'

Si vous deviez expliquer à un étudiant de première année ce qu'est une différentielle, et à quoi cela sert, (ces cinq derniers mots ne figuraient pas sur le texte initial)

a) quelle définition donneriez-vous ?

(Cette question a) ne relève pas à proprement parler du sous thème "les différentielles, pour quoi faire?" et ne sera donc pas commentée ici)

b) sur quels exemples vous appuieriez-vous ?

c) sur quels points fondamentaux insisteriez-vous ?

Réponse attendue

Celle-ci reprend les éléments de l'introduction de ce sous thème (p 2) eux-mêmes détaillés en annexe.

On attend une insistance sur l'aspect non linéaire des problèmes traités à l'aide des différentielles, ainsi que, en mathématique plus spécialement, sur l'étude locale des fonctions.

Réponses fréquemment observées

* Pour le questionnaire Q1, donné dans le cadre du cours de Physique, voici un aperçu des résultats chez des étudiants de Mathématiques Spéciales (N= 44).

Les étudiants donnent avant tout des exemples	80 %
dont surtout la thermodynamique	59 %
Plus rarement ils <u>caractérisent</u> les situations :	
problèmes à plusieurs variables	30 %
pour traiter les petites variations, les variations élémentaires	30 %
les problèmes non linéaires, quelque chose de non constant, non homogène, non uniforme	9 %
les problèmes locaux	11 %
les milieux continus	9 %
Pour connaître le sens de variation	2 %
Idée d'approximation (linéaire tangente)	0 %

Pour le questionnaire Q1', les résultats obtenus chez 85 étudiants de licence de mathématiques sont :

*pour les "points essentiels" évoqués en c) :

- 33 liens avec les notions voisines: continuité, différentiabilité
dérivabilité, existence de dérivées partielles
- 11 calcul des dérivées partielles et matrices jacobiniennes
- 10 rôle de l'approximation locale
- 5 propriété d'être une approximation locale
- 2 difficultés de notation

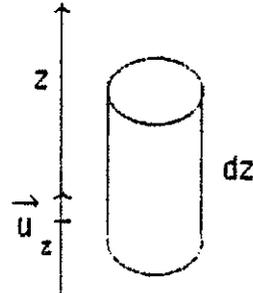
*pour les "exemples" évoqués en b) :

- 25 exemples simples de fonctions à une et plusieurs variables.
- 3 calculs de dérivées, changement de variables.
- 3 exemples "pathologiques".
- 1 situation d'extremum
- 5 géométrie différentielle, approximation.
- 4 allusions à des situations physiques non spécifiées.

QUESTIONNAIRE Q 2

Lire attentivement le calcul suivant, qui vise à établir une expression de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude z .

Considérons un élément de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz . Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :



Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :

Force due à la pression sur la face inférieure : $S \cdot p(z) \cdot \vec{u}_z$

Force due à la pression sur la face supérieure : $S \cdot p(z+dz) \cdot (-\vec{u}_z)$

Poids du volume de gaz : $\rho \cdot g \cdot S \cdot dz \cdot (-\vec{u}_z)$

L'équilibre des forces s'exprime ainsi:

$$S \cdot p(z) \cdot \vec{u}_z - S \cdot p(z+dz) \cdot (-\vec{u}_z) - \rho \cdot g \cdot S \cdot dz \cdot (-\vec{u}_z) = 0$$

ou encore:

$$p(z+dz) - p(z) = -\rho \cdot g \cdot dz \text{ soit:}$$

$$\boxed{dp = -\rho \cdot g \cdot dz}$$

QUESTIONS:

Dans ce calcul, la hauteur dz de l'échantillon est supposée petite :

Cela est-il nécessaire et si oui pourquoi ?

Doit-on aussi considérer que la surface de base est petite ? Justifiez votre réponse.

La relation (1) est-elle toujours valable s'il s'agit d'établir une expression de la pression non pas atmosphérique mais hydrostatique (il ne s'agit plus de gaz mais d'eau) ?

Si oui, est-il encore nécessaire pour l'établir de considérer que dz est petit ?

Réponse attendue :

*Il est nécessaire de faire appel à une procédure différentielle car la relation entre les variations respectives Δp et Δz de la pression et de l'altitude n'est pas linéaire : en effet la masse volumique ρ du gaz n'est pas indépendante de z (voir commentaires du questionnaire Q1).

Supposer "dz petite" est une manière d'écrire facilement la relation différentielle en utilisant sa propriété d'approximation linéaire.

En fait, l'établissement de cette relation peut se faire de manière rigoureuse, par exemple par encadrement et passage à la limite (voir questionnaire 10). Par ailleurs, la relation différentielle garde tout son sens que dz soit petit ou grand.

* La surface de base du cylindre considéré dans le bilan de force, S , ne doit pas être particulièrement être "considérée comme petite". En effet, tous les termes de force du bilan en dépendent linéairement, à z et dz donnés. Autre façon de dire la même chose : la masse volumique ρ et la pression p ne dépendent que de z et non de la position dans un plan horizontal donné.

* S'il s'agit d'eau maintenant, la relation entre Δp et Δz est linéaire, car la masse volumique de l'eau est, cette fois, indépendante de z . Inutile, donc, de "découper en tranches", et l'on peut écrire, quelque soit Δz :

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta z$$

Réponses fréquemment observées

Le tableau ci-dessous résume les résultats d'enquête auprès d'étudiants de première année universitaire:

Résumé de la question	Réponse	Taux de réponse		
"dz petite": est-ce nécessaire?	oui	83%	93%	83%
Si oui, pourquoi?	ρ dépend de z	70%	20%	30%
	p dépend de z	0%	5%	10%
Est-ce encore nécessaire s'il s'agit d'eau?	non	0%	15%	15%
		N=18	N=26	N=49

Il ressort de ceci que les étudiants reconnaissent une situation -la colonne d'air - où l'on doit mettre en jeu une procédure différentielle, sans pour autant être capable d'explicitier le critère d'utilité correspondant. Il est

possible que certains de ceux qui répondent "parce que p dépend de z " aient compris qu'alors p dépend aussi de z mais le petit nombre de ceux qui mettent ce critère en jeu dans le cas de l'eau est frappant. On note, en revanche, une délectation générale dans les termes "tranches", "élémentaires".

La grande majorité des étudiants voit très bien qu'il n'est pas nécessaire que " S " soit petite" Les principales justifications sont:

" S n'intervient pas dans la formule"

" S est constant",

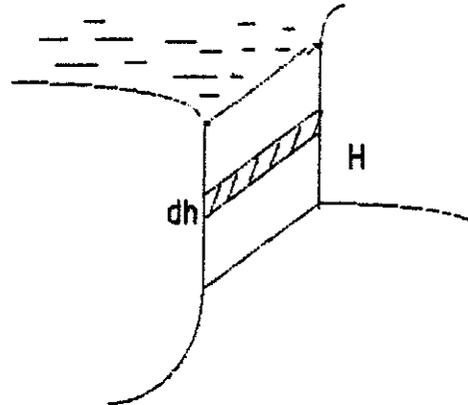
" z est constant sur S "

QUESTIONNAIRE Q3

LIRE ATTENTIVEMENT le texte d'exercice et la solution suivante:

TEXTE Soit un barrage rectangulaire de largeur L et de profondeur H . On veut calculer la force résultante exercée sur le barrage.

SOLUTION Soit ρ la masse volumique de l'eau
 p la pression exercée par l'eau sur le barrage.



On découpe la surface du barrage en petites bandes horizontales de profondeur h , de largeur dh , de surface $dS = L \cdot dh$.

Pour chacune d'elles : $p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$ p_0 : pression atmosphérique,
 La force exercée a pour module $dF = (p - p_0) dS = \rho \cdot g \cdot h \cdot L \cdot dh$

Donc la force totale exercée sur le barrage est:

$$F = \int_0^H \rho \cdot g \cdot L \cdot h \cdot dh = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{H^2}{2}$$

* **REPONDRE ENSUITE** aux questions suivantes :

* Pourquoi éprouve-t-on le besoin de découper la surface du barrage en petite bandes horizontales ?

* L'expression obtenue pour la force est-elle exacte ou approchée ? Justifiez votre réponse.

Réponse attendue

* Conformément à ce qui a été détaillé plus haut (Q1 et 2), on attend une réponse centrée sur la non linéarité de la relation entre force exercée sur une portion du barrage et surface de cette portion, non linéarité due au fait que la pression sur le barrage dépend de la profondeur.

* On attend également que la procédure d'intégration elle-même ne soit associée à aucune approximation

Il faut en effet distinguer deux niveaux d'approximation:

- l'un est lié à une éventuelle simplification de la modélisation : il s'agit ici de l'assimilation du barrage à un plan vertical carré, et de l'assimilation de ρ et g à des facteurs indépendants de z

- l'autre pourrait être lié à la procédure différentielle utilisée pour le calcul de l'intégrale : à ce niveau, aucune approximation ne s'introduit dans le résultat.

Réponses fréquemment observées.

Parmi des étudiants de première année universitaire ($N = 48$), et pour justifier le découpage en "petites bandes horizontales"

50 % invoquent la dépendance de la pression vis à vis de z (réponse correcte)

20 % invoquent la dépendance de la force vis à vis de z (ou du point M), ce qui constitue une erreur analogue à celle des étudiants qui, à propos de la colonne d'air, disent qu'il faut la découper en tranches car la pression dépend de z sans avoir pour autant compris que cela n'importait que via la dépendance de la masse volumique ρ vis à vis de z .

Le reste des étudiants se contente, dans sa grande majorité, d'invoquer les termes rituels "terme différentiel", "quantité infinitésimale".....

40 % environ des étudiants considèrent que la procédure d'intégration conduit à un résultat exact tandis qu'un tiers pensent, plus ou moins explicitement, qu'il s'agit d'une procédure approchée.

"approchée, car cela dépend du nombre de portions"

"approchée, car p est mal calculée"

"exacte si on prend la valeur limite de l'intégrale"

On ne voit pas dans ces réponses une distinction claire entre la valeur de l'intégrale et celle qu'on obtient éventuellement par calcul numérique approché.

Il est probable qu'il y a, précisément, adhérence entre ces deux notions dans l'esprit des étudiants.

Aucun, par ailleurs, ne fait allusion à l'existence des deux niveaux d'approximation (éventuelle) dégagés ci-dessus : celui lié à la modélisation et celui lié au calcul.

Dans ces questions, on essaie de défavoriser la procédure algorithmique usuelle (f est différentiable en M parce que C^1 au voisinage de M) et de favoriser au contraire la prise en compte de l'aspect approximation linéaire : f est donnée sous forme de développement limité à l'origine, le reste est relativement complexe et comporte une racine qui s'annule à l'origine.

QUESTIONNAIRE Q 4

* Montrer que la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par
 $f(x,y) = x + 3y + x^2 (\sqrt{|\sin x|} + y^3)$
 est différentiable en $(0,0)$ et préciser sa différentielle en ce point.

OU BIEN

* La fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :
 $f(x,y) = 2x + 4y + y^3 (\sqrt{1-\cos x} + x^2)$
 est-elle différentiable au point $(0,0)$? Justifiez votre réponse.

Réponse attendue :

Elle est calquée, pour ces deux questions du même type, sur le "corrigé" suivant, établi pour la seconde de ces questions :

$$f(x,y) = 2x + 4y + y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$$

L'expression de f est formée à l'évidence d'une partie linéaire $2x + 4y$ et d'une partie $y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$ qui semble être d'ordre supérieur. Pour montrer que f est différentiable en $(0,0)$, il suffit donc de vérifier que $y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$ est bien de la forme $\| (x,y) \| \cdot \varepsilon(x,y)$ avec $\lim_{\varepsilon(x,y) \rightarrow 0} \varepsilon(x,y) = 0$, $\| (x,y) \|$ désignant l'une quelconque des normes équivalentes sur \mathbb{R}^2 . On peut par exemple utiliser la "norme du sup" définie par :

$$\| (x,y) \| = \sup (|x|, |y|)$$

et on a

$$\begin{aligned} |y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)| &\leq \| (x,y) \|^3 \cdot [\sqrt{2} + \| (x,y) \|^2] \\ &\leq \| (x,y) \| \cdot [\| (x,y) \|^2 \cdot (\sqrt{2} + \| (x,y) \|^2)] \end{aligned}$$

L'expression $y^3(\sqrt{1-\cos x} + x^2)$ est donc bien de la forme $\| (x,y) \| \cdot \varepsilon(x,y)$ avec $\lim_{\varepsilon(x,y) \rightarrow 0} \varepsilon(x,y) = 0$ puisqu'elle est majorée en valeur absolue par une expression de ce type.

La fonction est différentiable en $(0,0)$ et sa différentielle en ce point est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$(h,k) \rightarrow 2h + 4k$$

Ce qui peut également s'écrire :

$$df_{(0,0)} = 2 dx + 4 dy.$$

Remarque 1 : on peut attendre des étudiants que, face à un exercice de ce type, ils se précipitent vers l'algorithme usuel en termes de dérivées partielles. Notons que, dans ce cas, son usage pose problème. En effet, à cause du radical qui s'annule pour $x = 0$, l'expression algébrique obtenue pour

la dérivée partielle $\frac{\delta f}{\delta x}$ ne sera valable que pour $(x,y) \neq (0,0)$ et la

démonstration de l'existence et de la continuité de cette dérivée partielle en $(0,0)$, qui fait partie de l'algorithme usuel de preuve de la différentiabilité (f est différentiable si f est C^1) passe par le calcul direct

de la dérivée partielle : $\frac{\delta f}{\delta x}(0,0)$:

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

ou l'utilisation de théorèmes liant limite et continuité, plus sophistiqués.

Remarque 2:

Nous avons détaillé ici la majoration du reste. Dans le cas d'étudiants avancés, une preuve du type :

$$2x + 4y \text{ est linéaire et } y^3 (\sqrt{1 - \cos x} + x^2) \text{ est de la forme } \varepsilon(x,y) \text{ avec } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$$

serait tout à fait admise.

Réponses fréquemment observées.

Parmi 77 étudiants de licence de mathématiques, les principaux résultats sont les suivantes :

- 46 Calculs de dérivées partielles, pour argumentation (rarement correcte) sur la base de ces dérivées partielles.
- 11 Reconnaissance d'un développement limité.
- 16 Expressions "quotient" ou "ligne" de la différentiabilité avec un reste (dont 7 expressions "quotient" erronées et recalcul des dérivées partielles)
- 2 Fonction différentiable car somme, ou produit, ou composée de fonctions différentiables.
- 2 Séparation de la partie polynomiale puis traitement séparé du radical.

De plus, même quand les étudiants reconnaissent un développement limité, ils ont le plus grand mal à prouver que le reste est bien un reste. Les rares à y parvenir sont ceux qui transforment l'expression en passant en coordonnées polaires, mais aucun ne mène directement des considérations sur le degré des différents termes.

Dans ce questionnaire, il s'agit d'amener les étudiants, sans qu'il y ait parasitage possible par une pratique algorithmique, à réfléchir sur les renseignements effectivement fournis par les écritures d'approximation locale.

Il s'agit en particulier de les amener à rejeter les deux convictions erronées suivantes, très répandues :

- plus une approximation comporte de termes, meilleure elle est,
- les termes en " ϵ " sont toujours négligeables par rapport aux autres.

QUESTIONNAIRE Q 5

Ayant à déterminer des approximations d'une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} au voisinage du point $(0,0)$, des étudiants ont proposé les réponses suivantes :

- | | | |
|----|--|--|
| E1 | $f(x, y) = 2x + 3y + \epsilon(x,y)$ | avec $\epsilon(x,y) \rightarrow 0$ quand $(x,y) \rightarrow 0$ |
| E2 | $f(x, y) = 5x + 4y + xy + (x^2 + y^2) \epsilon(x,y)$ | " |
| E3 | $f(x, y) = 2x + 3y + 2xy + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \epsilon(x,y)$ | " |
| E4 | $f(x, y) = 2x + 3y + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \epsilon(x,y)$ | " |
| E5 | $f(x, y) = 5x + 4y + \epsilon(x,y)$ | " |
| E6 | $f(x, y) = 5x + 4y + (x^2 + y^2) \epsilon(x,y)$ | " |
| E7 | $f(x, y) = 5x + 4y + (x^2 + y^2) + \epsilon(x,y)$ | " |
| E8 | $f(x, y) = 2x + 3y + xy + (x^2 + y^2) \epsilon(x,y)$ | " |

Questions :

Quelles sont parmi ces 8 approximations, celles qui sont compatibles entre elles ?

Dans chaque groupe de réponses compatibles, pouvez-vous classer les approximations de la moins précise à la plus précise ?

Réponse attendue:

Les 8 réponses proposées se classent du point de vue de la compatibilité en 3 groupes avec pour chacun d'eux le préordre suivant (par précision croissante) :

$$\{E_1 \ E_5 \ E_7\} < \{E_3 \ E_4\} < E_8$$

$$\{E_1 \ E_5 \ E_7\} < E_6$$

$$\{E_1 \ E_5 \ E_7\} < E_2$$

En effet :

-E1, E5, E7, sont des approximations d'ordre 0 de f. Elles assurent simplement que la fonction f a une limite nulle à l'origine.

-E3, E4, sont des approximations d'ordre 1 de f, compatibles. Le terme xy n'apporte aucune précision supplémentaire puisque l'incertitude apportée par le terme $\sqrt{x^2+y^2}.e(x,y)$ n'a pas de raison d'être d'ordre supérieur à celui de xy , a priori.

-E6 et E2 sont aussi des approximations d'ordre 1, vu l'unicité de la différentielle, elles sont incompatibles avec E3, E4, et E8. Elle sont aussi incompatibles entre elles puisque ce sont deux approximations au second ordre qui diffèrent d'un terme d'ordre 2.

Dans ces questions, les deux versions permettent deux présentations l'une en terme de différentielle, l'autre en terme de développement limité ; elles permettent aussi de comparer les erreurs suivant que le développement est effectué ou non au voisinage de l'origine.

QUESTIONNAIRE Q 6

*Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x, y) = \exp(x^2+y) \cos(xy)$$

-Déterminer une approximation au premier ordre de f au voisinage du point $(0,0)$ et en donner une interprétation géométrique.

-En déduire une valeur approchée de $f(10^{-2}, 10^{-2})$

OU

*Soit la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par:

$$f(x, y) = \cos(xy). \exp(y^2+x)$$

-Déterminer la différentielle de f en $(1,0)$ et en donner une interprétation géométrique.

-En déduire une valeur approchée de $f(1.001, 0.01)$.

Réponse attendue

Pour ces deux versions, la réponse attendue est à calquer sur le "corrigé" suivant, établi pour le deuxième exercice :

*La fonction f est de classe C^∞ donc différentiable au point $(1,0)$. Pour calculer la différentielle en ce point, le plus simple est de calculer les dérivées partielles.

$$\text{On obtient } \frac{\delta f}{\delta x}(1, 0) = e \quad \frac{\delta f}{\delta y}(1, 0) = 0$$

La différentielle est donc en ce point l'application
 $(h, k) \rightarrow eh$

ou $df = e dx$

* L'interprétation géométrique attendue est celle du plan tangent. A la fonction f est associée une surface S de \mathbb{R}^3 d'équation

$$z = \cos(xy). \exp(y^2+x)$$

Cette surface admet un plan tangent au point $(1,0,e)$ et ce plan tangent a pour équation :

$$z - e = (x-1)e \quad \text{soit } z = xe$$

Ce plan contient l'axe Oy .

* La connaissance de la différentielle de la fonction f au point $(1,0)$ fournit une approximation de f au voisinage de ce point puisque :

$$f(x, y) = f(1, 0) + e(x-1) + \|(x-1, y)\| \cdot \varepsilon(x, y)$$

$$\text{avec } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \varepsilon(x,y) = 0$$

On a donc au voisinage de $(1,0)$, une approximation au premier ordre qui est : ex .

Pour $(1.001, 0.01)$, on obtient $1.001 \cdot e$.

Remarque 1 : il est bien clair que n'importe quelle calculette fournit elle-aussi une approximation, sans qu'il soit besoin de déterminer la différentielle de la fonction.

Remarque 2 : dans la première version du test, on étudie une fonction au voisinage de $(0,0)$. Pour calculer sa différentielle, on peut tout aussi bien multiplier les développements limités à l'ordre 1 du cosinus et de l'exponentielle que calculer les dérivées partielles :

$$\cos(xy) = 1 + 0(x, y)$$

$$\exp(x^2 \cdot y) = 1 + y + 0(x, y)$$

$$\text{donc } f(x, y) = 1 + y + 0(x, y)$$

Réponses fréquemment observées.

Ce questionnaire a été abordé par 74 étudiants de licence de mathématiques qui, pour la plupart, calculent les dérivées partielles des fonctions considérées.

La partie interprétation géométrique, elle, n'est abordée que par 31 étudiants.

- 8 interprètent correctement la différentielle en référence au plan tangent à la surface associée à la fonction donnée dans \mathbb{R}^3 .
- 10 ne parviennent pas à se détacher du registre interprétatif en dimension 1. (courbe et tangente).
- 8 ne donnent pas réellement une interprétation géométrique ("f est voisin de, ou égal à, 1 + y au voisinage de (0,0) "ou" c'est le théorème des fonctions implicites")
- 1 interprète en point selle
- 1 interprète en quadrique
- 3 fournissent des interprétations incompréhensibles.

On est donc frappé par le petit nombre de ceux qui abordent la question de l'interprétation géométrique et, parmi eux, de ceux qui parlent de plan tangent. De façon générale, les différentielles sont très faiblement appuyées, chez les étudiants, par une vision géométrique.

Ce questionnaire renvoie sous forme géométrique au théorème des fonctions implicites (voir l'annexe)

QUESTIONNAIRE Q 7

On considère dans l'espace les deux surfaces S_1 et S_2 d'équations respectives :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 + 2z^2 + y^2 = 3$$

Ces deux surfaces passent par le point $(1,1,1)$.

QUESTIONS:

1) Que pensez-vous de l'affirmation suivante ? (justifiez votre réponse)
"Au voisinage du point $(1,1,1)$, l'intersection de S_1 et S_2 est une courbe paramétrable en x , en y ou en z ."

2) Y-a-t-il pour vous un rapport entre la question posée et le théorème des fonctions implicites ? Si oui lequel ?

Réponse attendue :

Les surfaces S_1 et S_2 sont des ellipsoïdes. Elles se coupent donc suivant une courbe. En $(1,1,1)$, S_1 et S_2 ont des plans tangents dont l'équation est obtenue par linearisation (ou différentiation) des équations des ellipsoïdes.

Pour S_1 , c'est le plan d'équation :

$$2(x-1) + 4(y-1) + 2(z-1) = 0 \quad \text{soit} \quad 2x + 4y + 2z = 8$$

Pour S_2 , c'est le plan d'équation :

$$4(z-1) + 2(y-1) = 0 \quad \text{soit} \quad 2y + 4z = 6$$

Ces deux plans sont distincts et se coupent suivant une droite tangente en $(1,1,1)$ à la courbe d'intersection.

Cette tangente peut se paramétrer en x , y ou z . Il en est donc de même, localement, de la courbe d'intersection.

On utilise là, dans sa version géométrique, le théorème des fonctions implicites. Si on désigne par F l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$(x,y,z) \rightarrow (x^2 + 2y^2 + z^2, (x-1)^2 + 2z^2 + y^2) ,$$

cette application est C^1 sur \mathbb{R}^3 . Sa ligne de niveau $(4,3)$ passe par le point $(1,1,1)$

La matrice jacobienne en $(1,1,1)$ est égale à :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 2 et tous les déterminants d'ordre 2 sont non nuls.

Il s'ensuit que l'équation $F(x,y,z) = (4,3)$ se résout localement en x , y ou z au choix, fournissant l'équation d'une courbe qui correspond à l'intersection des 2 surfaces.

En fait le système linéaire correspondant aux équations des deux plans tangents :

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z &= 8 \\ 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

s'écrit
$$J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et le fait qu'on puisse le résoudre en x , y , ou z signifie que les déterminants d'ordre 2 de J sont non nuls.

II Différentielles et calculs d'incertitude

Lorsqu'on effectue le calcul d'une grandeur à partir d'autres imparfaitement évaluées, on obtient pour cette grandeur une valeur entachée d'erreur. L'évaluation de l'erreur maximum que l'on fait, autrement dit de l'incertitude, se fonde classiquement sur le formalisme différentiel (voir annexe). Les questionnaires qui suivent conduisent à critiquer un type de justification des procédures de calcul qui est à la fois très courant et erroné.

QUESTIONNAIRE 08

· **LISEZ ATTENTIVEMENT** le texte ci dessous, extrait de "Calcul différentiel et intégral" N. Piskounov. Ed. de Moscou. :

§ 9. Emploi de la différentielle pour évaluer l'erreur commise pendant les calculs numériques.

Soit

$$u = f(x, y, z, \dots, t)$$

une fonction des variables x, y, z, \dots, t . Supposons que l'évaluation des valeurs numériques des quantités x, y, z, \dots, t soit faite avec une certaine erreur (respectivement $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ pres). La valeur de u sera également déterminée avec une certaine erreur

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t)$$

due à l'erreur d'évaluation des variables indépendantes. Proposons-nous d'évaluer l'erreur Δu , si l'on suppose connues les erreurs $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$.

Les valeurs absolues des $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$, étant supposées suffisamment petites, on peut remplacer l'accroissement total de la fonction par la différentielle totale ; on obtient alors l'égalité approchée.:

$$\Delta u \approx \frac{\delta f}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \Delta y + \dots + \frac{\delta f}{\delta t} \Delta t$$

Les dérivées partielles et les erreurs relatives aux variables indépendantes sont soit positives, soit négatives. Remplaçons-les par leurs valeurs absolues ; on trouve alors l'inégalité.:

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\delta f}{\delta x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\delta f}{\delta y} \right| |\Delta y| + \dots + \left| \frac{\delta f}{\delta t} \right| |\Delta t|$$

Si l'on désigne par $|\Delta^*x|, |\Delta^*y|, \dots, |\Delta^*t|$ les erreurs absolues maximales des variables correspondantes (les bornes des valeurs absolues des erreurs), on peut évidemment admettre que :

$$|\Delta^*u| = \left| \frac{\delta f}{\delta x} \right| |\Delta^*x| + \left| \frac{\delta f}{\delta y} \right| |\Delta^*y| + \dots + \left| \frac{\delta f}{\delta t} \right| |\Delta^*t|$$

Exemples.

1) soit $u = x + y + z$, alors

$$|\Delta u| = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$$

2) soit $u = x - y$, alors

$$|\Delta u| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

3) soit $u = xy$, alors

$$|\Delta u| = x|\Delta y| + y|\Delta x|$$

4) soit $u = \frac{x}{y}$, alors

$$|\Delta u| = \left| \frac{1}{y} \right| |\Delta x| + \left| \frac{x}{y^2} \right| |\Delta y| = \frac{y|\Delta x| + x|\Delta y|}{y^2}$$

* **REPONDEZ ENSUITE** à cette question :

La démonstration ci dessus contient une erreur de raisonnement. Situez la et illustrez la sur ceux des exemples donnes dans le texte qui vous semblent convenir.

Réponse attendue

L'évaluation de l'accroissement de la valeur prise par u se fait, dans le formalisme différentiel, de la façon suivante

$$\Delta u = \frac{\delta f}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \Delta y + \frac{\delta f}{\delta t} \Delta z + \text{||}(\Delta x, \Delta y)\text{||} \text{||} \epsilon(\Delta x, \Delta y)$$

|| $(\Delta x, \Delta y)$ || désignant l'une quelconque des normes équivalentes sur \mathbb{R}^2

En négligeant dans l'accroissement de la fonction les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport aux accroissements des variables, on obtient l'égalité approchée :

$$\Delta u \approx \frac{\delta f}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \Delta y + \frac{\delta f}{\delta t} \Delta z$$

qui équivaut à remplacer l'accroissement par la différentielle. Il serait en revanche faux d'écrire l'inégalité :

$$\Delta u \leq \frac{\delta f}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta f}{\delta y} \Delta y + \frac{\delta f}{\delta t} \Delta z$$

Le fait de remplacer toutes ces quantités par leurs valeurs absolues n'apporte aucune légitimité à cette inégalité (il suffit d'imaginer un cas où elles sont toutes positives pour s'en convaincre).

Les deux premiers exemples cités concernent des fonctions linéaires : les différentielles n'ont pas lieu d'y être impliquées, (ou, si l'on préfère, le reste est alors nul)

Le troisième exemple, illustré à l'aide de valeurs positives de x , Δx , y , Δy , met bien l'erreur en évidence :

$$\begin{aligned} x &= 3, \quad y = 5, \quad \Delta x = 0,1, \quad \Delta y = 0,5, \\ \Delta(x,y) &= (3,1 \cdot 5,5) - (3 \cdot 5) = 2,05 \\ x\Delta y + y\Delta x &= 3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,1 = 2 \end{aligned}$$

on a donc ici

$$\Delta(x,y) > x\Delta y + y\Delta x$$

On peut fabriquer un contre exemple analogue à l'aide du quatrième exemple du texte.

QUESTIONNAIRE O 9

Pouvez-vous, en utilisant les différentielles, justifier les formules suivantes bien connues du calcul d'incertitudes :

$$\frac{\Delta uv}{uv} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{\Delta u/v}{u/v} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

Réponse attendue :

Non, pour la raison détaillée à propos du questionnaire précédent. Pour une réponse plus nuancée, se référer à l'annexe;

Réponse fréquemment observée :

99,9 % des enseignants de physique proposent une justification analogue à celle du texte de Piskounov qui figure sur le questionnaire précédent.

Chez les étudiants, les cas d'écritures directes en Δ par dérivation, sans aucune allusion à un reste, sont fréquents. Il y a extrêmement peu de prise en compte des valeurs absolues et majorations. Au mieux dit-on, pour modifier le signe - qui intervient dans le quotient, que "les incertitudes s'ajoutent".

III Exactitude des calculs, **Rigueur des démonstrations**

Associee a la notion d'approximation, la notion de différentielle est parfois aussi, indûment, associée à celle de "rigueur approximative". Les questionnaires qui suivent portent sur la rigueur des démonstrations utilisant des différentielles et menant soit à l'expression intégrale d'une grandeur (q10 à q13), soit à une équation différentielle (q 14 et 15). On trouvera en annexe une mise au point sur les démarches à adopter pour justifier rigoureusement les procédures utilisées dans ces types de problème. Les "réponses attendues" correspondant a chacun de ces questionnaires illustrent, à chaque fois une ou deux démarches rigoureuses possibles, mais sans faire le tour complet de la question.

QUESTIONNAIRE Q 10**LIRE LE TEXTE SUIVANT**

On se propose de calculer la volume d'une sphère de rayon R.

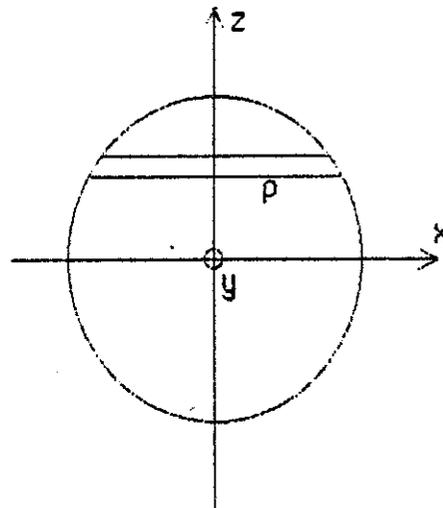
A cet effet on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles a un plan de symétrie de la sphère (plan xOy , cf schéma ci-joint) et d'épaisseur dz petite.

Le volume d'une tranche d'altitude z est :

$$dV = \pi \rho^2 dz = \pi(R^2 - z^2) dz$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2) dz$$

**QUESTIONS SUR CE TEXTE**

Pouvez-vous justifier plus rigoureusement ce calcul ?

Si oui, comment ?

Réponse attendue

* Une justification rigoureuse possible est du type : encadrement avec passage à la limite. Les étapes du raisonnement sont les suivantes :

Volume d'une tranche : ΔV

Hauteur d'une tranche : Δz

Encadrement $\quad \text{Min}[S(z)] \Delta z \leq \Delta V \leq \text{Max}[S(z)] \Delta z$

ou $\quad \text{Min}[S(z)] \leq \frac{\Delta V}{\Delta z} \leq \text{Max}[S(z)]$

ou

passage à la limite

+ $S(z)$ continue

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ S(z) & \leq & \frac{dV}{dz} \leq S(z) \end{array}$$

Donc $\frac{dV}{dz} = S(z)$ et $V = \int S(z) dz$

Remarque : Cette procédure d'encadrement avec passage à la limite n'est pas toujours possible. L'application en est ici tout à fait indiquée du fait qu'il s'agit d'un volume de révolution.

* Une justification moins détaillée mais tout à fait admissible, et en tout état de cause nécessaire en l'absence d'une autre, est que le terme négligé dans l'expression du volume d'une tranche est du deuxième ordre.

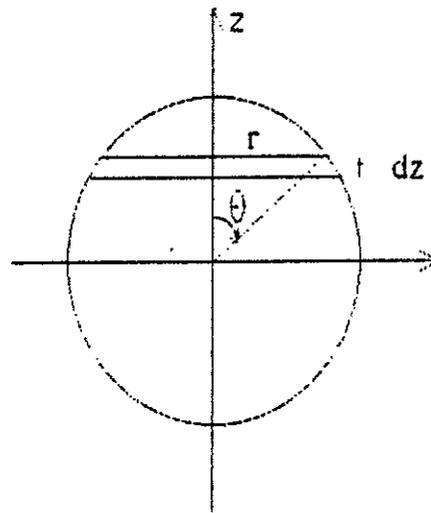
Réponse fréquemment observée

Cette question, posée parmi d'autres plus algorithmiques, est volontiers laissée de côté par les étudiants qui s'y sentent mal à l'aise. La plupart acceptent la démonstration telle quelle, en ajoutant quelques phrases incantatoires du type. "pourvu que dz soit aussi petit que possible".

On suggere fréquemment (30 % dans certains groupes de premier cycle universitaire) l'emploi de coordonnées cylindriques ou sphériques, sans plus de détail.

QUESTIONNAIRE Q 11

Pour calculer le volume d'une sphère de rayon r , on peut la découper en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (par exemple le plan xOy , comme sur le schéma ci-après) et d'épaisseur dz .



On assimile alors le volume dV d'une petite tranche d'altitude z à celui d'un cylindre de même épaisseur dz ayant pour section droite l'une des faces planes de la tranche de sphère considérée

$$dV = \pi R^2 dz = \pi(R^2 - z^2) dz$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Si on utilise la même méthode (qui consiste à assimiler tranche de sphère et cylindre) pour évaluer la surface de la sphère, on obtient, pour l'aire latérale d'une tranche élémentaire à l'altitude z :

$$dS = 2\pi r dz = 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} dz$$

donc pour l'aire totale :

$$S = 2\pi \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - z^2} dz = \int_0^{\pi} 2\pi R^2 \sin^2 \theta d\theta = \pi^2 R^2$$

Pouvez vous expliquer pourquoi la même méthode donne, dans le premier cas un résultat correct et dans le second cas un résultat faux ?

Ou encore :

QUESTIONNAIRE Q 12

I LIRE LA DEMONSTRATION SUIVANTE

On se propose de calculer la surface d'une sphere par integration. A cette fin on decoupe la sphere en tranches cylindriques infiniment petites dz. L'aire laterale d'une telle tranche est

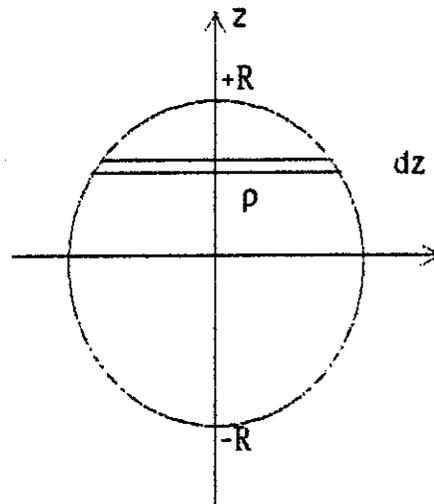
$$dS = 2\pi\rho dz = 2\pi\sqrt{(R^2-z^2)} dz$$

Donc la surface totale vaut:

$$S = \int_{-R}^{+R} 2\pi\sqrt{R^2-z^2} dz = \int_{-\pi}^0 -2\pi R^2 \sin^2\theta d\theta$$

$$S = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$S = \pi^2 R^2$$



II QUEL(S) REPROCHE(S) LUI FAITES-VOUS ?

Réponse attendue et diverses réflexions préalables.

L'élucidation semble plus simple, si on descend d'une dimension, en se plaçant dans le plan :

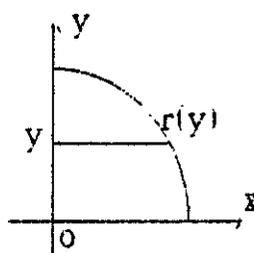
Alors sphère \rightarrow disque

volume \rightarrow aire

aire \rightarrow longueur

1°) on calcule l'aire du disque en le découpant en tranches et en approchant chaque tranche par un rectangle.

Considérons par exemple le quart de disque supérieur droit :



et la fonction définie sur le segment $[0,R]$ qui à y associe l'abscisse du point du quart de cercle d'ordonnée y : c'est en fait la fonction $y \rightarrow r(y)$ Cette fonction est continue donc intégrable et l'aire du quart de disque est égale

$$\int_0^R r(y) dy$$

Faire un découpage en tranches horizontales revient à approcher cette fonction par une fonction en escalier ϕ . Lorsque l'épaisseur des tranches tend vers zéro, les fonctions associées convergent uniformément vers r et, par la définition même de l'intégrale de Riemann, l'intégrale de ϕ , c'est à dire l'aire de l'empilement converge vers l'intégrale de f , c'est à dire l'aire du disque.

La longueur du quart de cercle s'obtient elle-aussi par une intégrale mais celle-ci fait intervenir non pas la fonction r mais sa dérivée r' :

$$L = \int_0^R \sqrt{1+r'^2(y)} dy$$

Et il est bien connu que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'entraîne pas de façon automatique celle de la suite des

derivées. Il s'ensuit qu'une méthode d'approximation qui marche pour l'aire ne marche pas nécessairement pour la longueur.

Ici, pour tout découpage, on obtient une longueur de R . alors que la longueur du quart de cercle est : $\frac{\pi}{2} R$

2°) On peut voir le problème sous un angle plus "différentiel" en cherchant comment on va pouvoir reconnaître localement une bonne approximation.

Considérons l'aire comme une fonction de y : $A(y_0)$ est l'aire de la portion de quart de disque correspondant à $0 \leq y \leq y_0$. Si l'aire $A(y+\Delta y) - A(y)$ de la tranche d'épaisseur Δy située à la hauteur y est approchée, en fonction de y , par une quantité $B(y)\Delta y$, cette approximation

est convenable (c'est à dire $A(R) = \int_0^R B(y)dy$) si c'est l'approximation au premier ordre de l'aire de la tranche c'est à dire si : $A(y+\Delta y) - A(y) = B(y)\Delta y + \Delta y \varepsilon(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

En effet, il ressort immédiatement de cette égalité que la fonction A est différentiable, de dérivée B et donc que, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :

$$A(y) = \int_0^y B(z)dz \quad \text{pour } y \in [0, R]$$

Dans le cas qui nous intéresse ici :

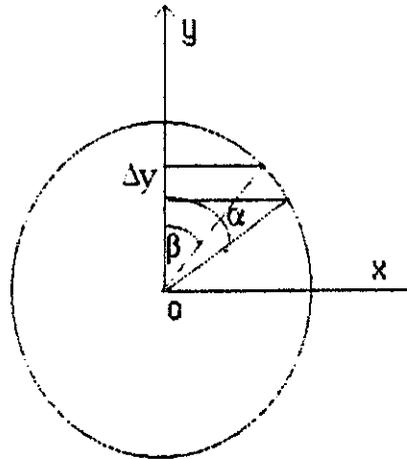
- pour le calcul de l'aire, on a
 $r(y+\Delta y)\Delta y \leq A(y+\Delta y) - A(y) \leq r(y)\Delta y$

La fonction r étant continue, $r(y+\Delta y) = r(y) + \varepsilon(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$

Il s'ensuit que l'on a bien :

$A(y+\Delta y) - A(y) = r(y)\Delta y + \Delta y \varepsilon_1(\Delta y)$ avec $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta y) = 0$
 le découpage matérialise en fait l'approximation linéaire.

pour le calcul de la longueur :



alors la longueur de l'arc est : $R(\alpha - \beta)$

la longueur de la corde est : $2R \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

et $\Delta y = R(\cos\beta - \cos\alpha)$

$$\Delta y = 2R \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Lorsque Δy tend vers 0, $(\alpha - \beta)$ tend vers 0 et l'on a, en fonction de Δy , pour $\alpha \neq 0$

-la longueur de l'arc équivaut à $\frac{\Delta y}{\sin\alpha}$

-la longueur de la corde équivaut à $\frac{\Delta y}{\sin\alpha}$

L'approximation par Δy n'est donc pas satisfaisante, tandis que celle par la corde associée à la tranche l'est. (on retrouve en fait la longueur du cercle comme limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans le cercle lorsque le pas de la subdivision tend vers 0).

remarque 1 : quand on approche l'arc par la corde, on n'a pas une approximation de la forme $B(y)\Delta y$, mais une approximation de la forme $B_1(y,\Delta y)\Delta y$. L'adéquation de l'approximation vient de ce que sa partie linéaire en Δy correspond bien à la dérivée de A , c'est à dire au fait que

$$B_1(y,\Delta y) = B(y) + \varepsilon(\Delta y) \quad \text{avec } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$$

Cette situation sera celle qui se produit le plus généralement.

remarque 2 : *il découle de ceci que les justifications du type : "ça marche parce que, quand Δy tend vers 0, l'empilement tend vers le disque, s'ils font référence à une convergence uniforme reconnue perceptivement, sont en fait recevables pour le calcul de l'aire du disque mais non pour celui de sa longueur.

*quand on raisonne localement sur une tranche, l'argument : "ça marche parce que, quand Δy tend vers 0, l'aire de la partie négligée tend vers 0" n'est pas recevable.

*quand on raisonne localement, l'argument : "ça marche parce que, quand Δy tend vers 0, la corde tend vers l'arc" n'est pas recevable non plus.

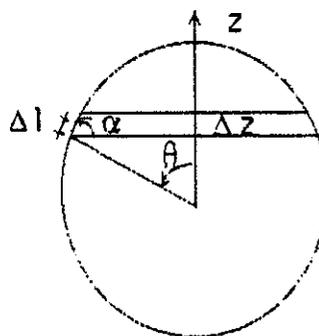
Dans l'espace

Si l'on définit, pour simplifier (cf annexe), l'aire de la surface de révolution comme la fonction $z \rightarrow S_1(z)$ dont la variation est approchée au premier ordre par l'aire du tronc de cône correspondant, alors on peut donner la justification suivante :

*L'aire latérale du tronc de cône est
 $\Delta S_2 = \pi \Delta l [r(z+\Delta z) + r(z)]$

C'est l'aire latérale d'un cylindre droit de rayon

$\frac{r(z) + r(z+\Delta z)}{2}$ et de hauteur Δl .



Cette aire s'écrit, en utilisant la continuité de la fonction $r(z)$:

$$\Delta S_2 = 2\pi R \Delta z + \varepsilon(z, \Delta z) \Delta z$$

avec $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(z, \Delta z) = 0$

Donc $dS^2 = 2\pi R dz$ et donc aussi $dS_1 = 2\pi R dz$

L'aire latérale du secteur sphérique est donc une fonction linéaire de la hauteur du secteur $\Delta S_1 = 2\pi R \Delta z$

On n'avait pas, a priori, de raison de soupçonner ce fait.

*L'aire latérale du cylindre est $\Delta S_3 = 2\pi r(z) \Delta z$

soit $\Delta S_3 = \sin\theta(z) \Delta S_1$

Donc l'approximation par l'aire du cylindre droit ne remplit pas les conditions requises pour le calcul de l'aire du secteur sphérique.

Bien évidemment, une réponse aussi complète que celle qui précède est peut-être "attendue" mais non "espérée"

Ont été déjà considérées comme signes d'une bonne compréhension les réponses du type :

"Dans la démonstration sur la surface de la sphère, le terme négligé est du premier ordre, alors que dans celle sur le volume, il est du second ordre" ou bien celles-ci, plus allusives :

"il y a un facteur $\cos \alpha$ qui ne disparaît pas" (entre la hauteur du cylindre élémentaire et la longueur de l'arc correspondant cf le $\sin \theta$ du corrigé qui précède)

ou même :

"il y a un problème au pôle !" ($\sin \theta = 0$)

Un exemple cité par un professeur pour faire comprendre ce "problème" mérite d'être repris :

"si l'on pose une planche sur un escalier, on pourra faire les marches aussi petites que l'on veut, la surface de la planche ne sera jamais égale à la surface verticale des marches".

Réponses fréquemment observées :

On vient de citer celles qui témoignent d'une bonne compréhension du problème. Moins du tiers des enseignants ou apprentis enseignants (8 élèves de l'ENSET) interrogés ($N_{\text{total}} = 35$), relèvent de cette catégorie. Les autres ou bien refont le calcul juste de l'aire du secteur sphérique :

$\Delta S = 2\pi R\Delta z$, sans autre commentaire, ou bien répondent vaguement :

"l'approximation est trop grossière"

"dS ne peut être encadré" (ce qui ne suffit pas à invalider la démonstration)

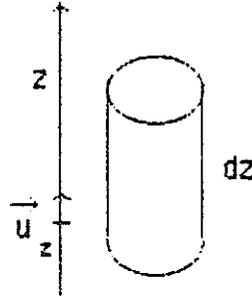
ou bien même remettent en cause la démonstration (juste !) du volume de la sphère :

"Non (je ne peux pas situer l'erreur)... c'est peut être par coïncidence qu'on obtient le volume de la sphère par cette méthode puisque, rigoureusement, on ne peut pas prendre $dV = \pi r^2 dz$ et tout cela m'expliquerait la démonstration fautive de la surface de la sphère".

QUESTIONNAIRE Q 13

I Lire attentivement le calcul suivant, qui vise à établir une expression de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude z .

Considérons un élément de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz . Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :



Exprimons l'équilibre de ce cylindre soumis aux forces suivantes :

Force due à la pression sur la face inférieure : $S \cdot p(z) \vec{u}_z$

Force due à la pression sur la face supérieure : $S \cdot p(z+dz) \cdot (-\vec{u}_z)$

Poids du volume de gaz : $\rho \cdot g \cdot S \cdot dz \cdot (-\vec{u}_z)$

L'équilibre des forces s'exprime ainsi:

$$S \cdot p(z) \cdot - S \cdot p(z+dz) - \rho \cdot g \cdot S \cdot dz = 0$$

ou encore:

$$p(z+dz) - p(z) = -\rho \cdot g \cdot dz$$

soit: $\boxed{dp = -\rho \cdot g \cdot dz}$

II Justifiez, rigoureusement cette fois, la relation différentielle obtenue

$$dp = -\rho g dz$$

Réponse attendue

Comme il a été mentionné à propos du questionnaire 2, l'établissement de cette relation différentielle peut se faire rigoureusement par encadrement et passage à la limite.

On considère alors un volume d'air cylindrique, de surface de base S et de hauteur Δz quelconque. Le principe de calcul est le même que celui du texte proposé : la résultante de toutes les forces est nulle puisque l'échantillon est en équilibre. L'expression du poids doit être établie de façon rigoureuse en sachant que ρ est une grandeur variant de façon continue avec l'altitude, comme d'ailleurs la pression p .

La résultante des forces de pression est alors :

$$[S.p(z) - S.p(z+\Delta z)] \vec{u}_z$$

Puisque la masse volumique ρ est une fonction continue de z , sa valeur dans l'échantillon est comprise entre sa valeur minimum ρ_m et sa valeur maximum ρ_M :

$$\text{Min}[\rho(z)] \leq \rho(z) \leq \text{Max}[\rho(z)]$$

et le poids ΔP de l'échantillon est encadrable :

$$S.g.\Delta z.\text{Min}[\rho(z)] \leq \Delta P \leq S.g.\Delta z.\text{Max}[\rho(z)]$$

$$\text{Comme } [S.p(z) - S.p(z+\Delta z) - \Delta P].\vec{u}_z = \vec{0}$$

on obtient :

$$S.g.\Delta z.\text{Min}[\rho(z)] \leq S.p(z) - S.p(z+\Delta z) \leq S.g.\Delta z.\text{Max}[\rho(z)]$$

soit

$$g.\text{Min}[\rho(z)] \leq \frac{p(z) - p(z+\Delta z)}{\Delta z} \leq g.\text{Max}[\rho(z)]$$

Il ne reste plus qu'à passer à la limite en faisant tendre Δz vers 0

La fonction $z \rightarrow p(z)$ étant continue, les valeurs d'encadrement tendent toutes les deux vers la même valeur : $g\rho(z)$ et le terme encadré tend lui vers

$-\frac{dp(z)}{dz}$. On établit ainsi rigoureusement la relation différentielle

$$dp(z) = g.\rho(z).dz$$

Remarque : une autre approche rigoureuse permet d'écrire, grâce à la continuité des grandeurs considérées :

$$\Delta P = S.g.\Delta z. (\rho(z) + \varepsilon(\Delta z))$$

$$\text{ou } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$$

$$\text{d'ou } \rho(z+\Delta z) = \rho(z) - g.\rho(z).\Delta z - g.\varepsilon(\Delta z).\Delta z$$

$$\text{ou } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [g\varepsilon(\Delta z)] = 0$$

ceci assure la différentiabilité de la fonction $z \rightarrow \rho(z)$, la différentielle étant le terme linéaire en Δz :

$$d\rho(z) = -g.\rho(z).\Delta z$$

QUESTIONNAIRE Q 14

I Lire attentivement cet exercice et le début de solution rédigé par un physicien.

En combien de temps se vide un entonnoir ?

On considère un entonnoir conique, avec un orifice circulaire de rayon r , de surface s rempli d'eau jusqu'à la hauteur H .

On admet que la vitesse d'écoulement à travers un orifice immergé à la profondeur h est donnée par l'expression

$$v = 0,6 \sqrt{2gh}$$

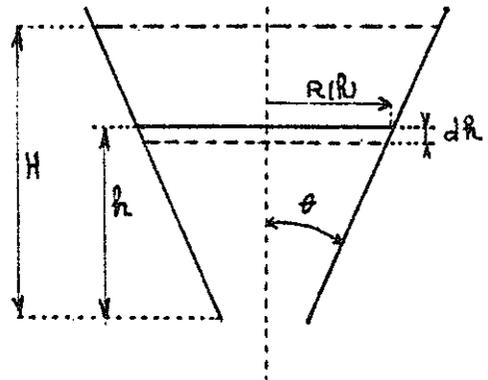
Solution

Entre les instants t et $t + dt$, il s'écoule $dV = s v dt$. Il s'ensuit une variation de niveau dh telle que (le signe traduisant que l'écoulement entraîne une baisse de niveau)

$$S(h) \Delta h = - s.v \Delta t$$

qu'on écrit $S(h) dh = -sv dt$

ou $S(h)$ est la surface libre lorsqu'il reste une hauteur h d'eau.



II Critiquer la cohérence des notations et justifier, rigoureusement cette fois, la relation

$$S(h).dh = - s.v.dt$$

Réponse attendue

Comme dans le questionnaire 12, la relation différentielle peut être obtenue rigoureusement, par une méthode d'encadrement et de passage à la limite.

Soit $V(t)$ le volume de liquide restant à l'instant t .

Entre les instants t et $t + \Delta t$, la vitesse d'écoulement, fonction continue du temps, varie mais demeure comprise entre sa valeur minimum $\text{Min}[v(t)]$ et sa valeur maximum $\text{Max}[v(t)]$:

$$\text{Min}[v(t)] \leq v(t) \leq \text{Max}[v(t)]$$

Le volume d'eau écoulée entre t et $t + \Delta t$ est encadré par

$$s.\text{Min}[v(t)] \Delta t \leq V(t) - V(t+\Delta t) \leq s.\text{Max}[v(t)] \Delta t$$

soit

$$s.\text{Min}[v(t)] \leq -\frac{\Delta V}{\Delta t} \leq s.\text{Max}[v(t)]$$

et à la limite $\Delta t \rightarrow 0$, les grandeurs étudiées étant continues (voir la "réponse attendue au questionnaire q 12) :

$$-V'(t) = -\frac{dV}{dt} = s.v(t)$$

$$dV(t) = -s.v(t) dt$$

Par ailleurs, pour tout corps de révolution, la différentielle du volume est rigoureusement donnée par $dV = S(h) dh$ (cf questionnaire 8)

$$\text{donc } S(h) dh = -s v(t) dt$$

On peut aussi, compte tenu de la continuité de la vitesse d'écoulement v , écrire

$$V(t) - V(t+\Delta t) = s. \Delta t.(v(t) + \epsilon(\Delta t))$$

où $\epsilon(\Delta t)$ tend vers 0 avec Δt

$$\text{d'où } V(t+\Delta t) = V(t) - s.v(t) \Delta t - s.\epsilon(\Delta t).\Delta t$$

$$\text{où } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [s\epsilon(\Delta t)] = 0$$

Ceci assure la différentiabilité de $V(t)$, la valeur de sa différentielle étant le terme du second membre linéaire en Δt :

$$dV(t) = -s.v(t).dt$$

QUESTIONNAIRE Q 15

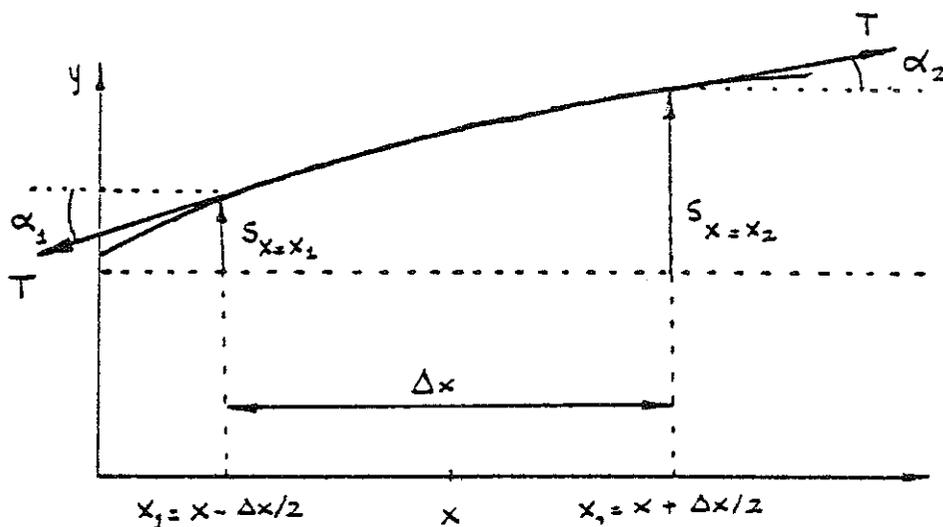
I Lire attentivement l'extrait de cours de 2e année de DEUG, établissant l'équation de propagation d'une onde transversale de faible amplitude sur une corde horizontale tendue, et figurant pages suivantes.

II Quelle(s) critique(s) pouvez-vous faire quant à l'établissement de l'équation différentielle (II.6) ?

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2} \quad (\text{II.6})$$

CHAPITRE II. PROPAGATION DES ONDES LE LONG D'UNE CORDE.

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x , et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Cet ébranlement se produit suivant l'axe y , c'est à dire, dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. On dit alors qu'il s'agit d'une onde transversale.



Étudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère un segment très court de cette corde, de longueur Δx et centré en x . La masse ΔM du segment est donnée par :

$$\Delta M = \mu \cdot \Delta x \quad (\text{II.1})$$

où μ est la densité linéaire de masse de la corde, c.à.d., la masse par unité de longueur (kg/m). Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. On aura donc en général $\alpha_1 \neq \alpha_2$ (voir figure). Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude, si bien qu'on peut faire l'approximation :

$$\sin \alpha_1 \approx \text{tg } \alpha_1 = (ds/dx)_{x=x_1}; \quad \text{et la même chose pour } \alpha_2 \quad (\text{II.2})$$

où on a dénoté par s le déplacement de la corde par rapport à sa position d'équilibre. Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x_1 (qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à $T \sin \alpha_1$) et de la force appliquée au point x_2 (qui est vers le haut et égale à $T \sin \alpha_2$). Si on utilise (II.2), la force totale dans la direction y est donc :

$$F_Y = T \left[\frac{ds}{dx} \right]_{x=x_2} - T \left[\frac{ds}{dx} \right]_{x=x_1} \quad (II.3)$$

Nous pouvons appliquer maintenant la seconde loi de Newton. La force dans la direction y donnée par (II.3), doit être égale au produit de la masse du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$\Delta M \frac{d^2s}{dt^2} = F_Y = T [f(x_2) - f(x_1)] \quad \text{avec } f(x) = ds/dx \quad (II.4)$$

et si on utilise (II.1) on pourra écrire :

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (II.5)$$

Si maintenant, on prend la limite $\Delta x \rightarrow 0$ dans le second membre de (II.5), on aura

$$\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2} \quad (II.6)$$

puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \frac{d^2s}{dx^2} \quad (II.7)$$

Si on compare (II.6) et (I.10), on remarque que (II.6) est une équation d'ondes, avec pour vitesse:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (II.8)$$

Réponse attendue

Le fait de considérer un segment de corde de longueur Δx et d'effectuer un passage à la limite $\Delta x \rightarrow 0$ laisse à penser, de prime abord, que l'équation d'onde est établie de façon rigoureuse.

Notons d'abord que le segment de corde de longueur Δx est qualifié de "très court", ce qui n'est pas nécessaire lorsqu'on fait ensuite le passage à la limite $\Delta x \rightarrow 0$

D'autre part, le passage à la limite $\Delta x \rightarrow 0$ conduisant de l'équation (II.5)

$$\mu \frac{d^2 s}{dt^2} = T \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (II.5)$$

à l'équation (II.6)

$$\mu \frac{d^2 s}{dt^2} = T \frac{d^2 s}{dx^2} \quad (II.6)$$

n'est effectuée que dans le second membre de (II.5). L'écriture du premier membre de (II.5) sous la forme $\mu \frac{d^2 s}{dt^2}$ implique non seulement le passage à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ mais aussi le passage à la limite déjà effectuée $\Delta x \rightarrow 0$ puisque c'est le déplacement s du point de la corde d'abscisse x qui y figure.

Le passage à la limite $\Delta x \rightarrow 0$, dans cet exemple, ne peut être considéré comme un critère de rigueur pour l'établissement de l'équation d'onde (II.6).

On peut pourtant améliorer la rigueur de la démonstration sans pour autant trop alourdir le raisonnement, en dissociant les deux membres de la relation (II.4) qui traduit la seconde loi de Newton.

Pour un segment de corde de longueur Δx , la somme des forces appliquées est selon la composante y :

$$\Sigma F = T [\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1] = T [f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \Delta x]$$

où $\varepsilon(\Delta x)$ tend vers 0 avec Δx

La différentielle de la fonction $x \rightarrow \Sigma F(x_1, x)$ est donc la partie linéaire de l'expression ci-dessus soit

$$dF = T f'(x) dx$$

ou
$$dF = T \frac{d^2 s}{dx^2} dx$$

Par ailleurs , pour un milieu continu, l'expression de la loi fondamentale de la dynamique est différentielle :

$$dF = \mu dx \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

En identifiant ces deux expressions de la différentielle dF, on obtient

l'égalité : $\mu \frac{d^2s}{dt^2} = T \frac{d^2s}{dx^2}$

IV Aspect fonctionnel des différentielles

Cette dernière rubrique vise l'aspect fonctionnel des différentielles, c'est à dire ce qui distingue une fonction (de l'accroissement de la variable, quelqu'il soit) d'une valeur (d'un "petit" accroissement de quelque chose). On pourra consulter à ce sujet l'annexe (p2).

C'est tout particulièrement un usage des différentielles commun chez les physiciens dont on évalue ici l'impact et donc on suscite la critique. L'encadré qui suit récapitule des commentaires fréquemment rencontrés chez les étudiants de physique de premier cycle universitaire ou de classe préparatoire à propos du statut de l'élément différentiel. On y observe deux tendances extrêmes et opposées :

* Celle qui consiste à voir en "dx" un simple marqueur de la variable d'intégration (d'ailleurs parfois omis en mathématique : $\Phi = \int f$), d'où les qualificatifs "abstrait", "immatériel", "irréel", etc...

* Celle qui attribue au contraire un contenu quasi matériel à "l'élément différentiel" : "un petit morceau dl du fil" susceptible de reconstituer par "recollement", "empilement" etc... l'objet complet auquel on s'intéresse.

Enfin, une troisième tendance compatible avec chacune des deux précédentes, consistant en évocations rituelles :

"dz, c'est la limite de Δz quand Δz tend vers zéro' etc..."

dx, dl...

* immatériel, marqueur de la variable d'intégration:

-je ne vois aucune nécessité de représentation dans l'intégration

-dx est irréel

-dx est immatériel, abstrait, purement conceptuel

-la longueur dl est fictive

-en fait ça n'a aucune importance, quand on intègre dl devient une variable d'intégration.

* petit bout de :

- dl est une petite longueur

- dl est un petit bout de fil

- un petit morceau dl du fil

- on couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisées de la sphère.

* Non caractérisé, rituel

- dz c'est la limite de Δz quand Δz tend vers 0

- variation élémentaire, élément infiniment petit

QUESTIONNAIRE Q 16**LIRE LE TEXTE SUIVANT**

On se propose de calculer le volume d'une sphère de rayon R .

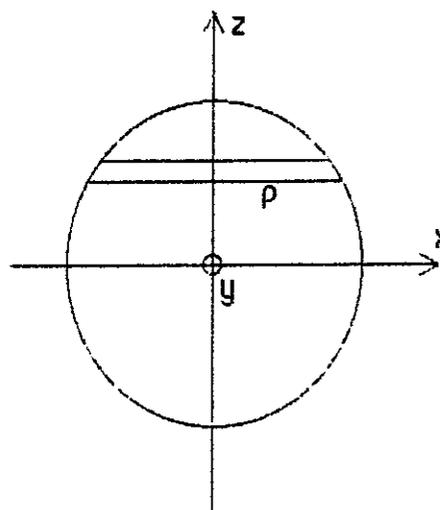
A cet effet on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (plan xOy , cf schéma ci-joint) et d'épaisseur dz petite

Le volume d'une tranche d'altitude z est

$$dV = \pi \rho^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz$$

Donc le volume total est

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi (R^2 - z^2) dz$$

**QUESTION SUR CE TEXTE**

Q1 - Dans ce calcul on a considéré une tranche élémentaire à l'altitude z sans préciser la valeur de z . Est-ce légitime ? (justifier votre réponse)

Q2 - Aurait-on pu prendre une tranche d'altitude nulle ($z = 0$), écrire $dV = \pi R^2 dz$,

puis $V = \int_{-R}^{+R} \pi R^2 dz$ (justifiez votre réponse)

Q3 - Cette dernière intégrale peut-elle représenter un volume et si OUI lequel?

Réponse attendue

Le raccourci typiquement physicien : "le volume d'une tranche... est $dV = \pi \cdot \rho^2 \cdot dz$ " n'est pas vise ici. Voir a ce sujet le questionnaire 7.

Il s'agit simplement de comprendre que cette relation différentielle est valable sur tout le domaine d'intégration, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'intégration.

La relation $dV = \pi \cdot R^2 \cdot dz$, qui n'est valable que pour le plan horizontal equatorial, ne remplit évidemment pas cette condition. En revanche, dans le cas d'un cylindre, cette relation reste valable pour toute valeur de z et permet donc, par intégration, d'en retrouver le volume.

Réponses fréquemment observées chez des étudiants de 1ere année de DEUG (effectif faible : $N = 26$)

*question : "est-ce légitime ?"

-15 % seulement des réponses sont nettement correctes :

"oui, parce que la relation est valable quelque soit z "

-46 % disent simplement :

"oui, parce que z est variable de $-R$ à $+R$ "

-Un marais de justifications plus ou moins claires constitue le reste des réponses OUI (20 %)

"on couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisées de la sphère

"on fait varier z de $-R$ à $+R$, on n'a donc aucun besoin de z "

"la valeur de z n'a aucune importance puisque l'on retrouve le symétrique par rapport a $z = 0$ "

"car quelque soit l'altitude $z \neq 0$, on aura toujours un volume".

"cette erreur que l'on fait dans la partie supérieure est amortie progressivement puis supprimée dans la moitié inférieure. Donc c'est légitime pour le volume total".

On note parmi les réponses NON (19 %) ces réponses curieuses

"car $z = 0$ n'est pas acceptable"

" z ne peut prendre la valeur nulle car on aurait la surface d'un cercle"

* Question : aurait-on pu prendre...?

La réponse majoritaire (73 %) est NON, mais seulement un élève sur trois (de l'effectif total) la justifie correctement. On observe en revanche une abondance surprenante (ici 40 %) d'argumentations du type "tranche plate"

"Pour $z = 0$ on a une aire et non un volume"

"Le volume est nul pour une tranche plate"

"Non on ne peut pas le faire, en effet on prend dans ce cas là $z =$ une constante, d'où le résultat de l'intégration serait $V = \pi R^2$ On obtient donc une surface et non un volume"

"Non, à l'altitude $z = 0$, on a un cercle d'aire πR^2 "

*Question: cette dernière intégrale peut-elle représenter un volume...?:

Non proposée dans l'enquête initiale.

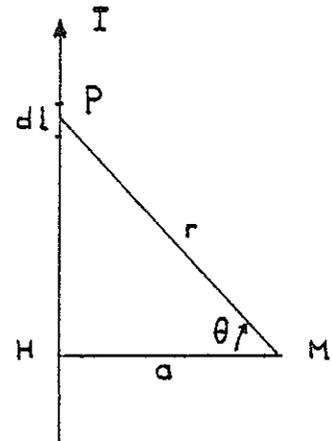
QUESTIONNAIRE Q 17

On se propose de calculer l'induction magnétique créée en un point M par un fil infini rectiligne parcouru par un courant I, situé à la distance a de M.

Un élément de circuit dl de point moyen P crée en M une induction \vec{dB} .

L'addition vectorielle dans ce cas simple conduit à faire simplement une addition algébrique, avec :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi R^2}$$

**QUESTIONS**

Q1 -dB peut-il être considéré comme une différentielle de fonction ? Si oui, de quelles variables ?

Q2 -même question pour dl

Q3 -Exprimer dB à l'aide d'une seule variable

Réponse attendue

Question 1 : dB... différentielle ?...

OUI, dB peut être considérée comme la différentielle d'une fonction, que ce soit B (l) ou B (θ) ou B (r), la variable envisagée dans chaque cas (respectivement l, θ ou r)^{*} déterminant les bornes d'intégration dans l'intégrale correspondante

$$B(l) = \int_{l_0}^l dB(dl)^{**} \quad \text{ou} \quad B(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} dB(d\theta)^{**} \quad \text{ou} \quad B(r) = \int_a^r dB(dr)^{**}$$

Les physiciens peuvent bien débattre du sens physique de telles intégrales, cela n'affecte nullement la légitimité de les définir.

Accepter de parler de relations différentielles, s'en servir pour des changements de variables, c'est aussi accepter l'existence de dérivées pour des fonctions qu'il faut bien définir !

Question 2 : dl... différentielle ?

OUI, dans la même logique, dl peut être considérée comme différentielle des fonctions l (l), l (θ), l (r).

Question 3 : En choisissant par commodité la variable θ (et l'origine de l en

H on a : $l = a \operatorname{tg} \theta$, $dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ et puisque $r = \frac{a}{\cos \theta}$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

Réponses fréquemment observées :

Les réponses observées chez des élèves de mathématiques spéciales (N = 44) montrent que l'on peut très bien "intégrer", "sommer" des "dB" sans pour autant considérer dB comme une différentielle de fonction :

N = 44 Math.Spé.	OUI	NON	Sans réponse
dB différentielle?	52 %	27%	21%
dl différentielle?	32%	27%	41%

^{1*} Précisées le cas échéant par une origine et une orientation

30 % des élèves font l'erreur classique consistant à écrire $dl = r d\theta$.
Chez ceux là abondent les commentaires qui dévient au moins à l'un des éléments dB, dl le statut de différentielle :

"Pour intégrer il ne faut surtout pas penser ce que représente dl mais procéder mécaniquement, sinon on est cuit"

"dB n'est pas la différentielle d'une fonction, pas plus que dl"

"Non B n'est pas une fonction mais une quantité constante pour des valeurs fixes de a, I . L'écriture dB n'est justifiée pour moi que parce qu'elle représente l'induction magnétique au point M créée par une longueur élémentaire de fil".

"dl ne représente pas un nombre, c'est une variation élémentaire qui représente la même chose tout le long du fil. Ceci est inhérent à la notion d'intégrale. Dans le cas du fil infini, B ne dépend que de la distance du point au fil. Donc B est fonction de a. Si le fil n'était pas infini, alors B serait fonction de θ aussi.

dl n'est pas la différentielle d'une fonction mais une variation élémentaire".

"On a $dl = r d\theta$ mais ce n'est pas une différentielle".

"Je ne considère pas dB comme une différentielle au sens mathématique".

Chez ceux qui écrivent correctement $dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ (3 sur 44 !), on trouve au contraire des spécifications fonctionnelles très nettes :

"dB est une différentielle de fonction : fonction de θ ,
dl est une différentielle de fonction : fonction de θ "

ANNEXE

L'outil différentiel est utilisé au début des études universitaires, en mathématiques et en physique, essentiellement comme outil d'approximation locale :

- soit au niveau purement local (petites variations autour d'une situation donnée) : étude des fonctions de plusieurs variables et des variétés associées (courbes, surfaces), calcul d'incertitude,

- soit pour le passage du local au global : mise en équations de problèmes non linéaires aboutissant à des équations différentielles ou des intégrales.

C'est dans ce contexte que nous nous sommes situés dans cette brochure. Nous n'avons pas en particulier évoqué la notion de forme différentielle qui, introduite ultérieurement, amène à repenser la notion de différentielle et les liens entre calcul différentiel et intégration.

I - LE NIVEAU LOCAL

II - LE MODELE LINEAIRE

Le problème général est le suivant : on se donne une fonction f ; connaissant sa valeur en un point M , que peut-on dire de sa valeur en un point M' , si M' est "suffisamment voisin" de M (de façon générale, f désignera ici une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , M un point de \mathbb{R}^n , MM' la distance euclidienne des points M et M' ou toute autre distance équivalente)?

- La continuité de f en M permet une première approximation (ordre 0) puisqu'alors on a, au voisinage de M :

$$f(M') = f(M) + \varepsilon(M, M') \quad (1)$$

avec $\varepsilon(M, M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0.

En d'autres termes, en première approximation, on peut considérer la fonction f comme constante au voisinage de M .

- La différentiabilité de f en M permet d'améliorer cette approximation (ordre 1) : on peut alors approcher f au voisinage de M par une fonction affine g avec la garantie que l'écart entre $f(M')$ et $g(M')$ sera non seulement petit avec MM' , mais négligeable par rapport à MM' .

En effet si f est différentiable en M , on a au voisinage de M :

$$f(M') = g(M') + \varepsilon(M, M') \cdot MM' \quad (2)$$

avec g affine et $\varepsilon(M, M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0, autrement dit :

$$f(M') = f(M) + L(\vec{MM}') + \varepsilon(M, M') \cdot MM' \quad (3)$$

avec L application linéaire et toujours les mêmes condition sur $\varepsilon(M, M')$.

L'application affine g est l'approximation au premier ordre de f en M , l'application linéaire L associée à g est la différentielle de f en M , notée en général df_M . Elle est déterminée de façon unique par la relation (3).

Par exemple :

- si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , elle est différentiable en x si et seulement si elle est dérivable en ce point et on a alors, pour h suffisamment petit :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

La différentielle df_x n'est autre que l'application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui au réel h associe le réel $f'(x) \cdot h$. Elle est définie sur \mathbb{R} tout entier mais bien sûr, ne présente un intérêt pour l'approximation de f que pour h petit (sauf si f est déjà affine).

Lorsque f est une application linéaire, elle est sa propre différentielle en tout point. C'est en particulier le cas pour l'application identique : sa différentielle, notée dx , est l'application identique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Il s'ensuit que df_x étant l'application :

$$h \rightarrow f'(x) \cdot h$$

on a l'égalité fonctionnelle : $df_x = f'(x)dx$.

Présenter dx comme un accroissement arbitraire de la variable comme cela est souvent fait, en particulier en physique, revient à s'autoriser l'abus fréquent qui consiste à confondre une fonction et sa valeur. Et si, souvent, on rajoute que cet accroissement doit être petit, ce n'est pas parce que la différentielle n'est définie que pour des accroissements petits (c'est une application définie sur \mathbb{R} tout entier), c'est parce que l'approximation différentielle ne présente d'intérêt, comme nous l'avons déjà écrit, que localement

Mais il est important que cette confusion entre fonction et valeur n'interdise pas à dx de retrouver, lorsque cela est nécessaire, pleinement son statut de fonction, par exemple dans les problèmes de changement de variables.

- si f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , différentiable en M , on montre de même que la différentielle df_M s'exprime à partir des dérivées partielles de f en M (qui alors existent nécessairement) :

$$df_M(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i} \cdot h_i$$

autrement dit :

$$f(M') = f(M) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta x_i}(M)(x_i(M') - x_i(M)) + \epsilon(M, M') \cdot MM'$$

avec toujours la même condition sur $\epsilon(M, M')$.

L'effet de l'application linéaire df_M sur le vecteur \vec{MM}' s'interprète donc comme le produit scalaire de ce vecteur par un vecteur \vec{V} dont les composantes sont les dérivées partielles de f au point considéré.

Ce vecteur \vec{V} , déterminé de manière unique par la relation (4) ci-après :

$$f(M') = f(M) + \vec{MM}' \cdot \vec{V} + \epsilon(M, M') \cdot MM' \quad (4)$$

avec toujours la même condition sur $\epsilon(M, M')$,

fournit la direction dans laquelle la fonction f s'accroît le plus au voisinage de M . C'est le gradient de f au point M noté : $\vec{\text{Grad}}_M f$.

- si f est plus généralement une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , différentiable en M , sa différentielle en M sera une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p codée dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et de \mathbb{R}^p par sa matrice : la matrice jacobienne ou matrice des dérivées partielles.

- Geometriquement, le point de vue différentiel tel qu'il est présenté ci-dessus conduit en dimension 1 à une conception de la tangente qui n'est pas la conception classique : tangente en M comme position limite des sécantes passant par M , mais plutôt la suivante :

- la tangente en M à la courbe C associée à f est la droite qui approche le mieux localement C , plus précisément, c'est la seule droite qui approche C au premier ordre au voisinage de M ,

ou encore :

- la tangente en M à la courbe C est la droite avec laquelle tend à se confondre la courbe C lorsque l'on agrandit par zooms successifs un voisinage de M .

12 - LE CONTROLE DE L'APPROXIMATION

Les définitions données dans le paragraphe 11 le sont sous forme d'égalité asymptotiques. Elles ne permettent pas d'obtenir directement encadrements ou majorations.

Lorsque l'on écrit :

$$f(M') = f(M) + df_M(\vec{MM}') + \varepsilon(M, M') \cdot MM' \text{ avec } \lim_{MM' \rightarrow 0} \varepsilon(M, M') = 0$$

on ne fournit pas de réponse au problème suivant :

Comment choisir r pour que sur la boule $B(M, r)$ de centre M et de rayon r , $f(M')$ soit évalué par $f(M) + df_M(\vec{MM}')$ à telle ou telle précision donnée ?

La réponse à ce problème passe par un meilleur contrôle du "reste" : $\varepsilon(M, M') \cdot MM'$

Des hypothèses plus contraignantes sur f peuvent fournir ce contrôle. C'est par exemple le cas, en dimension 1, si la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[x-a, x+a]$ et si sa dérivée seconde est majorée en valeur absolue par A sur cet intervalle. En effet, la formule de Taylor permet alors d'écrire, dès que $x+h$ est dans $[x-a, x+a]$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{h^2}{2} f''(c) \text{ avec } c \text{ compris entre } x \text{ et } x+h$$

donc d'obtenir la majoration :

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h| \leq \frac{h^2}{2} A$$

Pour garantir une précision α , il suffit alors de choisir pour r :

$$r = \inf \left(a, \sqrt{\frac{2\alpha}{A}} \right)$$

Pourtant, en ce qui concerne le calcul d'incertitude, les formules classiques, par exemple la formule $\Delta u v = u \Delta v + v \Delta u$ sont souvent perçues comme une simple traduction des énoncés du calcul différentiel à l'ordre 1. Qu'en est-il exactement ?

Prenons, pour simplifier l'écriture, une fonction f réelle de deux variables différentiable en (x_0, y_0) . Le problème est le suivant :
 Δz étant un ordre de grandeur d'erreur donné, peut-on déterminer Δx et Δy pour que lorsque x varie dans l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ et y varie dans l'intervalle $[y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y]$, on puisse garantir que la valeur $z = f(x, y)$ restera dans l'intervalle $[z_0 - \Delta z, z_0 + \Delta z]$?

Et en sens inverse, étant donnés Δx et Δy , peut-on apprécier Δz ?

L'hypothèse de différentiabilité permet d'écrire :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0).(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0).(y-y_0) + M_0 M \cdot \varepsilon(M_0, M) \quad (5)$$

avec :

$M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x, y)$ et $\varepsilon(M_0, M)$ tendant vers 0 quand M tend vers M_0 .

$$\text{Posons : } \alpha_0 = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \text{ et } \beta_0 = \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0)$$

Les formules usuelles du calcul d'incertitude consistent à glisser de la relation (5) à :

$$\Delta z = |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y \quad (6)$$

avec intuitivement l'idée que, dans ce glissement, on a majoré l'écart possible entre $f(x,y)$ et $f(x_0,y_0)$ sur l'ensemble considéré et que l'on a, en fait, pour tout (x,y) dans $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x].[y_0-\Delta y, y_0+\Delta y]$:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y$$

(cf. les réponses au questionnaire).

En fait, ce n'est pas vrai, même pour une fonction aussi simple que le produit.

En effet, dans ce cas particulier, la formule (6) devient :

$$\Delta(xy) = |y_0| \Delta x + |x_0| \Delta y$$

Or, pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et $(x, y) = (1.01, 1.01)$ on a :

$$xy - x_0 y_0 = 0.0201$$

alors que la formule (6) avec $\Delta x=0.01$ et $\Delta y=0.01$ donne pour $\Delta(xy)$ la valeur strictement inférieure 0.02.

Et, aussi petits soient-ils, des écarts positifs sur x et y conduisent à la même contradiction.

La formule (6) ne peut donc pas être interprétée comme fournissant une majoration des écarts $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$. Mais, elle est quand même précieuse car elle fournit une approximation de "bonne qualité" de la borne supérieure de ces écarts (par exemple dans le cas particulier traité : 0.02 au lieu de 0.0201, soit une estimation à 10^{-4} près, pour des incertitudes sur x_0 et y_0 de 10^{-2}).

En effet, de la formule (5) on déduit :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y + |\varepsilon(M_0, M)| \cdot M_0 M$$

et par conséquent :

$$\Delta z \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \varepsilon(M_0, M)$$

avec $\lim \varepsilon(M_0, M) = 0$ quand $M_0 M$ tend vers 0.

Ceci signifie qu'en prenant $|\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y$ comme estimation de Δz , on peut avoir certes une estimation trop faible, mais que l'erreur commise sera d'ordre supérieur à celui de $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En d'autres termes, l'erreur sur l'erreur est négligeable devant l'erreur.

13 - INVERSION LOCALE ET THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Bien que cette question soit peu abordée dans les questionnaires, nous voudrions pour terminer cette partie évoquer ces théorèmes clefs du calcul différentiel qui constituent le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites, car ils illustrent particulièrement bien le contrôle sur les objets apporté par l'approximation linéaire.

Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , continûment différentiable au voisinage du point M_0 . Le théorème d'inversion locale garantit que si df_{M_0} est une application linéaire inversible (donc si le jacobien est non nul) alors f est, elle aussi, inversible sur un voisinage convenable de M_0 . De plus, l'application inverse est, elle aussi, différentiable et sa différentielle n'est autre que l'inverse de la différentielle de f .

Le théorème des fonctions implicites, qui s'en déduit facilement, permet de répondre à la question suivante :

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p ($p < n$) ; on suppose que $f(M) = k$. Que peut-on dire de la ligne de niveau k de f au voisinage de M ?

Considérons pour simplifier une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (les questionnaires proposent un exemple correspondant à une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2) et (x_0, y_0) un point satisfaisant $f(x_0, y_0) = k$.

Quelle est au voisinage de ce point, l'allure de la ligne de niveau k de f ? Peut-on l'exprimer comme une fonction de x , de y ? Peut-on connaître sa tangente ?

Si f est continûment différentiable dans un voisinage de (x_0, y_0) , le théorème des fonctions implicites affirme que, là encore, les propriétés "passent" de l'approximation affine à la fonction, plus précisément que si l'équation :

$$\boxed{f(x_0, y_0) + \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(y - y_0) = k} \quad (9)$$

(linéarisée de l'équation $f(x,y)=k$) peut se résoudre en fonction de x ($\beta_0 \neq 0$), localement, la ligne de niveau pourra s'exprimer elle aussi comme une fonction φ de x et que l'équation (9) sera justement celle de la tangente à la ligne de niveau en (x_0, y_0) .

En d'autres termes, on aura, au voisinage de x_0 :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \frac{\alpha_0}{\beta_0}(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x_0, x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x_0, x) = 0$$

La situation est analogue, en échangeant les rôles de x et y , si $\alpha_0 \neq 0$.

II- LE PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

Ce passage va se poser dans l'étude de phénomènes non linéaires et aboutira à l'écriture d'une équation différentielle ou directement d'une intégrale.

Dans certains cas, il permettra d'étendre la définition d'un concept et en deviendra par la-même un élément constitutif, le cas particulier connu étant exploité comme modèle d'approximation locale du cas général.

C'est ce qui se produit par exemple lors de l'extension du concept de travail d'une force du cas où la force est constante et le chemin rectiligne au cas d'une force non constante sur un chemin non rectiligne.

Deux points de vue sont souvent possibles :

III - LE POINT DE VUE DIFFERENTIEL

Il consiste à traduire les informations sur la situation, localement, par une égalité pouvant s'interpréter comme une approximation au premier ordre et à passer au global par "intégration" de la relation différentielle associée.

Par exemple, ayant à déterminer la relation liant deux grandeurs x et y , on cherchera s'il est possible de modéliser les informations données (pour des valeurs de x et y , dans un certain domaine et des accroissements Δx et Δy de ces grandeurs suffisamment petits), par une relation d'une des deux formes suivantes :

$$\Delta y = \alpha(x,y)\Delta x + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (10)$$

ou

$$\Delta x = \beta(x,y)\Delta y + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta y \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (11)$$

Remarque 1 : notons à ce propos qu'en mathématiques, il n'y a aucune difficulté à comparer les ordres de grandeurs de Δx , Δy et ϵ , les fonctions n'ayant pas de dimension. En physique, en revanche, il peut y avoir là un obstacle : si y désigne une masse et x un temps, on ne pourra effectuer la comparaison qu'en considérant $l \cdot \Delta x$, l désignant par exemple ici $1g/s$.

Dans le premier cas, la lecture de (10) comme écriture d'approximation au premier ordre conduira à chercher comme solution globale une fonction Ψ de la variable x solution de l'équation différentielle :

$$y' = \alpha(x, y)$$

c'est à dire satisfaisant sur un intervalle approprié :

$$\Psi'(x) = \alpha(x, \Psi(x))$$

Dans le second cas, on cherchera de manière analogue comme solution globale une fonction Γ de la variable y , solution de l'équation différentielle :

$$x' = \beta(x, y)$$

c'est à dire, satisfaisant sur une intervalle approprié :

$$\Gamma'(y) = \beta(\Gamma(y), y)$$

Remarque 2 : C'est cette lecture différentielle qui est implicitement suggérée par certaines formulations "physiciennes", par exemple : *"L'absorption d'intensité par une tranche élémentaire est proportionnelle à l'épaisseur de la tranche et à l'intensité traversant la tranche"*

L'indicateur "élémentaire" est là pour signifier qu'il ne faut pas interpréter l'égalité annoncée au pied de la lettre mais comme une égalité au premier ordre près ou une égalité différentielle.

Remarque 3 : Lorsque l'expression $\alpha(x, y)$ ne dépend pas de y (respectivement $\beta(x, y)$ ne dépend pas de x), la mise en équation conduit directement à un calcul de primitive, puisque l'on arrive à :

$$\Psi'(x) = \alpha(x) \text{ (respectivement } \Gamma'(y) = \beta(y))$$

Nous présenterons pour terminer ce paragraphe une méthode souvent employée pour obtenir la relation cherchée entre Δx , Δy , x et y , basée sur la continuité d'une fonction auxiliaire (cf. aussi les questionnaires).

On cherche à déterminer y comme fonction de x . Notons f cette fonction inconnue.

Si l'on sait que, sur un certain domaine :

$$\boxed{g_m(x, \Delta x) \Delta x \leq f(x + \Delta x) - f(x) \leq g_M(x, \Delta x) \Delta x} \quad (12)$$

g étant une fonction continue sur le domaine, g_m et g_M désignant respectivement l'inf et le sup de cette fonction sur le segment $[x, x+\Delta x]$, alors on peut :

- soit, en utilisant la continuité de g , écrire directement :

$$f(x+\Delta x) - f(x) = [g(x) + \varepsilon(x, \Delta x)] \Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0$$

ce qui prouve que f est dérivable en x , de dérivée $g(x)$,

- soit, en divisant (12) par Δx arriver à :

$$g_m(x, \Delta x) \leq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq g_M(x, \Delta x)$$

et faire tendre Δx vers 0. g étant continue, g_m et g_M tendent alors simultanément vers $g(x)$ et donc f est dérivable en x , de dérivée $g(x)$.

L'intérêt de ce point de vue différentiel est de permettre d'effectuer le contrôle de la mise en équation au niveau strictement local. Ce n'est pas le cas pour le point de vue intégral que nous allons présenter maintenant.

II - LE POINT DE VUE INTEGRAL

On se place dans la situation suivante :

On cherche à évaluer une grandeur E (masse, aire, volume, force...). E dépend des valeurs prises par une fonction f de la variable x , x variant dans une partie Ω mesurable de la droite, du plan ou de l'espace..., de mesure $m(\Omega)$.

On sait calculer E lorsque la fonction f est constante sur Ω : si f est égale à k sur Ω , $E(\Omega) = km(\Omega)$, on a affaire à un problème linéaire.

exemple : masse d'un corps de masse volumique homogène, volume d'un solide de section horizontale constante....

Mais le problème à traiter ne rentre pas dans ce registre ou l'objet du problème est justement de généraliser la définition de E à une classe plus large de fonctions.

On sait alors que la réalisation des trois conditions suivantes suffit à légitimer la procédure intégrale c'est à dire le passage du local au global par intégration :

condition 1 - Pour des partitions finies (Ω_i) de Ω , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_n$, de calibre arbitrairement petit, le résultat global est la somme des contributions de chaque partie :

$$E(\Omega) = \sum_{i=1}^n E(\Omega_i)$$

(principe du découpage en tranches)

Condition 2 - Sur chaque partie Ω_i on a l'encadrement suivant, en notant $m(\Omega_i)$ la mesure de Ω_i :

$$m_i \cdot m(\Omega_i) \leq E(\Omega_i) \leq M_i \cdot m(\Omega_i) \quad (13)$$

avec $m_i = \inf_{\Omega_i} f$ et $M_i = \sup_{\Omega_i} f$

Condition 3 - f est intégrable Riemann sur Ω .

En effet, si la fonction f est intégrable Riemann, les deux quantités :

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot m(\Omega_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n M_i \cdot m(\Omega_i)$$

convergent, lorsque l'on raffine la subdivision de Ω et que le sup des diamètres des Ω_i (diamètre d'une sphère minimale contenant Ω_i) tend vers 0, vers le même nombre qui n'est autre que l'intégrale de la fonction f sur Ω .

De l'encadrement :

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot m(\Omega_i) \leq E(\Omega) \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot m(\Omega_i)$$

obtenu en utilisant les conditions 1 et 2, on déduit alors que nécessairement :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Remarque 1 : on a raisonné ici en supposant l'existence de $E(\Omega)$. Si le problème posé est celui de l'extension de la définition de E , le processus intégrale conduit à élargir la définition de E à la classe des fonctions f intégrables Riemann sur Ω en posant :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Notons que les fonctions utilisées en physique élémentaire sont toutes intégrables Riemann sur les ensembles de mesure finie Ω considérés parce que par exemple bornées et monotones, ou bornées et continues par morceaux.

Remarque 2 : Très souvent la fonction f n'apparaît pas de façon manifeste dès le début de la mise en équation (cf. exemple ci-après). Elle ne s'impose réellement que lorsque l'on cherche à réaliser l'encadrement de $E(\Omega)$ qui correspond à la condition 2.

Remarque 3 : Souvent aussi, même si une fonction s'impose, l'encadrement obtenu ne sera pas exactement de la forme (13) mais plutôt de la forme :

$$m(\Omega_i) \left[\inf_{\Omega_i} f - \epsilon'_i \right] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i) \left[\sup_{\Omega_i} f + \epsilon_i \right]$$

avec ϵ_i et ϵ'_i petits avec $d(\Omega_i)$, le diamètre de Ω_i .

On montre alors que pour que la procédure intégrale soit encore justifiée, il suffit que les ϵ_i et ϵ'_i tendent vers 0 avec le $\sup_i d(\Omega_i)$ uniformément, ou encore que l'on puisse écrire :

$$m(\Omega_i) \left[\inf_{\Omega_i} f - \epsilon \right] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i) \left[\sup_{\Omega_i} f + \epsilon \right]$$

avec ϵ tendant vers 0 quand le $\sup_i d(\Omega_i)$ tend vers 0.

Le point de vue intégral qui vient d'être présenté nécessite à l'inverse du point de vue différentiel, un contrôle global de la situation, en principe plus coûteux.

Pourtant, dans bon nombre de problèmes, le cadre de la mesure est le cadre naturel et le passage au point de vue différentiel oblige à un changement de point de vue : il s'agit en fait de passer d'une conception de l'intégrale en termes de mesure à une conception de l'intégrale en termes de primitive.

Ce changement s'observe très fréquemment dans les manuels des qu'il y a effort de légitimation. L'exemple du calcul du volume de la sphère par encadrement, présenté dans les questionnaires, en est un exemple typique.

Dans ce paragraphe, nous avons cherché à formuler des conditions de contrôle de la procédure intégrale avec l'idée qu'une meilleure opérationnalisation de ce contrôle permettrait dans certaines mises en équation de concilier un coût de légitimation raisonnable avec le respect du cadre naturel de la mesure.

Reprenons par exemple le calcul du volume de la sphère :

La justification de type différentiel se base sur l'encadrement suivant associé au découpage en tranches (cf. questionnaires) :

$$\text{Min } [S(z)]. \Delta z \leq \Delta V \leq \text{Max } [S(z)]. \Delta z$$

Or cet encadrement peut directement s'interpréter d'un point de vue intégral :

Si Ω est le segment $[-R, R]$ et si f est la fonction définie sur Ω qui à z , associe l'aire de la section d'altitude z : $S(z)$, l'encadrement fourni est du type requis par la condition 2.

f étant intégrable puisque continue, on en déduit alors :

$$V = \int_{-R}^R S(z) dz$$

Et la démarche se généralise immédiatement à toute surface de révolution bornée pour laquelle la fonction aire associée est intégrable Riemann.

II3 - DEUX EXEMPLES

Pour terminer cette annexe, nous traiterons deux exemples, en adoptant dans le premier le point de vue intégral et dans le second le point de vue différentiel.

A - la longueur d'un arc de courbe :

Soit C une courbe associée à une fonction f à valeurs réelles, définie et continûment différentiable sur un segment $[a,b]$.

La longueur d'une courbe étant définie comme la borne supérieure des longueurs des lignes brisées dont les sommets sont sur la courbe ou, ce qui est équivalent, comme la limite des longueurs des lignes brisées obtenues par subdivisions successives de $[a,b]$, la question est de montrer qu'avec les hypothèses faites, C admet une longueur finie et d'en trouver une expression en fonction de f .

- En prenant comme espace de mesure $\Omega = [a,b]$, la définition donnée de la longueur vérifie bien la condition d'additivité.

- Si on découpe $[a, b]$ en n intervalles : I_1, \dots, I_n , il correspond à ce découpage une ligne brisée construite sur la courbe. La longueur d'un segment de cette ligne brisée déterminé par les points M d'abscisse x et M' d'abscisse x' est égale à :

$$MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))^2}$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel c entre x et x' tel que :

$$f(x') - f(x) = (x' - x) f'(c)$$

Il s'ensuit que MM' peut s'écrire :

$$MM' = |x-x'| \cdot \sqrt{1+f'(c)^2}$$

et donc que l'on a, en désignant par $L(I_i)$ la longueur du morceau de ligne brisée correspondant à l'intervalle I_i , pour chaque i :

$$\inf_{\underline{H}} \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot m(I_i) \leq L(I_i) \leq \sup_{\underline{H}} \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot m(I_i)$$

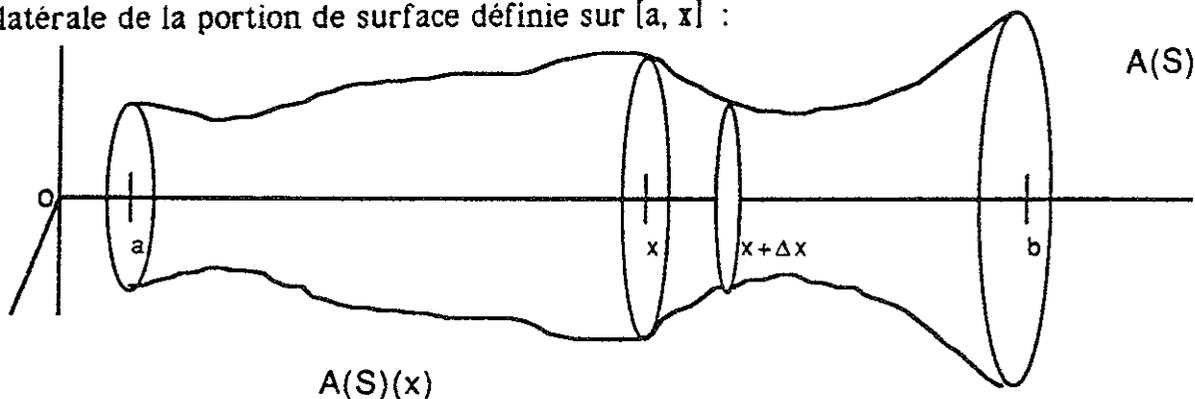
On a donc ici un encadrement du type requis par la condition 2 avec comme fonction sur Ω : $g = \sqrt{1+f'^2}$. f' étant continue sur $[a, b]$, g est intégrable sur $[a, b]$ et l'on est assuré que lorsque le pas de la subdivision de $[a, b]$ tend vers 0, la longueur des lignes brisées construites sur la courbe tend vers :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

C a donc une longueur finie dont l'expression en fonction de f est fournie par l'intégrale ci-dessus.

B - L'aire d'une surface de révolution

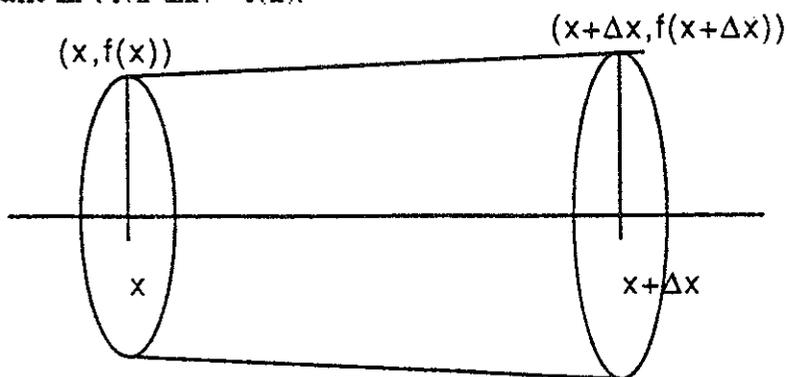
Soit une courbe Γ d'équation $y=f(x)$, f étant définie et continuellement dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et S la surface de révolution d'axe Ox et de génératrice Γ . On note $A(S)$ l'aire latérale de S et $A(S)(x)$ l'aire latérale de la portion de surface définie sur $[a, x]$:



L'aire latérale $A(C)(x, \Delta x)$ d'un tronc de cône dont les bases sont définies par $(x, f(x))$ et $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ est donnée par la formule :

$$A(C)(x, \Delta x) = \pi \cdot [f(x) + f(x+\Delta x)] \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f^2}$$

en notant $\Delta f : f(x+\Delta x) - f(x)$.



$$A(C)(x, \Delta x)$$

- f étant continue :

$$f(x) + f(x+\Delta x) = 2f(x) + \varepsilon(x, \Delta x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

- f étant dérivable et Δx supposé positif :

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta f^2} = \Delta x \cdot [\sqrt{1+f'(x)^2} + \varepsilon'(x, \Delta x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon' = 0$$

D'où :

$$A(C)(x, \Delta x) = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+f'(x)^2} \Delta x + \varepsilon(x, \Delta x) \Delta x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (15)$$

Si on définit $A(S)(x)$ comme la fonction, si elle existe, dont la variation est approchée au premier ordre par l'aire du tronc de cône associé, de (15) on déduit immédiatement, f' étant continue sur $[a, b]$, que la fonction aire existe, est dérivable et de dérivée :

$$A'(S)(x) = 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}$$

donc que :

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

Ce qui est bien la formule classique.

Bien sûr, là encore on aurait pu procéder par encadrement et passer par la procédure intégrale, soit en utilisant des arguments de convexité, soit en admettant que $A(S)$ est comprise entre l'aire du cylindre de rayon minimum et de génératrice $L(\Gamma)$ et l'aire du cylindre de rayon maximum et de même génératrice.

TITRE :

Questionnaire de travail sur les différentielles.

AUTEUR (S) :

Michèle ARTIGUE - Jean MENIGAUX – Laurence VIENNOT

RESUME :

Cette brochure présente un ensemble de questionnaires élaborés pour une recherche maths/physique sur la notion de différentielle et construits pour faire apparaître clairement certaines difficultés ou simplement certains aspects de la notion peu mis en lumière par l'enseignement usuel. Les questionnaires sont accompagnés de commentaires et de réponses d'étudiants les plus fréquemment observées.

MOTS CLES :

Didactique – mathématiques – physique - enseignement supérieur - différentielles

Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Mars 1989
ISBN : 2-86612-058-4

VOTRE OPINION SUR LA BROCHURE**"QUESTIONNAIRES DE TRAVAIL SUR LES DIFFERENTIELLES"**

La brochure "Questionnaires sur les différentielles" a été réalisée à l'issue d'une recherche interdisciplinaire sur l'enseignement des différentielles en mathématiques et en physique au niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur avec l'espoir qu'elle pourrait être utile aux enseignants de l'une ou l'autre discipline. Nous aimerions savoir si c'est réellement le cas ; c'est pourquoi nous vous serions très reconnaissants de bien vouloir nous communiquer vos impressions personnelles, en répondant au questionnaire ci-joint.

1 - Vous êtes enseignant(e) de :
mathématiques physique

2 - Vous enseignez en :
premier cycle d'université classe préparatoire IUT autre(préciser)

3 - La brochure vous a semblé globalement :
très intéressante intéressante peu intéressante inintéressante
Pouvez-vous dire brièvement pourquoi ?

4 - Vous avez trouvé l'annexe :
très utile utile peu utile inutile
Pouvez-vous dire brièvement pourquoi ?

5 - Parmi les questionnaires proposés, lesquels avez-vous préférés et pourquoi ?

6 - Parmi les questionnaires proposés lesquels avez-vous le moins aimé et pourquoi ?

7 - Avez-vous été étonné(e) par les informations fournies concernant les réponses des étudiants à certaines questions ? Par lesquelles particulièrement et pourquoi ?

8 - Avez-vous été étonné(e) par certains commentaires figurant dans la rubrique "réponse attendue" des questionnaires ? Lesquels ? Pourquoi ?

9 - Pensez-vous exploiter cette brochure dans votre enseignement ? Pourquoi ?

10 - Si vous avez répondu oui à la question précédente, pensez-vous exploiter cette brochure :

- en proposant certains questionnaires à vos étudiants ? Et si oui, lesquels en priorité?

- autrement (précisez)

11 - Avez-vous des critiques à faire autres que celles éventuellement faites dans les réponses aux questions précédentes ? Si oui, lesquelles ?

12 - Avez-vous des suggestions à faire aux auteurs pour améliorer la version actuelle de cette brochure ? Si oui, lesquelles ?

13 - Avez-vous d'autres commentaires à faire ?

14 - Si au moment où vous répondez à ce questionnaire, vous avez déjà utilisé cette brochure pour votre enseignement, pouvez-vous nous donner des informations sur ce que vous avez fait et sur la façon dont les étudiants y ont réagi (Si vous n'avez pas encore utilisé les questionnaires et que vous ayiez l'intention de le faire, n'hésitez pas à nous envoyer ultérieurement vos commentaires).