

**PROCEDURES DIFFERENTIELLES DANS LES ENSEIGNEMENTS
DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE AU NIVEAU DU
PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE**

GRECO "DIDACTIQUE ET ACQUISITION DES CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES"
GROUPE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE - ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

PUBLIC : Enseignants de Mathématiques et de Physique de l'Enseignement
Supérieur.

DIFFUSE PAR L'I.R.E.M ET LE L.D.P.E.S

**PROCEDURES DIFFERENTIELLES DANS LES ENSEIGNEMENTS
DE MATHEMATIQUES ET DE PHYSIQUE AU NIVEAU DU
PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE**

GRECO "DIDACTIQUE ET ACQUISITION DES CONNAISSANCES SCIENTIFIQUES"
GROUPE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE - ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Cette brochure constitue le rapport final d'une recherche pluridisciplinaire sur la notion de différentielle menée dans le cadre du GRECO "Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques" du CNRS (thème "Enseignement supérieur : mathématiques et physique").

Cette recherche a été menée par des didacticiens appartenant à trois équipes :

- l'équipe de didactique des mathématiques de l'IREM Paris 7 : DIDIREM,
- le laboratoire de didactique de la physique dans l'enseignement supérieur : LDPES
- l'équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de l'Université de Grenoble I

Y ont participé :

Daniel Alibert, Denise Grenier, Marc Legrand et Françoise Richard pour l'équipe de Grenoble, Michèle Artigue et Maryvonne Hallez pour DIDIREM, Jean Marie Courdille, Jacqueline Ménigaux et Laurence Viennot pour le LDPES.

Cette recherche a fait l'objet de deux subventions contractuelles : la première, dans le cadre de l'Action Concertée Education et Formation, a concerné les travaux de DIDIREM et du LDPES, la seconde, dans le cadre de l'ATP "Transitions dans le Système Educatif", a concerné l'équipe de Grenoble.

La première partie de ce rapport reprend, avec quelques légères modifications, le texte de la présentation faite par le groupe : "Enseignement supérieur : mathématiques et physique" au Colloque du Greco Didactique qui s'est tenu à Sèvres en mai 1987. Elle est complétée par six annexes présentant de manière plus détaillée un certain nombre des travaux réalisés dans le cadre de la recherche. L'annexe VII, constitue, quant à elle, une mise au point sur la notion de différentielle et les procédures différentielles et intégrales, adaptée au niveau d'enseignement envisagé dans la recherche. L'annexe VIII, enfin, fournit la liste des publications associées à cette recherche.

En ce qui concerne ces publications, nous voudrions mentionner tout particulièrement la brochure : "Questionnaires de travail sur les différentielles". Il s'agit d'une brochure destinée aux enseignants de mathématiques et de physique, enseignant au niveau du premier cycle, à l'Université, en IUT ou dans les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles. Elle reprend la plupart des questionnaires élaborés pour les besoins de la recherche, en les présentant comme des outils possibles pour l'enseignement. Elle est diffusée avec un questionnaire d'évaluation qui, nous l'espérons, nous permettra d'étudier l'efficacité d'une telle démarche.

Pour terminer cette introduction, nous voudrions remercier tous les collègues qui nous apporté leur concours dans la réalisation de cette recherche, en acceptant de soumettre des questionnaires à leurs étudiants, de répondre eux-mêmes à certains d'eux ou d'expérimenter les séances d'enseignement que nous avons élaborées.

Paris, janvier 1989.

LE THEME "DIFFERENTIELLES"

UN EXEMPLE DE COOPERATION MATHS-PHYSIQUE DANS LA RECHERCHE

I - INTRODUCTION

Le thème "différentielles", sur lequel nous avons choisi de centrer l'exposé des travaux du groupe Math/Physique/Enseignement Supérieur, est en quelque sorte un thème idéal pour nouer une collaboration entre didacticiens des mathématiques et de la physique : c'est en effet, de notoriété publique, un point de cristallisation des conflits entre les enseignants des deux disciplines, et ceci crée un véritable défi didactique.

LA PREHISTOIRE DE LA RECHERCHE

Ce défi, nous l'avons "pédagogiquement" relevé dans la section expérimentale de DEUG créée à l'Université Paris 7, en 1979/80. L'analyse du fonctionnement de l'enseignement dans cette section en 79/80 et en 80/81, l'échec partiel des tentatives de coordination entre mathématiciens et physiciens avaient, nous semblait-il, révélé certains noeuds du conflit (cf.[1]) :

- les différences de statut de l'objet différentiel : application linéaire tangente pour le mathématicien, essentiellement petit accroissement d'une grandeur physique pour le physicien,

- les différences de rôle et d'utilisation : faible rôle en mathématiques, l'enseignement se focalisant sur l'algorithmisation liée au calcul et à la manipulation des dérivées partielles et matrices jacobiniennes ; utilisation en revanche extrêmement fréquente en physique dans les calculs approchés et dans la mise en équation de problèmes conduisant soit au calcul de grandeurs globales par sommation de quantités élémentaires (intégrales), soit à l'obtention de lois de variation globales à partir de relations locales (équations différentielles).

Cette expérience nous avait amenés aussi à schématiser de la façon suivante les points de vue des enseignants des deux disciplines :

- les physiciens jugeaient inutilement lourdes et compliquées les notions, notations et méthodes préconisées par les mathématiciens. Pour eux, il n'y avait pas vraiment là de problème didactique : certes, les étudiants avaient quelques difficultés au début mais ensuite, l'habitude aidant, tout finissait par s'arranger. Les méthodes qu'ils utilisaient étaient pratiques et efficaces, pourquoi les auraient-ils modifiées ?

- les mathématiciens étaient tout aussi sûrs d'eux. Ils se posaient en champions de la rigueur et se sentaient capables de l'exporter en physique. Les réticences manifestées par les physiciens leur apparaissaient comme les survivances d'un lointain archaïsme. Un bon objet : l'application linéaire tangente, des notations précises et non ambiguës, des méthodes explicites et rigoureuses dans le cadre fonctionnel devaient lever à leurs yeux l'essentiel des problèmes d'enseignement.

Notons qu'à l'époque déjà, certains faits mettaient en cause des interprétations aussi simplistes, en particulier les résultats des tests math/physique régulièrement organisés

(nombreuses erreurs dans les exercices de mise en équation, coupure persistante entre les modes de résolution mathématiques et physiques, difficultés avec les notations mathématiques introduites... (cf.[1]).

La création du GRECO en 1984 a été l'occasion de reprendre ce travail, en respectant l'approche interdisciplinaire initiale, mais dans une perspective proprement didactique, en se fixant comme objectif prioritaire la compréhension de l'économie du système d'enseignement, dans ce domaine, dans les deux disciplines.

L'ORGANISATION DE LA RECHERCHE

LES EQUIPES

Trois équipes du GRECO y ont participé : la Jeune Equipe CNRS de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble avec D.Grenier, M.Legrand, F.Richard et, plus récemment D.Alibert, le Laboratoire de Didactique de la Physique dans l'Enseignement Supérieur de l'Université Paris 7 avec J.Ménigaux, L.Viennot et plus récemment J.M.Courdille, l'Equipe de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'IREM Paris 7, de la même Université avec M.Artigue et M.Hallez, M.Artigue et L.Viennot ayant par ailleurs participé à la mise en place de la section expérimentale initiale.

LES DIRECTIONS DE RECHERCHE

Compte-tenu des résultats des travaux préliminaires, les recherches se sont alors orientées dans trois directions (cf. le rapport intermédiaire du GRECO en 1985) :

- l'analyse des objets d'enseignements actuels et une étude de leur évolution historique pour repérer, si possible, l'origine de la coupure constatée entre les approches des deux disciplines,

- l'analyse des conceptions des étudiants et la détermination dans les difficultés rencontrées à propos de mises en équations de problèmes, des facteurs propres à l'aspect différentiel et des facteurs plus généraux comme ceux liés à la prise en compte de l'aspect fonctionnel des grandeurs utilisées,

- l'élaboration, l'expérimentation et l'évaluation d'ingénieries didactiques dans ce domaine.

LA COLLABORATION ENTRE EQUIPES

La collaboration entre les trois équipes devait permettre de mener à bien, nous semblait-il, dans un délai raisonnable, un tel projet. Elle ne fut pas rigoureusement planifiée dès le début du travail mais chaque équipe essaya plutôt, tout en conservant ses problématiques et méthodologies propres, d'apporter sa contribution à une ou plusieurs des questions posées concernant l'enseignement, les conceptions des étudiants, la possibilité d'ingénieries didactiques adaptées.

En effet, mathématiciens et physiciens avaient des "traditions" de recherche et des problématiques sensiblement différentes :

- pour l'équipe physicienne, il s'agissait d'une tradition liée à l'étude des raisonnements des étudiants, alliée à une méthodologie privilégiée d'utilisation de questionnaires, en particulier sous forme d'explications de textes, et d'une problématique globale d'étude des dépendances fonctionnelles (cf. [2],[3] par exemple),

- pour les deux équipes de mathématiciens, il s'agissait d'une tradition d'approche systémique des phénomènes didactiques conduisant à centrer l'analyse sur les interactions maître/élève/savoir, avec une méthodologie expérimentale faisant, en conséquence, une part privilégiée à l'ingénierie didactique.

L'équipe grenobloise était d'autre part engagée dans une recherche sur la notion de débat scientifique, les différentes catégories qu'elle recouvre, les conditions d'établissement en situation d'enseignement, les modes d'évaluation qui doivent l'accompagner et les techniques pédagogiques transmissibles pour ce type d'enseignement (cf. [4]).

L'équipe parisienne était, elle, particulièrement intéressée à l'étude du pôle savoir de la relation didactique et espérait approfondir, à l'occasion de cette recherche, le concept de transposition didactique introduit par Y.Chevallard (cf.[5]).

Par la suite, les réunions de coordination permirent, tout en respectant ces préoccupations spécifiques, de mettre en place une réelle collaboration : mise au point commune de questionnaires, utilisation de questionnaires ou de situations problèmes élaborés par d'autres, utilisation pour l'analyse de l'enseignement en physique de classifications élaborées lors de l'étude mathématique, par exemple.

Ces réunions furent aussi l'occasion de confronter méthodologies, résultats et interprétations, de chercher à identifier dans la diversité des travaux menés les lignes de force permettant une analyse cohérente, d'infléchir ensuite dans certains cas nos directions de recherche pour tester ces cohérences hypothétiques.

Il résulte ainsi de l'activité du groupe un ensemble de travaux que nous percevons un peu comme les pièces d'un puzzle. A nos yeux, c'est l'assemblage cohérent de ces pièces qui détermine la validité de la recherche.

LES DIFFERENTS TRAVAUX MENES

L'analyse menée dans les paragraphes suivants essaiera de faire ressortir la cohérence des résultats obtenus suivant quelques lignes de forces essentielles. Elle s'appuiera, sans détailler nécessairement chacun d'eux, sur l'ensemble des travaux menés. Il nous semble nécessaire, avant de nous lancer dans cette synthèse de dresser au moins la liste de ces travaux.

Nous reprendrons pour dresser cette liste la séparation en trois directions de recherche précédemment introduite, les nouveaux titres donnés essayant de rendre compte de l'évolution au cours de la recherche.

ANALYSE DES OBJETS DE SAVOIR ET D'ENSEIGNEMENT

Les études menées dans ce domaine ont concerné :

- l'évolution du statut de la notion de différentielle dans le savoir scientifique, l'apparition de la notion de différentiabilité, le passage au statut d'application linéaire tangente,

- les programmes et instructions de mathématiques de l'enseignement secondaire, des classes préparatoires aux grandes écoles, depuis le début du siècle, la comparaison de ces derniers avec les programmes universitaires,

- l'introduction de la notion de différentielle dans divers traités et manuels de mathématiques choisis pour leur représentativité, de la fin du dix-huitième siècle à nos jours,

- les débats sur l'enseignement des différentielles dans la revue l'Enseignement des Mathématiques, depuis sa création en 1898 (18 articles concernés),

- l'introduction et l'utilisation du langage différentiel dans divers manuels de physique, depuis le début du siècle.

ETUDE DES CONCEPTIONS DES ETUDIANTS ET DES ENSEIGNANTS

Dans cette rubrique, les travaux suivants ont été réalisés :

- élaboration d'un questionnaire visant à tester les différents registres mathématiques associés à la différentiabilité ainsi que la possibilité de s'y référer pour justifier des calculs d'incertitudes, d'aires ou de volumes (deux versions successives ont été réalisées et soumises respectivement à 35 et 50 étudiants de niveau licence en mathématiques),

- un questionnaire enseignant math/physique, approximativement sur les mêmes thèmes, pour lequel nous n'avons malheureusement recueilli que peu de réponses,

- un ensemble de 8 questionnaires de physique ayant donné lieu à environ 500 réponses d'étudiants et 38 réponses de "pré-experts". Les thèmes explorés sont : les conditions dans lesquelles l'emploi des différentielles est utile, "l'exactitude" des procédures différentielles et intégrales et la légitimité des démonstrations associées, enfin le statut de l'élément différentiel, notamment du point de vue fonctionnel,

INGENIERIE DIDACTIQUE

Dans ce cadre, les travaux suivants ont été réalisés :

- expérimentation, dans trois groupes de travaux dirigés de DEUG première année, d'un atelier de mise en équation de problèmes,

- expérimentation dans une section de DEUG première année d'un enseignement d'intégration portant sur 12 séances en 1984/85 et sur 14 séances en 1985/86,

- organisation d'ateliers interdisciplinaires dans une section de DEUG première année.

Pour toutes ces expérimentations, des enregistrements des phases collectives ont été effectués.

II - LES APPORTS DE L'APPROCHE HISTORIQUE

Trois questions nous paraissent essentielles, dans ce cadre, compte-tenu de notre problématique :

- dans quelles circonstances, la notion de différentielle introduite par G.W.Leibniz vers 1675 a-t-elle pris, dans le savoir mathématique, le statut fonctionnel qui est le sien actuellement ?

- comment a évolué l'enseignement dans ce domaine ?

- comment ont évolué les rapports math/physique ?

Essayons de voir dans quelle mesure les études menées apportent à ces questions des éléments de réponse.

LE PASSAGE AU STATUT FONCTIONNEL

Même si, à partir des travaux d'Euler, il est clair que l'analyse infinitésimale s'inscrit dans une perspective fonctionnelle (cf. par exemple J.Dhombres [6]), la différentielle, définie par Leibniz comme un petit accroissement, n'a réellement acquis le statut d'application linéaire tangente que nous lui connaissons aujourd'hui qu'au début du 20ème siècle. A la fin du 19ème siècle, ce sont les notions de dérivée et de dérivées partielles qui dominent le calcul différentiel. La notion de différentielle se situe très en retrait. Définie à la suite des travaux de Cauchy comme le produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable, elle tend à se dégager, au moins au niveau de sa définition, de la métaphysique des infiniment petits et du registre de l'approximation, pour prendre un caractère de plus en plus formel (cf. A.Voss [7]). Le changement de statut, dans ce contexte, va se situer à la conjonction de deux problématiques :

- la première consiste à déterminer, pour les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel classique à plusieurs variables, des hypothèses minimales susceptibles de se substituer aux hypothèses grossières que le souci accru de rigueur et la mise en évidence de pathologies ont conduit à introduire dans les énoncés. Cette problématique conduit à la définition de la différentiabilité par O.Stolz en 1893 [8], et indépendamment par W.H.Young en 1908 [9], ce dernier soulignant le parallélisme qui s'établit à travers cette notion entre les énoncés du calcul à une et plusieurs variables. Mais si elle resitue la différentielle dans le registre de l'approximation, l'introduction de la différentiabilité ne modifie pas fondamentalement son statut qui reste celui d'une expression.

- la deuxième consiste à étendre le calcul différentiel aux fonctions d'une infinité de variables. A son origine se situent les travaux du mathématicien italien Volterra sur les fonctions de ligne [10]. Pour généraliser à ce cadre fonctionnel la notion de différentielle et pallier l'absence de dérivées partielles, M.Fréchet remanie à son tour les définitions du calcul différentiel classique, revenant au registre de l'approximation et reformulant la vieille présentation de la différentielle comme partie principale de l'accroissement qui avait été fortement critiquée. Il arrive ainsi à une définition équivalente à celles de Stolz et Young. Mais la perspective fonctionnelle le conduit à voir, au-delà de l'expression différentielle, l'application linéaire tangente et à expliciter ce caractère fonctionnel [11].

Diverses définitions concurrentes de la différentiabilité seront proposées, à cette époque, privilégiant les propriétés d'invariance formelle comme celle d'Hadamard [12], ou cherchant à se ramener, par le biais de dérivées directionnelles, à la dérivation des fonctions d'une variable (Gateaux [13], Lévy [14]) mais la définition de Fréchet qui se généralise immédiatement aux espaces normés, deviendra la définition classique.

L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT

Nous nous limiterons ici, bien que l'étude menée ait été plus large, au 20ème siècle et à l'enseignement supérieur élémentaire (premier cycle des Universités, classes préparatoires aux Grandes Ecoles).

1 - LES PROGRAMMES ET INSTRUCTIONS

- En mathématiques, l'analyse des programmes et instructions montre que cette évolution du statut de la différentielle n'a été prise en compte que tardivement dans l'enseignement.

Prenons l'exemple des classes préparatoires aux Grandes Ecoles. La différentielle est officiellement au programme à partir de la réforme de 1903, mais réduite jusqu'aux années soixante au rôle d'outil de calcul formel :

"Les élèves doivent être exercés à calculer directement avec les différentielles comme avec les dérivées ; ils doivent s'en servir couramment lorsque le choix des variables indépendantes reste arbitraire, et savoir les utiliser pour des changements de variables simples et dans les calculs de fonctions implicites."

(commentaires du programme de 1925, repris lors de la réforme de 1956)

Un changement timide s'amorce en 1964 mais il faut attendre la réforme de 1972 pour que l'enseignement soit unifié autour de la notion "moderne", présentée dans le cadre d'espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$:

"L'obligation nouvelle d'introduire la notion d'application différentiable modifie assez sensiblement l'étude du calcul différentiel."

(commentaires du programme de 1972)

Enfin, la dernière réforme en date, celle de 1984, vise à "revaloriser une approche intuitive et concrète des mathématiques sans pour autant sacrifier la rigueur". En analyse, il s'agit en particulier d'éviter la recherche d'hypothèses minimales, au profit de la mise en place de méthodes efficaces pour un ensemble assez large de situations. Ceci conduit à se limiter au cas C^1 en première année, en insistant plus sur l'aspect approximation via la notion de développement limité à l'ordre 1 que sur le statut fonctionnel de la différentielle.

Notons que l'évolution des programmes universitaires précède de plus de dix ans celle des programmes des classes préparatoires dans ce domaine, la présentation moderne intervenant dès les programmes de 1958.

- En physique, la situation est tout autre : la différentielle est un outil et non un objet d'enseignement explicite, étiqueté comme tel dans les programmes. A ce titre, elle fait néanmoins l'objet d'une présentation officielle dans les rappels de mathématiques qui servent de préliminaires ou d'annexes à de nombreux ouvrages. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

2 - LES MANUELS

- En mathématiques, l'analyse menée porte sur une vingtaine d'ouvrages dont la première édition se situe entre 1875 et 1985, choisis pour leur représentativité.

Cette étude confirme ce que laissent supposer les programmes et notamment la stabilité formelle de la notion sur la première moitié du siècle en même temps que sa marginalité. Par exemple, dans *"L'introduction à la théorie des fonctions d'une variable"*, 1ère édition (1886), 2ème édition (1904), J.Tannery, ne mentionne même pas la notion de différentielle.

Il existe dès le début du siècle quelques ouvrages connaissant une audience certaine qui, comme ceux déjà cités de Stolz et Young, définissent la différentiabilité (par exemple ceux de Pierpont [15] et de La Vallée Poussin [16]). Mais, dans la plupart des ouvrages, la présentation est celle héritée de Cauchy et Duhamel : la différentielle est définie comme produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable et la différentielle totale, dans le cas de fonctions de plusieurs variables, comme la

somme des différentielles partielles, sans que les problèmes de différentiabilité soient évoqués. Et même le mathématicien P.Lévy, qui a été au coeur du développement de l'analyse fonctionnelle, présente en 1949/50, dans son cours à l'Ecole Polytechnique [17], exactement les mêmes rappels sur les différentielles qu'en 1928/29, mettant l'accent sur les seules propriétés d'invariance formelle.

Il faut souligner aussi que la correction des énoncés fondamentaux du calcul différentiel (théorème de Schwarz, théorème des fonctions composées par exemple) n'est acquise que progressivement, les conditions de validité apparaissant au détour des démonstrations, avant d'être intégrées dans les énoncés.

Face à cette stabilité, la réforme des années 72 apparaît comme une rupture, même si des ouvrages comme le Cagnac, Ramis, Commeau [18] témoignent quelques années auparavant du changement qui s'amorce. Le Lelong-Ferrand, Arnaudès [19], dont la première édition remonte à 1972, est en quelque sorte le reflet typique de cette nouvelle approche.

Parallèlement, il y a passage d'une problématique du calcul à ce que l'on pourrait appeler une problématique de la définition. Les exercices visant à préciser la situation du concept par rapport aux concepts voisins se multiplient (rapports différentiabilité/existence de dérivées partielles/continuité...).

L'algorithmisation, nettement marquée par l'algèbre linéaire, concerne l'autre versant des exercices et les applications qui se couleraient plus difficilement dans ce moule tendent à disparaître.

- En physique, l'étude menée qui porte sur des manuels publiés depuis le début du siècle et des photocopiés rédigés depuis 1968, montre qu'à partir de 1964-65 apparaissent dans beaucoup d'ouvrages des préliminaires ou annexes comportant des rappels ou compléments de mathématiques. La notion de différentielle y est présentée.

L'analyse des registres de définition, reprenant les catégories définies dans la grille mathématique, montre que dominant deux registres : le registre de type Cauchy déjà décrit et le registre "développement limité à l'ordre 1", une évolution vers ce dernier se produisant depuis 1974 environ. La définition en termes d'application linéaire tangente ne figure que dans deux ouvrages publiés après 1984 : Le Bellac [20] et Hulin et Coll. [21] (il se trouve que leurs auteurs ont été en contact avec nos travaux).

Lorsqu'elles sont données, essentiellement dans les photocopiés, les justifications avancées pour l'utilisation des différentielles sont associées au calcul d'incertitudes. Le registre de la mise en équation est, en général, à peine suggéré. On se borne à insister sur la simplification apportée par l'utilisation des différentielles dans les calculs, en ne mentionnant que très rarement le lien entre simplification et linéarité.

Au niveau de la mise en oeuvre effective des différentielles dans les mises en équation de problèmes, la plupart des documents ne fournissent que des recettes d'utilisation, l'usage de quelques mots clefs comme "élément", "petit élément", "élémentaire", tenant lieu de légitimation de la procédure employée. Ces quelques extraits en témoignent :

"En passant à la limite, nous remplaçons le signe $\sum$ par le symbole intégrale et les Δ par des d ." (Kroning [22])

"Découpons la sphère en tranches circulaires et considérons une tranche comprise entre z et $z+dz$. C'est pratiquement un cylindre de rayon r et de hauteur dz ... Son volume est $dv = \pi r^2 dz$." (Gié [23])

"Pour dm , on commence à écrire $dm = \sigma ds$ où ds est donné par le produit du périmètre de cette couronne, $2\pi R \sin \theta$, par l'élément de corde $R d\theta$." (Valentin [24])

LES RELATIONS MATHS/PHYSIQUE

Les relations maths/physique sont rarement abordées explicitement dans les programmes. On trouve néanmoins dans les commentaires des programmes de mathématiques, en 1964 :

"L'important est que les élèves sachent utiliser les différentielles dans les problèmes de changement de variables, qu'ils aient compris aussi quel raisonnement correct mais fort abrégé on fait souvent en physique quand on "assimile" différentielles et accroissements, quelques exemples tirés de la physique seront utiles."

En fait les diverses sources consultées montrent clairement que la coupure maths/physique, à laquelle ces commentaires font allusion, est déjà consacrée au début du siècle et déjà posée en termes de conflit entre rigueur et opérationnalité. A.Voss, par exemple, dans son article de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques, [8], oppose l'inutilité théorique de la différentielle à son importance pratique. Et il ajoute que les applications de l'analyse infinitésimale à l'étude des phénomènes physiques sont facilitées lorsqu'on se place à un point de vue différent du point de vue rigoureux de Cauchy, c'est à dire lorsque l'on "entend par le symbole dy , non pas la différentielle $f'(x)dx$ mais un accroissement variable suffisamment petit de la fonction $y = f(x)$ ".

Mais il faut reconnaître que si la coupure existe, elle n'est sans doute pas vécue comme à l'heure actuelle. Certes, on critique déjà les compléments sur le calcul infinitésimal écrits à l'usage des physiciens : "la honte de la littérature mathématique" écrit M.Timerling dans un ouvrage cité par le rapport Beke [25], publié en 1914, à l'issue d'une enquête de la CIEM (Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques).

Mais d'une part, le souci de fournir un enseignement des mathématiques utile pour la physique est encore très présent. H.Poincaré, par exemple écrit justement à propos des différentielles [26] :

"C'est ainsi que l'on apprendra à raisonner correctement sur les infiniment petits, qu'on se familiarisera avec la théorie des petites erreurs, si importante en physique, qu'on comprendra comment des petites variations des données peuvent influencer sur le résultat : et cela aussi, les physiciens ne s'en plaindront pas."

D'autre part, on pense généralement que cette coupure n'est que provisoire. L'évolution récente, à l'époque, de l'enseignement des mathématiques dans ce domaine, le fait que des problèmes de rigueur y subsistent encore, par exemple au niveau des calculs d'aires et de volumes, renforcent cet optimisme. L'extrait suivant du rapport Beke témoigne de cet état d'esprit :

"Nous sommes loin de considérer la transformation de l'enseignement de la physique, comme achevée dans tous les états, mais l'intérêt de l'enseignement secondaire exige impérieusement que les idées nouvelles dont nous aspirons à la réalisation dans l'enseignement mathématique pénètrent à fond l'enseignement physique. Celui-ci deviendra plus vrai, plus sincère, plus simple, plus économique, plus complet par les forces et le temps gagnés et il réagira, à son tour, sur l'enseignement mathématique en le rendant plus pratique, plus facile à comprendre, plus uni et répondant mieux à l'idéal scientifique".

Quatre vingt ans plus tard, on peut penser que H.Poincaré était plus lucide. En effet, il écrivait, en 1904, [26] :

"Croit-on que les mathématiques aient atteint la rigueur absolue sans faire de sacrifice?... C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis la pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière et il faudra les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique."

EN CONCLUSION

Divers points ressortent de cette partie de la recherche :

1- Le statut fonctionnel achevé de la différentielle est apparu historiquement pour les besoins de l'analyse fonctionnelle et non pour ceux du calcul différentiel classique à une ou plusieurs variables. Bien sûr, il n'est pas question d'en déduire que l'accès des étudiants à une vision fonctionnelle des différentielles passe nécessairement par un cheminement analogue. Les contraintes de la genèse historique et celles d'une genèse scolaire sont, on le sait, bien différentes. De plus, la banalisation de l'algèbre linéaire change, dans ce cas particulier, radicalement les données du problème. Mais on peut cependant supposer que la maîtrise du registre de l'approximation, essentielle ici, peut commencer à se développer efficacement, pour le calcul différentiel classique, sans l'explicitation complète du statut fonctionnel. Il semble bien d'ailleurs que les récents programmes de mathématiques aillent dans ce sens.

2- En mathématiques, la notion de différentielle est restée dans l'enseignement, pendant toute la première moitié du siècle, un simple outil de calcul formel. C'est, comme en témoignent de nombreux débats, à la fois un outil apprécié pour l'accès algorithmique au calcul différentiel et intégral qu'il autorise, et un objet de méfiance, du fait de son association historique à une pratique mathématique moins soucieuse de rigueur que d'efficacité, de sa charge métaphysique, de l'ambiguïté des notations et des risques de dérapage formels chez les débutants. Les conditions se modifient radicalement dans les années soixante. Le développement de l'enseignement de l'algèbre linéaire, l'esprit des réformes, favorisent l'introduction de la différentielle sous sa forme moderne : application linéaire tangente, et c'est théoriquement autour de la différentiabilité que s'unifie l'enseignement du calcul différentiel. Mais, dans la pratique, le registre algorithmique formel associé au calcul de dérivées partielles et matrices jacobiniennes domine toujours celui de l'approximation.

3- En physique, la différentielle n'est pas un objet d'enseignement officiel mais un outil. La présentation qui en est faite, à partir des années soixante, sous forme de rappels ou d'annexes, est marquée par la référence quasi-exclusive au registre du calcul d'incertitudes, l'utilité y apparaissant liée, de façon floue, à l'idée de simplification des calculs. Les procédures de mise en équation différentielle de problèmes sont, quant à elles, présentées comme des recettes. Au mieux note-t-on l'explicitation d'une convention de calcul au premier ordre par rapport aux accroissements des variables.

4- La coupure entre les enseignements des deux disciplines que nous vivons actuellement est déjà présente au début du siècle, même si elle est vécue avec plus d'optimisme, du fait de l'évolution récente, à l'époque, de l'enseignement des mathématiques vers la rigueur, dans ce domaine. Ne faut-il pas voir dans cette opposition qui se formule déjà en termes de conflit entre rigueur et opérationalité, l'expression d'un conflit entre deux types de savoir, savoir "savant" d'une part, savoir

"d'utilisation" de l'autre, soumis à des exigences et des critères de validation distincts et peut-être difficilement compatibles ?

III - L'APPORT DES QUESTIONNAIRES

Les éléments que nous avons rassemblés à propos de l'évolution historique du statut de la différentielle - objet de savoir et objet d'enseignement - rejoignent ceux que nous ont apportés nos premiers tâtonnements sur le terrain pour suggérer les lignes suivantes d'analyse :

- Enquête d'utilité : quels sont, pour nos étudiants, les registres d'utilisation des différentielles en mathématiques et en physique ?

- Registre approché-exact : comment nos étudiants évaluent-ils l'aspect exact ou approché des résultats obtenus par les procédures différentielles et intégrales, la rigueur des démonstrations ?

- Le statut fonctionnel des différentielles : quel statut nos étudiants attribuent-ils à l'élément différentiel, jusqu'à quel point perçoivent-ils la nature fonctionnelle des relations différentielles ?

Sur ces thèmes, qui bien évidemment s'entrecroisent, les questionnaires élaborés en mathématiques et en physique ont permis de rassembler les éléments suivants :

L'ENQUETE D'UTILITE

1- En mathématiques, la différentielle est, on l'a vu, actuellement introduite comme une notion liée à l'approximation locale mais, dans le même temps, les exercices usuels, à ce niveau élémentaire, soit se situent dans le registre que nous avons qualifié de registre de définition, soit visent la mise en place d'un certain nombre de pratiques algorithmiques où dominent le calcul des dérivées partielles et matrices jacobiniennes.

Les réponses des étudiants aux questionnaires témoignent directement ou indirectement de cet état de fait :

A la question q1 (cf. encadré I), les réponses concernant les points fondamentaux se répartissent comme suit :

- 33 citent les liens entre différentiabilité, dérivabilité, continuité, existence de dérivées partielles....,
- 11 citent le registre algorithmique décrit ci-dessus,
- 10 citent le rôle de la différentielles pour l'approximation locale,
- 5 la propriété de la différentielle d'être une application linéaire,
- 2 enfin les problèmes de notation.

Le registre de la définition domine donc ici et devance nettement les registres algorithmiques et d'approximation qui apparaissent, eux, avec des pourcentages très proches. Au delà de ce niveau "déclaratif", les réponses aux autres questions montrent en revanche le poids dominant du registre algorithmique.

Ainsi, pour répondre à la question q2 et montrer que la fonction f est différentiable, alors que cette fonction est explicitement donnée sous forme de développement limité à l'ordre 1, 62% des étudiants se précipitent dans le calcul des dérivées partielles de f . Onze seulement reconnaissent le développement limité et il faut souligner qu'ils font tous partie des 35 étudiants ayant passé le test à l'issue d'un enseignement de calcul différentiel où l'approche "développement limité" a été explicitement favorisée.

En revanche, le calcul de dérivée partielle seconde de fonction composée, question q3, bien que situé en fin de questionnaire est abordé par 86% des étudiants.

Ces indications sur l'importance du registre algorithmique sont encore renforcées par la réticence des étudiants à aborder des questions d'autres types. Ainsi celles qui portent sur le calcul d'incertitude (q4) ou bien sur la validité de la procédure de découpage en tranches (q5) sont-elles très peu traitées. De même celle qui concerne l'interprétation géométrique de la différentielle en termes de plan tangent (q6). Toutes ces questions non algorithmiques apparaissent semble-t-il comme "hors contrat".

ENCADRE I : EXTRAITS DES QUESTIONNAIRES MATHÉMATIQUES

Q1 : Si un étudiant de premier cycle venait vous demander ce qu'est une différentielle,

- quelle définition donneriez-vous ?
- quelles notations utiliseriez-vous ?
- sur quels exemples vous appuyeriez-vous ?
- sur quels points fondamentaux insisteriez-vous tout particulièrement ?

Q2 : La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = 2x + 4y + y^3[\sqrt{1-\cos x} + x]$$

est-elle différentiable au point $(0,0)$? Justifiez votre réponse.

Q3 : Soient g et h des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ deux fois continuellement différentiables et f la fonction définie par :

$$f(x,y) = g(y, h(x,y))$$

Calculer la dérivée partielle seconde : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Q4 : Pouvez vous, en utilisant les différentielles, justifier les formules bien connues du calcul d'incertitudes :

$$\Delta uv / uv = \Delta u / u + \Delta v / v \quad \Delta(u/v) / (u/v) = \Delta u / u - \Delta v / v$$

Q5 : Pour calculer des volumes en physique, on les coupe souvent en tranches élémentaires et on approche les tranches par des cylindres.

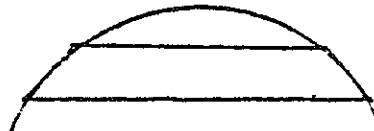
Pourquoi des cylindres ? Si on prend une autre approximation, est-on sûr de trouver le même résultat final ?

Par exemple, pour la sphère, si on approche

- par les troncs de cône engendrés par les cordes :



- par les troncs de cône engendrés par les tangentes :



Q6 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \exp(y^2+x) \cdot \sin(x \cdot y)$$

- Déterminer la différentielle de f au point $(1,0)$ et en donner une interprétation géométrique.

- En déduire une valeur approchée de $f(1.001, 0.01)$.

2- En physique, les étudiants de première année de DEUG voient les différentielles s'introduire, bien souvent, de façon urgente sinon précipitée, "parce qu'on en a besoin" en mécanique, en thermodynamique. Nous avons voulu savoir si, et comment, ils pouvaient caractériser ce besoin, qui ne s'était pas du tout manifesté lors de leurs études secondaires.

Dans un premier questionnaire, cette question se présente à propos d'un calcul particulier : celui de la pression atmosphérique. On donne l'amorce du calcul, découpage en tranches et bilan de forces à l'appui, jusqu'à l'expression différentielle :

$$dp = -\rho g dz \quad (\rho : \text{masse volumique, cf. encadré II})$$

qui est censée concerner un "élément de volume".

Interrogés sur la nécessité de considérer la hauteur dz comme "petite", des étudiants de première année universitaire ($N = 18, 26, 49$, pour ce test) répondent massivement oui (83%, 96%, 90%).

Cette unanimité s'assortit d'abondantes références aux termes "tranche", "élémentaire",... Dans des arguments mieux spécifiés, on relève la dépendance de la pression vis à vis de l'altitude (66%, 15%, 35%). La dépendance de ρ par rapport à z , qui différencie ce problème des problèmes linéaires du secondaire, n'est, elle, évoquée que très minoritairement (0%, 11%, 12%).

ENCADRE II

Lire				
		Soit un élément de volume cylindrique de surface de base (horizontale) S et de hauteur dz .		
Force due à la pression sur la face inférieure		$S.p(z).\vec{u}_z$		
Force due à la pression sur la face supérieure		$S.p(z+dz).(-\vec{u}_z)$		
Poids		$\rho g.S.dz(-\vec{u}_z)$		
Equilibre des forces		$S.p(z) - S.p(z+dz) - \rho g.S.dz = 0$ $dp = -\rho.g.dz$		
Question :				
dz est supposée PETITE				
Est-ce nécessaire ?	OUI	1ère année Universitaire n=18 n=26 n=49		
Si oui pourquoi ?		car $p(z)$ car $\rho(z)$ ou $g(z)$		
Est-ce nécessaire s'il s'agit d'EAU ?	NON			

Ce dernier point est confirmé par les questions suivantes du même questionnaire, où l'on demande si ce calcul est d'une part légitime, d'autre part nécessaire, pour le calcul d'une pression hydrostatique, la masse volumique étant cette

fois constante. La nécessité de la procédure différentielle, dans ce cas hydrostatique, est encore affirmée (58%, 30%). Et (15%, 13%) seulement des étudiants signalent que, ρ étant uniforme dans le cas de l'eau, la relation linéaire entre p et z est légitimée d'emblée.

Ces premiers résultats sont confirmés par un sondage auprès d'étudiants de l'ENSET (Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique) (4 abstentions sur 8, 3 réponses correctes sur 8 pour ce questionnaire), ainsi que par les réponses d'étudiants de première année universitaire ($N = 55$) ou de mathématiques spéciales ($N = 44$) à un questionnaire demandant, directement cette fois, ce qui rend nécessaire l'emploi des différentielles. L'ensemble de toutes ces réponses suggère fortement que les étudiants n'ont guère eu l'occasion d'explicitier, ni d'entendre expliciter à quel besoin répond l'introduction des procédures différentielles, ni quelle difficulté (la non-linéarité) est ainsi contournée.

Ce thème des registres d'utilisation en mathématiques et en physique fait donc apparaître peu d'interactions entre les deux disciplines et, dans les deux cas, une prédominance de procédures algorithmiques sur les préoccupations de légitimité d'utilité ou d'interprétations.

REGISTRE APPROCHE/EXACT

Une notion tout à fait constitutive de celle de différentielle est celle d'approximation. Il est surprenant qu'elle se soit aussi peu manifestée dans les résultats de notre enquête d'utilité, en particulier en physique.

1- En mathématiques, nous avons déjà signalé, malgré la présence de références à l'approximation, le peu de faveur dont jouissaient les questions portant sur le traitement des approximations ou la rigueur des démonstrations. Lorsqu'elles sont abordées, ces questions sont souvent mal traitées. Ainsi sur les 31 étudiants qui abordent l'interprétation géométrique dans q6, 8 seulement parlent de plan tangent et sur les 11 qui répondent à q5, 4 seulement proposent des justifications acceptables basées sur l'ordre de grandeur de la quantité négligée (2) ou le parallèle avec l'intégrale de Riemann (2).

Il faut souligner de plus que :

- plus de la moitié des développements limités produits dans les différents exercices sont incorrects et que, massivement, les erreurs se situent au niveau des restes,

- sur les étudiants qui dans la question q2 cherchent à montrer que la partie non linéaire est un reste, 2 seulement aboutissent.

Il semble bien que pour la plupart, la rigueur dans la manipulation des approximations se réduise à l'écriture d'un " ϵ ", " o " ou " O ", au choix, à la fin des expressions.

2- En physique, nous avons voulu savoir si, pour nos étudiants, ce registre de l'approximation, qui est celui des exemples introductifs classiques, se conciliait avec le caractère rigoureux des calculs fondés sur les relations différentielles (intégrations ou résolutions d'équations différentielles).

Un premier questionnaire proche de celui sur la pression atmosphérique nous apprenait qu'une petite moitié d'étudiants universitaires de première année admettait que le résultat d'une intégration :

$$F = \int_0^H \text{pression}(z).d(\text{surface}(z))$$

était exact, alors qu'un tiers environ répartissait ses réponses entre l'affirmation nette: "l'intégrale aura une valeur approchée" et cette autre, parfaitement ambiguë : "l'intégrale sera exacte si on a sa valeur limite" en passant par tous les "pourvu que dz soit petit" possibles (les réponses négatives, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne se référant jamais à des approximations au niveau du processus de modélisation lui-même).

Une autre manière d'aborder la question est d'examiner la rigueur des démonstrations. Invités à le faire à propos du calcul du volume d'une sphère (encadré III), des étudiants de première année (N=19), deuxième année (N=26) universitaires ou de mathématiques spéciales (N=44) se sont révélés mal à l'aise, noyant leurs justifications dans un déferlement de "dz aussi petit que possible", et préférant exhiber des coordonnées cylindriques ou sphériques (30% dans certains groupes) qu'évoquer une procédure d'encadrement, avec passage à la limite (20% au plus) ou le fait que le terme négligé est du deuxième ordre (toujours moins de 10%). Et c'est un élève de l'ENSET qui déclare : "C'est peut-être par coïncidence qu'on obtient le volume de la sphère avec ce calcul puisque rigoureusement on ne peut pas prendre : $dV = \pi \rho^2 dz$ ".

ENCADRE III

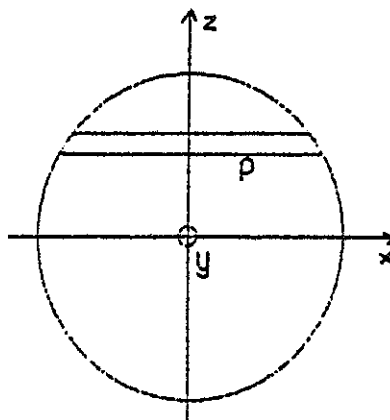
Lire le texte suivant :

On se propose de calculer le volume d'une sphère de rayon R. A cet effet, on découpe celle-ci en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (plan xOy, cf schéma ci-joint) et d'épaisseur dz petite.

Le volume d'une tranche d'altitude z est :

$$dV = \pi \rho^2 dz = \pi(R^2 - z^2)dz$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2)dz$$


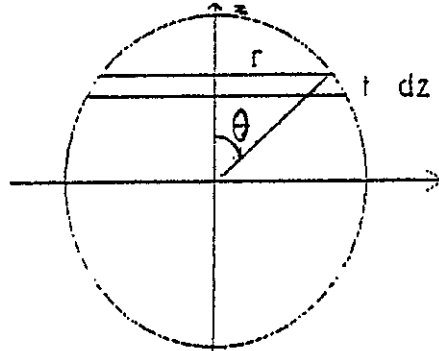
Question :

Pouvez-vous justifier plus rigoureusement ce calcul ?
Si oui, comment ?

Pour présenter cette question de légitimité sous forme plus percutante nous avons construit une parodie de démonstration (encadré IV) à propos du calcul de la surface de la sphère. La question est cette fois : où est l'erreur ? Le sondage effectué auprès de 12 enseignants ou pré-enseignants (ENSET) révèle le même malaise : 3 explicitent correctement le noeud de l'affaire (terme négligé du premier ordre), 5 refont seulement le calcul juste, 4 s'abstiennent ou ne savent pas répondre.

ENCADRE IV

Pour calculer le volume d'une sphère de rayon R , on peut la découper en tranches élémentaires parallèles à un plan de symétrie de la sphère (par exemple le plan xOy , comme sur le schéma ci-après) et d'épaisseur dz .



On assimile alors le volume dV d'une petite tranche d'altitude z à celui d'un cylindre de même épaisseur dz ayant pour section droite l'une des faces planes de la tranche de sphère considérée.

$$dV = \pi r^2 dz = \pi(R^2 - z^2) dz$$

Donc le volume total est :

$$V = \int_{-R}^{+R} \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Si on utilise la même méthode (qui consiste à assimiler tranche de sphère et cylindre) pour évaluer la surface de la sphère, on obtient, pour l'aire latérale d'une tranche élémentaire à l'altitude z :

$$dS = 2\pi r dz = 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} dz$$

donc, pour l'aire totale :

$$S = \int_{-R}^{+R} 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} dz = \int_0^\pi 2\pi R^2 \sin^2 \theta d\theta = \pi^2 R^2$$

Pouvez-vous expliquer pourquoi la même méthode donne dans le premier cas un résultat correct et dans le second un résultat faux ?

Nous sommes donc amenés pour cette rubrique "approximation-rigueur" à une conclusion un peu surprenante : nées pour ainsi dire dans et pour l'approximation, objets de débats pendant plus de deux siècles sous l'inculpation d'atteinte à la rigueur, les procédures différentielles apparaissent, à travers les réponses de nos étudiants, comme relativement détachées de ce concept constitutif d'approximation quant à leur finalité, et comme libérées de toute nécessité de justification sérieuse quant à leur rigueur. Plus précisément chacun semble camper sur quelques acquis, en mathématiques, l'utilisation de critères forts de différentiabilité, de quelques théorèmes puissants, en physique le fait bien connu que "ça marche".

LE STATUT FONCTIONNEL DES DIFFÉRENTIELLES

Très tardivement dégagé, au tournant du siècle dernier, le statut fonctionnel de la différentielle est maintenant au cœur de cette notion. C'est du moins le cas dans la définition mathématique. On le sait, l'usage en physique ne

valorise guère l'aspect fonctionnel mais plutôt l'idée de "petit accroissement de...", quant ce n'est pas encore plus simplement l'idée de "petit morceau de...". Le troisième volet de notre enquête explore donc ce point.

1- En mathématiques, les résultats des questionnaires semblent confirmer la disponibilité du registre fonctionnel. A la question q1, 51% des définitions exprimées le sont en termes d'application linéaire (contre 14% de définitions de type expression : $f'(x)dx + f'(y)dy \dots$ et 14% de définitions matricielles), la domination étant cependant moins marquée chez les 50 étudiants ayant rempli le questionnaire à l'entrée en licence. Mais ce statut fonctionnel n'est plus dominant dès qu'il s'agit de résoudre des exercices : 26% seulement des différentielles fournies en réponse aux questions q2 et q6 le sont sous forme d'applications (contre 26% d'expressions et 33% de matrices). Il apparaît un peu comme un statut de façade.

2- En physique, un point de vue très répandu est celui de cet étudiant de mathématiques spéciales :

"Pour intégrer, il ne faut surtout pas penser à ce que représente dl , mais procéder mécaniquement, sinon on est cuit"

ou celui de cet autre, universitaire :

"(Cette méthode)... on l'applique mécaniquement, en oubliant la notion de différentielle, c'est une sécurité... on est sûr de ne pas se tromper".

Nous avons cherché dans quelle mesure ce point de vue était d'une part général, d'autre part opérationnel. Ainsi l'encadré V rassemble un ensemble de citations obtenues à propos des divers questionnaires.

ENCADRE V

$dx, dl, \dots$

- immatériel, marqueur de la variable d'intégration

- * je ne vois aucune nécessité de représentation de l'intégration
- * dx est irréel
- * dx est immatériel, abstrait, purement conceptuel
- * la longueur dl est fictive
- * en fait ça n'a aucune importance, quand on intègre, dl devient une variable d'intégration

- petit bout de ...

- * dl est une petite longueur
- * dl est un petit bout de fil
- * un petit morceau dl du fil
- * on couvre tous les dz possibles donc toutes les parties subdivisées de la sphère

- non caractérisé, rituel

- * dz c'est la limite de Δz quand $\Delta z \rightarrow 0$
- * variation élémentaire, élément infiniment petit

On y relève deux tendances extrêmes :

- celle qui vide l'élément différentiel de toute signification autre que celle de marqueur de la variable d'intégration (notons que ceci rejoint dans une

certaine mesure le point de vue mathématique : dans l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, t est une variable muette),

- celle qui donne à l'élément différentiel un contenu "matériel" qui peut être exclusif, parfois, d'autres significations,

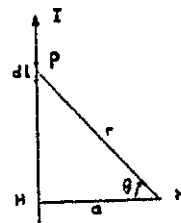
Bien entendu, entre ces deux attitudes extrêmes se situe le marais des définitions du type :

"dz est la limite de Δz quand $\Delta z \rightarrow 0$ " - " dl : élément infiniment petit" - "non mesurable" - "variation élémentaire" - "on ne peut pas trouver plus petit" - "cela veut dire ultra simple, on comprend".

Définitions participant au rituel déjà évoqué, et probablement liées davantage à la première attitude qu'à la seconde.

Un questionnaire concerne plus spécifiquement ce volet fonctionnel ainsi que les significations attachées à l'élément différentiel et leurs implications opératoires. Il reprend un calcul tout à fait classique en physique : celui du champ créé par un fil infini parcouru par un courant. Là encore, le début du calcul est donné et l'on arrive à devoir intégrer la contribution :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi r^2}$$



d'un élément dl du fil, pour employer le langage usuel.

Les questions de ce questionnaire qui se sont révélées les plus riches sont les suivantes :

- Imaginez-vous dl comme représentant le même nombre tout le long du fil. Est-ce nécessaire pour intégrer ?
- dB peut-il être considéré comme différentielle de fonction ?
- Même question pour dl .

Ces questions nous ont permis de mettre en regard l'image que les étudiants (Mathématiques spéciales, $N=44$) ont des objets qu'ils manipulent et leurs performances techniques (puisque l'on demandait aussi la fin du calcul).

Les divers registres d'interprétation du " dl " ont déjà été caractérisés plus haut, à partir de réponses à plusieurs tests, dont celui-ci, ou d'entretiens. Ici on apprend en outre (tableau 1) :

- que l'on peut "intégrer", "sommer" des dB sans pour autant considérer dB comme une différentielle de fonction (ici $B(\theta)$), alors même que le calcul final fait intervenir un changement de variable.

N=44 Math. Spé	OUI	NON	Sans réponse
dB différentielle ?	52%	27%	21%
dl différentielle ?	32%	27%	41%

Tableau 1

Nous avons regroupé les commentaires sur " dB " et " dl " :

- d'une part des étudiants qui font l'erreur classique consistant à écrire : $dl = r d\theta$ (30% du total)

- d'autre part de ceux qui parviennent à la relation différentielle correcte:
 $dl = ad\theta / \cos^2\theta$ (7% du total).

Les premiers se caractérisent globalement par le refus du statut de "différentielle" pour l'un au moins des objets dB ou dl (à une exception près), le refus de considérer les fonctions $B(\theta)$, $l(\theta)$, d'autant plus que la variable disparaît dans le résultat final, et pour "dl" l'abondance d'interprétations soit "vides" : "dl est fictive" soit "matérielles" : "un élément ... du fil".

Les seconds (rares !) ont tous qualifié dB et dl de différentielles, avec une abondance de spécifications fonctionnelles : " $B(\theta)$ ou $B(r)$ ou $B(HP)$; $dl=d(HP)$, $HP(\theta)$, $HP(r)$ ".

Le sondage auprès des élèves de l'ENSET confirme la difficulté qu'il y a à voir dB et dl comme des différentielles : 2/8 élèves l'acceptent, dont un "après réflexion" ; un autre, nuancé, déclare que dB "n'est pas à proprement parler...", et que dl "est peut-être.." une différentielle, 2 refusent net). Ils préfèrent les considérer respectivement comme une "contribution élémentaire" ou "un petit bout de fil". Mais ce sondage ne confirme pas la coïncidence rigoureuse entre calcul juste et compréhension fonctionnelle des écritures dB et dl comme si, l'habitude aidant, sans pour autant modifier leurs conceptions, les étudiants apprenaient à déjouer les pièges les plus grossiers.

Sur ce troisième sous-thème d'étude, les versants mathématique et physique de la notion de différentielle se rejoignent en partie : dans les deux cas le caractère fonctionnel est en réalité peu marqué. En mathématiques, il disparaît sous diverses pratiques algorithmiques et n'est pas appuyé par une vision géométrique. En physique, il est occulté notamment par les idées de "contribution" ou "d'empilement", d'où l'aspect variationnel et donc fonctionnel est absent.

EN CONCLUSION

Les éléments d'information rassemblés ici convergent sur les points suivants :

- les registres d'utilisation des différentielles dans les deux disciplines ne sont pas articulés entre eux et sont de plus, surtout pour la physique, insuffisamment explicités. Les étudiants réalisent trop rarement que la notion d'approximation linéaire tangente est utilisée en physique pour pallier une non-linéarité. Une telle aptitude suppose au passage que l'on ait bien situé, l'une par rapport à l'autre, les notions suivantes :

"formules" de notre enfance : $V = S.H$, $U = R.I$...

et "intégrale d'une fonction constante" : $V = \int S.dh$ par exemple.

Ce lien suppose lui-même que l'on puisse penser une relation $V=S.H$ comme une dépendance linéaire : $V(z=H) = S.H$

- le traitement de l'approximation, la critique sur la rigueur des démonstrations semblent majoritairement très déficients, aussi bien en mathématiques qu'en physique : il y a la même réticence pour évaluer le comportement d'un reste que pour chercher la faille dans un raisonnement ou sa justification. On exorcise le tout par un "pourvu que dz soit petit". Il faut relativiser sans doute cette remarque par une autre beaucoup plus générale : l'inaptitude à la critique est un trait d'ensemble chez nos étudiants. Sur ce point, c'est donc une éducation globale qu'il faudrait entreprendre.

- enfin le statut fonctionnel des différentielles reste peu marqué dans les deux disciplines. Deux éventualités en particulier lui font obstacle : la vision "nulle" (il ne faut surtout pas penser à ce que représente dl ...) et la vision "empilement de contributions élémentaires". La prédominance des exercices de type algorithmique contribue évidemment à évacuer la question du statut des objets en cause.

IV - LES APPORTS DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

Ce paragraphe s'appuie sur les résultats de l'expérience de coopération interdisciplinaire menée en DEUG A à Grenoble, depuis 1984.

QUELQUES CONSTATS PRELIMINAIRES

Les premières expériences de coopération interdisciplinaire menées [1] et les résultats des questionnaires laissent apparaître une grande stabilité dans la double coutume didactique suivante :

1 - Les étudiants ont un comportement semblable face à la preuve et à la rigueur en mathématiques et en physique : tout ce qui dans une explication ne relève pas directement du calcul algébrique tend à être évacué quand la situation le tolère ; et lorsque la situation exige un minimum de contrôle des opérations effectuées, ce contrôle se réduit à une formalité, c'est à dire à l'invocation purement conventionnelle des raisons de validité. C'est le cas, par exemple, dans les problèmes de traitement du reste dans les développements limités ou de légitimation de procédures d'intégration par découpage en tranches.

2 - Les étudiants (et les enseignants) font une disjonction très forte entre les deux disciplines, même lorsqu'elles prétendent traiter un même objet, par exemple les différentielles. Cette disjonction, assez universellement constatée et regrettée par les enseignants, est à l'origine d'un certain nombre de palliatifs didactiques dont l'insuffisance est notoire, par exemple :

* L'interdisciplinarité de façade :

On unifie les notations et on coordonne les calendriers de présentation de la ou des notions concernées dans les deux disciplines. C'est certes un atout favorable mais cela ne résoud en rien le problème de fond.

* L'interdisciplinarité séparée :

Elle aboutit à la création de deux nouvelles disciplines, les "mathématiques du physicien", la "physique du mathématicien". Les rappels et compléments de mathématiques des manuels de physique, dont il a été précédemment question, constituent une manifestation typique de la première. Quant à la physique du professeur de mathématiques, elle se réduit souvent à une introduction de type culturel ou historique et à l'étude rapide de quelques exemples, une fois la présentation de la théorie achevée.

OBJECTIFS ET HYPOTHESES DE L'EXPERIENCE

1- Objectifs :

Il s'agissait d'analyser les avantages et les limites d'une coopération interdisciplinaire qui ne serait pas de façade et s'attaquerait suffisamment sérieusement au problème de la disjonction entre les disciplines pour conduire l'étudiant vers une réelle compréhension et initiation à la démarche scientifique.

2- Hypothèses :

Cette expérience s'est appuyée, au départ, sur les hypothèses suivantes :

* Les mathématiques, qui sont considérées comme des outils en sciences physiques, peuvent néanmoins si elles sont traitées en compréhension aider considérablement à l'installation et à l'approfondissement de certains concepts fondamentaux de la physique et de la chimie.

* En sens inverse, les difficultés rencontrées dans la modélisation de situations concrètes peuvent contribuer à rendre plus approfondie et plus efficace l'épistémologie que l'étudiant se crée autour des concepts et méthodes mathématiques. Par exemple, elles peuvent être à la base de la constitution d'un concept mathématique comme celui d'intégrale, les situations physiques ou chimiques et leurs exigences permettant de définir progressivement "le cahier des charges" que devront satisfaire le concept et les algorithmes de traitement qui lui sont associés.

* La complexité des tâches à assumer dans les sciences expérimentales peut servir à justifier les efforts de rigueur consentis dans les constructions théoriques mathématiques. Par exemple, une procédure intégrale qui permettrait un calcul systématique du résultat à 10 décimales près ne serait satisfaisante que pour un nombre restreint d'applications particulières : pour la plupart, elle serait d'une précision inutile, pour d'autres insuffisamment précise. Ceci renforce l'utilité de l'expression consacrée du mathématicien : " $\forall \epsilon > 0 \dots$ ", qui permet de s'ajuster à n'importe quelle précision donnée à l'avance.

LES DEUX PHASES DE L'EXPERIENCE

La première phase s'est déroulée de 1984 à 1986. Dans cette phase, les enseignants de mathématiques et de physique se sont rencontrés régulièrement pour essayer de coordonner leurs enseignements, mais c'est essentiellement le professeur de mathématiques qui a infléchi sa pratique en s'appuyant, conformément aux hypothèses faites, sur des situations physiques pour introduire certains concepts mathématiques.

La deuxième phase a débuté en Octobre 1986 et est actuellement en cours. Les méthodes et concepts fondamentaux de chacune des trois disciplines : mathématiques, physique, chimie, sont discutés en profondeur au cours de rencontres hebdomadaires entre les enseignants des trois disciplines. Ces discussions donnent lieu à des réalisations communes avec les étudiants (ateliers interdisciplinaires) et à des réinvestissements dans les cours propres à chaque discipline.

UN EXEMPLE DE FONCTIONNEMENT EN PHASE 1 : L'INTEGRALE

Voici les principales phases d'une séquence d'enseignement visant, conformément à ce qui précède, à définir le cahier de charges de l'intégrale (c'est à dire le pourquoi de l'introduction de ce nouvel outil et les exigences qu'il doit remplir), en s'appuyant sur la modélisation de situations physiques.

L'expérience rapportée a été menée en DEUG première année, en Janvier 1985.

Notons que cet enseignement de l'intégrale de Riemann s'adresse à des étudiants qui ont déjà rencontré de nombreuses fois le symbole :

$$\int_b^a f(t)dt$$

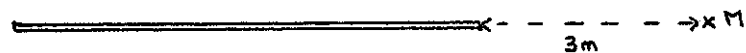
en mathématiques comme en physique et qui "savent" que ce symbole est un appel au calcul de $F(b)-F(a)$ pour une primitive quelconque F de la fonction f , mais qui "ne savent pas" pourquoi il faut faire ce calcul et surtout pourquoi cette expression apparaît "miraculeusement" dans la mise en équation de nombreux problèmes de physique.

1- L'enseignant de physique vient, au début du cours de mathématiques, pour établir historiquement la loi d'attraction universelle entre deux masses ponctuelles m et m' situées à une distance r , loi qui conduit à l'expression numérique suivante pour l'intensité de la force d'attraction :

$$|\vec{F}| = G.m.m'/r^2$$

2- Le cours de mathématiques débute ensuite par la situation suivante :

Problème : Quelle est l'intensité de la force F qui s'exerce entre une masse ponctuelle M de 2kg et une fine barre de 18kg et de 6m de long placées de la façon suivante :



Cette situation est gérée par l'enseignant suivant *la méthode du débat scientifique* :

- Les étudiants cherchent individuellement ou en petits groupes à résoudre le problème posé pendant environ 10mn.

- Ils proposent ensuite leurs résultats numériques, sans commentaires. Ces résultats sont écrits au tableau par l'enseignant et l'ensemble des étudiants se situe par rapport aux propositions faites par un vote.

D'où le tableau suivant :

Propositions de valeurs pour F	$G/6$	G	$4/3G$	$8G$	$24G$	$\sum \vec{F}_i $
Nombre d'étudiants adhérent à ce résultat	1	20	10	8	3	24

Tableau 2

De plus, quelques uns déclarent ne pas pouvoir se prononcer.

- Suit un débat entre les étudiants, géré par l'enseignant qui écrit au tableau les raisonnements et calculs proposés mais n'arbitre pas, c'est à dire ne prend pas parti sur la validité des arguments et des résultats.

Pour cette séance, les principaux points du débat ont été les suivants :

* La valeur $F = G$, correspondant, pour les valeurs numériques données, à l'application d'un principe du centre de gravité (tout se passe comme si la masse de la barre était concentrée en son centre de gravité) est contestée parce que ce principe "entre en contradiction avec lui-même" quand "on découpe la barre en deux parties égales".

* Le principe de modélisation $\vec{F} = \sum |\vec{F}_i|$ qui traduit l'additivité des forces exercées par chaque morceau quand on découpe fictivement la barre est discuté, puis il est demandé qu'il ne figure pas dans le tableau des résultats puisqu'il correspond non à un résultat mais à une méthode.

* Les valeurs extrêmes proposées : $G/6$, $24G$ et $8G$ sont éliminées par l'encadrement grossier obtenu en concentrant fictivement la masse de la barre à l'une ou l'autre de ses extrémités :

$$4/9G < F < 4G.$$

* Les partisans de la valeur correcte : $4/3G$, les redoublants en particulier, ne se manifestent pas violemment dans le débat. Il semble qu'ils n'aient pas d'explication recevable à fournir à leurs camarades pour justifier un calcul qui résulte essentiellement d'un mimétisme de pratique.

* L'encadrement grossier, de rapport de 1 à 9, ne permettant pas de discriminer les valeurs $4/3G$ et G , arrivent des propositions de découpage de la barre pour obtenir des encadrements plus fins, comme le découpage en 6 qui élimine la valeur G .

* Les partisans de la valeur $4/3G$ proposent alors de "pousser le découpage" et de "passer à la limite" pour voir si l'on peut ainsi récupérer leur valeur comme valeur limite.

3- Première conclusion sur cette situation problème :

Sans vouloir idéaliser la situation (le débat géré par l'enseignant est bien évidemment orienté par lui), on constate :

- que cette situation est bien porteuse des principaux concepts et algorithmes mathématiques propres à la procédure intégrale : découpage, encadrement par des phénomènes fictifs localement constants, passage à la limite,

- que son analyse par les étudiants, en cours de mathématiques, les plonge au coeur d'un problème auquel ils restent le plus souvent étrangers en physique : les algorithmes et méthodes mis en place et les résultats qui en découlent représentent-ils effectivement une réponse plausible au problème concret initialement posé ?

4- Pour lutter contre l'effet réducteur d'un concept théorique trop ancré sur une situation concrète de départ, cette première situation physique est suivie de l'étude de quatre autres, gérées plus directement par l'enseignant. Elles visent à renforcer les aspects précédents et en aborder de nouveaux.

En particulier, lorsque l'on considère une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

- Ω peut être un intervalle représentant une longueur comme dans la première situation, mais aussi un intervalle réel associé à une autre grandeur, par exemple un temps : étude de la consommation de courant d'un groupe d'immeubles au cours d'une journée,

- Ω peut aussi être un morceau du plan ou de l'espace : étude du volume d'un étang dont la surface est donnée avec ses lignes de niveau. Cette situation permet aussi d'introduire les encadrements de l'intégrale par l'intégrale de fonctions en escalier,

- enfin, même lorsqu' Ω est un morceau de plan ou d'espace, on peut souvent se ramener à un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est le principe du "découpage en tranches". En étudiant les variables dont ne dépendent pas les grandeurs physiques considérées, on obtient un découpage et un régionement astucieux mais non

"miraculeux" sur lequel les phénomènes physiques sont "presque constants" : étude de la force résultante exercée par l'eau sur la paroi verticale d'un barrage.

CONCLUSIONS SUR LA PREMIERE PHASE DE L'EXPERIMENTATION

L'ensemble des situations physiques choisies a effectivement permis de définir, en coopération avec les étudiants, très concrètement, le cahier des charges que doit remplir la procédure intégrale. Il a permis en outre d'introduire l'opérationnalité du vocabulaire et des notations sophistiquées (subdivisions, additivité, fonctions en escalier, mesure...) indispensables à la construction rigoureuse de l'intégrale de Riemann. Notons que leur raison d'être échappe le plus souvent à l'étudiant de premier cycle quand ils sont introduits sous les seules considérations mathématiques.

Une réserve cependant : la coopération mise en place et les changements introduits en mathématiques n'ont pas eu les répercussions attendues sur l'enseignement de la physique. En effet :

- les étudiants, pourtant sensibles à ce nouvel état d'esprit, ne s'en sont pas moins constitué une "physique du mathématicien", pour certains plus (et inutilement) compliquée que la physique habituelle, pour d'autres plus rigoureuse que la physique présentée par l'enseignant chargé de cette discipline, dont l'enseignement s'est trouvé par contre-coup dévalorisé,

- très peu de transferts entre les disciplines ont été introduits, les méthodes restant disjointes : celles du physicien, simples et efficaces si l'on sait ce qu'il faut ou ne faut pas faire, celles du mathématicien conduisant à remettre en cause des évidences de manière compliquée (exemple du calcul de la surface et du volume de la sphère cité en III) et surtout insuffisamment opérationnelles.

LA DEUXIEME PHASE DE L'EXPERIENCE

Si l'objectif était comparable à celui de la première phase, en revanche, les résultats de la première phase ont conduit à faire l'hypothèse supplémentaire suivante :

Toute forme de coopération interdisciplinaire dans laquelle les enseignants des différentes disciplines ne sont pas amenés structurellement à discuter sur le fond de leurs procédures et de leurs concepts fondamentaux (en particulier par l'analyse et la comparaison des méthodes de modélisation et de mise en équations de problèmes) n'a guère de chance de provoquer des changements d'épistémologie suffisants pour permettre de dépasser la coutume didactique, solidement enracinée, de disjonction des disciplines.

L'organisation de l'expérience dans la seconde phase, en particulier l'organisation d'ateliers interdisciplinaires, vise à prendre en compte cette deuxième hypothèse. Il s'agit, plus précisément, de nouer la coopération autour de la mise en équation de problèmes réels de physique et de chimie, en prenant en compte les différents aspects de cette modélisation :

- position du problème et choix des variables pertinentes,
- désignation explicite des lois utilisées, en particulier si la mise en équation est différentielle pour le contrôle du reste,
- désignation explicite de la relation fonctionnelle que l'on va choisir de déterminer et résolution des équations correspondantes,

- confrontation entre les valeurs obtenues dans le modèle et les prévisions qualitatives, choix des dispositifs expérimentaux de vérification adéquats.

Les ateliers sont préparés et assurés conjointement par des enseignants des trois disciplines.

L'expérience indique que la tenue de tels ateliers est possible. Il a été observé que la majorité des étudiants s'implique fortement, avec imagination et efficacité dans cette démarche et qu'il y a réinvestissement : comportement global des étudiants plus scientifique, en particulier esprit critique plus grand vis à vis des assertions, les leurs comme celles des autres.

Dans le même temps, elle permet de mieux cerner les difficultés qui s'opposent à ce type de pratique :

- difficultés liées au problème du contrôle des activités : il faut laisser s'épanouir les possibilités mais arriver finalement à établir un résultat effectif,
- difficultés liées au développement de l'incertitude et des paradoxes lors des débats ; risque d'induire chez les étudiants un doute irrémédiable sur une discipline particulière ou sur la méthode scientifique elle-même,
- difficultés liées aux coutumes didactiques en vigueur qui se traduisent notamment, lors de la mise en équation, par l'occultation des choix effectués et des raisons épistémologiques de ces choix.

EN CONCLUSION

L'ensemble de notre démarche d'ingénierie est, rappelons-le, basé sur la conviction que la compréhension des concepts de base de mathématiques et de sciences physiques, l'initiation à la démarche scientifique, constituent des tâches prioritaires de l'enseignement de premier cycle universitaire.

Une telle approche conduit nécessairement aux questions suivantes :

- 1- Un tel apprentissage est-il possible ? A quel coût ?
- 2- La coopération interdisciplinaire est-elle un moyen privilégié, voire indispensable pour la réalisation d'un tel objectif ? Si c'est le cas, jusqu'où doit-on la pousser ? Ne prend-t-on pas le risque de dénaturer ce qui fait la spécificité de chaque discipline ?

Les résultats obtenus dans le cadre expérimental construit ici, semblent montrer la possibilité d'approches interdisciplinaires efficaces et viables. Il semble de plus qu'une coopération en profondeur, loin de dénaturer les méthodes et concepts fondamentaux de chaque discipline, puisse au contraire renvoyer au coeur de la spécificité de chacune d'entre elles.

Mais il n'est pas question pour autant de minimiser les obstacles qui s'opposent à la mise en place de telles pratiques. C'est vers l'analyse fine de ces difficultés, l'élaboration et l'étude de la transmissibilité de propositions concrètes d'ingénierie didactique (choix de situations-problèmes "exemplaires ou fondamentales" adaptées à l'introduction des concepts de base et à l'approche des problèmes de légitimation, analyse sur des situations types de mise en équation des coûts comparés de diverses méthodes de résolution, par exemple) que nous comptons orienter nos recherches.

CONCLUSION GENERALE

La différentielle est, en mathématiques comme en physique, une notion liée à l'approximation. Elle intervient dans ce cadre dans les deux disciplines, mais il nous semble nécessaire pour interpréter les différents résultats obtenus de faire intervenir un autre cadre, celui de l'algorithmisation.

En mathématiques, dans le savoir savant, côté objet, comme dans la pratique des mathématiciens, côté outil, à l'heure actuelle, ces deux cadres sont en étroite interaction.

Cela n'a pas été toujours le cas, comme l'a montré l'étude historique. A une époque, la différentielle, suspecte de servir de support à des pratiques peu rigoureuses, relevant davantage du registre de "*l'approximatif*" que de celui de "*l'approximation*", a été cantonnée dans un cadre d'outil commode de calcul formel. Mais depuis la fin du siècle dernier, avec l'introduction de la notion de différentiabilité, puis celle d'application linéaire tangente, le cadre de l'approximation a repris à la fois ses droits et ses lettres de noblesse.

Dans l'enseignement, on l'a vu, au moins au niveau auquel se situe cette étude : celui du début de l'enseignement supérieur, la réduction au cadre algorithmique formel a résisté plus longtemps. Ce n'est qu'à partir des années soixante que différentiabilité et application linéaire tangente ont restauré sa place au cadre de l'approximation, cette évolution s'accompagnant pendant un temps d'une certaine hypertrophie du pôle objet de la notion par rapport à son pôle outil.

Mais, comme l'ont montré les réponses aux questionnaires, si le cadre de l'approximation est présent au moment de l'introduction de la notion et mobilisable au niveau déclaratif des définitions, il est peu présent au niveau des pratiques. En effet, à l'algorithmique de l'époque précédente liée aux propriétés d'invariance de l'expression différentielle (resp. de la différentielle totale pour les fonctions de plusieurs variables) dans les changements de variables, a succédé une algorithmique basée sur la manipulation des dérivées partielles et matrices jacobiniennes, légitimée par quelques puissants théorèmes clefs.

Certes l'approximation est au coeur de théorèmes relais comme le théorème d'inversion locale ou celui des fonctions implicites mais, même dans le cas où les hypothèses sont données en termes de différentiabilité, en fait on a recours, et c'est naturel, à des critères suffisants comme l'existence de dérivées partielles continues qui aplatissent l'approximation sur le cadre algorithmique algébrique.

Les questions qui nécessitent une utilisation effective du cadre de l'approximation sont quasi-absentes et perçues par les étudiants en conséquence comme hors contrat dans les questionnaires.

Si en mathématiques donc, l'enseignement peut se situer de façon cohérente, presque exclusivement à ce niveau, dans le cadre algorithmique algébrique, en revanche en physique, la prise en compte du cadre de l'approximation est incontournable, puisque l'on part de situations physiques. Mais de façon traditionnelle, le passage au cadre du traitement algorithmique est escamoté, par une argumentation de type recette ou convention. Les étudiants s'y adaptent en apprenant à reconnaître les mots clefs d'appel des procédures différentielles : "petit", "élémentaire", "infinitésimal" et comme ces derniers sont toujours présents dans les énoncés, ils atteignent finalement une efficacité raisonnable.

En fait, il ne faut pas se leurrer, cette organisation de l'enseignement est stable parce que cohérente, opérationnelle et optimisant en un certain sens un ensemble de contraintes. La viabilité de la prise en compte effective pour l'enseignement des relations entre les deux cadres sur d'autres modes n'a rien d'évident.

Considérons par exemple le paradoxe suivant :

L'accroissement Δf d'une fonction en un point x , correspondant à l'accroissement Δx de la variable n'est généralement pas égal à l'accroissement linéaire qui correspond à la différentielle df . Leur différence est un reste $r(\Delta x)$ qu'on ne peut pas en général calculer exactement, qu'on ne cherche d'ailleurs pas à calculer exactement - sinon à quoi bon les différentielles et les simplifications qu'elles apportent ! - Cependant le modèle linéaire choisi n'a de sens que si l'on sait contrôler le reste et se convaincre qu'il est négligeable devant Δx , lorsque Δx est assez petit.

Ainsi donc, si on insiste sur l'obligation du contrôle du reste, on remet en question l'aspect simplificateur de la différentielle et son caractère opérationnel, si on néglige cette obligation, le choix de ce que l'on peut négliger échappe totalement à l'étudiant qui se trouve dépouillé de son autonomie scientifique.

Les pratiques usuelles de l'enseignement, en mathématiques comme en physique, permettent de contourner l'obstacle didactique qui en résulte, mais à quel prix !

Il faut savoir de plus que les recherches en didactique des mathématiques, ces dernières années, ont mis en évidence les difficultés des étudiants débutants avec les outils mathématiques de base de l'approximation que sont les valeurs absolues, majorations, minorations, raisonnements par conditions suffisantes. Face à ces difficultés, le registre algorithmique algébrique est un refuge sûr pour l'enseignement, et les mêmes pratiques se retrouvent, qu'il s'agisse de calcul différentiel, d'intégration, de continuité ou de limites : mise en place rapide de théorèmes puissants qui permettent, par un fonctionnement plus algébrique, de contourner l'obstacle.

En physique, les contraintes du système didactique pourraient s'exprimer ainsi : les différentielles sont victimes de leur succès. La multiplicité des occasions de s'en servir, la confirmation notoire des résultats par l'expérience n'incitent guère aux contrôles de rigueur, ni d'ailleurs au contrôle pragmatique par l'expérience. C'est finalement l'argument d'autorité qui prévaut ou, de manière plus implicite, la conviction de l'enseignant que "ça marche".

On peut donc résumer de la façon suivante notre analyse du fonctionnement actuel des mathématiques et de la physique relativement à l'enseignement des différentielles :

les clichés usuels, on l'a vu, opposent l'opérationnalité physique et la rigueur mathématique, ou cherchent même à réduire le registre physique au cadre de l'approximation et le registre mathématique au cadre algorithmique. Les différences à nos yeux se situent davantage dans la façon dont les deux disciplines avec leurs exigences et leurs moyens de contrôle propres traitent les rapports entre ces deux cadres. Chacune vise une optimisation entre rigueur et opérationnalité. Pour le mathématicien, cette recherche d'optimisation va passer par l'établissement de théorèmes puissants, valables pour une large classe de situations, permettant une transition opérationnelle entre les deux cadres. Le physicien, qui n'est pas assujéti à un contrôle de type "démonstration" mais peut se satisfaire d'un contrôle pragmatique, utilisera à fond l'économie de ce contrôle.

Une telle analyse de la situation actuelle dans les deux disciplines laisse augurer une très grande stabilité, compte-tenu des contraintes évoquées et de la relative opérationnalité des choix de fait qui y prévalent.

Est-ce à dire qu'il n'y reste aucune intervention possible ? Notre réponse présente est : non, mais toute tentative d'infléchir la situation actuelle dans tel ou tel de ses aspects doit nécessairement être associée à une réflexion sur nos objectifs

d'enseignement. En particulier peut-on concilier opérationnalité et rigueur en dehors d'une perspective globale d'initiation à la démarche scientifique ?

Ainsi les documents que nous nous proposons d'établir à la suite de cette étude ont-ils autant pour but de sensibiliser les enseignants et les étudiants sur des aspects actuellement peu en faveur de l'enseignement des différentielles que de servir d'outil pédagogique proprement dit. Nous nous assignons comme but de produire, en particulier :

- des documents un peu percutants susceptibles de redonner de l'intérêt aux questions portant sur le statut, l'utilité, la légitimité des objets et des raisonnements utilisés, et donc par là d'illustrer des objectifs d'enseignement envisageables. Nous pensons que les questionnaires utilisés pour nos enquêtes, qui visent chacun des points très spécifiés, répondent largement à cette définition. Nous souhaitons donc les mettre en forme et éventuellement en étendre le nombre pour diffusion auprès des enseignants⁽¹⁾,

- une mise en forme des résultats des expériences d'ingénierie didactique en cours à Grenoble qui en facilite l'accès à des personnes qui n'y ont pas été impliquées : c'est là une entreprise difficile mais d'une cruciale utilité⁽²⁾,

- une analyse plus fine des critères susceptibles de légitimer à moindre coût l'emploi des différentielles dans diverses catégories de problèmes physiques, ceci afin de faciliter toute tentative visant à sensibiliser les étudiants sur ce point. Nous avons nous-mêmes réalisé tardivement la difficulté, parfois l'impossibilité, qu'il y a souvent à utiliser la procédure d'encadrement avec passage à la limite. Sur cette question de légitimité, si peu en faveur, il faut viser à abaisser le "coût" (sans pour autant tomber dans l'algorithmique pur) sous peine de s'exposer à l'échec total. Nous en faisons maintenant une tâche prioritaire⁽³⁾.

Actuellement, un objectif raisonnable, pour l'enseignement est peut-être le suivant : les préoccupations exprimées ici, visant à dépasser une pratique trop exclusivement algorithmique, feraient l'objet d'un accent temporaire mais marqué dans l'enseignement des différentielles au moment de leur introduction, dans le but d'établir un point d'ancrage solide pour les développements et pratiques ultérieurs. Les premières conclusions de l'expérience grenobloise laissent penser que le bénéfice n'en serait pas de pure forme.

Enfin, il est apparu à de multiples propos que ces préoccupations, ainsi que les aptitudes qu'elles mettent en jeu, dépassent largement le cadre des différentielles : aptitudes à rentrer dans le cadre fonctionnel pour la modélisation ou aptitudes à la critique de textes scientifiques, pour ne citer qu'elles. Ce sont là autant d'aspects dont le développement est coûteux, difficile à évaluer, mais qui méritent qu'on s'y attache, de façon permanente cette fois, sans référence à un domaine précis, car ce qui peut être considéré comme trop coûteux dans une économie locale peut s'avérer plus rentable dans une économie plus globale.

NOTES

(1) La brochure : *Questionnaires de travail sur les différentielles*, diffusée par l'IREM PARIS 7 et le LDPES avec un questionnaire d'évaluation répond à cette préoccupation.

(2) Pour plus de détails sur l'avancée du travail dans cette direction depuis le Colloque du GRECO, on pourra consulter les publications suivantes de l'équipe Grenobloise :

ALIBERT D. : *"Alteration of didactic contract in codidactic situation"*, Proceedings of the Eleventh annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Montréal, Juillet 1987, p. 379-385, Ed. Bergeron, Herscovics, Kieran, Montreal.

ALIBERT D. : *"Codidactic system in the course of mathematics"*, Proceedings of the Eleventh annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Wesszprem, Juillet 1988, p. 109-116, Ed. A.Borbas, OOK, Wesszprem.

(3) L'annexe rédigée pour accompagner la brochure de questionnaires citée plus haut et reproduite dans le présent rapport (annexe VII) a été conçue dans cet esprit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIGUE M. : *"Une expérience de coordination des enseignements de mathématiques et de physique en DEUG SSM"*, Séminaire de Didactique et Pédagogie de l'IMAG, Grenoble, Cahier 22, 1981.
- [2] VIENNOT L. : *"L'implicite en physique : les étudiants et les constantes"*, European Journal of Physics, Vol. 3, p. 174-180, 1982.
- [3] MICHAUD S. : *"L'implicite en physique : les étudiants et les fonctions de plusieurs variables"*, Actes de la 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Orléans, 1984, Ed. IMAG Grenoble.
- [4] ALIBERT D., GRENIER D., LEGRAND M. et RICHARD F. : *"Introduction du débat scientifique dans un cours de 1ère année de DEUG A à l'Université de Grenoble"*, Rapport ATP *"Transitions dans le Système Educatif"*, 1986, Ed. IMAG Grenoble.
- [5] CHEVALLARD Y. : *La transposition didactique*, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985.
- [6] DHOMBRES J. : *Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle*, Revue d'Hist. Sci., Vol. XL/2, p. 179-202, 1987.
- [7] VOSS A. : *"Differential und Integralrechnung"*, dans Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit einschluß ihrer anwendungen, Tome II 1.1, p. 54-134, Leipzig, Ed. Teubner, 1899-1916, Traduction française de J.Molk : *"Calcul Différentiel"* dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Vol. II-1.
- [8] STOLZ O. : *Grundzüge der Differential und Integral Rechnung* (Tome I), Leipzig, Teubner, 1893.
- [9] YOUNG W.H. : *The Fundamental Theorems of Differential Calculus*, Cambridge Tracts in Mathematics, N°11, Cambridge University Press, 1909.
- [10] VOLTERRA V. : *"Sopra le funzioni dipendenti da inee"*, Rend. Lincei, Ser. IV, vol III, p. 225-230, 1887.
- [11] FRECHET M. : *"Sur la notion de différentielle"*, Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 152, N°13, p. 845-847 et 1050-1051, 1911.
- [12] HADAMARD J. : *"La notion de différentielle dans l'enseignement"*, Scripta Uni. Ab. Bib. Hier., Jérusalem, 1923.
- [13] GATEAUX M.R. : *"Sur diverses questions de calcul fonctionnel"*, Bull. SMF, Vol. 45-47, p. 70-96, 1917-1919.
- [14] LEVY P. : *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier Villars, 1922.
- [15] PIERPONT J. : *Lectures on the Theory of Functions of Real Variables* (tome 1), Boston, Ginn, 1905.
- [16] DE LA VALLEE POUSSIN J. CH. : *Cours d'Analyse Infinitésimale* (tome 1), 3ème Edition, Paris, Gauthier Villars, 1914.
- [17] LEVY P. : *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Paris, 1949-50.
- [18] CAGNAC G., RAMIS E. et COMMEAU J. : *Traité de Mathématiques Spéciales* (Tome 2), Paris, Masson, 1970.
- [19] LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J.M. : *Cours de Mathématiques* (Tome 2), Paris, Dunod, 1972.
- [20] LE BELLAC M. : *Introduction à la Mécanique*, Paris, Belin, 1985.

- [21] HULIN M. et QUINTON M.F. : *Outils Mathématiques pour la Physique*, Paris, Armand Colin, Coll. U, 1986.
- [22] KRONING R. : *Précis de Physique Générale*, Paris, Dunod, 1960.
- [23] GIE H. : *Dynamique*, Paris, Ed. J.B.Baillière, 1981.
- [24] VALENTIN L. : *L'Univers Mécanique*, Paris, Hermann, 1983.
- [25] BEKE E. : "Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires", *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 6, p. 246-284, 1914.
- [26] POINCARÉ H. : "Les définitions en mathématiques", *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 5, p. 255-283, 1904.

ANNEXE I

LE PASSAGE DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE A LA NOTION D'APPLICATION LINEAIRE TANGENTE (1)

M. Artigue

Ce changement de statut de la différentielle, au début du vingtième siècle, dans le savoir savant, se situe dans un contexte général de régression de cette notion supplantée par celle de dérivée. L'ouvrage célèbre de J. Tannery : "Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" [1], publié en 1886, par exemple, ne fait aucune mention des différentielles.

Dans les traités de l'époque, il est classique, en faisant référence au point de vue développé par A.L. Cauchy, de définir les différentielles après les dérivées ou dérivées partielles et comme des expressions construites à partir de ces dernières. C'est un point de vue formel sur la notion qui domine, le cadre de l'approximation originel, suspect de servir de base à des traitements mathématiques peu rigoureux, ayant été relégué au second plan.

Reportons-nous, à titre d'illustration, à l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques, élaborée à la fin du XIXème siècle en Allemagne et dont la version française est publiée au début du XXème siècle. L'article "Calcul Différentiel" - Tome II3 - y est rédigé par J. Molk, d'après l'article en allemand de A. Voss [2]. La notion de différentielle n'apparaît que dans le dernier paragraphe consacré aux fonctions d'une variable et elle y est définie comme suit :

12. Différentielles. Si $y = f(x)$ est une fonction univoque de x dérivable au point x , les accroissements correspondants Δx , Δy de la variable x et de la fonction y au point x sont liés par une relation de la forme

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + R\Delta x,$$

où R tend vers zéro avec Δx .

Envisageons Δx comme un *quelconque* des accroissements de x . Nous dirons alors, avec *A. L. Cauchy*¹³⁹⁾, que le produit fini¹⁴⁰⁾

$$f'(x)\Delta x,$$

qui figure dans la relation précédente, est la *différentielle*¹⁴¹⁾ de la fonction $f(x)$ au point x .

La *différentielle* d'une fonction $y = f(x)$ en un point x est donc le produit de la dérivée $f'(x)$ de cette fonction au point x par une

quantité finie arbitraire Δx [suffisamment petite]. Nous désignerons la différentielle de $y = f(x)$ au point x par le symbole dy

Pour faire concorder cette notation avec le cas particulier où $f(x)$ se réduit à x et où par suite $f'(x)$ se réduit à 1, on devra représenter par dx la quantité finie arbitraire Δx et dire de cette quantité finie arbitraire qu'elle est la *différentielle* de la variable indépendante x au point envisagé x .

En résumé on a, par définition, au point x , la relation¹⁴²⁾

$$dy = f'(x)dx,$$

dans laquelle chacun des deux membres est une quantité finie arbitraire, ou si l'on veut une *variable indéterminée*, inférieure à une certaine borne finie.

On passe ensuite à l'égalité : $dy/dx = f'(x)$, qualifiée de relation symbolique, puis aux différentielles d'ordre supérieur définies, toujours suivant A.L.Cauchy, par :

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$$

Notons que Δx ou dx désignent ici des quantités finies arbitraires et non des infiniment petits, mais le crochet : "suffisamment petite" comme la fin de la citation : "ou si l'on veut une variable indéterminée, inférieure à une certaine borne finie" témoignent du flou qui persiste encore, au delà de cette position de principe.

Pour les fonctions de plusieurs variables, l'analogue de la différentielle est la différentielle totale, définie à partir des dérivées partielles comme l'expression :

$$df = f'_x dx + f'_y dy + \dots$$

$dx, dy, \dots$ désignant des accroissements arbitraires des variables indépendantes : $x, y, \dots$

Le même article illustre bien le statut de cette notion dans le savoir de l'époque, un statut où s'opposent visiblement inutilité théorique et importance pratique :

En fait la notation leibnizienne est *théoriquement* superflue¹⁴⁹. *Pratiquement* elle a une grande importance. Cela tient en partie à ce que, dans cette notation, la variable est bien spécifiée et en partie à ce que plusieurs théorèmes du calcul différentiel envisagé comme une extension du problème des tangentes se présentent sous une forme intuitive très simple: le théorème des fonctions composées [n° 6], par exemple, se présente sous la forme

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Comme on le verra dans l'article II 4, l'importance de la notation leibnizienne tient aussi et surtout à ce que cette notation convient aussi au calcul intégral envisagé comme une extension du problème des quadratures, en sorte qu'elle met en évidence l'identité de ce problème et du problème inverse de celui du calcul de la dérivée. La notation leibnizienne offre de plus quelques avantages de symétrie dans les formules de calcul différentiel se rapportant aux fonctions de plusieurs variables et l'usage de ces formules en est singulièrement facilité."

où s'opposent aussi deux points de vue : celui du mathématicien, représenté par les définitions de A.L.Cauchy et axé sur la rigueur et celui de l'utilisateur, représenté par le physicien, proche du point de vue originel de G.W.Leibniz et axé sur l'opérationnalité :

convient, une fois pour toutes, que l'on entendra par le symbole dy non pas la différentielle $f'(x)dx$ mais un *accroissement variable* suffisamment petit de la fonction $y = f(x)$, tel toutefois que, si dx est l'accroissement *variable* de x , la relation qui lie y à x continue à être vérifiée quand on y remplace simultanément x par $x + dx$ et y par $y + dy$.

Une *formule différentielle*, c'est-à-dire une relation entre x, y, dx et dy , devant exprimer, par exemple, la loi d'un phénomène physique n'a plus alors, il est vrai, *aucun sens précis*. Elle est toutefois le plus souvent commode à établir et il n'y a aucun inconvénient à en faire usage, car pour lui faire acquérir un sens précis il suffit de diviser ses deux membres par dx et d'effectuer ensuite un passage à la limite en faisant tendre dx vers zéro, et par suite aussi dy vers zéro,

en tenant naturellement compte de la relation qui lie y à x . La formule différentielle s'est ainsi transformée en une équation différentielle.

Les symboles dx et dy ne sont ici que des *intermédiaires* qui permettent d'obtenir rapidement les relations finales (équations différentielles) dans lesquelles ils ne figurent plus¹⁵¹).

Pour obtenir des équations finales exactes, il ne faut d'ailleurs jamais oublier, en passant à la limite, de tenir compte de la façon dont dy devient infiniment petit relativement à dx , quand dx tend vers zéro. Si dy devient infiniment petit par rapport à dx il faut à la limite remplacer dans l'équation finale $\frac{dy}{dx}$ par zéro; si $\frac{dy}{dx}$ tend vers une limite finie (positive ou négative) il faut, dans l'équation finale, remplacer $\frac{dy}{dx}$ par $f'(x)$. On dit, dans le premier cas, que dy est un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de dx , dans le second cas, que dy et dx sont des infiniment petits de même ordre.

A l'origine du changement de statut qui nous intéresse ici vont, semble-t-il, concourir deux problématiques :

- la première consiste à déterminer, pour les théorèmes du calcul différentiel classique à plusieurs variables, des hypothèses minimales susceptibles de se substituer aux hypothèses grossières que le souci accru de rigueur et la mise en évidence de pathologies ont conduit à introduire dans les énoncés.

- la deuxième consiste à étendre le calcul différentiel classique aux fonctions d'une infinité de variables.

Précisons tout ceci.

I - L'UNIFICATION DES CALCULS DIFFÉRENTIELS A UNE ET PLUSIEURS VARIABLES

A la fin du XIXème siècle, toute fonction de plusieurs variables admettant des dérivées partielles admet de ce fait une différentielle totale qui n'est autre que l'expression déjà citée :

$$df = f'_x dx + f'_y dy + \dots$$

L'invariance de cette forme par changement de variable constitue un des intérêts majeurs de la différentielle. Cette propriété d'invariance, pendant longtemps, n'a pas été subordonnée à des hypothèses particulières, pas plus que ne l'était la possibilité d'intervention de l'ordre des dérivations dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur (cf. annexe III).

En cette fin de siècle, ce n'est plus le cas, le souci de rigueur accru, la mise en évidence de pathologies, l'intérêt pour ces dernières aidant. B.Riemann a proposé en 1854 une fonction discontinue en chaque point de Q mais néanmoins intégrable (mémoire publié en 1867), K.Weierstrass a donné, dans son cours à Berlin, en 1861, le premier exemple de fonction continue, non dérivable en tout point.

Divers ensembles d'hypothèses ont été formulés, mais en général on suppose la continuité des dérivées partielles aux points considérés, hypothèse qui se greffe tout naturellement sur les démonstrations usuelles utilisant le théorème des accroissements finis. C'est ce que soulignera M.Fréchet, dans la note qu'il présentera en 1911 aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, sur la notion de différentielle, tout en dénonçant différents inconvénients de cette approche [3] :

Je me propose de montrer que la définition généralement adoptée pour la différentielle d'une fonction de *plusieurs* variables présente, aux points de vue logique et pédagogique, de graves inconvénients qu'on peut éviter en modifiant cette définition.

On convient généralement de dire qu'une fonction de plusieurs variables $f(x, y, \dots)$ admet une différentielle au point $(x_0, y_0, \dots)$ lorsqu'elle admet en ce point une dérivée partielle par rapport à chacune des variables; et cette différentielle est alors $f_x \Delta x + f_y \Delta y + \dots$.

Or si l'on se donne la peine de comparer les énoncés des théorèmes fondamentaux du Calcul différentiel, relatifs, les uns au cas d'une variable, les autres au cas de plusieurs variables, on sera frappé de ce fait que, là où les uns supposent seulement l'existence de la différentielle en un point, les autres imposent des conditions supplémentaires telles que l'existence de la différentielle dans une région et même sa continuité. Il est facile de montrer que sans ces hypothèses, les énoncés seraient inexacts. Et, d'autre part, on se rend bien compte que ces hypothèses sont trop restrictives. En d'autres termes, la définition usuelle de la différentielle pour le cas de plusieurs variables est théoriquement trop large, pratiquement (c'est-à-dire juxtaposée à ces hypothèses supplémentaires) trop étroite.

La définition usuelle a encore d'autres défauts tels que de faire dépendre l'existence de la différentielle du choix des axes de coordonnées choisis pour les variables $x, y, \dots$, et de ne pas faire assez ressortir son importance dans la méthode des infiniment petits.

Et, à la suite de ces critiques, il propose une définition nouvelle de la différentiabilité, d'abord dans le cadre géométrique pour bien montrer combien elle est naturelle, ensuite dans le cadre fonctionnel :

Une fonction $f(x, y)$ a une différentielle à mon sens au point (x_0, y_0) , si la surface $z = f(x, y)$ admet en ce point un plan tangent unique non parallèle à Oz : $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$. Et alors cette différentielle est par définition l'expression

$$p \Delta x + q \Delta y,$$

où $\Delta x, \Delta y$ sont des accroissements arbitraires de x, y .

Une fonction $f(x, y, z, t)$ admet une différentielle à mon sens au point (x_0, y_0, z_0, t_0) s'il existe une fonction linéaire et homogène des accroissements, soit $A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + D \Delta t$, qui ne diffère de l'accroissement Δf de la fonction à partir de la valeur $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ que d'un infiniment petit, par rapport à l'écart Δ des points (x_0, y_0, z_0, t_0) , $(x_0 + \Delta x, \dots, t_0 + \Delta t)$. Et alors la différentielle est par définition

$$\Delta f = A \Delta x + B \Delta y + C \Delta z + D \Delta t.$$

On peut entendre par écart des deux points l'expression $|\Delta x| + \dots + |\Delta t|$ ou $\sqrt{\Delta x^2 + \dots + \Delta t^2}$ ou encore la plus grande des quantités $|\Delta x|, \dots, |\Delta t|$.

Cette définition est exprimée par la formule

$$\Delta f = df + \varepsilon \Delta,$$

où ε tend vers zéro quand Δ tend vers zéro. Elle rappelle donc l'ancienne définition par la partie principale et en présente tous les avantages, mais en échappant aux objections de rigueur qu'on lui avait justement adressées.

Je montrerai d'ailleurs qu'au moyen de cette nouvelle définition, on peut développer les principes fondamentaux du Calcul différentiel, d'une façon aussi élémentaire qu'avec l'ancienne définition; et qu'on obtient des énoncés qui, se modelant sur ceux qui sont relatifs au cas d'une variable, sont à la fois plus simples et plus généraux que les énoncés classiques. Je mentionne qu'on peut traiter de même le cas des différentielles d'ordre supérieur.

En fait, O. Stolz avait déjà, en 1893, introduit dans son ouvrage : "Grundzüge der Differential und Integral Rechnung" [4] une définition équivalente de la différentiabilité et montré qu'il s'agissait là d'une définition permettant d'assurer, sans hypothèses supplémentaires, l'invariance par changement de variable :

Wenn $f(a + \xi, b + \eta)$ sich auf die Form (3) bringen läßt, so kann, was immer auch die Functionen $\varphi(\xi, \eta)$ und $\sigma(\xi, \eta)$ sein mögen, wenn nur für sie die Formeln (4) bestehen, aus dem Satze $\xi\varphi + \eta\sigma$ weder ein in ξ noch ein in η lineares Glied hervorgehen. Daher sagen wir, falls $f(a + \xi, b + \eta)$ die Gestalt (3), also auch die (5) annehmen kann, die Function $f(x, y)$ habe an der Stelle $x = a$ $y = b$ ein erstes vollständiges Differential, indem wir unter diesem Differential die Summe der Glieder erster Dimension oder Ordnung $\alpha\xi + \beta\eta$ oder

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \xi + \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} \eta$$

verstehen, welche kurz mit $df(a, b)$ bezeichnet wird.

les expressions (3), (4) et (5) ayant été précédemment définies par :

$$f(a + \xi, b + \eta) = f(a, b) + \alpha\xi + \beta\eta + \xi\varphi(\xi, \eta) + \eta\sigma(\xi, \eta) \quad (3)$$

ist, worin α, β Constante sind und die beiden Functionen $\varphi(\xi, \eta), \sigma(\xi, \eta)$ der Bedingung

$$\lim_{\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \varphi(\xi, \eta) = 0 \quad \lim_{\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \sigma(\xi, \eta) = 0 \quad (4)$$

genügen.

$$f(a + \xi, b + \eta) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \xi + \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} \eta + \xi\varphi(\xi, \eta) + \eta\sigma(\xi, \eta). \quad (5)$$

Une définition analogue est également proposée, indépendamment, en 1909 par W.H. Young [5] :

17. Differential. A function $f(x, y)$ of two real variables is said to have a total first differential at the point (a, b) , if

A. The partial differential coefficients

$$f_a \equiv \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \quad \text{and} \quad f_b \equiv \frac{\partial f(a, b)}{\partial b}$$

both exist and are finite at the point (a, b) .

B. At all points $(a + h, b + k)$ of a closed neighbourhood of the point (a, b) the function can be expressed as follows

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_a + kf_b + he + ke' \dots\dots\dots(1),$$

where e and e' have each the unique double limit zero when h and k approach zero in any manner whatever.

Note 1. For brevity the word *total* is usually omitted.

Note 2. $hf_a + kf_b$ is often called the *first differential* of $f(x, y)$ and denoted by df . It should be noticed that this name is only properly applied when an equation of the form (1) holds.

Et, contrairement à O.Stolz, W.H.Young explicite, comme le fera M.Fréchet en 1911 dans le texte déjà cité, l'intérêt fondamental de cette définition : permettre l'unification des calculs différentiels à une et plusieurs variables :

A knowledge of these partial differential coefficients, which then take the place of the successive differential coefficients of a function of a single variable, no longer gives us the equivalent information. The importance in the case of a function of a single variable of the differential coefficients consists in the fact that, from the very definition of a differential coefficient, the theorem of § 13 holds for $n=1$, and hence, also, as we have seen, for all values of n . No corresponding theorem, even in the case of $n=1$, follows from the mere existence of the partial differential coefficients. In the theory of functions of two or more variables the proper correlative of the differential coefficient, in the case of a function of a single variable, is not the ensemble of the partial differential coefficients of the first order, but what is called the *differential*. We proceed therefore to give a brief account of its theory, confining our attention in the first instance to two variables.

Le théorème du paragraphe 13 auquel il est fait allusion étant celui qui garantit, si la fonction f admet une dérivée n -ème au point $x=a$, l'existence pour f d'un développement de Taylor-Young à l'ordre n en a .

Le changement apporté par la définition de O.Stolz pouvait sembler, à première vue, relativement limité. Certes, la notion de différentiabilité était introduite mais la différentielle ne changeait pas véritablement de statut et restait l'expression qu'elle était jusqu'alors. De ce fait, on pouvait ne voir dans la définition introduite qu'une hypothèse parmi d'autres possibles pour divers théorèmes dont celui d'invariance par changement de variable de la différentielle.

Une lecture de ce type est, par exemple, implicite dans l'article déjà cité de J.Molk : les références aux travaux de O.Stolz y sont nombreuses, mais les résultats de ces travaux sont simplement présentés dans le cadre d'améliorations des hypothèses des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et la définition de O.Stolz n'est même pas citée.

A propos de la dérivation des fonctions composées par exemple, J.Molk écrit en note :

"173) La continuité de ces dérivées n'est pas nécessaire pour que la règle s'applique ; cf. O.Stolz [Grundzüge 1, p.140] qui formule une règle plus générale encore."

Dans l'ouvrage de W.H.Young, en revanche, même si la différentielle reste toujours une expression et si le caractère linéaire de cette expression n'est pas vigoureusement mis en relief, l'explicitation de la problématique d'unification donne une tout autre dimension à la définition introduite : les hypothèses introduites par le biais de la différentiabilité ne sont pas simplement des hypothèses parmi d'autres possibles, plus générales que celles formulées jusqu'alors, ce sont les "bonnes hypothèses".

Dans le Compte-Rendu à l'Académie des Sciences présenté par M.Fréchet, l'approche est sensiblement différente : il s'agit certes de formuler des hypothèses minimales, mais il s'agit surtout de formuler une définition qui permette une généralisation aux espaces plus généraux de l'analyse fonctionnelle. Ceci est explicité dans [3]. Après avoir défini la différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables, M.Fréchet y écrit :

Mais je tiens enfin à insister sur l'avantage essentiel que présente cette définition. Elle est immédiatement propre à une généralisation dans le calcul

fonctionnel. M. Hadamard a indiqué une condition à laquelle doit logiquement satisfaire la *variation* d'une fonctionnelle : c'est d'être une fonctionnelle linéaire. Si l'on tient compte d'une part de cette indication, d'autre part de la nouvelle forme donnée plus haut à la définition de la différentielle, on arrive, presque nécessairement, à la définition suivante (dont je me propose d'indiquer aussi les applications).

Une fonctionnelle U_λ admet, pour l'élément A_0 , une différentielle, s'il existe une fonctionnelle linéaire par rapport à l'accroissement ΔA , soit $V_{\Delta A}$, qui ne diffère de l'accroissement de U_λ à partir de A_0 , que d'une quantité infiniment petite par rapport à l'écart des éléments $A_0, A_0 + \Delta A$.

Et, ayant sans doute été informé après la publication de cette note des travaux de W.H.Young, il publie la même année le rectificatif suivant, destiné entre autres à marquer l'originalité de sa démarche :

Je viens de m'apercevoir qu'une partie de ma dernière Note, insérée dans les *Comptes rendus* du 27 mars, était présentée à tort comme nouvelle.

L'objet principal de cette Note était de présenter une définition de la différentielle d'une « fonctionnelle » (1), définition qui permet une extension complète des théorèmes fondamentaux du Calcul différentiel. *Autant que je sache, cette définition est bien nouvelle.*

Mais pour la justifier, j'avais indiqué comme cas particulier une définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables, définition qui est plus restrictive que la définition classique et que je n'avais rencontré nulle part. En fait, *une définition entièrement équivalente avait été donnée, en 1908, par M. W.-H. Young* (2), qui avait, en outre, développé explicitement les conséquences.

Il y a lieu cependant de remarquer que *la forme* sous laquelle sa définition est présentée se prête moins immédiatement à une généralisation dans le Calcul fonctionnel. En outre, je crois qu'il n'est pas inutile d'indiquer (comme je l'ai fait dans ma Note) que cette définition n'est pas aussi arbitraire qu'elle paraît l'être et justifiée seulement par la généralité de ses conséquences, qu'au contraire c'est la traduction analytique d'une définition géométrique qui se présente en quelque sorte avec un caractère de nécessité.

Comme on le verra dans le paragraphe suivant, c'est effectivement cette nouvelle problématique qui conduira à remettre au premier plan, explicitement, le rôle d'approximation de la différentielle mais cette fois dans un cadre fonctionnel : celui de l'application linéaire tangente.

II - LA GENERALISATION AUX FONCTIONS D'UNE INFINITE DE VARIABLES

Le mathématicien italien V.Volterra est généralement considéré comme le père de l'analyse fonctionnelle pour ses travaux sur les fonctions de ligne publiés dès 1887 [6]. Dans une conférence organisée en 1914 par la Société Mathématique de Berlin [7], il retrace les débuts de sa recherche dans ce domaine, en insistant sur la continuité avec le Calcul des Variations qui s'est développé dès le siècle précédent, mais aussi le changement de point de vue que son approche implique : une

fonctionnelle sera considérée comme une fonction d'une infinité de variables et l'objet du Calcul Fonctionnel sera de généraliser à ces nouveaux objets les méthodes et résultats du Calcul Différentiel classique :

J'ai imaginé d'abord en 1883, lorsque j'ai commencé à donner une forme concrète à mes idées, le concept de fonction qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction, en la considérant comme la limite d'une fonction de plusieurs variables, lorsque le nombre de ces variables croît indéfiniment d'une manière continue. Une courbe peut être engendrée par la limite d'une ligne polygonale; de même une fonction des ordonnées des sommets de la ligne polygonale devient à la limite une fonction des infinies ordonnées de tous les points de la courbe. C'est ainsi que je suis arrivé, par un passage à la limite, des fonctions d'un nombre fini aux fonctions d'un nombre infini et continu de variables, et l'on comprend par là pour quelle raison j'ai fait usage indifféremment, depuis mes premiers travaux, des dénominations que j'ai rappelées tout à l'heure.

J'étais saisi de la nécessité de considérer les fonctions de lignes, car une grande partie des phénomènes naturels, dès qu'on les envisage d'une manière approfondie, conduit à des quantités qui dépendent d'un nombre infini de variables. Beaucoup de problèmes d'analyse mènent aussi aux mêmes quantités. Leur conception et leur définition se présentaient donc naturellement. J'ai pensé qu'il aurait été utile de les envisager comme des éléments qu'on pourrait étudier par eux-mêmes. Ils devaient aussi constituer une catégorie à part d'entités dont on pourrait obtenir des propriétés communes et qu'on pourrait considérer dans leur ensemble.

Mais une simple conception générale et une définition n'ont pas de vrai intérêt philosophique, si l'on ne donne pas la manière d'appliquer le calcul aux éléments introduits. Ce qui s'imposait à mon esprit du premier abord était donc de créer une analyse propre à embrasser les propriétés des fonctions de lignes et leurs représentations et de constituer un calcul qui donnât le moyen de poser d'une manière exacte les problèmes qui les concernent et d'en obtenir des solutions rigoureuses.

Il y avait un exemple dans le calcul des variations, car ce célèbre calcul étudie les problèmes des maxima et des minima de certaines intégrales définies, et les intégrales définies peuvent justement être envisagées comme des quantités qui dépendent de toutes les valeurs des fonctions qui paraissent sous le signe d'intégration.

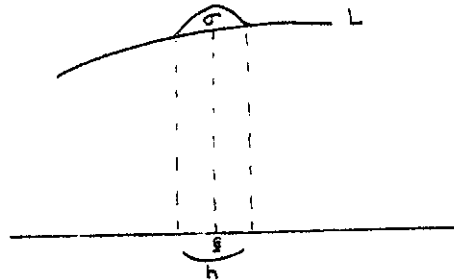
Pour en donner un exemple, examinons le problème de la brachystochrone. Le temps de chute d'un grave s'exprime par une intégrale définie qui est une fonction de la ligne que le corps est obligé à parcourir. Résoudre ce problème consiste à envisager cette ligne comme l'inconnue et à la déterminer par la condition que le temps soit un minimum.

Mais le calcul des variations, tel que LAGRANGE l'a conçu, est limité à une classe spéciale de problèmes. C'est ainsi que le calcul des variations ordinaire ne fait pas sortir du champ des équations différentielles, et dans son domaine classique ne rentrent pas d'autres questions.

Si l'on voulait garder à la catégorie d'entités qui se présentait toute sa généralité, l'exemple du calcul des variations n'était pas suffisant. Il était nécessaire d'en sortir complètement et de créer de nouveaux éléments propres à une analyse tout à fait générale.

Ce que V. Volterra essaie de généraliser en premier lieu, c'est la notion de dérivation, imaginant donc une ligne L comme la limite d'une ligne polygonale et une fonction de cette ligne $\Phi(L)$ comme la limite d'une fonction des sommets de cette ligne polygonale. L'analogie des dérivées partielles est alors obtenu en déformant la ligne L au voisinage d'un point M d'abscisse s et en calculant la limite du rapport de la variation de Φ à l'aire σ comprise entre la courbe primitive et la courbe déformée, lorsque la largeur de l'intervalle de déformation et l'amplitude maximale des accroissements verticaux tendent simultanément et indépendamment vers 0.

Supposons L définie par la fonction f sur $[a, b]$:



Si cette limite existe et ne dépend que de L et de s , elle sera notée :

$$\Phi'([L, s]) \text{ ou } \Phi'([(f(x))_a^b, s])$$

et représentera la dérivée de Φ par rapport à f au point s .

Pour V. Volterra, la filiation par rapport à la notion de dérivée partielle est évidente et essentielle :

On voit se dessiner dès le premier abord une règle qui est au fond la clef d'un grand nombre de résultats nouveaux. Elle s'énonce ainsi: les indices $1, 2, \dots, n$ se changent dans toutes les valeurs d'une variable continue; c'est pourquoi les n indices qui paraissent dans $y_1, y_2, \dots, y_n$ deviennent toutes les valeurs de x dans $f(x)$ et les n indices des dérivées partielles

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

deviennent toutes les valeurs de la variable ξ .

Il s'agit ensuite de généraliser la notion de différentielle totale. Là encore V. Volterra procède par analogie avec le calcul différentiel classique, en interprétant la différentielle totale comme un calcul au premier ordre :

Dans l'analyse ordinaire on passe des dérivées partielles $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ à la différentielle totale

$$(1) \quad dF = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_n dy_n;$$

il faut de même calculer l'élément analogue pour Φ , c'est-à-dire déterminer la variation de Φ , lorsque la courbe L devient L' de manière que les variations de toutes les ordonnées y soient infiniment petites du premier ordre et que l'on néglige dans le calcul de la variation de Φ les quantités infiniment petites d'ordre supérieur.

Sous certaines conditions relativement générales, V. Volterra montre que cette variation peut se mettre sous forme intégrale, comme dans les cas classiques du Calcul des Variations, à savoir :

$$\delta \Phi = \int_a^b \Phi' \left[f(x), s \right] \delta f(s) ds$$

et, il commente :

"La somme qui paraît dans la différentielle (1) est ici remplacée par une intégrale."

Notons que les possibilités ouvertes par l'analogie avec le calcul différentiel classique, bien illustrées ici, seront soulignées par plusieurs auteurs, notamment J. Hadamard et P. Lévy qui seront étroitement associés aux débuts de son développement. P. Lévy, par exemple, écrit en 1922 dans les "Leçons d'analyse fonctionnelle" [8] :

II. Le passage du fini à l'infini. — Des progrès si rapides que l'ont été ceux du calcul fonctionnel n'auraient sans doute pas été possibles si l'étude de chaque chapitre du calcul fonctionnel n'était facilitée par la connaissance du chapitre correspondant de l'analyse ordinaire, et si le procédé qui permet de passer de celui-ci à celui-là n'était pas toujours le même : *le passage du fini à l'infini*. C'est encore M. Volterra qui a mis en évidence le parti à tirer de l'utilisation systématique de ce procédé.

Une fonction continue $x(t)$ définie dans un intervalle $(0, 1)$ est connue d'une manière approchée si, cet intervalle étant divisé en un nombre très grand n d'intervalles égaux, on connaît les valeurs moyennes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la fonction dans chaque intervalle. Une fonctionnelle dépendant de $x(t)$ est alors représentée d'une manière approchée par une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'étude des problèmes concernant les fonctionnelles résultera ainsi de l'étude des problèmes analogues concernant la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il suffit de supposer que n devienne infini pour être conduit à la solution du problème considéré de calcul fonctionnel, et si souvent le procédé employé ne conduit pas à démontrer l'exactitude de la solution, qu'il faut vérifier autrement, il n'en constitue pas moins un procédé de découverte d'une fécondité remarquable.

C'est ainsi que s'est formée, pour prendre l'exemple le plus simple, la notion d'intégrale. La somme

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

devient infinie si n augmente indéfiniment, mais la moyenne de ces n nombres tend vers une limite qui, l'intervalle considéré étant égal à l'unité, est l'intégrale de la fonction $x(t)$ dans cet intervalle. On voit que l'intégrale généralise la notion de moyenne plutôt que celle de somme, remarque que nous aurons à utiliser dans la suite, et si l'intervalle d'intégration est divisé en intervalles qui ne sont pas égaux, il est tout naturel de donner à chacun des x_i un poids égal à l'intervalle correspondant. Si l'intervalle total n'est pas égal à 1, la limite de la moyenne sera naturellement, non l'intégrale, mais son quotient par cet intervalle.

Le même procédé de passage du fini à l'infini s'applique à la différentielle totale

$$df(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

et à la limite on est conduit à penser que la variation d'une fonctionnelle U dépendant d'une fonction $x(t)$ définie entre 0 et 1, sera une expression de la forme

$$\delta U = \int_0^1 \varphi(t) \delta x(t) dt.$$

C'est la variation considérée par Lagrange et M. Volterra, qui s'applique en effet à une catégorie fort étendue de fonctionnelles.

Mais revenons aux travaux de V. Volterra. Assez vite, il s'avère que la formule intégrale de variation citée plus haut ne peut s'appliquer à des fonctionnelles pourtant très simples : la fonctionnelle qui, à une fonction continue sur $[a,b]$, associe sa valeur en un point de l'intervalle (mesure de Dirac) ou celle qui lui associe la valeur de son maximum sur $[a,b]$, par exemple. Et, même dans les cas classiques de calcul des variations, elle ne s'applique pas aux variations d'intégrales si les extrémités ne sont pas fixées.

J. Hadamard propose de considérer comme fonctionnelles auxquelles on peut étendre les méthodes du calcul infinitésimal toutes celles dont la variation est une fonctionnelle linéaire de la variation de la fonction considérée.

La recherche se déplace alors vers la caractérisation des fonctionnelles linéaires, en premier lieu dans le cas de fonctionnelles définies pour des fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

J. Hadamard, le premier, en 1903, obtient la représentation suivante [9] :

$$U[x(t)] = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^1 F(t, \mu) x(t) dt$$

$$\text{avec } F(\lambda, \mu) = U[e^{-\mu^2(\lambda-t)^2}] / \int_0^1 e^{-\mu^2(\theta-t)^2} d\theta$$

mais cette décomposition présente l'inconvénient de ne pas être unique.

F. Riesz, en 1909, obtient alors la caractérisation suivante [10] :

$$U[f] = \int_a^b f(x) d[u(x)]$$

u étant une fonction à variation bornée et l'intégrale étant prise au sens de Stieltjes, c'est à dire :

$$U[f] = \lim \sum_i f(\xi_i) [u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désigne une subdivision du segment $[a,b]$ et ξ_i un point arbitraire du segment $[x_{i-1}, x_i]$, la limite étant prise quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Enfin, M. Fréchet montre en 1913 dans [11] que "toute fonctionnelle linéaire peut se mettre et d'une seule manière sous la forme de trois fonctionnelles linéaires de types essentiellement différents" :

$$U[f] = \sum_i a_i f(\tau_i) + \int_a^b f(t) \alpha(t) dt + \int_a^b f(t) d\varphi(t)$$

la série étant absolument convergente et les τ_i dans le segment $[a,b]$, la fonction α étant intégrable Lebesgue et la fonction φ à variation bornée, continue, à dérivée presque partout nulle.

Ceci n'est autre, notons-le, que le théorème de caractérisation des mesures sur $[a,b]$.

Dans le même temps, M. Fréchet essaie de définir précisément la notion de différentielle. Dans [12], il explique rétrospectivement, très clairement, ce qu'a été sa démarche :

"La première chose à faire pour appliquer au Calcul Fonctionnel les méthodes du Calcul Infinitésimal, c'est de définir la différentielle et d'en tirer seulement comme conséquence l'expression de la variation. On comprendra notre pensée en l'appliquant au cas des fonctions ordinaires de plusieurs variables numériques. C'est en effet seulement après avoir défini la différentielle totale de telles fonctions qu'il y a lieu de donner la règle de dérivation des fonctions composées."

Pour arriver à une telle définition, pour lui on doit répondre à deux questions :

- Quelle doit être la forme de la différentielle ? Et là, il se rallie aux idées de J.Hadamard pour lequel écrit-il : "le résultat fondamental du Calcul Différentiel est le suivant : la différentielle d'une fonction est une fonction linéaire des différentielles des variables - et [qui] exige donc que la différentielle d'une fonctionnelle soit une fonctionnelle linéaire, c'est à dire distributive et continue."

- Comment doit-elle se déduire de la fonctionnelle donnée ?

Et là, pour pallier à l'absence de dérivées partielles, M.Fréchet déclare avoir été amené à essayer de reprendre l'ancienne définition abandonnée de la différentielle : la différentielle comme partie principale de l'accroissement de la fonction lorsque l'accroissement de la variable est considéré comme infiniment petit, et à remanier la notion mal formulée de partie principale*.

C'est ainsi qu'il aboutit à la définition de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables publiée en 1911 qui, par sa formulation, est effectivement tout à fait adaptée à une généralisation aux espaces de fonctions.

Et après avoir défini par analogie la différentielle d'une fonctionnelle, il prolongera cette définition au cas d'applications entre espaces vectoriels normés, dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences publiée en 1925 [13]. Dans le mémoire qui développe cette note et porte le même titre : "La notion de différentielle dans l'analyse générale" [14], il écrit :

Nous remarquons qu'en regardant la différentielle d'une transformation comme une transformation simple, approchée, au voisinage d'un point, de la transformation donnée, nous sommes sûrs de rester dans la voie tracée par les créateurs de la notion de différentielle d'une fonction et nous pouvons attendre de cette différentielle généralisée les mêmes services qu'a rendus la différentielle classique dans un domaine plus restreint. C'est seulement dans l'interprétation de la définition que nous risquons de faire fausse route.

Il analyse alors la définition et montre qu'il est aisé de lui donner un sens si les ensembles abstraits considérés sont des "espaces topologiquement affines où la définition des points d'accumulation peut-être donnée par l'intermédiaire d'un écart numérique". En fait, il se bornera dans l'article cité à ce qu'il appelle des "espaces D-vectoriels" et qui ne sont autres que les espaces affines associés à des espaces vectoriels normés. La différentielle y sera définie comme suit :

Définition de la différentielle d'une transformation ponctuelle abstraite. — Conformément aux explications que nous avons données dans l'Introduction, nous dirons qu'une transformation ponctuelle $M = F(m)$ d'un point m d'un espace $(\mathcal{O})$ vectoriel en un point M d'un espace $(\mathcal{O})$ vectoriel, distinct ou non du précédent, est différentiable au point m_0 , s'il existe une transformation vectorielle linéaire $\Psi(\Delta m_0)$ de l'accroissement Δm_0 de la variable, qui ne diffère de l'accroissement correspondant $\Delta F(m_0)$ de la fonction que par un vecteur $o(\Delta m_0)$ infiniment petit par rapport à Δm_0 .

On a ainsi

$$(3) \quad \Delta F(m_0) = \Psi(\Delta m_0) + o(\Delta m_0),$$

la notation $o(\Delta m_0)$ signifiant que le rapport ε de la longueur du vecteur $o(\Delta m_0)$ à la longueur du vecteur Δm_0 tend vers zéro avec cette dernière longueur.

Le développement présenté ici semble tout à fait linéaire. Nous voudrions, pour terminer cette annexe, corriger quelque peu cette impression, montrer que le point de vue de M. Fréchet recentrant la notion de différentielle sur celle d'approximation et mettant au premier plan son statut d'application linéaire, même s'il s'est rapidement imposé, ne fut pas le seul à être développé. D'autres définitions de la différentiabilité furent proposées au début du siècle, privilégiant les propriétés d'invariance formelle de la différentielle ou cherchant à se ramener dans tous les cas, par le biais des dérivées directionnelles, à la seule dérivation de fonctions d'une variable.

III - D'AUTRES TENTATIVES

1 - Hadamard propose en 1923 dans [15] de définir la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables comme un pur symbole d'opérations :

$$dz = \partial z / \partial x . dx + \partial z / \partial y . dy + \dots \quad (1)$$

L'égalité ci-dessus signifiant que si $x, y, \dots$ et dès lors $z=f(x, y, \dots)$ sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire u quelconque, on a, quelles que soient ces expressions, si elles correspondent à des fonctions dérivables au point(s) considéré(s) :

$$dz/du = \partial z / \partial x . dx/du + \partial z / \partial y . dy/du + \dots \quad (2)$$

Ceci le conduit donc à définir une fonction différentiable comme une fonction :

- admettant au point considéré des dérivées partielles au premier ordre,
- satisfaisant le théorème de dérivation des fonctions composées exprimé dans la relation (2).

Cette définition met donc l'accent sur les seules propriétés formelles de la différentielle, le cadre de l'approximation étant complètement absent. On la retrouve par exemple dans les cours donnés à l'Ecole Polytechnique par J. Hadamard mais aussi par P. Lévy (cf. annexe III).

M. Fréchet y fait allusion au début de son article consacré à la notion de différentielle dans l'analyse générale. Il souligne que l'approche de J. Hadamard permettrait de ramener le cas de la correspondance $M = \mathfrak{F}(m)$ entre deux éléments abstraits au cas où le second élément est un nombre, mais ne poursuit pas dans cette voie estimant que ce point de vue présente le défaut de ne pas mettre en évidence le fait que la différentielle d'une fonction est "une expression simple, approchée de cette fonction".

En 1937, dans un texte dédié à J. Hadamard [16], il reprend cette définition, montre son équivalence avec celle de O. Stolz, puis l'étend au cadre de l'analyse fonctionnelle. Pour cela, il l'exprime tout d'abord la définition sous une forme équivalente plus apte à la généralisation, à savoir :

Nous dirons qu'une fonction ordinaire $f(x, y)$ (fonction numérique de deux variables numériques) est différentiable au point a, b par sens de M. Hadamard, s'il existe une expression linéaire en dx et dy , soit $A dx + B dy$, telle que si x, y sont deux fonctions de u égales en u_0 à a et b et dérivables en ce point, $f[x(u), y(u)]$ soit aussi dérivable en u_0 et qu'on ait, pour $u = u_0$,

$$\frac{d}{du} f[x(u), y(u)] = A x'_u + B y'_u.$$

puis il généralise aux fonctionnelles :

La généralisation se présente alors d'elle-même :

Une fonctionnelle $U[f]$ sera dite différentiable pour $f \equiv f_0$ au sens de M. Hadamard généralisé, s'il existe une fonctionnelle $W[df, f_0]$, linéaire par rapport à df , telle que si l'on considère une fonction $f(t, \lambda)$ dérivable par rapport à λ pour $\lambda = 0$, avec $f(t, 0) = f_0(t)$, la fonction de λ , $U[f(t, \lambda)]$ soit dérivable en λ pour $\lambda = 0$ et qu'on ait pour $\lambda = 0$

$$(4) \quad \frac{d}{d\lambda} U[f(t, \lambda)] = W\left[\frac{df}{d\lambda}, f_0\right]$$

ou avec les notations des « variations »

$$(4 \text{ bis}) \quad \delta U[f] = W[\delta f, f_0].$$

Il montre enfin que cette définition est plus large que la sienne et conclut par :

La définition au sens de M. Hadamard généralisé présente sur notre définition l'avantage de garder un sens pour des espaces abstraits vectoriels non distanciés où notre définition ne s'applique pas (ou, tout au moins, ne s'applique pas littéralement).

Il reste à voir si elle conserve les propriétés les plus importantes de la différentielle classique en dehors de la propriété essentielle (généralisant le théorème des fonctions composées) qui lui sert de définition. C'est un point sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

2 - R. Gâteaux, dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, parue en 1913 [17] et intitulée : "Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques", donne quant à lui une définition qui correspond en fait à celle de dérivée directionnelle :

3. Sur la différentielle totale. — Soit dans le domaine réel la fonction de deux variables, par exemple $u(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble des variables dans un domaine D . Si, x, y appartenant à D , la quantité

$$\frac{d}{d\lambda} u_{(\lambda=0)}(x + \lambda dx, y + \lambda dy) = du(x, y; dx, dy)$$

existe et est continue par rapport à l'ensemble des variables x, y , quels que soient dx, dy , elle est linéaire en dx, dy et égale à $u'_x dx + u'_y dy$.

Il mourra pendant la première guerre mondiale mais certains de ses manuscrits seront publiés en 1919 dans le Bulletin de la Société Mathématique de France [18]. Ils concernent essentiellement la théorie de l'intégrale et du potentiel dans le champ fonctionnel.

Dans la partie intitulée : "Fonctions d'une infinité de variables indépendantes", on trouve un chapitre consacré aux dérivées partielles de fonctions sur l'espace des suites réelles (E_ω) ou complexes (E'_ω).

La variation d'une telle fonction est définie comme suit pour jouer le rôle de la différentielle totale dans la théorie des fonctions classique :

23. *Variations d'une fonction.* — Nous allons emprunter au Calcul fonctionnel la notion de variation, qui nous rendra les services que rend la différentielle totale dans la théorie des fonctions d'un nombre fini de variables.

Soit dans E_m , soit dans E'_m , les variations sont définies par l'égalité

$$\delta F(x) = \left[\frac{d}{d\lambda} F(x + \lambda \delta x) \right]_{\lambda=0},$$

$$\delta^n F(x) = \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} F(x + \lambda \delta x) \right]_{\lambda=0}.$$

Les variations comprennent les dérivées comme cas particulier.

3 - P.Lévy, dans [8], reprend la définition de R.Gâteaux qui, à ses yeux, présente sur celle de M.Fréchet l'avantage d'être indépendante de la définition de distance, puis se pose la question de son équivalence avec celle de M.Fréchet, dans le cas où l'espace considéré est muni d'une distance :

On voit sans peine qu'une variation au sens de M. Fréchet vérifie la formule (2) si la définition de la distance est telle que la distance des deux fonctions $x(t)$ et $x(t) + \lambda f(t)$ est proportionnelle à λ . Cette condition est vérifiée par toutes les définitions que nous avons considérées, et il semble qu'une définition qui ne la vérifierait pas serait sans intérêt.

Mais la définition de Gâteaux est plus générale. L'expression (2) peut n'être pas une différentielle au sens de M. Fréchet.

1^{re} D'une part, si elle est homogène et du premier degré en δx , elle peut n'être pas linéaire. Cette circonstance se rencontre déjà dans la théorie des fonctions de deux variables; la fonction x arc tang $\frac{y}{x}$ admet à l'origine une différentielle au sens de Gâteaux, mais ce n'est pas une expression linéaire en dx et dy .

2^e D'autre part, il résulte de la définition (2) que

$$(3) \quad \frac{U_1 - U - \delta U}{m},$$

m désignant le module fonctionnel de δx , et δx étant de la forme $\lambda f(t)$, tend vers zéro quand λ tend vers zéro, $f(t)$ restant fixe. Pour que δU soit une différentielle au sens de M. Fréchet, il faut qu'elle tende vers zéro quand m tend vers 0 quelle que soit la forme de δx ; autrement dit, si $\delta x = \lambda f(t)$, qu'elle tende uniformément vers 0 quand λ tend vers 0, $f(t)$ étant une fonction quelconque de module fonctionnel égal à 1. Il peut ne pas en être ainsi, même si δU est une fonctionnelle linéaire.

Donc la formule (2) est plus générale que la définition précédente.

Toutes les fois qu'il y a une variation au sens de M. Fréchet, elle s'applique; mais elle peut représenter une expression qui ne soit pas une variation au sens de M. Fréchet.

Ceci le conduit à introduire une troisième définition, imposant à la variation au sens de R.Gâteaux d'être linéaire en δx .

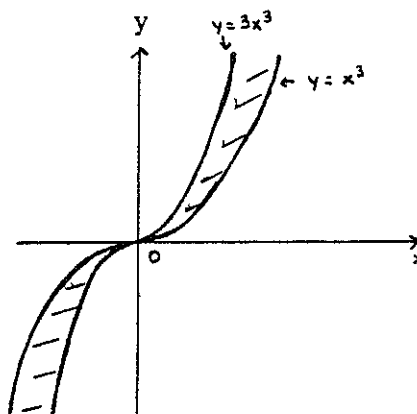
M.Fréchet reviendra sur cette définition dans l'article dédié à J.Hadamard déjà cité. Se replaçant dans le cadre des fonctions de deux variables réelles, il montre que la

définition proposée par P.Lévy ne garantit pas la différentiabilité au sens de J.Hadamard, en considérant une fonction continue f définie comme suit :

$f(x,y) = 0$ en dehors de la zone
hachurée

$f(x,y) = x$ le long de la courbe
 $y = 2x^3$

$f(0,0) = 0$



Cette fonction est différentiable au sens de P.Lévy à l'origine et sa différentielle y est nulle.

Mais elle n'est pas différentiable au sens de J.Hadamard en ce point puisque, si on pose :

$$x = u \\ \text{et } y = 2u^3$$

on a, à l'origine :

$$d[f(x(u),y(u))] / du = 1, \quad dx/du = 1 \text{ et non pas } df/du = 0$$

M.Fréchet conclut alors :

« La généralisation naturelle d'un point anguleux d'une courbe plane est un point d'une surface où les tangentes forment un cône ou bien un point d'une ligne double avec deux demi-plans tangents.

La différentielle de M. Paul Lévy n'est donc pas assimilable à une généralisation de la dérivée à droite ou à gauche. Et parmi les surfaces les plus communément étudiées, on en trouvera beaucoup possédant des points singuliers de la nature spécifiée ci-dessus, mais aucune qui soit différentielle au sens de M. Lévy sans l'être au sens de Stolz-Young. En résumé, la plus grande généralité de la différentielle de M. Lévy ne paraît guère susceptible d'applications dans l'Analyse classique. Elle pourrait, par contre, rendre des services dans la théorie des ensembles et particulièrement dans cette théorie des « contingents et paratingents » dont l'utilité a été signalée d'abord par M. Beppo Levi, puis par M. Séveri, mais dont on doit à M. Bouligand et à ses élèves d'avoir entrepris l'étude systématique. Enfin, M. Lévy a bien voulu nous signaler lui-même l'intérêt qu'il y a aussi « à partir d'une définition trop générale, pour montrer qu'elle n'a toutes les propriétés qu'on attend d'elle que si l'on introduit des conditions restrictives ».

Dans sa deuxième édition des Leçons d'analyse fonctionnelle, publiée en 1951 sous le titre "Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle" [19], P.Lévy revient longuement sur cette question. Il présente d'abord la définition de M.Fréchet, affirmant que :

Naturellement cette définition dépend essentiellement de celle de r . Elle est surtout utile dans le cas où r est une longueur, ou dans celui où $r[\lambda x(t)]$, sans être proportionnel à $|\lambda|$, est au moins pour $|\lambda|$ très petit de l'ordre de grandeur de $|\lambda|$. Alors la variation δU rend les mêmes services qu'une dérivée dans la théorie des fonctions d'une variable; c'est d'ailleurs la dérivée de $U[x(t) + \lambda \delta x(t)]$ par rapport à λ ; et une formule donnant δU en fonction de $x(t)$ et $\delta x(t)$ joue, pour l'étude de la variation de U le long d'une courbe donnée de l'espace fonctionnel, le même rôle qu'une équation différentielle dans la théorie des fonctions d'une variable.

Il n'en serait pas de même si $r[\lambda \delta x(t)]$ était par exemple un infiniment petit comparable à $\sqrt{\lambda}$. Alors une variation de l'ordre de grandeur de $d\lambda$ serait $o(dr)$, et l'on pourrait avoir des fonctionnelles très différentes les unes des autres, dont les différences seraient variables, et qui pourtant auraient partout la même variation. Une équation donnant δU ne pourrait donc pas être intégrée. Si au contraire $r[\lambda \delta x(t)]$ était par exemple de l'ordre de grandeur de λ^2 , une fonctionnelle non linéaire n'aurait pas de variation, sauf peut-être en certains points exceptionnels.

C'est donc seulement dans le cas d'un écart permettant de définir une longueur que la variation au sens de M. Fréchet joue un rôle comparable à celui de la différentielle en Analyse classique.

Ensuite, il propose pour s'affranchir de ces difficultés de revenir à la définition de Gâteaux qui revient à définir la variation pour des déplacements rectilignes dans l'espace fonctionnel et, après discussion, introduit la condition de linéarité déjà présente dans la première version. Il fait état des critiques de M. Fréchet et de la définition proposée par ce dernier pour généraliser les idées de J. Hadamard. En fait, cette définition présente elle aussi des inconvénients puisqu'une fonctionnelle linéaire peut ne pas avoir de variation :

"Si par exemple $U = x'(\tau)$, τ étant une valeur particulière de t , même en se restreignant à l'espace des fonctions à dérivées continues, il est bien clair que l'existence de $\delta x / \delta \lambda$ n'entraîne pas celle de $\delta U / \delta \lambda$."

D'où une cinquième définition, connue écrit-il sous le nom de définition d'Hadamard - Fréchet :

$\delta x / \delta \lambda$ doit non seulement exister mais appartenir au champ fonctionnel $\mathcal{E}$ où U est définie et c'est cette condition plus restrictive qui doit entraîner l'existence de $\delta U = U'_x d\lambda$, dont on précise toujours que c'est une fonctionnelle linéaire de $\delta x(t)$.

P. Lévy pose ensuite le problème du type de convergence envisagé :

Mais il y a encore quelque chose qui n'est pas tout à fait satisfaisant. Sans doute n'a-t-on pas parlé d'écart, ni de distance, ni de voisinage. Mais n'est-ce pas parce qu'on a adopté, à propos des fonctions

$$\frac{1}{d\lambda} [x(t, \lambda + d\lambda) - x(t, \lambda)] \quad \text{et} \quad x'_\lambda(t, \lambda)$$

la définition particulière de la limite qui consiste à considérer que leur différence tend vers zéro avec $d\lambda$ si, pour chaque t fixe, elle tend vers zéro ? Et si l'on se place dans un espace $\mathcal{E}$ où un mode de convergence (en général lié à un écart) a été défini, n'est-ce pas ce mode de convergence qu'il convient de considérer ? Ce serait ainsi une *sixième définition*, très peu différente de la cinquième, mais qui ne lui est pas identique.

Il introduit encore une septième définition, dans le cas de fonctionnelles localement Lipschitziennes, avant de revenir en conclusion au point de vue de M. Fréchet, reconnaissant que "puisque les notions de convergence ou d'écart qu'on avait cru écarter se réintroduisent subrepticement, notre conclusion sera que : il vaut mieux s'en tenir à la première définition de M. Fréchet, qui est simple, et où l'introduction d'un écart défini dans le champ fonctionnel où U est défini est au fond très naturelle."

En fait, la notion de différentielle au sens de R. Gâteaux et P. Lévy continuera à être utilisée en mathématiques, en particulier en théorie de l'optimisation.

4 - Notons enfin que, dans un article de synthèse destiné aux étudiants et paru dans la revue l'Enseignement Mathématique en 1967 [20], M. Fréchet fera état d'une autre définition encore introduite en 1953 par le mathématicien italien dans ses "Lezioni di Analisi" [21] et équivalente à la définition usuelle :

Severi [12] a réussi à donner la définition moderne de la différentiabilité la plus analogue à la définition antérieure. Au lieu de supposer seulement l'existence de dérivées partielles au point considéré, il exige l'existence en ce point de dérivées partielles restreintes (plus tard, Ostrowski a été conduit à la même définition à une nuance près dans la définition équivalente, des dérivées partielles restreintes).

Nous dirons, avec Severi, que $f(x, y)$ a au point (a, b) , une *dérivée partielle restreinte* par rapport à x si le rapport :

$$\frac{f(x, y) - f(a, y)}{x - a}$$

tend vers une limite finie et déterminée λ , quand $(x-a)^2 + (y-b)^2$ tend vers zéro de façon que $\left| \frac{y-b}{x-a} \right|$ reste bornée¹⁾. S'il en est ainsi, cela aura lieu, en particulier, quand $y = b$, c'est-à-dire que

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \rightarrow \lambda \quad \text{quand} \quad x \rightarrow a.$$

Autrement dit, quand $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte, par rapport à a , elle a aussi une dérivée partielle au sens ordinaire par rapport à a et la première est égale à la seconde f'_a .

On dira de même que $f(x, y)$ a au point (a, b) une dérivée partielle restreinte par rapport à y , si le rapport

$$\frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b} \tag{20}$$

a une limite quand $(x-a)^2 + (y-b)^2 \rightarrow 0$ de sorte que $\left| \frac{x-a}{y-b} \right|$ reste bornée. Et alors $f(x, y)$ a une dérivée partielle f'_b au sens ordinaire au point (a, b) et le rapport (20) tend vers f'_b .

Ceci étant, nous dirons que $f(x, y)$ est *différentiable* au point (a, b) au sens de Severi, si en ce point, $f(x, y)$ a ses deux dérivées partielles restreintes par rapport à x et y . Et alors la différentielle de $f(x, y)$ au point (a, b) au sens de Severi sera encore

$$df = f'_a \Delta x + f'_b \Delta y. \tag{19}$$

¹⁾ En réalité, Severi suppose que ce rapport a une limite, mais qu'il reste borné aussi.

NOTE :

Nous avons eu connaissance très récemment d'un article de Angus E. Taylor intitulé : *"The Differential : Nineteenth and Twentieth Century Developments"*, publié en 1974 dans *Archive for History of Exact Sciences*. L'auteur y étudie de manière très détaillée le contexte d'apparition de la notion de différentiabilité et plus rapidement les développements ultérieurs liés aux besoins de l'analyse fonctionnelle. La lecture de cet article complètera très utilement, pour le lecteur intéressé par ces questions, le travail que nous avons réalisé dans cette annexe I ainsi que dans l'annexe III, pour les besoins de l'analyse didactique.

REFERENCES :

- [1] TANNERY J. : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Ed. Hermann, 1886.
- [2] VOSS A. : *"Differential und Integralrechnung"* dans *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit einschluß ihrer anwendungen*, Tome III.1, p. 54-134, Leipzig, Ed. Teubner, 1899-1916, Traduction française de J. Molk : *Calcul différentiel*, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. II-1.
- [3] FRECHET M. : *"Sur la notion de différentielle"*, Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 152, N°13, p. 845-847 et 1050-1051, 1911.
- [4] STOLZ O. : *Grundzüge der Differential und Integral Rechnung*, Tome I, Leipzig, Ed. Teubner, 1893.
- [5] YOUNG W.H. : *The Fundamental Theorems of the Differential Calculus*, Cambridge Tracts in Mathematics, N°11, Cambridge University Press, 1909.
- [6] VOLTERRA V. : *"Sopra le funzioni dipendenti da linee"*, Rend. Lincei., Ser. IV, Vol III, p. 225-230, 1887.
- [7] VOLTERRA V. : *"Les problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne"*, Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft, Vol. XIII, p. 130-150, 1914, reproduit dans *Volterra Opere Matematiche*, Vol.4, p. 19-42, Rome, Accademia Nazionale dei Lincei, 1960.
- [8] LEVY P. : *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Paris, Gauthier Villars, 1922.
- [9] HADAMARD J. : *"Sur les opérations fonctionnelles"*, Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 136, p. 351-354, 1903.
- [10] RIESZ F. : *"Sur les opérations fonctionnelles linéaires"*, Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 149, p. 947-977, 1909.
- [11] FRECHET M. : *"Sur la notion de différentielle dans le Calcul Fonctionnel"*, Comptes-Rendus du Congrès des Sociétés Savantes, Grenoble, 1913.
- [12] FRECHET M. : *"Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne"*, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 15, p. 135-161, 1914.
- [13] FRECHET M. : *"La notion de différentielle dans l'analyse générale"*, Note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 180, p. 806, 1925.
- [14] FRECHET M. : *"La notion de différentielle dans l'analyse générale"*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Ser. 3, Tome 42, p. 293-323, 1925.
- [15] HADAMARD J. : *"La notion de différentielle dans l'enseignement"*, Scripta Uni. Ab. Bib. Hier., Jerusalem, 1923.
- [16] FRECHET M. : *"Sur la notion de différentielle"*, Journal de Mathématiques, Tome XVI, Fasc. III, p. 233-250, 1937.
- [17] GATEAUX R. : *"Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques"*, Note aux Comptes-Rendus à l'Académie des Sciences, Tome 157, p. 325-327, 1913.
- [18] GATEAUX R. : *"Sur diverses questions de calcul fonctionnel"*, Bull. SMF, Vol. 45-47, p. 70-96, 1917-19.
- [19] LEVY P. : *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Paris, Gauthier Villars, 1951.

- [20] FRECHET M. : "*Sur diverses définitions de la différentiabilité*", L'Enseignement Mathématique, Ser. II, Vol. 10, p. 177-228, 1964.
- [21] SEVERI : *Lezione di Analisi*, 1953.
- [22] TAYLOR A.E. : "*The Differential : Nineteenth and Twentieth Century Developments*", Archive for History of Exact Sciences, Vol. 12, N° 4, p. 355-383, 1974.

ANNEXE II

PROGRAMMES ET INSTRUCTIONS DE MATHÉMATIQUES

M. Artigue

I - LES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Dans les programmes de l'enseignement secondaire, sur tout le vingtième siècle, la notion essentielle dans ce domaine est celle de dérivée. Elle est généralement introduite, jusqu'en 1970, en classe de première, comme la limite du quotient des accroissements de la fonction et de la variable.

La différentielle apparaît pourtant, timidement, avant 1970, à deux reprises :

- dans le programme de la classe de philosophie-sciences créée en 1941 :
"Définition de la différentielle - interprétation graphique",
- dans les programmes de première et de terminale scientifiques, lors de la réforme de 1966 :
"Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable, différentielle" (classe de première)
"Différentielle première d'une fonction d'une variable, interprétation géométrique, usages" (classes de terminale C, D et E).

Il faut noter que les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans la classe de philosophie-sciences, qui deviendra après la guerre : classe de sciences expérimentales, sont utilitaires. Il s'agit *"d'apprendre aux élèves à appliquer correctement les résultats à l'étude de problèmes concrets"*, précisent les instructions qui accompagnent les programmes. A nos yeux, ce n'est donc nullement le fait du hasard si c'est dans un tel enseignement qu'apparaissent justement les différentielles. Les programmes de cette classe restant étrangement stables, la définition de la différentielle s'y maintiendra jusqu'en 1967, c'est à dire jusqu'à la réorganisation des classes de terminale.

Mais c'est avec la réforme dite des mathématiques modernes de 1970 qui rentre en application en 1971 en première et l'année suivante en terminale qu'un changement important intervient. La notion d'application linéaire tangente est introduite et c'est elle qui sert désormais de support à la définition de la dérivée :
"Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; dérivée en ce point" (classe de première)
"Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; notation différentielle" (classe de terminale).

Les commentaires du nouveau programme consacrent un paragraphe à cette nouvelle définition, soulignant *"qu'elle se rapproche de l'usage des physiciens et se prête aisément à des généralisations ultérieures"*.

On peut noter que ce changement de définition de la dérivée ne se formule pas en terme de différentielle mais en terme d'application linéaire tangente, le mot "différentiel" n'apparaît que dans l'expression très réductrice : "notation différentielle". On peut voir là le souci de se démarquer nettement de la vieille notion de différentielle, trop péjorativement connotée pour pouvoir servir de support verbal à la rénovation entreprise.

Ces programmes qui voient également le développement de l'enseignement de l'algèbre linéaire, dès la classe de seconde, resteront en vigueur jusqu'à la réforme de 1981 qui entrera en application en 1981 en première et l'année suivante en

terminale. Cette réforme manifeste elle aussi une rupture : l'accent est désormais mis sur une approche expérimentale des mathématiques et la résolution de problèmes et non plus sur l'apprentissage de structures ; le formalisme est fortement réduit. On note ainsi un repli de l'algèbre linéaire et le retour d'une géométrie plus classique basée sur transformations et configurations. En ce qui nous concerne ici, la différentielle, application linéaire tangente, disparaît des programmes mais le cadre de l'approximation demeure central puisque le nombre dérivé est introduit à partir de la notion de développement limité à l'ordre un :

"Développement limité d'ordre un ; nombre dérivé, interprétations cinématique (vitesse) et géométrique (tangente)" (classe de première),

le programme des classes de terminale C et E précisant quant à lui :

"On donnera les notations df/dx , d^2f/dx^2 ... des dérivées, mais la notion de différentielle est en dehors du programme".

La dernière réforme en date, appliquée en 1985 en classe de première et 1986 en terminale, est en fait une réforme d'ajustement. Il s'agit de tenir davantage compte des rythmes d'acquisition des élèves et des difficultés conceptuelles présentées par certaines notions. En ce qui nous concerne, en premières S et E, le terme de développement limité disparaît et on revoit apparaître une formulation en terme d'approximation fonctionnelle :

"Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions qui à h associent $(1+h)^2$, $(1+h)^3$, $1/(1+h)$, $\sqrt{1+h}$.

Lorsqu'au voisinage de $h=0$, $f(a+h)$ peut s'écrire sous la forme :

$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. on dit que la fonction f admet A pour nombre dérivé au point a ".

Les commentaires, intégrés aux programmes, mettent l'accent sur le principe d'approximation commun aux démonstrations des règles de dérivation :

"Les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit à ces résultats : on néglige au cours des calculs les termes d'ordre supérieur à 1, c'est à dire du type $h\varepsilon(h)$ où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

En terminale, on note peu de différences avec la version précédente, si ce n'est l'explicitation du caractère purement symbolique des notations différentielles introduites pour les besoins de la physique :

"En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations purement symboliques df/dx , d^2f/dx^2 ..., la notion de différentielle n'est pas au programme".

II - LES PROGRAMMES DES CLASSES PREPARATOIRES

Dans les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (mathématiques supérieures et spéciales), la situation est sensiblement différente de celle de l'enseignement secondaire. A partir de la réforme de 1903, qui définit pour la classe de mathématiques spéciales un programme maximum que les programmes des concours d'entrée aux différentes écoles n'auront pas le droit de dépasser, la notion de différentielle est présente dans tous les programmes. Il n'en demeure pas moins que son statut évoluera dans l'enseignement au cours du siècle.

Jusqu'en 1964, plusieurs réformes se succèdent : 1925 - 1941 - 1956. Les différentielles figurent dans tous les programmes avec un statut identique à celui qu'elles ont dans la réforme de 1903. Ce sont des expressions formelles qu'il est bon de savoir utiliser dans les calculs :

"Différentielle première d'une fonction d'une variable

Différentielle totale d'une fonction $f(x,y,...)$ définie par la formule

$$df = f'_x dx + f'_y dy +$$

Transformations de cette expression lorsque l'on remplace x, y, z par des fonctions d'autres variables" (programme de 1903).

"Définition de la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables. Intégration de $f'_x dx + f'_y dy = 0$. Changement de variables dans une différentielle totale. Application au calcul de dérivées. Fonction scalaire d'un point. Gradient." (programme de 1956).

Et les commentaires de ce programme font même explicitement référence à ceux de la réforme de 1925 :

"L'usage des différentielles a été, bien entendu, maintenu au programme et sans doute convient-il de reprendre le commentaire de 1925 : "les élèves doivent être exercés à calculer directement avec les différentielles comme avec les dérivées. Ils doivent s'en servir couramment lorsque le choix des variables indépendantes reste arbitraire, et savoir les utiliser pour des changements de variables simples et dans les calculs sur les fonctions implicites."

Les termes employés ici : "usage", "servir", "utiliser" ne laissent aucun doute sur le statut réel de ces différentielles.

Ce qui change essentiellement d'un programme à l'autre, sur cette longue période, c'est la place d'insertion des différentielles : dans un paragraphe sur les infiniment petits, coupé des dérivées, dans les programmes de 1903 ; dans un paragraphe spécial, après les fonctions de plusieurs variables, dans les programmes de 1925 ; avec le calcul des primitives dans les premiers programmes de la classe de mathématiques supérieures, en 1941 ; à la fin du chapitre consacré aux fonctions de plusieurs variables réelles dans le programme de 1956. Mais il faut souligner que la notion occupe dans tous les cas une position marginale.

Un changement s'amorce en 1964. En mathématiques spéciales, la notion de différentiabilité apparaît à propos des fonctions de plusieurs variables :

"A - Définition d'une fonction différentiable en un point. Dérivées partielles premières. Une fonction qui admet des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point est différentiable en ce point...."

Mais le changement est timide comme le montre la suite du programme. Après la dérivation des fonctions composées, la formule de Taylor, les dérivées des fonctions implicites, la différentielle apparaît enfin dans un second paragraphe :

"B - Différentielle première d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables (aucune question ne sera posée sur la définition d'une différentielle). Application à des problèmes de changement de variables."

Les commentaires reviennent sur les restrictions introduites :

"La notion de différentielle peut être présentée de diverses manières. Aussi a-t-il paru préférable d'exclure explicitement des concours toute question théorique sur cette notion. L'important est que les élèves sachent utiliser les différentielles dans les problèmes de changement de variables, qu'ils aient compris aussi quel raisonnement correct mais fort abrégé on fait souvent en physique quand on "assimile" différentielles et accroissements, quelques exemples tirés de la physique seront utiles. La notion de différentielle d'ordre supérieur reste hors du programme."

On est donc là manifestement à une période charnière qui voit l'introduction du registre de l'approximation dans sa forme moderne (notion de différentiabilité) et l'interprétation, dans ce registre, des pratiques physiciennes de mise en équations tout en respectant les valeurs formelles traditionnelles et en refusant d'effectuer un choix théorique.

En fait, il faut attendre la réforme de 1972 pour voir apparaître clairement dans les textes des programmes une présentation unifiée :

"Différentiabilité. Différentielle. Différentiabilité d'une application composée d'applications différentiables",

ainsi que tous les théorèmes usuels reliant continuité, différentiabilité et existence de dérivées partielles.

Les commentaires confirment l'importance du changement :

"L'obligation nouvelle d'introduire la notion d'application différentiable modifie assez sensiblement l'étude du calcul différentiel."

Ils détaillent ensuite une présentation adaptée au nouveau programme, dans le cadre d'espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

La dernière réforme en date, celle de 1984, a pour objectif, comme celle de 1982 dans l'enseignement secondaire, de *"revaloriser une approche intuitive et concrète des mathématiques sans pour autant sacrifier la rigueur"*. En analyse, il s'agit en particulier d'éviter la recherche d'hypothèses minimales, au profit de la mise en place de méthodes efficaces pour un ensemble assez large de situations. Ceci conduit à se limiter au cas C^1 en première année, avec une approche ici aussi en terme de développement limité :

"...dérivées partielles premières, fonctions de classe C^1 , développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 , application linéaire tangente en un point. Dérivées partielles de la composée de deux fonctions de classe C^1 . Notation différentielle, dérivée suivant un vecteur."

La notion générale de différentiabilité est reportée en seconde année.

III - LES PROGRAMMES UNIVERSITAIRES

En France, les programmes ne seront unifiés à l'entrée à l'Université que sur une courte période entre 1948 et 1968. Néanmoins cette période limitée suffit à notre propos puisque c'est la réforme de 1958 qui voit le changement de statut de la différentielle dans l'enseignement, à ce niveau.

Dans le programme du Certificat d'Etudes Supérieures de Mathématiques Générales, publié en 1948, les différentielles sont introduites dans le chapitre "Algèbre et analyse", au premier paragraphe : "Théorie des fonctions et calcul différentiel", à propos de l'étude des fonctions de plusieurs variables :

"Fonctions de plusieurs variables. Continuité. Dérivées partielles. Formule de Taylor. Fonctions multiformes, fonctions implicites. Différentielles totales, éléments différentiels, différentielles d'ordre supérieur au premier."

Dans le programme du Certificat d'Etudes Supérieures de Mathématiques et de Physique, publié en 1958, la différentiabilité et la différentielle apparaissent simultanément précédant la définition des dérivées partielles, dans une présentation en avance de plus de dix ans sur celle des programmes des Classes Préparatoires :

"Fonctions de plusieurs variables. Continuité. Fonction différentiable en un point. Différentielle en un point. Différentiabilité d'une fonction présentant des dérivées partielles continues."

Les programmes du Diplôme Universitaire d'Etudes Scientifiques, publiés en 1966, correspondent à l'organisation du premier cycle universitaire en deux ans que nous connaissons encore aujourd'hui. Le programme de première année s'y limite, pour ce qui nous concerne ici à :

"Dérivabilité. Dérivées partielles. Gradient. Application au calcul d'erreurs."

La différentiabilité est définie en seconde année pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

On note donc un important décalage en ce qui concerne le changement de statut des différentielles entre les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles et l'Université. On peut faire l'hypothèse que les différences de statut des enseignants de ces deux institutions d'une part, les représentations qu'ils se forment, compte-tenu de ces institutions, des objectifs de leur enseignement d'autre part y ont fortement contribué.

ANNEXE III

LES OUVRAGES DE MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT (XIX^{ème} - XX^{ème})

Maryvonne Hallez

I - LES OUVRAGES, LES CHOIX

L'objectif de cette annexe est de contribuer à replacer l'objet d'enseignement qu'est la différentielle en mathématiques dans le cadre de son évolution. Pour cela, nous avons étudié un certain nombre de traités et de manuels d'Analyse, publiés de la fin du XVIII^{ème} siècle à nos jours, en essayant de déterminer quand et comment la notion de différentielle y était introduite. J'ai tout d'abord été étonnée par le grand nombre d'ouvrages concernés sur la période envisagée⁽¹⁾. En effet, les traités et manuels pour "commençants" et étudiants se multiplient dès le début de cette période, chaque auteur estimant que ses prédécesseurs ont manqué quant à la clarté de l'exposition ou quant à la rigueur des démonstrations⁽²⁾.

Notre choix de traités et manuels, pour l'enseignement supérieur a été guidé, d'une part par la liste donnée par Martin Zerner dans son exposé sur les fondements du calcul différentiel dans les traités de 1870 à 1914 [1], ceci en privilégiant les ouvrages ayant eu plusieurs éditions, d'autre part par la liste des manuels de mathématiques spéciales donnée par Anne Rehfeld dans la brochure "80 ans d'Analyse" [2].

Pour l'enseignement secondaire, nous avons essayé de choisir des manuels largement diffusés correspondant aux différents types d'intervention des différentielles dans les programmes répertoriés dans l'annexe II.

Le travail réalisé reste limité. D'une part, nous nous sommes surtout attachée à l'introduction des différentielles, d'autre part, dans le cas d'ouvrages à éditions multiples, nous n'avons pas cherché à étudier systématiquement une éventuelle évolution de cette introduction au fil des éditions. Souvent, nous n'avons eu à notre disposition qu'une seule édition et pas nécessairement l'édition originale. De plus, nous n'avons pas pris en compte dans l'analyse la spécificité de chaque ouvrage, en termes d'objectifs ou de public. Or il y a sans aucun doute des différences importantes à ce niveau : le traité de Lacroix par exemple se veut encyclopédique et présente toutes les méthodes utilisées au XVIII^{ème} siècle, celui de Cauchy se veut constructif : il élabore une méthode, celui de Duhamel se veut didactique....

II - CATEGORISATION DES MANUELS RETENUS

Dans l'exposition du calcul infinitésimal, on distingue classiquement deux approches qui persisteront jusque vers 1880 :

- l'approche de Lagrange basée sur le développement en séries selon les puissances de l'accroissement de la variable (Lagrange, Hermite, Brasseur...) où la dérivée est définie comme le coefficient du premier terme de l'accroissement de la fonction,
- l'approche par les limites (Cauchy, Souchon, Houel, Gilbert, Duhamel, Todhunter...) où la dérivée est définie comme la limite du rapport des accroissements respectifs de la fonction et de la variable.

La deuxième approche fut la plus répandue au XIX^{ème} siècle. Citons à ce

propos Jean-Louis Ovaert dans [3] (p.189) :

"Les mathématiciens du XIXème abandonneront, à la suite de Cauchy, la thèse de Lagrange comme point de départ du calcul différentiel" mais "les résultats de Lagrange, sous leurs différents aspects, constituent encore aujourd'hui l'ossature du cours de calcul différentiel".

Le principe de l'approche de Lagrange est exposé par Lacroix dans la préface de son "Traité élémentaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral" (1ère édition 1797) [4] :

C'est celui de *"la convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une quantité prête à s'évanouir d'après lequel un terme de ces séries peut être rendu plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent"* (p. XXXiiij), Lacroix étant d'ailleurs sensible aux cas particuliers pour lesquels *"ces méthodes deviennent insuffisantes"* (ibid.p.viiij).

C'est Cauchy qui introduit la seconde approche. A partir de 1880, l'utilisation du théorème des accroissements finis dont Dini donne une démonstration rigoureuse en 1878, lui apporte une nouvelle rigueur. La deuxième édition du "Cours d'Analyse" de Jordan (1ère édition 1882) est un des premiers exemples typiques de cette présentation.

Au tournant du XXème siècle, pour le problème qui nous intéresse ici, un changement apparaît en mathématiques avec la définition de la différentiabilité par Stolz et celle de la différentielle comme application linéaire tangente par Fréchet (cf. Annexe I).

Nous constituerons une troisième catégorie pour rendre compte des ouvrages qui se situent dans ce cadre.

Pour compléter cette vue perspective, l'étude de quelques manuels de l'enseignement secondaire publiés de 1940 à nos jours nous a paru importante pour ce qu'elle montre de l'enseignement en train de se faire face aux divers changements de programme et d'approche qui s'enracinent dans l'histoire de l'étude locale des fonctions et dans celle du statut de l'approximation en mathématique.

III - GRILLE D'ANALYSE DES OUVRAGES CONCERNANT L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

Nous avons essayé plusieurs grilles d'analyse avant de nous arrêter à celle finalement utilisée et, à la suite de ces essais, nous avons d'ailleurs éliminé certains manuels qui nous semblaient par trop redondants. Nous donnons en annexe la liste des ouvrages finalement retenus.

Pour chacun d'eux, nous avons photocopié la table des matières et la préface et une fiche, de 2 à 4 pages, selon l'importance du manuel a été rédigée et archivée, en suivant la grille d'analyse.

La grille d'analyse comprend six rubriques :

- informations générales sur l'ouvrage : titre, auteur(s), date de première édition, éventuellement nombre d'éditions et édition(s) consultée(s),
- introduction des différentielles dans l'ouvrage : chapitre(s) de définition des différentielles, type de définition donné, notations utilisées, interprétations et commentaires proposés, relations éventuelles explicites avec dérivabilité, continuité..., introduction de différentielles d'ordre supérieur et dans ce cas, type de définition donné,
- définition et statut des infiniment petits dans l'ouvrage : présence ou non des infiniment petits, chapitre de définition, mode de définition, principes de gestion et en particulier existence de références explicites aux principes de substitution,

- traitement réservé à quelques grands théorèmes (théorème de composition des dérivées ou différentielles, théorème de Schwarz) : énoncé proposé, type de démonstration, rigueur de la démonstration,
- présence ou non d'un chapitre sur les développements limités,
- remarques complémentaires.

Les deux premières rubriques s'imposaient. La troisième nous a semblé nécessaire du fait des liens étroits entretenus entre infiniment petits et différentielles dans l'histoire mathématique. Les deux suivantes sont plutôt des rubriques "d'environnement" : il s'agit de se faire une idée du type de traitement des objets mathématiques réalisé dans l'ouvrage, à partir de quelques éléments qui ont paru discriminants dans une première lecture, compte-tenu du thème particulier étudié.

Le lecteur intéressé trouvera à la fin de cette annexe quelques résumés de fiches. Dans ce paragraphe, nous allons développer trois points qui nous ont paru particulièrement significatifs :

- l'organisation de l'ouvrage quant à l'introduction des différentielles,
- la place et le statut des infiniment petits,
- la façon dont sont définies les différentielles.

ORGANISATION DE L'OUVRAGE QUANT A L'INTRODUCTION DES DIFFERENTIELLES

Nous avons retenu ici quatre questions, destinées à éclairer le statut des différentielles dans l'ouvrage et à aider à cerner les relations entre différentielles et dérivées :

- Dans quel(s) chapitre(s) sont introduites les différentielles ?
- Les différentielles sont-elles introduites avant ou après les dérivées ?
- Sont-elles introduites dans le même chapitre que les dérivées ou font-elles l'objet d'un chapitre spécial ?
- Sont-elles introduites à propos des fonctions d'une seule variable, à propos des fonctions de plusieurs variables, ou dans un autre contexte ?

Les éléments les plus saillants qui ressortent de l'analyse sont les suivants :

En dehors du livre de Lacroix déjà cité (1ère édition 1797, édition consultée 1810) qui présente la différentielle à partir du développement en séries, tous les livres consultés définissent la dérivée avant d'introduire la notion de différentielle. Mais, le plus souvent, la différentielle du premier ordre d'une fonction d'une variable réelle est définie dans le même chapitre que la dérivée et souvent dans le même paragraphe.

Un regard rapide sur quelques tables des matières éclaire ces données :

Duhamel, professeur à l'Ecole Polytechnique de 1830 à 1869 en dehors d'une brève interruption, publie par exemple pendant cette période ses "Eléments de Calcul Infinitésimal" [5] (1ère édition 1856, édition consultée 1874).

Les différentielles sont introduites d'abord à propos de l'étude des fonctions d'une variable, dans le chapitre II, après les dérivées, avant les théorèmes de différentiation de fonctions. Le chapitre III, consacré aux fonctions de plusieurs variables, voit la définition des différentielles partielles et totales :

CHAPITRE II.

Des dérivées, des différences et des différentielles des fonctions d'une seule variable. Notations....	227
Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées.....	230
Différentiation des fonctions de fonctions	231

Différentiation des fonctions inverses.....	233
Différentiation des fonctions composées.....	236
Théorème des fonctions homogènes.....	237
Différentielle d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.	238
Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples.....	239
Différentiation des fonctions simples.....	240
Différentiation des fonctions implicites.....	249
Expression du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable.....	251
Différentielles et différences d'un ordre quelconque de fonctions d'une seule variable.....	258

CHAPITRE III.

Différentielles, dérivées et différences partielles des divers ordres, des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différences et différentielles totales.....	264
De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations...	267
Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes.....	269
Différentielles totales des divers ordres des fonctions de variables dépendantes.....	273
Différentielles des divers ordres des fonctions implicites...	274

Cette organisation se retrouve dans bon nombre de manuels :

Par exemple, dans son "Cours de Calcul Différentiel et Intégral" [6] (1ère édition 1868, édition consultée 1879), Serret ne fait, par rapport au livre de Duhamel, que séparer les différentielles et dérivées d'ordre supérieur de celles du premier ordre et consacrer un chapitre à part aux différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables.

On ne rencontre que plus tardivement le report de l'introduction de la différentielle d'une fonction d'une seule variable au chapitre sur les fonctions de plusieurs variables. C'est le cas par exemple dans le "Cours de Mathématiques Générales" de Vessiot et Montel [7] (1ère édition 1921, édition consultée 1951). Dans le tome d'Analyse du "Cours de Mathématiques" de Lelong-Ferrand et Arnaudès [8] (1ère édition 1972, édition consultée 1977), la différentielle est même introduite directement dans un cadre plus général, celui d'applications entre espaces affines associés à des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

On peut noter que l'étude des dérivées et des différentielles se fait parallèlement excepté dans le "Cours de Calcul Mathématique, Algébrique, Différentiel et Intégral" de Laboureur [9] où les différentielles font l'objet d'une étude séparée. On est tenté de lier ce fait avec la spécificité du public auquel s'adresse ce livre : des ingénieurs et, au delà, avec l'idée d'une spécificité du traitement des différentielles en physique (cf.annexe V).

Goursat énonce en 1943 dans son "Cours d'Analyse Mathématique" [10] (p.5) : *"L'origine de la notation différentielle se trouve dans la considération des infiniment petits"*. Cela semble évident d'un point de vue historique et, malgré les critiques virulentes dont cette notion a pu ou peut faire l'objet au moment où ces ouvrages sont écrits (cf. par exemple [11]), tous les manuels consultés, jusqu'en 1970,

définissent les infiniment petits. Et, dans le manuel déjà cité Lelong-Ferrand et Arnaudès, même si les infiniment petits ne sont pas définis, on peut lire :

A la limite, si on imagine un « accroissement infiniment petit » de la variable, noté dx , on peut convenir de dire que l'accroissement correspondant de la fonction, soit df , vérifie « exactement » la relation

$$(3) \quad df = f'(a).dx ;$$

ce langage est couramment utilisé en physique, et donne une vision intuitive des différentielles ; mais il n'a pas de signification mathématique rigoureuse : il n'existe pas, en effet, de mystérieux vecteurs « infiniment petits », mais seulement des variables vectorielles parcourant des voisinages de l'origine.

C'est pourquoi il nous a semblé utile de rendre compte ici du statut des infiniment petits dans les différents ouvrages consultés.

LE STATUT DES INFINIMENT PETITS

A - Préliminaires :

Carnot, dans ses "Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal", [12] définissait l'analyse infinitésimale comme :

"l'art d'employer auxiliairement les quantités infinitésimales pour découvrir les relations qui existent entre des quantités proposées" (p. 14) , sans faire de distinction entre les méthodes du moment que l'on utilise les limites, même si elles ne sont pas clairement définies, et non l'approche de Lagrange.

En construisant l'analyse à partir du concept de limite, Cauchy libère cette dernière *"des imprécisions du XVIIIème siècle"* comme l'écrit Dhombres dans "Nombre, mesure et continu" [13]. et l'on pourrait penser que, cette étape étant franchie, la méthode des limites va s'imposer très rapidement et que les infiniment petits, devenus inutiles, vont disparaître de la scène mathématique. En fait, ce ne sera pas le cas : infiniment petits et limites vont continuer à coexister pendant une longue période.

Comme le souligne Dhombres, dans l'ouvrage déjà cité, la difficulté à s'imposer de la méthode des limites est peut-être liée à l'absence de statut des nombres réels à l'époque et on trouve dans Cauchy même *"une sorte d'hésitation de langage entre le concept de limite et l'utilisation des quantités infinitésimales."* (p.184)

Houël, en 1878, écrira par exemple dans son "Cours de Calcul Infinitésimal" [14] :

"il n'existe qu'une seule méthode rigoureuse : la méthode des infiniment petits, celle de Cauchy et de Duhamel... et c'est la même que celle des limites." (p. VII)

Quant à de La Vallée Poussin, dans l'introduction à son "Cours d'Analyse Infinitésimale" [15] (édition consultée 1920), il distingue nettement comme deux méthodes différentes, la méthode des limites et la méthode infinitésimale :

19. Méthode des limites. — Lorsque l'on a obtenu une relation entre des variables qui subsiste pour une infinité de valeurs de celles-ci, on peut, en s'appuyant sur les principes précédents, remplacer dans cette relation les variables par leurs limites. Cette opération porte le nom de *passage à la limite*. Cette nouvelle règle qui s'ajoute aux quatre règles

fondamentales de l'arithmétique, caractérise l'analyse infinitésimale.

La méthode des limites consiste à trouver des relations entre les quantités par passage à la limite.

20. Méthode infinitésimale. — Une variable qui a pour limite zéro est une quantité infiniment petite ou un infiniment petit. Au contraire, une quantité infiniment grande est une quantité variable qui augmente au-delà de toute limite assignable.

La méthode infinitésimale est celle où l'on se sert de la considération des infiniment petits. Dans le calcul différentiel, on considère les quantités comme limites du rapport de deux infiniment petits. Dans le calcul intégral, on les considère comme limites d'une somme d'un nombre indéfiniment croissant d'infiniment petits.

Dans cette partie, nous essayerons de cerner le statut des infiniment petits en étudiant comment ils sont définis dans les ouvrages consultés et par quels principes ils y sont gérés.

B - Définition des infiniment petits :

Dans tous les ouvrages consultés parus avant 1970, nous l'avons signalé, les infiniment petits sont définis. Ils sont, excepté peut-être chez Lacroix, définis non de manière statique mais dynamique : il s'agit de variables. Les ambiguïtés de leur définition semblent en fait surtout liées à l'utilisation de ce terme de "variable", les formulations en terme de "fonction tendant vers 0" n'apparaissant que tardivement.

Les définitions qui suivent, présentées dans l'ordre chronologique, illustrent bien ceci :

Carnot : *"J'appelle quantité infiniment petite toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite que l'on veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celle dont on cherche la relation"* [12] (p.13)

Lacroix : *"Quantité parvenue au dernier degré de petitesse"* [4] (p.13)

Cauchy : *"On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro"* [16]

Duhamel : *"Toute grandeur variable dont la limite est zéro"* [5] (p.13)

Houël : *"Variable qui peut prendre une valeur moindre que toute grandeur donnée ou comme on dit d'une manière abrégée une variable est dite infiniment petite lorsque prise en valeur absolue elle peut satisfaire à toute inégalité de la forme $\varepsilon < \kappa$."* [14] (p.104)

Serret : *"Lorsque une quantité variable tend vers la limite zéro on dit qu'elle devient infiniment petite on la nomme alors infiniment petit"* [6] (p.4)

Jordan : *"Quantité variable qui tend vers zéro"* [16] (p.16)

Goursat : *"le nombre x est dit infiniment petit lorsque sa valeur absolue finit par devenir et par rester plus petite que tout nombre donné à l'avance"* [10]

Vessiot et Montel : *"une fonction $y=f(x)$ est un infiniment petit si la valeur absolue de y devient aussi petite que l'on veut, pourvu que la valeur absolue de x soit prise suffisamment petite."* [7]

Notons que chez Goursat, le mot "variable" ne figure pas, mais que le dynamique est cependant présente à travers le verbe "devenir" et que la forme fonctionnelle élaborée n'est présente que chez Vessiot et Montel.

C - Gestion des infiniment petits :

Dès les débuts du calcul infinitésimal, la gestion des infiniment petits repose sur la prise en compte de leurs ordres respectifs. En résumant très grossièrement, on peut considérer comme égales soit deux quantités qui ne diffèrent que d'un infiniment petit, soit deux quantités infinitésimales qui ne diffèrent que d'un infiniment petit d'ordre supérieur. C'est ce principe de gestion que Carnot pose en théorème dans son ouvrage déjà cité (p. 27), en introduisant la notion "d'équation imparfaite" :

34. Pour être certain qu'une équation est nécessairement et rigoureusement exacte, il suffit de s'assurer :

1^o Qu'elle a été déduite d'équations vraies ou du moins imparfaites, par des transformations qui ne leur ont point ôté le caractère d'équations au moins imparfaites.

2^o Qu'elle ne renferme plus aucune quantité infinitésimale, c'est-à-dire, aucune quantité autre que celles dont on s'est proposé de trouver la relation.

"Théorème" qu'il illustre de nombreux exemples, par exemple celui-ci :

3. Par exemple, soit proposé de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD (Fig. 1).

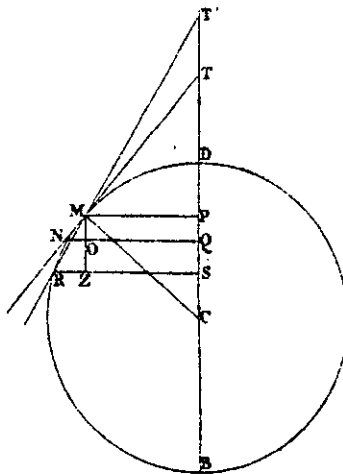


Fig. 1.

Soit C le centre du cercle, DCB l'axe; supposons l'abscisse $DP = x$, l'ordonnée correspondante $MP = y$, et soit TP la sous-tangente cherchée.

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

Si donc MO et NO étaient connues, on aurait la valeur cherchée de TP ; or ces quantités MO, NO sont très petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN, qui, par hypothèse, est lui-même très petit. Donc (2) on peut négliger sans erreur sensible ces quantités par comparaison aux quantités $2y$ et $2x - 2a$ auxquelles elles sont ajoutées. Donc l'équation se réduit à

TP = $\frac{y^2}{a-x}$, ce qu'il fallait trouver.

4. Si ce résultat n'est pas absolument exact, il est au moins évident que dans la pratique il peut passer pour tel, puisque les quantités MO, NO sont extrêmement petites; mais quelqu'un qui n'aurait aucune idée de la doctrine des infinis serait peut-être fort étonné, si on lui disait que l'équation $TP = \frac{y^2}{a-x}$, non seulement approche beaucoup du vrai, mais est réellement de la plus parfaite exactitude; c'est cependant une chose dont il est aisé de s'assurer en cherchant TP, d'après ce principe que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon, car il est visible que les triangles semblables CPM, MPT donnent CP : MP :: MP : TP; d'où l'on tire $TP = \frac{MP^2}{CP} = \frac{y^2}{a-x}$, comme ci-dessus.

Cet exemple montre bien le caractère opératoire de la méthode. Quelqu'un qui n'a "aucune idée de la doctrine des infinis", comme écrit Carnot, est obligé de se rendre à l'évidence : cela marche. Notons que Carnot définit par ailleurs une quantité infiniment petite relativement à une autre et utilise les différences d'ordre des quantités infiniment petites.

Au XIX^{ème} siècle, le travail sur l'ordre des infiniment petits (Cauchy, Duhamel...) va conduire à baser plus précisément la gestion sur deux principes dits de substitution, le premier concernant le rapport de quantités infinitésimales servant au calcul différentiel, le deuxième concernant la somme de quantités infinitésimales et servant au calcul intégral. En voici la formulation donnée par Serret, dans son ouvrage déjà cité (p.10) :

8. PREMIER PRINCIPE. — *La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée quand on les remplace par d'autres infiniment petits dont les rapports avec eux ont respectivement pour limite l'unité.*

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée quand on augmente ou qu'on diminue chacun d'eux d'une quantité infiniment petite par rapport à lui.

EXEMPLE. — Si l'arc x est infiniment petit et que m et n soient des constantes, les quantités $\sin mx$ et $\sin nx$ seront infiniment petites. D'ailleurs leurs rapports aux arcs mx , nx ont pour limite l'unité; donc on a

$$\lim \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

9. DEUXIÈME PRINCIPE. — Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$$

des infiniment petits positifs dont le nombre m croît indéfiniment. Si la somme de ces infiniment petits est égale à une quantité déterminée S , ou si, cette somme étant variable, elle tend vers la limite S , et que

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m$$

désignent des infiniment petits, la somme

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_m$$

tendra vers la limite zéro ou sera infiniment petite.

Il est intéressant de signaler que Duhamel énonce ces principes de substitution dans son cours à l'Ecole Polytechnique à un moment où la définition des infiniment petits était bannie des programmes (cf. [11]).

En fait, comme l'écrit Martin Zerner dans [1], le premier principe est tout à fait valide et "nous l'enseignons encore aujourd'hui sans lui accorder un caractère fondamental" (p.10). Mais il n'en est pas de même pour le second, s'il est utilisé, comme il le fut à l'époque dans le calcul intégral (c'est à dire pour des sommes infinies), sans hypothèse supplémentaire. C'est ce que fera remarquer Péano, dans sa critique du manuel de Jordan et cette mise en défaut du second principe de substitution contribuera sans aucun doute à la disparition progressive de l'utilisation des infiniment petits comme outils de démonstration.

Hélène Gispert dans sa thèse sur Camille Jordan et les fondements de l'analyse [17] signale l'évolution de Jordan lui-même dans son "Cours d'Analyse" quant au traitement des infiniment petits :

"Ainsi dans le tome de 1882, Jordan consacre une partie importante de l'introduction à la définition, au rôle, aux propriétés des infiniment petits. Dans le tome de 1893, les théorèmes sur les infiniment petits sont présentés à l'intérieur du paragraphe sur les limites..." (p.49)

Par la suite, les infiniment petits restent définis dans les manuels du supérieur, comme nous l'avons déjà souligné. La forme fonctionnelle se généralise, les principes sont parfois présents comme dans le de La Vallée Poussin déjà cité où le second principe est énoncé avec une hypothèse supplémentaire de convergence uniforme, mais les infiniment petits sont en fait peu utilisés.

LES DEFINITIONS DE LA DIFFERENTIELLE

J'ai été amenée à distinguer quatre types de définition pour la notion différentielle :

- 1) la différentielle comme partie principale de l'accroissement de la fonction,
- 2) la différentielle comme produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable,
- 3) la différentielle comme expression obtenue à partir de la définition de la différentiabilité,
- 4) la différentielle comme application linéaire tangente.

Notons que la répartition entre les deux derniers types peut paraître difficile à effectuer, comme on l'a vu dans l'annexe I ; en fait, nous avons choisi de ne

répertorier dans la dernière catégorie que les définitions insistant explicitement sur le point de vue "application linéaire tangente".

1) La différentielle partie principale de l'accroissement :

En général, dans les textes qui se situent dans ce registre de définition, la dérivée est définie en premier et la différentielle est ensuite déduite de l'égalité :

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \quad \varepsilon \text{ tendant vers } 0 \text{ avec } \Delta x$$

et interprétée comme la partie la plus considérable de l'accroissement. Ce qui est mis en avant, ce n'est pas le fait que le reste est négligeable par rapport à Δx (point de vue "développement limité à l'ordre 1" qui sera essentiel dans le registre 3), mais le fait que le rapport $\Delta y / \Delta x$ tend vers 1, ce qui légitime la substitution de dy à Δy .

En fait, comme le rappelle une citation de Fréchet dans l'annexe I, cette interprétation, tout à fait adaptée à l'usage des principes de substitution, n'est pas équivalente à l'interprétation moderne : Δy n'est équivalent à dy que si dy ne s'annule pas ; si l'on a affaire à une fonction d'une variable, c'est le cas si $f'(x)$ est non nul au point considéré (et l'on voit d'ailleurs cette restriction apparaître progressivement dans les manuels qui adoptent ce point de vue), mais si l'on a affaire à une fonction de plusieurs variables, quelles que soient les valeurs des dérivées partielles, on pourra toujours trouver des valeurs non nulles des accroissements qui annulent la différentielle.

On trouve ce point de vue par exemple dans l'ouvrage de Lacroix déjà cité ; la différentielle est présentée comme *"la partie la plus considérable de la différence"* et l'auteur énonce comme une évidence qu'il y a d'autant moins d'erreur à prendre la différentielle pour la différence que l'on suppose plus petite la valeur de l'accroissement de la variable.

Mais on le trouve encore dans l'édition consultée de l'ouvrage déjà cité de Goursat, en 1943 :

"La différentielle est la partie principale de l'infiniment petit Δy si l'on considère Δx comme l'infiniment petit principal."

2) La différentielle produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable

Ce point de vue est classiquement attribué à Cauchy et d'ailleurs fréquemment désigné par "à la manière de Cauchy" (cf. aussi annexe I). Dans ses "Leçons sur le calcul différentiel", publiées en 1829 [18], Cauchy définit les différentielles dx et dy comme :

"des quantités dont les rapports sont équivalents aux dernières raisons des accroissements petits que peuvent prendre simultanément ces mêmes variables".

Il obtient ainsi que $dy = y' dx$ et indique que dx reste arbitraire, que l'on peut la "supposer égale à une constante finie ou même la considérer comme une quantité infiniment petite".

Ce point de vue est le plus communément adopté de 1823 jusqu'à la fin du siècle. Jusqu'en 1970 (cf. annexe II), les manuels du secondaire l'adoptent également dans les sections où la différentielle est au programme (cf. annexe II).

3) La différentielle expression obtenue à partir de la différentiabilité

L'introduction de la différentielle par la définition de la différentiabilité est initialement due à Stolz (cf. annexe I). Elle commence à apparaître vers 1920 dans les manuels. Le livre de de La Vallée Poussin, déjà cité, semble être un des premiers manuels de large diffusion typiques de cette formulation qui permet d'établir un

consensus provisoire pour l'exposé rigoureux du "Calcul" dans l'enseignement supérieur. Les débats sur l'enseignement des différentielles en Grande Bretagne dont se fait l'écho "The Mathematical Gazette", de 1931 à 1934, se réclament d'ailleurs de ce manuel et de celui de Young [18] (cf. annexe IV).

Nous reproduisons ci-après la définition donnée par de La Vallée Poussin:
"Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est différentiable au point x si elle est finie et déterminée aux environs de ce point et si donnant à x un accroissement arbitraire Δx , la différence correspondante $\Delta f(x)$ peut se décomposer en une somme de deux termes $A \Delta x + \varepsilon \Delta x$, A étant indépendant de Δx et ε tendant vers 0 avec Δx . Alors le premier terme qui est simplement proportionnel à Δx prend le nom de différentielle de y ". (p. 51)

4) La différentielle application linéaire tangente :

Ce dernier type de définition met l'accent sur le caractère fonctionnel, linéaire de la différentielle. (cf Annexe I) Il faut souligner que l'importance de la linéarité a été pressentie, explicitée avant même que l'on arrive à une formulation de type Fréchet. Tannery, par exemple, dans ses "Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes préparatoires" [19], en 1906, définit la différentielle totale comme une forme linéaire en dx , dy et dz .

Cette définition est celle qui correspond à la présentation universitaire actuelle. Dans les ouvrages consultés, nous la retrouvons dans le manuel déjà cité de Lelong-Ferrand et Arnaudès. La définition est donnée à propos d'applications entre espaces affines associés à des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et nous la reproduisons ci-après :

Définition V.2.1. Soit V un voisinage du point a dans A , et f une application de V dans B . On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire continue L de E dans F telle que

$$(1) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\|u\|_E} [f(a+u) - f(a) - L(u)] = 0$$

soit, avec les notations de Landau (cf. § IV.7) :

$$f(a+u) - f(a) - L(u) = o(\|u\|_E).$$

Soulignons que cette définition est suivie d'un commentaire sur l'équivalence de la différentiabilité de f au point a et de l'existence d'une application affine "voisine" de f , dite tangente à f en a , et les auteurs ajoutent :

"Cette interprétation est fondamentale en géométrie et nous conduit à la notion de variété affine tangente."

IV - LES MANUELS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Nous avons vu dans l'annexe II que la différentielle occupe peu de place dans les programmes de l'enseignement secondaire.

Avant la réforme de 1970, les différentielles, lorsqu'elles sont au programme, sont définies comme produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable, c'est à dire une définition de type 2. Cette définition s'accompagne en général d'une interprétation géométrique de la différentielle comme accroissement de l'ordonnée de la tangente à la courbe représentative pour un accroissement arbitraire de la variable. Et l'on signale éventuellement que la valeur approchée et commode de l'accroissement de la fonction que fournit la différentielle est d'autant meilleure que l'accroissement

de la fonction que fournit la différentielle est d'autant meilleure que l'accroissement de la variable est petit. L'extrait suivant de [20] en témoigne :

Utilisation des différentielles. — Reportons-nous à la figure  84, figure sur laquelle on a

$$\overline{MP} = \Delta x = dx, \quad \overline{PM} = \Delta y, \quad \overline{PN} = f'(x_1)dx = dy.$$

On peut considérer $\overline{PN}$ comme une valeur approchée de $\overline{PM}$. La différentielle d'une fonction donne donc une valeur approchée de l'accroissement de cette fonction qui correspond à un accroissement donné dx de la variable, valeur approchée d'autant plus satisfaisante que dx est plus petit.

Ce qu'on vient de dire suppose, naturellement, $f'(x_1)$ différent de zéro.

Pour beaucoup de fonctions, dy est beaucoup plus simple que Δy ; c'est pourquoi, dans la pratique, lorsqu'on doit évaluer un accroissement Δy d'une fonction, dy en fournit une valeur approchée commode.

Peu d'exercices accompagnent cette partie du cours, il n'y a pas de mention des infiniment petits.

Avec la réforme de 1970, la définition devient du type 4 : application linéaire tangente. Le manuel écrit par Condamine et Vissio [21], paru en 1970 et très largement diffusé, est typique de l'esprit des nouveaux programmes. Dès l'introduction du chapitre, le problème est nettement posé en termes d'approximation:

Etant donnée une telle fonction f , définie sur un voisinage de x_0 , nous nous proposons le problème d'approximation suivant : comment « approcher » localement, c'est-à-dire sur un voisinage de x_0 , la fonction f par une fonction « aussi simple » que possible ?

puis illustré par un exemple : la vitesse d'un automobiliste. La définition de la différentielle, définie comme une application précède celle de la dérivée :

D₁ Une fonction numérique f , définie au voisinage de x_0 , est dite différentiable au point x_0 , s'il existe :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{un voisinage } \mathcal{V}(x_0) \text{ de } x_0, \\ \text{un réel } A \\ \text{et une fonction } \eta, \end{array} \right.$

tels que, pour tout x appartenant à $\mathcal{V}(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot [A + \eta(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = 0$$

Ce qui se note également, en posant $x = x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot [A + \varepsilon(h)] \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

D₂ La fonction linéaire — notée df_{x_0} — qui, à h réel, fait correspondre $A \cdot h$ est l'application différentielle de f au « point » x_0 ou application linéaire tangente de f au « point » x_0 .

Par suite :

$$df_{x_0}(h) = A \cdot h$$

Mais, dans les exercices situés à la fin du chapitre, cette composante d'approximation constamment présente dans le cours est peu développée : sur les 25 exercices et 5 problèmes proposés, 2 exercices seulement traitent vraiment d'approximation.

Enfin, à partir de la réforme de 1981, conformément aux nouveaux programmes, la différentielle disparaît officiellement des manuels même si, comme en témoignent l'extrait suivant issu de [22], l'idée d'approximation au premier ordre et même d'approximation fonctionnelle reste centrale :

f est une fonction définie sur un intervalle I et *a* est un réel de I.
Dire que le réel *l* est le nombre dérivé de *f* en *a* signifie que L'UNE ou L'AUTRE des deux conditions suivantes est réalisée :

1. la fonction $h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite *l* en zéro;

2. on peut écrire pour tout réel *h* suffisamment proche de zéro,
 $f(a+h) = f(a) + lh + h\varphi(h)$

où la fonction φ a pour limite zéro en zéro.

Lorsque *f* admet un nombre dérivé en *a*, on dit que *f* est dérivable en *a*.

En outre comme $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi = 0$, on dit que le réel $h\varphi(h)$ est négligeable devant *h*.

Commentaires

- Une fonction *f* admet donc un nombre dérivé *l* en *a* si et seulement si, pour tout réel *h* suffisamment proche de zéro, le réel $f(a+h)$ est la somme de $f(a) + lh$ et d'un terme négligeable devant *h*.
- Selon les problèmes à étudier, on choisira l'une ou l'autre des formulations de la définition 1. La première est utile en particulier dans les définitions et calculs de grandeurs instantanées (voir paragraphe 2.1.); la deuxième dans les études d'approximations.

Un paragraphe est consacré à l'approximation locale des fonctions, un autre aux applications de la dérivation à d'autres disciplines et les activités de travaux pratiques proposées mettent également l'accent sur cet aspect, dans différents contextes.

V - CONCLUSION

La différentielle apparaît, surtout jusqu'à la fin du XIX^{ème} siècle, comme une notation, une expression que l'on manipule, qui constitue une commodité formelle pour les changements de variables, qui permet un calcul facile et un recours à l'intuition géométrique ainsi qu'une automatisation grâce à la symétrie des formules. L'accent mis sur la différentielle comme partie principale, partie la plus considérable de l'accroissement c'est à dire Δy - dy infiniment petit par rapport à *y* a longtemps coexisté avec l'accent mis sur la différentielle comme produit de la dérivée par un accroissement arbitraire de la variable.

Le débat autour de la différentielle tourne autour de l'opérationnalité et de la rigueur, et plus concrètement autour de l'algorithme et de l'approximation.

L'algorithme était contrôlée au départ par la "vérité" à la manière de Leibniz, d'Euler ou de Carnot. Pour Euler, par exemple, le $dy=f'(x)dx$ est "vrai même si les termes entre lesquels il existe sont évanouissants" [23]. Cela suffit à lever tous les doutes et à mettre le "calcul" "hors de tout soupçon". "L'expression $p=dy/dx$ est parfaitement réelle, du même coup l'égalité $dy=px$ est acceptée à juste titre, quoique, dans aucun des deux membres, aucune quantité ne soit connue." (p.78). La part d'implicite et les expressions utilisées marquent l'évolution avec le temps des besoins de rigueur.

Mais l'opérationnalité a ses limites. Elle satisfait les élèves "qui font juste" mais les enseignants doivent prendre en compte la nécessité de porter l'attention sur l'essentiel du calcul infinitésimal à savoir "minorer, majorer, approcher" comme l'écrit Dieudonné dans [24] (p.15). Cette préoccupation donne un espoir d'équilibre : de nouveaux chapitres intitulés : "Approximation locale par une fonction affine" au

lycée, "Encadrements et approximations" au collège s'inscrivent bien dans ce retour à l'approximation comme notion de base.

La pensée mathématique se déploie selon une rigueur qu'elle s'impose et qui varie. La question de la rigueur est directement liée aux procédés de contrôle. L'analyse faite met en évidence au moins quatre types de contrôle :

- L'encadrement suivi d'un passage à la limite qui semble être le procédé de contrôle le plus souvent convaincant, la confiance dans le "calcul" venant souvent du fait qu'il donne les mêmes résultats que la procédure lourde dite d'exhaustion,

- Le contrôle par des principes de substitution des infiniment petits qui bien que largement utilisé a été à l'origine de tant de débats,

- Le contrôle adossé à l'intuition géométrique, lui aussi fortement critiqué mais également souvent considéré comme utile, pour les "commençants" au moins. Jules Tannery, dans son "Introduction à la théorie des fonctions d'une variable" [24] (1ère édition 1886, édition consultée 1904) refuse ce recours au géométrique, craignant que l'utilisation d'une figure géométrique ne soit le signe "*d'une impossibilité à combler les trous d'une démonstration avec les seules ressources de la logique*". Ultérieurement, ces craintes lui sembleront "*puériles*" et il ne se privera plus de cette aide pédagogique.

- Le contrôle, enfin, fondé sur l'utilisation de théorèmes démontrés rigoureusement sans appel à l'intuition, comme chez Jordan.

Le problème pourrait alors s'énoncer ainsi :

Comment jouer avec les différents procédés de contrôle pour permettre à l'étudiant d'accéder à l'autonomie scientifique ? Lesquels privilégier éventuellement et quand ?

Nous concluerons par cet extrait d'un manuel du secondaire [25] :

"La distinction entre différentielle et nombre dérivé peut paraître artificielle et inutile... cependant ... c'est bien la différentielle l'outil essentiel de l'approximation du compliqué par le simple".

NOTES

(1) Ceci est peut-être lié à l'insistance mise sur la nécessité de diffuser les méthodes et les résultats mathématiques, insistance apparente dès la fin du XVIIIème siècle. C'est la Révolution qui, en France, conduisit à lier recherche mathématique et manuels, (cf Dhombres : *Mathématisation et communauté scientifique française 1775 - 1825* , Archives Int. Hist. Sc., 1986, Vol.36)

(2) A nos yeux, le manque de rigueur de ces exposés est en particulier lié à l'absence de la notion de convergence uniforme, à l'acceptation a priori de l'existence de certaines propriétés des fonctions ainsi le consensus établi comme "*fait analytique*" de "*la propriété commune à toutes fonctions d'admettre une limite dans le rapport de leurs accroissements à ceux de la variable*" [4] (Préface p. XXV).

REFERENCES

- [1] ZERNER M. : *Sur l'analyse de traités d'Analyse*, Cahier de didactique des mathématiques N°30, Ed; IREM Paris 7
- [2] REHELD A. : *80 ans d'Analyse* , Cahier de didactique des mathématiques N°7, Ed. IREM Paris 7
- [3] OVAERT J.L. : *Philosophie et calcul de l'infini*, Ed. Maspero, Paris, 1976.
- [4] LACROIX S. F. : *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, 2ème Edition, Ed. Courcier, Paris, 1810.
- [5] DUHAMEL J. M. C. : *Eléments de calcul infinitésimal*, 2ème Edition, Ed. Mallet-Bachelier, Paris, 1860.
- [6] SERRET J. A. : *Cours de calcul différentiel*, 2ème Edition, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1879.

- [7] VESSIOT E. et MONTEL P. : *Cours de mathématiques générales*, Ed. Eyrolles, Paris, 1920.
- [8] LELONG-FERRAND J. et ARNAUDIES J. M. : *Cours de mathématiques*, Tome 2, Analyse, 4ème Edition, Ed. , Paris, 1977.
- [9] LABOUREUR : *Cours de calcul mathématique, algébrique, différentiel et intégral à l'usage des ingénieurs*, 3ème Edition, Ed. Librairie Polytechnique Béranger, Paris, Liège, 1960 (1ère édition 1947).
- [10] GOURSAT E. : *Cours d'analyse mathématique*, 5ème Edition, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1943.
- [11] GUITARD T. : "La querelle des infiniment petits à l'Ecole Polytechnique au XIX^{me} siècle", *Historia Scientiarum*, N°30, 1986.
- [12] CARNOT L. : *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797, Réédition, Ed. Blanchard, Paris, 1970.
- [13] DHOMBRES J. : *Nombre, mesure et continu*, Ed. Cédic, Paris, 1978.
- [14] HOUEL J. : *Cours de calcul infinitésimal*, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1878.
- [15] DE LA VALLEE POUSSIN C. : *Cours d'analyse infinitésimale*, 4ème Edition, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1920.
- [16] JORDAN C. : *Cours d'analyse*, Ed. Gauthier Villars, Paris, 1920 ?
- [17] GISPERT H. : *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse, Université Paris XI, 1982.
- [18] CAUCHY A. L. : *Leçons sur le calcul différentiel*, Ed. De Bure, Paris, 1821.
- [19] TANNERY J. : *Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales*, Ed. Hermann, Paris, 1906.
- [20] LEBOSSE C. et HEMERY C. : *Algèbre et trigonométrie, Classes de premières A',C,M et M'*, Ed. Nathan, 1961.
- [21] CONDAMINE M. et VISSIO P. : *Analyse et algèbre, Classes de premières A,B,C,D,E*, Ed. Delagrave, Paris, 1970.
- [21] BARRA R. et Al; : *Iéres scientifiques, tome 1, Analyse*, Ed. Nathan, Collection Transmath, Paris, 1988.
- [22] EULER L. : *De l'utilisation des fonctions discontinues en analyse*, Traduction de J.Dhombres, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Paris, 1988.
- [23] DIEUDONNE J. : *Calcul infinitésimal*, Ed. Hermann, Paris, 1980.
- [24] TANNERY J. : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, 2ème Edition, Ed. Hermann, Paris, 1904.
- [25] GAUTIER et Al. : *Analyse, 1ère C,D,E*, Coll. Aleph 1, Ed. Hachette, Paris, 1976.

TRAITES ET MANUELS ANALYSES

Enseignement Supérieur :

- LACROIX : [4]
 DUHAMEL : [5]
 SERRET : [6]
 HOUEL : [14]
 JORDAN : [16]
 TANNERY : [19]
 TANNERY : [24]
 DE LA VALLEE POUSSIN : [15] et édition de 1954
 GOUYON : *Précis de mathématiques Spéciales*, Paris, Ed. Vuibert, 1956.
 GOURSAT : [10]
 VALIRON : *Cours d'Analyse Mathématique*, Paris, Ed. Masson, 1966 (1ère édition : 1941).
 LEVY : *Cours d'Analyse (Ecole Polytechnique)*, 1949-50.
 LABOUREUR : [9]
 VESSIOT et MONTEL : [7]
 CAGNAC, RAMIS et COMMEAU : *Traité de Mathématiques Spéciales*, Paris, Ed. Masson, 1970.

LELONG-FERRAND et ARNAUDIES : [8]

Enseignement Secondaire :

BENOIT : *Algèbre, trigonométrie et mécanique, Classe de Sciences Expérimentales*, Ed. Vuibert, 3ème édition, 1946.

LESPINARD, PERNET et GAUZIT : *Mathématiques, Classe de Sciences Expérimentales*, Paris, Ed. Desvigne, 9ème édition, 1964.

LESPINARD et PERNET : *Algèbre, analyse, trigonométrie, cinématique, 1ères C et D*, Paris, Ed. Desvigne, 3ème édition, 1967.

CONDAMINE et VISSIO : *Analyse et algèbre, Classes de premières A,B,C,D,E*, Ed. Delagrave, 1970.

GAUTIER, GIRARD, GERLL, THIERCE et WARUSFEL : *Aleph 1, Analyse et probabilités, 1ères C, D, E*, Ed. Hachette, 1976.

GAUTIER et THIERCE : *Analyse, 1ères S et E*, Ed. Hachette, 1986.

BARRA, GLAYMANN, MALAVAL, PENSEC et TRICOIRE : *Analyse, 1ères Scientifiques*, Ed. Nathan, 1986.

ANNEXE IV

LA NOTION DE DIFFERENTIELLE DANS LA REVUE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

M.Artigue

La revue : "L'Enseignement Mathématique" a été créée en 1899, à l'initiative du mathématicien allemand Felix Klein, fondateur également de la CIEM (Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques). Il nous a paru intéressant d'essayer de repérer à travers les articles publiés par cette revue les débats qui avaient pu marquer l'enseignement des différentielles et son évolution, au cours de ce siècle, débats susceptibles de nous éclairer sur les déterminants des choix opérés par le système didactique.

Nous avons répertorié dans la revue, 18 articles publiés entre 1899 et 1964, abordant le problème des différentielles :

- Trois articles (C.Laisant, 1903 - P.Appell, 1904 - Ch.Bioche, 1914) concernent strictement les programmes et confirment les informations données par l'analyse de ces derniers. Nous ne les détaillerons pas.

- Deux articles (E.Beke, 1914 - W.H.Cockcroft, 1962) concernent des rapports sur enseignement et manuels. Le premier a été établi à la suite d'une enquête organisée par la CIEM en 1913-14. Cette enquête, menée dans les pays membres de la CIEM, visait par l'analyse des réponses des différents pays à un questionnaire (reproduit à la fin de cette annexe), à faire le point sur l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les enseignements de niveau lycée. Le second concerne une analyse des manuels anglais de Calculus de 1900 à 1960.

- Deux articles (G.Fontené, 1899 - C.de Losada y Puga, 1938) proposent des suggestions pédagogiques sur des points précis, utilisant des interprétations géométriques des différentielles.

- Enfin dix articles présentent des points de vue généraux concernant ce domaine mathématique et son enseignement (H.Laurent, 1899 - H.Poincaré, 1899 - J.F.Bonnel, 1903 - H.Poincaré, 1904 - A.Schülke, 1911 - E.Dareste, 1928 - W.Winants, 1929 - T.Lyche, 1930 - P.Delens, 1930 - M.Fréchet, 1964).

Notons que le premier article de H.Poincaré est une réponse à celui de H.Laurent, celui de W.Winants une réponse à l'article de E.Dareste et ceux de T.Lyche et P.Delens des réponses aux deux précédents. L'article de M.Fréchet, lui, se veut didactique et accessible à des étudiants de première année d'université. Il reprend, en les détaillant, les idées développées dans les articles antérieurs de l'auteur (cf. annexe I).

Ces différents articles témoignent, au delà de l'impression de stabilité et de consensus donnée par la lecture des programmes sur la première moitié du siècle, de l'existence de débats au sein de la communauté enseignante. Des débats qui concernent non seulement les choix pédagogiques mais aussi le contenu mathématique lui-même.

I - LES DEBATS SUR LE CONTENU MATHÉMATIQUE

Ils perdurent jusqu'en 1930, dans la revue, sans référence aux développements mathématiques de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème (travaux de Stolz, Young, Fréchet... cf. annexe I).

Citons-en quelques exemples :

- l'article de J.F.Bonnel, publié en 1903, s'intitule : "Les limites et l'atome". L'auteur y récusé à la fois le point de vue de Leibniz et celui de Cauchy et propose une définition en terme d'atomes qui, selon lui, lève toutes les difficultés :

"D'après la théorie de l'atome, il y a toujours un accroissement ϵ de la variable indépendante, qui est le plus petit auquel puisse correspondre un accroissement η de la fonction ; le rapport η/ϵ est, par définition, la dérivée de la fonction, de telle sorte que l'on a l'égalité vraie : $\eta/\epsilon = f'(x)$ [.....] Toutes les contradictions que nous avons signalées, toutes les difficultés qu'on rencontre à se mettre en face de zéro et de l'infini ou à vouloir les éviter disparaissent avec l'atome et son inverse qui est l'indéfiniment grand."

- L'article de E.Dareste, publié en 1928, est lui essentiellement consacré à la notion d'infini en mathématiques. L'auteur y distingue l'infini éthymologique abstrait, inaccessible au calcul et l'infini dérivé synonyme de très grand. Selon lui, le calcul intégral utilise, malheureusement sans les différencier, l'une et l'autre notion, tandis que dans le calcul différentiel la notion d'infiniment petit, qui correspond à une décroissance limitée par 0, fait nécessairement référence à un infini dérivé. Faisant référence aux travaux d'Euler, de Carnot ainsi qu'à des ouvrages plus récents, il s'interroge sur les divergences existant entre les différents auteurs quant à savoir si un infiniment petit peut ou non prendre la valeur 0. Pour lui ces divergences dureront probablement toujours, faisant de cette question : "un fait unique ou presque dans les sciences exactes".

- W.Winants, en réponse à l'article de E.Dareste, essaie de montrer que le seul moyen d'éviter les incohérences dans le maniement des infiniment petits, est de les définir comme des quantités variables qui tendent vers 0. Et il critique de manière virulente le point de vue atomiste qui a semblé-t-il encore à l'époque des partisans :

"Il est tout à fait regrettable que cette conception fautive ait influencé, qu'elle influence encore certains mathématiciens qui donnent des infiniment petits l'inexacte définition que voici : pour eux tout infiniment petit est une quantité moindre que toute quantité donnée ; d'aucuns vont jusqu'à dire : un infiniment petit est tellement petit qu'on ne peut imaginer un nombre plus petit ! Tout cela n'est qu'un charabia que l'on ne peut admettre quand on réfléchit un moment aux notions de limite et de continuité. Ce qu'il faut dire expressément, c'est qu'un infiniment petit doit pouvoir DEVENIR, en valeur absolue, moindre que n'importe quoi..."

Aux amateurs d'infiniment petits absolus, aux personnes désireuses d'arriver à les fixer, nous poserons la question suivante : soient x et $x+dx$ les abscisses de deux points consécutifs ; si l'on suppose $dx > 0$, où se trouve le point répondant à l'abscisse $x+dx^2$."

- R.Tambs Lyche fera remarquer que l'expression de variable tendant vers 0, utilisée par W.Winants, n'a pas de sens précis :

"Les variables sont des quantités "libres", dans le sens de "quantités que l'on peut choisir à volonté parmi les valeurs appartenant à un certain ensemble" [...] L'expression " x tend vers a " n'a pas de sens précis. Au contraire, l'expression " y tend vers b lorsque x tend vers a " remplace celle-ci : étant donné un nombre positif quelconque ϵ , on peut désigner un autre nombre positif η tel que $|y-b|$ se trouve inférieur à ϵ si l'on choisit pour x un nombre pour lequel $|x-a|$ est inférieur à η ."

Les articles de W.Winants, T.Lyche et P.Delens sont en fait essentiellement consacrés à la question du statut des différentielles d'ordre supérieur. Pour W.Winants, le point de vue classique, qui consiste à supposer dx constant, conduit à une contradiction :

"1° Les infiniment petits sont des quantités essentiellement variables ;

2° Les différentielles sont des infiniment petits ;

3° L'on posera $dx = \text{constante}$.

La troisième proposition jure évidemment avec les deux autres. Pour tourner la difficulté, d'aucuns auraient voulu que dx fût un pseudo-infiniment petit, c'est à dire une constante inférieure à n'importe quel infiniment petit ; or, les mêmes auteurs, désireux d'insister sur le 1°, font observer qu'une constante infiniment petite est rigoureusement nulle."

Il développe alors la solution proposée par un mathématicien belge, J.Deruyts, qui constitue, à ses yeux : *"un chef d'oeuvre de logique mathématique"*. Elle consiste à différencier l'expression $y'dx$ sans supposer dx constant, pour aboutir à :

$$d(dy) = d^2y + y'd(dx)$$

et à montrer que, dans les tâches classiques de changement de variables, cette formule conduit aux formules classiques, le coefficient des termes différentiels du type $d(dx)$ s'annulant nécessairement comme on peut le démontrer en utilisant un raisonnement en termes de coefficients indéterminés.

R.Tambs Lyche lui rétorque que la contradiction qu'il soulève n'est qu'apparente : l'expression $y'dx$ est une fonction de deux variables : x et dx , supposer dx constant est une façon d'exprimer que l'on calcule une dérivée partielle par rapport à x .

P.Delens reprend ce point de vue, tout en s'associant aux remarques de W.Winants. Il constate que la question des différentielles :

"est un des points des mathématiques, où celui qui cherche des précisions ne trouve pas toujours, près des meilleurs auteurs même, les éclaircissements souhaités. Les prudentes recommandations quant au mode d'emploi des différentielles d'ordre supérieur, qui accompagnent généralement l'exposé, permettent sans doute de calculer correctement avec les différentielles ; le but de l'enseignement n'est pas seulement cela."

Il conclut en faisant référence aux généralisations de la notion de différentielle qui ont été introduites en analyse vectorielle et en calcul différentiel absolu et qui pourraient servir *"à modifier de façon favorable l'exposé du calcul différentiel usuel"* et en souhaitant que la revue recueille d'autres opinions sur le sujet.

Il faut noter que c'est le seul article, en dehors de celui de M.Fréchet, qui fasse référence à ces travaux "récents".

II - LES DEBATS D'ORDRE PEDAGOGIQUE

Plusieurs articles témoignent de la méfiance dont est entourée la notion de différentielle dans la première moitié du 20ème siècle et éclairent les choix constatés au niveau des programmes. Dans son rapport, E.Beke écrit, par exemple :

"L'impression qui se dégage de la littérature est que les différentielles ont vécu."

Cette méfiance apparaît liée à différents facteurs :

1) L'incertitude scientifique qui semble régner encore quant à la notion et quant à son statut, au début du siècle. C'était sensible dans les articles déjà cités, ce l'est aussi dans le rapport E.Beke :

"En effet, la littérature scientifique n'a pas pris nettement parti parmi les diverses définitions des différentielles. La définition de Cauchy, dont nous avons déjà parlé, présente l'avantage qu'une relation homogène quelconque entre les différentielles se ramène immédiatement à une relation entre les dérivées, il n'y a pour cela, qu'à diviser par une puissance convenable de dx . Mais on définit souvent la différentielle d'une fonction $y=f(x)$ par l'égalité :

$$dy = [f'(x) + \eta]dx ,$$

où dy désigne l'accroissement total de la fonction y pour l'accroissement dx de la variable indépendante et $\lim_{dx \rightarrow 0} \eta = 0$.

Si l'on adopte cette définition qui paraît convenir mieux aux applications géométriques et physiques, les relations homogènes existant entre les différentielles ne sont que des

relations approchées qui ne deviennent exactes qu'en divisant par une certaine puissance de dx et en passant à la limite $dx=0$."

2) La charge métaphysique de la différentielle qui semble inconciliable avec le souci de rigueur que l'on essaie de développer dans l'enseignement. Dans les arguments de ce type, différentielle et infiniment petits voient, comme l'on pouvait s'y attendre, leur sort étroitement lié :

"Nous sommes, je crois, unanimes à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire. Je suis d'avis que la méthode la plus sage est de ne pas introduire du tout les différentielles dans l'enseignement secondaire. Cette vue est justifiée par la tendance qui veut les éliminer de toute la Science... Combien paraît-il plus nécessaire de rejeter de l'enseignement les notions qui donnent lieu à tant de malentendus." (rapport Beke)

3) Les risques d'erreurs produits par un traitement automatique des différentielles, chez les débutants en particulier. Citons à ce propos les articles de H.Poincaré :

"Dès que l'on passe aux dérivées du second ordre, on nage dans l'absurdité ; soit z une fonction d'une variable y qui est elle-même fonction de x ; j'écris :

$$d^2z/dx^2 = d^2z/dy^2 \cdot dy^2/dx^2 + dz/dy \cdot d^2y/dx^2$$

Dans cette formule j'écris deux fois d^2z , et ce symbole a deux significations différentes [....]

La difficulté s'aggrave si l'on a plusieurs variables indépendantes ; j'écris :

$$dz = dz/dx \cdot dx + dz/dy \cdot dy$$

Là encore nous avons trois fois le symbole dz avec trois significations différentes [...]

Que de pièges à éviter ? Aussi les débutants ne les évitent-ils pas. J'ai vu un élève intelligent et déjà avancé exposer comme suit la théorie de la vitesse du son, en masquant seulement par quelques artifices ce que sa démonstration avait de choquant.

Nous avons à intégrer l'équation :

$$d^2z/dt^2 = a^2 \cdot d^2z/dx^2$$

Je divise par d^2z et je multiplie par dx^2 ; j'ai :

$$dx^2/dt^2 = a^2$$

$$d'où : dx/dt = \pm a$$

ce qui prouve que le son peut se propager dans les deux sens avec la vitesse a ."

Et, pour H.Poincaré, l'utilisation des ∂ est un palliatif insuffisant ; le seul moyen d'éviter ces erreurs c'est d'oublier l'origine des notations, de considérer les quotients comme des blocs, en un mot de penser en dérivées. Un point de vue analogue est développé par J.Hadamard.

En fait, s'il faut enseigner les différentielles, c'est selon H.Poincaré, essentiellement pour des raisons de communication :

"Sans doute il faut connaître la notation différentielle ; il faut pouvoir manier ce langage qui est celui de tout le monde, de même qu'il faut savoir parler l'allemand bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas de sens commun, parce qu'elle est parlée par 60,000,000 d'hommes dont beaucoup sont des savants."

Cette méfiance se traduit, au niveau pédagogique, par les propositions suivantes :

- dans l'enseignement secondaire, pas de différentielles,
- dans l'enseignement supérieur élémentaire, priorité aux dérivées et dérivées partielles, utilisation limitée et sous leur contrôle du langage différentiel du premier ordre, pas de différentielles d'ordre supérieur.

Ceci correspond bien au choix des programmes. Mais il faut noter cependant que ce point de vue est loin d'être unanimement partagé. H.Poincaré le concède dans son premier article, répondant à celui de P.Laurent :

"Dans un article très intéressant de M. H.Laurent sur les mathématiques spéciales en France, je lis la phrase suivante : "Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées ; c'est aux gens compétents que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la différentielle." Je ne dirai pas que j'ai lu cette phrase avec étonnement ; car elle exprime une opinion assez répandue..."

Les arguments cités dans ce sens concernent à la fois les commodités d'utilisation formelle de la différentielle et son pouvoir heuristique, comme le montrent les articles de P.Laurent et A.Schülke, publiés respectivement en 1899 et 1911, concernant l'un les classes préparatoires aux grandes écoles, l'autre l'enseignement secondaire :

"Le programme est muet au sujet de la notation à employer pour représenter les dérivées ; les professeurs avaient le choix entre les fluxions démodées, que l'on ne connaît plus, mais qui avaient du bon ; la notation des accents de Lagrange, née d'une idée fausse, rejetée par tous les peuples civilisés, rejetée par Lagrange lui-même qui n'en a jamais fait usage dans ses mémoires, et la notation des différentielles de Leibniz, universellement employée comme étant la plus simple, la plus expressive, la plus commode. Eh bien ! le croirait-on ? C'est la notation de Lagrange que la plupart des professeurs ont adoptée. Et tout cela pour économiser une demi-heure ! Mais cette demi-heure est largement rattrapée par la facilité avec laquelle on expose les doctrines de la notation différentielle." (P.Laurent)

A.Schülke, lui, estime inadaptées à l'enseignement secondaire, parce que trop délicates, les méthodes utilisées pour l'enseignement du calcul différentiel et intégral à l'université, basées sur la notion de limite et les dérivées. Selon lui, il faut introduire les différentielles qui, dans la plupart des situations, constituent le véritable point de départ (il donne l'exemple des calculs d'aires et de volumes). Mais une notion de différentielle appropriée :

"Je ne parle pas des fameuses quantités qui sont plus petites que toutes les autres sans cependant être nulles, ni les valeurs introduites par la définition $dy=f'(x)dx$; mais j'entends les petites quantités finies qui sont couramment employées en Physique, Astronomie, Géodésie et dans toutes les mathématiques appliquées, par exemple le travail pour un déplacement ds , soit $dW=Fds$; le moment statique $dS=dm.r$. L'expression "petite" sera caractérisée par le fait qu'on pourra négliger dx^2 et $dx.dy$ relativement à dx ."

Et il conseille, pour prouver que le procédé conduit à un résultat rigoureusement exact, de montrer, par de nombreuses expériences numériques, que les erreurs commises peuvent être rendues plus petites que toute quantité fixée à l'avance.

Plusieurs auteurs critiquent également le point de vue purement symboliste, qui consiste à ne donner du sens qu'aux seuls symboles dy/dx , d^2y/dx^2 ..., et conduit selon eux, dans la pratique, à toute sorte de compromissions. Citons par exemple R.Tambs Lyche :

"Certains auteurs suivent une autre voie, en considérant dy/dx comme un seul symbole équivalent à y' . Pour ne pas devoir renoncer aux avantages indiscutables de l'utilisation des différentielles, ces auteurs considèrent dx et dy comme des symboles dépourvus de sens, en affirmant seulement qu'on puisse, dans beaucoup de cas, effectuer les calculs comme si dx et dy étaient des quantités."

Notons que l'on trouve trace dans la revue anglaise "The Mathematical Gazette" de débats similaires entre 1931 et 1934, suite à un article de E.G.Phillips où ce dernier regrette que des étudiants puissent arriver à l'université sans avoir entendu

parler de différentielles. Il propose de les introduire dès les débuts de "l'Elementary Calculus", à partir de la définition moderne de la différentiabilité, comme partie simplement proportionnelle à Δx de l'accroissement de la fonction. Il s'ensuit une polémique où l'on voit se manifester, à propos des différentielles du premier ordre, et avec autant de virulence, les différents points de vue et arguments déjà répertoriés ici.

Cet ensemble d'articles permet également de se représenter ce que pouvaient être les relations maths/physique au début du siècle, dans ce domaine et c'est ce point que nous allons maintenant développer.

III - LES RELATIONS MATHS/PHYSIQUE

Le rapport Beke laisse penser que la coupure actuelle entre les deux disciplines était déjà sensible en 1914, mais qu'elle n'était sans aucun doute pas vécue dans les mêmes termes, les modifications de l'enseignement des mathématiques étant toutes récentes à l'époque :

"Le mouvement réformiste ne peut-être considéré comme achevé tant que nous voyons les notions fondamentales de la Mécanique enseignées indépendamment des éléments du Calcul infinitésimal. L'avenir fera régner certainement l'harmonie, si désirable au point de vue pédagogique, entre les enseignements qui s'occupent, l'un de l'étude des fonctions et l'autre des phénomènes physiques et chimiques."

Certes, on critique les Compléments sur le calcul infinitésimal, écrits à l'usage des physiciens (*"la honte de la littérature mathématique"* écrit M.Timerling dans un ouvrage cité dans le rapport Beke) ; mais on estime que la distorsion constatée ne devrait être que passagère :

"Nous sommes loin de considérer la transformation de l'enseignement de la physique comme achevée dans tous les Etats ; mais l'intérêt de l'enseignement secondaire exige impérieusement que les idées nouvelles dont nous aspirons à la réalisation dans l'enseignement mathématique pénètrent à fond l'enseignement physique. Celui-ci en deviendra plus vrai, plus sincère, plus simple, plus économique, plus complet par les forces et le temps gagnés et il réagira, à son tour, sur l'enseignement mathématique en le rendant plus pratique, plus facile à comprendre, plus uni et répondant mieux à l'idéal scientifique."

D'ailleurs, pour confirmer cet optimisme, il suffit de constater que des problèmes analogues subsistent dans des branches internes aux mathématiques. Dans le paragraphe consacré aux applications géométriques, E.Beke écrit :

"Pourtant, il me faut constater une fois de plus qu'on continue à appliquer, pour la détermination des aires et des volumes, les méthodes anciennes et, dans la plupart des cas, le principe sans beaucoup de valeur didactique de Cavalieri, même après avoir exposé les notions fondamentales du calcul intégral."

Mais, citant F.Klein, il voit dans ce phénomène le simple effet de l'hystérésis du système d'enseignement.

Le rapport annexé de Ch.Bioche, concernant l'enseignement en France, fait même état d'une lettre de M.Wallon, représentant le bureau de l'Union des Physiciens, qui se félicite de l'introduction dans l'enseignement secondaire de mathématiques des notions élémentaires du calcul différentiel et intégral :

"Il est certainement avantageux pour nous, de trouver nos élèves capables d'utiliser dans les cas, simples d'ailleurs, où nous en avons besoin avec eux, les méthodes de calcul dont il est question. Les comprennent-ils bien ? Ceci est autre chose, mais je puis dire que nous les y aidons, et nous pouvons, à cet égard, invoquer leur témoignage même ; nous leur fournissons, en effet, l'occasion d'appliquer à des choses concrètes, des notions un peu abstraites."

De plus, dans de nombreux articles, la référence à la physique est présente et utilisée pour justifier l'introduction des différentielles ou certains choix pédagogiques, en particulier l'absence de distinction entre d et Δ . H.Poincaré, par exemple, écrit : *"Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent et où on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on envisage que des différentielles du premier ordre, à la condition de n'en faire qu'un emploi judicieux. C'est ainsi que l'on apprendra à raisonner correctement sur les infiniment petits, qu'on se familiarisera avec la théorie des petites erreurs, si importantes en physique, qu'on comprendra comment de petites variations des données peuvent influencer sur le résultat : et cela aussi, les physiciens ne s'en plaindront pas."*

De même, toujours dans le rapport Beke :

"Pourtant, des mathématiciens comme M.Schülke et ceux qui arrivent au calcul différentiel par la voie de la physique, comme M.Richter, penchent plutôt à la conservation des différentielles."

Ainsi donc la coupure, si elle est indéniable, n'est en rien comparable avec ce qu'elle est aujourd'hui et surtout elle est vécue comme un état provisoire, lié à la nouveauté des changements de l'enseignement des mathématiques. Alors même que cela apparaît de manière flagrante dans l'ensemble des textes cités, il n'y a pas identification de deux régimes de savoir obéissant chacun à des contraintes et des finalités propres et questionnement sur la compatibilité possible de ces contraintes et finalités. Ce problème est cependant quasiment explicite dans l'article déjà cité de H.Poincaré sur les définitions mathématiques. Il y écrit à propos de la rigueur :

"Croît-on que les mathématiques ont atteint la rigueur absolue sans faire de sacrifice? C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis la pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière et il faudra les vaincre à nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique."

LISTE DES ARTICLES CITES :

- L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE :

1899 - Volume 1 :

LAURENT H. : *Considérations sur l'enseignement des mathématiques dans les classes de Spéciales en France*, p. 38-44.

POINCARÉ H. : *La notation différentielle et l'enseignement*, p. 106-110.

FONTENE G. : *Représentation géométrique des différentielles successives d'une fonction d'une variable*, p. 458-460.

1903 - Volume 5 :

LAISANT C. A. : *Les nouveaux programmes du concours de l'Ecole Polytechnique*, p. 77-84.

BONNEL J. F. : *Les limites et l'atome*, p. 332-338.

1904 - Volume 6 :

POINCARÉ H. : *Les définitions en mathématiques*, p. 255-283.

APPELL P. : *Rapport sur la réforme des programmes d'admission aux grandes écoles*, p. 485-494.

1911 - Volume 13 :

SCHULKE A. : *Différentielle et dérivée*, p. 224-227.

1913 - Volume 15 :

Questionnaire sur l'introduction des premières notions de calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes, p. 396-398.

1914 - Volume 16 :

BEKE E. : *Rapport général sur les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires*, p. 246-284.

BIOCHE CH. : *L'enseignement du calcul différentiel et intégral dans les lycées de France*, p. 289-292.

1928 - Volume 27 :

DARESTE E. : *Reflexions sur l'enseignement du calcul infinitésimal*, p. 124-136.

1929 - Volume 29 :

WINANTS W. : *Reflexions sur l'enseignement du calcul infinitésimal : à propos d'un article de Monsieur E.Dareste*, p. 293-302.

1930 - Volume 30 :

LYCHE T. : *Reflexions sur les infiniment petits et les différentielles*, p.248-254.

DELENS P. : *Notations différentielles*, p. 333-337.

1938 - Volume 37 :

DE LOSADA Y PUGA C. : *Sur quelques appels à l'intuition géométrique dans l'enseignement de l'analyse*, p. 51-67.

1962 - Série II - Volume 8 :

COCKCROFT W. H. : *Some notes on British Calculus text books 1900/1960*, p. 163-170.

1964 - Série II - Volume 10 :

FRECHET M. : *Sur diverses définitions de la différentiabilité*, p. 177-232.

- THE MATHEMATICAL GAZETTE :

"Differentials", A discussion at the Annual Meeting, 5th January, 1934, avec les contributions de G.Temple, J.T.Combridge, C.O.Tuckey, Robson, G.W.Ward, D.E.Collier, C.G.Paradine, p. 68-79, 1934.

QUESTIONNAIRE SUR L'INTRODUCTION DES PREMIERES NOTIONS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL DANS LES ECOLES MOYENNES :

Questionnaire pour la Sous-Commission A sur l'introduction des premières notions de Calcul différentiel et intégral dans les Ecoles moyennes.

Remarques préliminaires. — 1. Le Comité central pose ces questions de manière à être renseigné sur les matières et la méthode d'exposition de cet important chapitre du plan d'études de l'enseignement moyen. Il tient à rappeler à nouveau qu'il ne prend pas parti pour une tendance déterminée, mais qu'il se propose avant tout de mettre en lumière les divers points de vue et les résultats obtenus.

2. — Nous entendons par écoles moyennes les établissements de l'enseignement secondaire supérieur désignés sous les noms de lycées, gymnases classiques ou réaux, ou établissements similaires des divers pays. Il serait utile d'avoir aussi des renseignements sur ce qui se fait dans les écoles normales d'instituteurs, s'il y a lieu.

1. — *Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de votre pays ?*

Nous désirons notamment être renseignés sur les points suivants :

- a) Le Calcul différentiel est-il limité aux fonctions d'une variable ou considère-t-on aussi des fonctions de plusieurs variables ?
- b) Quelles sont les fonctions auxquelles on applique le Calcul différentiel ?
- c) Fait-on du Calcul intégral ? si oui, suivant quel programme ?
- d) Expose-t-on le théorème de Taylor ?
- e) Intègre-t-on des équations différentielles simples ? Lesquelles ?

II. — *Quel est le degré de rigueur dont on fait usage dans l'introduction des concepts fondamentaux et dans les démonstrations ?*

a) Se contente-t-on d'une introduction géométrique au Calcul différentiel, sans adopter d'une façon expresse la notion de limite, ou utilise-t-on cette notion ? Dans l'affirmative, est-ce que l'on présente une démonstration rigoureuse, ou envisage-t-on comme évidents des théorèmes tels que celui-ci :

$$\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a} ?$$

b) Fait-on usage des différentielles ? Dans l'affirmative présente-t-on le Calcul différentiel comme une sorte de calcul approximatif, ou calcule-t-on avec des infiniment petits comme avec des grandeurs existant effectivement ?

c) Dans le théorème de Taylor tient-on compte du reste ou non ?

d) Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables ?

e) La notion de nombre irrationnel est-elle présentée sous une forme rigoureuse, ou se contente-t-on de parler seulement occasionnellement des nombres irrationnels, par exemple à l'occasion du calcul des racines ?

III. — *Quelles sont les considérations méthodiques que l'on suit dans l'introduction au Calcul différentiel et intégral ?*

a) Cette introduction est-elle déjà préparée dans les classes précédentes par une étude appropriée des fonctions simples et de leur représentation graphique, de manière que ces nouvelles matières ne constituent pas un supplément au programme, mais comme un chapitre qui se rattache étroitement à ce qui a déjà été vu.

b) Emploie-t-on la notation différentielle de Leibniz, ou bien les dérivées et les intégrales sont-elles désignées autrement ?

c) Commence-t-on l'exposé par le Calcul différentiel ou par le Calcul intégral, ou étudie-t-on simultanément les deux ?

d) L'intégrale est-elle présentée comme limite d'une somme (intégrale définie) ou comme fonction primitive (intégrale indéfinie) ? Si l'on opère des deux manières, dans quel ordre et dans quel lieu expose-t-on ces deux notions ?

e) Fait-on usage d'un manuel ? Quels sont les ouvrages caractéristiques dont on tient compte ? (Indication complète du titre, de l'éditeur et de l'édition).

IV. — *Quelles sont les applications du Calcul différentiel et intégral que l'on donne dans ce premier enseignement ?* Telles questions d'analyse, de géométrie ou de physique utilisant la notion de limite et qui, par leur importance, se trouvaient déjà partiellement ou entièrement introduites dans l'enseignement, sont-elles maintenant attachées directement à l'étude du Calcul différentiel et intégral, de manière à obtenir un exposé plus économique des matières à étudier ?

Nous signalons notamment les points suivants :

a) La théorie des maxima et minima.

b) Si l'on étudie la série de Taylor, quelles sont les fonctions dont on fait le développement en série entière ?

c) Au cas où l'on tient compte du reste dans la série de Taylor, fait-on usage des séries entières pour l'interpolation, l'extrapolation ou pour le Calcul des erreurs ?

d) Au cas où l'on étudie le Calcul intégral, applique-t-on celui-ci au calcul des aires (par exemple de la parabole, de l'ellipse) et au calcul des volumes ?

e) Pour quels concepts fondamentaux de la Mécanique, (vitesse, accélération, travail, moment d'inertie, etc.) fait-on usage du Calcul différentiel et intégral ?

f) De la même manière en Physique, en particulier pour l'optique (courbes enveloppes, etc.) et en Électrodynamique (lignes de force, etc.).

V. — *L'introduction du Calcul différentiel et intégral a-t-elle amené un allègement du plan d'études en supprimant d'autres théories ? Dans l'affirmative, de quelle manière ?*

VI. — *Quels sont les résultats obtenus par l'introduction du Calcul différentiel et intégral ? Est-elle reconnue comme une réforme nécessaire ? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition ? En particulier quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique ?*

Si vous avez à signaler d'autres observations ou remarques concernant l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, veuillez en faire mention dans votre réponse à cette place.

Quels sont les passages des rapports publiés par votre sous-commission concernant la question de l'enseignement du Calcul différentiel et intégral ?

ANNEXE V

LA DIFFERENTIELLE DANS LES MANUELS ET POLYCOPIES DE PHYSIQUE

J.Ménigaux

En physique, la différentielle est un outil mathématique intensivement utilisé, pour la mise en équation de problèmes, dès le début de la première année d'études universitaires, alors que cet outil est inconnu des élèves de fin de terminale.

Dans le cadre de la recherche, il nous a paru intéressant de déterminer si l'évolution du statut de la différentielle en mathématiques et la répercussion de cette évolution sur les programmes de l'enseignement secondaire et universitaire (cf. annexes précédentes) avaient influencé l'utilisation et/ou la conception que les physiciens font, ou ont, des différentielles.

Nous avons donc consulté des ouvrages destinés, pour la plupart, aux étudiants de première année d'études universitaires :

- manuels de physique publiés depuis le début du siècle jusqu'à nos jours : références [2] à [20],
- photocopiés de cours de physique rédigés par des enseignants, depuis 1968 : références [21] à [30],
- enfin, des manuels de mathématiques conçus à l'usage des physiciens : références [31] à [34].

Trois points vont être abordés :

- 1) quelles définitions le physicien donne-t-il de la différentielle ? Ces définitions sont-elles stables ou évoluent-elles au fil des années ?
 - 2) quelles justifications le physicien donne-t-il du traitement réservé en physique aux différentielles ?
 - 3) de quelle manière le physicien utilise-t-il les différentielles dans la mise en équation de problèmes ? Y-a-t-il ou non évolution dans cette utilisation ?
- Nous nous limiterons, dans la mesure du possible aux fonctions d'une variable.

Le fait le plus marquant est que, jusqu'en 1965-1968, aucun des manuels consultés ne définit la différentielle ni ne justifie l'utilisation qu'on en fait en physique. De toute évidence, une telle définition ou justification est alors du ressort des mathématiciens.

A partir des années 1965-1968, beaucoup de manuels et la plupart des photocopiés de cours comportent des rappels ou compléments de mathématiques en préliminaire ou annexe des chapitres consacrés à la physique. La définition de la différentielle y est alors toujours présente et, à cette occasion, une explication plus ou moins élaborée de l'utilité de la différentielle en physique est fournie.

Quelle peut être la raison d'un tel changement de pratique des physiciens ? On a vu dans l'annexe II que la réforme des programmes de mathématiques - 1958, pour les études universitaires, 1964, pour les classes préparatoires - voit s'amorcer un changement de statut de la différentielle avec l'apparition de la notion de différentiabilité et que ces mêmes programmes mettent l'accent sur "la différence de traitement des différentielles en mathématiques et en physique". Ainsi l'apparition de rappels sur les différentielles dans les manuels et photocopiés de physique pourrait correspondre au besoin que ressent alors le physicien de se justifier face à l'évolution de la pratique mathématique.

I - DEFINITION DE LA DIFFERENTIELLE PAR LE PHYSICIEN

Lorsque le physicien définit la différentielle, dans une annexe ou des compléments mathématiques, c'est d'abord pour les fonctions d'une variable, $y=f(x)$, puis il généralise la définition aux fonctions de plusieurs variables. Une telle procédure, qui n'offrirait que peu d'intérêt en mathématiques puisque la notion de différentielle ne prend tout son sens que pour les fonctions de plusieurs variables, est justifiée en physique car la majorité des problèmes de première année se résolvent soit directement avec des fonctions d'une variable, soit en se ramenant à de telles fonctions.

On observe que deux registres dominent jusqu'en 1985 :

- le registre de type "Cauchy" : la différentielle dy d'une fonction d'une variable $y=f(x)$ est donnée par l'expression :

$dy = f'(x) dx$ où $dx = \Delta x$ est un accroissement arbitraire de la variable,

- le registre "développement limité à l'ordre 1" :

$$f(x+h) - f(x) = f'(x).h + h.\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h)=0.$$

Mais cette seconde formulation s'accompagne, en général, d'un commentaire présentant la différentielle comme une expression donnant la partie principale de l'accroissement ($\Delta y \sim dy$) - avec éventuellement mise à l'écart du cas où $f'(x)=0$ - ce qui sous-entend la "vieuse" lecture de cette approximation à l'ordre 1 (cf. annexe III).

1- Jusqu'en 1974, le registre Cauchy prédomine dans les documents de physique ([13], [15], [22], [24], [25], [28]) ou de mathématiques pour physiciens [32].

$dx=\Delta x$ est le plus souvent présenté comme un accroissement quelconque de la variable "accroissement donné" [22], "quelconque" [24], "fini" [25], "arbitraire" [32].

Mais dans [24], l'auteur précise tout de même :

"Lorsque Δx est petit, on le note dx ".

Dans la majorité de ces documents, la définition de la différentielle est suivie de l'interprétation géométrique classique (avec dessin de courbe et tangente où l'erreur paraît souvent aussi importante que la différentielle).

Cette interprétation est accompagnée d'une formulation en termes d'approximation de la différentielle, du type :

lorsque $dx = \Delta x$ tend vers 0, l'accroissement Δf de la fonction peut être écrit sous la forme :

$$\Delta f = f'(x).dx + \alpha(dx).dx = df + \alpha(dx).dx \quad \text{où } \alpha(dx) \rightarrow 0 \text{ quand } dx \rightarrow 0$$

écriture qui permet à la plupart de ces auteurs de souligner que la différentielle df est une bonne approximation de Δf si $\Delta x=dx$ est petit.

"La différentielle df , partie principale de Δf , est une bonne approximation de Δf si dx est suffisamment petit" [25]

" df constitue une approximation de Δf d'autant meilleure que Δx est petit" [24].

2 - A partir de 1974, la définition majoritairement donnée dans les documents de physique ([15], [29], [30]) et de mathématiques [33] relève du registre "développement limité à l'ordre 1" précédemment décrit ; la lecture ancienne de la différentielle y prédomine au moins implicitement [15], [29], exception faite de [30] :

" $\Delta x = dx$ est un accroissement infinitésimal" [15]

"La différentielle df est la partie principale de l'accroissement " [29]

"C'est aussi la forme linéaire de Δf obtenue en négligeant le reste" [30].

3 - Enfin, le registre de définition de la différentielle comme application ou fonction linéaire tangente n'apparaît que très récemment dans deux manuels, l'un de mécanique [20], l'autre consacré aux outils mathématiques pour la physique [34]. Pour

leurs auteurs, il s'agit vraisemblablement de donner la définition mathématique actuelle de la différentielle pour mieux souligner, ensuite, le traitement que les physiciens font de cette notion.

Considérons une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point x_0 . Pour un mathématicien, dire que la fonction $f(x)$ est dérivable, ou différentiable en $x = x_0$ revient à affirmer que :

$$f(x_0 + u) - f(x_0) = au + \varepsilon(u) |u| \quad (\text{B.12})$$

où $\lim_{|u| \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. Naturellement a n'est pas autre chose que la dérivée de $f(x)$ en x_0 : $a = f'(x_0)$. La quantité :

$$au = f'(x_0)u$$

est appelée application linéaire tangente, ou différentielle de f en $x = x_0$, et elle est notée $d_{x_0}f(u)$

$$d_{x_0}f(u) = f'(x_0)u \quad (\text{B.13})$$

Comme son nom l'indique $d_{x_0}f(u)$ est une fonction linéaire de u , et l'égalité (B.13) est vraie pour tout u .

[20]

2.2 D'un point de vue mathématique, la différentielle de la fonction f en x_0 sera définie comme la fonction linéaire de la variable h :

$$h \mapsto f'(x_0)h \quad (\text{2.17})$$

Cette différentielle est notée df_{x_0} , l'indice x_0 pouvant d'ailleurs être sous-entendu. La définition (2.17) peut donc être notée plus précisément :

$$h \xrightarrow{df_{x_0}} f'(x_0)h \quad (\text{2.17})$$

ou, avec les notations en termes de « fonctions » :

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0)h \quad (\text{2.18})$$

Compte tenu de (2.16), et conformément d'ailleurs aux propriétés générales du développement de Taylor, on voit qu'on a :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + h\varepsilon(h) \quad (\text{2.19})$$

Ainsi, la différentielle représente-t-elle l'accroissement de la fonction à un infiniment petit près d'ordre plus grand que 1 relativement à l'accroissement h de la variable. Elle constitue une approximation de cet accroissement de la fonction au premier ordre par rapport à l'accroissement de la variable : comme on le verra, c'est cet aspect qui est essentiel en Physique.

Ces considérations sont utilement illustrées par une référence géométrique : soit (C) le graphe de f , M_0 le point de (C) d'abscisse x_0 , (T) la tangente à (C) en M_0 , M le point de (C) d'abscisse $x_0 + h$ (Fig. 2.1). Sur le graphique, on observe en HM l'accroissement de la fonction lié à l'accroissement h de l'abscisse, en HP la valeur de la différentielle pour la valeur h de sa variable. (On notera effectivement que dans

(2.17) ou (2.18), la variable n'est plus x ou $(x_0 + h)$, comme pour f , mais h . Ce qu'exprime (2.19), c'est le fait que la différence PM entre ces deux quantités, autrement dit la différence d'ordonnée entre (C) et (T) pour une même abscisse $(x_0 + h)$ tend vers zéro plus vite que h quand h tend vers zéro, parce que la courbe (C) « accompagne » sa tangente (T). Quant à la différentielle $df_{x_0}(h)$, elle est :

- soit identiquement nulle — quel que soit h — pour $f'(x_0) = 0$;
- soit un infiniment petit du premier ordre en h .

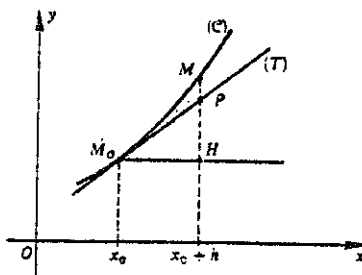


Figure 2.1

Il convient dès maintenant d'indiquer les notations usuelles, plus pratiques que celles présentées jusqu'ici, notations auxquelles nous aurons désormais systématiquement recours. On les obtient essentiellement en convenant d'adopter pour l'accroissement h de la variable x une notation semblable à celle qui note la différentielle de la fonction, soit dx . Supprimant l'indice x_0 (ou x) qui est sous-entendu, nous réécrivons ainsi (2.18) sous la forme :

$$df = f'(x) \cdot dx \quad (\text{2.20})$$

Si l'on a posé $y = f(x)$, (2.20) pourra également prendre la forme :

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (2.20')$$

Cette substitution de dx à h peut, entre autres, se justifier par la remarque que, pour la fonction $f(x) = x$, on a :

$$df_{x_0}(h) = dx = h$$

Une fois adoptée cette nouvelle notation, très pratique, mais dont il faut admettre le caractère conventionnel, on notera que (2.20) peut se transformer en :

$$\boxed{\frac{df}{dx} = f'(x)} \quad (2.21)$$

ce qui fournit une nouvelle notation pour les dérivées de fonctions, la notation « différentielle » à laquelle nous aurons désormais presque exclusivement recours. Dans le prolongement de (2.21), on notera $\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$, soit encore $\frac{d^2f}{dx^2}$, la dérivée seconde $f''(x)$, et ainsi de suite :

$$\boxed{\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)} \quad (2.22)$$

[34]

II - JUSTIFICATION PAR LE PHYSICIEN DE L'UTILISATION DES DIFFÉRENTIELLES EN PHYSIQUE

1 - Jusqu'en 1965-1967, aucun des manuels consultés ne justifie l'utilisation des différentielles faite en physique.

2 - A partir de 1967, la justification clairement avancée dans plusieurs polycopiés et manuels ([24], [25], [30]) est associée aux calculs d'incertitude (par exemple sous forme d'un paragraphe suivant la définition de la différentielle et intitulé : "Applications"). Une telle utilisation des différentielles des fonctions de plusieurs variables est en effet incontestable en travaux pratiques mais elle ne constitue pas, à notre avis, la principale justification du traitement réservé aux différentielles en physique.

Le registre primordial d'utilisation - et donc de justification - celui de la mise en équation est, en général, à peine suggéré (quelques lignes voire un court paragraphe).

Trois idées se dégagent de ces suggestions : lorsqu'on se contente, comme c'est le cas en physique, d'étudier le comportement local d'une fonction f au voisinage d'un point x :

- une valeur approximative de l'accroissement $\Delta f(x)$ est fournie par la différentielle $df(x)$; l'approximation faite est d'autant meilleure que dx est petit,

- la différentielle est plus facile à calculer que l'accroissement ; on simplifie donc les calculs,

- la différentielle est, contrairement à l'accroissement, une fonction linéaire de la (ou des) variables ; on a donc effectué une linéarisation.

En général ces trois idées sont rarement reliées entre elles et l'ordre de l'approximation n'est jamais clairement mis en évidence (cf. par exemple [21], [25], [29], [30], [32], [33]) à une exception près [15] :

"Quand dx est suffisamment petit, Δf est équivalent à df , ce qui explique que dans beaucoup d'ouvrages techniques, on désigne par dx une quantité très petite, df étant pratiquement confondu avec l'accroissement correspondant de la fonction" [32]

" $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$ avec $\alpha \rightarrow 0$ quand $\Delta x \rightarrow 0$. C'est pourquoi on use fréquemment dans certains calculs numériques de l'égalité approchée $y \approx dy$ ce qui simplifie les calculs" ([29], [33])

"Pour un petit déplacement du point M noté par le vecteur $d\vec{M}(dx,dy,dz)$, l'accroissement de la fonction Δf est "à peu près égal" à df C'est pourquoi on dit quelquefois que dx, dy, dz sont des accroissements "infinitésimaux" des coordonnées et que df est l'accroissement infinitésimal de f en M ." [30]

" $df(x_0)$, facile à calculer, est, pour dx suffisamment petit, une approximation correcte de $\Delta f(x_0)$, difficile à calculer." [25]

"Physiquement, même pour des accroissements finis, on écrira souvent : $\Delta y = y' \cdot \Delta x$. Ceci signifie qu'au voisinage du point $x_1, x_2, \dots, x_n$, on assimile la fonction à une fonction linéaire des variables." [21]

"Si les calculs se bornaient au premier ordre, il resterait la relation algébrique simple $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$. La notion (et la notation) différentielle(s) permet précisément de profiter de cette simplicité. Les nouveaux symboles dx et dy remplaceront les accroissements Δx et Δy avec l'hypothèse implicite d'une limitation des évaluations au premier ordre par rapport aux infiniment petits. Nous pouvons écrire maintenant "en toute rigueur" : $dy = f'(x) \cdot dx$." [15]

Remarquons, de plus, qu'aucune des trois idées suggérées n'est illustrée d'un exemple concret.

3 - Quant au registre de la mise en équation, il faut attendre les deux manuels introduisant la différentielle comme fonction linéaire tangente ([20], [34]) pour trouver un essai de justification plus solidement étayé de l'utilisation "rigoureuse" des différentielles faite par le physicien, illustré d'exemples (cf. [20] ci-après).

La notion de différentielle est une source de conflits entre le point de vue du mathématicien et celui du physicien, et je vais essayer d'explicitier les manipulations qu'un physicien effectue de façon tellement automatique qu'il ne prend pas en général la peine de les justifier. Je me limite à une seule variable pour simplifier, mais ce qui suit se généralise à plusieurs variables.

[- - -]

Pour les besoins de ses raisonnements, le physicien considère des quantités « petites »; si x est une quantité physique (longueur, vitesse, pression...), il souhaitera étudier ce qui se passe au voisinage de $x = x_0$, c'est-à-dire pour u « petit ». Il écrira :

$$\Delta f = f(x_0 + u) - f(x_0) \simeq f'(x_0)u \quad (\text{B.14})$$

Cette équation est « presque » la même que (B.13), mais l'interprétation est tout à fait différente. Δf n'est pas une application linéaire, mais l'accroissement

d'une fonction; la différence se lit sur la figure, $\delta(u)$ étant l'erreur commise en remplaçant Δf par $f'(x_0)u$. En général, les fonctions rencontrées en physique sont suffisamment dérivables pour que l'on puisse écrire :

$$\Delta f = f(x_0 + u) - f(x_0) = f'(x_0)u + 0(u^2)$$

L'erreur $\delta(u)$ est alors d'ordre u^2 .

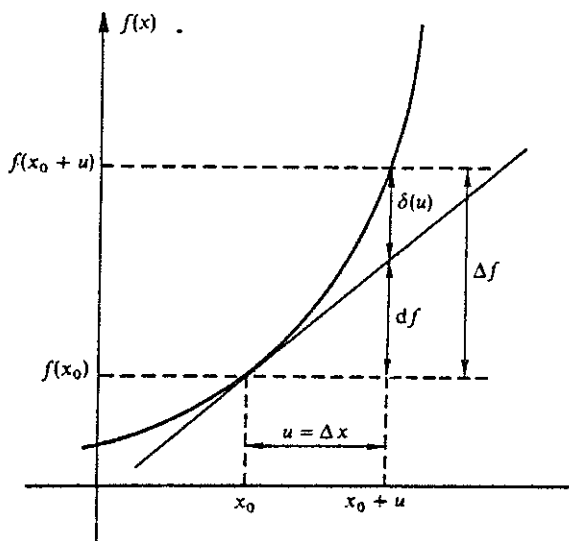


Fig. 2.

En général u sera noté Δx et :

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + 0(\Delta x)^2$$

Une fois établie l'équation cherchée, le physicien fait tendre Δx vers 0 et écrit $\Delta f \rightarrow df$, $\Delta x \rightarrow dx$

$$df = f'(x_0)dx$$

Les résultats trouvés de cette manière sont fondamentalement corrects, bien que la méthode manque incontestablement de rigueur.

• Exemple : calcul de l'aire d'un cercle de rayon R par un physicien

Le cercle est découpé en couronnes circulaires comprises entre r et $r + \Delta r$. L'aire ΔS de cette couronne est approximativement $2\pi r \Delta r$, en négligeant des termes $0(\Delta r)^2$. (En tout cas on a l'encadrement rigoureux

$$2\pi r \Delta r < \Delta S < 2\pi(r + \Delta r) \Delta r.$$

A la limite $\Delta r \rightarrow 0$:

$$dS = 2\pi r dr$$

$$S = \int_0^R 2\pi r dr = \pi R^2$$

Noter que la différentielle dS de l'aire du cercle est bien $2\pi r dr$: avec les notations de (B.13)

$$d_r S(u) = 2\pi ru$$

166

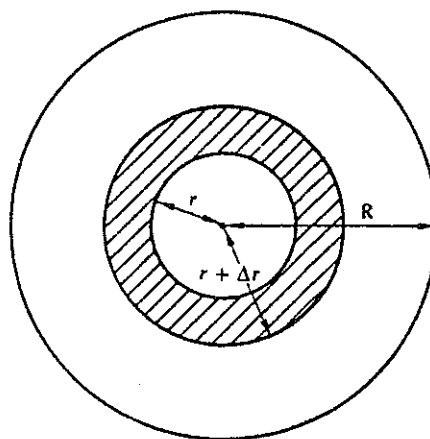


Fig. 3.

De cet extrait, nous ne commenterons que l'exemple choisi par l'auteur, en remarquant tout d'abord que les points suivants :

- affirmation que l'aire de la couronne circulaire est, au second ordre près, égale à celle d'une rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur Δr ,
- affirmation de l'existence de l'encadrement rigoureux de cette aire par :

$$2\pi r \cdot \Delta r < \Delta S < 2\pi(r + \Delta r) \cdot \Delta r,$$

- passage à la limite et transformation du ΔS en dS , ne sont pas justifiés.

En fait, y a dans ce texte le souci indéniable de mettre en évidence le fonctionnement de l'approximation au premier ordre caractéristique de l'utilisation des différentielles, mais malheureusement à propos d'une situation pour laquelle la reconnaissance du fait que l'approximation choisie est bien une approximation au premier ordre et la justification de l'encadrement proposé n'ont rien d'évident.

En effet, l'encadrement exact fourni qui légitime l'affirmation d'approximation à l'ordre 2, a une évidence intuitive certaine basée sur le "déroulement" de la couronne circulaire, mais sa preuve rigoureuse échappe à cette évidence intuitive. Notons de plus que cet encadrement permet d'affirmer que ΔS est égal au second ordre près à : $2\pi r \cdot \Delta r$, donc d'écrire directement, sans invoquer un " $\Delta r \rightarrow 0$ " quelque peu rituel, comme le fait le texte : $dS = 2\pi r dr$.

Dans le second livre cité [34], un paragraphe intitulé : "Utilisation en Physique", faisant suite à la définition de la différentielle, fournit le point de vue des auteurs :

Indiquons maintenant dans quelles conditions l'on utilisera, en Physique, l'outil « différentielle ».

L'attention sera centrée, pendant toute la mise en équation qui constitue la phase d'analyse proprement physique des problèmes, sur l'aspect « petite variation traitée de manière approximative », en fait « petit accroissement d'une fonction traité au premier ordre par rapport à l'accroissement de la variable ». Une fois les équations obtenues — en général des équations « différentielles » faisant intervenir certaines fonctions en même temps que leurs dérivées — les différentielles ou rapports de différentielles du type (2.21) reprennent leur rôle purement mathématique et le gardent pendant la phase de résolution des équations qui traduisent la situation physique étudiée.

En d'autres termes les dx , dy , df , etc. remplacent essentiellement les « petits accroissements » δx , δy , δf ... de l'enseignement secondaire, avec la convention sous-jacente fondamentale que les calculs sont systématiquement menés au premier ordre seulement par rapport à ces quantités petites : tous les termes d'ordre supérieur provenant de produits de ces quantités sont éliminés.



C'est là le point important avec lequel il convient de se familiariser, et auquel il convient de conformer sa pratique de calcul. Le débutant peut se heurter à l'obstacle suivant: soit la fonction f , considérée en x , et $x + dx$, avec un accroissement qu'on va traiter, au premier ordre, en l'assimilant à la différentielle $df = f'(x) dx$; certains répugneront à cette assimilation, car ils se réfèrent implicitement à un schéma tel que 2.2 et hésitent à confondre $df = \overline{PQ}$ et l'accroissement de la fonction $\delta_1 f = \overline{PN}$; ou encore, ils ont en tête le « théorème des accroissements finis »* et souhaiteraient raffiner sur l'expression de l'accroissement de f en remplaçant $f'(x) dx$ par $f'(x + \theta dx) \cdot dx$ avec θ , ($0 < \theta < 1$), bien choisi.

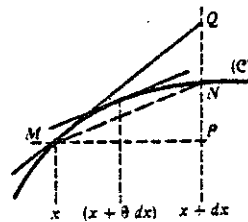


Figure 2.2

Ce qu'il faut bien comprendre, — c'est qu'on se limite à une évaluation au premier ordre en dx (c'est-à-dire qu'on ignore toutes les quantités qui tendront vers zéro plus vite que dx quand dx tendra vers zéro), — et que, dans cette approximation :

- a) $\overline{PN}$ est équivalent à $\overline{PQ}$ (et même si ce n'est pas « évident » sur un schéma tel que 2.2).
- b) $f'(x + \theta dx) dx$ est en $(f'(x) dx + f''(x + \theta_1 dx)(dx)^2)$ et ne diffère donc de $f'(x) dx = df$ que par un terme en $(dx)^2$ qui, par suite, est négligeable.

Ces principes généraux une fois bien notés, c'est la pratique qui indiquera comment recourir à ces notions et notations différentielles extrêmement commodes et d'un emploi permanent en Physique.

L'argumentation des auteurs est donc la suivante : en physique, l'utilisation de la différentielle pour la mise en équation est une convention, commode certes, à laquelle l'étudiant débutant doit se familiariser en la pratiquant. Une telle confiance des auteurs dans la pratique — alors qu'ils ne fournissent aucun exemple concret — peut paraître un peu suspecte quand on constate la pratique "usuelle" des étudiants et des physiciens en ce domaine. Il semble également dommage que l'accent soit aussi fortement mis sur l'aspect "convention" de l'utilisation des différentielles puisque, dans le chapitre consacré à l'intégration, dont nous donnons un extrait, les auteurs prouvent qu'ils ne fonctionnent en fait pas selon un tel registre :

2.1 SURFACE D'UNE BANDE PLANE

On considère, dans le plan rapporté aux deux axes orthogonaux $x'x$ et $y'y$, une bande limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2) et les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses d'équations $x = a$ et $x = b$. (On suppose que (C_1) et (C_2) n'ont nulle part de tangentes ou d'asymptotes verticales.)

Soit $S(x)$ l'aire de la portion de cette bande limitée par la droite $x = a$ et par la perpendiculaire à $x'x$ d'abscisse x , qui

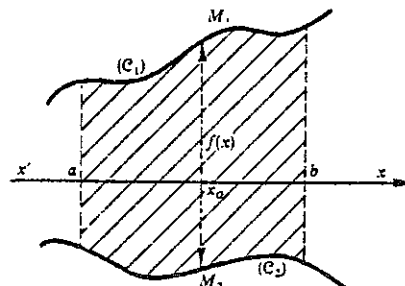


Figure 3.1

coupe (C_1) en M_1 et (C_2) en M_2 ; $S(x)$ est une fonction de x , visiblement nulle pour $x = a$ et égale, pour $x = b$, à l'aire totale de la bande, soit S_{tot} .

Soit $f(x)$ la distance entre les deux points M_1 et M_2 . Quant x augmente de dx , $S(x)$ augmente d'une quantité égale à l'aire de la zone du plan limitée par les deux droites parallèles — et très voisines — d'abscisses x et $(x + dx)$, et les arcs M_1M_1' de (C_1) et M_2M_2' de (C_2) , (Fig. 3.2).



Au premier ordre en dx , cette aire peut être confondue avec l'aire du rectangle $M_1H_1H_2M_2$. En effet, l'erreur commise correspond à l'aire des triangles curvilignes $M_1M_1'H_1$ et $M_2M_2'H_2$. Or, pour chacun d'eux, il s'agit d'une quantité d'ordre $M_1H_1 \times H_1M_1'$ (resp. $M_2H_2 \times H_2M_2'$) soit $(dx) \times$ (variation de l'écart à x' de (C_1) ou (C_2)) sur une distance $dx =$ quantité au plus du premier ordre en $dx \propto (dx)^2$. (Comme c'était le cas dans la section 2 du module 2, consacrée aux différentielles, il convient de se méfier des figures qui ne permettent pas d'ordonner de manière évidente, les uns par rapport aux autres, des infiniment petits d'ordres différents.)

Conformément aux indications de la section 2 du module 2, on voit donc que l'aire $M_1H_1H_2M_2$ fournit la valeur de la différentielle dS de $S(x)$. On a donc :

$$dS = f(x) dx \quad \frac{dS}{dx} = f(x) \quad (3.3)$$

Et l'on voit ainsi que $S(x)$ est une primitive de $f(x)$; compte tenu d'une remarque faite plus haut, on peut même dire que c'est la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = a$.



Revenons un instant sur la manipulation de la différentielle. Le débutant peut avoir des scrupules à traiter aussi superficiellement l'évaluation de l'aire $M_1M_1'H_1H_2M_2$, et chercher à raffiner, par exemple en la prenant de la forme $f\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot dx$, de manière à introduire une compensation entre les aires négligées (Fig. 3.3). Quand il s'agit d'une étude analytique, et au contraire de ce qui peut se passer dans le contexte d'un calcul numérique, comme on le verra dans les exercices 3.8 à 3.11, il faut apprendre à perdre ce type de scrupules: le calcul n'a de sens qu'au premier ordre en dx , quantité destinée à tendre vers zéro; le passage de $f(x) dx$ à $f\left(x + \frac{dx}{2}\right) \cdot dx$, ou toute autre modification du même type inspirée du théorème

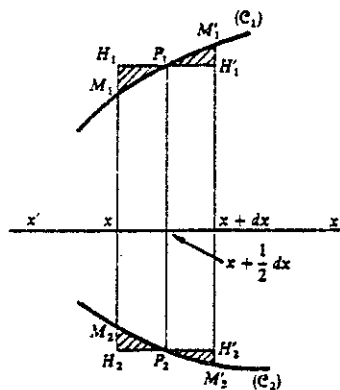


Figure 3.3

des accroissements finis, est une complication inutile; la présence du facteur dx assure à elle seule que l'expression est évaluée au premier ordre, comme il convient, dès que l'expression qui vient en facteur de ce dx est évaluée « en ses termes finis » — c'est-à-dire indépendamment de toute contribution liée à dx , et destinée à tendre vers zéro avec cette différentielle. En d'autres termes, le facteur de dx doit être pris dans la limite de $dx = 0$: c'est pourquoi, ici, il se ramène purement et simplement à $f(x)$.

On nous pardonnera cette longue digression; mais il nous paraît utile d'éclaircir, sur un cas très concret, les conditions d'emploi de cet outil fondamental qu'est la différentielle.

Compte tenu de (3.3), si le calcul a fourni une primitive quelconque de $f(x)$, soit $F(x)$, on voit qu'on pourra prendre :

$$S(x) = F(x) - F(a) \quad \text{avec :} \quad S_{\text{tot}} = S(b) = F(b) - F(a) \quad (3.4)$$

Dans cet exemple de calcul de surface d'une bande plane, la différentielle est effectivement présentée comme une approximation linéaire tangente puisque l'ordre de grandeur du reste y est correctement évalué sans aller trop loin dans la précision des calculs. Deux points essentiels sont soulignés :

- dans cette démarche, contrairement à ce qui peut être souhaitable dans une perspective de calcul numérique, il est tout à fait inutile d'aller plus loin que l'approximation linéaire, par l'utilisation du théorème des accroissements finis par exemple,

- l'approximation linéaire permet de récupérer la dérivée d'une fonction et, par là même, la fonction elle-même par intégration ou résolution d'une équation différentielle.

III - UTILISATION DES DIFFÉRENTIELLES DANS LA MISE EN EQUATION DE PROBLEMES (EN DEHORS DES RAPPELS)

Plusieurs types de mises en équation ont été retenus dans la mesure où le traitement effectué est instructif sur la façon dont l'auteur d'un manuel ou d'un polycopié utilise les différentielles. Il s'agit :

- en mécanique : de la notion de travail d'une force et du calcul d'un moment d'inertie,
- en électrostatique : du calcul du champ électrique $\vec{E}$ et/ou du potentiel V créés par une distribution continue de charges, du flux de $\vec{E}$ à travers une surface, de la circulation de $\vec{E}$,
- en magnétostatique : du calcul de l'induction magnétique $\vec{B}$ créée par un courant, du flux de $\vec{B}$,
- de façon générale : des calculs de surface, de volume, d'angle solide.

Au niveau de la mise en oeuvre effective des différentielles, rien ne distingue les documents consultés jusqu'en 1985. Qu'ils comportent ou non des rappels ou compléments sur les différentielles, la plupart des documents ne fournissent que des recettes d'utilisation, l'usage de quelques mots clefs tenant lieu de légitimation de la procédure utilisée. Ces mots jamais définis sont : "élément", "petit élément", "élémentaire", "tranche".

Les découpages en "petits éléments" ou en "tranches", la confusion permanente entre accroissement et différentielle sont de règle et, souvent, l'auteur laisse planer un doute sur l'exactitude de la procédure utilisée. Ces quelques extraits de manuels en témoignent :

"On divise la trajectoire en petits éléments. Ces éléments sont choisis suffisamment petits pour que $\vec{F}$ puisse être considérée comme constante le long d'un tel élément et que l'élément $d\vec{s}$ puisse être considéré comme rectiligne." [7]

"Découpons le cylindre en couronnes cylindriques : la couronne comprise entre les cylindres de rayon r et $r+dr$ a une masse $2\pi r dr \rho \dots$ " [5]

"Si le point M se déplace infiniment peu pour venir en M' tel que $\vec{MM'} = d\vec{l}$, la circulation élémentaire est par définition $d\mathcal{C} = \vec{a} \cdot d\vec{l}$ " [6]

"Découpons la sphère en tranches circulaires ... et considérons une tranche comprise entre z et $z+dz$. C'est pratiquement un cylindre de rayon r et de hauteur dz ... Son volume est $dv = \pi r^2 dz$ " [12]

"Lorsqu'on a affaire à une distribution continue de charges, on la divise en petits éléments de charge dq élémentaires, assimilables à des charges ponctuelles."

"Pour avoir la longueur totale de la trajectoire, il suffit de la découper en petits éléments d'arc que l'on confond avec des segments de droite et d'en faire la somme. Le résultat sera d'autant plus juste que les éléments Δs sont petits." [13]

"Pour dm , on recommence à écrire $dm = \sigma dS$ où dS est l'élément d'aire de la couronne considérée... Ensuite, on écrit que dS est donné par le produit du périmètre de cette couronne, $2\pi R \sin \theta$, par l'élément de corde $R d\theta$." [17]

Ces extraits de manuels suffisent sans qu'il soit besoin de citer des polycopiés.

Enfin, en 1985, deux documents de mécanique déjà cités ([20], [30]) font apparaître le passage à la limite dans la mise en équation, lorsqu'il s'agit d'obtenir des équations différentielles du premier ordre. Lorsque c'est possible, l'accroissement ΔX d'une grandeur physique X apparaît sous la forme d'un développement limité par

rapport à l'accroissement Δx de la variable. Le calcul de la dérivée de X par rapport à x , par passage à la limite quand Δx tend vers 0 du rapport $\Delta X/\Delta x$, permet alors d'obtenir la solution $X(x)$ par intégration, sans que les mots clefs précédemment cités soient la base de la justification, sans confusion possible entre accroissement et différentielle.

Le raisonnement ainsi mené se situe, sans nul doute, dans un contexte de rigueur auquel la majorité des documents consultés ne nous avait pas habitué. Nous citerons seulement un extrait de [20] :

II MOUVEMENT CIRCULAIRE

Rotation d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{A} = \vec{OM}$ et $\vec{A}' = \vec{OM'}$ le vecteur qui est déduit de $\vec{A}$ par une rotation d'angle θ autour d'un vecteur unitaire fixé $\vec{n}$ passant par O . Le sens de rotation autour de $\vec{n}$ est fixé par la règle du tire-bouchon : par exemple sur la figure 16 $\theta > 0$. On peut toujours choisir $\vec{n}$ comme axe des $\vec{z}$: $\vec{n} = \vec{z}$ (si vous ne voulez pas faire de choix d'axes, cf. exercice 24).

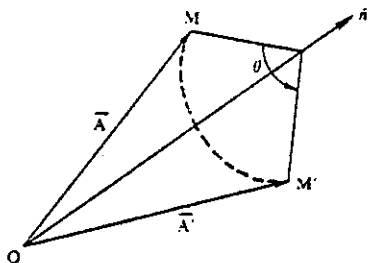


Fig. 16

Pour simplifier, je me place d'abord dans le cas où le vecteur $\vec{A}$ se trouve dans le plan xOy . Ses composantes sont (cf. figure 17) :

$$A_x = A \cos \varphi \quad A_y = A \sin \varphi$$

Après rotation, $\vec{A}$ devient $\vec{A}'$ de composantes :

$$\begin{aligned} A'_x &= A \cos(\varphi + \theta) = A \cos \varphi \cos \theta - A \sin \varphi \sin \theta = A_x \cos \theta - A_y \sin \theta \\ A'_y &= A \sin(\varphi + \theta) = A \cos \varphi \sin \theta + A \sin \varphi \cos \theta = A_x \sin \theta + A_y \cos \theta \end{aligned}$$

Supposons que θ soit infinitésimal : $\theta = \varepsilon$; en utilisant :

$$\sin \varepsilon = \varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad \cos \varepsilon = 1 + O(\varepsilon^2)$$

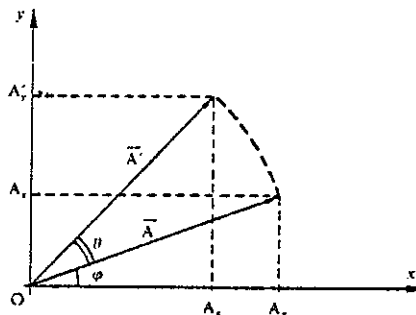


Fig. 17

on obtient à l'ordre ε :

$$A'_x = A_x - A_y \varepsilon$$

$$A'_y = A_y + A_x \varepsilon$$

c'est-à-dire sous forme vectorielle :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \varepsilon \vec{z} \wedge \vec{A} + O(\varepsilon^2)$$

Cette formule reste valable même si $A_z \neq 0$: en effet la composante z reste invariante dans la rotation : $A'_z = A_z$ et :

$$\begin{vmatrix} 0 & A_x & -A_y \\ 0 & A_y & A_x \\ 1 & A_z & 0 \end{vmatrix}$$

Revenant à un axe de rotation quelconque, nous obtenons une relation fondamentale entre rotation infinitésimale et produit vectoriel :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \varepsilon \vec{n} \wedge \vec{A} + O(\varepsilon^2) \quad (7)$$

Une remarque : pour un mathématicien, un vecteur est avant tout un élément d'un espace vectoriel, ce qui permet de définir l'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire. Pour un physicien, la propriété essentielle d'un vecteur de l'espace ordinaire est sa loi de transformation par rotation, que nous venons tout juste d'écrire.

Lorsque l'angle de rotation θ varie, je peux considérer $\vec{A}'$ comme un vecteur fonction de l'angle θ : le transformé par rotation de $\vec{A}$. Il est donc naturel de le noter $\vec{A}(\theta)$. Notez que $\vec{A}(\theta + \varepsilon)$ se déduit de $\vec{A}(\theta)$ par une rotation infinitésimale d'angle ε , et d'après ce que nous venons d'obtenir

$$\vec{A}(\theta + \varepsilon) - \vec{A}(\theta) = \varepsilon (\vec{n} \wedge \vec{A}(\theta)) + O(\varepsilon^2)$$

La dérivée par rapport à θ de $\vec{A}(\theta)$ est par définition

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\vec{A}(\theta + \varepsilon) - \vec{A}(\theta)], \text{ soit :}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{d\theta} = \vec{n} \wedge \vec{A}(\theta)} \quad (8)$$

Un seul commentaire à cet extrait : le calcul de la dérivée $d\vec{A}/d\theta$ par passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la relation :

$$\vec{A}(\theta + \varepsilon) - \vec{A}(\theta) = \varepsilon (\vec{n} \wedge \vec{A}(\theta)) + O(\varepsilon^2)$$

est inutile puisqu'on peut faire une interprétation directe de l'écriture du développement limité à l'ordre 1 : la différentielle dA est :

$$d\vec{A} = (\vec{n} \wedge \vec{A}(\theta)) \varepsilon = (\vec{n} \wedge \vec{A}(\theta)) d\theta.$$

Dans [30], de nombreux calculs de grandeurs physiques sont menés à partir de l'expression des accroissements puis calcul de la dérivée par passage à la limite mais là aussi la lecture directe de la différentielle à partir de l'écriture du développement limité à l'ordre 1 de l'accroissement est absente.

IV - CONCLUSION

Un cours de physique rédigé avant 1950 ne peut être confondu avec un cours rédigé depuis 1968 même si le phénomène étudié est identique : le formalisme mathématique y est de plus en plus élaboré (relations vectorielles, utilisation d'opérateurs, de matrices, de tenseurs...), suivant en cela l'évolution de l'enseignement des mathématiques, aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur. En conséquence, il semblerait logique que, pour les différentielles, l'évolution soit elle aussi incontestable. Or que constate-t-on ? Le physicien, rédacteur d'un document écrit, sous forme d'un manuel ou d'un polycopié, a évolué ; il a été amené à définir, depuis 1965-1968, la différentielle d'une fonction et la définition qu'il en donne s'est modifiée de 1965-1968 à nos jours : au registre de type "Cauchy" majoritairement cité jusqu'en 1974, s'est substitué le registre "développement limité à l'ordre 1" et, tout récemment, le registre "fonction linéaire tangente".

En revanche, en ce qui concerne la justification du traitement réservé en physique aux différentielles et la mise en oeuvre effective de celles-ci dans les mises en équation, il faut attendre 1985 pour qu'apparaisse un nouvel état d'esprit, plus rigoureux, estompant la coupure entre objet d'enseignement mathématique et objet d'utilisation en physique. Mais cela ne concerne encore que deux documents.

Cette tendance devrait pouvoir se généraliser à tout document de physique destiné à une diffusion auprès des étudiants : il n'est pas question d'abandonner la pratique physicienne des différentielles, performante parce qu'efficace et rapide, mais de situer cette pratique, à chaque fois que la mise en équation le permet, dans un contexte de rigueur qui lui a fait défaut jusqu'à présent.

REFERENCES

- [1] ALIBERT D., ARTIGUE M., COURDILLE J.M., GRENIER D., HALLEZ M., LEGRAND M., MENIGAUX J., RICHARD F., VIENNOT L. : *"Le thème "Différentielles" : un exemple de coopération maths-physique dans la recherche"* , Actes du Colloque du GRECO Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Sèvres, Mais 1987, Editions La Pensée Sauvage.
- [2] BOUASSE H. : *Cours de Physique*, Editions Delagrave, Paris, 1907-1908.
- [3] BECQUEREL J. : *Cours de Physique*, Editions Hermann, Paris, 1924-1926.
- [4] OLLIVIER H. : *Cours de Physique Générale*, Editions Hermann, Paris, 1927-1929.
- [5] BRUHAT G. : *Cours de Physique - Mécanique*, Editions Masson, Paris, 1ère Edition 1940.
- [6] RUMEAU G. et GUINIER G. : *Cours d'Electricité*, Editions Delagrave, Paris, 1959.
- [7] KRONING R. : *Précis de Physique Générale*, Editions Dunod, Paris, 1960.
- [8] BERKELEY : *Cours de Physique*, Volumes 1 et 2, Editions Armand Colin, Paris, 1ère Edition 1963.

- [9] BRELOT A., HULIN-JUNG N., KLEIN J., SALTIEL E. : *Travaux Dirigés Electricité Magnétisme*, Editions Hermann, Collection Méthodes, Paris, 1967.
- [10] ALONSO-FINN : *Physique Générale*, Tome 1, Interéditions, Paris, 1ère Edition 1967.
- [11] HALLIDAY D. et RESNICK R. : *Mécanique*, Editions du Renouveau Pédagogique, INC Montréal, 1ère Edition 1960 et éditions suivantes.
- [12] BOCK J. et MOREL P. : *Cours de Physique Mécanique Ondes*, Editions Hermann, Collection Méthodes, Paris, 1968.
- [13] WEISLINGER E. : *Physique*, Editions Bordas, Paris, 1969.
- [14] LENNUIER R., GAL P. Y., PERRIN D. : *Mécanique des particules Champs*, Editions Armand Colin, Collection U, 1970.
- [15] ALAIS P. et HULIN M. : *Du cours aux applications*, Editions Armand Colin, Paris, 1971.
- [16] GIE H. : *Dynamique*, Editions J.B.Baillière, Collection de Sciences Physiques, Paris, 1981.
- [17] VALENTIN L. : *L'Univers Mécanique*, Editions Hermann, Paris, 1983.
- [18] LUMBROSO H. : *Problèmes résolus d'électrostatique et dynamique des particules chargées*, Editions Dunod Université, Paris, 1984.
- [19] COURDILLE J.M., SCHUNE D., BENOIT J., LEFEBURE P. : *Exercices de Physique avec rappels de cours*, Editions Dunod Université, Paris, 1984.
- [20] LE BELLAC M. : *Introduction à la Mécanique*, Editions Belin, Collection DIA Université, Paris, 1985.
- [21] BIZOT, BAUDON, HELBERT : *Polycopié de PC1*, Orsay, 1967-1970*.
- [22] PEYRETHON H. : *Polycopié de PC1*, Orsay, 1968-1970*.
- [23] LURCAT F. : *Polycopié de MP1*, Orsay, 1969-1970*.
- [24] SERGOLLE H. : *Polycopié de PC1*, Orsay, 1970-1973*.
- [25] PIKETTY C. A. : *Polycopié de PC1*, Orsay, 1970-1973*.
- [26] BAUCHE J., CUISENIER M. : *Polycopié de SP*, Orsay, 1974-1977*.
- [27] JOYES : *Polycopié de SP*, Orsay, 1975-1977*
- [28] FOURME R. : *Polycopié de SP*, Orsay, 1974 et années suivantes*.
- [29] FOURME R. : *Polycopié de MIC*, Orsay, 1984-1987*.
- [30] *Polycopié collectif de MO1*, Orsay, 1984-1988.
- [31] BOUASSE H. : *Cours de Mathématiques Générales pour les physiciens et les ingénieurs*, Editions Delagrave, Paris, 1911.
- [32] HOCQUENGHEM A. et JAFFARD P. : *Mathématiques*, Tome 1, Editions Masson, Paris, 1964.
- [33] PISKOUNOV N. : *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1, Editions MIR, Moscou, 1970.
- [34] HULIN M., QUINTON M.F. : *Outils mathématiques pour la physique*, Editions Armand Colin, Collection U, Paris, 1986.

* Beaucoup de polycopiés sont, soit anonymes, soit non datés ; toute erreur d'attribution, de dénomination, de dates est involontaire.

ANNEXE VI

ATELIER DE MISE EN EQUATION DE PROBLEMES

Michèle Artigue

La présente annexe rend compte d'une séance de mise en équation de problèmes organisée dans trois groupes de travaux dirigés de première année de DEUG SSM, à l'Université Paris 7. Quatre problèmes, dont le texte est donné ci-après avaient été choisis. Il s'agissait de mettre en évidence les différents types de situations dans lesquelles intervient au début des études universitaires l'outil différentiel, répertoriées dans la recherche :

- calcul approché (problème de la sphère dorée),
- calcul d'intégrale (problème de la coupe),
- établissement d'une équation différentielle (problème de l'absorption).

Le quatrième problème, celui du nageur, était un problème d'optimisation. Sa résolution passait par la recherche du minimum d'une fonction. Il utilisait donc l'outil différentiel (la recherche du minimum étant liée à celle des zéros de la dérivée de la fonction temps de parcours) mais sur un mode dont nous faisons l'hypothèse qu'il était plus familier aux étudiants.

L'objectif de cet atelier était :

- du point de vue de la recherche, d'étudier les modes de résolution proposés par les étudiants, les difficultés rencontrées, la façon dont elles étaient éventuellement surmontées, d'analyser en quoi elles dépendaient de facteurs propres à l'aspect différentiel ou de facteurs plus généraux comme le repérage des variables pertinentes et la prise en compte de l'aspect fonctionnel des grandeurs utilisées ;

- du point de vue de l'enseignement, de mettre en évidence la diversité des situations dans lesquelles interviennent les notions de différentielle et de dérivée et de fournir aux étudiants des moyens pour, ayant pris conscience de cette diversité, mieux la gérer.

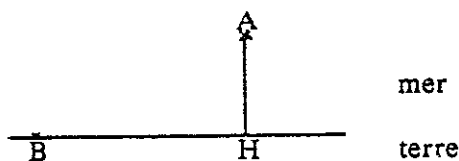
Une seconde séance d'atelier était prévue, dans cet esprit (cf. paragraphe I). Malheureusement les contraintes de temps n'ont pas permis de l'expérimenter.

I - TEXTES PROPOSES AUX ETUDIANTS

ATELIER 1

Le nageur :

Un baigneur situé en un point A de la mer désire atteindre un point B de la côte. La côte est rectiligne et la mer sans courant. Le trajet du baigneur peut être mixte (nage et marche). Sa vitesse de nage est de 2km/h, sa vitesse de marche de 4km/h. Déterminer le trajet le plus rapide dans les deux cas suivants :



- 1) $AH = 500\text{m}$ et $HB = 400\text{m}$
- 2) $AH = 500\text{m}$ et $HB = 200\text{m}$

La sphère dorée :

On veut dorer à l'or fin une sphère de rayon R . Sachant que l'épaisseur e de dorure est uniforme et très inférieure à la valeur de R , donner une valeur approchée de la

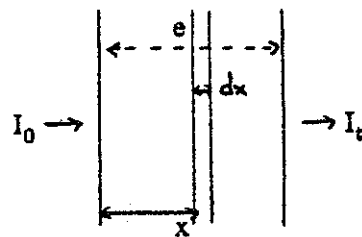
quantité d'or nécessaire en fonction de R et de e (la masse volumique de l'or est de $19,3\text{g/cm}^3$).

L'absorption lumineuse :

Soit I_0 l'intensité d'un faisceau de rayons X de section constante arrivant normalement sur un échantillon métallique d'épaisseur e . L'intensité transmise est inférieure à l'intensité incidente I_0 . En effet, par suite d'interactions diverses, une partie de l'énergie est absorbée par l'échantillon. L'intensité absorbée par une tranche élémentaire dx , située à la profondeur x est proportionnelle à son épaisseur dx et à la valeur de l'intensité I en x , le coefficient de proportionnalité étant le coefficient d'absorption linéaire μ caractéristique du métal.

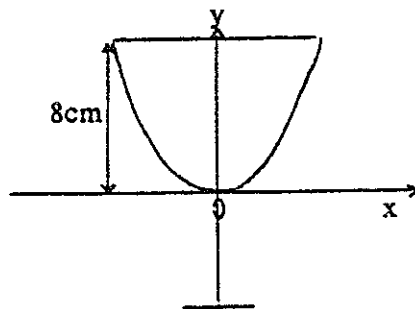
Donner la loi de variation de I en fonction de l'épaisseur de métal traversé et en déduire les épaisseurs e_{Al} et e_{Pb} d'aluminium et de plomb que doit traverser un faisceau de rayons X pour que l'intensité incidente du faisceau soit réduite d'un facteur 100.

On donne $\mu_{\text{Al}}=14\text{cm}^{-1}$ et $\mu_{\text{Pb}}=1600\text{cm}^{-1}$.



La coupe :

On se propose de déterminer la quantité de vin contenue dans le verre ci-dessous en fonction de la hauteur h de liquide. On sait que la section du verre est parabolique et a pour équation $y=2x^2$ dans le repère ci-dessous :



ATELIER 2

Au verso de cette feuille, figurent les textes de 6 problèmes. Avant de vous lancer dans la résolution de ces problèmes, nous aimerions que vous répondiez pour chacun d'eux aux questions suivantes :

question 1 : quelles sont les grandeurs qui interviennent dans ce problème ?

question 2 : quelles sont les variables et les fonctions que vous pensez introduire dans la mise en équation du problème ?

question 3 : avez-vous déjà une idée qualitative de la solution et si oui, laquelle ?

question 4 : pensez-vous que la résolution va être purement algébrique ou qu'elle va faire intervenir des dérivées, des différentielles, des équations différentielles, des intégrales ? Sur quoi se fonde cette opinion si vous en avez une ?

question 5 : savez-vous comment vous allez vous y prendre pour résoudre le problème ? Si c'est le cas, pouvez-vous décrire très brièvement la démarche que vous vous proposez de suivre ?

Population : La population de la ville X était de 5000 habitants en 1960. Elle a augmenté régulièrement de 1964 à 1984 avec un accroissement annuel proportionnel à la population existante. Elle est actuellement de 15 000 habitants. Si elle continue à croître de la sorte, combien y aura-t-il d'habitants en l'an 2000 ?

Centre de gravité : Déterminer le centre de gravité d'une plaque métallique ayant la forme d'un demi-disque de rayon R.

Mise en page : Un texte doit occuper un rectangle de $S \text{ cm}^2$ sur une feuille de papier. Les marges inférieures et supérieures doivent être de $a \text{ cm}$, celles de droite et de gauche de $b \text{ cm}$. Quelles sont les dimensions du rectangle qui permettent la plus grande économie de papier ?

Température : La vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et l'air ambiant. Dans une pièce à 20°C , on considère un objet dont la température, de 90°C à l'instant 0, est de 60°C 20 minutes plus tard. Déterminer l'évolution de la température de l'objet de l'instant $t=0$ à l'instant $t=2\text{h}$.

Cuve à mazout : De combien baisse le niveau d'une cuve à mazout assimilable à une cylindre de rayon 1m et de hauteur 2m posé horizontalement sur le sol, lorsqu'on y prélève 20 litres ?

Naphtaline : Une boule de naphtaline s'évapore progressivement au cours du temps. Quelles hypothèses qualitatives et quantitatives faites-vous concernant ce phénomène ? Quelles expériences suggérez-vous pour les tester ?

II - ORGANISATION PREVUE POUR LE DEROULEMENT DES ATELIERS

Il était prévu d'organiser les étudiants en équipes au début de la séance, chaque équipe choisissant librement les problèmes qu'elle désirait traiter. On prévoyait une heure environ de recherche par équipes, cette recherche étant suivie d'une phase de synthèse où, problème par problème, on analyserait le travail des différentes équipes. Il était prévu que l'enseignant interviendrait peu dans la phase de recherche, si ce n'est en cas de blocage complet des équipes. Après un premier problème choisi librement, il pouvait conseiller à une équipe donnée un problème non encore choisi, si le cas se présentait. Il devait animer la phase de synthèse, en veillant à faire expliciter et analyser les difficultés rencontrées puis conclure conformément aux objectifs de la séance. Enfin, il devait distribuer à la fin de la séance la fiche correspondant à l'atelier II aux étudiants, en leur demandant de préparer le travail pour la séance suivante et en précisant bien le type de réflexion demandé.

Le premier atelier s'est à peu près déroulé comme prévu. Les trois groupes de travaux dirigés comportaient respectivement 19, 19 et 20 étudiants. Mais, dans tous les groupes de travaux dirigés, la phase de recherche a été plus longue que prévu. De ce fait, si la synthèse a bien eu lieu, la phase de conclusion et d'institutionnalisation a, elle, été quasiment inexistante. La fiche du second atelier a été distribuée comme prévu en fin de séance mais, comme nous savions à ce moment là qu'il serait

impossible d'organiser le second atelier, nous avons demandé aux étudiants de rédiger leur travail sur cette fiche, à titre de problème.

Il faut souligner que les étudiants ont été souvent gênés au début par le statut de cette activité. Elle rompait avec les activités mathématiques traditionnelles. Plusieurs ont demandé pourquoi on se mettait à faire de la physique en travaux dirigés de mathématiques et ont manifesté quelques réticences à s'y engager. Une mise au point de l'enseignant a été nécessaire. Ensuite, l'intérêt a été soutenu.

La fiche correspondant au second atelier a, elle, posé des difficultés d'une autre nature, les étudiants se déclarant incapables dans leur grande majorité de suivre la démarche proposée. Finalement très peu d'étudiants ont rendu ce problème et le plus souvent en avouant avoir répondu aux questions après la résolution des problèmes. Nous n'analyserons donc pas leurs productions ici.

III - L'ATELIER 1

Le tableau ci-après présente la liste des problèmes abordés par les différents groupes, les nombres renvoyant aux numéros des équipes.

Problèmes	Nageur	Sphère	Absorption	Coupe
Groupe I	1 - 5	3 - 4	2	1 - 3 - 4
Groupe II	2 - 4	1	3 - 4	1 - 2 - 4
Groupe III	3 - 4 - 5	1 - 2 - 4	1	2
Total	7	6	4	7

Tableau 1 : Répartition des problèmes abordés par équipes

Si l'on regarde plus précisément, pour chaque problème, à quel ordre de choix le nombre total donné correspond, on obtient :

	1er choix	2ème	3ème
Nageur	4	3	0
Sphère	2	4	0
Absorption	2	1	1
Coupe	6	1	0

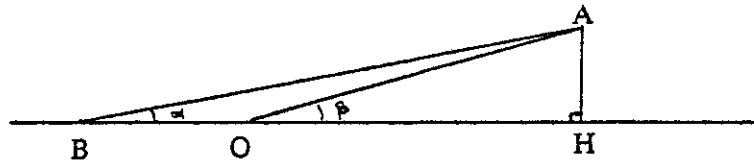
Tableau 2 : Ordres de choix des problèmes

Comme on le voit, ces deux tableaux opposent le problème de la coupe, qui bien que situé à la fin de la fiche attire visiblement les étudiants, et celui de l'absorption lumineuse, lui, au contraire, peu attractif. En fait, les étudiants reconnaissent d'emblée dans le problème de la coupe un problème d'intégration et ils sont justement en train de commencer en mathématiques l'enseignement de l'intégrale de Riemann. Quant au problème de l'absorption, il semble déjà les rebuter par la longueur de son texte.

Nous présenterons brièvement les résultats de l'observation problème par problème.

LE NAGEUR

7 groupes ont travaillé sur ce problème. Aucun n'a rencontré de difficulté pour démarrer la résolution. La citation suivante, extraite du bilan du groupe I, témoigne bien de la stratégie mise en oeuvre dans tous les groupes.



- "On s'est dit au début qu'il y avait plusieurs possibilités, par exemple aller tout droit ou aller d'abord dans l'eau et puis marcher sur la terre. Bon, la vitesse dans l'eau est plus petite que la vitesse sur la terre, donc on s'est dit : pourquoi il nagerait pas d'abord jusqu'en O et ensuite il ferait le reste à pied. Alors là on s'est dit : cet angle c'est l'angle α , on connaît AB, on connaît AH, donc on connaît α , il est de l'ordre de 50° à peu près. Bon, on sait ici qu'on a un angle droit donc 90° ; alors en fait si le nageur fait un trajet comme ça, il va former un angle β , et cet angle β est compris entre α et 90° , donc β il va de 90° à α , donc il diminue, donc en fait il faut trouver le temps, il faut trouver une relation entre le temps et α , et β , je veux dire, et si on trouve β , on aura le temps minimum. [...] En fait, si on trouve le temps, on cherche l'angle pour le temps minimum, après c'est de l'algèbre."

Enseignant : "Comment vous faites pour chercher l'angle correspondant à un temps minimum?"

- "Quand on a la relation t égale fonction de β , on sait que lorsque la dérivée s'annule, t est minimum, donc on prendra la dérivée de t par rapport à β ."

La variable choisie pour exprimer le temps du trajet est, suivant les équipes, un angle ou l'abscisse du point O tracé dans le schéma ci-dessus. On ne note donc pas de difficulté dans la mise en place du cadre fonctionnel nécessaire à la résolution. En revanche, le traitement qualifié "d'algébrique" par l'étudiant prend beaucoup de temps. Sur les quatre équipes qui démarrent par le problème du nageur, une seule aborde un des autres problèmes. De plus, l'automatisme "minimum = zéro de la dérivée" rend difficile dans tous les groupes l'interprétation des résultats obtenus dans la seconde situation proposée.

En effet, avec les notations introduites ci-dessus, on obtient pour la fonction $t(\beta)$:

$$t(\beta) = AH/V_n \sin \beta + BH/V_m - AH/V_m \tan \beta$$

V_m désignant la vitesse de marche et V_n la vitesse de nage.

Donc, pour la dérivée :

$$t'(\beta) = AH [1/V_m - \cos \beta / V_n] / \sin^2 \beta$$

cette dérivée s'annulant pour :

$$\cos \beta = V_n / V_m \text{ c'est à dire ici } \cos \beta = 1/2$$

Pour $AH = 500\text{m}$ et $HB = 200\text{m}$, l'angle α étant supérieur à 60° , ceci correspond à un point O extérieur au segment $[B,H]$.

Quelques uns, n'étant pas revenus à la situation physique, n'ont pas remarqué la difficulté ; les autres refusent la valeur obtenue par le calcul qui oblige le nageur à rebrousser chemin et ils proposent, sans être vraiment certains de leur réponse, le trajet AB. Aucune équipe ne parvient seule à résoudre la contradiction apparente. Même, lorsque collectivement on aura exprimé la fonction temps pour O entre H et B, puis pour O au delà de B, montré qu'il y a décroissance jusqu'en B puis croissance à partir de B, ils resteront perplexes devant ce minimum qui correspond à un point anguleux de la courbe.

LA SPHERE

Le problème de la sphère a été jugé facile par toutes les équipes qui l'ont abordé. La stratégie généralement utilisée a consisté à exprimer le volume exact de la tranche par différence du volume des deux sphères de rayons respectifs R et $R+e$, puis :

- soit développer l'expression obtenue et ne conserver que le premier terme,
- soit écrire directement un développement limité à l'ordre 1 sans préciser les termes d'ordre supérieur.

La citation suivante, extraite de l'enregistrement d'une équipe du groupe III, en témoigne :

"On va calculer le volume entre les deux sphères puis on fera un développement limité. Pas de problème, on sait faire."

Quelques élèves se demandent pourquoi après avoir calculé le volume exact, on fait un développement limité. Les explications fournies par les autres sont toujours données en référence au texte et aux procédures d'appel qu'il contient :

- "Comment t'as fait, toi ?"
- "J'ai fait la différence des volumes puis un développement limité."
- "Oh! Tu as fait comme en physique un développement limité ! Moi, j'avais fait le truc exact, pas d'approximation."
- "Oui, mais ils te disent : "e très petit devant R" et "valeur approchée", alors j'ai simplifié."
- "Oui, t'as raison c'est sans doute ça qu'il faut faire."

Une autre de l'équipe, en riant :

"Ah oui ! Si on a dans un texte un "e très petit devant R", ça veut dire : faites un développement limité." (extrait groupe III)

Il faut signaler que, dans une équipe, les étudiants ont procédé différemment, "intégrant - comme ils disent - la surface de la sphère entre R et $R+e$ " - c'est à dire calculant l'intégrale :

$$I = \int_R^{R+e} \pi r^2 dr \quad \text{qui est en fait basée sur l'approximation demandée.}$$

Après avoir obtenu l'expression exacte du volume, ils ont comme les autres supprimé les termes en e^2 et e^3 , estimés négligeables vues les indications de l'énoncé.

Lors de la phase collective, l'enseignant voudra faire remarquer qu'à la base du calcul de l'intégrale, il y avait justement l'utilisation de l'approximation obtenue à la fin. Il aura beaucoup de mal à se faire comprendre, les étudiants voyant dans l'intégrale écrite une simple formule sans rapport avec une quelconque procédure d'approximation.

L'ABSORPTION LUMINEUSE

Sur les quatre équipes ayant abordé ce problème, deux le traitent rapidement, écrivant :

$$dI = -\mu I dx$$

et intégrant ensuite en passant par l'écriture :

$$dI/I = -\mu dx$$

Les deux autres ont rencontré de très grosses difficultés. Les résumés de leur recherche que nous reproduisons ci-après en témoignent.

Groupe I :

Après s'être demandé quelle est l'unité d'intensité, les étudiants de l'équipe concernée repèrent très vite la phrase clef de l'énoncé et essaient de la traduire par une relation.

La première écriture proposée est :

$$I_{dx} = \mu I_x$$

Elle les satisfait. Puis se pose le problème de traduire la double proportionnalité. Ils sont embarrassés :

- "Il faudrait qu'il y ait dx."
- "Peut-être que μ c'est $1/dx$."

Je les quitte à ce moment là pour une dizaine de minutes. Quand je reviens, ils sont passés dans le registre d'interprétation "linéaire" et donnent une description qualitative du problème. Un résumé pour moi où ils en sont :

- "L'intensité absorbée par chaque tranche dx, c'est la même puisque le métal est homogène ; et puis on nous parle du coefficient d'absorption linéaire. Donc $I(x)$ en fonction de x c'est une droite décroissante qui part de I_0 et arrive à I_t ."

Ils ont d'ailleurs dessiné la droite et trouvé une interprétation satisfaisante à μ : c'est $I_t - I_0 / e$, c'est la pente de la droite, ça ne dépend pas de l'épaisseur traversée, juste du métal.

Mais un des étudiants du groupe n'est pas tout à fait convaincu. Ça le gêne qu'il y ait des dx dans le texte et qu'il n'y ait pas besoin d'intégrer pour trouver la solution. Cela lui semble trop simple :

- "Pour chaque partie dx traversée, ça diminue d'un petit dI, pourquoi il faudrait pas intégrer ? C'est bizarre."
- "Nous aussi on a dI, mais puisque toutes les tranches absorbent la même chose, c'est pareil."

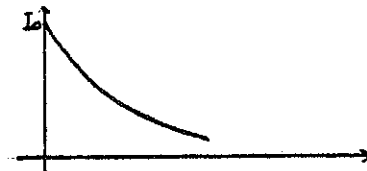
Le premier acquiesce. La situation semble stable.

Au bout d'un moment, je la déstabilise en leur demandant de relire la phrase du texte qui leur a paru particulièrement importante pour la mise en équation et j'attire leur attention sur la proportionnalité de l'absorption à l'intensité en x . Celui qui est à l'origine de l'interprétation linéaire récupère tout de suite l'information :

- "Mais alors, ça ne peut pas être une droite !"
- "Plus ça va, moins ça absorbe."

Le premier reprend :

- "Ça devrait être comme ça (et il trace la courbe ci-contre), c'est du log ou une exponentielle."



Les deux autres membres de l'équipe interviennent alors dans la discussion :

- "Il doit y avoir une équation différentielle."
- "Oui tu sais, comme quand ça frotte ; dI/I et puis ça fera du log."

Ceci ne suffit pas à les tirer d'affaire. L'inventeur de la droite essaie, sans se référer au texte, de procéder par analogie avec le cas évoqué du frottement. Il écrit :

$$\propto V \quad \propto dx/dt$$

$$I = \mu dI/dx$$

mais ensuite ne sait pas quoi faire de cette égalité.

Sa voisine écrit, elle :

$$dI = I_x dx$$

$$\text{Log } I = x + \text{cste}$$

$$I = I_0 e^x$$

mais n'est pas très satisfaite de sa production. Elle se demande si proportionnel "ça peut vouloir dire aussi inversement proportionnel" :

- "Ça pourrait être aussi I_x/dx ou dx/I_x ."

Je réponds à sa question sur la proportionnalité et elle reprend :

- "Alors c'est $I_x dx$ et il faut que je rajoute μ ."

Elle écrit : $dI = \mu I_x dx$ et semble satisfaite. Elle relit une fois de plus la phrase et conclut :

- "Ca, c'est sûr, ce coup-ci c'est juste."

Les autres proposent de voter mais elle dit qu'elle va leur expliquer. Elle le fait, les convainc et résoud en rajoutant un signe moins pour avoir une fonction décroissante, ce qui ne dérange personne.

Groupe II :

Ils lisent le texte en faisant des commentaires :

- "Tu comprends le schéma, toi ?"

- "dx, c'est quoi ?"

- "C'est une petite épaisseur."

- "Et x, c'est quoi ?"

- "C'est la position de dx."

Ils discutent ensuite pour savoirs'il s'agit là d'une coupe rabattue, puis l'un d'eux écrit :

$$I_{dx} = \mu dx I_x$$

et dit aux autres :

- "On nous dit que l'intensité absorbée par une tranche, c'est simple ; y a qu'à traduire."

- "Mais il faut tenir compte de la profondeur parce que plus x va augmenter, moins ça va absorber."

- "Oui mais alors dx va changer lui aussi, ça marche."

- "Ah non ! dx, il change pas lui !"

Un autre interrompt la discussion :

- "C'est proportionnel alors $I_t - I_0 = I_0 (e-x) dx$."

- "Et μ , tu l'écris où dans ton truc ?"

- "Je l'ai pas encore fait mais je vais le mettre."

Un autre, au bout d'un moment de silence :

- "Y a sûrement une histoire d'intégrale là-dessous."

- "De toute façon, dès que tu vois dx..."

- "Et puis tu as $I_t - I_0$, ça ressemble à quelque chose pris entre 0 et t."

Au bout d'un moment, celui qui avait proposé la première formule y revient et dit :

- "En dx, c'est proportionnel à I_x , mais au début c'est proportionnel à I_0 ; ça va faire :

$$I_t = I_0 - \mu dx I_0 x$$

Un autre écrit : $I_x = \mu I_0 dx$; un autre encore : $I_x = \mu I_x x + C$ puis cherche à déterminer la constante C :

- "Quand $x=0$, $I_x = I_0$, ça fait : $C=I_0$."

Il ajoute très vite :

- "Mais ça va pas, avec mon truc l'intensité grandit."

Ils commencent à se sentir un peu perdus. Un étudiant me demande :

- "Est-ce-que proportionnel, ça peut être multiplié par $1/\mu$?". Je réponds que non.

Celui qui avait proposé : $I_x = \mu I_x x dx + C$ intervient à nouveau :

- "J'ai trouvé quelque chose mais ça me paraît trop simple."

En fait les autres ne l'écoutent pas vraiment. Deux reviennent à l'équation :

$$I_{dx} = \mu I_x dx$$

et disent qu'il faudrait l'intégrer mais ils ne voient pas comment faire.

Devant leur désarroi, je leur suggère d'analyser tous ensemble ce qu'ils savent et de chercher à préciser les variables et les fonctions à introduire. Ils me répondent aussitôt que ça c'est simple : les variables, c'est x et dx . Un seul n'est pas d'accord car, pour lui, dx est constant. Les autres lui rétorquent qu'il est peut être constant mais qu'il vient après l'épaisseur x . Mais après réflexion, ils conviennent de garder une seule variable : x .

Je demande alors quelles fonctions vont intervenir. Là, la réponse est unanime : I_x et I_{dx} . Je leur demande alors de préciser de quelles fonctions il s'agit.

- " I_x c'est l'intensité au point x ."

- " I_{dx} c'est l'intensité au point, ah non ! ça va pas, on a l'intensité dans une position par exemple I_0 et on nous demande l'intensité en $x+dx$. Si par exemple $I(x)$ c'est $\mu I_0 \cdot x$ (il l'écrit)..."

Un autre le coupe :

- "Ca va pas ton truc, plus x augmente plus l'intensité augmente !"

Il répond :

- "Mais c'est normal que ça progresse c'est l'absorption."

Je reinterviens et les aide à exprimer l'intensité absorbée par une tranche par :

$$I(x) - I(x+dx).$$

Un me dit :

- "C'est un détour qu'on fait, parce qu'on nous demande juste I_t mais essayons."

Un écrit : $I(x+dx) = I_x - I_{dx} = \mu I_0 \cdot x - \mu I_x \cdot dx$.

Je lui demande s'il est sûr du $\mu I_0 \cdot x$. Il dit que non et remplace par I_x puis arrive à :

$$I(x+dx) = I_x (1 - \mu dx)$$

Les autres sont d'accord.

Un fait remarquer que cette expression ressemble à la définition d'une récurrence :

- "Y a qu'à partir de I_0 et avancer de dx à chaque fois."

- "Oui et puis on fera la somme de tous les morceaux. Ah ! C'est là qu'elle intervient l'intégrale."

Mais ensuite, ils vont de nouveau patauger car ils ne voient pas comment résoudre la récurrence ni quelle intégrale écrire. Je finis donc par intervenir encore une fois en demandant ce qu'ils veulent sommer.

- "Et bien, toutes les petites absorptions."

- "Alors, ça va s'écrire : $I(x+dx) - I(x)$ "

- "Oui entre 0 et e et ça fait $\int_0^e I(x) dx$ mais là qu'est-ce-qu'on fait puisque $I(x)$ on le connaît pas ?"

Je leur explique alors qu'ils ont raison. Quand ils intègrent, c'est une fonction connue. Ce n'est pas le cas ici, $I(x)$ n'est pas connue. En fait, ce qu'il y a derrière ce problème, c'est une équation différentielle, c'est à dire une relation entre une fonction inconnue et sa dérivée. Bien sûr la résolution d'une équation différentielle se ramène souvent à un calcul d'intégrale mais la situation est fondamentalement différente. Un m'interrompt alors :

- "Alors la fonction c'est $I(x)$ et il faut chercher à faire intervenir la dérivée ?"

J'acquiesce et ils reviennent courageusement à la relation : $I(x) - I(x+dx) = \mu I_x dx$.

Très vite un déclare qu'il a la dérivée. Il suffit de diviser par dx . Les autres ne sont pas d'accord : la dérivée n'est pas le quotient $I(x+dx) - I(x) / dx$ mais la limite de ce quotient quand dx tend vers 0. Celui qui a trouvé essaie de balayer l'objection :

- "Mais ton dx , il est tout petit, alors tu peux faire comme si."

Un autre rejoint son point de vue :

- "C'est comme en maths ; on fait par encadrement pour les surfaces et on peut faire aussi par les dx ."

Ce parallèle avec le travail fait en intégration suffit à convaincre les autres. Ils achèvent rapidement l'exercice puis me demandent de leur expliquer ce qu'est dans ce cas la méthode par encadrement.

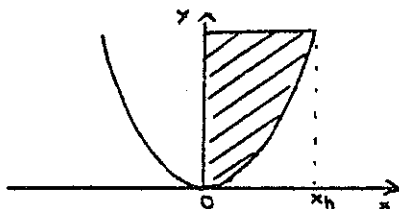
Il faut souligner également que, dans la phase collective du groupe III, c'est un des élèves faibles de l'équipe ayant résolu le problème aisément qui vient présenter la solution. Une partie des difficultés apparues dans les autres équipes ressort à cette occasion, en particulier la difficulté à expliciter le cadre fonctionnel et le téléguidage par analogie pour la résolution de l'équation différentielle

LA COUPE

Le problème de la coupe, on l'a vu, attire les étudiants qui démarrent l'enseignement de l'intégration en mathématiques à ce moment là. Il est clair qu'il rentre plus que les autres dans le contrat usuel : traiter en travaux dirigés des applications du cours magistral actuel.

Les observations montrent des comportements assez proches dans les groupes I et III, distincts de ceux observés dans le groupe II, pour lequel la séance d'atelier se déroule une semaine plus tard, c'est à dire après le début des travaux dirigés sur ce domaine.

Dans les groupes I et III, le lien avec l'intégrale est immédiat mais il se fait, dans trois équipes sur quatre, par l'intermédiaire de la représentation donnée dans le plan et non dans l'espace. Les trois équipes concernées commencent donc par calculer l'aire hachurée sur le schéma ci-dessous :



puis, sachant que la coupe est obtenue par rotation de cette section, il essaient de trouver un moyen mathématique de rendre compte de cette rotation. Les deux équipes du groupe I bloquent sur le problème et au bout d'un moment abandonnent cette stratégie. Spontanément dans l'une et par diffusion dans l'autre, les étudiants s'orientent alors vers la considération de coupes horizontales. L'aire d'une telle section horizontale est donnée par : πx^2 et il suffit, comme plusieurs disent : "de sommer ces surfaces". Il s'agit donc d'un processus très proche dans son esprit de la méthode des indivisibles de Cavalieri. Qui dit sommation dit intégrale et les étudiants passent sans hésitation de $A = \pi x^2$ à l'intégrale :

$$I = \int_0^{x_h} \pi x^2 dx$$

dx jouant ici simplement son rôle usuel de marqueur de la variable d'intégration.

Le résultat obtenu après intégration les laisse cependant perplexes : ils n'ont pas eu à tenir compte de la forme parabolique de la coupe, il y a sans doute une erreur quelque part.

L'intervention de l'enseignant est alors nécessaire pour débloquer la situation. Mais il suffit qu'il demande si c'est vraiment des surfaces qu'on empile pour calculer un volume pour provoquer le déclic :

- "Ah! bé non! Ça devrait être des volumes pour faire un volume au bout."

- "Ah oui! Et la hauteur ça va être dy . Ca y est j'ai y !"

Une fois le "y" récupéré et, grâce à lui, la parabole, ils achèvent très vite la résolution.

Les étudiants du groupe III, eux, font un parallèle avec le volume du cylindre calculé la veille en physique par l'intégrale :

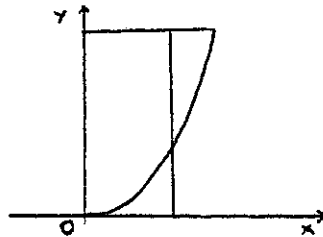
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R H d\theta$$

En faisant tourner donc un rectangle d'aire $R.H$ autour d'un axe, on obtient un volume égal à :

$\pi R^2 H$; on a donc un moyen mathématique d'exprimer la rotation : il suffit de multiplier l'aire considérée par πR .

Pour R , un des étudiants propose $\sqrt{h/2}$, c'est à dire le rayon au bord de la coupe. Ils ne sont pas très sûrs que ce soit la bonne valeur à prendre, mais comme aucune autre proposition n'est faite, ils continuent les calculs avec $R_{\max} = \sqrt{h/2}$, obtenant pour le volume $\pi h^2/3$.

Pour justifier la méthode à l'enseignant qui passe à leur table, ils font le dessin ci-après, expliquant :



- "Ca marche pour le cylindre ; ben alors, maintenant, ma surface, je l'assimile à un parallélépipède, comme ça :

Notons que le parallélépipède ainsi tracé correspond à une valeur de R strictement inférieure à $R_{\max}$. L'enseignant ne se prononce pas, et ceci suffit à renforcer les doutes que certains peuvent avoir :

- "On ne peut quand même pas être tout à fait sûrs, c'est logique, mais on ne l'a pas vraiment démontré." dit l'un d'eux.

L'enseignant propose alors de traiter de la même façon le cas de la sphère dont ils connaissent le volume, à titre de vérification.

Aussitôt l'un d'eux trace un cercle admettant l'axe vertical comme axe de symétrie, hachure le demi-cercle correspondant aux abscisses positives (exactement comme pour la parabole) et dit :

- "La surface hachurée c'est $\pi R^2/2$, on multiplie par πR , donc ça fait $\pi^2 R^3/2$."

Bien sûr, à l'évidence, ce n'est pas la valeur attendue. Ils le reconnaissent mais voudraient bien savoir pourquoi leur méthode ne marche pas. Les explications de l'enseignant arguant de la non constance du rayon qui distingue le cylindre de la sphère et de la coupe ne les convainquent pas. En fait ceci sera repris à la séance de travaux dirigés suivante : l'enseignant fera étudier les volumes engendrés par rotation de rectangles de même aire mais de dimensions différentes, puis énoncera le théorème de Guldin pour montrer aux étudiants que leur conviction de départ était tout de même raisonnable.

Sur le moment, il leur conseille de chercher une autre méthode et, spontanément, les étudiants proposent assez vite d'empiler les sections horizontales. Puis ils ont exactement le même itinéraire que les deux autres équipes déjà citées.

La dernière équipe du groupe I a cherché directement l'équation du paraboloidé, en passant en coordonnées cylindriques ($x=r\sin\theta$, $y=y$, $z=r\cos\theta$). Nous n'avons pas suivi leur travail de recherche mais ils ont fourni un texte écrit.

Partant de l'équation donnée, ils écrivent d'abord :

$$y = 2x^2 = 2r^2 \sin^2 \theta$$

$$y = 2z^2 = 2r^2 \cos^2 \theta$$

$$\text{donc } 2y = 2r^2$$

Cette ligne est ensuite barrée et remplacée par : $y = 2r^2$.

Ils évaluent l'aire S du cercle qui se trouve à l'altitude $y = h$, soit $\pi h/2$ puis écrivent :

-"On fait la somme de toutes ces surfaces, pour trouver le volume V ."

On a donc la même stratégie que dans les autres équipes : on somme des aires et on rajoute un marqueur de variable d'intégration, mais ici l'aire étant exprimée en fonction de h , l'intégrale écrite est la bonne :

$$V = \int \pi h/2 dh$$

Dans le groupe II, la situation est différente. La séance d'atelier a lieu une semaine plus tard. Entretemps, ils ont eu en mathématiques une séance de travaux dirigés sur les calculs d'intégrales par encadrement et appliqué ceci au calcul du volume de la sphère. Sur les trois équipes qui traitent le problème de la coupe dans cette équipe, deux procèdent par encadrements :

Le volume de la tranche $V(x+\Delta x) - V(x)$ est encadré par celui des deux cylindres engendrés par rotation des rectangles dessinés ci-contre.

D'où :

$$\pi x^2 [f(x+\Delta x) - f(x)] \leq V(x+\Delta x) - V(x) \leq \pi (x+\Delta x)^2 [f(x+\Delta x) - f(x)]$$

En divisant par Δx et en faisant tendre Δx vers 0, on obtient :

$$\pi x^2 f'(x) \leq V'(x) \leq \pi (x+\Delta x)^2 f'(x)$$

$$\text{donc : } V'(x) = \pi x^2 f'(x)$$

$$\text{et : } V(x) = \int \pi x^2 f'(x) dx$$

Ce qui donne ici :

$$V = 4\pi \int_0^{\sqrt{5}} x^3 dx$$

Lors du bilan final, un étudiant ira présenter ce calcul au tableau. Il le fera très clairement mais, après avoir obtenu l'encadrement de $V'(x)$, il ajoutera :

- "Donc on voit que l'encadrement, que les choses qu'on avait négligées étaient vraiment négligeables et que $V'(x)$ est bien égal à"

Preuve que la situation était sans doute moins limpide, même dans ce cas, qu'elle pouvait le paraître au premier abord.

La dernière équipe a coupé en tranches élémentaires d'épaisseur dy , évalué le volume élémentaire V_e de chaque tranche : $\pi x^2 dy$, puis intégré pour calculer le volume global.

Lors du bilan, elle présentera sa méthode en insistant sur le fait qu'elle est plus rapide que celle des encadrements, tout en conduisant au même résultat.

IV - CONCLUSION

Cette expérimentation, de type étude de cas, met clairement en évidence, nous semble-t-il, un certain nombre de faits concernant aussi bien les difficultés liées à l'utilisation de l'outil différentiel au début des études universitaires, que les stratégies développées par les étudiants, face à l'enseignement qui leur est dispensé, pour les surmonter. Nous voudrions pour conclure souligner quelques points qui nous semblent particulièrement importants.

1 - Les difficultés rencontrées par les étudiants sont apparues ici situées dans les registres propres au calcul différentiel et intégral plutôt que dans un registre fonctionnel général. Dans le problème du nageur, l'identification du cadre fonctionnel ne pose de problème à aucune des équipes. Ceci n'implique pas que ce cadre

fonctionnel soit bien maîtrisé lorsqu'il doit être utilisé dans des contextes moins familiers que la recherche d'un extrémum. Dans la résolution du problème de l'absorption, on voit apparaître des notations indiciaires que l'on pourrait qualifier de pré-fonctionnelles. En effet, elles permettent de prendre en compte une certaine idée de dépendance mais ne sont pas systématiquement soumises aux contraintes du registre fonctionnel. Elles peuvent de ce fait créer un blocage à un niveau ne permettant pas la résolution, les étudiants étant persuadés avoir rendu compte dans leur formulation des données et hypothèses de l'énoncé.

2 - Dans les difficultés observées ici, on retrouve bon nombre de difficultés mises en évidence dans l'analyse des réponses aux différents questionnaires envisagés dans l'ensemble de la recherche, par exemple :

- les difficultés liées au statut des éléments différentiels : globalement, la recherche a mis en évidence deux conceptions dominantes opposées : matérialité pure ou statut purement formel et l'obstacle qu'elles constituent l'une et l'autre à la mise en place d'une vision fonctionnelle souvent nécessaire à la résolution. On retrouve ces conceptions ici et l'on peut également mesurer certains de leurs effets pernicieux : la vision exclusive de dx comme petite quantité constante conduit une équipe à se perdre dans une itération discrète dans le problème de l'absorption, la vision exclusive de dx comme simple marqueur de la variable d'intégration conduit plusieurs équipes à commettre la même erreur dans la résolution du problème de la coupe. Soulignons que cette vision est alors soutenue par celle du volume comme empilement de surfaces, dans une perspective comparable à celle des indivisibles de Cavalieri.

- le poids du modèle linéaire et la non-distinction entre linéarité locale et globale ; ces difficultés apparaissent ici de façon manifeste dans le problème de l'absorption où l'on voit le modèle linéaire global appelé par divers indicateurs linguistiques comme : "proportionnel", "coefficient d'absorption linéaire".

3 - D'autres, non apparentes dans les réponses aux questionnaires vu l'éventail des questions posées, mais prévisibles si l'on se réfère à l'analyse effectuée, se manifestent ici : la présentation du problème de l'absorption, par exemple, en termes d'empilement de contributions élémentaires, tend à faire assimiler ce problème à un simple problème d'intégration alors que, les contributions élémentaires étant interdépendantes, ce n'est le cas que si l'on s'intéresse aux contributions relatives. De ce fait, l'objet "équation différentielle", qui est au coeur du problème, reste masqué et soit les étudiants, par analogie avec des situations déjà rencontrées, embrayent mécaniquement sur $dI/I = \dots$ et l'intégration par les logarithmes, soit ils restent bloqués.

4 - Au delà du repérage de ces difficultés, ces séances nous permettent de mieux identifier les stratégies des étudiants et nous aident à comprendre ce qui les détermine.

L'observation montre par exemple que, dès que la résolution ne leur paraît pas évidente, les étudiants se jettent prioritairement dans la recherche d'indices formels au niveau du texte du problème proposé. Ces mêmes indices sont également utilisés à titre de contrôle ou comme moyen d'emporter l'adhésion des autres dans les discussions, sans qu'un contrôle interne au problème soit nécessairement invoqué : on a déchiffré le rebus, on a découvert ce que l'enseignant attendait de nous, donc on a raison. En termes didactiques, la dévolution de la situation a-didactique n'est pas réalisée.

On voit ici fonctionner un certain nombre de telles associations : la mention "e très petit devant R" appelle un développement limité, la présence d'éléments différentiels ou de tranches élémentaires appelle un calcul d'intégrales, les termes "proportionnel", "linéaire", "homogène" appellent le modèle linéaire.

D'autres associations peuvent paraître de nature différente comme celle qui fonctionne dans le problème du nageur : un problème de minimum se résout en cherchant le zéro de la dérivée d'une fonction, ou les associations "somme-

intégrale" rencontrées dans le problème de l'absorption, ou encore l'analogie avec le problème du frottement subodorée à partir d'un tracé de courbe ressemblant à une exponentielle décroissante mais, bien que de nature plus conceptuelle, elles restent souvent sommaires et ne se situent pas dans le cadre d'une identification claire des différents registres d'utilisation de l'outil différentiel.

Si l'on se place, non plus seulement au niveau cognitif, mais sur le plan du fonctionnement du système d'enseignement, on ne peut manquer de voir dans les attitudes des étudiants, les stratégies qu'ils développent, l'effet d'une adaptation efficace des étudiants à ce système, basée sur une connaissance, implicite au moins, de certaines des lois qui le régissent. Ainsi la résolution de ces problèmes de mise en équation, choisis volontairement classiques, peut être efficacement basée sur la stratégie suivante :

- repérage dans l'énoncé des termes clefs et indices,
- choix, en fonction de ce repérage, d'un algorithme de résolution,
- exécution de l'algorithme,

cette stratégie fonctionnant parce que les énoncés eux-mêmes sont surdéterminés par tout un système d'indices qui assure un niveau de réussite satisfaisant à qui sait intégrer la coutume didactique. Les étudiants observés ici sont encore des débutants, l'automatisme de certains branchements scolaires n'est pas encore parfait, mais on peut faire l'hypothèse que confrontés aux mêmes problèmes, des étudiants de fin de DEUG obtiendraient des résultats très satisfaisants, et ceci sans que leurs conceptions des objets du calcul différentiel et intégral comme des raisons de recourir à ces objets aient foncièrement évolué.

Si nous voulons aller plus loin qu'une telle adaptation au scolaire et favoriser chez les étudiants la constitution d'une épistémologie plus satisfaisante, il est clair que nous devons modifier profondément les coutumes didactiques qui sont à l'origine de ces adaptations. C'est par exemple l'objet des travaux de l'équipe grenobloise impliquée dans cette recherche, dont l'ingénierie didactique se fonde sur l'instauration d'une pratique de débat scientifique et, pour l'objet qui nous concerne plus spécifiquement ici, la mise en place d'ateliers de modélisation pluridisciplinaires.

ANNEXE VII

PROCEDURES DIFFERENTIELLES ET INTEGRALES AU NIVEAU DU PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE - UNE MISE AU POINT

D.Alibert et M.Legrand

L'outil différentiel est utilisé au début des études universitaires, en mathématiques et en physique, essentiellement comme outil d'approximation locale :

- soit au niveau purement local (petites variations autour d'une situation donnée) : étude des fonctions de plusieurs variables et des variétés associées (courbes, surfaces), calcul d'incertitude,

- soit pour le passage du local au global : mise en équations de problèmes non linéaires aboutissant à des équations différentielles ou des intégrales.

C'est dans ce contexte que nous nous sommes situés dans cette brochure. Nous n'avons pas en particulier évoqué la notion de forme différentielle qui, introduite ultérieurement, amène à repenser la notion de différentielle et les liens entre calcul différentiel et intégration.

I - LE NIVEAU LOCAL

11 - LE MODELE LINEAIRE

Le problème général est le suivant : on se donne une fonction f ; connaissant sa valeur en un point M , que peut-on dire de sa valeur en un point M' , si M' est "suffisamment voisin" de M (de façon générale, f désignera ici une application de R^n dans R^p , M un point de R^n , MM' la distance euclidienne des points M et M' ou toute autre distance équivalente).

- La continuité de f en M permet une première approximation (ordre 0) puisqu'alors on a, au voisinage de M :

$$f(M') = f(M) + \varepsilon(M, M') \quad (1)$$

avec $\varepsilon(M, M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0.

En d'autres termes, en première approximation, on peut considérer la fonction f comme constante au voisinage de M .

- La différentiabilité de f en M permet d'améliorer cette approximation (ordre 1) : on peut alors approcher f au voisinage de

M par une fonction affine g avec la garantie que l'écart entre f(M') et g(M') sera non seulement petit avec MM', mais négligeable par rapport à MM'.

En effet si f est différentiable en M, on a au voisinage de M :

$$f(M') = g(M') + \varepsilon(M, M') \cdot MM' \quad (2)$$

avec g affine et $\varepsilon(M, M')$ tendant vers 0 quand MM' tend vers 0, autrement dit :

$$f(M') = f(M) + L(\overrightarrow{MM'}) + \varepsilon(M, M') \cdot MM' \quad (3)$$

avec L application linéaire et toujours les mêmes condition sur $\varepsilon(M, M')$.

L'application affine g est l'approximation au premier ordre de f en M, l'application linéaire L associée à g est la différentielle de f en M, notée en général df_M . Elle est déterminée de façon unique par la relation (3).

Par exemple :

- si f est une fonction de R dans R, elle est différentiable en x, si et seulement si elle est dérivable en ce point et on a alors, pour h suffisamment petit :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

La différentielle df_x n'est autre que l'application linéaire de R dans R qui au réel h associe le réel $f'(x) \cdot h$. Elle est définie sur R tout entier mais bien sûr, ne présente un intérêt pour l'approximation de f que pour h petit (sauf si f est déjà affine).

- si f est une fonction de R^n dans R, différentiable en M, on montre de même que la différentielle df_M s'exprime à partir des dérivées partielles de f en M (qui alors existent nécessairement) :

$$df_M(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \cdot h_i$$

autrement dit :

$$f(M') = f(M) + \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i}(M) (x_i(M') - x_i(M)) + \varepsilon(M, M') \cdot MM'$$

avec toujours la même condition sur $\varepsilon(M, M')$.

L'effet de l'application linéaire df_M sur le vecteur $\vec{MM'}$ s'interprète donc comme le produit scalaire de ce vecteur par un vecteur $\vec{V}$ dont les composantes sont les dérivées partielles de f au point considéré.

Ce vecteur $\vec{V}$, déterminé de manière unique par la relation (4) ci-après :

$$f(M') = f(M) + \vec{MM'} \cdot \vec{V} + \varepsilon(M, M') \cdot \vec{MM'} \quad (4)$$

avec toujours la même condition sur $\varepsilon(M, M')$, fournit la direction dans laquelle la fonction f s'accroît le plus au voisinage de M . C'est le gradient de f au point M noté : $\vec{\text{Grad}}_M f$.

- si f est plus généralement une application de R^n dans R^p , différentiable en M , sa différentielle en M sera une application linéaire de R^n dans R^p codée dans les bases canoniques de R^n et de R^p par sa matrice : la matrice jacobienne ou matrice des dérivées partielles.

- Géométriquement, le point de vue différentiel tel qu'il est présenté ci-dessus conduit en dimension 1 à une conception de la tangente qui n'est pas la conception classique : tangente en M comme position limite des sécantes passant par M , mais plutôt la suivante :

- la tangente en M à la courbe C associée à f est la droite qui approche le mieux localement C , plus précisément, c'est la seule droite qui approche C au premier ordre au voisinage de M , ou encore :

- la tangente en M à la courbe C est la droite avec laquelle tend à se confondre la courbe C lorsque l'on agrandit par zooms successifs un voisinage de M .

12 - LE CONTROLE DE L'APPROXIMATION

Les définitions données dans le paragraphe 11 le sont sous forme d'égalité asymptotiques. Elles ne permettent pas d'obtenir directement encadrements ou majorations.

Lorsque l'on écrit :

$$f(M') = f(M) + df_M(\vec{MM'}) + \varepsilon(M, M') \cdot \vec{MM'} \quad \text{avec} \quad \lim_{\vec{MM'} \rightarrow 0} \varepsilon(M, M') = 0$$

on ne fournit pas de réponse au problème suivant :

Comment choisir r pour que sur la boule $B(M,r)$ de centre M et de rayon r , $f(M')$ soit évalué par $f(M) + df_M(M\vec{M}')$ à telle ou telle précision donnée ?

La réponse à ce problème passe par un meilleur contrôle du "reste" :
 $\varepsilon(M,M').MM'$

Des hypothèses plus contraignantes sur f peuvent fournir ce contrôle. C'est par exemple le cas, en dimension 1, si la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[x-a, x+a]$ et si sa dérivée seconde est majorée en valeur absolue par A sur cet intervalle. En effet, la formule de Taylor permet alors d'écrire, dès que $x+h$ est dans $[x-a, x+a]$:

$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + h^2 f''(c)$ avec c compris entre x et $x+h$
 donc d'obtenir la majoration :

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x).h| \leq \frac{h^2}{2} A$$

Pour garantir une précision α , il suffit alors de choisir pour r :

$$r = \inf(a, \sqrt{\frac{2\alpha}{A}})$$

Pourtant, en ce qui concerne le calcul d'incertitude, les formules classiques, par exemple la formule $\Delta uv = u\Delta v + v\Delta u$ sont souvent perçues comme une simple traduction des énoncés du calcul différentiel à l'ordre 1. Qu'en est-il exactement ?

Prenons, pour simplifier l'écriture, une fonction f réelle de deux variables différentiable en (x_0, y_0) . Le problème est le suivant :

Dz étant un ordre de grandeur d'erreur donné, peut-on déterminer Δx et Δy pour que lorsque x varie dans l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ et y varie dans l'intervalle $[y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y]$, on puisse garantir que la valeur $z = f(x, y)$ restera dans l'intervalle $[z_0 - \Delta z, z_0 + \Delta z]$?

Et en sens inverse, étant donnés Δx et Δy , peut-on apprécier Δz ?

L'hypothèse de différentiabilité permet d'écrire :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0).(y - y_0) + M_0 M . \varepsilon(M_0, M) \quad (5)$$

avec :

$M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x, y)$ et $\varepsilon(M_0, M)$ tendant vers 0 quand M tend vers M_0 .

Posons : $\alpha_0 = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)$ et $\beta_0 = \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$

Les formules usuelles du calcul d'incertitude consistent à glisser de la relation (5) à :

$$\Delta z = |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y \quad (6)$$

avec intuitivement l'idée que, dans ce glissement, on a majoré l'écart possible entre $f(x,y)$ et $f(x_0,y_0)$ sur l'ensemble considéré et que l'on a, en fait, pour tout (x,y) dans $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x] \cdot [y_0-\Delta y, y_0+\Delta y]$:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y$$

(cf. les réponses au questionnaire).

En fait, ce n'est pas vrai, même pour une fonction aussi simple que le produit.

En effet, dans ce cas particulier, la formule (6) devient :

$$\Delta(xy) = |y_0| \Delta x + |x_0| \Delta y$$

Or, pour $(x_0,y_0) = (1,1)$ et $(x,y) = (1.01, 1.01)$ on a :

$$xy - x_0y_0 = 0.0201$$

alors que la formule (6) avec $\Delta x=0.01$ et $\Delta y=0.01$ donne pour $\Delta(xy)$ la valeur strictement inférieure 0.02.

Et, aussi petits soient-ils, des écarts positifs sur x et y conduisent à la même contradiction.

La formule (6) ne peut donc pas être interprétée comme fournissant une majoration des écarts $|f(x,y) - f(x_0,y_0)|$. Mais, elle est quand même précieuse car elle fournit une approximation de "bonne qualité" de la borne supérieure de ces écarts (par exemple dans le cas particulier traité : 0.02 au lieu de 0.0201, soit une estimation à 10^{-4} près, pour des incertitudes sur x_0 et y_0 de 10^{-2}).

En effet, de la formule (5) on déduit :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y + |\varepsilon(M_0,M)| \cdot M_0M$$

et par conséquent :

$$\Delta z \leq |\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot |\varepsilon(M_0,M)|$$

avec $\lim \varepsilon(M_0,M) = 0$ quand M_0M tend vers 0.

Ceci signifie qu'en prenant $|\alpha_0| \Delta x + |\beta_0| \Delta y$ comme estimation de Δz , on peut avoir certes une estimation trop faible, mais que l'erreur commise sera d'ordre supérieur à celui de $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En d'autres termes, l'erreur sur l'erreur est négligeable.

13 - INVERSION LOCALE ET THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES

Bien que cette question soit peu abordée dans les questionnaires, nous voudrions pour terminer cette partie évoquer ces théorèmes clefs du calcul différentiel que constituent le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites, car ils illustrent particulièrement bien le contrôle sur les objets apporté par l'approximation linéaire.

Soit f une fonction de R^n dans R^n , continûment différentiable au voisinage du point M_0 . Le théorème d'inversion locale garantit que si df_{M_0} est une application linéaire inversible (donc si le jacobien est non nul) alors f est elle-aussi inversible sur un voisinage convenable de M_0 .

De plus, l'application inverse est elle-aussi différentiable et sa différentielle n'est autre que l'inverse de la différentielle de f .

Le théorème des fonctions implicites, qui s'en déduit facilement, permet de répondre à la question suivante :

Soit f une application de R^n dans R^p ($p < n$) ; on suppose que $f(M) = k$. Que peut-on dire de la ligne de niveau k de f au voisinage de M ?

Considérons pour simplifier une fonction f de R^2 dans R (les questionnaires proposent un exemple correspondant à une fonction de R^3 dans R^2) et (x_0, y_0) un point satisfaisant $f(x_0, y_0) = k$.

Quelle est au voisinage de ce point, l'allure de la ligne de niveau k de f ? Peut-on l'exprimer comme une fonction de x , de y ? Peut-on connaître sa tangente ?

Si f est continûment différentiable dans un voisinage de (x_0, y_0) , le théorème des fonctions implicites affirme que, là encore, les propriétés "passent" de l'approximation affine à la fonction, plus précisément que si l'équation :

$$f(x_0, y_0) + \alpha_0(x - x_0) + \beta_0(y - y_0) = k \quad (9)$$

(linéarisée de l'équation $f(x, y) = k$) peut se résoudre en fonction de x ($\beta_0 \neq 0$), localement, la ligne de niveau pourra s'exprimer elle aussi comme une fonction φ de x et que l'équation (9) sera justement celle de la tangente à la ligne de niveau en (x_0, y_0) .

En d'autres termes, on aura, au voisinage de x_0 :

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \frac{\alpha_0}{\beta_0}(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0, x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x_0, x) = 0$$

La situation est analogue, en échangeant les rôles de x et y , si $\alpha_0 \neq 0$.

II- LE PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

Ce passage va se poser dans l'étude de phénomènes non linéaires et aboutira à l'écriture d'une équation différentielle ou directement d'une intégrale.

Dans certains cas, il permettra d'étendre la définition d'un concept et en deviendra par là-même un élément constitutif, le cas particulier connu étant exploité comme modèle d'approximation locale du cas général.

C'est ce qui se produit par exemple lors de l'extension du concept de travail d'une force du cas où la force est constante et le chemin rectiligne au cas d'une force non constante sur un chemin non rectiligne.

Deux points de vue sont souvent possibles :

III - LE POINT DE VUE DIFFERENTIEL

Il consiste à traduire les informations sur la situation, localement, par une égalité pouvant s'interpréter comme une approximation au premier ordre et à passer au global par "intégration" de la relation différentielle associée.

Par exemple, ayant à déterminer la relation liant deux grandeurs x et y , on cherchera s'il est possible de modéliser les informations données (pour des valeurs de x et y , dans un certain domaine et des accroissements Δx et Δy de ces grandeurs suffisamment petits), par une relation d'une des deux formes suivantes :

$$\Delta y = \alpha(x,y)\Delta x + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y).\Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (10)$$

ou

$$\Delta x = \beta(x,y)\Delta y + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y).\Delta y \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (11)$$

Remarque 1 : notons à ce propos qu'en mathématiques, il n'y a aucune difficulté à comparer les ordres de grandeurs de Δx , Δy et ε , les fonctions n'ayant pas de dimension. En physique, en revanche, il peut y avoir là un obstacle : si y désigne une masse et x un temps, on ne pourra effectuer la comparaison qu'en considérant $1. \Delta x$, 1 désignant par exemple ici $1g/s$.

Dans le premier cas, la lecture de (10) comme écriture d'approximation au premier ordre conduira à chercher comme solution globale une fonction Ψ de la variable x solution de l'équation différentielle :

$$y' = \alpha(x, y)$$

c'est à dire satisfaisant sur un intervalle approprié :

$$\Psi'(x) = \alpha(x, \Psi(x))$$

Dans le second cas, on cherchera de manière analogue comme solution globale une fonction Γ de la variable y , solution de l'équation différentielle :

$$x' = \beta(x, y)$$

c'est à dire, satisfaisant sur une intervalle approprié :

$$\Gamma'(y) = \beta(\Gamma(y), y)$$

Remarque 2 : C'est cette lecture différentielle qui est implicitement suggérée par certaines formulations "physiciennes", par exemple : "L'absorption d'intensité par une tranche élémentaire est proportionnelle à l'épaisseur de la tranche et à l'intensité traversant la tranche"

L'indicateur "élémentaire" est là pour signifier qu'il ne faut pas interpréter l'égalité annoncée au pied de la lettre mais comme une égalité au premier ordre près ou une égalité différentielle.

Remarque 3 : Lorsque l'expression $\alpha(x, y)$ ne dépend pas de y (respectivement $\beta(x, y)$ ne dépend pas de x), la mise en équation conduit directement à un calcul de primitive, puisque l'on arrive à :

$$\Psi'(x) = \alpha(x) \text{ (respectivement } \Gamma'(y) = \beta(y))$$

Nous présenterons pour terminer ce paragraphe une méthode souvent employée pour obtenir la relation cherchée entre Δx , Δy , x et y , basée sur la continuité d'une fonction auxiliaire (cf. aussi les questionnaires).

On cherche à déterminer y comme fonction de x . Notons f cette fonction inconnue.

Si l'on sait que, sur un certain domaine :

$$g_m(x, \Delta x) \leq f(x + \Delta x) - f(x) \leq g_M(x, \Delta x) \cdot \Delta x \quad (12)$$

g étant une fonction continue sur le domaine, g_m et g_M désignant respectivement l'inf et le sup de cette fonction sur le segment $[x, x + \Delta x]$, alors on peut :

- soit, en utilisant la continuité de g , écrire directement :

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [g(x) + \varepsilon(x, \Delta x)] \cdot \Delta x \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0$$

ce qui prouve que f est dérivable en x , de dérivée $g(x)$,

- soit, en divisant (12) par Δx arriver à :

$$g_m(x, \Delta x) \leq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq g_M(x, \Delta x)$$

et faire tendre Δx vers 0. g étant continue, g_m et g_M tendent alors simultanément vers $g(x)$ et donc f est dérivable en x , de dérivée $g(x)$.

L'intérêt de ce point de vue différentiel est de permettre d'effectuer le contrôle de la mise en équation au niveau strictement local.

Ce n'est pas le cas pour le point de vue intégral que nous allons présenter maintenant.

II2- LE POINT DE VUE INTEGRAL

On se place dans la situation suivante :

On cherche à évaluer une grandeur E (masse, aire, volume, force...). E dépend des valeurs prises par une fonction f de la variable x , x variant dans une partie Ω mesurable de la droite, du plan ou de l'espace..., de mesure $m(\Omega)$.

On sait calculer E lorsque la fonction f est constante sur Ω : si f est égale à k sur Ω , $E(\Omega) = km(\Omega)$, on a affaire à un problème linéaire.

exemple : masse d'un corps de masse volumique homogène, volume d'un solide de section horizontale constante....

Mais le problème à traiter ne rentre pas dans ce registre ou l'objet du problème est justement de généraliser la définition de E à une classe plus large de fonctions.

On sait alors que la réalisation des trois conditions suivantes suffit à légitimer la procédure intégrale c'est à dire le passage du local au global par intégration :

condition 1 - Pour des partitions finies (Ω_i) de Ω , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_n$, de calibre arbitrairement petit, le résultat global est la somme des contributions de chaque partie :

$$E(\Omega) = \sum_{i=1}^n E(\Omega_i)$$

(principe du découpage en tranches)

Condition 2 - Sur chaque partie Ω_i on a l'encadrement suivant, en notant $m(\Omega_i)$ la mesure de Ω_i

$$m_i.m(\Omega_i) \leq E(\Omega_i) \leq M_i.m(\Omega_i) \quad (13)$$

avec $m_i = \inf_{\Omega_i} f$ et $M_i = \sup_{\Omega_i} f$

Condition 3 - f est intégrable Riemann sur Ω .

En effet, si la fonction f est intégrable Riemann, les deux quantités :

$$\sum_{i=1}^n m_i.m(\Omega_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n M_i.m(\Omega_i)$$

convergent, lorsque l'on raffine la subdivision de Ω et que le sup des diamètres des Ω_i (diamètre d'une sphère minimale contenant Ω_i) tend vers 0, vers le même nombre qui n'est autre que l'intégrale de la fonction f sur Ω .

De l'encadrement :

$$\sum_{i=1}^n m_i.m(\Omega_i) \leq E(\Omega) \leq \sum_{i=1}^n M_i.m(\Omega_i)$$

obtenu en utilisant les conditions 1 et 2, on déduit alors que nécessairement:

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Remarque 1 : on a raisonné ici en supposant l'existence de $E(\Omega)$. Si le problème posé est celui de l'extension de la définition de E , le processus intégrale conduit à élargir la définition de E à la classe des fonctions f intégrables Riemann sur Ω en posant :

$$E(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Notons que les fonctions utilisées en physique élémentaire sont toutes intégrables Riemann sur les ensembles de mesure finie Ω considérés parce que par exemple bornées et monotones, ou bornées et continues par morceaux.

Remarque 2 : Très souvent la fonction f n'apparaît pas de façon manifeste dès le début de la mise en équation (cf.exemple ci-après). Elle ne s'impose réellement que lorsque l'on cherche à réaliser l'encadrement de $E(\Omega)$ qui correspond à la condition 2.

Remarque 3 : Souvent aussi, même si une fonction s'impose, l'encadrement obtenu ne sera pas exactement de la forme (13) mais plutôt de la forme :

$$m(\Omega_i) \left[\inf_{\Omega_i} f - \varepsilon'_i \right] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i) \left[\sup_{\Omega_i} f + \varepsilon_i \right]$$

avec ε_i et ε'_i petits avec $d(\Omega_i)$, le diamètre de Ω_i .

On montre alors que pour que la procédure intégrale soit encore justifiée, il suffit que les ε_i et ε'_i tendent vers 0 avec le $\sup d(\Omega_i)$ uniformément, ou encore que l'on puisse écrire :

$$m(\Omega_i) \left[\inf_{\Omega_i} f - \varepsilon \right] \leq E(\Omega_i) \leq m(\Omega_i) \left[\sup_{\Omega_i} f + \varepsilon \right]$$

avec ε tendant vers 0 quand le $\sup d(\Omega_i)$ tend vers 0.

Le point de vue intégral qui vient d'être présenté nécessite à l'inverse du point de vue différentiel, un contrôle global de la situation, en principe plus coûteux.

Pourtant, dans bon nombre de problèmes, le cadre de la mesure est le cadre naturel et le passage au point de vue différentiel oblige à un changement de point de vue : il s'agit en fait de passer d'une conception de l'intégrale au terme de mesure à une conception de l'intégrale en terme de primitive.

Ce changement s'observe très fréquemment dans les manuels dès qu'il y a effort de légitimation. L'exemple du calcul du volume de la sphère par encadrement, présenté dans les questionnaires, en est un exemple typique.

Dans ce paragraphe, nous avons cherché à formuler des conditions de contrôle de la procédure intégrale avec l'idée qu'une meilleure opérationnalisation de ce contrôle permettrait dans certaines mises en équation de concilier un coût de légitimation raisonnable avec le respect du cadre naturel de la mesure.

Reprenons par exemple le calcul du volume de la sphère :

La justification de type différentiel se base sur l'encadrement suivant associé au découpage en tranches (cf. questionnaires) :

$$\text{Min } [S(z)] \cdot \Delta z \leq \Delta V \leq \text{Max } [S(z)] \cdot \Delta z$$

Or cet encadrement peut directement s'interpréter d'un point de vue intégral :

Si Ω est le segment $[-R, R]$ et si f est la fonction définie sur Ω qui à z , associe l'aire de la section d'altitude z : $S(z)$, l'encadrement fourni est du type requis par la condition 2.

f étant intégrable puisque continue, on en déduit alors :

$$V = \int_{-R}^R S(z) dz$$

Et la démarche se généralise immédiatement à toute surface de révolution bornée pour laquelle la fonction aire associée est intégrable Riemann.

II3 - DEUX EXEMPLES

Pour terminer cette annexe, nous traiterons deux exemples, en adoptant dans l'un le point de vue différentiel et dans l'autre le point de vue intégral.

A - la longueur d'un arc de courbe :

Soit C une courbe associée à une fonction f à valeurs réelles, définie et continûment différentiable sur un segment [a,b].

La longueur d'une courbe étant définie comme la borne supérieure des longueurs des lignes brisées dont les sommets sont sur la courbe ou, ce qui est équivalent, comme la limite des longueurs des lignes brisées obtenues par subdivisions successives de [a,b], la question est de montrer qu'avec les hypothèses faites, C admet une longueur finie et d'en trouver une expression en fonction de f.

- En prenant comme espace de mesure $\Omega = [a,b]$, la définition donnée de la longueur vérifie bien la condition d'additivité.

- Si on découpe [a, b] en n intervalles : $I_1, \dots, I_n$, il correspond à ce découpage une ligne brisée construite sur la courbe. La longueur d'un segment de cette ligne brisée déterminé par les points M d'abscisse x et M' d'abscisse x' est égale à :

$$MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (f(x)-f(x'))^2}$$

Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel c entre x et x' tel que :

$$f(x') - f(x) = (x'-x) f'(c)$$

Il s'ensuit que MM' peut s'écrire :

$$MM' = |x-x'| \cdot \sqrt{1+f'(c)^2}$$

et donc que l'on a, en désignant par $L(I_i)$ la longueur du morceau de ligne brisée correspondant à l'intervalle I_i , pour chaque i :

$$\inf \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot m(l_i) \leq L(l_i) \leq \sup \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot m(l_i)$$

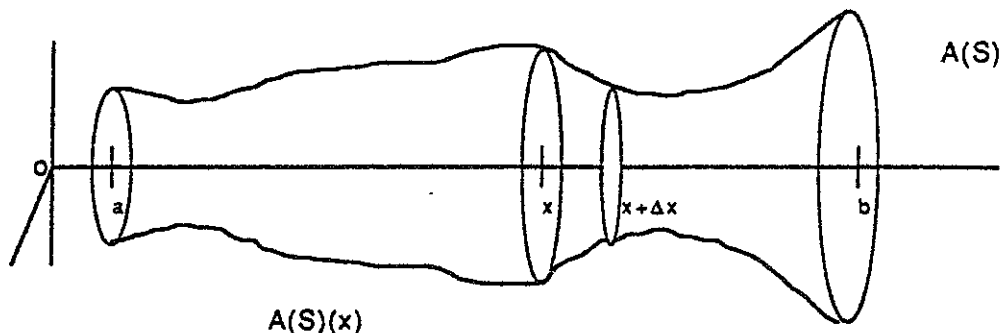
On a donc ici un encadrement du type requis par la condition 2 avec comme fonction sur Ω : $g = \sqrt{1+f'^2}$. f' étant continue sur $[a, b]$, g est intégrable sur $[a, b]$ et l'on est assuré que lorsque le pas de la subdivision de $[a, b]$ tend vers 0, la longueur des lignes brisées construites sur la courbe tend vers :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

C a donc une longueur finie dont l'expression en fonction de f est fournie par l'intégrale ci-dessus.

B - L'aire d'une surface de révolution

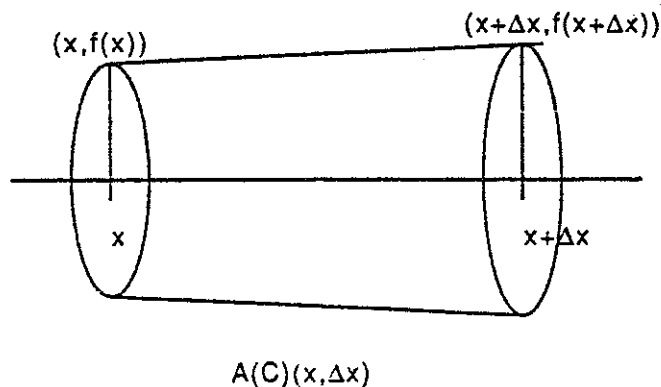
Soit une courbe Γ d'équation $y=f(x)$, f étant définie et continuellement dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et S la surface de révolution d'axe Ox et de génératrice Γ . On note $A(S)$ l'aire latérale de S et $A(S)(x)$ l'aire latérale de la portion de surface définie sur $[a, x]$:



L'aire latérale $A(C)(x, \Delta x)$ d'un tronc de cône dont les bases sont définies par $(x, f(x))$ et $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ est donnée par la formule :

$$A(C)(x, \Delta x) = \pi \cdot [f(x) + f(x+\Delta x)] \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta f^2}$$

en notant $\Delta f : f(x+\Delta x) - f(x)$.



- f étant continue :

$$f(x) + f(x+\Delta x) = 2f(x) + \varepsilon(x, \Delta x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

- f étant dérivable et Δx supposé positif :

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta f^2} = \Delta x \cdot [\sqrt{1 + f'(x)^2} + \varepsilon'(x, \Delta x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

D'où :

$$A(C)(x, \Delta x) = 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot \Delta x + \varepsilon(x, \Delta x) \cdot \Delta x \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \quad (15)$$

Si on définit $A(S)(x)$ comme la fonction, si elle existe, dont la variation est approchée au premier ordre par l'aire du tronc de cône associé, de (15) on déduit immédiatement, f' étant continue sur $[a, b]$ que la fonction aire existe, est dérivable et de dérivée :

$$A'(S)(x) = 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

donc que :

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Ce qui est bien la formule classique.

Bien sûr, là encore on aurait pu procéder par encadrement et passer par la procédure intégrale, soit en utilisant des arguments de convexité, soit en admettant que $A(S)$ est comprise entre l'aire du cylindre de rayon minimum et de génératrice $L(\Gamma)$ et l'aire du cylindre de rayon maximum et de même génératrice.

ANNEXE VIII

PUBLICATIONS ASSOCIEES A LA RECHERCHE

- [1] GRENIER D., LEGRAND M., RICHARD F. : *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A 1ère année*, Cahier de Didactique des Mathématiques N°22, Ed. IREM Paris 7, 1986.
- [2] ALIBERT D., GRENIER D., LEGRAND M., RICHARD F. : *Introduction du débat scientifique dans un cours de 1ère année de DEUG A à l'Université de Grenoble*, Rapport ATP "Transitions dans le Système Educatif", Ed. IMAG, Grenoble, 1986,
- [3] ARTIGUE M., VIENNOT L. : *La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur*, Actes de la IVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Orléans, 1986, p. 271-294, Ed. IREM Paris 7.
- [4] ARTIGUE M. : *The notion of differential for undergraduate students in sciences*, Proceedings of the Xth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Londres, 1986, p. 229-234.
- [5] ARTIGUE M. : *Quelques aspects de la transposition didactique de la notion de différentielle*, Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Marseille, 1986, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- [6] ALIBERT D., ARTIGUE M., COURDILLE J.M., GRENIER D., HALLEZ M., LEGRAND M., MENIGAUX J., RICHARD F., VIENNOT L. : *Le thème "Différentielles" : un exemple de coopération maths-physique dans la recherche*, Actes du Colloque du GRECO Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques, Sèvres, 1987, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 5-35.
- [7] ARTIGUE M., VIENNOT L. : *Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials*, Proceedings of the Second International Seminar : Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathematics, Cornell, 1987, Ed. Cornell University, Ithaca, USA.
- [8] ALIBERT D. : *Alteration of didactic contract in codidactic situations*, Proceedings of the XIth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Montreal, 1987, Ed. Bergeron, Herscovics, Kieran, p. 379-385.
- [9] ALIBERT D., ARTIGUE M., MENIGAUX J., VIENNOT L. : *Questionnaires de travail sur les différentielles*, Ed. IREM Paris 7 et LDPEs, 1988.
- [10] ARTIGUE M. : *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes*, Actes du Séminaire de Didactique de Strasbourg, Année 1987-88 (à paraître).
- [11] ARTIGUE M., MENIGAUX J., VIENNOT L. : *Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials* (soumis à l'European Journal of Physics).

TABLE DES MATIERES

Introduction	p.1
Le thème "différentielles" : un exemple de coopération maths-physique dans la recherche	p. 2
Annexe I : Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente	p. 31
Annexe II : Programmes et instructions de mathématiques	p. 51
Annexe III : Les ouvrages de mathématiques pour l'enseignement (XIXème-XXème)	p.56
Annexe IV : La notion de différentielle dans la revue l'Enseignement Mathématique	p. 72
Annexe V : La différentielle dans les manuels et polycopiés de physique	p. 83
Annexe VI : Atelier de mise en équation de problèmes	p. 95
Annexe VII : Différentielles - Procédures différentielles et intégrales au niveau du premier cycle universitaire : une mise au point	p. 109
Annexe VIII : Publications associées à la recherche	p. 123

TITRE :

Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire.

AUTEUR (S) :

Groupe Maths Physique-Enseignement Supérieur du GR Didactique du C.N.R.S

RESUME :

Cette brochure rend compte d'une recherche didactique pluridisciplinaire sur la notion de différentielle. La première partie constitue une présentation d'ensemble de la recherche et des résultats obtenus. Elle est complétée par huit annexes : les six premières présentent de façon plus détaillée certains points élaborés dans la recherche, la septième constitue une mise au point sur la notion de différentielle et ses contextes d'utilisation au niveau du premier cycle universitaire, la huitième fournit la liste des publications associées à la recherche.

MOTS CLES :

didactique-mathématiques-physique-enseignement supérieur-différentielles

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1989
ISBN : 2-86612-059-0