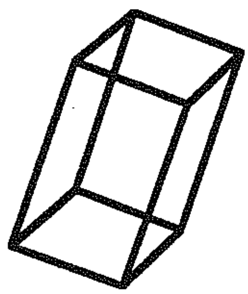
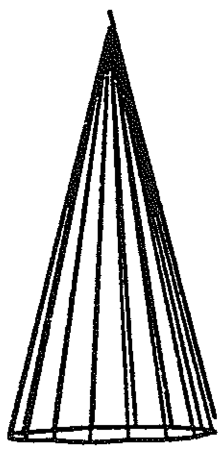
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

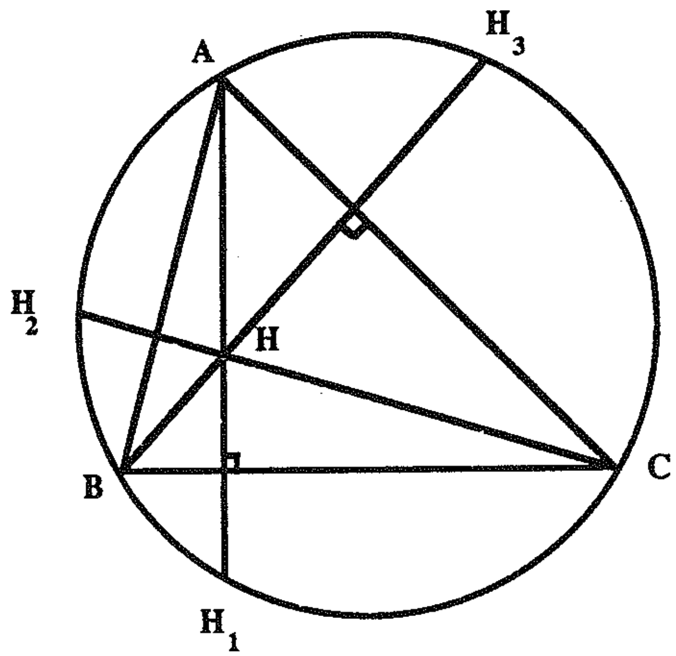
75

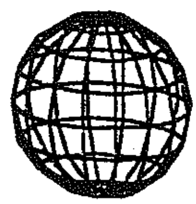
DECEMBRE 1988

LA GEOMETRIE AU LYCEE









Auteurs : *J.L. FORGUES , C JEULIN , R. PROTEAU , D. SPERANDIO .*

Objectif : Présenter des exercices simples de géométrie .

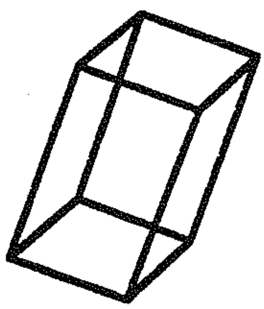
Sujet : Les principaux thèmes de la géométrie par des exercices .

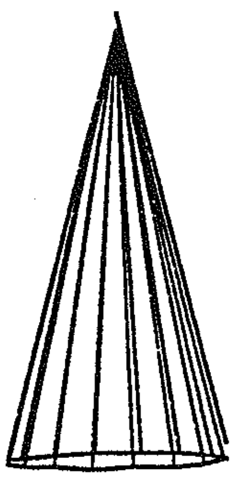
Niveau : Premières et terminales scientifiques C D E .

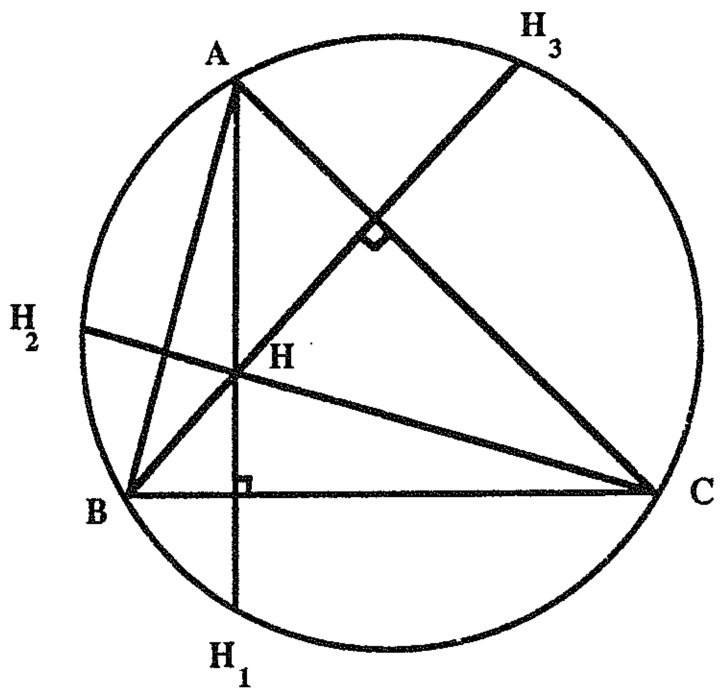
Public : Enseignants de Mathématiques .

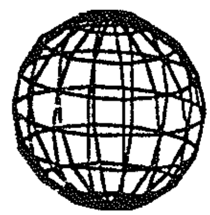
UNIVERSITE-PARIS VII

LA GEOMETRIE AU LYCEE









Auteurs : *J.L. FORGUES , C JEULIN , R. PROTEAU , D. SPERANDIO .*

Objectif : Présenter des exercices simples de géométrie .

Sujet : Les principaux thèmes de la géométrie par des exercices .

Niveau : Premières et terminales scientifiques C D E .

Public : Enseignants de Mathématiques .

AVERTISSEMENT

Ce fascicule, consacré à la Géométrie dans le second cycle, n'est pas du tout un cours, même si certains passages contiennent des démonstrations de propriétés.

Il n'est pas non plus un recueil d'exercices traitant de façon exhaustive toutes les parties du programme d'une classe déterminée (Voir sommaire). Nous n'avons ,par exemple,pas ou très peu d'exercices de géométrie analytique et peu d'exercices sur les nombres complexes...

Mis en chantier dès la parution des nouveaux programmes de Terminales,ce fascicule nous semblait pouvoir ,dans une modeste mesure,remédier à l'absence d'ouvrages à ce moment-là. Sa parution ayant beaucoup tardé,l'esprit et la lettre des programmes se sont maintenant bien répandus et des nouveaux ouvrages ont paru (ou paraissent). Les sujets de Baccalauréat depuis 3 ans ont confirmé que notre façon de comprendre les instructions officielles semblait être correcte...

Nous avons utilisé assez largement des exercices,des idées,des commentaires qui ont fait l'objet de travaux et d'échanges entre collègues au cours des séances I.R.E.M consacrées à la géométrie en 86-87 et 87-88. Nous proposons beaucoup d'exercices,souvent très faciles (l'énoncé de ces exercices est en italique). Nous ne donnons que rarement leur correction complète - quoiqu'un gros effort soit à demander aux élèves dans le domaine de la rédaction - mais seulement des indications.

Nous tenons enfin à remercier Madame Martine LAMY qui a assuré la dactylographie de ce fascicule.

Les auteurs.

SOMMAIRE

CHAPITRE 0
METHODES - GENERALITES

I. INTRODUCTION

Ce modeste fascicule a seulement pour ambition d'apporter une aide éventuelle aux collègues des classes de 1e S E et terminales (C,E,D) que le nouveau programme de géométrie inquiète et qui se sentent un peu désarmés devant le peu de connaissances solides des élèves.

Avant de développer dans ce chapitre un certain nombre de notions simples sur la résolution des exercices de géométrie, il nous semble utile d'insister sur quelques obligations.

* Reprise patiente et très élémentaire des bases de la géométrie (par exemple, utilisation des configurations, chap. 1), sous forme de bilans rapides accompagnés d'exercices très simples. Il importe de redonner confiance aux élèves et de leur montrer qu'ils peuvent réussir des exercices.

* Recherche, pour les notions nouvelles ou qui représentent un prolongement des connaissances des classes précédentes, d'exercices <u>très gradués</u>, en commençant par des <u>questions faciles</u> utilisant les éventuels acquis des classes antérieures. Conformément aux instructions, il ne s'agit pas de développer un cours bien élaboré mais de faire fonctionner, le plus tôt possible, tous les outils qui permettent de faire de la géométrie.

* Insistance constante sur <u>l'aspect concret de la géométrie.</u> Il n'est pas possible d'envisager un problème de géométrie sans réaliser une figure (soignée, avec utilisation d'instruments).

* Utilisation, sans hiérarchie, de tous les outils : vecteurs, géométrie analytique, calculs algébriques, transformations, propriétés de géométrie pure attachées à des configurations, nombres complexes,

Loin d'imposer une méthode, il serait bon de laisser les élèves choisir, parmi tous ces outils, celui ou ceux qui leur paraissent le mieux adaptés.

Dans ce premier chapitre (chapitre 0) nous préciserons quelques unes de nos idées visant à aider les élèves et nous donnerons des exemples simples (ou très simples) de différents types de questions ou de raisonnements particuliers à la géométrie.

II. LA RECHERCHE D'INFORMATIONS ELEMENTAIRES A PARTIR DES DONNEES

De nombreux exercices de géométrie sont résolubles par nos élèves à partir de connaissances élémentaires, du niveau du 1er cycle ou de la classe de seconde. Il convient d'entraîner les élèves à chercher, depuis les hypothèses, des propriétés ne figurant pas directement dans les données et non demandées dans le texte.

L'élève aura souvent la surprise de s'apercevoir que les informations obtenues résolvent la question effectivement posée dans l'exercice.

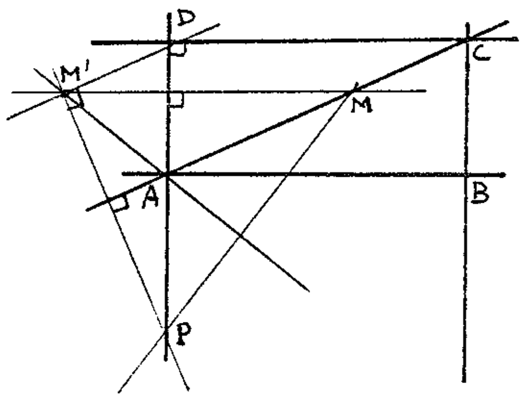
Exemple 1

Soit un rectangle ABCD. *Un point* M *variable décrit la droite* (AC). *Soit* M' *tel que* $\overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{CM}$.

La perpendiculaire menée par M' *à* (DM') *coupe* (AD) *en* P. *Montrer que* (AM') *est perpendiculaire à* (PM).

Indications

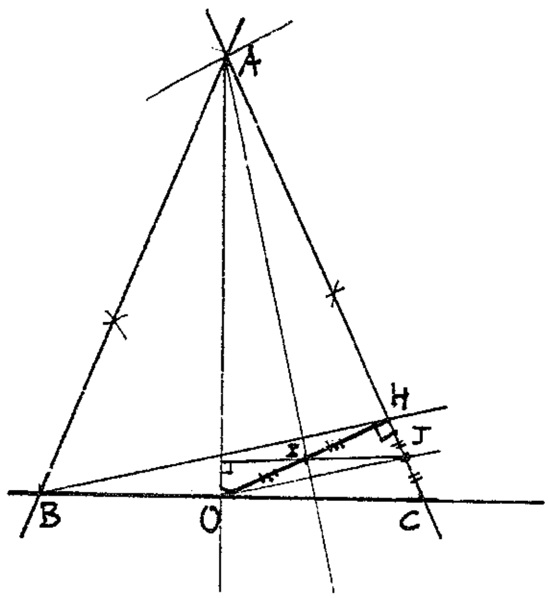
De l'étude de la figure on obtient : (DCMM') parallélogramme, (MM') // (DC) (MM') $\perp$ (AD), (M'P) $\perp$ (AC).
Il suffit alors de remarquer que A est orthocentre de PMM'



Exemple 2

ABC *étant un triangle isocèle* (AB = AC), O *le milieu de* [BC], H *la projection orthogonale de* O *sur* (AC) *et* I *le milieu de* [OH], *montrer que* (AI) *est perpendiculaire à* (BH).

En pensant à utiliser J milieu de [HC] on trouve une droite parallèle à (BH) : (OJ).
(IJ) est alors parallèle à (BC) et perpendiculaire à (OA), I est l'orthocentre de (AOJ).
D'où (AI) $\perp$ (OJ) et (AI) $\perp$ (BH).



Remarque

Les élèves, peu entraînés, hésitent à compléter une figure et à utiliser des éléments non définis par le texte. (ici, l'utilisation du point J). Il ne faut pas hésiter, même pour les classes de 1ère et Terminales, à expliciter des conseils qui ne sont assimilés qu'après un long apprentissage. Par exemple

* voir, dans une figure compliquée, un extrait qui se ramène à une configuration simple (ici, un segment joignant les milieux de 2 côtés d'un triangle, ou une homothétie).

* compléter une figure par une construction judicieuse (ici, l'emploi du point J).

Dans cet ordre d'idées, il nous semble qu'un élève qui commence un exercice doit s'astreindre à tirer le maximum des propriétés données par hypothèse, et ceci dès le début, avant toute recherche précise concernant les questions effectivement posées.

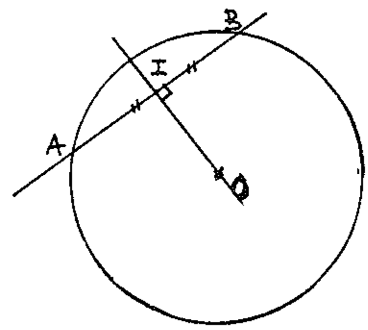
Interprétation des données

1) En liaison avec la connaissance et l'exploitation des configurations élémentaires, il est très rentable d'entraîner les élèves à traduire par de nouvelles propriétés les conditions données dans un exercice. Citons un certain nombre de ces "traductions" élémentaires, qui devraient acquérir un caractère quasi réflexe.

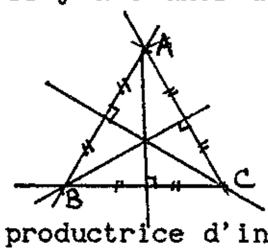
* Si ABC est un triangle isocèle (AB = AC), la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie.

* Si ABC est rectangle en A, A appartient au cercle de diamètre [BC]. (et réciproquement).

* Si [AB] est une corde de milieu I dans un cercle de centre O, (OI) est médiatrice de [AB].
Si AB reste constant dans le cercle fixe, OI reste constant.



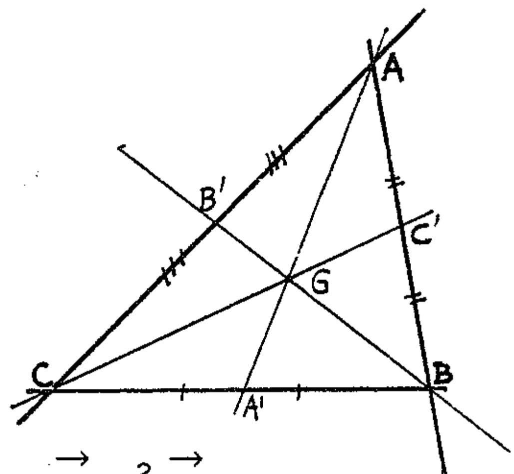
* Si ABC est équilatéral, ses angles géométriques sont égaux, les points remarquables du triangle sont confondus, il y a 3 axes de symétrie (et des réciproques appropriées).



2) La construction d'une figure doit être productrice d'informations et ne pas se réduire à une réalisation matérielle.

a) *Par exemple : soit un triangle* A B C *et* G *son centre de gravité.*

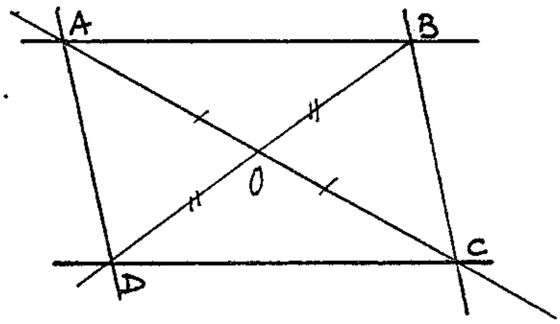
L'élève qui trace la figure doit, en même temps, noter, sur sa figure et au brouillon : que G est à l'intersection des 3 médianes ; que 2 médianes suffisent pour déterminer G ; que G est isobarycentre de A,B,C ; que G est situé, sur chaque médiane, suivant une position remarquable (et qu'il pourra utiliser aussi bien $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$, que $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$).



b) *Soit un parallélogramme* A B C D *et* O *le point d'intersection des diagonales.*

L'élève doit rassembler sur la figure, et sur son brouillon (et dans sa tête !) des informations immédiates : côtés parallèles, vecteurs égaux, O centre de symétrie, passage possible de la droite (AB) à (CD) par cette symétrie ....

Parmi ces renseignements, certains ne seront pas exploités pour l'exercice. Mais il faut habituer l'élève à cette recherche d'information accompagnant la construction de la figure.



III. LES SIGNIFICATIONS DU MOT "CONSTRUIRE"

Sans prétendre à l'exhaustivité, il apparaît que l'emploi du mot "construire" dans des énoncés d'exercices recouvre plusieurs concepts.

1. **"Déterminer"** l'existence d'un point ou d'une figure géométrique vérifiant des conditions données, la construction effective n'étant pas demandée. C'est le cas assez souvent dans l'espace où une figure est rarement exigée. Par exemple : "Construire l'isobarycentre de 4 points de l'espace" ; "construire la perpendiculaire commune à deux droites" (après aide pour la démonstration puisque cette question ne figure pas au programme de TCE). Il faut remarquer que l'on pourrait exiger une véritable construction de l'isobarycentre sur une représentation en perspective cavalière ou en descriptive.

2. **"Tracer"** une figure, les instruments à utiliser n'étant pas spécifiés : en particulier, l'emploi d'une règle graduée, d'un rapporteur, d'une équerre, d'approximations sur les mesures n'étant pas exclu. Exemple : construire un carré de côté $\sqrt{2}$(l'unité étant choisie).

3. **"Faire une figure ; donner l'allure d'une courbe".**

Par exemple : construire une conique connaissant un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Il s'agit en fait de placer au sens 2. les éléments caractéristiques et de tracer une courbe d'allure acceptable.

Autre exemple : construire la représentation graphique d'une fonction dans un repère donné.

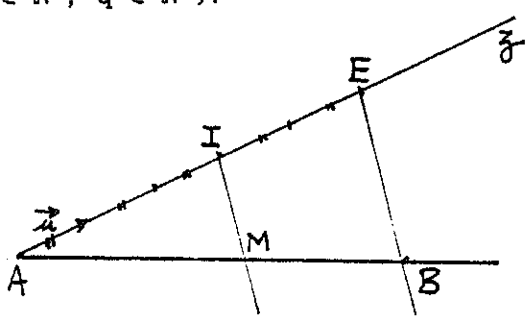
4. **"Construire à la règle et au compas".** Cette limitation impérative des instruments conduit à des problèmes intéressants.

- Mais le programme actuel ne semble pas insister sur cet aspect de la géométrie. Il est cependant utile de connaître quelques constructions élémentaires (qui devraient faire partie de l'acquis des élèves de 2nde):

Construction de la médiatrice d'un segment ; de la perpendiculaire menée d'un point à une droite ; de la parallèle menée par un point à une droite ; construction des bissectrices d'un couple de demi-droites ; construction d'un triangle équilatéral ; report d'un angle ; A et B étant donnés, construire M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{p}{q}\overrightarrow{AB}$ $(p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*)$.

Construction détaillée:

Sur une demi-droite [Az), on porte I et E tels que : $\overrightarrow{AI} = p\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE} = q\vec{u}$ ($\vec{u}$ arbitraire) ; on trace (BE), la parallèle à (BE) passant par I coupe (AB) en M.



Sur le plan pratique on ne demandera pas (ou exceptionnellement !) le détail de ces constructions. (Voir cependant l'épreuve "CAPES-Interne" session 1988 sur la notion de points et figures constructibles à la règle et au compas).

5. On pourrait ajouter des constructions n'utilisant qu'un matériel réduit , volontairement appauvri : constructions à la règle simple, non graduée, et sans compas ; constructions à la règle à bords parallèles (Voir activités en 1ère, IREM de Lyon).

En conclusion :

Il est souhaitable que le sens du mot construire soit précisé, au moins par le contexte. Dans les cas usuels rencontrés par nos élèves (en particulier aux examens) ils devraient pouvoir reconnaître s'il s'agit des significations 1 ou bien 2, ou bien 3.

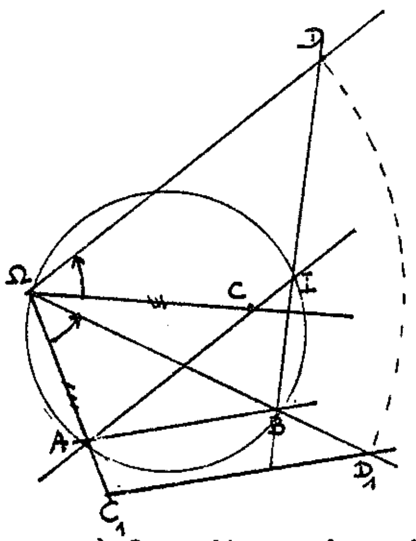
Exemple d'un énoncé susceptible de différentes interprétations

On donne les points Ω, A, B, C. *Construire l'image* D *de* C *par la similitude directe de centre* Ω *qui envoie* A *en* B. (Ω, A, B *non alignés*).

a) Déterminer le *point* D *(au sens du* 1)

b) Construire le point D *à la règle et au compas*

c) Construire D *en utilisant une propriété géométrique de la similitude (Voir chapitre Similitude).*



a) D est déterminé par :

(1) $\text{mes}\,(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega D}) = \text{mes}\,(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad [2\pi]$

(2) $\Omega D = \dfrac{\Omega B}{\Omega A} \times \Omega C.$

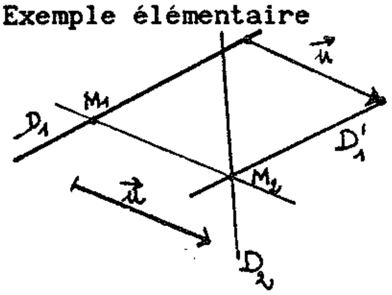
b) On reporte l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ par la construction élémentaire. Puis on reporte $\Omega C_1 = \Omega C$ sur $[\Omega A]$ et on trace la parallèle à (AB) passant par C_1 qui coupe (ΩB) en D_1. On reporte ensuite $\Omega D = \Omega D_1$ sur la demi-droite obtenue dans le report de l'angle.

c) On sait que le point d'intersection de deux droites homologues, le centre de la similitude et deux points homologues sur les droites sont cocycliques : ΩABI sont cocycliques ainsi que ΩCID ; on détermine d'abord I à l'intersection de (AC) avec le cercle (ΩAB) puis D à l'intersection de (BI) avec le cercle (ΩCI).

IV PROBLEMES DE CONSTRUCTION

1) Il s'agit d'un type de problème assez particulier, souvent mal dominé par les élèves. On commencera par des exercices très simples. En principe le raisonnement se décompose en deux étapes : analyse, synthèse. Pour l'analyse d'une figure répondant aux conditions imposées, il est bon de signaler aux élèves qu'ils ont deux possibilités : faire une figure approximative (inexacte) ou bien une figure exacte mais réalisée dans un ordre différent de celui qu'impose le problème.

Exemple élémentaire



Etant donné deux droites sécantes D_1, D_2 *et un vecteur* $\vec{u}$, *construire* $M_1 \in D_1$, $M_2 \in D_2$, *tels que* $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}$.

<u>Indications</u>

* Analyse: Si (M_1, M_2) est une solution, on passe de M_1 à M_2 par $t_{\vec{u}}$ et $M_2 \in t_{\vec{u}}(D_2)$.

* Synthèse: Soit $D'_1 = t_{\vec{u}}(D_1)$; D'_1 coupe D_2 en M_2 et M_1 est l'antécédent de M_2 par $t_{\vec{u}}$.

Remarquons que souvent, dans ces problèmes, un élément est défini de façon théorique mais que sa détermination concrète graphique est plus simple.

Par exemple, ici, $M_1 = t_{-\vec{u}}(M_2)$ alors que M_1 est l'intersection de D_1 avec la droite passant par M_2 de vecteur directeur $\vec{u}$.

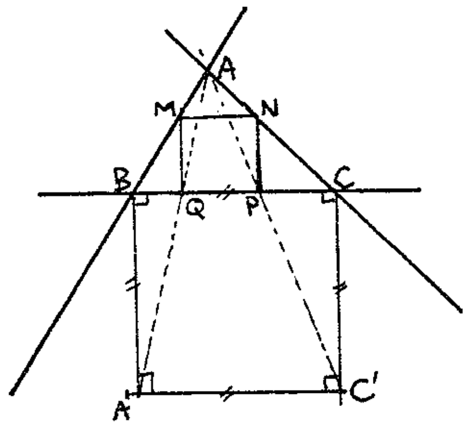
2) Exemples de problèmes de construction utilisant les transformations.

a) *Construire un triangle* O A B *équilatéral de sommet* O *donné et dont les sommets* A *et* B *appartiennent à des courbes simples données.*

b) *Même problème pour* OAB *ayant une "forme" imposée*: OB = 2 OA , $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$rad.). (On utilise évidemment une similitude directe de centre A)

c) *L'exercice 2 du Bac C 1985 Paris (Réciproque à préciser). L'énoncé simplifié pourrait être : Soit* ABC *un triangle de sens direct.*
A l'extérieur du triangle ABC, *on construit le triangle isocèle* ABR *rectangle en* B, *le triangle isocèle* BCP *rectangle en* C *et le triangle isocèle* CAQ *rectangle en* A. *Le triangle* PQR *étant donné, construire un triangle* ABC *tel que les constructions précédemment indiquées redonnent ce triangle* ABC.

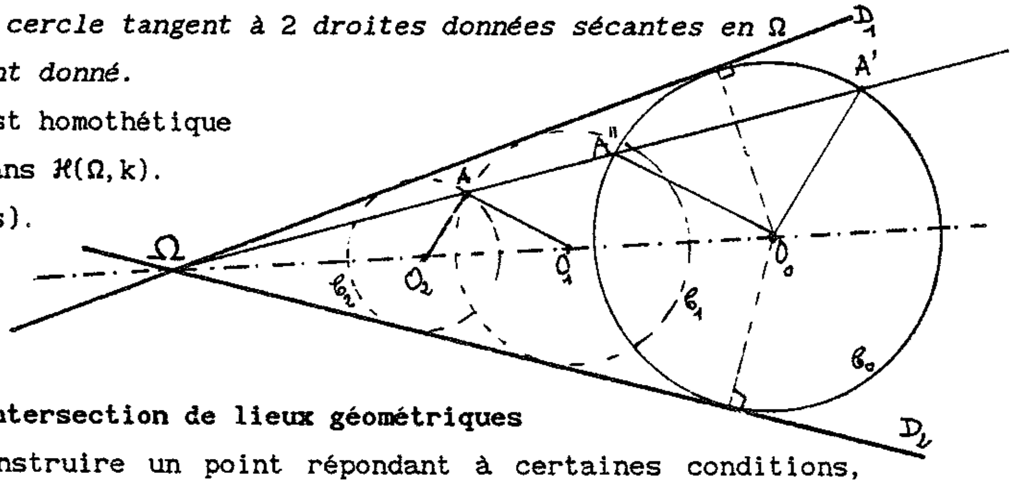
3) Construction de figures



a) *Construire un carré* MNPQ *inscrit dans un triangle donné (*M *sur* [AB], N *sur* [AC], P *et* Q *sur* (BC)).

Analyse: Un carré solution est homothétique de BCC'A' (voir figure) dans une homothétie de centre A.

b) *Construire un cercle tangent à 2 droites données sécantes en* Ω *et passant par un point donné.*
Analyse : $\mathcal{C}$ cherché est homothétique d'un $\mathcal{C}_0$ particulier dans $\mathcal{H}(\Omega,k)$.
(Il y a deux solutions).



4) Méthode par intersection de lieux géométriques

Il s'agit de construire un point répondant à certaines conditions, chacune de ces conditions imposant au point d'appartenir à un lieu $\mathcal{L}$. Les exemples **1)**, 2.a), 2.b) se rattachent à cette méthode.

Exemple

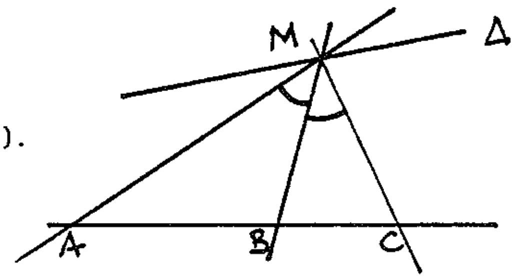
a) *On donne 3 points* ABC *alignés, dans cet ordre* (AB ≠ BC) *et une droite* Δ. *Construire un point* M *de* Δ *tel que* $\widehat{AMB} = \widehat{BMC}$ *(point d'où l'on voit* [AB] et [BC] *sous un même angle).*

Indications

M appartient au lieu $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$

Il y a évidemment une discussion

(On peut prendre Δ passant par C).



V RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

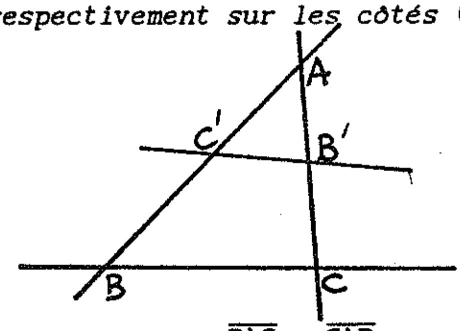
Nos élèves n'ont guère utilisé ce mode de raisonnement (sauf peut-être en 4ème !) qui, par ailleurs, ne bénéficie plus d'une mise en forme (même modeste) par la logique qui a disparu des programmes. Quelques exemples simples devront être présentés.

Exemple

(Une partie d'une démonstration possible de la réciproque de Ménélaüs). Soit 2 points B' et C' *respectivement sur les côtés* (AC) *et* (AB) *d'un triangle* ABC, *tels que :*

$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Montrer que (B'C') *coupe* (BC).



Indication

Si (B'C') était parallèle à (BC), on aurait $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$ d'où

$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ (on écarte aussi B' en C ou A, C' en B ou A).

VI IDENTIFICATION D'ELEMENTS

Les élèves doivent rencontrer ce type de raisonnement qui ne leur est pas très familier.

Exemple 1.

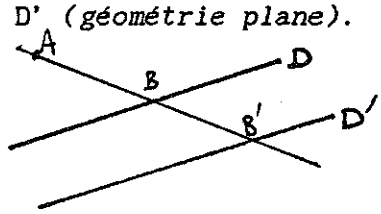
Si deux points M *et* N *d'une droite* (AB) *vérifient* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$ *, alors* M = N

. M est barycentre de (A,B) avec les mêmes coefficients que N.

$\overrightarrow{MA} - k\,\overrightarrow{MB} = \vec{0} = \overrightarrow{NA} - k\,\overrightarrow{NB}$

Exemple 2.

Etant donné deux droites strictement parallèles, D *et* D', *déterminer l'ensemble des homothéties transformant* D *en* D' *(géométrie plane).*



Le centre d'homothétie ne peut pas appartenir à l'une des droites (par l'absurde).

Si A est un point quelconque du plan, non situé sur D ou D', soit une droite ABB' passant par A et coupant D en B et D' en B' : L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$ transforme D en une droite D" passant par B' et parallèle à D. D'où D" = D'. L'ensemble des centres d'homothéties est le plan privé des deux droites ; à chaque centre est associé un unique rapport $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$ indépendant de la sécante ABB' choisie.

Exemple 3.

Recherche des homothéties "échangeant" deux cercles de rayons différents.

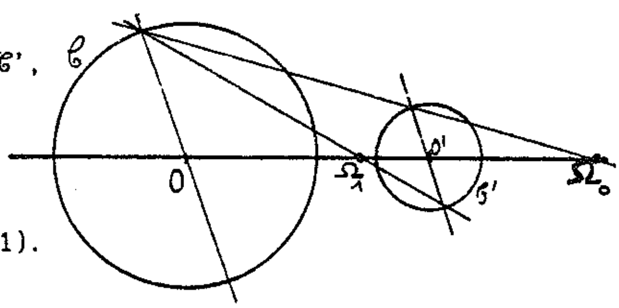
Analyse:

Si $\mathcal{H}(\Omega_i, k)$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$,

$\overrightarrow{\Omega_0 O'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{\Omega_0 O}$

ou

$\overrightarrow{\Omega_1 O'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{\Omega_1 O}$ (i=0 ou i=1).



Synthèse:

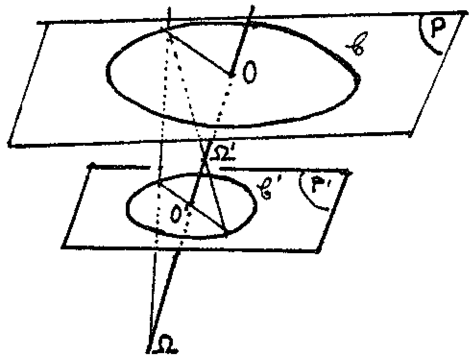
Les deux homothéties $\mathcal{H}(\Omega_o, \frac{R'}{R})$ et $\mathcal{H}(\Omega_1, -\frac{R'}{R})$ transforment bien le cercle $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$

VII ANALYSE ET SYNTHESE

Des exercices simples doivent montrer que la recherche d'un exercice ne doit pas se limiter à l'analyse.

Etude des centres d'homothétie de 2 cercles de l'espace

Soit 2 cercles $\mathscr{C}(O,R)$ et $\mathscr{C}(O',R')$ *dans des plans* P *et* P' *de l'espace* ($R \neq R'$ et $O \neq O'$). *Déterminer l'ensemble des homothéties qui envoient* $\mathscr{C}$ *sur* $\mathscr{C}'$.



Analyse:

Si une telle homothétie, de centre Ω et de rapport k, existe, alors $|k| = \frac{R'}{R}$ et Ω est barycentre de ((O,R), (O',R')) ou ((O,R), (O',-R')).

Synthèse:

L'homothéthie $(\Omega, \frac{R'}{R})$ transforme $\mathscr{C}$ en un cercle de centre O' de rayon R', situé dans un plan parallèle à P. Si P' n'est pas parallèle à P, $\mathscr{C}' \neq \mathscr{C}$ et l'homothétie n'est pas une solution. Si P' est parallèle à P ,on vérifie que les deux homothéties $(\Omega, \frac{R'}{R})$ et $(\Omega', -\frac{R'}{R})$ sont bien solutions en identifiant $\mathscr{C}'$ par chacune de ces homothéties.

VIII LIEUX GEOMETRIQUES

Des exemples variés d'exercices de ce type figurent dans le fascicule. Nous voulons simplement ici présenter des remarques d'ordre général, accompagnées d'exemples.

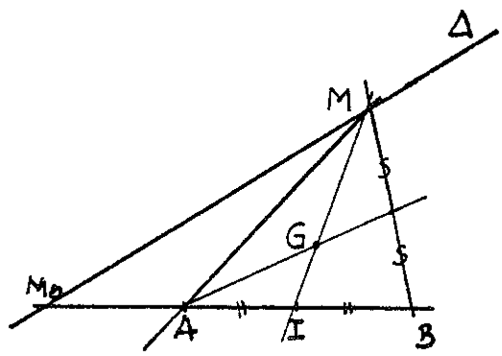
1) Utilisation d'une transformation bijective.

On connaît l'ensemble $\mathscr{L}$ des points M et on a démontré que l'on passe de chaque point M au point M' par une transformation bijective du plan, f ;

alors le lieu géométrique de M' est f <$\mathcal{L}$ >. (Réciproque non indispensable). En effet, si $M' \in f <\mathcal{L}>$, M' a un antécédent unique M par f et pour cet antécédent, d'après la partie directe, f(M) = M' possède la propriété caractérisant M'.

<u>Exemple élémentaire</u>

On donne 2 points fixes distincts A *et* B *et une droite fixe* Δ *qui coupe* (AB) *en* M_0. *Un point* M *décrit* Δ. *Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du triangle* ABM.



On passe de M à G par $\mathcal{H}(I, \frac{1}{3})$; le lieu de M est $\Delta - \{M_0\}$, le lieu de G est $\Delta' - \{M_0'\}$. (où I est le milieu de [AB] , Δ' et M_0' sont les images de Δ et M_0 par l'homothétie).

<u>Remarque</u>

Il convient cependant de bien limiter le "lieu" du point M (dans l'exemple, ce serait Δ si on employait l'expression isobarycentre au lieu de centre de gravité).

2) Cas général

Une réciproque est logiquement indispensable, sous la forme souvent d'une reconstruction de figure (voir exercices du chapitre 8). On peut essayer, quand c'est possible, d'utiliser des équivalences pour se ramener à un lieu géométrique classique, mais ce n'est pas toujours possible.

<u>Exemple</u>. *(Une généralisation de la droite de Simson).*

On donne un triangle non aplati ABC. *A tout point* M *du plan non situé sur les côtés du triangle ,on associe les points* A', B', C' *situés sur* (BC), (AC), (AB) *tels que :*

$$mes(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A'M}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{B'M}}) \equiv mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'M}}) \equiv \alpha \ (\pi) \qquad (\alpha \text{ donné, } \alpha \in]0, \tfrac{\pi}{2}]).$$

Déterminer l'ensemble des points M *tels que*

$mes(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv \beta \ (\pi)$. *(*$\beta$ *donné). En particulier, ensemble des points* M *tels que* A', B', C' *soient alignés.*

Indications

On met en évidence des points cocycliques (A'M B'C) (B'A C'M).

On établit, pour tout point du plan non situé sur les côtés du triangle :

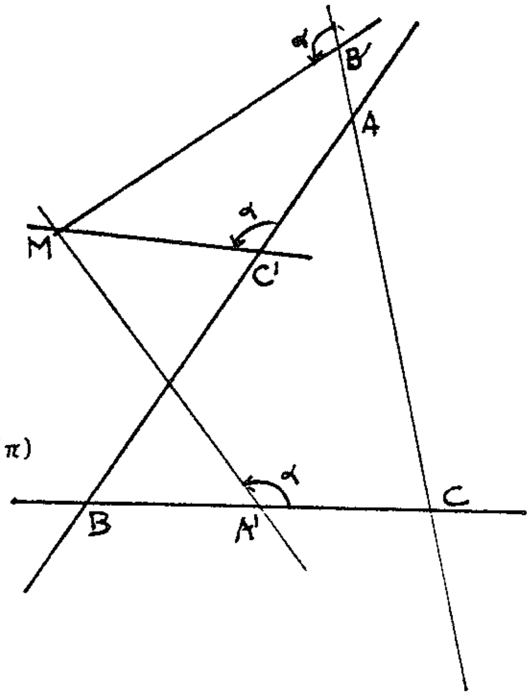
$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{B'C'}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \ (\pi)$$

Sous forme d'équivalence :

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv \beta + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \ (\pi)$$

En particulier :

A'B'C' alignés $\Leftrightarrow$ M $\in$ Cercle (ABC) sauf les sommets.



Pour être complet ,il convient d'examiner des cas singuliers tels que B' = C' = A'... .

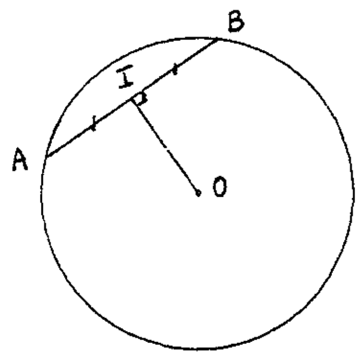
CHAPITRE I
LES CONFIGURATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE

Les configurations jouent un rôle important en géométrie, un rôle analogue à celui que jouent les identités remarquables en algèbre.

Il s'agit de savoir extraire dans un exercice de géométrie des configurations élémentaires, sur lesquelles on a établi des propriétés qui pourront être utilisées sans avoir besoin de les redémontrer.

Dans ce cadre, les configurations sont un outil essentiel à la résolution de problèmes en géométrie.

I LES CONFIGURATIONS LIEES AU MILIEU D'UN SEGMENT



1 La médiatrice d'un segment

2 Pour tout point M de $\mathscr{C}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$
(où I désigne le milieu de [AB])

3 La projection orthogonale du centre d'un cercle sur une corde de ce cercle est le milieu de cette corde.

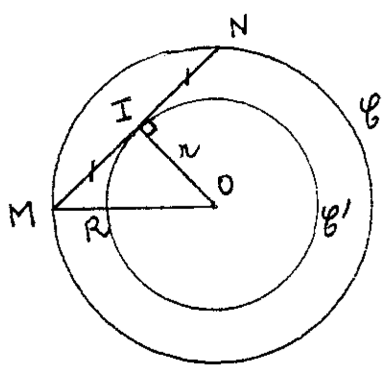
Soit [MN] *une corde variable d'un cercle fixe* $\mathscr{C}$ *telle que* MN= l *(*$l > 0$ *donné).*

Montrer que, lorsque M *et* N *varient,* I *milieu de* [MN] *se déplace sur une courbe fixe que l'on précisera.*

Soit $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R, OIM est un triangle rectangle en I

$OI = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = r$, I appartient au cercle C' de centre O et de rayon r.

Remarque : on peut déterminer le lieu géométrique du point I en démontrant que tout point du cercle $\mathscr{C}'(O,r)$ est le milieu d'une corde [MN] de $\mathscr{C}$ telle que MN = l.



II LES CONFIGURATIONS LIEES AU TRIANGLE

1 Inégalité triangulaire

$|a - b| < c < a + b$ est une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a, b et c (positifs) soient les mesures des côtés d'un triangle.

2 Points et droites remarquables d'un triangle

i. le centre de gravité G de ABC

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\forall M \in \mathcal{E})\ \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\,\vec{MG}$$

$$\text{ou} \quad \vec{IG} = \frac{1}{3}\,\vec{IA} \qquad (\text{I milieu de [BC]})$$

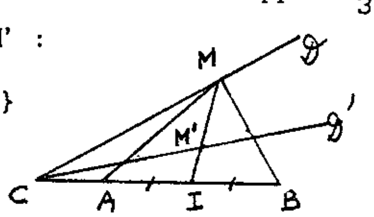
Soit A *et* B *deux points fixes d'un plan* $\mathcal{P}$ *; à tout point* M de $\mathcal{P}$ *variant sur une droite* $\mathcal{D}$*, on associe* M'*, centre de gravité du triangle* ABM. *Déterminer le lieu géométrique de* M' *quand* M *varie.*

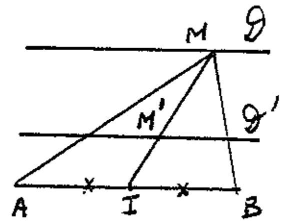
Soit I le milieu de [AB], $\vec{IM'} = \frac{1}{3}\,\vec{IM}$, I est un point fixe, M' est l'image de M par l'homothétie h de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

$h < \mathcal{D} > = \mathcal{D}'$. D'où le lieu de M' :

→ $\mathcal{D}' - \{ C \}$ si $\mathcal{D} \cap (AB) = \{ C \}$

→ $\mathcal{D}'$ si $\mathcal{D}$ parallèle à (AB)





ii. le centre du cercle circonscrit au triangle

iii. l'orthocentre d'un triangle

Soit ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit à ce triangle,* H *le point tel que* $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ *; démontrer que :*

1°) H *est l'orthocentre du triangle* ABC

2°) O, H et G *centre de gravité de* ABC *sont alignés.*

Puisque $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, $\vec{AH} = \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OI}$ (I milieu de [BC]) donc (AH) est perpendiculaire à (BC). De même (BH) et (CH) sont respectivement perpendiculaires à (AC) et (BA) ; de plus $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$.

iv. <u>Le quadrangle orthocentrique</u>

Soit ABC un triangle et D son orthocentre, chaque point du quadruplet (A,B,C,D) est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres points.

Soit ABC *un triangle d'orthocentre* H. *Par chaque sommet du triangle on fait passer une droite parallèle au côté opposé au sommet ; ces droites se coupent deux à deux en* M ,N et P. *Quel rôle joue le point* H *pour le triangle* MNP ?.

H est le point d'intersection des médiatrices de MNP.

3 <u>Triangles particuliers</u>

i. On doit savoir caractériser un triangle isocèle ou équilatéral.

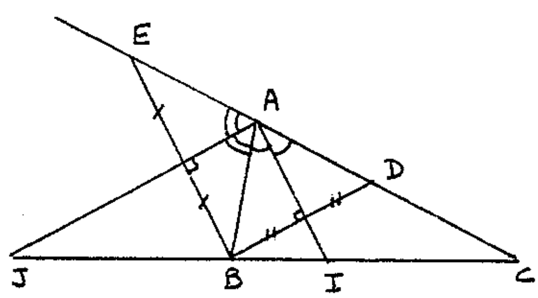
ii. L'hypoténuse d'un triangle rectangle et isocèle de côté a est $a\sqrt{2}$.

iii. La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

iv. Un triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle et réciproquement, tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

4 <u>Propriété des bissectrices</u>

Soit ABC un triangle tel que $AB \neq AC$, et I et J les pieds des bissectrices issues de A sur (BC) alors $\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$



Soit (BD) parallèle à (AJ) et $D \in (AC)$
(BE) parallèle à (AI) et $E \in (AC)$

Alors $\frac{IB}{IC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC}$ (AEB isocèle car (AJ) est à la fois bissectrice et hauteur).

De même $\frac{JB}{JC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC}$ (ABD isocèle, (AI) est à la fois bissectrice et hauteur).

On peut aussi utiliser des réflexions.

<u>Remarque:</u>Cette propriété est encore,à l'heure actuelle, du domaine du savoir-faire.

5 <u>Points d'une droite divisant un bipoint de cette droite dans un rapport donné.</u>

Soit un bipoint (A,B) ($A \neq B$) et un réel strictement positif k, un point M divise (A,B) dans le rapport k si $\frac{MA}{MB} = k$ et $M \in (AB)$

. Si $k = 1$, M est le milieu de [AB].

. Si $k \neq 1$, il existe deux points divisant (A,B) dans le rapport k, M_1 barycentre de ((A,1), (B,k)) et M_2 barycentre de ((A,1), (B,-k)).

On peut alors facilement démontrer une "réciproque" de la propriété 4.

III LES CONFIGURATIONS LIEES AUX QUADRILATERES

. Caractérisations d'un parallélogramme ABCD

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou [AC] et [BD] ont le même milieu O

ou O est centre de symétrie de ABCD etc ...

. Caractérisations d'un losange ABCD

AB = BC = CD = DA ou ABCD est un parallélogramme tel que AB = BC

ou ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

ou [AC] et [BD] sont des axes de symétrie de ABCD.

. Caractérisations d'un rectangle

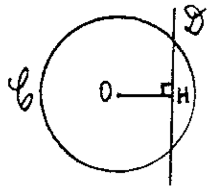
Quadrilatère ayant trois angles droits ou parallélogramme ayant un angle droit ou parallélogramme dont les diagonales ont même longueur etc...

. Caractérisations d'un carré

Losange ayant un angle droit ou rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux ou quadrilatère ABCD tel que si r est la rotation de centre O ($O \neq A$) et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ alors $B = r(A)$, $C = r(B)$ et $D = r(C)$ etc ...

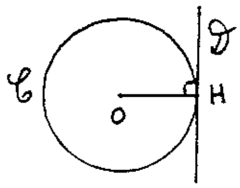
IV LES CONFIGURATIONS LIEES AUX CERCLES

1. Positions relatives d'une droite et d'un cercle



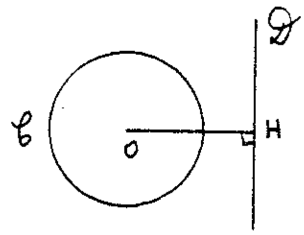
$OH < R$

$\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$



$OH = R$

$\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}$

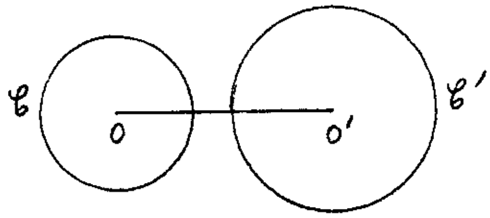


$OH > R$

$\mathcal{D}$ extérieure à $\mathcal{C}$

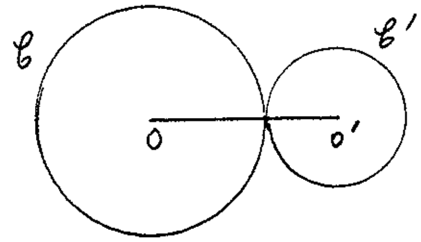
2. Positions relatives de deux cercles

a). Cercles de centres distincts



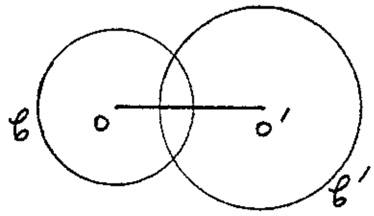
Cercles extérieurs

$OO' > R + R'$



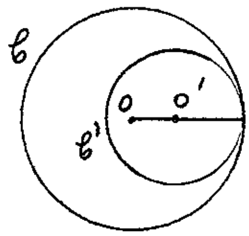
Cercles tangents extérieurement

$OO' = R + R'$



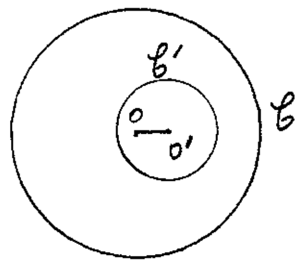
Cercles sécants

$|R - R| < OO' < R + R'$



Cercles tangents intérieurement

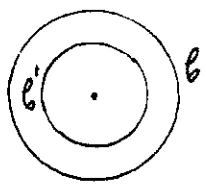
$OO' = |R - R'|$



Cercles intérieurs l'un à l'autre

$OO' < |R - R'|$

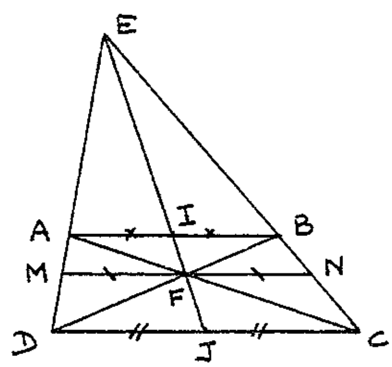
b).Cercles concentriques



V LES CONFIGURATIONS LIEES A L'HOMOTHETIE

1. La configuration dite "du trapèze"

Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD] le point d'intersection des côtés obliques, le point d'intersection des diagonales et les milieux des bases sont alignés. (On suppose $AB \neq CD$).



En effet, il existe deux homothéties qui transforment [AB] en [CD], l'homothétie de centre E qui transforme A en D et l'homothétie de centre F qui transforme A en C, et ,puisque l'homothétie conserve les milieux, E , I et J sont alignés ainsi que F , I et J ; on démontre de plus que la droite passant par F et parallèle aux bases coupe les côtés obliques en deux points M et N tels que FM = FN.

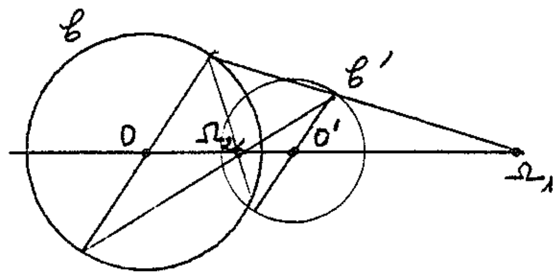
Encore une propriété du domaine du "savoir-faire"...

2. Cercles "échangés" par homothétie

Etant donnés deux cercles $\mathscr{C}(O,R)$ et $\mathscr{C}(O',R')$ de centres et de rayons distincts ,il existe deux homothéties transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ de rapports $\frac{R'}{R}$ et $-\frac{R'}{R}$; leurs centres appartiennent à la droite (OO').

Ce résultat se démontre par analyse-synthèse :

<u>Analyse</u> : S'il existe une homothétie h transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ alors h(O) = O' et h a pour rapport k tel que $|k| = \frac{R'}{R}$.
Ce qui donne donc deux possibilités pour k
$k = \frac{R'}{R}$ ou $k = -\frac{R'}{R}$.
Quant à Ω centre de l'homothétie h, il est le barycentre de ((O',1),(O,-k)).



<u>Synthèse</u> : Considérons les homothéties h_1 et h_2 suivantes:

h_1 de centre Ω_1 barycentre de $((O',1),(O,-\frac{R'}{R}))$ et de rapport $k_1 = \frac{R'}{R}$.

h_2 de centre Ω_2 barycentre de $((O',1),(O,\frac{R'}{R}))$ et de rapport $k_2 = -\frac{R'}{R}$.

On démontre facilement que $h_1 < \mathscr{C} > = \mathscr{C}'$ et $h_2 < \mathscr{C} > = \mathscr{C}'$

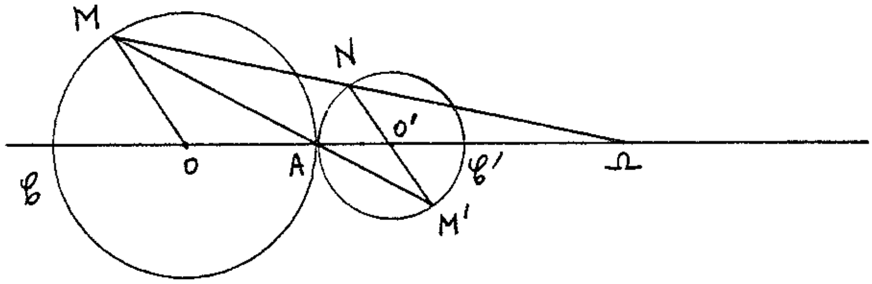
<u>Remarques</u> :

. Construction des centres d'homothétie ($R \neq R'$) : on trace deux droites parallèles passant chacune par le centre d'un cercle et on reconstitue le "trapèze".

. Lorsque les cercles sont tangents, le point de contact est l'un des centres d'homothétie.

Démontrer que, si $\mathcal{D}$ est une droite tangente à deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors $\mathcal{D}$ passe par l'un des centres d'homothéties qui transforment $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

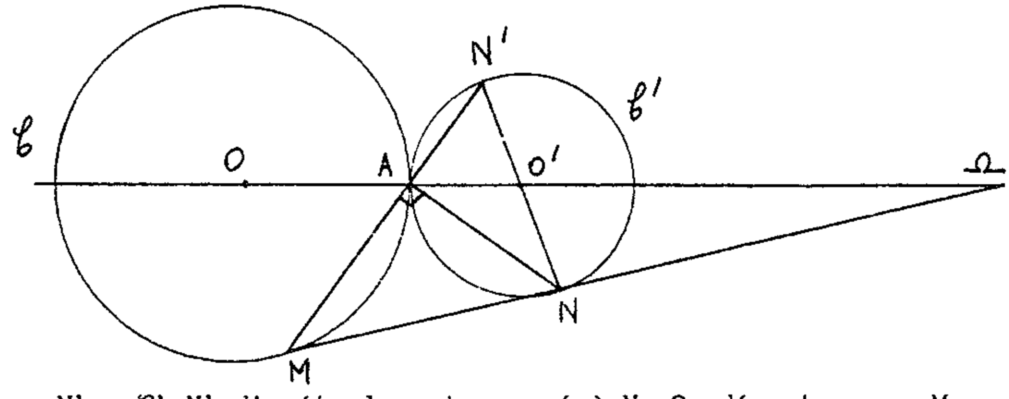
Soit $\mathcal{C}(O,R)$ et $\mathcal{C}'(O',R')$ deux cercles tangents intérieurement en A, $R \neq R'$; un point M varie sur $\mathcal{C}$, la droite (AM) coupe $\mathcal{C}'$ en M' et soit N le point de $\mathcal{C}'$ diamétralement opposé à M'. Démontrer que la droite (MN) passe par un point fixe.



Puisque $R \neq R'$, il existe deux homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, l'une a pour centre A puisque $\overrightarrow{AO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{AO}$, l'autre a pour centre Ω barycentre de $((O',1),\ (O,\ -\frac{R'}{R}))$.

On démontre que l'image de M par l'homothétie h de centre Ω et de rapport $-\frac{R'}{R}$ est N et par conséquent la droite (MN) passe par Ω.

Soit $\mathcal{C}(O,R)$ et $\mathcal{C}'(O',R')$ avec $R \neq R'$, deux cercles tangents extérieurement en A ; un point M varie sur $\mathcal{C}$, soit N un point de $\mathcal{C}'$ tel que $\widehat{MAN}$ soit droit. Démontrer que la droite (MN) passe par un point fixe.



Construisons $N' \in \mathcal{C}'$, N' diamétralement opposé à N. On démontre que M, A et N' sont alignés ($\widehat{MAN}=90^0$), et que N' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{R'}{R}$.

D'où $\overrightarrow{O'N'}=-\frac{R'}{R} = \overrightarrow{OM}$ et par suite $\overrightarrow{O'N}= \frac{R'}{R}\overrightarrow{OM}$.

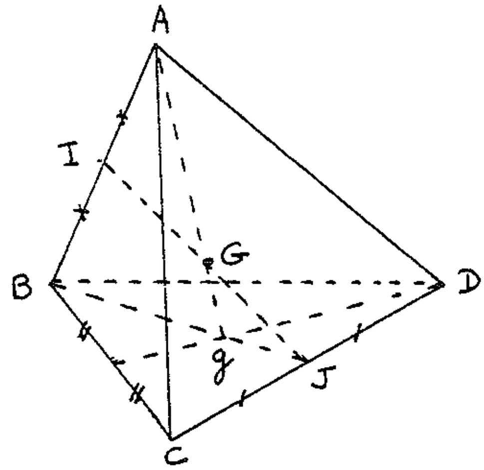
On montre ensuite que N est l'image de M par l'homothétie positive qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$, d'où (MN) passe par Ω centre de cette homothétie.

VI LES CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

* <u>Le cube : on doit connaître ses différents éléments de symétrie</u>

* <u>Le parallélépipède rectangle</u>

* <u>Le tétraèdre</u>



Son centre de gravité est le point G défini par : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
Il est le point d'intersection des 3 droites joignant les milieux des arêtes opposées et des 4 droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée.

Soit ABC *un triangle,* M *un point variable d'une droite* $\mathcal{D}$ *tel que* ABCM *soit un tétraèdre.*

Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité G *du tétraèdre lorsque* M *varie sur* $\mathcal{D}$.

Soit g le centre de gravité du triangle ABC , $\overrightarrow{gG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{gM}$, donc G est l'image de M par l'homothétie de centre g et de rapport $\frac{1}{4}$.

* <u>La sphère</u> : positions relatives d'une sphère et d'un plan

* <u>Axe d'un cercle</u> : ensemble des points équidistants des points d'un cercle.

VII QUELQUES ENSEMBLES DE POINTS

* $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ (I milieu de [AB])

* Ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ $(k \in \mathbb{R})$

* $MA^2 - MB^2 = 2\,\overline{IH} \times \overline{AB}$ (I milieu de [AB], H projeté orthogonal de M sur (AB)).

* Ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = k$

* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ (I milieu de [AB]).

* Ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (étude du cas particulier $k = 0$).

* $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega M} = \overline{\Omega A} \times \overline{\Omega H}$ où $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{u}$ et H projeté orthogonal de M sur (ΩA).

* Ensemble des points tels que $\vec{u}.\overrightarrow{\Omega M} = k$

* Ensemble des points tels que $\frac{MA}{MB} = k$

Un exemple d'exercice construit pour utiliser les configurations élémentaires.

On donne 3 points fixes A, B, C *du plan* $\mathcal{P}$ *tels que* $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

Soit O *le milieu de* [AB] *et* $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* O *passant par* A *et* B. *Un point variable* M *décrit* $\mathscr{C}$ *et la parallèle à* (BM) *passant par le point* C *coupe* (AM) *en* D.

(Les parties I et II sont indépendantes dans une large mesure et on recommande de faire deux figures séparées pour étudier chacune d'elles).

I 1) *Montrer que* D *appartient à une courbe fixe que l'on précisera.*

2) *La tangente à* $\mathscr{C}$ *passant par* B *coupe* (CD) *en* I *et* (AM) *en* L; *les droites* (AI) *et* (CL) *se coupent en* P.

Montrer que P *appartient à une courbe fixe que l'on précisera.*

II *On note* N *le milieu de* [BM] , N' *le milieu de* [CD] et E *le point d'intersection de* (BD) *et* (CM).

1) *Montrer que* N *appartient à une courbe fixe que l'on précisera.*

2) *Montrer que les points* A , N , E *et* N' *sont alignés.*

3) *Montrer que* $\frac{\overline{EN}}{\overline{EN'}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ *(on pourra utiliser des homothéties de centres* E *et* A*) ; montrer que* E *et* A *sont barycentres des points* N *et* N' *avec des coefficients numériques fixes que l'on précisera.*

4) *Exprimer* $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AN}$ *et en déduire que* E *appartient à une courbe fixe que l'on précisera.*

5) *Soit* H *le projeté orthogonal de* E *sur* (AB). *Montrer, en utilisant les points* A *et* E *que* $9HN^2 - 4HN'^2 = 0$. *En déduire que* (HE) *est une bissectrice de l'angle* $\widehat{NHN'}$.

Une remarque : cet exercice a été proposé aux élèves sous forme de contrôle, il s'agissait de vérifier leurs connaissances sur quelques configurations élémentaires. D'autre part, nous avons choisi de ne pas demander de lieux géométriques en ce tout début de cours de géométrie.

CHAPITRE 2
BARYCENTRES

0. INTRODUCTION

Nous ne reprenons pas le cours sur le barycentre, notion connue des élèves depuis la classe de seconde. Nous insistons cependant dans cette introduction sur quelques remarques utiles pour les exercices.

* La formule $\Sigma\alpha_i\overrightarrow{MA_i} = (\Sigma\alpha_i)\,\overrightarrow{MG}$ (avec $\Sigma\alpha_i \neq 0$) a un double rôle :

a) Elle permet de simplifier le 1er membre ; les élèves doivent à ce sujet acquérir une sorte de réflexe (transformation automatique de $\Sigma\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$, par exemple exercice 3).

b) Elle peut servir à construire ou à caractériser le barycentre d'un système. Elle doit être préférée, après choix d'un point M, à des calculs confus et incertains utilisant la relation de Chasles et partant de $\Sigma\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

* Pour utiliser la fonction scalaire de Leibniz, il est important de rappeler que tout produit scalaire peut s'exprimer en fonction de distances par : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

(Voir par exemple exercice 11 pour calculer GA^2)

* Les exercices ont été, approximativement, regroupés suivant les thèmes :

Formule du Barycentre - Associativité. 1.2.3.4.

Exercices utilisant la notion de coordonnées barycentriques 5.6.7

Relation de Leibniz ; formules de la médiane.

Etude d'une transformation géométrique.

1. *Soit* A, B, C *trois points vérifiant* $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^* - \{1\})$

a) Démontrer sans calcul que C *est barycentre de* A *et de* B *munis de coefficients à préciser.*

b) Calculer $\overrightarrow{BC}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *en fonction de* $\overrightarrow{BC}$.

Indications

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda}\,\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} + (\lambda - 1)\,\overrightarrow{AA}}{(\lambda - 1) + 1}$ d'où C barycentre de (A, $\lambda - 1$) (B,1)

b) $\overrightarrow{BC} = \frac{1 - \lambda}{\lambda}\,\overrightarrow{AB}$ (formule $\frac{1}{\Sigma\alpha_i}\,\Sigma\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$) ;

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{(1 - \lambda)}\,\overrightarrow{BC}$ (ici, d'après la définition).

2. *Associativité du barycentre, dédoublement*

Soit ABC *un triangle.*

Soit H *vérifiant* $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CB}$ et G *le centre de gravité de* ABC.

Démontrer que le barycentre E *de* (A,1) (B,2) (C,3) *est sur la droite* (HG)

Démontrer que (EG) *est parallèle à* (AC).

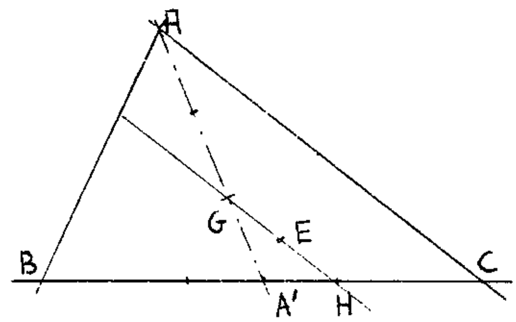
. G est le barycentre de (A,1) (B,1) (C,1) et H est le barycentre de (B,1) (C,2),

d'où E est le barycentre de (G,3) (H,3) c'est à dire le milieu de (G,H).

$.\overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{A'H} - \overrightarrow{A'G})$

$= \frac{1}{6}\,(\overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'A}) = \frac{1}{6}\,\overrightarrow{AC}$

(où A' est le milieu de (B,C)).



3. *On donne trois points* A,B,C. *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan tels que :*

$\|2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

Définir G_1 et G_2 tels que $2\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{MG_1}$

et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MG_2}$...

4. *Coefficients barycentriques*

Soit trois points A, B, C, *non alignés dans un plan P. Soit* M *un point quelconque du plan.*

a) Démontrer qu'il existe 3 réels, α, β, γ, *de somme non nulle, tels que* M *soit barycentre du système* $((A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\ ;\ (C,\gamma))$. *Les coefficients* α, β, γ *sont appelés* <u>coefficients</u> <u>barycentriques</u> <u>de</u> <u>M</u> *par rapport aux points* A, B, C.

b) Démontrer que tout triplet de coefficients barycentriques de M *par rapport aux points* A, B, C *est de la forme* $(k\alpha,\ k\beta,\ k\gamma)$. *(C'est à dire que les coefficients barycentriques sont définis à un facteur de proportionnalité près).*

<u>Indication</u>

a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a

$$\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{(1-x-y)+x+y}\left((1-x-y)\overrightarrow{AA} + x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}\right)$$

d'où M est barycentre du système $((A,\ 1-x-y),\ (B,x), (c,y))$.

b) Si M est barycentre de $((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$ et de $((A,\alpha'),\ (B,\beta'),\ (C,\gamma'))$ alors

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\ \overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{\alpha'+\beta'+\gamma'}(\beta'\overrightarrow{AB} + \gamma'\overrightarrow{AC}).$$

D'où $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} = \dfrac{\beta'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$ et $\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} = \dfrac{\gamma'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}$,

Soit $\beta' = k\beta$ et $\gamma' = k\gamma$ en prenant $k = \dfrac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{\alpha+\beta+\gamma}$.

$(\alpha+\beta+\gamma)\ k = \alpha'+\beta'+\gamma'$ d'où enfin $\alpha' = k\alpha$.

5. *Soient* K *et* F *deux points distincts et soit* $e > 0$, $e \neq 1$.

On considère A_1 *et* A_2 *les barycentres de* $(F,1)\ (K,e)$ *et de* $(F,1)\ (K,-e)$. *Soit* O *le milieu de* (A_1, A_2).

a) Déterminer (α,β) *tel que* O *soit le barycentre de* (F,α) *et de* (K,β).

b) Calculer $\overrightarrow{OA_1}$ *en fonction de* $\overrightarrow{FK}$.

Indications

a) $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{1+e}(\overrightarrow{OF} + e\,\overrightarrow{OK})$ et $\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{1-e}(\overrightarrow{OF} - e\,\overrightarrow{OK})$

D'où : $\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right)\overrightarrow{OF} + e\left(\frac{1}{1+e} - \frac{1}{1-e}\right)\overrightarrow{OK} = \vec{0}$

c'est à dire $\frac{2}{1-e^2}\overrightarrow{OF} + \left(\frac{-2e^2}{1-e^2}\right)\overrightarrow{OK} = \vec{0}$

On en déduit que O est le barycentre de (F, 1) , (K, $-e^2$).

Remarque : $[A_1, A_2]$ est un diamètre du cercle de centre O, lieu des points M du plan tels que $\frac{MF^2}{MK^2} = e^2$. En utilisant la fonction scalaire de Leibniz, on retrouve que O est barycentre de (F, 1) (K, $-e^2$).

b) Puisque $(1+e)\,\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OF} + e\,\overrightarrow{OK}$

et $(1-e)\,\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OF} - e\,\overrightarrow{OK}$ (avec $\overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_1}$)

on a $2e\,\overrightarrow{OA_1} = 2\,\overrightarrow{OF}$ et $2\,\overrightarrow{OA_1} = 2e\,\overrightarrow{OK}$

D'où $\overrightarrow{OA_1} = \frac{e}{1-e^2}\,\overrightarrow{FK}$

Remarque :

Cet exercice peut intervenir au début de l'étude des coniques.

6. *Coordonnées barycentriques*

Soient A, B, C *trois points non alignés de l'espace* $\mathcal{E}$. *Soit* O *un point hors du plan* (ABC).

$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ *est donc un repère* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{E}$.

a) Soit M *de coordonnées* (α, β, γ) *dans* $\mathcal{R}$. *Trouver une relation entre* α, β, *et* γ *qui caractérise l'appartenance du point* M *au plan* (ABC).

b) En déduire que tout point M *du plan* (ABC) *est barycentre de* (A, α) (B, β) (C, γ) *avec* $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

On appelle coordonnées barycentriques de M *par rapport à* (ABC) *l'unique triplet* (α, β, γ) *de somme égale à* 1 : *ce triplet s'appelle encore* *triplet de coefficients normés (d'après l'exercice 4 , ces coordonnées sont indépendantes de O).*

c) On considère les points M et N définis par : M barycentre de (A, 1) (B, -3) (C, 1) *; N de* (A, 2) (B, 1) (C, 1).

Caractériser par leurs coordonnées barycentriques (α, β, γ) les points P du plan (ABC) appartenant à la droite (MN).

Indications

a) $M \in (ABC)$ si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma = 1$

b) $M \in (ABC)$ ssi $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC} \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \text{M barycentre de } (A,\alpha)\ (B,\beta)\ (C,\gamma) \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$

c) Les coordonnées barycentriques de M sont $(-1, 3, -1)$ et de N $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Un point P appartient à (MN) si et seulement si P appartient à (ABC) et au plan (OMN) puisque $(ABC) \cap (OMN) = (MN)$.

Une équation de (OMN) est : $-4\alpha + \beta + 7\gamma = 0$.

D'où P appartient à (MN) si et seulement si

$$\begin{cases} -4\alpha + \beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

7. *La deuxième formule de la médiane (Leibniz)*

Soit A, B, C *un triangle et* A_1, B_1, C_1 *des points des droites* (BC), (AC) *et* (AB).

On note $\mathcal{D}_{A_1}$, $\mathcal{D}_{B_1}$, $\mathcal{D}_{C_1}$ *les perpendiculaires à* (BC), (AC), (AB) *en* A_1, B_1, C_1.

Démontrer que :

$\mathcal{D}_{A_1}$, $\mathcal{D}_{B_1}$, $\mathcal{D}_{C_1}$ *sont concourantes si et seulement si*

$$(A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0$$

→ Soit O le point de concours. D'après la 2ème formule de la médiane (ou Pythagore) on a :

$$A_1B^2 - A_1C^2 = OB^2 - OC^2 \quad , \quad B_1C^2 - B_1A^2 = OC^2 - OA^2$$

et $\quad C_1A^2 - C_1B^2 = OA^2 - OB^2 \quad$ d'où le résultat.

← Utilisation de la partie directe. Soit L l'intersection de $\mathcal{D}_{A_1}$ et de $\mathcal{D}_{B_1}$ (L existe car (BC) et (AC) ne sont pas parallèles). Soit C_2 la projection de L sur (AB).

On a :

$$(A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0$$

D'où $C_2A^2 - C_2B^2 = C_1A^2 - C_1B^2$

Donc C_1 et C_2 appartiennent à une même droite perpendiculaire à (AB). (Lignes de niveau de $M \longrightarrow MA^2 - MB^2$) D'où $C_1 = C_2$ et le résultat.

8. *Soit* ABC *un triangle* et (α, β, γ) *dans* $\mathbb{R}^3$ *tel que* : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
Soit M *le barycentre de* (A,α) (B,β) (C,γ)
Déterminer, lorsque c'est possible, un triplet (m,β',γ') *de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* A *soit le barycentre de* (M,m) (B,β') (C,γ')

M étant le barycentre de (A,α) (B,β) (C,γ)

on a : $\quad (\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{AM} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}$

c'est à dire $\quad (\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{AM} - \beta\,\overrightarrow{AB} - \gamma\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $(\alpha \neq 0)$, A est le barycentre de $M(\alpha + \beta + \gamma)$ $(B,-\beta)$ $(C,-\gamma)$.

Si $\alpha = 0$, A n'est pas le barycentre de M, B, C. Cela correspond à $M \in (BC)$.

9. *Projeté d'un barycentre*

Soit ABC un triangle rectangle en A avec AC = 3 et AB = 4

Soit H le pied de la hauteur issue de A.

On appelle coefficients barycentriques de M dans le repère (B,C) tout couple de réels (β,γ) tels que : $\beta + \gamma \neq 0$ et M barycentre de (B,β), (C,γ).

a) Déterminer des coefficients barycentriques entiers de H dans le repère (B,C).

b) Soit G le centre de gravité de ABC et L son projeté orthogonal sur (BC). Déterminer des coefficients barycentriques entiers de L dans le repère (B,C).

a) Soit (β,γ) des coefficients barycentriques de H

On a $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}}{\beta + \gamma}$

H pied de la hauteur issue de A <u>ssi</u> $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $H \in (BC)$

ssi $\beta\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \gamma\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -AB^2$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = AC^2$. d'où $-16\beta + 9\gamma = 0$.

On peut prendre $\beta = 9$ et $\gamma = 16$

b) G est barycentre de (A,1) (B,1) (C,1) donc L est barycentre de (H,1) (B,1) (C,1) (conservation des barycentres par une projection).

D'où $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BC}) = \frac{41}{75}\overrightarrow{BC}$;

donc L est barycentre de (B,34) (C,41).

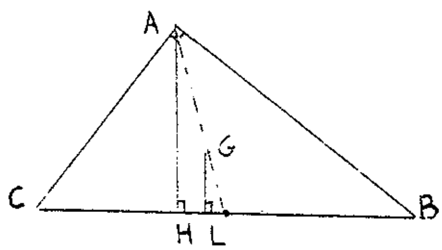
<u>Remarque</u>

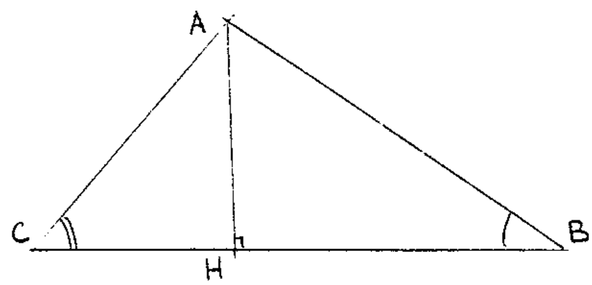
Dans le cas ABC non rectangle en A,

on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -AB \times BC \times \cos\hat{B}$

et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = AC \times BC \cos\hat{C}$.

On peut prendre $\beta = AC \cos\hat{C}$ et $\gamma = AB \cos\hat{B}$ ou, en utilisant $AC = 2R\sin\hat{B}$ et $AB = 2R\sin\hat{C}$, $\beta = \sin\hat{B} \times \cos\hat{C}$ et $\gamma = \sin\hat{C} \times \cos\hat{B}$.





10. *Soit* ABC *un triangle d'un plan* $\mathcal{P}$. *On note* I, J, K *les milieux de* (B,C), (C,A), (A,B). *Soit* M *un point du plan tel que :*

$$\begin{cases} M \neq A \quad M \neq B \quad M \neq C \\ (AM) \text{ et } (BC) \text{ se coupent en } A_M \text{ ; } (BM) \text{ et } (AC) \text{ en } B_M \text{ ;} \\ (CM) \text{ et } (AB) \text{ en } C_M \end{cases}$$

a) Quel est l'ensemble $\mathcal{H}$ *des points* M *vérifiant ces conditions ?*

On note A'_M , B'_M , C'_M *les symétriques de* A_M , B_M , C_M *par rapport à* I, J ,K.

On veut démontrer que les droites (AA'_M).(BB'_M) (CC'_M) *sont concourantes en* N *appelé point réciproque de* M.

b) On suppose, dans cette question, M *sur un des côtés. Démontrer le résultat. Quel est le point réciproque de* M ?.

c) On suppose M *hors des côtés. Démontrer le résultat en considérant* M *comme barycentre de* (A,α) (B,β) (C,γ) $\quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

d) Déterminer l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ *qui sont leur propre point réciproque.*

e) Quel est le point réciproque d'un point réciproque qui est dans $\mathcal{H}$?

<u>Remarque</u>

L'exercice ne suppose pas connu le théorème de Ceva.

<u>Indications</u>

a) $\mathcal{H} = \mathcal{P} - \{ \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C \}$

Δ_x parallèle à (YZ) passant par X avec $\{X,Y,Z\} = \{A,B,C\}$

b) Si $M \in (BC) - \{B,C\}$, les droites se coupent en A donc N = A.

c) M est barycentre de (A,α) (B,β) (C,γ) $(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$.

On a d'après a) $\beta + \gamma \neq 0$, $\quad \alpha + \beta \neq 0$, $\quad \alpha + \gamma \neq 0$.

(En effet si $\beta + \gamma = 0$ on a $\quad \overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta\,\overrightarrow{AB} - \beta\,\overrightarrow{AC}}{\alpha + \beta + \gamma} = \dfrac{\beta\,\overrightarrow{CB}}{\alpha + \beta + \gamma}$

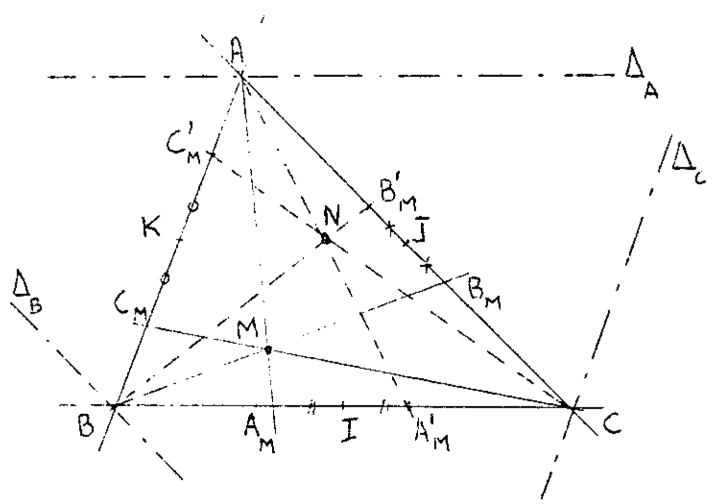
d'où (AM) // (BC))

Donc A_M est barycentre de $((B,\beta)$, $(C,\gamma))$ et, puisque la symétrie s_I de centre I conserve le barycentre,

A'_M est le barycentre de (B,γ) (C,β). Or $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ car M n'appartient pas aux côtés . On a donc A'_M barycentre de $(B,\frac{1}{\beta})$ $(C,\frac{1}{\gamma})$.

Par associativité, on a :

(AA'_M) (BB'_M) (CC'_M) concourantes en N barycentre de $(A, \frac{1}{\alpha})$ $(B,\frac{1}{\beta})$ $(C,\frac{1}{\gamma})$.



c) M est son propre point réciproque ssi M appartient à (AA_M) et à (AA'_M). D'où $A_M = A'_M = I$ et $B_M = B'_M = J$ et $C_M = C'_M = K$.

On en conclut que M est le centre de gravité de ABC.

d) Il est clair que pour tout point de $\mathcal{H}$ hors des côtés, le point réciproque du point réciproque est lui-même ; en notant $\mathcal{H}'$ l'ensemble $\mathcal{H}$ privé des côtés, l'application de $\mathcal{H}'$ sur $\mathcal{H}'$qui à M associe N est involutive.

11. *Fonction de Leibniz*

Soit ABC *un triangle d'un plan* $\mathcal{P}$. *On note* $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

Soit (α,β,γ) *un triplet de* $\mathbb{R}^3$ *vérifiant* $\alpha + \beta + \gamma = 0$ *et* $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$.

On note $L_{\alpha,\beta,\gamma} = \{M \in \mathcal{P} \ / \ \alpha\ MA^2 + \beta\ MB^2 + \gamma\ MC^2 = 0\}$

a) Déterminer la nature de $L_{\alpha,\beta,\gamma}$. *Montrer qu'il contient un point* Ω *fixe indépendant du choix de* (α,β,γ).

b) Démontrer que pour toute droite Δ *contenant* Ω, *il existe un triplet* (α,β,γ) *tel que* $L_{\alpha,\beta,\gamma} = \Delta$

c) Déterminer (α,β,γ) *dans les cas suivants :*

1) $\Delta = (\Omega A)$

2) Δ *médiatrice de* (A,C)

3) $\Delta = (\Omega G)$ *G centre de gravité de* ABC (ABC *non équilatéral)*

4) $\Delta = (\Omega I)$ *I centre du cercle inscrit* (ABC *non équilatéral)*

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC: $O \in L_{\alpha,\beta,\gamma}$
D'après la fonction de Leibniz avec des coefficients de somme nulle :
$L_{\alpha,\beta,\gamma}$ est une droite contenant O dont un vecteur normal est
$\beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}$ $(= \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB} = \alpha\,\overrightarrow{BA} + \gamma\,\overrightarrow{BC})$

b) Soit Δ une droite contenant O dont un vecteur normal est $\vec{u}$; il est possible de trouver deux réels non tous nuls tels que $\vec{u} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC}$; on prend ensuite $\alpha = -\beta - \gamma$ et on a bien $\Delta = L_{\alpha,\beta,\gamma}$.

c) 1) $A \in L_{\alpha,\beta,\gamma}$ ssi $\beta c^2 + \gamma b^2 = 0$
Choisissons $\beta = -b^2$ et $\gamma = c^2$; on a alors $\alpha = b^2 - c^2$
d'où $L_{b^2-c^2,\,-b^2,\,c^2} = (OA)$

2) Δ contient le milieu de (A,C) si $\Delta = L_{1,0,-1}$

3) On a $GA^2 = \overrightarrow{AG}^2 = \left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}\right)^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$

$$GC^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{9} \quad \text{et} \quad GB^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}.$$

En effet:

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right] \quad \text{or} \quad 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

D'où $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}\left[2AB^2 + 2AC^2 - BC^2\right]$

On peut prendre $\alpha = b^2 - c^2$, $\beta = c^2 - a^2$ et $\gamma = a^2 - b^2$ d'où
$(OG) = L_{b^2 - c^2,\; c^2 - a^2,\; a^2 - b^2}$

Remarque :

On peut poser la même question avec (OH) ce qui prouvera (OG) = (OH).

4) I est barycentre de (A,a) (B,b) (C,c)

d'où $\overrightarrow{AI} = \dfrac{b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}}{2p}$

$$AI^2 = \frac{1}{4p^2}\,[b^2\,AB^2 + c^2\,AC^2 + 2bc\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}] \quad \text{d'où}$$

$$AI^2 = \frac{1}{4p^2}\,[b^2c^2 + c^2b^2 + bc\,(b^2 + c^2 - a^2)]$$
$$= \frac{bc}{4p^2}\,[(c + b)^2 - a^2] = \frac{bc\,(p - a)}{p}\,.$$

De même $BI^2 = \dfrac{ac(p - b)}{p}$ et $CI^2 = \dfrac{ab(p - c)}{p}$

On peut prendre $\alpha = a(c - b)$, $\beta = b(a - c)$ et $\gamma = c(b - a)$.

12. *Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ trois droites de l'espace non coplanaires.*
Soit λ appartenant à $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}_\lambda$ des points M_2 de $\mathcal{D}_2$ vérifiant :

Il existe une droite passant par M_2 coupant $\mathcal{D}_1$ en M_1 et $\mathcal{D}_3$ en M_3 de façon que M_2 soit le barycentre de (M_1,λ) et $(M_3, 1 - \lambda)$

(Distinguer les cas a) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ non parallèles à un même plan
b) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ parallèles à un même plan).

Indications

Soit Δ une droite coupant $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_3$ en A_1 et en A_3.

Soit A_2 le barycentre de (A_1, λ) , $(A_3, 1 - \lambda)$

Considérons $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ les plans contenant $\mathcal{D}_1$ parallèle à $\mathcal{D}_3$, contenant $\mathcal{D}_3$ parallèle à $\mathcal{D}_1$. Tout barycentre d'un point M_1 de $\mathcal{D}_1$ affecté du coefficient λ et d'un point M_3 de $\mathcal{D}_3$ affecté du coefficient $(1 - \lambda)$ appartient au plan Π parallèle à $\mathcal{P}_1$ et contenant A_2 (Thalès).

* Si $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ ne sont pas parallèles à un même plan, $\mathcal{D}_2$ et le plan Π se coupent en un point B_2 et on a $\mathcal{H}_\lambda = \{B_2\}$
* Si $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ sont parallèles à un même plan, $\mathcal{D}_2$ est parallèle à Π.

  Si $\mathcal{D}_2 \subset \Pi$ $\quad \mathcal{H}_\lambda = \mathcal{D}_2$.

  Si $\mathcal{D}_2 \subset \Pi$ $\quad \mathcal{H}_\lambda = \emptyset$.

CHAPITRE 3

ANGLES

Programme de 1ère SE:

Mesure de l'angle orienté d'un couple de vecteurs dans le plan orienté.

Commentaires : on n'hésitera pas à faire les abus de langage et de notations usuels, confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures, telle que $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ ou $(Ox, Ox') = \pi$, ou encore, pour un angle non orienté, $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$.

Programme de TCE :

Ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π ou modulo 2π. Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane.

Commentaires : les élèves doivent connaître la condition de cocyclicité de quatre points qui en résulte ... ils doivent savoir évaluer un angle à l'aide de l'argument d'un quotient et traduire l'orthogonalité ou la colinéarité de deux vecteurs.

Notons la disparition de la notion d'angles de droites. Nous nous sommes permis de suggérer un plan de cours (plus ou moins détaillé), montrant que l'on peut travailler avec des vecteurs (et sans introduire la notion d'angle de droites).

Conformément à l'esprit du programme, nous avons fait des abus de langage, en particulier pour la notion de bissectrice. En toute rigueur, un angle ne devrait pas être confondu avec deux demi-droites qui le représentent et on ne devrait pas parler de la "bissectrice d'un angle" mais de la bissectrice d'un couple de deux demi-droites de même origine...

I RAPPELS ET COMPLEMENTS SUR LES ANGLES ORIENTES :

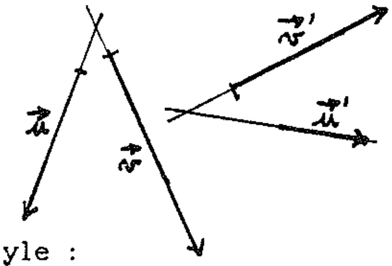
1) Des propriétés utiles sur les mesures des angles

a) Si α est une mesure en radians de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, toutes les autres mesures sont les nombres $\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \hat{\alpha}$ ou $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha + 2k\pi$

ou $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ équivaut à $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')\ [2\pi]$



b) . Echange des extrêmes ou des moyens :

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}',\vec{v}'}) \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{u}'}) = (\widehat{\vec{v},\vec{v}'})$

. Faire beaucoup de manipulations du style :

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}) + \pi \quad [2\pi]$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DC}) \quad [2\pi]$

c) <u>Effets des applications usuelles sur les angles</u>

Translations - homothéties - réflexions - rotations

d) <u>Mesure principale d'un angle</u>

$\theta \in\ ]-\pi,\pi]$

2) Congruence modulo π :

Si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \alpha\ [\pi]$, alors $2(\vec{u},\vec{v}) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$

Soient I et J des points quelconques sur (AB) (distincts ...) et E, F sur (CD), on a toujours $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{EF}) + k\pi$

Si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')\ [2\pi]$, alors $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')\ [\pi]$ mais la réciproque est fausse.

3) **Relation de Chasles**

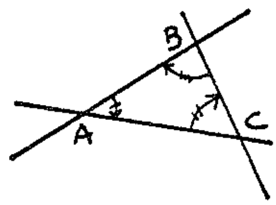
* $(\vec{U},\vec{V}) = (\vec{U},\vec{W}) + (\vec{W},\vec{V}) + 2k\pi$
* $(\vec{U},\vec{V}) = (\vec{U},\vec{W}) + (\vec{W},\vec{V}) + k'\pi$
* Forme soustractive $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{w},\vec{v}) - (\vec{w},\vec{u})\ [2\pi]$

Exercices d'application :

a) *Soit* $\vec{U} \perp \vec{U'}$ et $\vec{V} \perp \vec{V'}$; montrer que $(\vec{U},\vec{V}) = (\vec{U'},\vec{V'}) + k\pi$

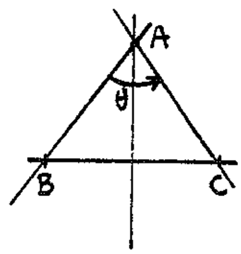
b) *Somme des angles d'un triangle*

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi$



c) *Construire un triangle isocèle* ABC *de sommet* A *sachant que*

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \theta\ [2\pi]$, BC = 1 ($\theta$ *et* 1 *donnés)*



4) **Alignement et orthogonalité**

A, B, C sont distincts (ou plutôt $A \neq B$ et $A \neq C$)

A, B, C alignés ssi $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv 0\ [\pi]$

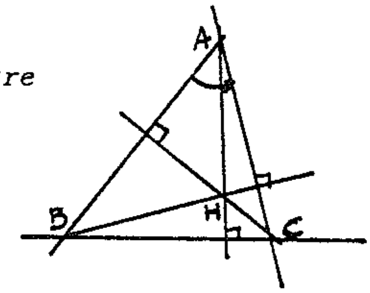
(AB) $\perp$ (AC) ssi $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Exercices :

a) $\left.\begin{array}{l} A, M, N \textit{ alignés } (A \neq M \textit{ et } A \neq N) \\ B \textit{ distinct de } A \textit{ tel que } (AM) \neq (AB) \\ (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})\ [\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow M = N$

Exercice illustrant la condition nécessaire et suffisante d'alignement.

b) Exercice illustrant la 2ème propriété d'orthogonalité



Soit ABC *non rectangle et* H *son orthocentre*

Montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB})$ $[\pi]$

5) **Bissectrices**

a) Bissectrice de deux demi-droites de même origine

b) Bissectrices de deux droites sécantes

6) **Argument de** $\frac{z-a}{z-b}$

7) **Cosinus et sinus d'un angle**

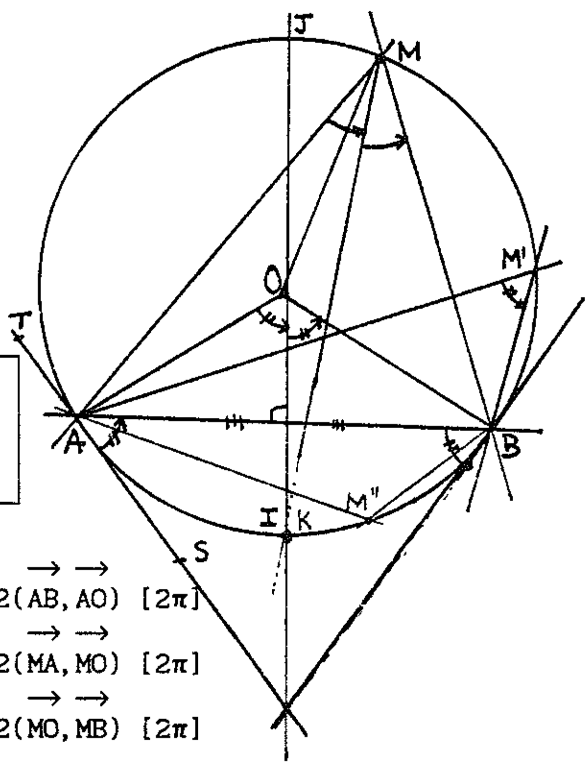
8) **Un résultat utile** :

Dans un triangle ABC, les trois angles $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ ont des mesures principales de même signe.

Si ces mesures sont positives, on dira que le triangle est direct.

II COCYCLICITE

1) **Théorème de l'angle inscrit**



$$2 \text{ mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \ [2\pi]$$

Dans OAB isocèle : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$ $[2\pi]$

Dans OMA isocèle : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})$ $[2\pi]$

Dans OMB isocèle : $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})$ $[2\pi]$

d'où $2 \text{ mes } (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv - \text{mes } (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) + 2k\pi$

$\equiv \text{mes } (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + 2K\pi$

2) La bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ est la droite (MI) où I milieu de l'arc AB ne contenant pas M.

a) Soient I et J les milieux des arcs AB ;

La bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ coupe [AB]

donc coupe l'arc AB^{I} en un point K.

Il suffit de démontrer que K = I.

En effet :

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}) \ [2\pi]$$
$$\equiv 2(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OB}) \ [2\pi]$$

Puisque $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}) = (\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OB}})$, (OK) est la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$,

donc K=I .

D'où

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}) \ [2\pi] \quad \text{si} \quad M \in AB^{J}$$
$$(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}) \ [2\pi] \quad \text{si} \quad M' \in AB^{I}$$

b) *Conséquence:*

si M et M' sont sur le même arc AB

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) \ [2\pi]$$

si M et M' ne sont pas sur le même arc

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) + \pi \ [2\pi]$$

c) *Tangente en* A

Pour tout point E de la tangente en A,

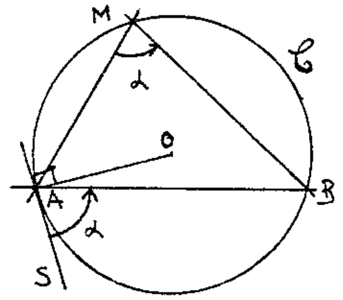
$$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}) \ [\pi]$$
$$\equiv (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \ [\pi]$$

Lorsque S est "du côté" de I $\quad (\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}) \ [2\pi]$

Lorsque T est "du côté" de J $\quad (\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}) \ [2\pi]$

3) Ensemble $\mathcal{T}$ des points M tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha + k\pi$

a) *cas* $\alpha \equiv 0\ [\pi]$ ($\mathcal{T}$ est la droite (AB) moins les points A et B).



b) *cas* $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$:

. Supposons qu'il existe un point M de $\mathcal{T}$: A, M, B ne sont pas alignés puisque $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$. Considérons alors le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à A, M, B : la droite $\mathcal{D}$ tangente en A à $\mathcal{C}$ est telle que $(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}) \equiv \alpha\ [\pi]$ donc $\mathcal{D}$ est fixe et le centre O du cercle est fixe.

Tout point de $\mathcal{T}$ est donc un point de $\mathcal{C}$.

. Réciproquement, on construit $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{D}$ et O.

Si $M \in \mathcal{C}$, alors $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB})\ [\pi]$ (si $M \neq A$, $M \neq B$)

$$\text{d'où:} \qquad \mathcal{T} = \mathcal{C} - \{ A, B \}$$

* *Remarque* : avec $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, cas particulier déjà connu.

4) Ensemble $\mathcal{T}'$ des points M tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \alpha + 2K\pi$.

Parler "d'arc capable" (?) ; en faire construire concrètement aux élèves avec des valeurs numériques.

5) Condition pour que 4 points soient cocycliques (ou alignés)

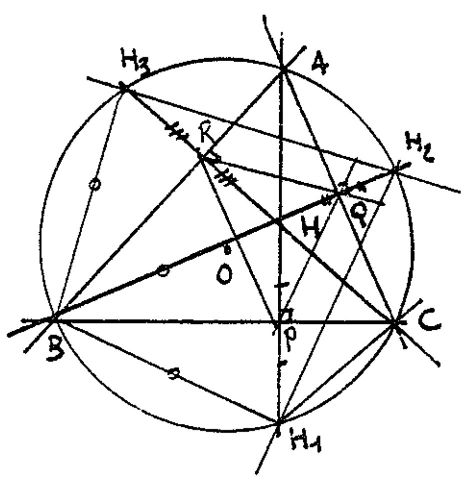
III EXERCICES

1. *Symétriques de l'orthocentre* :

a) H_1, H_2, H_3 *sont sur* $\mathcal{C}$

b) *En déduire que* (BH_2) *est une bissectrice de* $\widehat{H_3H_2H_1}$

c) *Démontrer que, dans un triangle, le triangle formé par les pieds des hauteurs* (PQR) *admet pour bissectrices les hauteurs* (AH), (BH), (CH) *et les côtés* (AB), (BC), (CA).



a) $(\overrightarrow{H_1B},\overrightarrow{H_1C}) \equiv -(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC})\ [2\pi]$

$\equiv -(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})\ [\pi]$ (Cf. un des exercices d'application)

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\pi]$

b) B est milieu d'un arc H_1H_3 $(H_3B = BH = BH_1)$ donc (H_2B) est une bissectrice de $\widehat{H_3H_2H_1}$.

(Si $\hat{A}$ ou $\hat{C}$ est obtus, (H_2B) est la bissectrice extérieure ...)

c) PQR est l'image de $H_1H_2H_3$ par $\mathcal{H}om\ (H, \frac{1}{2})$

2. *Droite de Simson*

L'ensemble des points M dont les projetés orthogonaux sur les côtés d'un triangle sont alignés est le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle.

* Les sommets A, B, C répondent à la question

* Soit M non sur les côtés (AB), (BC), (CA) et distinct des points A_1, B_1, C_1 diamétralement opposés à A,B,C sur le cercle $\mathcal{C}$. ; soit A', B', C' les projetés de M :

A', B', C' alignés ssi $(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}) \equiv 0\ [\pi]$

ssi $(\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'M}) + (\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}) \equiv 0\ [\pi]$

ssi $(\overrightarrow{CA'},\overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}) \equiv 0\ [\pi]$

(Car B'A'M C cocycliques ainsi que B'C'M A)

ssi $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})\ [\pi]$

On vérifie ensuite que A_1, B_1 et C_1 conviennent.

L'étude de ces cas singuliers se justifie car on pourrait avoir, par exemple A' = C'...

3. *Même principe que l'exercice précédent mais en construisant* A', B', C' *sur* (BC),(CA),(AB) *tels que* $(\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{MB'},\overrightarrow{CA}) \equiv (\overrightarrow{MC'},\overrightarrow{AB}) \equiv \alpha\ [\pi]$ *où* α *est un nombre donné,* $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$. *(Cf. chapitre 0).*

(La droite de Simson est alors la version avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

La démonstration est identique.

Faire remarquer que A',B',C' existent bien puisque $\alpha \not\equiv 0\ [\pi]$

4. ABCD *est un quadrilatère et* M *un point de* (BC). *Les cercles* ABM *et* CDM *se recoupent en* P.

a) lorsque (AB) *et* (CD) *se coupent en* E, *démontrer que* P *appartient au cercle* AED.

b) lorsque (AB) *et* (CD) *sont parallèles, démontrer que* P *appartient à la droite* (AD).

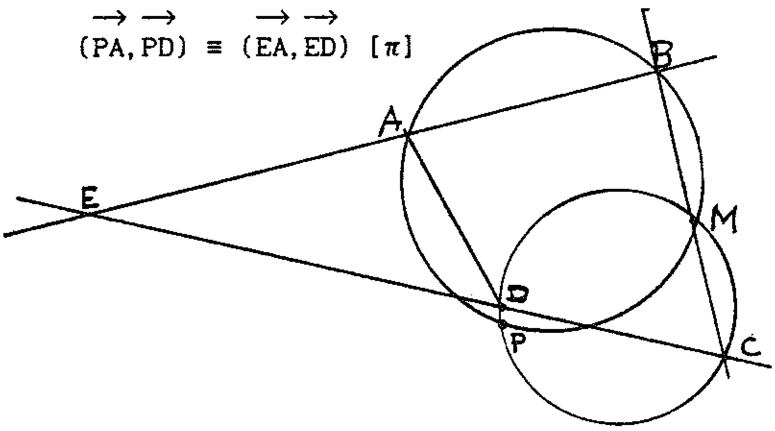
Exercice très abordable par l'élève moyen où interviennent beaucoup les propriétés sur la colinéarité de vecteurs et les congruences modulo π.

On a toujours :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}) &\equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PM}) + (\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PD}) \ [\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}) \ [\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}) \qquad\qquad [\pi]\end{aligned}$$

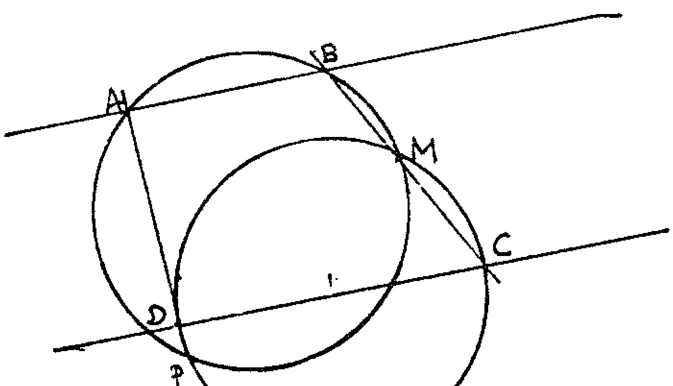
a) Lorsque (AB) et (CD) se coupent en E, on obtient :

$$(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}) \equiv (\overrightarrow{EA},\overrightarrow{ED}) \ [\pi]$$

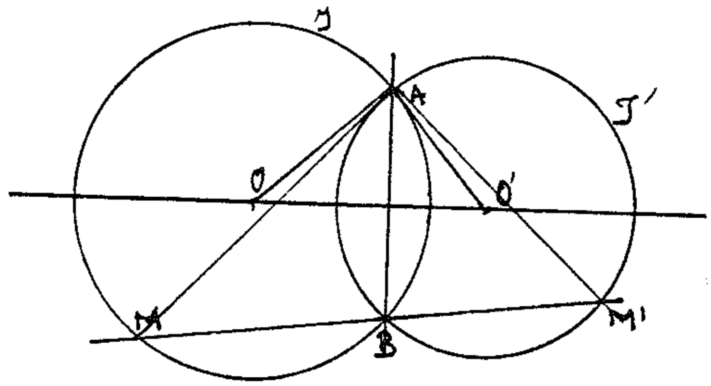


b) Lorsque (AB) et (CD) sont parallèles, on obtient :

$$(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}) \equiv 0 \ [\pi]$$



5. *Deux cercles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de centres O et O' sont sécants en A et B. Une droite passant par B recoupe $\mathcal{T}$ en M et $\mathcal{T}'$ en M'.*
Démontrer que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})\ [2\pi]$.



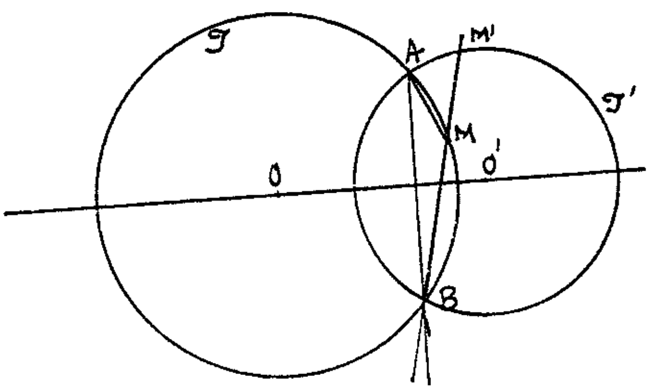
* On démontre facilement que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})\ [\pi]$

En effet, $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{AM'})\ [\pi]$

$$\equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'A})\ [\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A})\ [\pi]$$

* Pour démontrer la congruence modulo 2π, il faut envisager les deux cas : $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0\ [2\pi]$, et utiliser des propriétés du style $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OO'})\ [2\pi]$ si M se trouve sur l'arc "extérieur" à $\mathcal{T}'$.

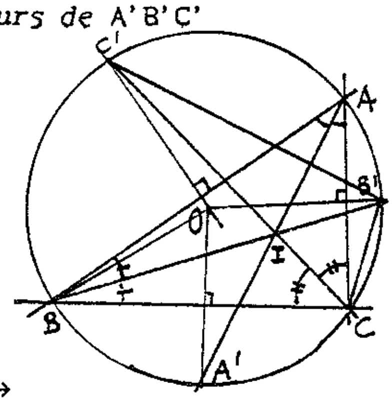


* On peut utiliser la similitude S de centre A transformant $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ et montrer que, si M" = S(M), alors M, B, M" sont alignés, d'où M" = M' et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})\ [2\pi]$ (conservation des angles orientés par une similitude directe).

* On peut aussi remarquer que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'})$ et $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'M})$ sont constants modulo π ; on peut alors démontrer que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'})$ et $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'M})$ sont constants modulo 2π.

D'où on déduit que $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}) \equiv (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A})\ [2\pi]$

6. *Soit* ABC *un triangle et* $\mathscr{C}$ *son cercle circonscrit.*
On note A', B', C' *les points d'intersection des bissectrices intérieures de* ABC *avec* $\mathscr{C}$.
Démontrer que (AA'), (BB'), (CC') *sont les hauteurs de* A'B'C'



*Il s'agit de montrer par exemple

que $(\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{A'A}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

Or $(\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{A'A}) \equiv (\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{BB'}) + (\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{A'A})\ [2\pi]$,

$(\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{BB'}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB})\ [\pi]$ (théorème de l'angle inscrit)

et $(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [2\pi]$ (C' point d'intersection de la bissectrice intérieure issue de C avec $\mathscr{C}$).

d'où $(\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{BB'}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [\pi]$

de plus $(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})\ [\pi]$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\pi]$

D'autre part $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \pi\ [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{C'B'},\overrightarrow{A'A}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

* Autre méthode utilisant les axes de symétrie :

Soit I le point de concours des bissectrices (AA'), (BB'), (CC').

Puisque A' et B' sont de part et d'autre de (BC) et A' milieu d'un arc BC, (A'B') est l'axe de symétrie des demi-droites [B'B) et [B'C).

Donc (B'C) est l'image de (B'I) dans la symétrie d'axe (A'B').

De même, (A'C) est l'image de (A'I) dans la symétrie d'axe (A'B') et C est l'image de I dans la symétrie d'axe (A'B').

7. *Reconstitution de figures*

Les notations sont celles de l'exercice 6 avec A_1, B_1, C_1 *les points d'intersection des hauteurs de* ABC *avec* $\mathscr{C}$.

a) Connaissant A'B'C' *reconstituer* ABC

b) Connaissant $A_1B_1C_1$ *reconstituer* ABC

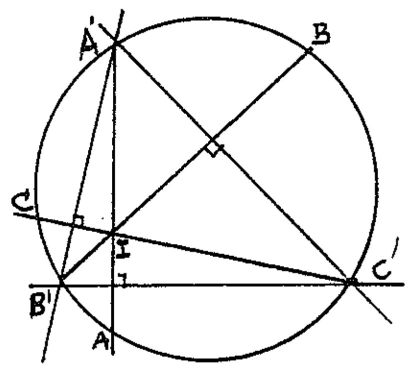
a) On suppose A' B' C' acutangle (i.e avec angles aigus)

* D'après l'exercice 6, les droites (AA'), (BB') et (CC') doivent être les hauteurs de A' B' C'. Donc le centre I du cercle inscrit à ABC est l'orthocentre de A' B' C'. On construit A, B, C.

Puisque les angles de A'B'C' sont aigus, l'orthocentre I est bien le point de concours des bissectrices intérieures de A B C (Cf. exercice 1).

Remarque :

Si, par exemple, B'A'C' est obtus, l'orthocentre I du triangle A'B'C' est alors le centre du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$.

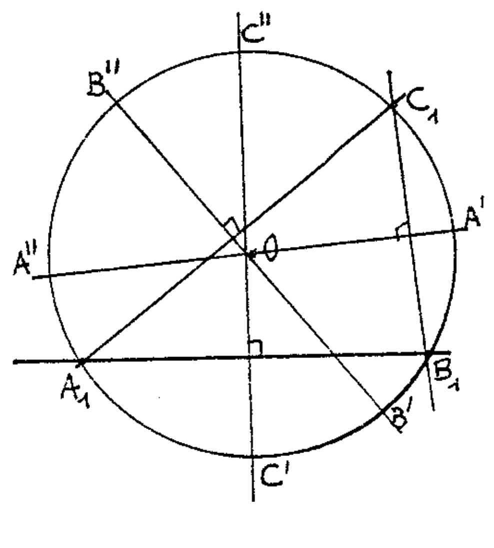


* Une autre approche :

Puisque A" B" C" a ses côtés parallèles à ceux de A B C, il est l'homothétique du triangle A B C. Par cette homothétie, O (centre du cercle inscrit à A" B" C") a pour image I, ce qui donne la construction de I.

b) A_1, B_1, C_1 étant donnés, si A, B, C, existent, on doit avoir B milieu d'un arc A_1C_1 etc...(Cf. exercice 1)

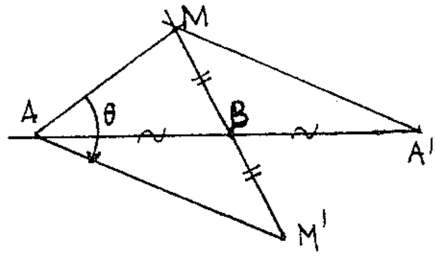
Il y a 4 triangles répondant à la question (A'B"C" ne convient pas par exemple).



8. *Soit* A *et* B *deux points fixes et un réel* θ *tel que* $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$

Trouver l'ensemble des points M *tels que* $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \hat{\theta}$ *où* M' *est le symétrique de* M *par rapport à* B.

* Soit A' le symétrique de A par rapport à B.



Par la symétrie s_B, on a :

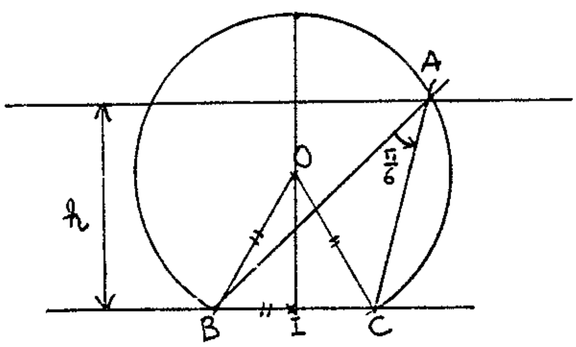
$(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'M}})$

et $(\widehat{\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'A}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AA'}})$

Donc si $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \hat{\theta}$, alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) \equiv \pi + \theta\ [2\pi]$ ce qui prouve que M est sur l'arc capable Γ d'angle $\pi + \theta$ associé au bipoint (A, A') $(M \neq A$ et $M \neq A')$

* Réciproquement, si M est un point de $\Gamma - \{A, A'\}$, on montre que $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}) = \hat{\theta}$.

9. *Construire un triangle* ABC *où* [BC] *est donné et* $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ *et* AH = h (H *pied de la hauteur issue de* A *et* h *donné*). *Discuter.*



CHAPITRE IV
TRANSLATIONS - HOMOTHETIES - ROTATIONS

Il nous semble important d'entraîner les élèves à plusieurs types d'exercices :

* l'apprentissage de "l'outil transformation", il s'agit là de faire des exercices simples qui permettent de comprendre ce qu'est une translation, une homothétie etc ... par exemple démontrer que si A', B', C' sont les milieux des côtés [BC], [AC], [AB] d'un triangle ayant G pour centre de gravité, l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme (ABC) en (A'B'C').

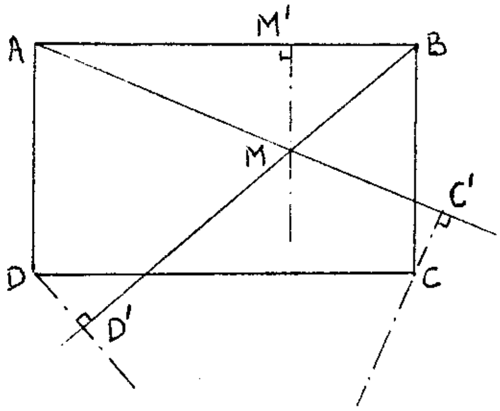
* les transformations sont des "outils" permettant de faire apparaître une propriété particulière d'une figure.

* elles sont utilisées pour des problèmes de lieux géométriques et pour des problèmes de construction.

I TRANSLATIONS

On utilise une translation pour faire apparaître une propriété

1. *Soit un rectangle* ABCD *et un point* M *du plan. Soit* C' *le projeté orthogonal de* C *sur* (AM), D' *le projeté orthogonal de* D *sur* (BM) *et* M' *le projeté orthogonal de* M *sur* (AB). *Démontrer que les droites* (DD'), (CC') *et* (MM') *sont concourantes.*



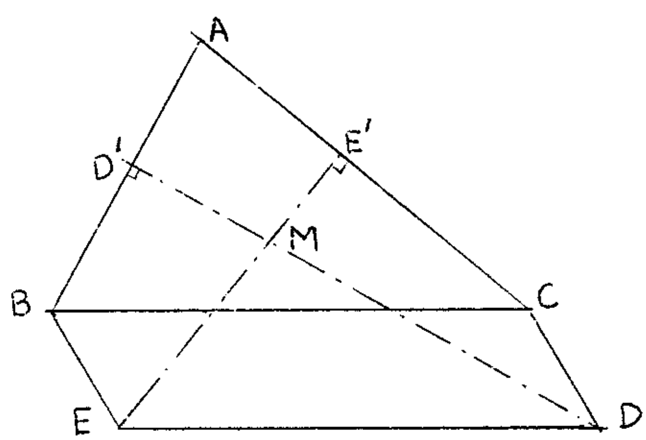
Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
t(B) = C et t(A) = D
Soit B' et A' les projetés orthogonaux de B et A sur (AM) et (BM).
(BB'), (AA'), (MM') concourent en l'orthocentre H du triangle ABM.
On montre alors que les images de ces trois hauteurs par t sont (CC'), (DD') et (MM') qui concourent en K = t(H).

<u>Exercices de lieux géométriques</u> :

2. *Soit* A *et* B *deux points fixes, un point* M *décrit un cercle* $\mathscr{C}$ *(ou une droite* $\mathcal{D}$*). Déterminer le lieu géométrique du point* N *tel que* ABMN *soit un parallélogramme.*

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$ d'où le lieu de N

3. *On donne un triangle fixe* ABC *et deux points* D *et* E *tels que* BCDE *soit un parallélogramme. Soit* E' *et* D' *les projetés orthogonaux de* E *et* D *sur* (AC) *et* (AB) *respectivement. Les droites* (EE') *et* (DD') *se coupent en* M. *Déterminer le lieu géométrique du point* M *lorsque le point* D *décrit une droite* $\mathcal{D}$.



On considère les hauteurs (BB') et (CC') du triangle ABC issues des points B et C et soit H l'orthocentre du triangle ABC.

On montre que $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{CD}$

Par suite $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CH}$, M est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CH}$, d'où le lieu du point M.

4. *Soit* $\mathscr{C}$ *un cercle de centre* O *et* [AB] *une corde de* $\mathscr{C}$; M *décrit* $\mathscr{C}$ - {A,B}.

a) Soit H *le point tel que* $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM}$; *montrer que* H *est l'orthocentre de* ABM.

b) Trouver le lieu de H.

c) Soit E *et* F *les points d'intersection des cercles de centres* M *et* H *et de rayon* MH . *Déterminer les lieux de* E *et* F *quand* M *varie.*

a) $\overrightarrow{AH} = 2\ \overrightarrow{OB'}$ où B' est le milieu de [BM], donc H appartient à la hauteur issue de A, et on montre de même que H appartient aussi à la hauteur issue de B.

b) $\overrightarrow{MH} = 2\ \overrightarrow{OI}$ où I est le milieu de [AB], donc H est l'image de M par la translation de vecteur $2\ \overrightarrow{OI}$.

Le lieu de H est le cercle $\mathscr{C}'$ de centre O' tel que $\overrightarrow{OO'} = 2\ \overrightarrow{OI}$ passant par les points A et B et privé des points A' et B', images de A et B par la translation de vecteur $2\ \overrightarrow{OI}$.

c) ME = MF = MH = HE = HF, donc MEHF est un losange et $\widehat{EMH} = \widehat{HMF} = 60°$.

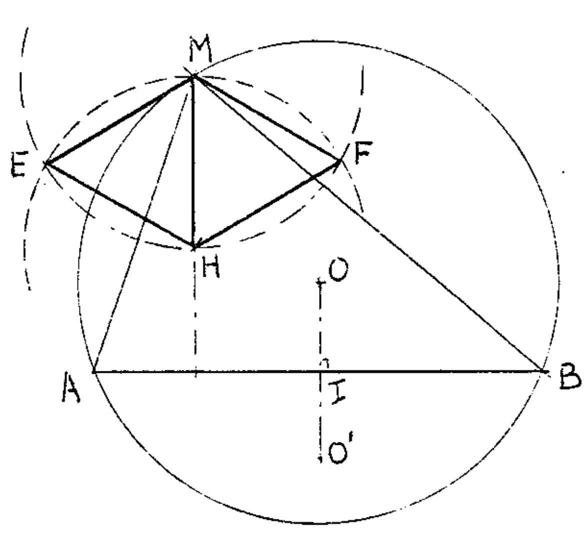
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs tels que

$\|\vec{u}\| = OO'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \vec{u}}) = -\frac{\pi}{3}$

$\|\vec{v}\| = OO'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$

On a alors $\overrightarrow{ME} = \vec{u}$, $\overrightarrow{MF} = \vec{v}$

d'où E et F sont les images de M par les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.



5. *Soit* B *un point fixe et* C *un point variable sur une droite* $\mathcal{D}$ *passant par* B *; on construit un triangle isocèle de base* [BC] *et de sommet* M.

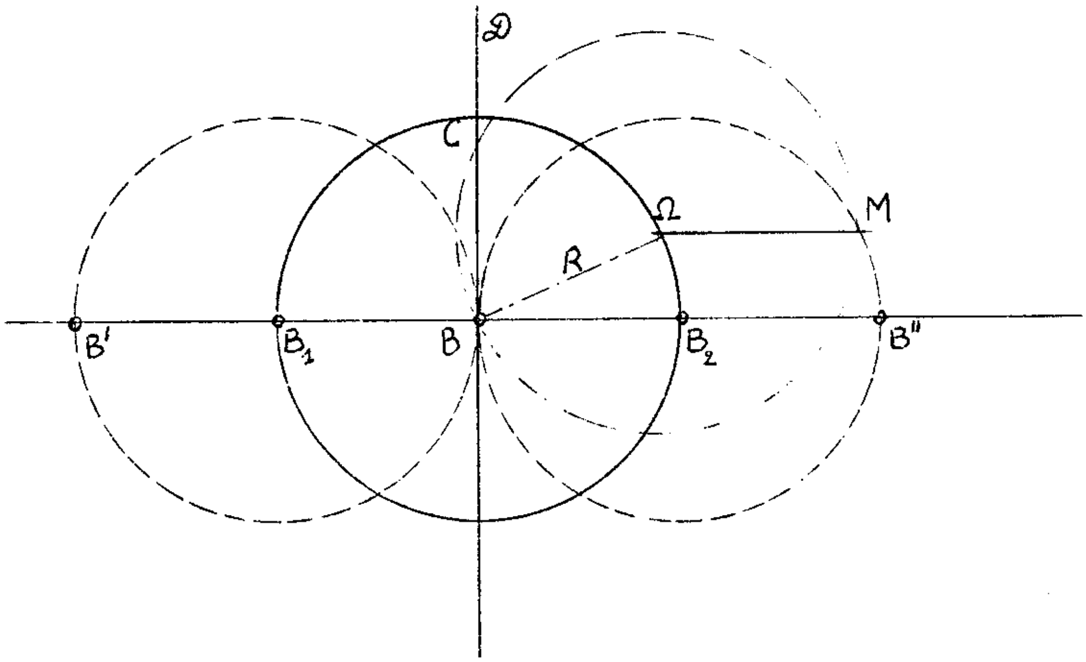
Déterminer le lieu géométrique du point M *sachant que le cercle circonscrit au triangle* BMC *a un rayon donné* R.

Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle BMC, $B\Omega = R$, et par conséquent on établit facilement que le lieu géométrique du point Ω est le cercle de centre B et de rayon R privé des points B_1 et B_2, intersection de ce cercle et de la perpendiculaire à (BC) en B.

On remarque que le point M est lié au point Ω par l'une ou l'autre des deux relations $\overrightarrow{\Omega M} = R\,\vec{J}$ ou $\overrightarrow{\Omega M} = -R\,\vec{J}$

$\vec{J}$ étant un vecteur unitaire dont la direction est orthogonale à celle de $\mathcal{D}$.

Le lieu de M se déduit de celui de Ω par les translations de vecteurs $R\,\vec{J}$ et $-R\,\vec{J}$: c'est l'union de deux cercles symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$ privée des points B, B' et B".



<u>Des exercices de construction</u>

(On utilisera le raisonnement par analyse - synthèse)

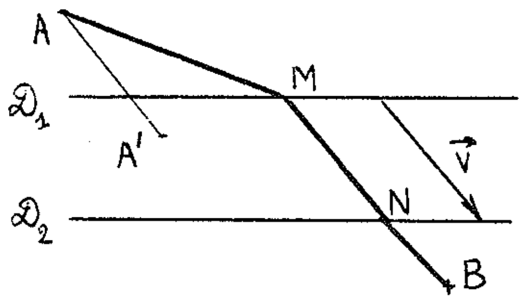
6. *On donne deux droites sécantes* $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ *et un vecteur* $\vec{v}$.

Construire un point M_1 *de* $\mathcal{D}_1$ *et un point* M_2 *de* $\mathcal{D}_2$ *tels que* $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$.

7. *On donne un cercle* $\mathscr{C}$ *et un vecteur* $\vec{v}$ *distinct du vecteur nul. Construire deux points* M_1 *et* M_2 *de* $\mathscr{C}$ *tels que* $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}$

Le problème n'admet de solutions que si $\| \vec{v} \| < 2$ R où R est le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

8. *Soit* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *deux droites strictement parallèles,* A *un point du demi-plan de frontière* $\mathcal{D}_1$ *qui ne contient pas* $\mathcal{D}_2$ *et* B *un point du demi-plan de frontière* $\mathcal{D}_2$ *qui ne contient pas* $\mathcal{D}_1$, A *n'appartient pas à* $\mathcal{D}_1$, B *n'appartient pas à* $\mathcal{D}_2$.
Construire un point M *de* $\mathcal{D}_1$ *et un point* N de $\mathcal{D}_2$ *tel que le chemin* AM + MN + NB *soit minimum* ,(MN) *ayant une direction donnée.*



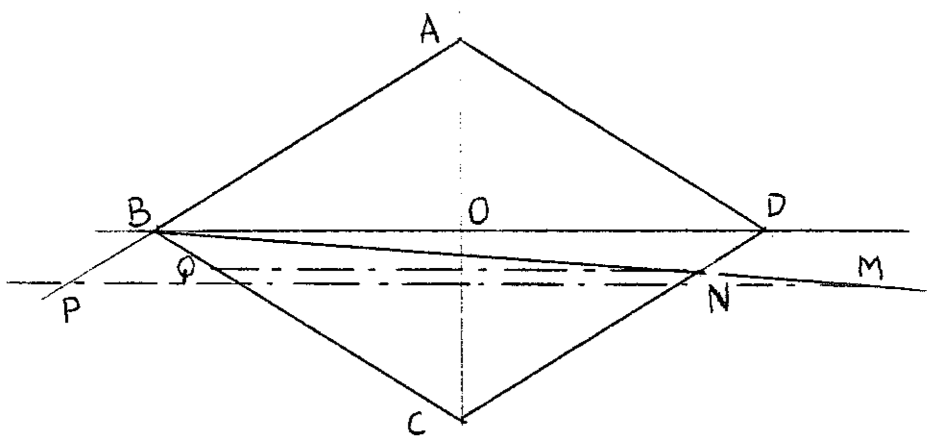
Indication:

Soit A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN} = \vec{v}$

$\overrightarrow{MN}$ est un vecteur fixe ; N est tel que A', N, B soient alignés

II REFLEXIONS

1. *Soit* ABCD *un losange,* O *son centre.*
Soit M *un point de* (AD) - {A,D}. *La droite* (MB) *coupe* (CD) *en* N.
On note P *le projeté de* M *sur* (AB) *parallèlement à* (BD)
On note Q *le projeté de* N *sur* (BC) *parallèlement à* (BD)
Démontrer que les points P,D,Q *sont alignés.*

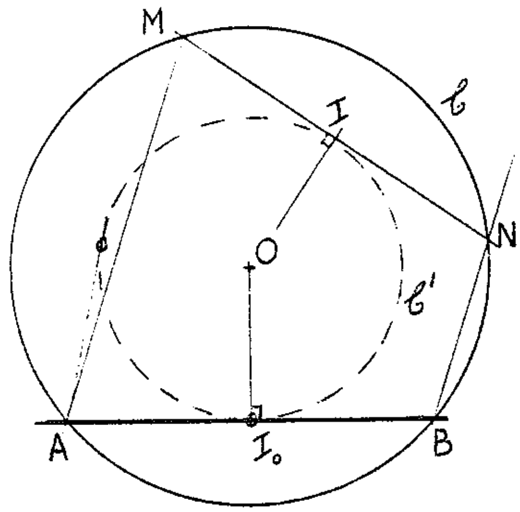


Indications

Montrer que les milieux I et J de (M,P) et de (N,Q) sont sur la droite (AC).

Utiliser la réflexion d'axe (AC)

2. *On donne un cercle fixe* $\mathscr{C}$ *de centre* O *et de rayon* R, [AB] *une corde fixe de ce cercle. Soit* M *un point variable décrivant le cercle* $\mathscr{C}$ *privé des points* A *et* B. *La parallèle à* (AM) *passant par* B *recoupe* $\mathscr{C}$ *en* N. *Etudier le lieu du milieu* I *de* [MN].



Indications

* Les cordes [AM] et [BN] ont la même médiatrice passant par O. [MN] est symétrique de [AB] par rapport à cette médiatrice. $OI = OI_0$ (I_0 projeté orthogonal de O sur (AB)), la corde [MN] a une longueur constante : $I \in \mathscr{C}'(O, OI_0)$.

* Réciproque. Soit I un point du cercle $\mathscr{C}'$ (sauf I_0 et son symétrique par rapport à (OA)). La parallèle à (I_0I) menée par A coupe $\mathscr{C}$ en M. Dans la symétrie dont l'axe est la médiatrice commune de [AM] et $[I_0I]$, B a pour image un point N de $\mathscr{C}$ et I est symétrique de I_0.

Remarque. On pourrait utiliser une similitude de centre O envoyant M sur I.

III HOMOTHETIES

1. *Soit un tétraèdre* ABCD *de centre de gravité* G. *A chaque point* M *de l'espace on associe le point* M' *tel que :*

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

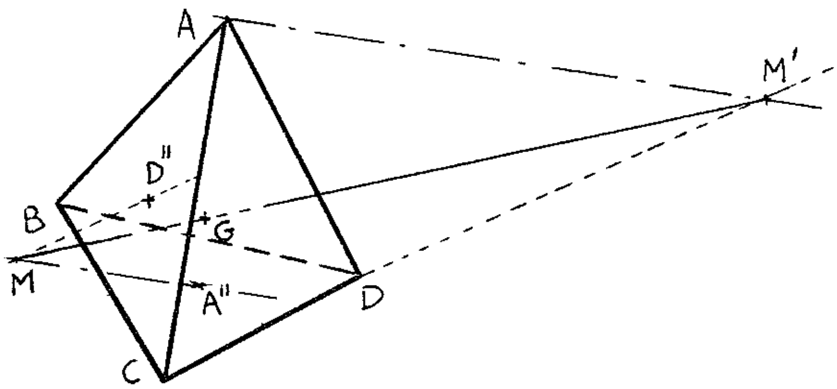
a) Démontrer que les points M, G, M' *sont alignés*

b) Démontrer que les droites (M'A), (M'B), (M'C), (M'D) *sont respectivement parallèles à* (MA"), (MB"), (MC"), (MD"), *où* A", B", C" *et* D" *sont les centres de gravités respectifs des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC.

a) On obtient facilement $\overrightarrow{MM'} = 4\,\overrightarrow{MG}$ d'où $\overrightarrow{GM'} = -3\,\overrightarrow{GM}$

M' est l'image de M par l'homothétie de centre G et de rapport -3.

b) L'homothétie h transforme A" en A, B" en B, C" en C et D" en D (configuration du tétraèdre) et M en M' ; on en déduit le résultat demandé.



<u>Homothéties "échangeant" deux cercles, deux carrés</u>

2. *On donne dans le plan, deux cercles* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *de centres* O *et* O' *distincts, de rayons* R *et* R' *différents.*

a) Démontrer qu'il existe deux homothéties transformant $\mathscr{C}$ *ou* $\mathscr{C}'$ *(en précisant comment sont déterminés les centres de ces homothéties).*

b) Démontrer que toute tangente commune à $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *passe par l'un des centres d'homothétie.*

3. *Soit maintenant deux cercles* $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ *tangents extérieurement en* A *et un point* B *à l'intérieur de* $\mathscr{C}$.

a) Une droite variable passant par B *coupe* $\mathscr{C}$ *en* M *et* N. *Les droites* (AM) *et* (AN) *recoupent le cercle* $\mathscr{C}'$ *respectivement en* M' *et* N'. *Démontrer que la droite* (M'N') *passe par un point fixe.*

b) Faire une figure en prenant R = 2R'. *Pour toute position de la droite* (MN), *on considère* G *le centre de gravité du triangle* AMN *et* G' *celui de* AM'N'. *Trouver une relation entre les vecteurs* $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{AG'}$.

2. En raisonnant par analyse-synthèse on démontre qu'il existe deux homothéties transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, l'une a pour centre Ω_1 barycentre de ((O',R), (O,-R')) et pour rapport $\frac{R'}{R}$, l'autre a pour centre Ω_2 barycentre de ((O',R), (O,R')) et pour rapport $-\frac{R'}{R}$ (cf chapitre 1).

3. a) La droite (M'N') passe par le point B' image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{R'}{R}$.

b) $\overrightarrow{AG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

4. *On donne deux cercles* $\mathscr{C}(O,4)$ *et* $\mathscr{C}'(O',2)$ *de centres respectifs* O *et* O' *de rayons* 4 cm *et* 2 cm *avec* OO' = 6 cm.

On trace deux demi-droites variables parallèles et de même sens, passant respectivement par O *et* O' *et coupant respectivement* $\mathscr{C}$ *en* M *et* $\mathscr{C}'$ *en* M'.

a) Montrer que la droite (MM') *passe par un point fixe* Ω *que l'on précisera et que l'on construira.*

b) Soit I *le point d'intersection des droites* (OM') *et* (O'M).

Démontrer qu'il existe une homothétie de centre I *qui envoie* M *en* O' *et* O *en* M'. *Préciser le rapport de cette homothétie.*

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O'I}$ *en fonction de* $\overrightarrow{O'M}$.

c) Déterminer le lieu géométrique du point J *milieu de* [MM'] *lorsque* M *décrit* $\mathscr{C}$.

5. *Soit les carrés* ABCD, A'B'C'D' *tels que* (AB) *parallèle à* (A'B') *et* (BC) *parallèle à* (B'C'). *Déterminer les homothéties transformant* ABCD *en* A'B'C'D'.

<u>Exercices de lieux géométriques</u>

6. A *et* B *sont deux points fixes,* M *un point variable du plan (ou de l'espace) décrit une droite ou un cercle (ou un plan, ou une sphère). Lieux des milieux de* [AM] *et* [BM] *et du centre de gravité de* ABM.

Les lieux de I, J et G se déduisent directement de celui de M par une homothétie.

7. *Dans un plan, on considère un cercle fixe* (Γ) *de centre* O *et de rayon* R, *et* A *un point fixe de ce cercle. Deux points* B *et* D *décrivent* (Γ) *de telle sorte que* DB = l $(0 < l < 2R)$.

a) Lieu géométrique du point I milieu de [BD]

b) Lieu géométrique de G centre de gravité du triangle ABD.

c) Lieu géométrique du point H orthocentre du triangle ABD (on démontrera que $\overrightarrow{OH} = 3\ \overrightarrow{OG}$*).*

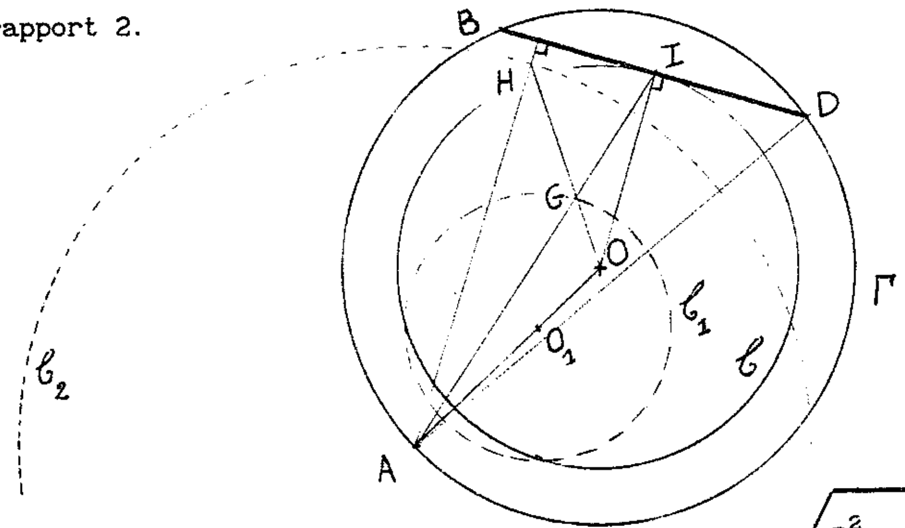
d) Lieu géométrique du point C, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

a) On démontre que I appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$ et que réciproquement tout point de ce cercle convient.

b) Le lieu de G se déduit de celui de I par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$ (il faudra enlever les points qui correspondent aux cas B = A ou D = A).

c) Le lieu de H se déduit de celui de G par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

d) Le lieu de C se déduit de celui de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.



lieu de I : cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$

lieu de G : cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O_1 ($\overrightarrow{AO_1} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AO}$) et de rayon $\frac{2}{3}R_1$

lieu de H : cercle $\mathscr{C}_2$ de centre A et de rayon $2R_1$ moins deux points (ceux correspondants aux cas B = A ou D = A).

lieu de C : cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A' tel que $\overrightarrow{OA'} = -\ \overrightarrow{OA}$ et de rayon $2R_1$.

8. *Soit* ABC *un triangle ;* B *et* C *sont deux points fixes et* A *décrit un cercle* $\mathscr{C}$.

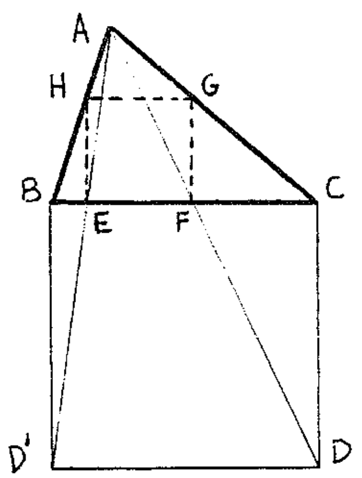
Déterminer les lieux géométriques des points B' *et* C' *milieux respectifs des segments* [AC] *et* [AB] *et du point* I *milieu de* [B'C'].

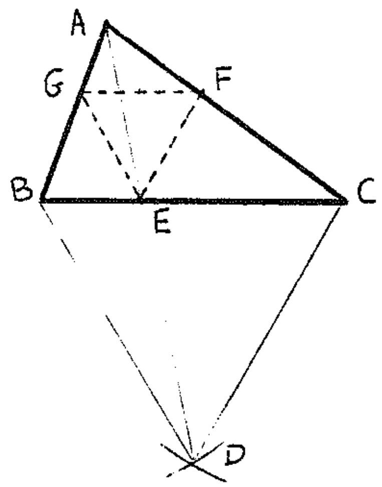
Déterminer le lieu géométrique du point G *centre de gravité du triangle* ABC.

Construction de figures

9. *Inscrire un carré* EFGH *dans un triangle* ABC *tel que* E *et* F *appartiennent à* [BC], G *à* [AC] *et* H *à* [AB].

C'est un problème classique, on construit (par exemple) le carré BCDD', on trace la droite (AD') qui coupe le côté [BC] en E, l'image du carré BCDD' par l'homothétie de centre A qui envoie D' en E est une solution.





10. *De même, inscrire un triangle équilatéral* EFG *dans un triangle quelconque* ABC *tel que* E *appartienne à* [BC], F *à* [AC] , G *à* [AB] *et* (GF) *parallèle à* (BC).

Composées d'homothéties

11. *Soit* ABM *un triangle,* A *et* B *sont des points fixes et* M *un point variable. A tout point* M *on associe le point* M' *tel que, si* N *est le milieu de* [BM], $\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$.

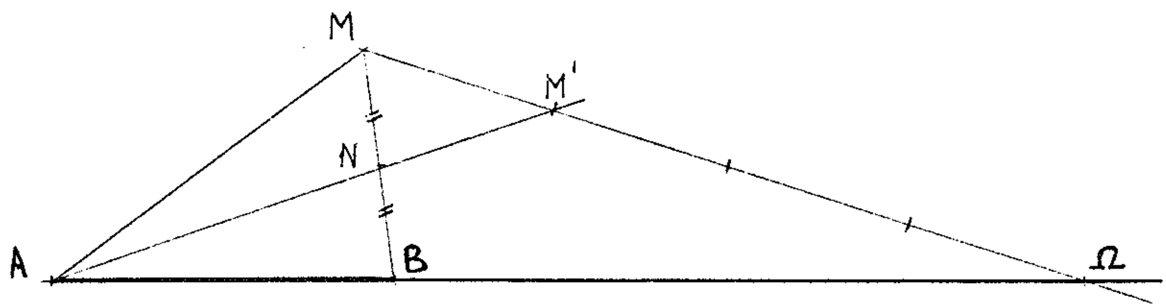
Démontrer que la droite (MM') *passe par un point fixe.*

Indication

M' est l'image de M par l'application composée $h_2 o h_1$ où h_1 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

$h_2 o h_1$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{4}$ où Ω est défini par $\overrightarrow{A\Omega} = 3\overrightarrow{AB}$.

La droite (MM') passe par Ω.



Autre méthode (Cf. chapitre 2 : Barycentres)

A et B étant donnés, à tout point M on associe le barycentre M' du système (A,α) (B,β) (M,γ) (α,β,γ donnés ; $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$).

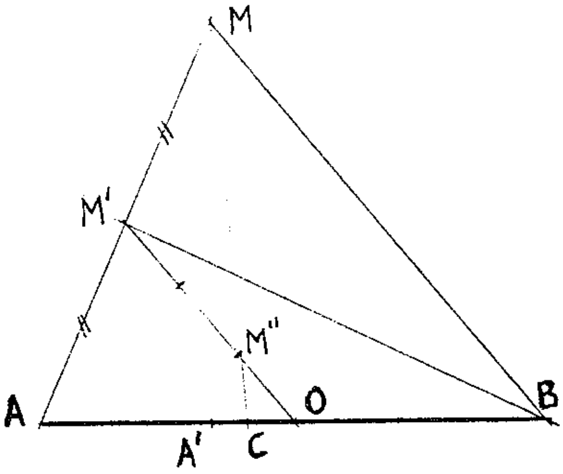
. si $\alpha + \beta \neq 0$, en considérant le barycentre Ω de (A,α) (B,β) l'application ϕ: $M \longrightarrow M'$ est une homothétie de centre Ω.

. si $\alpha + \beta = 0$, ϕ est une translation.

12. *On reprend les mêmes hypothèses :* A *et* B *sont des points fixes, à tout point variable* M *on associe* M' *tel que* $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AN}$ *où* N *est le milieu de* [BM]. *Démontrer que la droite* (MM') *a une direction fixe.*

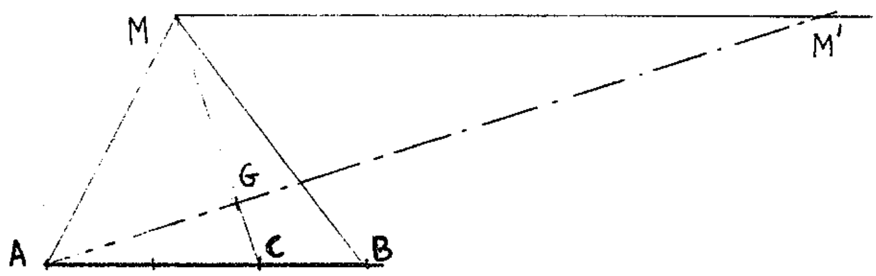
Plus généralement, on peut associer au point M le point M' barycentre de $\{(A,1), (N,\alpha)\}$ et suivant les valeurs de α préciser si la droite (MM') passe par un point fixe ou a une direction fixe.

13. *Soit* A *et* B *deux points fixes,* M *un point variable de l'espace,* M' *le milieu de* [AM], M" *le centre de gravité de* BAM' *; montrer que la droite* (MM") *passe par un point fixe.*



M' est l'image de M par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et M'' est l'image de M' par l'homothétie h' de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ donc M'' = h'∘h(M) (O étant le milieu de [AB]). h'∘h est l'homothéthie de centre C et de rapport $\frac{1}{6}$ tel que si A' = h'(A) ($\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$), alors C est barycentre de {(A',6),(A,-1)}

14. A *et* B *sont deux points fixes,* M *un point variable et* G *le barycentre de* {(A,1),(B,2),(M,1)}. *Soit* M' *le point défini par* $\overrightarrow{AM'} = 4\overrightarrow{AG}$, *démontrer que la droite* (MM') *garde une direction fixe.*



Si C est le barycentre de {(A,1),(B,2)} ($\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$), alors $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CM}$; d'autre part $\overrightarrow{AM'} = 4\overrightarrow{AG}$, M' est l'image de M par l'application h'∘h où h est l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{4}$ et h' l'homothétie de centre A et de rapport 4. h'∘h est donc la translation de vecteur $\vec{V}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{CC_1}$ où C_1 est l'image de C par h' ($\overrightarrow{AC_1} = 4\overrightarrow{AC}$) d'où $\vec{V} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$, ce qui prouve que la droite (MM') est parallèle à la droite (AB).

Remarque: On peut obtenir directement ce résultat à l'aide d'un calcul vectoriel:

G barycentre de (A,1) (B,2) (M,1) $\Leftrightarrow 4\,\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$

d'où $\overrightarrow{AM'} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}$ et par conséquent $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{AB}$

15. *Soit* A, B et C *trois points fixes et* M *un point variable tel que* ABCM *soit un tétraèdre. On considère le point* M' *tel que* $\overrightarrow{AM'} = 4\overrightarrow{AG}$ *où* G *est le centre de gravité du tétraèdre* ABCM. *Démontrer que la droite* (MM') *a une direction fixe quand* M *varie.*

Le raisonnement est analogue à celui qui est fait dans l'exercice précédent.

Si Ω est le centre de gravité du triangle ABC, $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega M}$.

M' est l'image de M par l'application $\hom(A,4)\circ\hom(\Omega,\frac{1}{4})$ qui est une translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ($\vec{V} = \overrightarrow{\Omega\Omega'} = 3\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$).

Remarque: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM}) - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

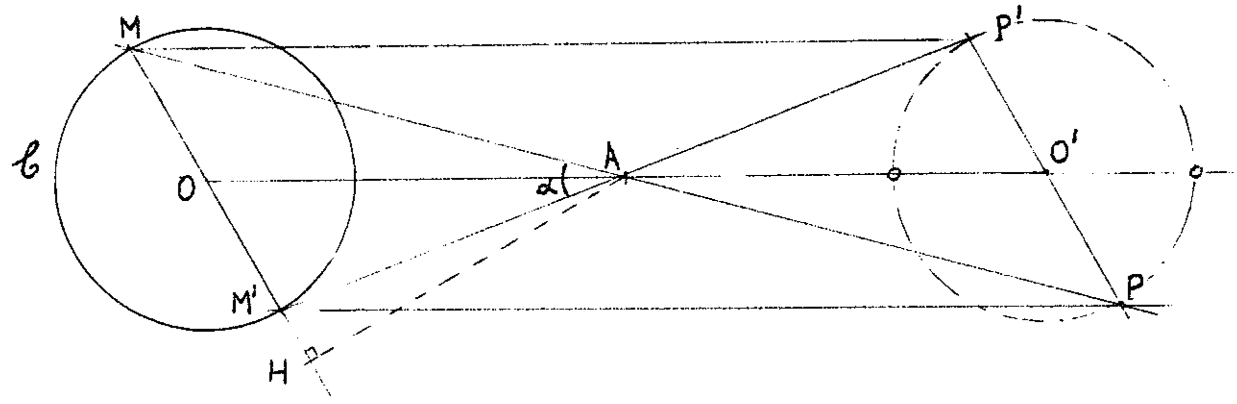
Symétrie centrale

16. *Soit un cercle fixe* $\mathscr{C}$ *de rayon* R *et de centre* O *et un point* A *fixe extérieur au cercle tel que* OA = *d*. *Soit* [MM'] *un diamètre variable de* $\mathscr{C}$. *La droite* (MA) *coupe en* P *la parallèle à* (OA) *issue de* M' *et la droite* (M'A) *coupe en* P' *la parallèle à* (OA) *issue de* M.

a) Montrer que la droite (PP') *passe par un point fixe.*

b) Trouver le lieu géométrique des points P *et* P'.

c) Construire le diamètre [MM'] *connaissant l'angle* $\widehat{MAM'} = \alpha$, *discuter. (On pourra faire intervenir le projeté orthogonal de* A *sur* (MM')).



a) On montre que la symétrie centrale de centre A transforme M en P et M' en P' (O milieu de [MM'] et (OA) parallèle à (M'P) donc A milieu de [MP]) ; par suite (PP') passe par O' symétrique de O par rapport au point A (et O' milieu de [PP']).

b) Les lieux de P et P' se déduisent de ceux de M et M' par la symétrie centrale de centre A. P et P' ont pour lieu le cercle $\mathscr{C}'$ symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à A privé des points d'intersection de ce cercle avec la droite (OA).

c) Dans le triangle AMM' : $MM'^2 = AM^2 + AM'^2 - 2\,AM \times AM' \cos\alpha$

$$\text{et } AM^2 + AM'^2 = 2AO^2 + \frac{MM'^2}{2}$$

$$\text{d'où : } AM \times AM' = \frac{2AO^2 + \frac{MM'^2}{2} - MM'^2}{2\cos\alpha} \quad \text{donc} \quad AM \times AM' = \frac{d^2 - R^2}{\cos\alpha}$$

D'autre part $AM \times AM' \sin\alpha = AH \times MM'$ où H est le projeté orthogonal de A sur (MM') (aire de AMM' $= \frac{1}{2} AM \times AM' \sin\alpha = \frac{1}{2} AH \times MM'$)

d'où $AH = \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ puisque A est extérieur à $\mathscr{C}$).

Le point H doit appartenir au cercle de diamètre [OA] et au cercle de centre A et de rayon $\frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha$; H n'existe que si ces deux cercles sont sécants c'est à dire si:

$$\left|\frac{d}{2} - \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha\right| < \frac{d}{2} < \frac{d}{2} + \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha \quad (e)$$

(La droite (MM') est alors tangente en H au cercle de diamètre [AH]).

La condition $\frac{d}{2} < \frac{d}{2} + \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha$ est toujours vérifiée

d'où (e) $\Leftrightarrow \; -\frac{d}{2} < \frac{d}{2} - \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha < \frac{d}{2}$

(e) $\Leftrightarrow \; \frac{d^2 - R^2}{2R} \tan\alpha < d$

(e) $\Leftrightarrow \; \tan\alpha < \frac{2Rd}{d^2 - R^2}$

Donnons une interprétation géométrique de cette condition :

Soit $[M_oN_o]$ le diamètre perpendiculaire à (OA).

$$\tan\frac{\alpha_o}{2} = \frac{OM_o}{OA} = \frac{R}{d} \quad \text{d'où } \tan\alpha_o = \frac{2\tan\frac{\alpha_o}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha_o}{2}} = \frac{2\frac{R}{d}}{1 - \frac{R^2}{d^2}}$$

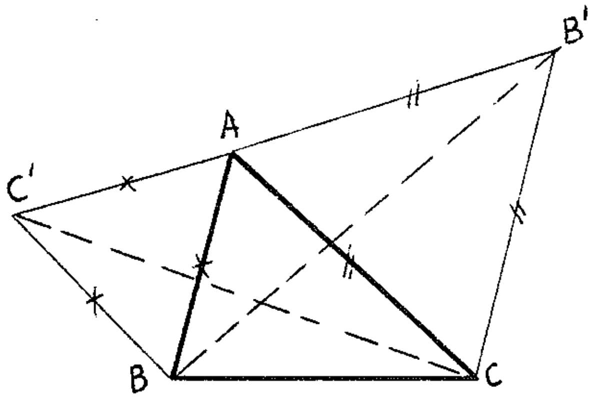
$$\text{soit } \tan\alpha_o = \frac{2Rd}{d^2 - R^2}$$

d'où (e) $\Leftrightarrow \tan\alpha < \tan\alpha_o$

(e) $\Leftrightarrow \alpha < \alpha_o$

IV ROTATIONS

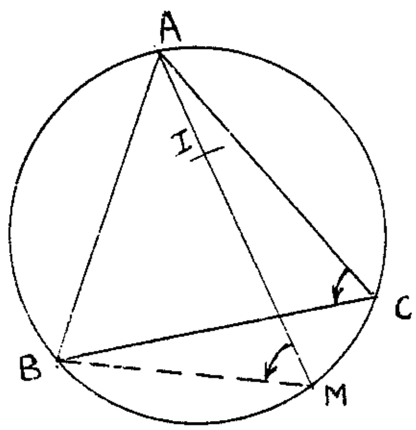
1. *Soit* ABC *un triangle direct,* C' *et* B' *deux points du plan* (ABC) *tels que les triangles* AC'B *et* ACB' *soient équilatéraux directs. Démontrer que les segments* [CC'] *et* [BB'] *ont même longueur et que l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}})$ est constant.



Commentaire. Il est important de faire comprendre aux élèves que lorsque l'on a un triangle équilatéral on peut faire apparaître des rotations de centre un sommet et d'angle $\frac{\hat{\pi}}{3}$ ou $-\frac{\hat{\pi}}{3}$, ou de centre, le centre du triangle et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$.

Ici la rotation de centre A et d'angle $\frac{\hat{\pi}}{3}$ permet de résoudre le problème.

2. *Soit* ABC *un triangle équilatéral direct et* $\mathscr{C}$ *son cercle circonscrit et soit* M *un point de l'arc* $\widehat{BC}$ *ne contenant pas le point* A. *Démontrer que* MA = MB + MC.



Indication : Faire intervenir le point I de [MA) tel que MI = MB, il reste à démontrer que AI = MC et I appartient bien à [MA].

Démonstration :

$(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = \frac{\hat{\pi}}{3}$

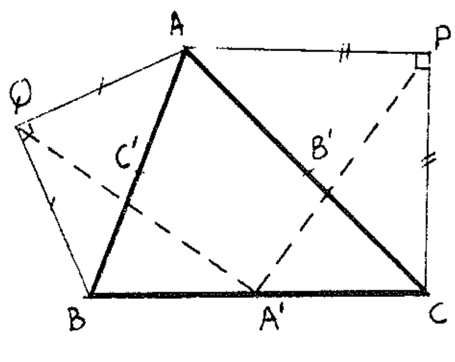
(angles inscrits interceptant le même arc)

La rotation de centre B et d'angle $-\frac{\hat{\pi}}{3}$ transforme A en C et I en M d'où AI = MC.

D'autre part, la médiatrice Δ de [AB] coupe $\mathscr{C}$ en C et M et B sont du même côté de Δ ; d'où MA > MB donc MA > MI (ce qui prouve bien que I appartient à [MA]).

3. *Soit* ABC *un triangle direct ; on construit les points* P *et* Q *tels que les triangles* PAC *et* QBA *soient rectangles et isocèles de sommets* P *et* Q *et soient directs.*

Etudier la nature du triangle A'PQ *où* A' *est le milieu de* [BC].



<u>Commentaire</u> : D'après la figure on peut conjecturer que A'PQ est rectangle en A' et isocèle ; il faut donc démontrer que

$$\begin{cases} A'P = A'Q \\ (A'P) \perp (A'Q) \end{cases}$$

Les triangles rectangles et isocèles de sommets P et Q suggèrent de considérer les quarts de tour indirect de sommets P et Q.

<u>Démonstration</u>

Soit r_P et r_Q les quarts de tour indirect de sommets P et Q.

$r_Q \circ r_P$ est le demi-tour qui transforme C en B, son centre est donc A'

$r_Q \circ r_P = s_{A'}$

$s_{A'}(P)$ est le point P' symétrique de P par rapport au point A'.

D'autre part $P' = r_Q(r_P(P)) = r_Q(P)$, par suite le triangle PQP' est rectangle et isocèle de sommet Q et , puisque A' est le milieu de [PP'], QA' = A'P et (QA') est perpendiculaire à (A'P).

<u>Autres méthodes possibles :</u>

a) Par les nombres complexes

(avec $z' - z_0 = i(z - z_0)$ ou $z' - z_0 = -i(z - z_0)$)

b) Par le produit scalaire en faisant intervenir les milieux de [AB] et [AC].

c) Par les rotations vectorielles:

A', B' et C' étant les milieux de [BC], [CA], [AB]

$\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'P} = \overrightarrow{A'B'} + \tilde{r}_{-\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{B'A})$ ($\tilde{r}_{-\frac{\pi}{2}}$ rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$)

$\overrightarrow{A'Q} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{A'C'} + \tilde{r}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{C'A})$

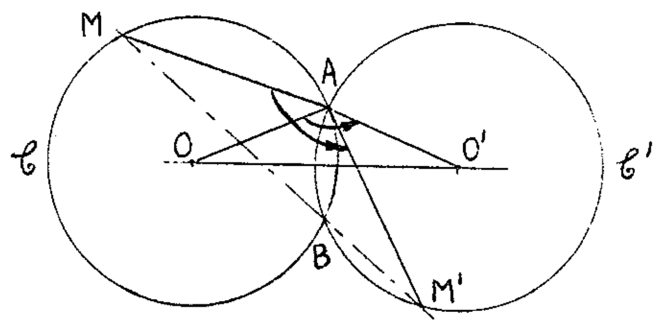
or $\quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A}$

D'où $\overrightarrow{A'Q} = \overrightarrow{B'A} + \tilde{r}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{A'B'}) = \tilde{r}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{B'P} + \overrightarrow{A'B'}) = \tilde{r}_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{A'P})$

(On a utilisé la linéarité de la rotation vectorielle).

d) Par les similitudes en composant les similitudes s_1 et s_2 ; s_1 de centre B, d'angle $\frac{\hat{\pi}}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ et s_2 de centre C, d'angle $\frac{\hat{\pi}}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. *Soit* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *deux cercles de centres* O *et* O' *et de même rayon, sécants en* A *et* B, *et soit* r *la rotation de centre* A *qui transforme* $\mathscr{C}$ *en* $\mathscr{C}'$. M *étant un point de* $\mathscr{C}$ *et* M' *son image par* r, *démontrer que la droite* (MM') *passe par* B.



La rotation r a pour "triangle directeur" AOO', son angle est $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'})^{\wedge}$.

Il s'agit de montrer que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 \; [\pi]$

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}) \quad [\pi]$

or $\quad 2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \quad [2\pi]$

$\quad 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM'}) \equiv (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'}) \quad [2\pi]$

et $\quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) \equiv (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A}) \quad [2\pi]$ (conservation des angles orientés par une rotation).

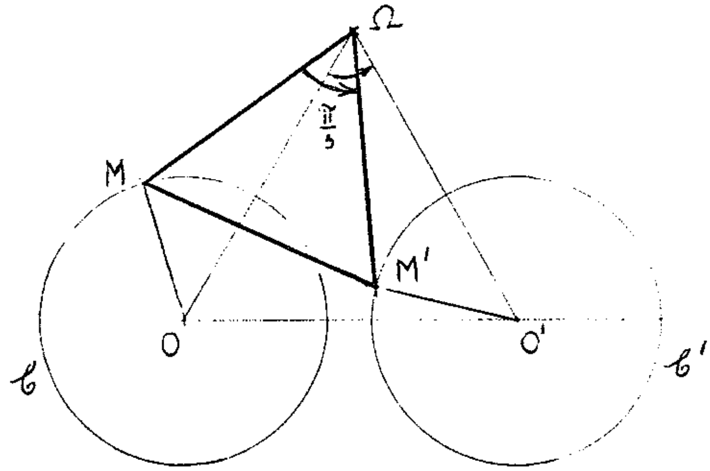
D'où

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 \quad [\pi]$$

5. *Soit* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *deux cercles de centres* O *et* O' *et de même rayon; à tout point* M de $\mathscr{C}$ *on associe le point* M' de $\mathscr{C}'$ *tel que*

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Démontrer que la médiatrice de [MM'] *passe par un point fixe.*



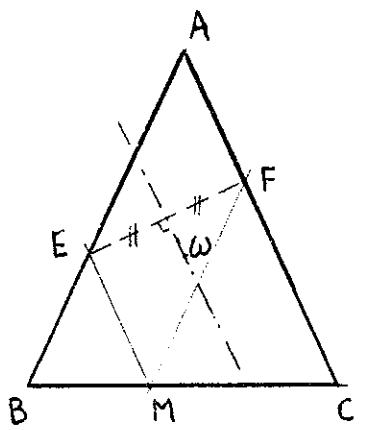
Puisque OM = O'M' et $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ [2π] ,il existe une unique rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant O en O'. Son centre Ω appartient à la médiatrice de [OO'] et à l'arc capable d'angle $\frac{\pi}{3}$ pour le segment [OO'].

M' est l'image de M par cette rotation, il en résulte que la médiatrice de [MM'] passe par Ω.

(Remarque : ΩMM' est un triangle équilatéral direct).

6. *Soit* ABC *un triangle isocèle de sommet* A, M *un point variable du segment* [BC]. *Les parallèles à* (AB) et *à* (AC) *menées par* M *coupent* [AC] *en* F *et* [AB] *en* E.

Montrer que la médiatrice de [EF] *passe par un point fixe.*



Commentaire : étudier la figure ; pour montrer qu'une médiatrice passe par un point fixe on peut penser à faire apparaître une rotation.

Démonstration

EM = BE = AF et $(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AF}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$

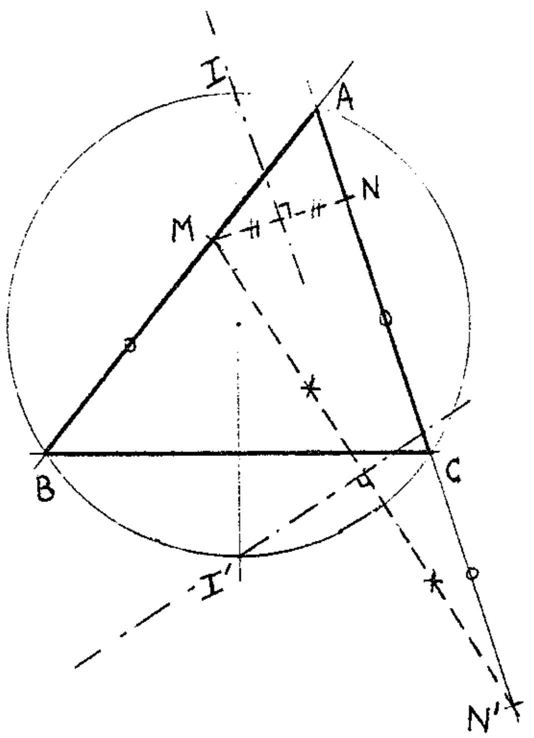
La rotation r d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$ qui transforme B en A, transforme le point E en le point F.

Le centre de la rotation, ω, appartient à la médiatrice de [AB] et à l'arc capable de $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}})$ décrit sur [BA]. On remarque que ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC :

$(\widehat{\overrightarrow{\omega B},\overrightarrow{\omega A}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})$

7. *Soit un triangle* ABC, M *un point du segment* [AB] ; *soit* N *un point de la droite* (AC) *tel que* CN = BM.

Montrer que la médiatrice du segment [MN] *passe par un point fixe (on distinguera deux cas suivant la position de* N *sur la droite* (CA)).



* N appartient à la demi-droite [CA)

$$\begin{cases} BM = CN \\ (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \end{cases}$$

La rotation r d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ qui transforme B en C, transforme M en N. Le centre I de cette rotation est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BAC}$ du cercle circonscrit au triangle ABC.

* N' appartient à la demi-droite opposée à [CA).

$$\begin{cases} BM = CN' \\ (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN'}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}}) = [(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + \hat{\pi}] \end{cases}$$

La rotation d'angle ($\hat{\pi}$ + $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ qui transforme B en C, transforme le point M en N'. Le centre I' de cette rotation est le point diamétralement opposé à I sur le cercle circonscrit à ABC.

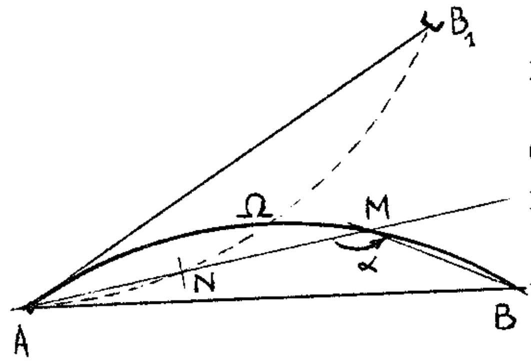
Utilisation de la rotation pour des problèmes de lieux géométriques

L'exercice qui suit est un exercice élémentaire qui a pu être fait en 1ère.

8. A *est un point fixe et* M *un point qui décrit une droite* $\mathcal{D}$ *ou un cercle* $\mathcal{C}$. *A tout point* M *on associe le point* M' *tel que le triangle* AMM' *soit équilatéral direct (ou rectangle et isocèle de sommet* A *direct).*

Déterminer le lieu de M'.

9. *On donne un arc de cercle* $\overset{\frown}{AB}$ *et* M *un point variable sur cet arc. On porte sur la demi-droite* [AM) *le point* N *tel que* AN = BM. *Quel est le lieu géométrique du point* N ?.



Puisque M décrit un arc $\overset{\frown}{AB}$, l'angle $(\overrightarrow{MA},\widehat{\ }\overrightarrow{MB})$ est constant

Posons $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

On a alors $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BM}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

Par conséquent :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AN}) \equiv -\alpha\ [2\pi] \\ BM = AN \end{cases}$$

Puisque $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$, il existe une unique rotation r d'angle $-\alpha$ qui transforme B en A. Cette rotation transforme M en N.

Son centre est le point Ω vérifiant $\Omega A = \Omega B$ et $(\overrightarrow{\Omega A},\widehat{\ }\overrightarrow{\Omega B}) = \hat{\alpha}$, c'est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Le lieu de N est l'image de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par la rotation r.

Soit B_1 l'image de A par r:

$r : B \to A$ $\qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B_1A}) \equiv -\alpha\ [2\pi]$

$\quad A \to B_1$

d'où

$(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [\pi]$

(AB_1) est tangente à l'arc $\overset{\frown}{AB}$ en A.

Le lieu de N est l'arc $\overset{\frown}{A\Omega B_1}$ admettant (AB) comme tangente en A.

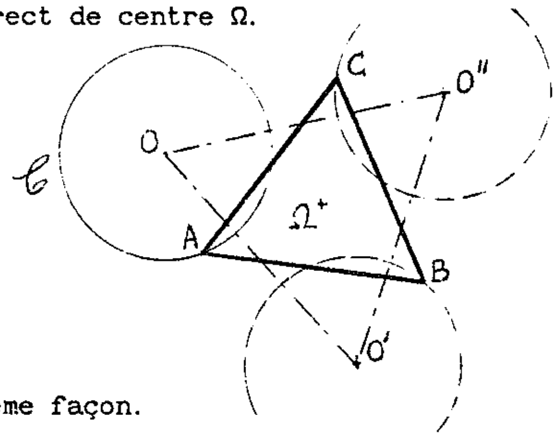
10. *On donne un cercle* $\mathscr{C}$ *fixe de centre* O *et un point fixe* Ω. *On construit un triangle équilatéral direct* ABC *de centre* Ω *dont le sommet* A *décrit le cercle* $\mathscr{C}$. *Trouver les lieux géométriques des sommets* B *et* C.

Reprendre le même problème avec un carré direct ABCD *ou un hexagone régulier* ABCDEF *direct de centre* Ω.

Cas du triangle équilatéral

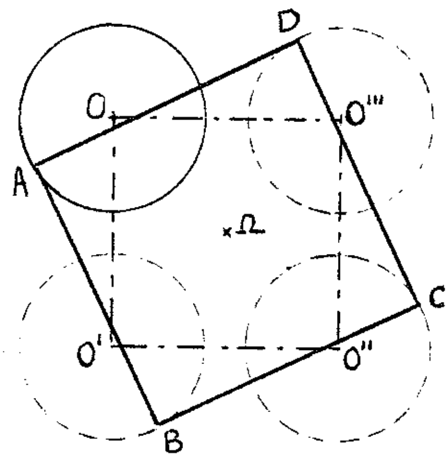
On passe de A à B par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de A à C par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Remarque : les centres O, O' et O" des cercles lieux de A, B et C forment un triangle équilatéral direct de centre Ω.



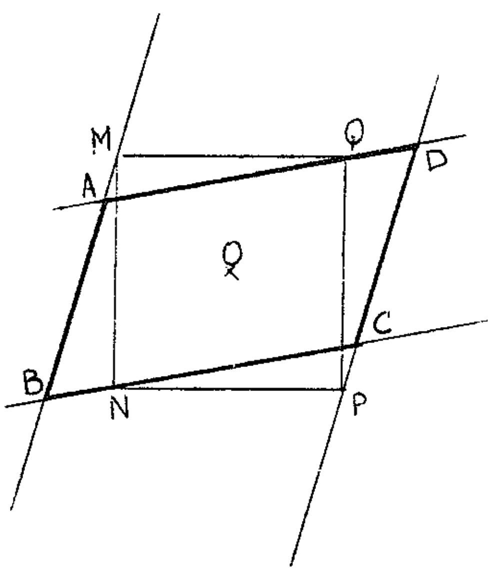
Cas du carré ou de l'hexagone

Le problème se traite de la même façon.



Exemple de problème de construction

11. *Soit* ABCD *un parallélogramme ; construire un carré* MNPQ *dont les sommets appartiennent aux supports des côtés du parallélogramme. On pourra montrer que le centre du carré est confondu avec le centre du parallélogramme.*



Analyse

Soit O le centre du carré et $\mathcal{S}_O$ la symétrie centrale de centre O.

Puisque $\mathcal{S}_O(M) = P$ et $(AB) \mathbin{//} (CD)$ on a $\mathcal{S}_O\langle(AB)\rangle = (CD)$.

De même $\mathcal{S}_O\langle(BC)\rangle = (AD)$.

Ce qui prouve que

$$\begin{cases} \mathcal{S}_O(B) = D \\ \mathcal{S}_O(C) = A \end{cases}$$

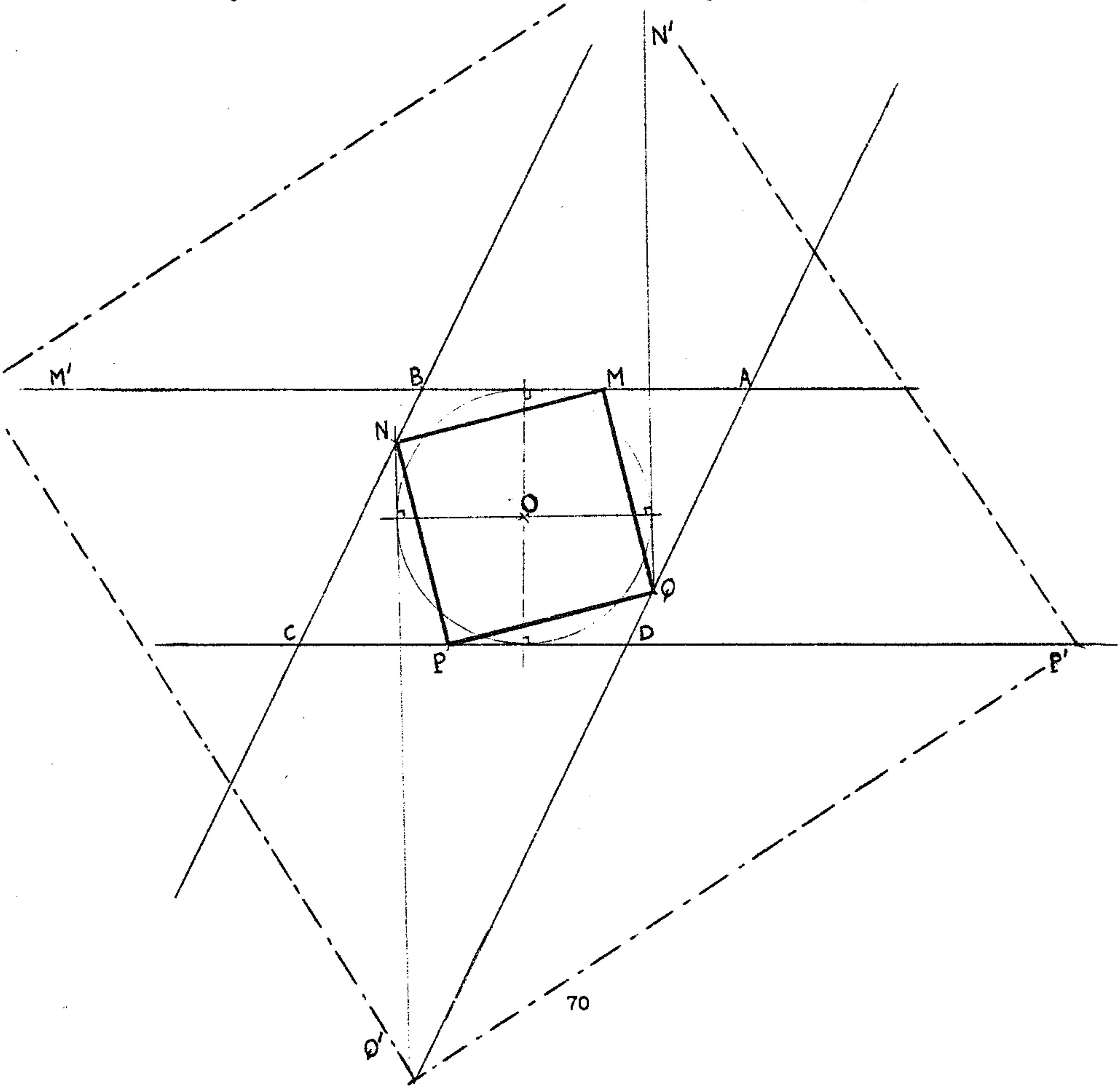
O est le centre du parallélogramme.

Soit M un sommet du carré appartenant à la droite (AB), N est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\widehat{\frac{\pi}{2}}$ (ou $-\widehat{\frac{\pi}{2}}$) par conséquent N est le point d'intersection de la droite (BC) et de l'image de (AB) par cette rotation.

Synthèse

On construit l'image de (AB) par le quart de tour direct (respt. indirect) de centre O ; si ABCD n'est pas un rectangle, cette droite coupe (BC) en un point N. On construit ensuite M image de N par la rotation réciproque, puis les points P et Q symétriques de M et N par rapport à O et on montre qu'ils appartiennent bien à (CD) et (DA) respectivement.

Le problème admet 2 solutions si ABCD n'est pas un rectangle.



CHAPITRE 5
SIMILITUDES PLANES DIRECTES

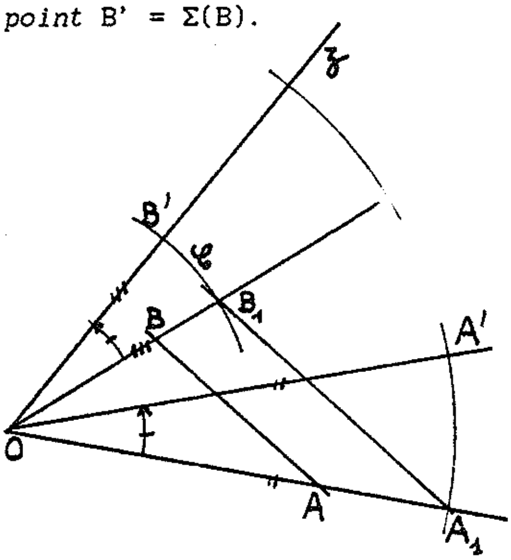
0. GENERALITES

Le cours sur les similitudes vient coiffer l'étude des isométries et des homothéties. De très nombreux exercices sont à envisager, en commençant par des cas d'emploi direct du cours. Nous avons groupé par thèmes un peu arbitraires, un certain nombre de petits problèmes. Nous n'avons repris aucun exercice basé uniquement sur l'emploi de la formule complexe
$z' = az + b$.

I. CONSTRUCTIONS ELEMENTAIRES LIEES A LA SIMILITUDE

1. *Une similitude plane directe* Σ *de centre* O *transforme* A *en* A'.

O, A, A' *donnés - Soit* B *un point distinct de* O *et* A. *Construire le point* B' = Σ(B).



Soit A_1 tel que : $A_1 \in [OA)$ $OA_1 = OA'$

B_1 le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par A_1 et de (OB).

On a : $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OA'}{OA}$

De plus $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}})$ d'où

B' appartient au cercle $\mathscr{C}(O, OB_1)$ et à la demi-droite (Oz) telle que:

$$(\widehat{[OB), Oz}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}})$$

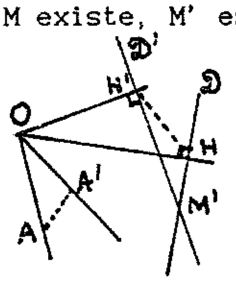
Il y a évidemment d'autres constructions possibles - une, par exemple, utilise la propriété intéressante donnée au **IV 10**.

2. *Une similitude plane directe* Σ *de centre* O *transforme* A *en* A'.

$\mathcal{D}$ *est une droite donnée.*

Déterminer et construire le(s) point(s) M *tel(s) que* M *et son image* M' *appartiennent à* $\mathcal{D}$.

Si M existe, M' est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de l'image de $\mathcal{D}$ par Σ.



3. *Soit* ABC *un triangle, on pose* $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = \hat{\theta}$.

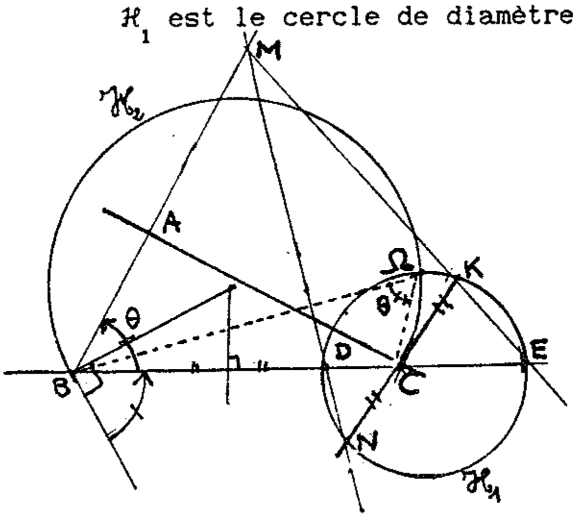
Soit D *un point de*]B,C[*autre que le milieu.*

Constuire le centre Ω *de la similitude* Σ *de rapport* $\frac{DC}{DB}$, *d'angle* θ *qui transforme* B *en* C.

Ω appartient aux deux ensembles suivants $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$:

$\mathcal{H}_1 = \{ M \in \mathcal{P} \;/\; \frac{MC}{MB} = \frac{DC}{DB} = k \}$ $\quad$ $\mathcal{H}_2 = \{ M \in \mathcal{P} \;/\; (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) = \theta \; (2\pi) \}$

$\mathcal{H}_1$ est le cercle de diamètre [DE] avec E barycentre de (C,1) (B,-k).



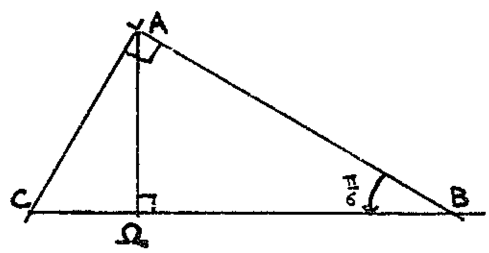
Pour construire E, prenons un point M sur [BA]; l'intersection N de (DM) et de la parallèle à (AB) passant par C est l'image de M par l'homothétie h de centre D qui transforme B en C .
Prenons K le symétrique de N par rapport à C. E est le centre de l'homothétie transformant (C,K) en (B,M).

$\mathcal{H}_2$ est un arc de cercle dont la tangente en B est la droite (BA') symétrique de (AB) par rapport à (BC).

4.*On donne un triangle* ABC *rectangle en* A *tel que* $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \hat{\frac{\pi}{6}}$.

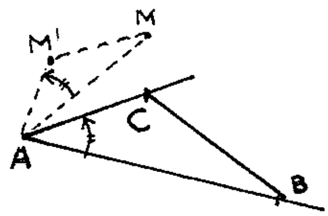
Déterminer et construire le centre Ω *de la similitude qui associe au bipoint* (A,B) *le bipoint* (C,A).

Ω est le pied de la hauteur issue de A . Le rapport de la similitude est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, son angle $\frac{\pi}{2}$.



II. SIMILITUDES DIRECTES ET TRIANGLES PARTICULIERS.

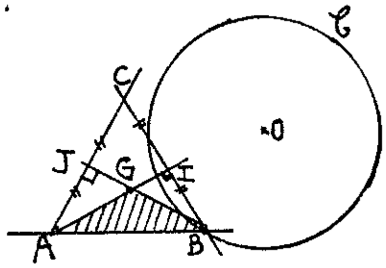
Chaque triplet de points (A,B,C) permet de définir une similitude directe dont A est le centre et qui envoie B sur C. On peut dire que ABC est un triangle directeur de la similitude (A ; $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; $\frac{AC}{AB}$). La reconnaissance d'une telle situation est particulièrement efficace lorsque ABC est un triangle remarquable (isocèle rectangle, demi-équilatéral, etc ...).

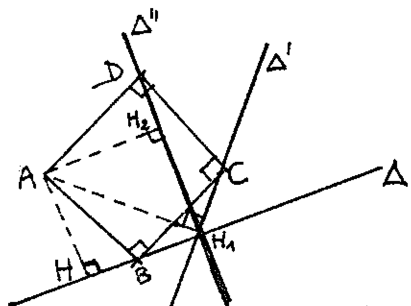


5. *Lieu géométrique simple*:

On donne un point fixe A. *Le point* B *décrit une droite donnée* Δ. *Déterminer les lieux géométriques des points* C *et* D *respectivement* 3ème *et* 4ème *sommet d'un carré direct* ABCD.

On reconnaît des similitudes directes fixes de centre A pour passer de B à D (rotation de centre A , $\frac{\pi}{2}$) et de B à C (similitude d'angle $\widehat{\frac{\pi}{4}}$, de rapport $\sqrt{2}$). Il sera bon d'obliger les élèves à tracer effectivement les images Δ' et Δ" (en employant de préférence la projection orthogonale de A).





6. *On donne un point fixe* A *et un cercle* 𝒞(O,R). *On considère un triangle équilatéral direct* ABC, B *décrivant le cercle* 𝒞.

Lieux géométriques du milieu I *de* [BC], *du centre de gravité* G *du triangle* ABC, *du milieu* J *de* [AC].

Dans chaque cas les triangles ABI, ABG, ABJ fournissent les éléments de la similitude directe à employer.

Remarque: Si le point variable M est lié au triangle ABC par une construction conservée par la similitude (par exemple, un barycentre), le problème est moins facile et demande l'emploi de triangles directement semblables (voir utilisation des similitudes croisées).

7. *Même question pour* ABC *rectangle et isocèle de sommet* B.

III. TRIANGLES DIRECTEMENT SEMBLABLES

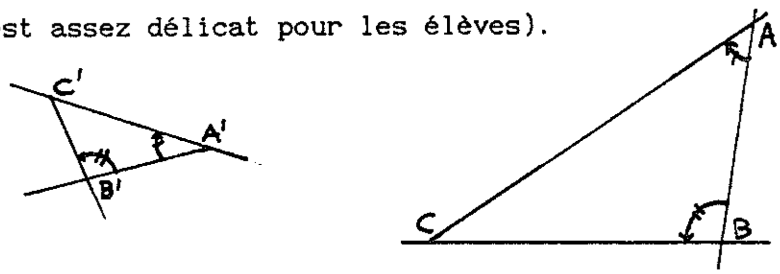
On peut retrouver nos anciens cas de similitude, à titre d'exercice.

8. *Soit deux triangles* ABC *et* A'B'C' *tels que:*

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})\ (2\pi)$ *et* $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}})\ (2\pi)$.

Montrer qu'il existe une similitude directe unique qui transforme ABC *en* A'B'C'.

On sait qu'il existe une similitude envoyant (A,B) sur (A',B'). Par identification C est envoyé en C' (ce genre de raisonnement "par identification" est assez délicat pour les élèves).

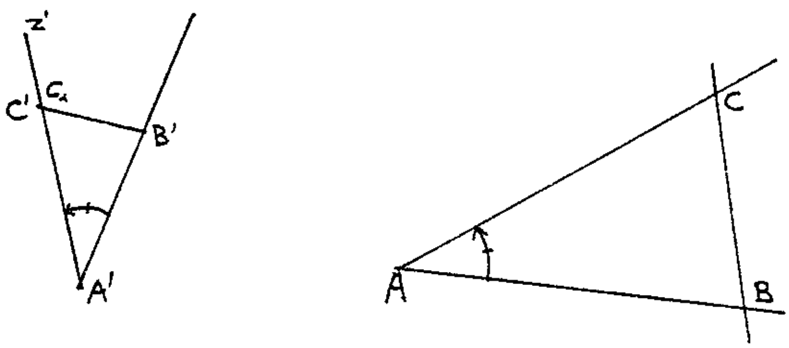


9. *Même question pour deux triangles vérifiant:*

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})\ (2\pi) \ \textit{et}\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

La similitude directe (unique) qui envoie (A,B) en (A',B') transforme la demi-droite [AC) en la demi-droite [A'z') telle que : $(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'z'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, d'où [A'z') = [A'C'). Le point C a pour image C_1, appartenant à [A'z') et tel que $A'C_1 = k\ AC = \frac{A'B'}{AB} \times AC = \frac{A'C'}{AC} \times AC = A'C'$.

D'où $C_1 = C'$. On peut en conclure que $\frac{B'C'}{BC} = k = \frac{A'B'}{AB}$ et que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{B'A'}})$ (conservation des angles orientés).



IV. SIMILITUDES CARACTERISEES PAR LA TRANSFORMATION VECTORIELLE ASSOCIEE

Il nous semble que les élèves doivent savoir reconnaître que si :

$A'M' = k\ AM$ et $\text{mes}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) \equiv \alpha\ (2\pi)$, alors il existe une similitude directe qui envoie A sur A' et M sur M', le rapport étant k; l'angle $\hat{\alpha}$.

Cette caractérisation interviendra souvent avec A, A' fixes , k et α donnés. La construction du centre Ω, sans figurer explicitement au programme, doit pouvoir être réalisée par les élèves : intersection d'un arc capable et du lieu géométrique ensemble des points M tels que $\frac{MA'}{MA} = k$ (A, A' donnés, k fixé).

10. *Une propriété intéressante :*

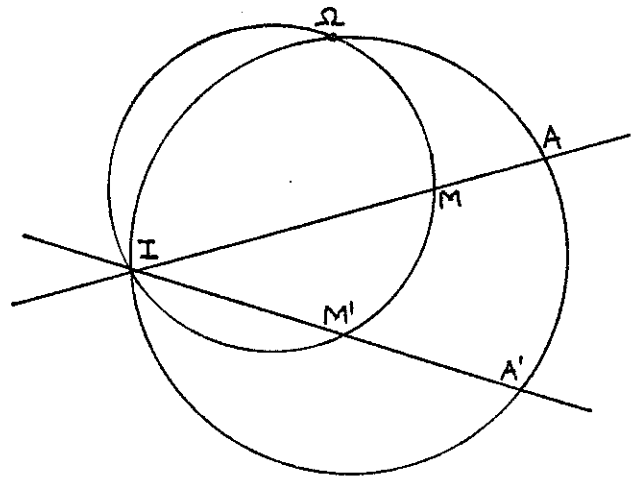
Le centre de la similitude Ω appartient aux cercles (IAA') et (IMM') (I étant le point d'intersection de (AM) et (A'M')).

<u>Indication</u>

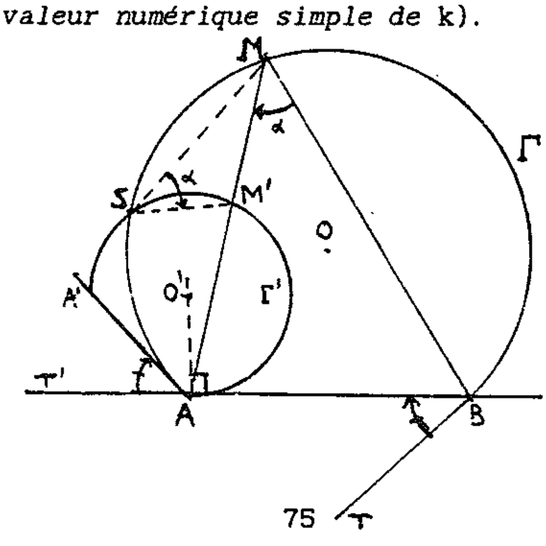
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})\ (2\pi)$

$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}})\ (\pi)$

($\overrightarrow{IA}$ colinéaire à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IA'}$ colinéaire à $\overrightarrow{A'M'}$).



11. *On donne un arc de cercle Γ de centre Ω, limité par deux points* A *et* B. *Un point* M *décrit cet arc (sauf* A*). Sur la demi-droite* [AM) *on construit* M' *tel que* $AM' = k\ BM$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$. *Lieu géométrique de* M' *(on peut se contenter d'une valeur numérique simple de* k*).*



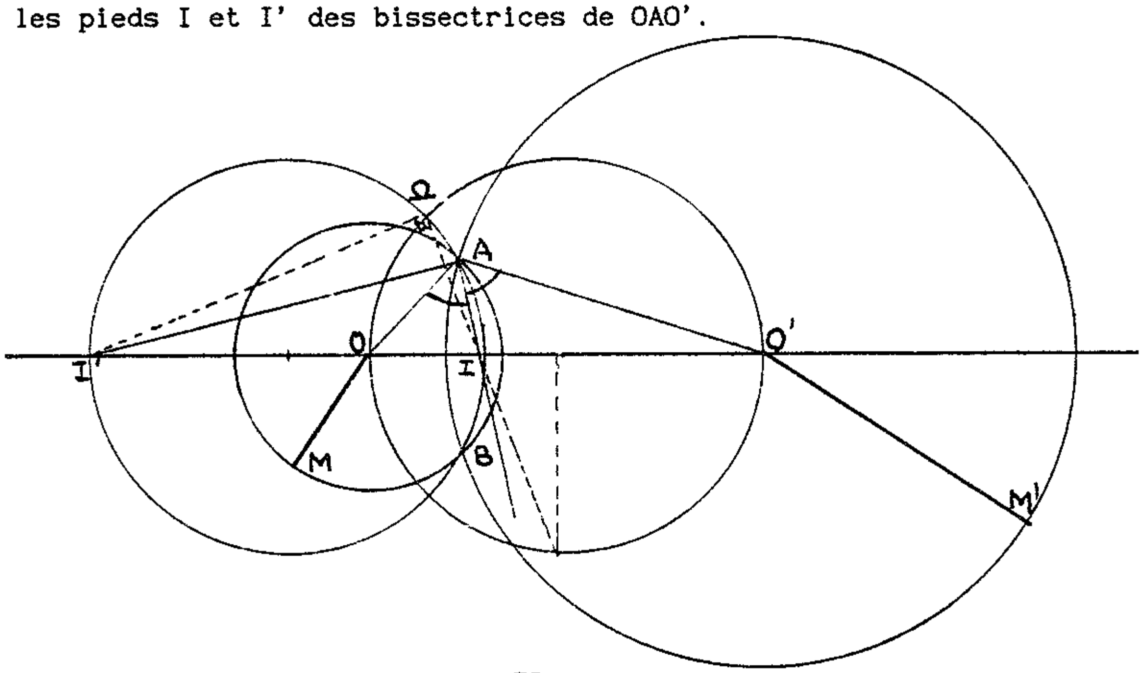
D'après $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{BM}$ et $mes(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}) \equiv \alpha\ (2\pi)$, il existe une similitude directe de rapport k, d'angle $\hat{\alpha}$ qui envoie B en A et M en M'. Son centre est le point S de Γ tel que $\frac{SA}{SB} = k$. Le lieu de M' est l'image de Γ par $sim(S,k,\hat{\alpha})$. Pour construire pratiquement cet arc Γ' on peut placer l'image A' de A (sur la demi-tangente à Γ en A, et telle que $AA' = k\ AB$) et par conservation du contact, utiliser (AB) tangente en A à Γ'.
(La demi-tangente [BT) est transformée en [AT')).

12. *Soit deux cercles* $\mathscr{C}(O,R)$ *et* $\mathscr{C}'(O',R')$. $(O \neq O',\ R \neq R')$. *On considère deux points* M *et* M' *qui décrivent respectivement* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *tels que* $mes(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (*ou une valeur* α). *Montrer qu'il existe une similitude directe fixe envoyant* M *en* M'. *Déterminer les éléments de cette similitude dans le cas où* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ *sont sécants en* A *et* B.

D'après $\overrightarrow{O'M'} = \frac{R'}{R}\,\overrightarrow{OM}$ et $mes(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, il existe une similitude directe fixe, de centre Ω, d'angle $\hat{\frac{\pi}{2}}$, de rapport $\frac{R'}{R}$ qui envoie M en M' (et $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$).

Le centre Ω est le point d'intersection de l'arc capable : ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MO'}) = \hat{\frac{\pi}{2}}$ avec le lieu géométrique : ensemble des points M tels que $\frac{MO'}{MO} = \frac{R'}{R}$.

Si les cercles $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{C}'$ sont sécants en A et B, ce second lieu est le cercle passant par A et B et qui admet pour extrémités de son diamètre sur (OO') les pieds I et I' des bissectrices de $\widehat{OAO'}$.

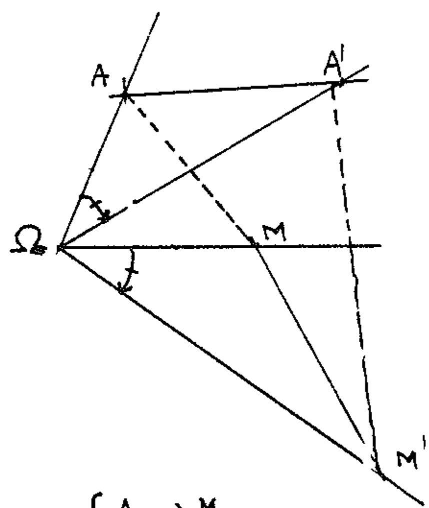


V. SIMILITUDES DIRECTES "CROISEES" DE MEME CENTRE

Cette propriété peut être utilisée dans de nombreux exercices mais ne peut, dans les conditions actuelles, être considérée comme faisant partie du cours. Il conviendrait donc d'en reprendre la justification à chaque utilisation.

13. *S'il existe une similitude directe de centre* Ω *qui envoie* M *en* M' *et* A *en* A', *alors il existe une similitude directe de même centre* Ω, *qui envoie* A *en* M *et* A' *en* M' .

$$\begin{cases} \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) \ (2\pi) \\ \text{et} \\ \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = \dfrac{\Omega A'}{\Omega A} = k \end{cases}$$



d'où

$$\begin{cases} \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}}) = \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \quad (2\pi) \\ \dfrac{\Omega M}{\Omega A} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega A'} \end{cases}$$

Ainsi, si $S_\Omega \begin{cases} A \to A' \\ M \to M' \end{cases}$, alors il existe $S'_\Omega \begin{cases} A \to M \\ A' \to M' \end{cases}$

Noter que si A est fixe et M variable, cette deuxième similitude S' varie.

<u>Conséquence</u>

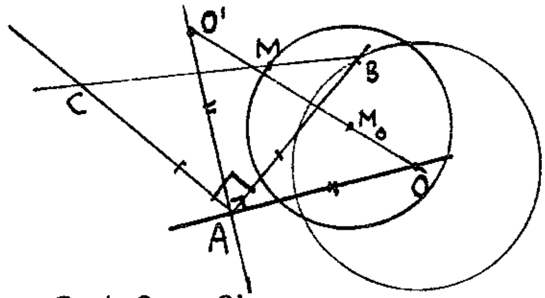
Si A est un point fixe et A' son image, le triangle $\Omega MM'$ reste directement semblable au triangle fixe $\Omega AA'$ (d'après la similitude S').

En particulier

$$\frac{MM'}{AA'} = \frac{\Omega M}{\Omega A} = \frac{\Omega M'}{\Omega A} \ ; \ \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}}) \equiv \operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AA'}}) \ [2\pi]$$

14. *Figures directement semblables*

a) Exemple :On donne un point fixe A, *une constante* $k \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *un cercle fixe* $\mathscr{C}(O,R)$. *Un point* B *décrit le cercle* $\mathscr{C}$, *soit* C *le* 3e *sommet du triangle rectangle isocèle* ABC *direct* ($AB = AC$, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$). *Déterminer le lieu géométrique du point* M *de la droite* (BC) *tel que* $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = k$.



M est barycentre du système $\{(B,1)\ ;\ (C,-k)\}$. Soit O' l'image de O dans $\text{Rot}(A, \frac{\pi}{2})$ et M_0 le barycentre de $\{(O,1)\ ;\ (O',-k)\}$. Il existe une similitude directe (ici, une rotation) de centre A qui envoie B en C et O en O'.

D'après la propriété des similitudes croisées, il existe une similitude de centre A qui envoie $O' \to C$.

$$O \to B$$

Dans cette similitude $M_0 \to M$ (conservation du barycentre).

En utilisant à nouveau la propriété des similitudes croisées, il existe une similitude de centre A: $O \to M_0$

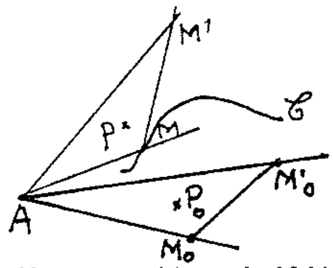
$$B \to M$$

On passe de B à M par la similitude directe de triangle directeur (AOM_0) (et de centre A). M décrit le cercle déduit de $\mathscr{C}$ par cette similitude, c'est à dire le cercle de centre M_0, de rayon $R \times \frac{AM_0}{AO}$.

b) Généralisation (notations inchangées):

Le même type de raisonnement sera utilisable à chaque fois qu'il existe une similitude directe fixe de centre A faisant passer d'un point M (décrivant une courbe $\mathscr{C}$ connue) à un point M'. Pour tout point P lié au triangle AMM' par une relation conservée par une similitude directe, on utilisera le point P_0 lié à un triangle fixe $AM_0M'_0$ par la même relation. Une similitude croisée déduite de la similitude initiale envoie

M_0 en M, M'_0 en M' et P_0 en P.



D'où une similitude de centre A : $M_0 \to P_0$
$M \to P$

Et le point P décrit l'image du lieu de M par cette similitude de centre A et de triangle directeur AM_0P_0.
Le point P peut, par exemple, être : un barycentre des points A, M, M' , un orthocentre, etc...

Bien entendu, de tels exercices, avec le niveau actuel en géométrie des élèves de TC, ne peuvent être proposés que dans ces cas concrets, choisis assez simples et permettant une construction effective des lieux géométriques. Lorsque la similitude initiale est simple et que le point P est choisi aussi de façon simple, on peut faire apparaître directement la similitude qui envoie M en P. (Cas du 2e exercice proposé dans le II).

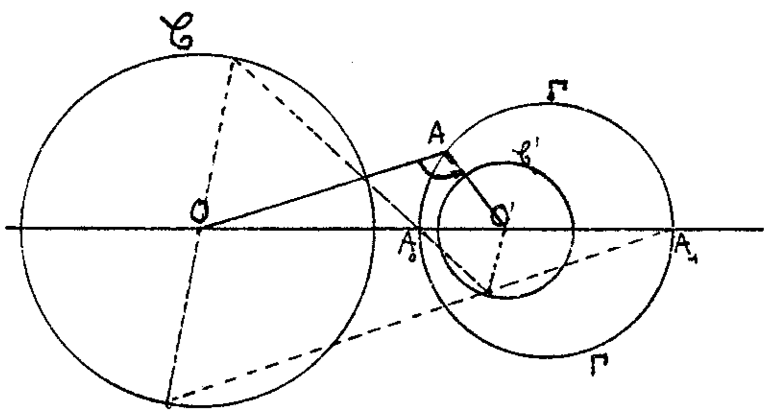
VI. SIMILITUDES ECHANGEANT DEUX CERCLES

15. *On donne deux cercles* $\mathscr{C}(O,R)$ *et* $\mathscr{C}'(O',R')$ (avec $O \neq O'$ *et* $R \neq R'$, *pour éviter des discussions).*

Déterminer l'ensemble des similitudes directes transformant $\mathscr{C}$ *en* $\mathscr{C}'$.

On suppose connue la propriété concernant l'image d'un cercle par une similitude directe S : cercle de centre $O' = S(O)$ et de rayon kR.

* <u>Analyse</u>: Si A est le centre d'une telle similitude , alors $\frac{AO'}{AO} = \frac{R'}{R}$.



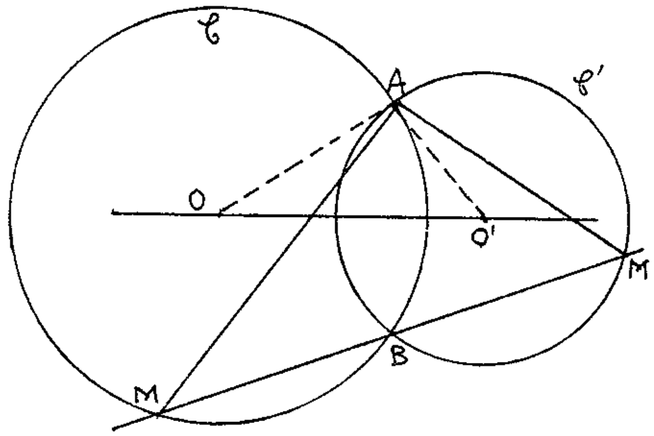
* <u>Synthèse</u>: (Réciproque).
Si A appartient au cercle Γ lieu des points M tels que $\frac{MO'}{MO} = \frac{R'}{R}$, alors la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{R'}{R}$ et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}})$ transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ (identification).
Comme cas particuliers, on retrouve les deux centres d'homothéties A_0 et A_1 et les deux homothéties échangeant les cercles.

16. *Une intéressante propriété de deux cercles sécants:*
Soit deux cercles sécants en A *et* B, *de centres respectifs* O *et* O', *de rayons* R *et* R'.

a) Montrer qu'il existe une similitude σ *directe de centre* A *transformant* $\mathscr{C}$ *en* $\mathscr{C}'$.

b) Si M' *est l'image par* σ *d'un point* M *de* $\mathscr{C}$, *montrer que* M, B, M' *sont alignés.*

a) La similitude de centre A, de rapport $\frac{R'}{R}$, d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})$, transforme bien $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ (cas particulier de l'exercice pré--cédent).



b) Plusieurs démonstrations sont possibles pour cette propriété qui fournit le départ de nombreux exercices:

* En évaluant $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}})$ (2π) ;

avec les angles inscrits dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, on a $\text{mes}(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{1}{2}\,\text{mes}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})$ $[\pi]$

et $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'M'}})[\pi]$.

D'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}) \equiv \frac{1}{2}(\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'M'}}))$ $[\pi]$.

Or, puisque la similitude directe conserve les angles orientés, $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A'}})$ $[2\pi]$, d'où $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}}) \equiv 0$ $[\pi]$.

* Variante: $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{M'B}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{M'A}}) + \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}})$ $[2\pi]$

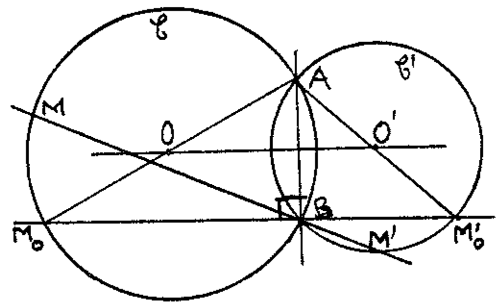
$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{OA}})$ $[\pi]$; $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{M'A}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A}})$ $[2\pi]$ (angle de la similitude); $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}}) \equiv \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'O}})$ $[\pi]$.

* En supposant déjà connu que le triangle AMM' reste directement semblable à AOO', on a : $(\overrightarrow{MA}, \widehat{\overrightarrow{MM'}})$ constant et la droite (MM') recoupe $\mathscr{C}$ en un point fixe de $\mathscr{C}$.

De même, on montre que (MM') recoupe $\mathscr{C}'$ en un point fixe de $\mathscr{C}'$. Le point fixe est B.

* En utilisant les similitudes croisées et la construction du centre de la similitude échangeant deux couples de points.

On considère la sécante $M_0BM'_0$ perpendiculaire en B à la droite (AB), les points M_0 et M'_0 sont respectivement les points diamétralement opposés à A sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit (MBM') une sécante variable.



D'après une propriété connue il existe une similitude unique envoyant M_0 en M et M'_0 en M'. Son centre est à l'intersection des cercles circonscrits à (MM_0B) et $(M'M'_0B)$, c'est donc le point A. D'après le principe des similitudes croisées , il existe une similitude de même centre A qui envoie M_0 en M'_0 et M en M': cette similitude peut être caractérisée par le triangle $AM_0M'_0$ ou AOO'. Ainsi le point M', deuxième point d'intersection de (BM) avec $\mathscr{C}'$, est l'image de M dans la similitude $(A, (\overrightarrow{AO}, \widehat{\overrightarrow{AO'}}), \frac{R'}{R})$ qui envoie $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

17. *Exercice utilisant la propriété précédente et la notion de figure directement semblable du* III *:*

Soit deux cercles $\mathscr{C}(O,R)$ et $\mathscr{C}'(O',R')$ *sécants en* A *et* B. *Une droite variable passant par* B *coupe* $\mathscr{C}$ *en* M *et* $\mathscr{C}'$ *en* M'. *Montrer que l'on passe de* M *à* M' *par une similitude directe fixe de centre* A. *En déduire le lieu géométrique du milieu de* [MM'] *(ou de centre de gravité de* AMM', *de l'orthocentre,...).*

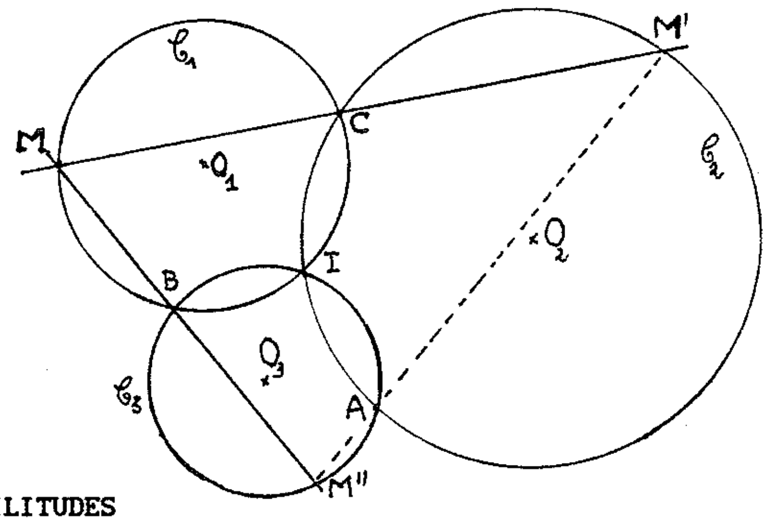
Indication

On trouvera un cercle passant par A et dont le centre est le point correspondant lié au triangle AOO'.

18. *Trois cercles* $\mathscr{C}_1(O_1,R_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2,R_2)$, $\mathscr{C}_3(O_3,R_3)$ *ont un point commun* I. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ *se recoupent en* C, $\mathscr{C}_2$ *et* $\mathscr{C}_3$ *se recoupent en* A, $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_3$ *se recoupent en* B. *Soit* M *un point de* $\mathscr{C}_1$ *;* (MC) *recoupe* $\mathscr{C}_2$ *en* M' *et* (MB) *recoupe* $\mathscr{C}_3$ *en* M". *Montrer que* M'AM" *sont alignés.*

On passe de M' à M par $\mathrm{sim}\left(I, \frac{IO_1}{IO_2}, \widehat{(\overrightarrow{IO_2},\overrightarrow{IO_1})}\right)$ puis de M à M" par $\mathrm{sim}\left(I, \frac{IO_3}{IO_1}, \widehat{(\overrightarrow{IO_3},\overrightarrow{IO_1})}\right)$ donc on passe de M' à M" par la composée de ces deux similitudes, qui est la similitude de centre I qui envoie $\mathscr{C}_2$ en $\mathscr{C}_3$. D'après la propriété vue au §16 ,les points M'A M" sont alignés.

<u>Variante</u>: On peut aussi, en utilisant des angles inscrits dans les cercles, évaluer $\mathrm{mes}\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM''})}$.



VII. COMPOSITION DE SIMILITUDES

19. *Exercice simple (peut être traité de nombreuses façons):*

Soit un triangle ABC *de sens direct. On construit, à l'extérieur du triangle* ABC *les triangles rectangles isocèles directs* MAC *et* M'BA *(rectangles respectivement en* M *et* M'*). Soit I le milieu de* [BC] *; étudier le triangle* MIM'.

(On peut évidemment donner une indication plus précise : montrer que MIM' est rectangle isocèle, mais il nous semble intéressant d'entraîner les élèves à une étude des configurations où les réponses ne soient pas systématiquement indiquées).

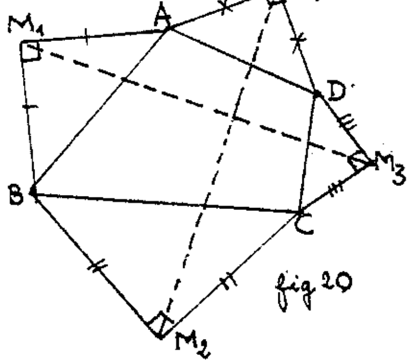


fig 20

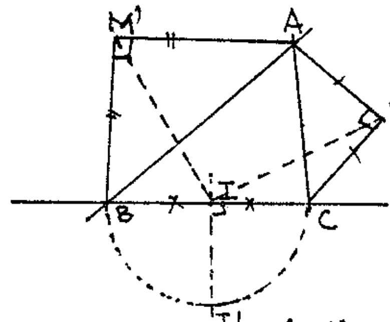


fig 19

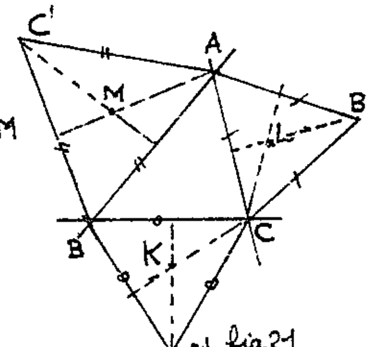


fig 21

Indications

On passe de M à A par la similitude directe $S_1(C, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$ puis de A à M' par la similitude directe $S_2(B, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

On passe donc de M à M' par $S_2 o S_1$ qui est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour déterminer le centre de cette rotation on peut vérifier que I est invariant par $S_2 o S_1$: $S_2 o S_1(I) = S_2(I') = I$. (On pourrait aussi chercher l'image de C par $S_2 o S_1$).

* L'exercice se résout facilement avec les complexes : on calcule, en fonction des affixes a, b, c des points A,B,C les affixes de M et M', puis des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$.

* On peut aussi faire étudier $f = rot(M', \frac{\pi}{2})$ o s_I o $rot(M, \frac{\pi}{2})$;
$f(A) = A$, $f = Id$ d'où :

$$s_I(M) = rot(M', -\frac{\pi}{2}) \text{ o } rot(M, \frac{\pi}{2}) (M) = rot(M', -\frac{\pi}{2}) (M).$$

20. *Complément :Soit* $M_1M_2M_3M_4$ *les sommets des triangles rectangles isocèles construits sur les côtés du quadrilatère* ABCD.*(cf figure).*
Démontrer que $M_1M_3 = M_2M_4$ *et* $(M_1M_3) \perp (M_2M_4)$.

Si I milieu de [BD], par la rotation $(I, +\frac{\Pi}{2})$: $M_1 \to M_2$
$M_3 \to M_4$

21. *Exercice du même genre:*
On construit à partir d'un triangle ABC *les triangles équilatéraux directs* CB'A, AC'B, CBA'. *Soit* L,M,K *les centres de gravité de ces trois triangles. Montrer que le triangle* LMK *est équilatéral direct.*

Indications

Le produit $S_2(B, -\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ o $S_1(A, -\frac{\pi}{6}, \sqrt{3})$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ qui envoie L en K. Son centre est M (on vérifie que M est invariant par $S_2 o S_1$). D'où le résultat.

* Variante: ici également, les nombres complexes fournissent une solution assez rapide.

CHAPITRE 6
GEOMETRIE DANS L'ESPACE EN CLASSES SCIENTIFIQUES

Dans ce chapitre, nous avons regroupé quelques exercices de difficulté variée : certains se rattachant aux intersections sont presque possibles en Seconde, d'autres assez compliqués sur les isométries conservant un solide usuel (nous avons essayé d'être assez complet sur ce dernier point - à titre d'information - mais il ne sera pas facile de le rendre accessible à l'élève moyen).

Nous n'avons pas proposé d'exercices sur l'analytique de l'espace, ou sur le produit vectoriel.

1. *Un exercice simple sur l'octaèdre régulier* .

On donne un carré ABCD *de centre* O, *de côté* a. *Sur la perpendiculaire en* O *au plan* $\mathcal{P}$ *on construit deux points* E *et* F, *de part et d'autre de* O.

1) Calculer OE *et* OF *de façon que le polyèdre* ABCDEF *soit formé de 8 triangles équilatéraux isométriques (octaèdre régulier).*

2) Nature des quadrilatères BEDF *et* AECF.

3) Montrer que l'octaèdre régulier admet une sphère circonscrite

4) Montrer que la droite joignant le milieu I *de* [EC] *au milieu* J *de* [AF] *est un axe de symétrie de l'octaèdre. Préciser les axes de symétrie analogues.*

5) Déterminer 3 autres axes de symétrie de l'octaèdre régulier.

6) Montrer que les faces BCE *et* DAF *sont parallèles et que l'octaèdre est invariant par deux rotations dont l'axe est la droite joignant les centres de gravité* G_1 *et* G_2 *des faces* BCE *et* DAF.

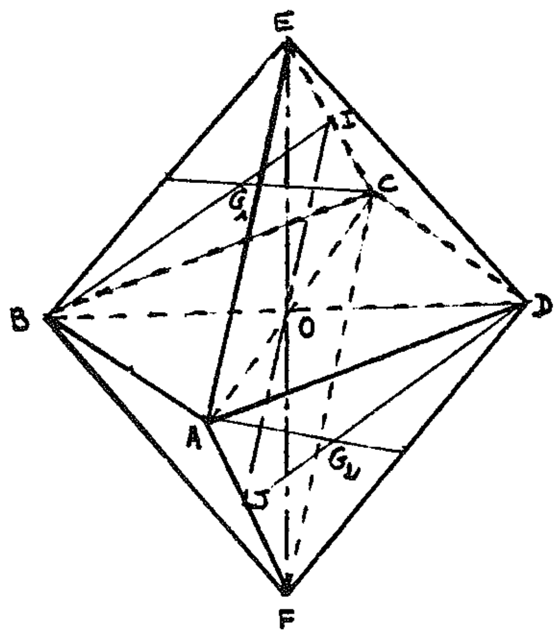
Indications

1) Par Pythagore OE = OF = $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

2) Ce sont des carrés de centre O (diagonales égales, orthogonales, sécantes en leur milieu)

3) La sphère de centre O de rayon OA = OF = $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

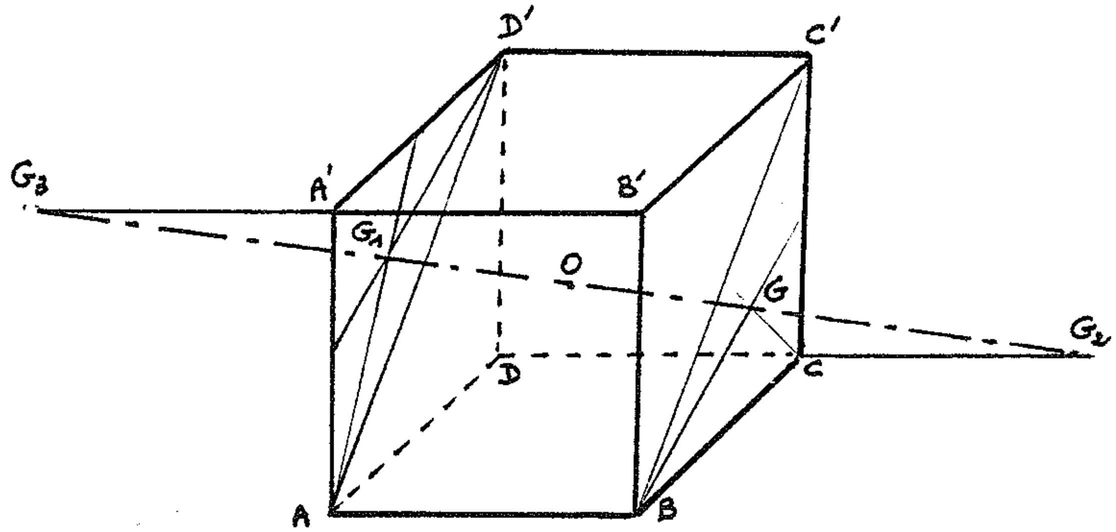
4) Axe de symétrie du carré AECF. (IJ) est aussi une médiatrice de [BD]. Au total, six axes de ce groupe, joignant les milieux de deux arêtes opposées.



5) Trois autres axes de symétrie tels que (EF) (joignant deux sommets opposés) (BD), (AC).

6) Par la symétrie de centre O, les faces sont échangées ainsi que les centres de gravité G_1 et G_2. Les rotations d'axe (G_1G_2) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ permutent les sommets BCE d'une part, DAF d'autre part.

2. *Dans le cube ABCD A'B'C'D' de centre O, soit G le centre de gravité du triangle BCC'. Déterminer les intersections de (OG) avec les plans des faces du cube. (On précisera la position des points trouvés par rapport aux points du cube).*



* <u>(OG)</u> $\cap$ <u>(A'D'DA)</u>

Par la symétrie de centre O, on a $S_O(C) = A'$; $S_O(B) = D'$; $S_O(C') = A$.
D'où $S_O(G) = G_1$ centre de gravité du triangle AD'A', est l'intersection de (OG) et de (A'D'DA)

* <u>(OG)</u> $\cap$ <u>(ABCD)</u>

$\overrightarrow{G_1D} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'D} = 2\overrightarrow{GC}$ donc (GG_1) et (DC) sont coplanaires et se coupent en G_2 tel que C est le milieu de $[G_2D]$.
Donc (OG) coupe les plans (ABCD) et (DCC'D') en G_2.

* On aura de même, (OG) coupe les plans (ABB'A') et (A'B'C'D') en G_3, image de G_2 par S_O.

Pour les élèves : faire remarquer que O est centre de symétrie pour le cube.

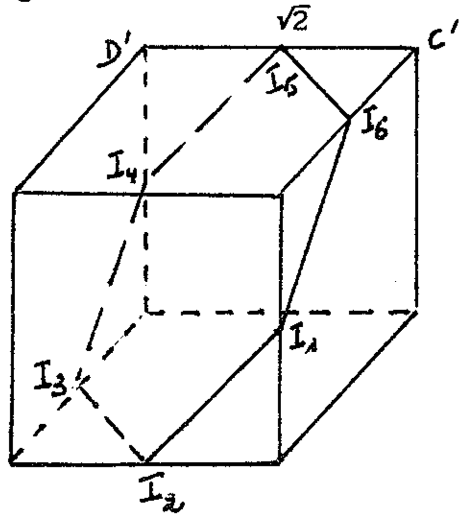
3. *Dans le cube* ABCD A'B'C'D', *soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le centre* O *du cube et perpendiculaire à* (A'C). *Déterminer la section du cube par $\mathcal{P}$.*

Puisque O est le milieu de [A'C], $\mathcal{P}$ est par définition le plan médiateur de [A'C].

La section du cube par $\mathcal{P}$ est alors formée du polygone dont les sommets sont les points des arêtes (du cube) équidistants de A' et de C ; on obtient l'hexagone $I_1 \quad I_6$ ($I_nA' = I_nC = a\frac{\sqrt{5}}{2}$).

Les points I_n sont les milieux des arêtes ne contenant ni A', ni C.

Cet hexagone est régulier (de côté $\frac{a}{\sqrt{2}}$).



4. *Même exercice mais autre énoncé possible:*

On définit I_1, I_2,....I_6 *comme milieux de* [BB'], [BA]... [B'C'].

Montrer que les six points sont coplanaires et étudier la figure formée par ces points.

On considère le plan $\mathcal{P}$ formé par $I_1I_2I_3$ (non alignés)

$\overrightarrow{I_1I_4} = \overrightarrow{BD}$ (par translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$)

$= 2\,\overrightarrow{I_2I_3}$ donc $I_4 \in \mathcal{P}$

On a de même I_5 et I_6 dans $\mathcal{P}$ (par exemple $\overrightarrow{I_1I_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{I_3I_4}$)

Conseil pour les élèves : on les invite à chercher des points équidistants de A' et de C, donc des points de $\mathcal{P}$.

Remarque: Cet exercice est plus complet dans la version Paris E-87 où l'on montre que l'hexagone régulier I_1....I_6 est convexe.

5. *Soit un cube* ABCD A'B'C D' *et les points* I,J,K *tels que :*
$\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{C'J} = \frac{1}{4}\overrightarrow{C'D'}$; $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

Déterminer la section du cube avec le plan (IJK) *; faire la figure de cette section en vraie grandeur (on calculera les mesures des côtés et des angles connaissant la mesure* a *d'une arête du cube).*

Notons $\mathcal{P}$ = (IJK)

a. <u>Intersection de $\mathcal{P}$ et de (CC'DD')</u>

C'est une droite parallèle à (IK) et passant par J (puisque (AA'B'B) est parallèle à (DD'C'C)).

Soit (ik) la projetée orthogonale de (IK) sur (CC'D'D) ($\overrightarrow{D'i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{kC}$) et N le milieu de [D'C] ; on a aussi $\overrightarrow{iN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ d'où (NC) // (ik) // (IK).

J étant le milieu de [NC'], la parallèle à (NC) passant par J passe par le milieu L de [CC'].

$\mathcal{P}$ ∩ (CC'D'D) = (JL) où L milieu de [CC'] et (JL) // (IK)

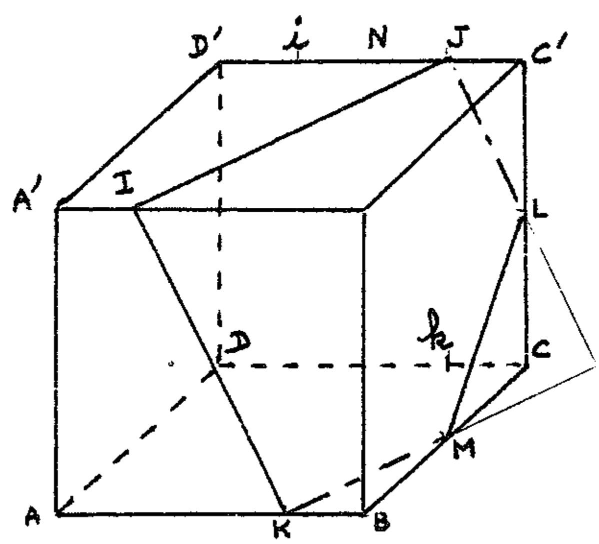
b. <u>Intersection de $\mathcal{P}$ et de (ABCD)</u>

On a de même $\mathcal{P}$ ∩ (ABCD) = (KM) où M milieu de [BC] et (KM) // (IJ)

c. <u>Les plans $\mathcal{P}$ et (AA'D'D) se coupent en dehors de la face</u>

La section est un pentagone IJLMK et (DCB'A') en est un plan de symétrie.

(On peut par exemple démontrer que (A'B'C) est le plan médiateur de [LM] en démontrant que A'L = A'M ; B'L = B'M ; CL = CM....)



d. <u>Mesures des côtés et des angles du pentagone (AB = a)</u>

* $IJ = IK = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (par translation, IJ = A'N)
* $JL = KM = a\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ $(\vec{JL} = \frac{1}{2}\vec{NC} = \frac{1}{2}\vec{IK})$
* $LM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ $(KJ = BC' = a\sqrt{2})$

* $\cos \widehat{KIJ} = \dfrac{IJ^2 + IK^2 - KJ^2}{2IJ.IK} = \dfrac{1}{5}$

* $\cos \widehat{JLM} = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ $\left(JM = \dfrac{\sqrt{21}}{4}a\right)$

d'où $\widehat{KIJ} \approx 78°28'$; $\widehat{JLM} \approx 129°14'$

Faire remarquer que la somme des angles du pentagone est égale à 540°.

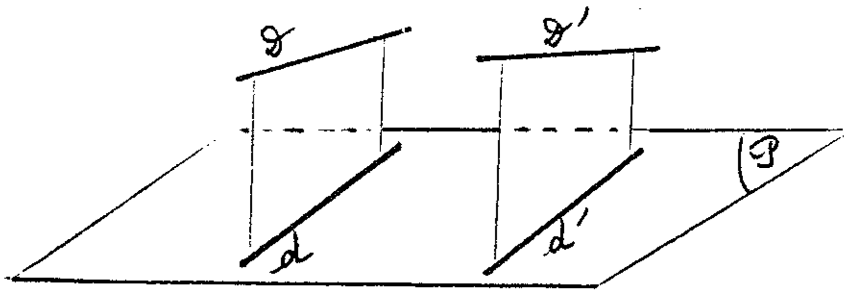
6. *On donne deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires. Peut-on déterminer un plan $\mathcal{P}$ tels que les projetés orthogonales de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{P}$ soient parallèles?*

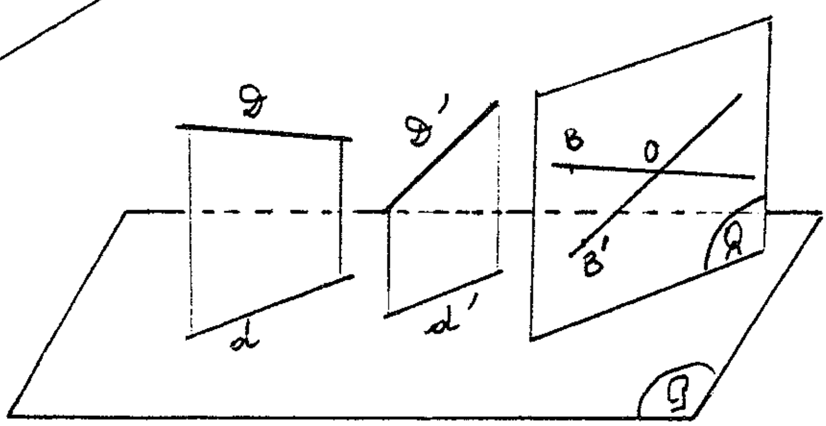
<u>Analyse :</u>

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans projetant respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en d et d' sur $\mathcal{P}$; $\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$ (tous deux perpendiculaires à $\mathcal{P}$).
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles à tout plan parallèle à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$.

<u>Synthèse :</u>

Soit Q un plan parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (par ex. passant par un point O). On construit (OB) // $\mathcal{D}$, (OB') // $\mathcal{D}'$; tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à Q convient.





7. *Déterminer un plan $\mathcal{P}$ sur lequel un quadrilatère gauche* ABCD *donné se projette suivant un parallélogramme.*

* Soit I le milieu de [BD] et J le milieu de [AC]. Puisqu'on doit avoir I' = J' , la direction de la projection est celle de (IJ).
Tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (IJ) convient bien.

* Remarquons que si A, B, C, D étaient coplanaires :

soit I = J et tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace conviendrait

soit I ≠ J, seuls les plans perpendiculaires à (IJ) conviendraient (le parallélogramme A'B'C'D' serait aplati ...).

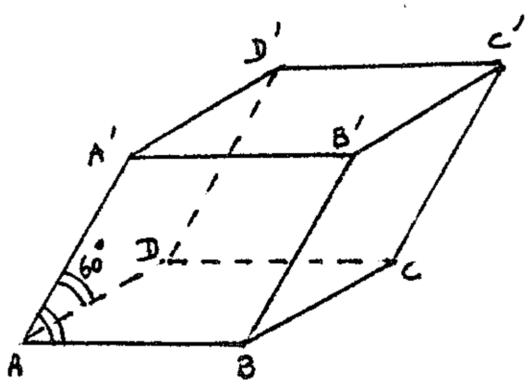
* On peut aussi traiter cet exercice en utilisant deux fois la méthode de l'exercice précédent.

8. *Rhomboèdre : parallélépipède* ABCDA'B'C'D' *tel que* ABCD *et* A'B'C'D' *soient des losanges constitués de deux triangles équilatéraux (de côté* a*) ;* $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 60°$. *Les autres côtés du parallélépipède mesurent également* a.

Montrer que toutes les faces sont des losanges formés de deux triangles équilatéraux et calculer le volume du rhomboèdre en fonction de a.

a) On a facilement : ABA' équilatéral
puisque AB = AA' = a et $\widehat{A'AB} = 60°$

b) <u>Le plan (AA'C'C) est un plan de symétrie</u>
$\mathcal{P}$ = (AA'C'C) est le plan médiateur de [BD].
De même, $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de [B'D'].



c) <u>Volume du rhomboèdre</u>

* $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$

* *Calcul de la hauteur :*
ABDA' est un tétraèdre régulier ; soit H le projeté de A' sur (ABD) :

$$DH = \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad A'H^2 = A'D^2 - DH^2 = \frac{2}{3} a^2$$

d'où $h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$ et $V = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$

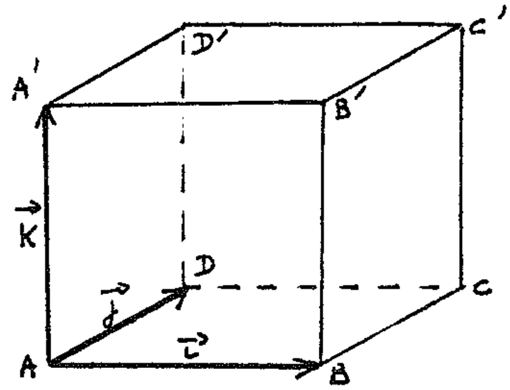
9. *Soit un cube* ABCDA'B'C'D' *de côté* a.

1. *Montrer que le tétraèdre* ACB'D' *est régulier et calculer son volume.*

2. *On pose* $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{k}$ $\quad \mathcal{R}(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a) *déterminer la section du cube avec le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x + y + z = 1$.

b) *en déduire l'ensemble des points* M *du cube dont la somme des distances aux plans* (ABCD), (ADD'A') *et* (ABB'A') *est égale à* 1.



1. ACB'D' est un tétraèdre régulier de côté $a\sqrt{2}$

Son volume V est égal à $\frac{1}{3}a^3$

(volume du cube - 4 x volume de ABDA')

2. a) $\mathcal{P}$ est le plan (A'BD)

b) $M(x, y, z)$ $\quad (0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 1 \quad ; \quad 0 \leq z \leq 1)$

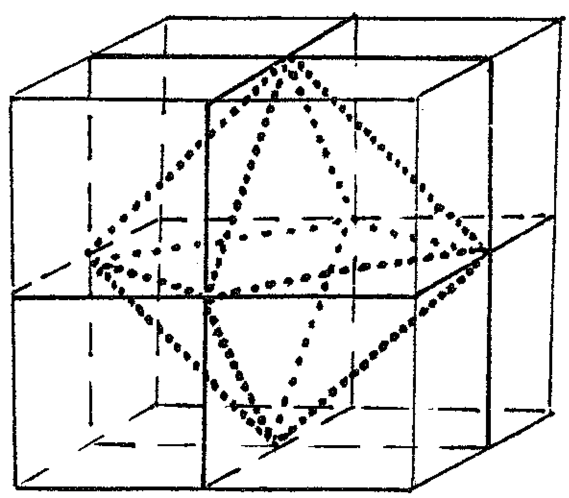
La somme des distances de M aux plans donnés est égale à $x + y + z$ donc $x + y + z = 1$ ssi M est à l'intérieur du triangle A'BD.

10. *Ensemble des points de* $\mathcal{E}$ *dont la somme des distances à trois plans perpendiculaires deux à deux est constante (égale à* 1 *par exemple).*

On se ramène à la situation précédente dans le repère $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$

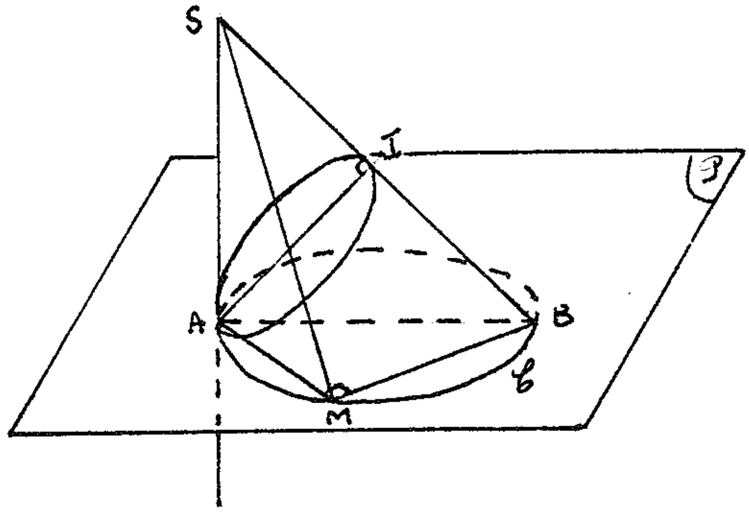
L'ensemble cherché est constitué d'un octoaèdre régulier : on peut faire rechercher des éléments de symétrie et donc se limiter à "1/8" de l'espace $\mathcal{E}$

($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$).



11. *Soit un cercle* $\mathscr{C}$ *de diamètre* [AB], d *la droite passant par* A *et perpendiculaire au plan de* $\mathscr{C}$, D *un point de* d (D ≠ A).

Soit M *un point variable de* $\mathscr{C}$ *; on projette* A *sur la droite* (DM) *en* H. *Déterminer une courbe fixe sur laquelle se déplace* H *quand* M *varie sur* $\mathscr{C}$.



* Supposons M ≠ A et M ≠ B
Soit A' le projeté de A sur (BD)
Les plans (AMD) et (AMB) sont perpendiculaires (puisque d = (AD) est perpendiculaire au plan de $\mathscr{C}$) donc (BM) est perpendiculaire au plan (AMD) (puisque (BM) $\perp$ (AM)) d'où (BM) orthogonale à (AH).

La droite (AH), orthogonale à (BM) et (MD) , est donc orthogonale à toute droite du plan (DMB) et en particulier à (HA'),soit $\widehat{AHA'} = 90°$.

On en conclut que H appartient à la sphère de diamètre [AA'].

De plus, la droite (DB) est perpendiculaire à (AA') et à (AH) ((AH) perpendiculaire à (DMB)) donc (AHA') est le plan fixe passant par A et perpendiculaire à (DB).

On en conclut que H appartient au cercle de diamètre [AA'], contenu dans le plan passant par A et perpendiculaire à (BD).

* Si M = A, alors H = A
* Si M = B, alors H = A'

Remarque :

On peut poser la question sous la forme "lieu géométrique de H". Cela impose une réciproque (cf Paris C-Juin 88).

12. *Soit* ABC *un triangle fixe,* M *un point variable de l'espace,* E, F, G *les milieux de* [BC], [CA], [AB], P, Q *et* R *les milieux de* [MA], [MB], [MC] *et* I *l'isobarycentre des points* A, B, C *et* M.

1°) Déterminer la nature des quadrilatères PQEF, QRFG *et* RPGE.

2°) Déterminer l'ensemble des points M *tels que :*

a) PQEF *soit un rectangle*

b) PQEF *et* QRFG *soient des rectangles. Que dire alors de* RPGE *?*

3°) Déterminer l'ensemble S *des points* M *tels que le rapport des longueurs des diagonales de* PQEF *soit égal à* k (k > 0) $(\frac{PE}{QF} = k)$.

4°) On suppose ABC *équilatéral* (AB = BC = CA = 2a). *Trouver l'ensemble* $\mathscr{C}$ *des points* M *tels que le rapport des diagonales de* PQEF *soit égal à* $\frac{1}{2}$ $(\frac{PE}{QF} = \frac{1}{2})$ *et tels que le quadrilatère* QRFG *soit un rectangle.*

Faire une figure en vraie grandeur dans le plan (ABC)

1°) Les quadrilatères PQEF, QRFG et RFGE sont des parallélogrammes

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$ etc ...

2°) a) PQEF est un rectangle ssi $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QE}$ et $P \neq Q$ et $Q \neq E$

ssi $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$ et $M \neq C$

ssi M appartient au plan $\mathscr{P}_1$ passant par C et perpendiculaire à (AB) privé du point C

Remarque :

La trace du plan $\mathscr{P}_1$ dans le plan (ABC) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

b) PQEF et QRFG sont des rectangles ssi M appartient à $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$

$\mathscr{P}_2$ est le plan passant par A et perpendiculaire à (BC) ; ($\mathscr{P}_2$ contient la hauteur issue de A du triangle ABC).

On remarque que H l'orthocentre de ABC appartient à $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires aux droites (AB) et (BC).

De plus ils sont perpendiculaires au plan (ABC) puisque le plan (ABC) contient les droites (AB) et (BC) respectivement perpendiculaires à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$; par conséquent Δ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est perpendiculaire à (ABC).

L'ensemble des points M tels que PQEF et QRFG soient des rectangles est la droite Δ passant par l'orthocentre du triangle ABC et perpendiculaire au plan (ABC).

Le parallélogramme RPGE est alors un rectangle :

en effet, pour tout point M, $\vec{MA}.\vec{BC} + \vec{MB}.\vec{CA} + \vec{MC}.\vec{AB} = 0$

$(\vec{MA}.(\vec{MC} - \vec{MB}) + \vec{MB}.(\vec{MA} - \vec{MC}) + \vec{MC}.(\vec{MB} - \vec{MA}) = 0)$;

par conséquent, si $\vec{MC}.\vec{AB} = 0$ et $\vec{MA}.\vec{BC} = 0$, on en déduit $\vec{MB}.\vec{CA} = 0$.

On peut également remarquer que, si PQEF et QRFG sont des rectangles, alors PE = QF et QF = RG d'où PE = RG, ce qui prouve que le parallélogramme RPGE est aussi un rectangle.

3°) $M \in \Sigma \Leftrightarrow \frac{IE}{IF} = k$ (E et F sont des points fixes)

(I étant l'isobarycentre des points A,B,C,M est le milieu des segments [EP], [QF] et [RG]).

On applique alors un résultat du cours :

si $k = 1$, Σ est le plan médiateur de [EF]

si $k \neq 1$, Σ est une sphère centrée en un point de (EF).

On détermine ainsi le lieu des points I et puisque I est tel que $\vec{gM} = 4\,\vec{gI}$ (si g désigne le centre de gravité du triangle ABC), le lieu de M se déduit de celui de I par l'homothétie de centre g (point fixe puisque ABC est fixe) et de rapport 4.

4°) * <u>Déterminons l'ensemble des points I tels que</u> $\frac{IE}{IF} = \frac{1}{2}$;

appliquons la formule de Leibniz :

$$2IE = IF \Leftrightarrow 4IE^2 - IF^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3I\Omega^2 + 4\Omega E^2 - \Omega F^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \Omega I^2 = \frac{4a^2}{9}$$

où Ω est le barycentre de {(E,4), (F - 1)} donc $\vec{E\Omega} = -\frac{1}{3}\vec{EF}$.

On a posé AB = AC = BC = 2a

d'où $EF = a$, $\Omega E = \frac{a}{3}$, $\Omega F = \frac{4a}{3}$

Le lieu des points I *est la sphère de centre* Ω *tel que* $\vec{E\Omega} = -\frac{1}{3}\vec{EF}$ *et de rayon* $\frac{2}{3}$ a.

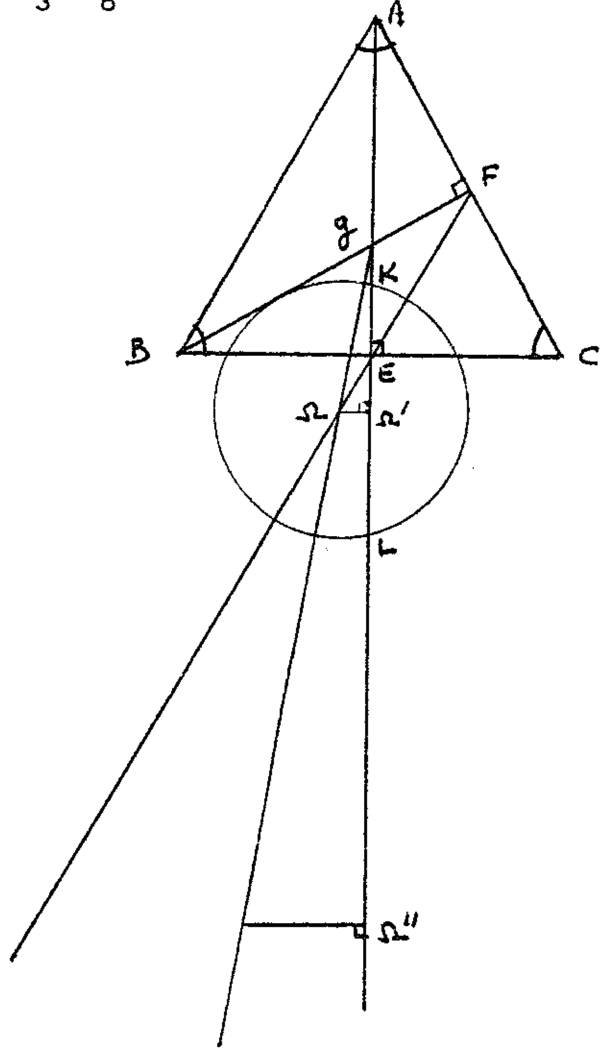
* ABC est un triangle équilatéral, par conséquent l' orthocentre H et le centre de gravité g de ABC sont confondus ; et par suite l'image du plan $\mathcal{P}_2$ par l'homothétie de centre g et de rapport $\frac{1}{4}$ est $\mathcal{P}_2$ lui-même.

Le lieu des points I tels que $\frac{PE}{QF} = \frac{1}{2}$ et tels que QRFG soit un rectangle est l'intersection du plan $\mathcal{P}_2$ et de la sphère Σ de centre Ω et de rayon $\frac{2}{3}a$.

Etudions ce qui se passe dans le plan (ABC) qui est un plan de symétrie pour $\mathcal{P}_2$, puisqu'il lui est perpendiculaire, et pour Σ puisque c'est un plan diamétral.

La trace de $\mathcal{P}_2$ dans le plan (ABC) est (AE) et la distance de Ω à $\mathcal{P}_2$ est $\Omega\Omega'$ (Ω' projeté orthogonal de Ω sur la droite (AE)).

$\Omega\Omega' = \Omega E \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{6}$



Le plan $\mathcal{P}_2$ et la sphère Σ sont sécants ($\Omega\Omega' < \frac{2a}{3}$), ils se coupent suivant le cercle $\mathcal{C}$ situé dans $\mathcal{P}_2$ de diamètre [KL], K et L points d'intersection du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{2a}{3}$ situé dans le plan(ABC) avec la droite (AE).

$\Omega'L^2 = \Omega L^2 - \Omega\Omega'^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{36} = \frac{15a^2}{36}$, $\Omega'L = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Le lieu des points I *tels que* $\frac{PE}{QF} = \frac{1}{2}$ et tels que le quadrilatère QRFG soit un rectangle est le cercle $\mathscr{C}_1$ situé dans le plan médiateur de [BC], de centre Ω' projeté orthogonal de Ω (défini par $\overrightarrow{E\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$) sur (AE) et de rayon $\frac{a\sqrt{15}}{6}$; *et le lieu des points* M est l'image $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}_1$ par l'homothétie h(g,4), g centre du triangle ABC.

C'est le cercle situé dans le plan médiateur de [BC] *de centre* Ω'' *tel que* $\overrightarrow{g\Omega''} = 4\overrightarrow{g\Omega'}$ ($\Omega'' \in (AE)$) *et de rayon* $\frac{2}{3}a\sqrt{15}$.

13. *Intersection de sphères - Formule de Leibniz*

On considère un carré ABCD *de côté* a *et de centre* O. *Sur la droite perpendiculaire en* A *au plan du carré, on considère un point* E *tel que* $AE = \frac{a}{\sqrt{2}}$

1. a) Déterminer $\Sigma = \{M \in \mathscr{E} \ / \ MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4a^2\}$

b) Déterminer $\mathscr{C} = \Sigma \cap (ACE)$

2. Soit $\Sigma' = \{M \in \mathscr{E} \ / \ ME = \sqrt{2}\, MA\}$

a) Montrer que Σ' *est une sphère dont le centre* Ω *est le symétrique du point* E *par rapport à* A.

b) Déterminer $\mathscr{C}' = \Sigma' \cap (ACE)$

3. Démontrer que $\Sigma \cap \Sigma'$ *est un cercle* Γ *dont on construira le centre* H *et dont on déterminera le rayon.*

1. a) Σ est la sphère de centre O passant par A, B, C et D

b) Puisque (ACE) est un plan diamétral de Σ, $\mathscr{C}$ est le cercle du plan (ACE), de centre O et de rayon $OA = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

2. a) * Puisque $\sqrt{2} \neq 1$, Σ' est une sphère de diamètre $[G_1G_2]$ où G_1 est le barycentre de (E,1) (A,$\sqrt{2}$) et G_2 celui de (E,1) (A,$-\sqrt{2}$).

On détermine alors le centre Ω de Σ' en posant $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{AG_2})$ d'où $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AE}$ d'où le résultat.

Remarquons qu'il est encore plus simple de caractériser Σ' par $\Sigma' = \{M \in \mathscr{E} \ / \ ME^2 - 2MA^2 = 0\}$ pour déterminer Ω ou par la formule de la médiane : $\forall\, M \in \mathscr{E} \quad ME^2 + M\Omega^2 = 2MA^2 + 2AE^2$ d'où $ME = \sqrt{2}MA \Leftrightarrow M\Omega^2 = 2AE^2 = a^2$

b) On a de même $\mathscr{C}'$ est un grand cercle de centre Ω et de rayon a (Σ' passe par O puisque $OE = \sqrt{2}\ OA$).

3. $\Sigma = \mathscr{S}(O, \frac{a}{\sqrt{2}})$; $\Sigma' = \mathscr{S}(\Omega, a)$ $O\Omega = a$.

Σ et Σ' sont sécantes puisque $a - \frac{a}{\sqrt{2}} < O\Omega < a + \frac{a}{\sqrt{2}}$

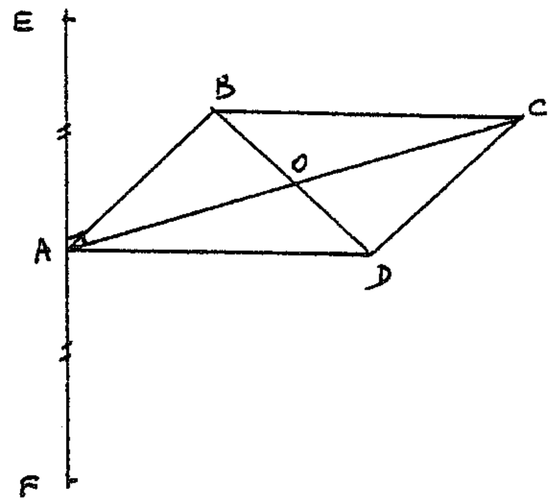
Donc $\Gamma = \Sigma \cap \Sigma'$ est un cercle dont le plan est perpendiculaire à $(O\Omega)$; son centre H est le point d'intersection des droites (O) et (IJ) (où I et J sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$).

Déterminons le rayon r de Γ :

dans le triangle $O\Omega J$, $\cos \widehat{O\Omega J} = \frac{3}{4}$

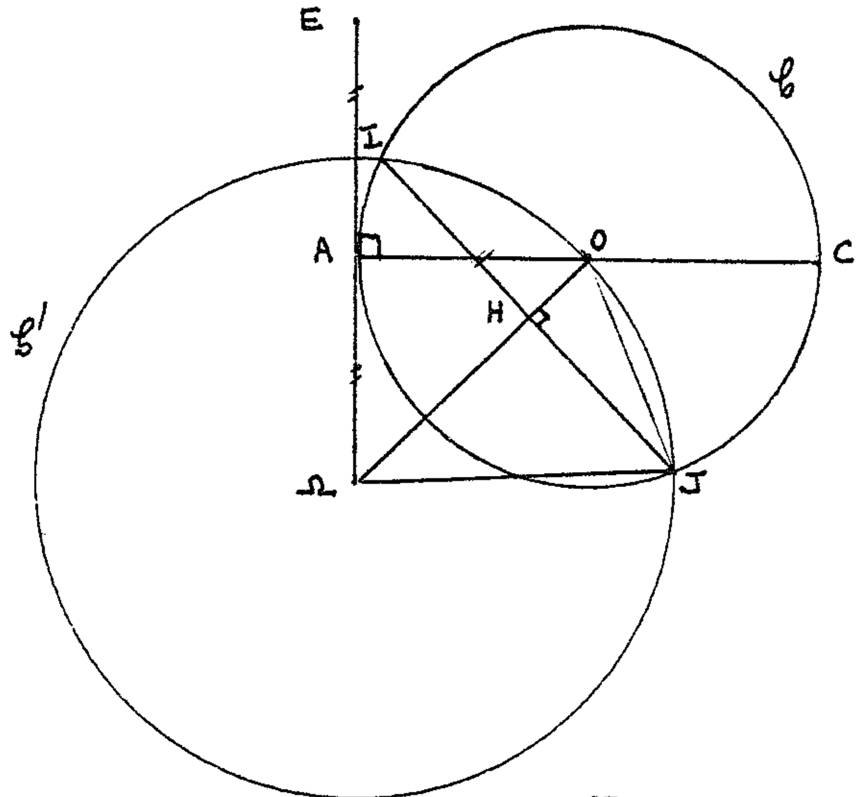
$(\frac{a^2}{2} = 2a^2 - 2a^2 \cos \widehat{O\Omega J})$ d'où

$\sin \widehat{O\Omega J} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ et $r = a\frac{\sqrt{7}}{4}$.



On peut également déterminer H avec la relation :

$OH \times OO' = OJ^2$ (O' étant le point diamétralement opposé à O sur $\mathscr{C}'$).



Recherche de symétries ou de rotations laissant invariant un solide usuel donné

L'objet du programme n'est pas de rechercher avec les élèves <u>toutes</u> les isométries laissant invariant un solide donné. En particulier, on ne peut évoquer le fait qu'une application affine est déterminée par la donnée des images de 4 points non coplanaires. Nous avons cependant, à titre d'exemple, essayé de rechercher <u>toutes</u> les symétries et <u>toutes</u> les rotations laissant invariant le cube.

I PROPRIETES IMPORTANTES UTILISEES

* Si deux plans P et P' sont perpendiculaires, $S_P \circ S_{P'} = S_{P'} \circ S_P$ est le demi-tour d'axe D ($D = P \cap P'$).

Réciproquement, un demi-tour d'axe D peut s'écrire comme la composée de deux réflexions par rapport à des plans perpendiculaires sécants selon la droite D.

* La composée de deux demi-tours d'axes D et D' sécants en O est une rotation d'axe Δ, la perpendiculaire commune à D et D' (en O).

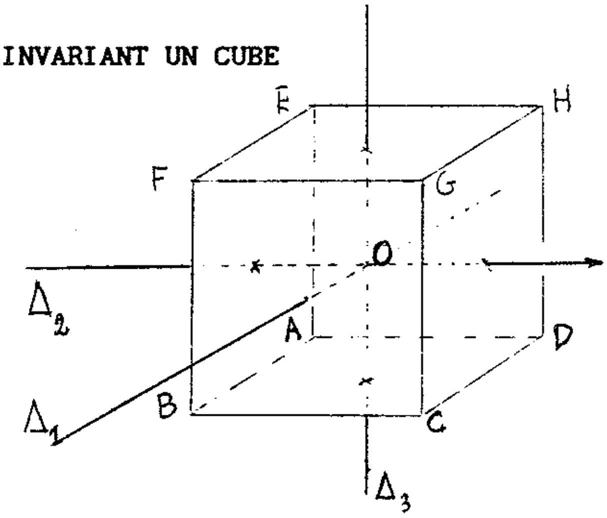
Si de plus, D et D' sont perpendiculaires en O, $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$ est le demi-tour d'axe Δ.

* Soit une droite D perpendiculaire en O au plan P et les trois symétries S_O, S_D, S_P. La composée de deux de ces applications est la troisième application.

Donc la composée des réflexions par rapport à trois plans perpendiculaires deux à deux est la symétrie de centre O, où O est le point commun aux trois plans.

II DES ISOMETRIES LAISSANT GLOBALEMENT INVARIANT UN CUBE

(réflexions ou rotations ou symétries centrales ....)



1) Soit f une isométrie conservant globalement le cube de côté a.

* <u>Chaque sommet a pour image un sommet :</u>
En effet la distance maximale de deux points du cube est $a\sqrt{3}$ donc l'égalité $f(A)f(G) = AG = a\sqrt{3}$ prouve que f(A) et f(G) seront nécessairement deux sommets opposés. On peut alors démontrer que chaque diagonale a pour image une diagonale.

* <u>Chaque face a pour image une face et</u> donc chaque arête a pour image une arête.

* <u>O est invariant par f</u> (O est isobarycentre des 8 sommets, ou O est le milieu de chaque diagonale).

2) O est centre de symétrie

3) Recherche des plans de symétrie:

a) <u>Tout plan de symétrie P est nécessairement le plan médiateur d'une paire de sommets :</u>
En effet, un point au moins n'est pas invariant par S_P (A par exemple) : P est alors le plan médiateur de [Af(A)].

b) Il y a 13 plans médiateurs possibles :

. les plans P_1, P_2, P_3 (respectivement médiateurs de [AB], [AD], [AE])
chaque plan est médiateur de 4 arêtes du cube.

. les plans Q_1, ..., Q_6 (respectivement médiateurs de [AC], [AH], [AF], [BD], [BE], [CF])
chaque plan est médiateur de 2 diagonales de faces

. les plans médiateurs des diagonales du cube : [AG], [CE], [DF], [BH].

c) On vérifie que seuls, les neuf premiers plans cités conviennent :
Le cube a neuf plans de symétrie.

4) Recherche des axes de symétries

Un tel axe Δ passe nécessairement par le centre de symétrie O, donc d'après les propriétés rappelées au § I, Δ est un axe de symétrie ssi son plan perpendiculaire en O est un plan de symétrie.

Le cube a neuf axes de symétrie:

. les trois droites joignant les centres de deux faces opposées (Δ_1, Δ_2, Δ_3).

. les six droites joignant les milieux de deux arêtes opposées

5) Recherche de rotations (autres que les demi-tours déterminés au §4)).

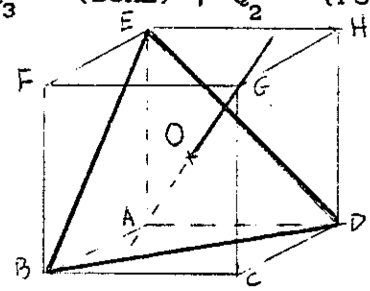
Les plans de symétrie déterminés au §3) sont tous sécants deux à deux suivant une droite contenant O ; s'ils sont perpendiculaires (P_1 et P_2 par exemple), la composée des deux réflexions redonnera un demi-tour trouvé au §4) ($S_{P_2} \circ S_{P_1} = S_{\Delta_3} = S_{Q_1} \circ S_{Q_4}$).

* $S_{Q_4} \circ S_{P_1}$ est une rotation autour de Δ_3, de mesure $\frac{\pi}{2}$ dans un sens ou dans l'autre, qui laisse le cube invariant.

De même, Δ_1, Δ_2 sont des axes de répétition d'ordre 4 pour le cube

* $S_{Q_5} \circ S_{Q_6}$ est une rotation R_1 autour de (AG)

(Q_5 = (ADGF) ; Q_6 = (ABGH) ; Q_4 = (ACGE) ; Q_3 = (BCHE) ; Q_2 = (FCDE) ; Q_1= (BDHF))



Or $R_1(B) = E$; $R_1(D) = B$; $R_1(E) = D$

Donc, puisque (AC) est l'axe du triangle équilatéral EBD, on en déduit que R_1 est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans un sens ou dans l'autre.

Les quatre diagonales du cube sont des axes de répétition d'ordre 3

On obtient ainsi 15 rotations (y compris l'identité) autres que des demi-tours, qui laissent le cube invariant.

6) **Y a-t-il d'autres isométries ?**

En étudiant toutes les possibilités de permutations des huit lettres A, B,... H, on trouve 48 isométries possibles laissant invariant le cube (6 isométries tq f(A) = A, 6 tq f(A) = B etc ...). Les paragraphes précédents nous ont permis d'en trouver 34 simples : 24 positives et 10 négatives.

Les 14 autres sont des antidéplacements (ayant O comme seul point invariant) qui peuvent s'écrire comme produit d'une réflexion S_P et d'une rotation r d'axe D (qui peut-être un demi tour) avec D non perpendiculaire à P. (Ces deux isométries conservant le cube).

Par exemple $S_{EACG} \circ \mathrm{rot}\,(\Delta_2, 90^\circ)$ donne E A B F H D C G

et $S_{BDFH} \circ \mathrm{rot}(\Delta_2, - 90^\circ)$ // B F E A C G H D

III RECHERCHE DES ROTATIONS LAISSANT LE CUBE INVARIANT

On note $\mathcal{R}$ cet ensemble

1) **Soit f un élément de $\mathcal{R}$**

a) Puisque f(O) = O, l'axe de f contient O.

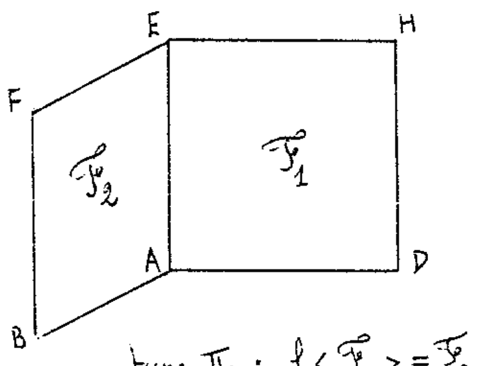
b) L'image du centre d'une face $\mathcal{F}$ est le centre de la face f < $\mathcal{F}$ >, donc l'axe de f est inclus dans le plan médiateur des deux centres s'ils sont distincts, ou est la droite joignant le centre O du cube au centre de la face $\mathcal{F}$ s'ils sont confondus.

c) Une face $\mathcal{F}$ peut être:

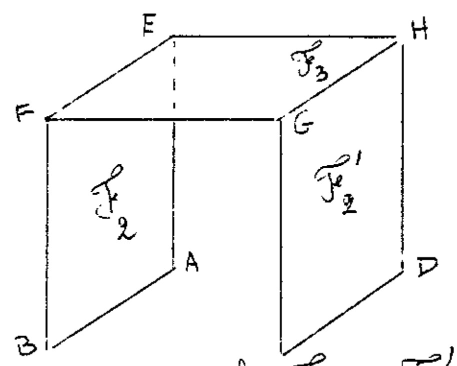
soit globalement invariante (type I)

soit transformée en une face "adjacente" (type II)

soit transformée en la face "opposée" $\mathcal{F}'$ (type III)



type II : $f < \mathcal{F}_1 > = \mathcal{F}_2$



type III : $f < \mathcal{F}_2 > = \mathcal{F}_2'$

2) **Recherche des axes "possibles" d'un élément de $\mathcal{R}$**

a) S'il existe une face $\mathcal{F}$ globalement invariante, $\mathcal{F}'$ l'est aussi et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont les deux seules faces globalement invariantes : Δ_1, Δ_2, Δ_3 <u>sont les axes possibles.</u>

b) Si aucune des faces n'est globalement invariante :
supposons par exemple que $f < \mathcal{F}_1 > = \mathcal{F}_2$ (type II).
L'image de $\mathcal{F}_3$ est du type II ou de type III :

* avec par exemple, $f < \mathcal{F}_3 > = \mathcal{F}_1$ (type II), l'axe de f doit être dans le plan contenant $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3$ et O et dans celui contenant $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et O : c'est <u>une diagonale du cube.</u>

* avec par exemple, $f < \mathcal{F}_3 >= \mathcal{F}'_3$ (type III), l'axe est dans le plan P_3 et dans le plan contenant $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et O : c'est <u>une droite joignant les milieux des arêtes opposées.</u>

En examinant le cas où $f < \mathcal{F}_1 > = \mathcal{F}'_1$ (type III), on retrouve avec $f < \mathcal{F}_3 >$ du type III ou du type II les deux cas précédents.

En résumé, les axes possibles d'une rotation de $\mathcal{R}$ sont :

- les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3
- les 4 diagonales du cube
- les 6 droites joignant les milieux des arêtes opposées

3) **Etude des rotations de $\mathcal{R}$**

* f d'axe Δ_i : on est ramené aux rotations planes conservant un carré, il y en a trois : $\mathrm{rot}(\Delta_i, \frac{\pi}{2}k)$ $(1 \le k \le 3)$, soit 9 <u>rotations.</u>

* f d'axe une diagonale du cube : on est ramené à l'étude des rotations conservant un triangle équilatéral ; on obtient pour (AG), $\mathrm{rot}((AG), \frac{2\pi}{3})$ ou $\mathrm{rot}((AG), \frac{4\pi}{3})$, soit <u>8 rotations de ce type.</u>

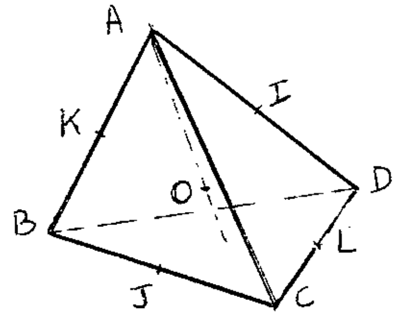
* f d'axe la droite joignant les milieux de deux arêtes opposées : seul le demi-tour convient, soit <u>6 rotations de ce type</u>.

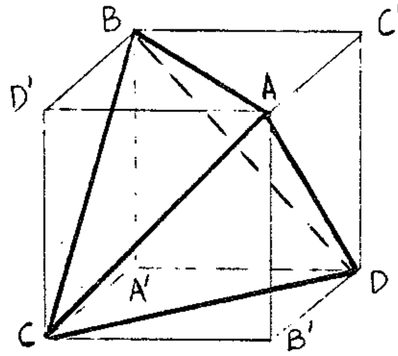
<u>En résumé :</u>

Il y a 23 rotations distinctes laissant un cube invariant et l'identité, soit 24 déplacements. (Pour vérifier qu'il n'y en a pas d'autres, on peut par exemple démontrer que toute isométrie de $\mathcal{E}$ est la composée d'au plus trois réflexions). L'application $\varphi : f \to S_{P_1} \circ f$ est alors une bijection de l'ensemble $\mathcal{D}_c$ des déplacements du cube sur l'ensemble des antidéplacements du cube.

Il y a donc 48 isométries laissant invariant le cube.

IV DES ISOMETRIES LAISSANT INVARIANT UN TETRAEDRE REGULIER





Puisque AB = AC et DB = DC, les points A et D sont dans le plan médiateur de [CD] ; de même, B et C sont dans le plan médiateur de [AD].

Ainsi, [AB] et [CD] sont orthogonales et leurs plans médiateurs se coupent suivant la perpendiculaire commune (IJ) (I et J milieux de [AD] et [BC]). Le point O , centre du tétraèdre, est aussi le milieu des segments perpendiculaires communs aux arêtes opposées [IJ], [KL], [MN].

1) Soit *f* une isométrie conservant le tétraèdre,
de même que pour le cube, . O est invariant par f
. tout sommet a pour image un sommet

2) Le tétraèdre admet 6 plans de symétrie, les plans médiateurs de ses arêtes.

3) Il admet 3 axes de symétrie, les axes (IJ), (KL), (MN)

4) Par la symétrie de centre O, on obtient le cube AC'BD'B'DA'C.

Puisque chaque diagonale du cube est un axe de répétition d'ordre 3, chacune des droites (AA') ... (DD') est un axe de répétition d'ordre d'ordre 3 pour le tétraèdre : On obtient ainsi 9 rotations (y compris $id_{\mathcal{E}}$) autres que les demi-tours du §3)).

5) Y-a-t-il d'autres isométries ?

Puisque chaque sommet est équidistant des trois autres, le nombre d'isométries est exactement le nombre de permutations des 4 lettres A, B, C, D, soit 24 isométries.

Nous en connaissons déjà 18 simples : 12 positives et 6 négatives

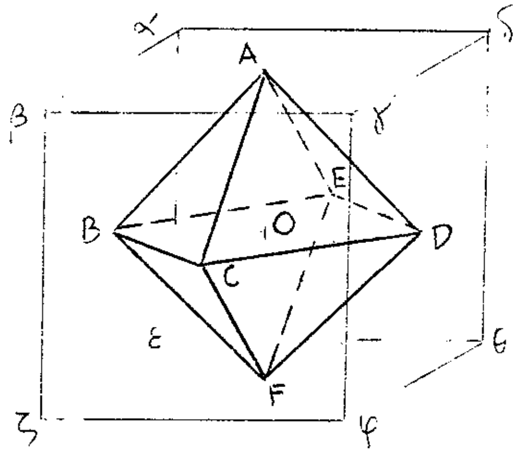
Les 6 autres sont des antidéplacements (ayant O comme seul point invariant) qui peuvent s'écrire comme produit d'une des six réflexions et d'une des rotations d'axe (OA) .... (OD).

Ils sont définis par leurs images de A B C D :

B C D A, B D A C, C A D B, C D B A, D A B C, D C A B .

V DES ISOMETRIES LAISSANT INVARIANT UN OCTAEDRE REGULIER

L'octaèdre régulier ABCDEF est inscrit dans le cube $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\varphi\theta$, chaque sommet de l'octaèdre est le centre d'une face du cube.



1) Soit f une isométrie laissant invariant l'octaèdre

. <u>chaque sommet a pour image un sommet</u> (idem le cube f(E)f(C) = EC = a donc f(E) et f(C) sont deux sommets opposés).

. <u>O est invariant</u>

2) Il y a 48 isométries possibles (8 isométries tq f(A) = A, 8 tq f(A) = B etc ....)

3) Toute isométrie "du cube" est une isométrie "de l'octaèdre"

En effet, toute isométrie f laissant le cube invariant transforme le centre d'une face en le centre de la face image ; donc tout sommet de l'octaèdre a pour image par f un sommet de l'octaèdre.

4) Nous avons recensé 48 isométries laissant le cube invariant.

D'où les isométries conservant l'octaèdre régulier sont les isométries conservant le cube dans lequel il est inscrit.

En effet, on peut soit vérifier que toute isométrie "du cube" est une isométrie de son octaèdre inscrit,

soit remarquer qu'une isométrie "de l'octaèdre" est aussi une isométrie conservant le "petit " cube inscrit lui-même dans l'octaèdre.

CHAPITRE 7

GEOMETRIE EN TERMINALE D

Le programme de géométrie en Terminale D "ne comporte que des travaux pratiques mettant en oeuvre les connaissances de géométrie du plan et de l'espace figurant aux programmes des classes antérieures, et notamment de Seconde et Première".

"Les activités géométriques répondent à deux objectifs principaux :

- entretenir la pratique des objets géométriques usuels du plan et de l'espace ;
- exploiter des situations géométriques comme source de problèmes, notamment en analyse, et, inversement, entretenir une vision géométrique grâce à la mise en oeuvre d'activités graphiques permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme".

Ces activités géométriques sont donc à voir sous forme de travaux pratiques tout au long de l'année (et sans cours structuré). Les élèves seront amenés à manipuler les solides usuels de l'espace : calculs d'aires, de volumes, recherche de symétries et de rotations laissant invariant un solide usuel (voir les structures moléculaires en fin de chapitre). Certains problèmes conduisent à l'étude de courbes planes paramétrées (on pourra en faire l'illustration avec un ordinateur). Il faudra penser également à l'utilisation des nombres complexes (reconnaissance de $z' = z + a$ et $z' = e^{i\alpha}z$; module et argument de $\frac{c - b}{c - a}$).

1. Extrait d'un exercice (Aix juin 86. série D)

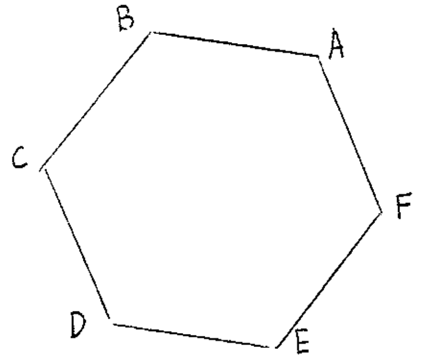
On considère l'hexagone régulier ABCDEF. *On choisit au hasard* 3 *points distincts de cet hexagone.*

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) un triangle équilatéral?

b) un triangle isocèle non équilatéral?

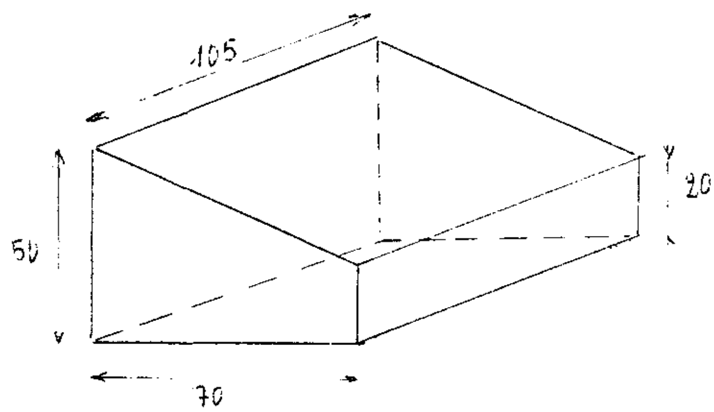
c) un triangle rectangle ?



Il y a 20 triangles possibles, 2 sont équilatéraux, 6 sont isocèles mais non équilatéraux et 12 sont rectangles.

Faire remarquer qu'un triangle possible est nécessairement de l'un des 3 types précédents.

2. *Dans un coffre de voiture (Cf. figure - cotes en cm), on veut mettre une valise (parallélépipède rectangle). Quelles doivent être les dimensions de la valise pour que son volume soit maximum ?*



D'abord remarquer que la largeur de la valise doit être de 105 cm ; notons y (en cm) la profondeur de la valise, x (en cm) la hauteur de la valise et V (en cm^3) son volume (x étant fixé, $0 \leq x \leq 50$, y est choisi le plus grand possible).

* si $0 \leq x \leq 20$, $y = 70$ et $V(x) = 7350\,x$

* si $20 \leq x \leq 50$, $y = \frac{7}{3}(50 - x)$ et $V(x) = 245\,(50 - x)\,x$

(y est une fonction affine de x, d'après Thalès)

Puisque pour $0 \leq x \leq 20$, $V(x) \leq 20$, le volume est maximum lorsque $(50 - x)x$ est maximum, soit lorsque $x = 25$ $V\,(25) = 153125$ (cm^3).

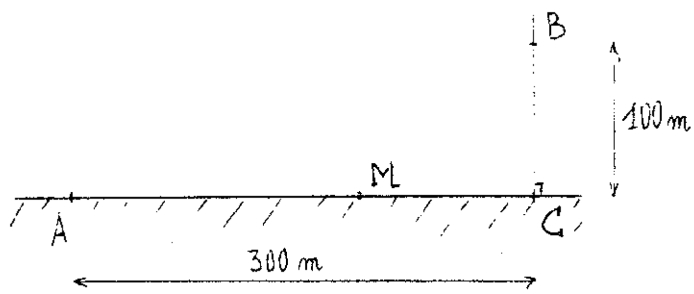
3. *Un baigneur se trouvant en B se trouve en difficulté à 100 m du rivage. Son ami se trouvant en A veut le secourir. Où doit-il se mettre à l'eau pour parvenir en B en un minimum de temps ? (cf.figure).*

a) L'ami est un sportif : il fait 8 mètres par seconde sur terre et 1,5 m par s dans l'eau

b) L'ami fume trop : il fait 3 mètres par seconde sur terre et 1 m par s dans l'eau

Soit M l'endroit où il va se mettreà l'eau et AM = x (en mètres) ($0 \le x \le 300$).

Il faut donc déterminer M pour que $\frac{MA}{8} + \frac{MB}{1,5}$ soit mimimum (version a)) ou $\frac{MA}{3} + MB$ (version b)) ,avec $MB = \sqrt{(300 - x)^2 + 10^4}$.



* Pour la version a), notons f(x) le temps (en s) mis par A en se jetant à l'eau en M.

$$f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{3}\sqrt{(300 - x)^2 + 10^4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2(300 - x)}{3\sqrt{(300 - x)^2 + 10^4}}$$

f est minimun lorsque $3\sqrt{(300 - x)^2 + 10^4} = 16(300 - x)$ $(0 \le x \le 300)$, soit lorsque $300 - x_0 = \frac{3.10^2}{\sqrt{247}}$. On trouve $x_0 \approx 280,9$ m.

$f(x_0) = \frac{25}{6}(9 + \sqrt{247})$ d'où $f(x_0) \approx 103$ s.

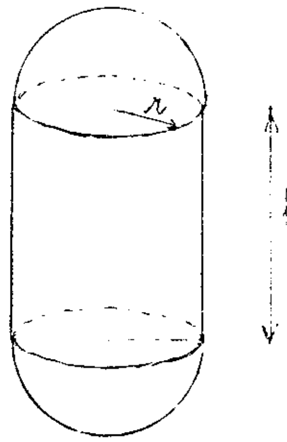
* Pour la version b), $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{(300 - x)^2 + 10^4}$

f est minimum pour $x_0 = 100(3 - \frac{1}{2\sqrt{2}})$ $x_0 \approx 264,6$ m

$f(x_0) = 100 + \frac{400}{3\sqrt{2}}$ $f(x_0) \approx 194$ s.

Pour la commodité des calculs, il était préférable de prendre MC (et non MA) comme variable.

4. *Dans un chauffe-eau, la chaleur perdue est proportionnelle à la surface totale. Pour un chauffe-eau de volume donné, constitué d'un cylindre (de hauteur h) fermé par deux demi-sphères , quelle doit être la hauteur du cylindre pour que la chaleur perdue soit minimale ?.*



$V = \pi\, r^2 h + \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \pi\, r^2(h + \frac{4}{3} r)$

$S = 4\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(h + 2r)$

Le volume étant donné,

$r^2(h + \frac{4}{3} r) = a$ (constante)

d'où $h = \frac{a}{r^2} - \frac{4}{3} r$ et

$S = 2\pi\, r\, (\frac{2}{3} r + \frac{a}{r^2}) = 2\pi(\frac{2}{3} r^2 + \frac{a}{r})$

S est mimimun lorsque $\frac{dS}{dr} = 0$, soit

lorsque $\frac{4}{3} r - \frac{a}{r^2} = - h = 0$ d'où $h = 0$.

le chauffe-eau doit être en fait de forme sphérique.....

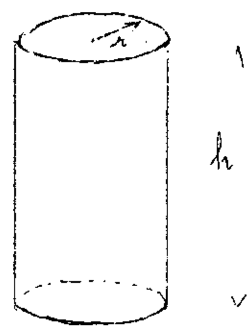
5. *Exercice similaire :*

a) Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de conserve cylindrique pour que la surface totale soit minimale ? (lorsque son volume sera donné).

b) Même question si la boîte est à base carrée

c) Même question avec une casserole cylindrique.

Il faut comprendre que l'on veut une surface S minimale pour un volume V donné.



a) $S = 2\pi\, rh + 2\pi\, r^2 = 2\pi(rh + r^2)$

$V = \pi\, r^2 h$ avec $r^2 h = a$

On a S miminum pour $h = 2r$

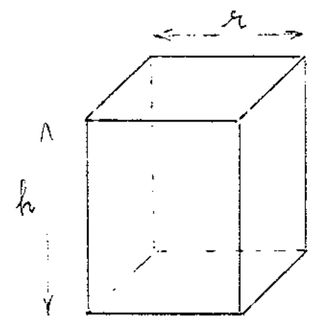
(On a alors $V = 2\pi r^3$ et $S = 6\pi r^2$).

b) $S = 4xh + 2x^2 = 2x(2h + x)$

$V = x^2h$

S est miminum pour $h = x$

(On a alors $V = x^3$ et $S = 6x^2$).

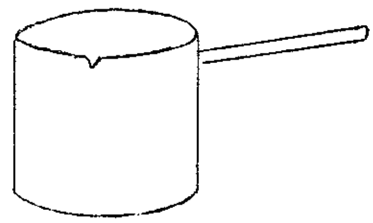


c) $S = 2\pi\, rh + \pi\, r^2 = \pi\, r(2h + r)$

$V = \pi\, r^2h$ avec $r^2h = a$

S est miminum pour $h = r$

(on a alors $V = \pi\, r^3$ et $S = 3\pi\, r^2$).



6. *Un problème intéressant : Bordeaux - septembre 84 - série* A_1
(forme d'un carrelage et approche par une fonction du 3^e *degré).*

Dès la classe de seconde, et surtout en première, sont étudiées (en chimie) quelques structures moléculaires. Si certaines molécules simples sont planes, la plupart ont une configuration spatiale plus ou moins complexe : les élèves peuvent être alors déroutés par la représentation d'une figure de l'espace.

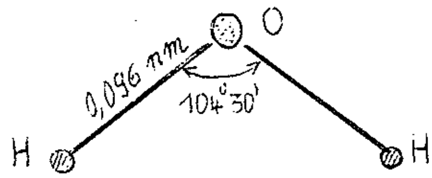
Dans les exemples suivants, interviennent les notions de <u>liaison</u> et <u>angle de liaison</u> (ou angle valentiel) ;dire que, dans la molécule d'eau :

* la <u>liaison</u> O - H vaut 0,096 nm veut dire que la distance entre les noyaux des atomes d'oxygène et d'hydrogène est statistiquement égale à 0,096 nm (1nm = 10^{-9} m = 10 Å)

* l'angle de liaison vaut $104^{0}30'$ (ou 105^{0}) veut dire que l'angle $\widehat{HOH}$ est statistiquement égal à $104^{0}30'$...

On peut donc, à propos des structures moléculaires vues dans le cours de chimie, dégager pour certaines molécules, des axes ou des plans de symétrie, ou montrer (par exemple dans le méthane) que leur structure "régulière" permet de calculer des angles de liaison.

1. L'eau : H_2O



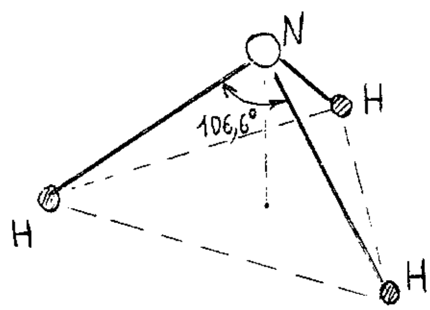
liaison O - H : 0,096 nm

angle de liaison : $104^{0}30'$

Calculer la distance H - H

Utilisation de la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$, ou plus simplement, utilisation de $\cos \frac{104^{0}30}{2}$.

2. L'ammoniac : NH_3



Structure spatiale où les noyaux des atomes H forment un triangle équilatéral, le noyau de l'atome N se trouve sur la hauteur issue du centre de gravité du triangle équilatéral.

liaison N - H : 0,1015 nm

angle de liaison : $106,6^{0}$

hauteur de la pyramide : 0,038 nm

a) Calculer la distance H - H, *connaissant la distance* N - H *et l'angle de liaison.*

b) En déduire la hauteur de la pyramide; ce résultat est il conforme à celui annoncé ?

On utilise de plus $h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ (dans un triangle équilatéral)

3. Le méthane : CH_4

Structure spatiale où les 4 noyaux d'atomes H forment un tétraèdre régulier, l'atome C se trouvant au centre du tétraèdre.

Liaison C - H : 0,109 nm

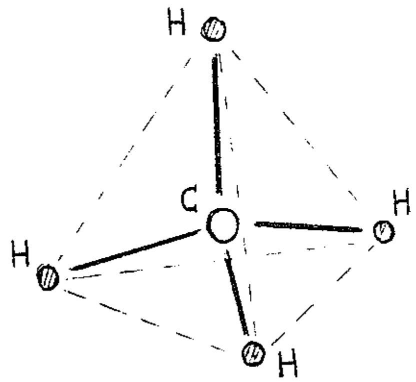
angle de liaison : $109^{0}28'$

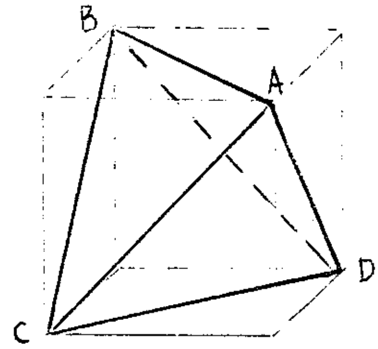
(D'une façon expérimentale, l'existence d'un seul chlorure de méthyle CH_3Cl prouve l'identité des quatre atomes d'hydrogène de CH_4 et la neutralité électrique de CH_4 s'explique par l'identité des liaisons C - H et par leur disposition tétraédrique).

a) Calculer la distance H - H

b) Vérifier que, dans tout tétraèdre régulier ABCD *de centre de gravité* G, *on a* $\widehat{AGB} \approx 109^{0}28'$ $(\cos \widehat{AGB} = -\frac{1}{3})$.

c) Rechercher les éléments de symétrie de la molécule ; on pourra pour cela montrer qu'un tétraèdre régulier ABCD *de centre* G *est inscriptible dans un cube de centre* G, *dont* A, B, C, D *sont 4 des 8 sommets.*





Cet exercice fait intervenir la configuration d'un tétraèdre ABCD avec son centre de gravité G. Faire réviser que G est élément de 7 droites remarquables et ses positions sur les 7 segments. Si ABCD est régulier, (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

4. L'éthane : $C_2 H_6$

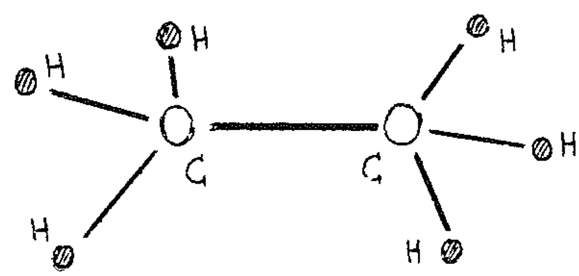
En quelque sorte une "réciproque" de la structure du méthane : les quatre liaisons d'un atome de carbone sont orientées vers les sommets d'un tétraèdre régulier puisque les angles sont égaux (à $109^{0}28'$).

Chaque atome de carbone est au centre d'un tétraèdre régulier dont trois sommets sont occupés par des noyaux d'atomes H, le 4ème sommet étant situé sur le segment joignant les noyaux des deux atomes de carbone.

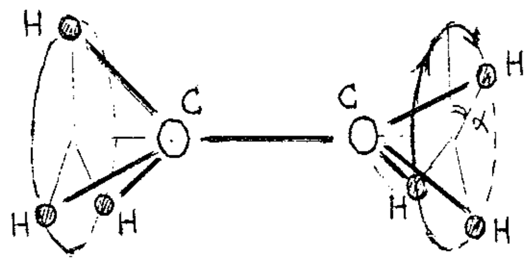
liaison C - C : 0,153 nm (ou 0,154 nm)

liaison C - H : 0,109 nm

angle de liaison : $109^{0}28'$

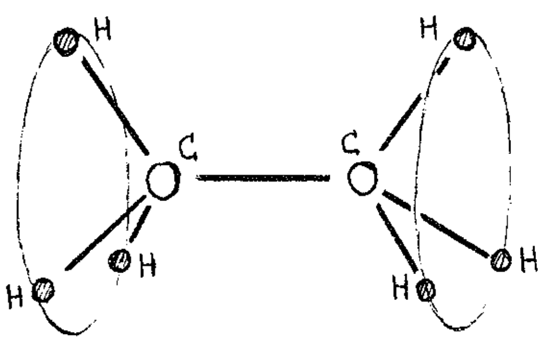


Chacun des groupements CH_3 peut tourner librement autour de l'axe C - C (principe de libre rotation).
Donc les liaisons C - H du premier carbone peuvent faire un angle α quelconque avec les liaisons C - H du deuxième carbone.

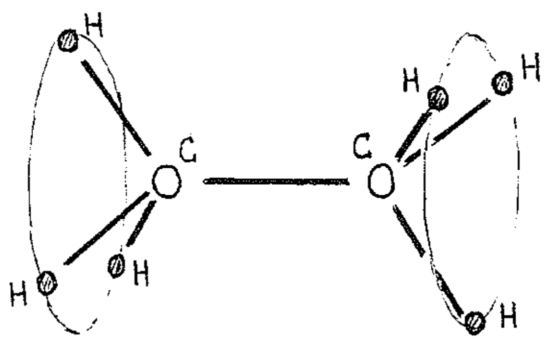


On réserve le nom de conformères aux deux conformations pour lesquelles $\alpha = 0^0$ (conformère éclipsé) et $\alpha = 60^0$ (conformère décalé).

Représenter les deux conformères de l'éthane. Démontrer que le conformère décalé a un centre de symétrie et chercher des axes et des plans de symétrie du conformère éclipsé.



conformère éclipsé

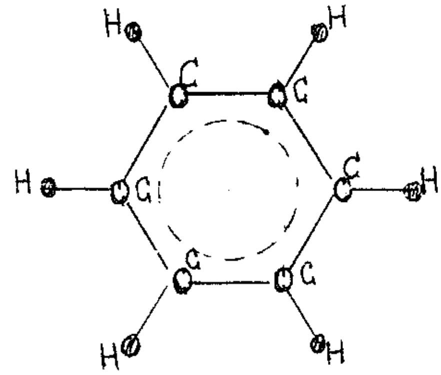


conformère décalé

D'une façon générale, les alcanes (C_nH_{2n+2}) ont une structure analogue : chaque angle de liaison $H\hat{C}H$ ou $H\hat{C}C$ ou $C\hat{C}C$ est égal à $109^028'$ donc chaque atome de carbone oriente ses quatre liaisons vers les sommets d'un tétraèdre régulier.

5. Le benzène : C_6H_6

Module plane - les noyaux C forment un hexagone régulier et tous les angles sont égaux à 120^0
liaison C - C : 0,140 nm
liaison C - H : 0,109 nm



Démontrer que la distance H - H *est égale à la distance* C - C *plus la distance* C - H.

Remarque :

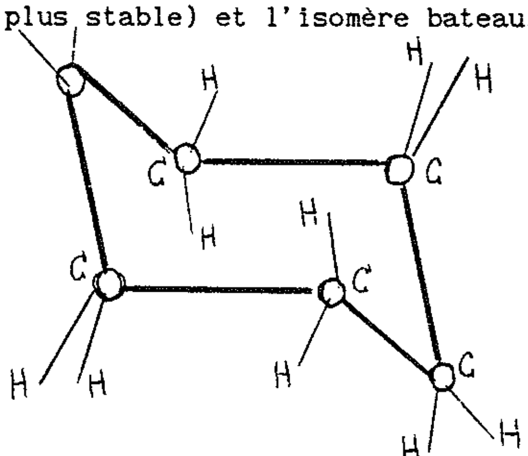
Les liaisons C - C ne sont ni doubles (pour lesquelles C = C : 0,133 nm) ni simples (pour lesquelles C - C : 0,154 nm). On admet que les 6 électrons π appartiennent en commun aux 6 atomes de carbone. On dit que les liaisons π sont délocalisées et on les représente par un cercle pointillé ou par la lettre φ.

En remarquant que $\frac{2 \times 0,133 + 1 \times 0,154}{3} = 0,140$ on pourrait ainsi interpréter que cette liaison "intermédiaire" entre une liaison double et une liaison simple mesure 0,140 nm.

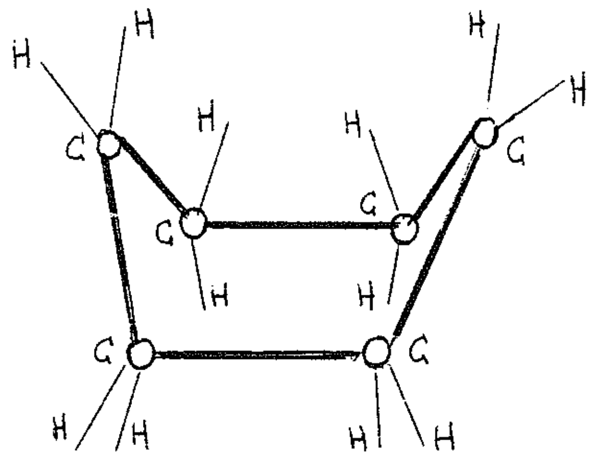
6. Le cyclohexane : C_6H_{12}

Ici, la chaîne des carbones est fermée (C_6H_{12} fait partie des cyclanes, de formule générale C_nH_{2n}). Les angles de liaison à partir de chaque atome de carbone sont tous égaux à $109^0 28'$. Cette géométrie tétraédrique se retrouve chaque fois que l'atome C engage quatre liaisons simples avec des atomes voisins. (On a donc liaison C - C : 0,154 nm).

Pour C_6H_{12} il existe deux conformations : l'isomère chaise (de loin le plus stable) et l'isomère bateau.



forme chaise

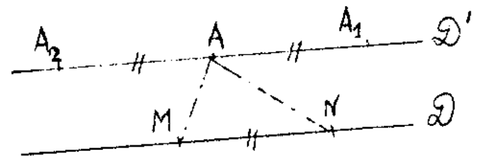


forme bateau

CHAPITRE 8
PROBLEMES DE SYNTHESE

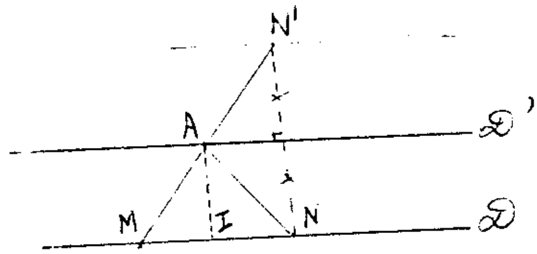
Principe du miroir . Problème de minimum .

1°) *Soient* $\mathcal{D}$ *une droite de l'espace* $\mathcal{E}$ *et* A *un point n'appartenant pas à* $\mathcal{D}$. *Déterminer l'ensemble des points* M *et* N *de* $\mathcal{D}$ *tels que* MN = 1 *(1 donné) et* AM + AN *minimum.*



Soient A_1 et A_2 les points de la parallèle $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}$ passant par A et tels que $AA_1 = AA_2 = 1$.

Pour tous points M et N de $\mathcal{D}$ tels que MN = 1, on a : $AM + AN = AM + A_2M$ ou $AM + A_1M$



On est ramené au problème du "miroir".

On obtient une paire unique solution :

AM + AN = AM + AN' (où N' est le symétrique de N par rapport à $\mathcal{D}'$).

AM + AN' est minimum lorsque MN = 1 etM ,A ,N' sont alignés, c'est à dire lorsque MN = 1 et AM = AN. D'où le résultat : (AI) médiatrice de [MN].

Remarque: On peut aussi utiliser les symétriques de A_1 et A_2 par rapport à $\mathcal{D}$.

2°) *Soient* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *deux droites non coplanaires de* $\mathcal{E}$, A *et* B *deux points de* $\mathcal{D}_1$.

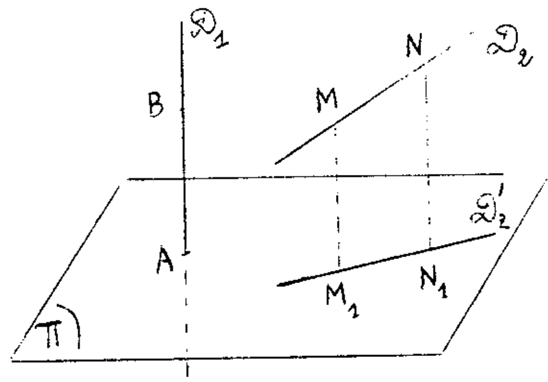
On se propose de déterminer les paires {M,N} des points de $\mathcal{D}_2$ *vérifiant :*

$$\begin{cases} MN = 1 \quad (1 \text{ donné}) \\ \text{l'aire du tétraèdre ABMN est minimum} \end{cases}$$

a) Démontrer qu'une paire {M,N} de points de $\mathcal{D}_2$ *vérifie ces conditions si et seulement si :* MN = 1 *et* $d(M,\mathcal{D}_1) + d(N,\mathcal{D}_1)$ *minimum.*

b) Soit Π *le plan perpendiculaire à* $\mathcal{D}_1$ *et passant par* A. *En supposant l'existence d'un tétraèdre* ABMN *répondant à la question et en considérant son projeté orthogonal sur* Π, *montrer que les projetés* M_1 *et* N_1 *de* M *et* N *sont solutions du problème posé .*

c) Résoudre le problème.



a) L'aire a du tétraèdre ABMN est la somme des aires des faces :

$\mathscr{A}(ABM) = \frac{1}{2}\,AB \times d(M,\mathcal{D}_1)$

$\mathscr{A}(ABN) = \frac{1}{2}\,AB \times d(N,\mathcal{D}_1)$

$\mathscr{A}(AMN) = \frac{1}{2}\,MN \times d(A,\mathcal{D}_2) = cte$

$\mathscr{A}(MNB) = \frac{1}{2}\,MN \times d(B,\mathcal{D}_2) = cte$

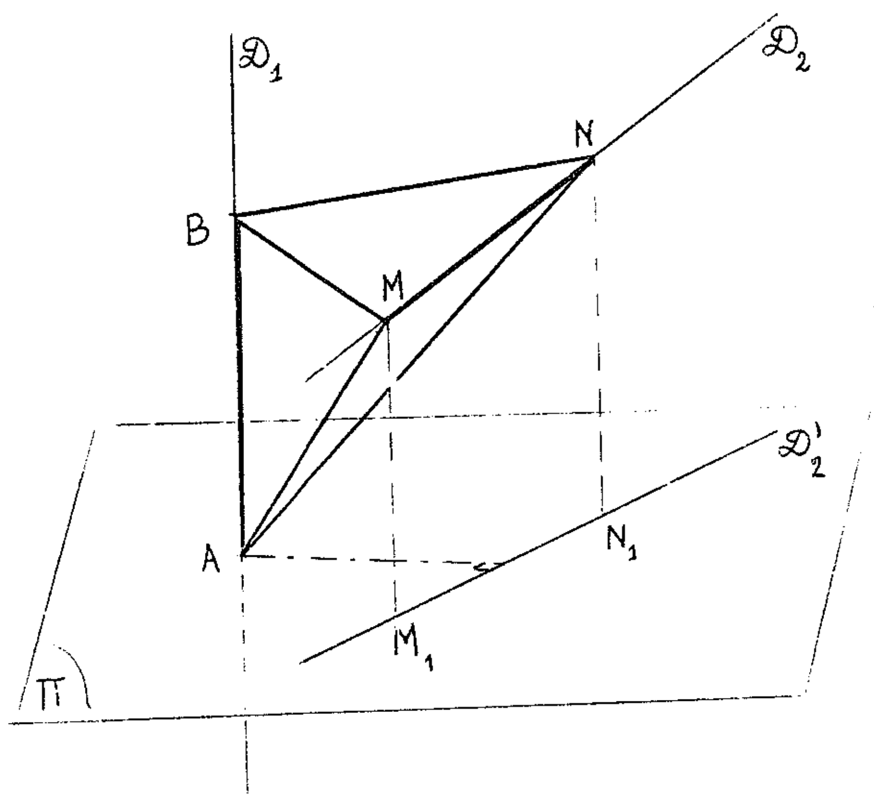
On a donc $\begin{cases} MN = 1 \\ a \text{ minimun} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} MN = 1 \\ d(M,\mathcal{D}_1) + d(N,\mathcal{D}_1) \text{ minimun} \end{cases}$

b) Supposons l'existence d'un tétraèdre ABMN répondant à la question $d(M,\mathcal{D}_1) = AM_1$ et $d(N,\mathcal{D}_1) = AN_1$.

On a $M_1N_1 = l_1$ (l_1 est fixe et ne dépend que des positions relatives de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$).

Donc l'existence d'une paire de points de $\mathcal{D}_2$ répondant au problème est équivalente à l'existence d'une paire de points de $\mathcal{D}'_2$ répondant au problème du 1°) pour $l = l_1$.

c) D'où l'existence d'un tétraèdre unique pour lequel le plan médiateur de $[M_1N_1]$ contient $\mathcal{D}_1$.



Lignes de niveaux.

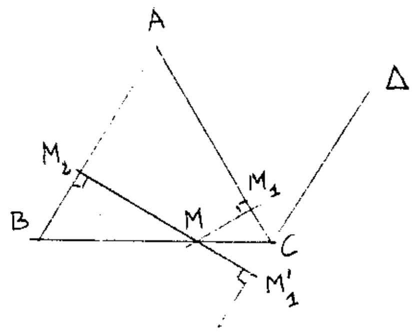
Soit ABC *un triangle équilatéral d'un plan* $\mathcal{P}$

1°) *Soit* M *un point de* [BC]. *Démontrer que* $d(M,(AB)) + d(M,(AC)) = h$ *où* h *est la hauteur du triangle* ABC.

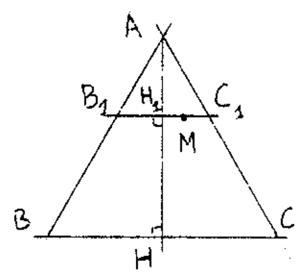
2°) *En déduire que, pour tout point* M *intérieur au triangle* ABC, *on a :* $d(M,(AB)) + d(M,(AC)) + d(M,(BC)) = h$.

3°) *Retrouver le résultat précédent par des considérations d'aires.*

4°) *Soit* f *l'application de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par :*
$f(M) = d(M,(AB)) + d(M,(AC)) + d(M,(BC))$.
Déterminer les lignes de niveau de f.



1°) Soit Δ la droite symétrique de (AC) par rapport à (BC). Δ est parallèle à (AB) donc $MM_2 + MM_1 = MM_2 + MM'_1$
$= d((AB),(AC)) = h$



2°) Pour tout point M intérieur au triangle ABC, le triangle AB_1C_1 est équilatéral ($(B_1C_1) // (BC)$).

Donc $d(M,(AB)) + d(M,(AC)) = AH_1$
et $f(M) = AH_1 + H_1H = AH$.

3°) $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AMB) + \mathcal{A}(AMC) + \mathcal{A}(BMC)$
$= \frac{1}{2} a\, [d(M,(AB)) + d(M,(AC)) + d(M,(BC))] = \frac{1}{2} ah.$

4°) * On a vu que, pour tout point M intérieur à ABC, $f(M) = h$

* <u>Soit M un point à l'extérieur du triangle ABC</u>:

.a) Si M est dans la zone 1, en considérant la droite $\mathcal{D}_M$ parallèle à (AB) et passant par M, on a :

$$f(M) = d(M,(AB)) + d(C,\mathcal{D}_M))$$
$$f(M) = h + 2d(\mathcal{D}_M,(AB))$$
$$= h + 2d(A,\mathcal{D}_M).$$

.b) Si M est dans la zone 2, $d(M,(AC)) + d(M,(BC)) = d(A,\mathcal{D}'_M)$

$$f(M) = h + 2d(A,\mathcal{D}'_M).$$

. Notons qu'il y a invariance par la rotation de centre G (centre du triangle ABC) et d'angle $\frac{2}{3}\pi$.

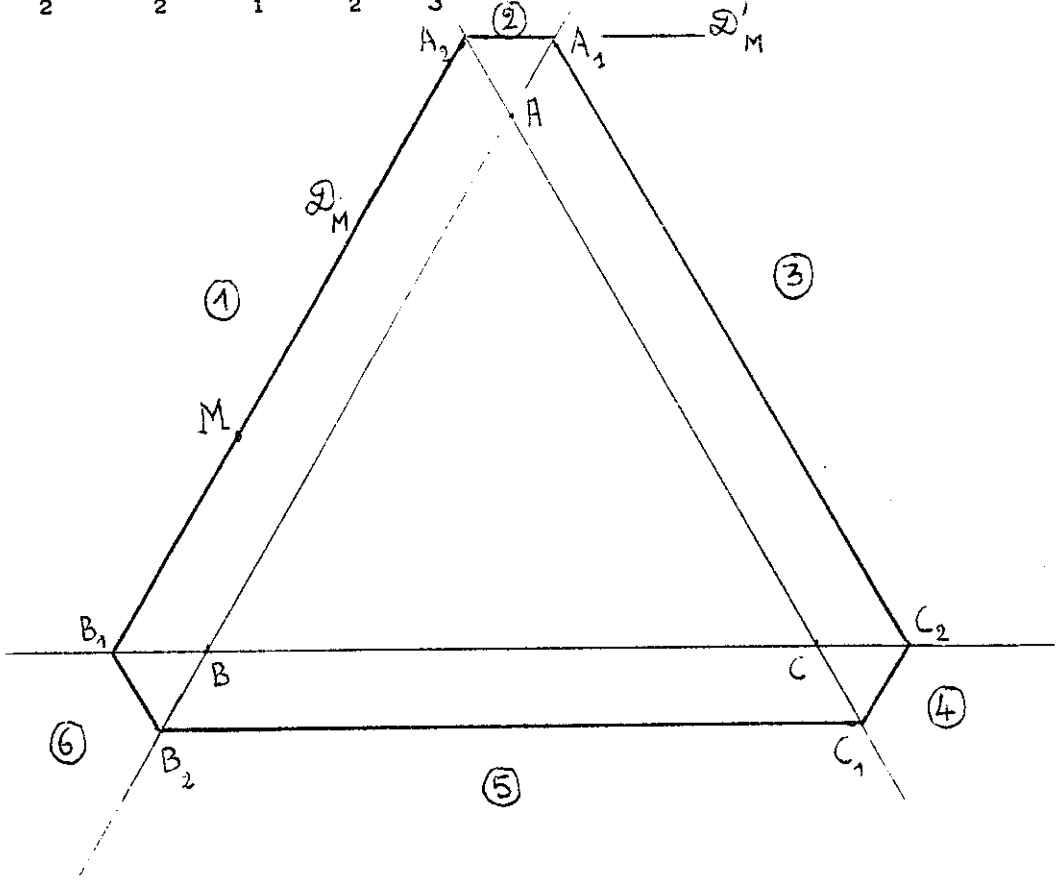
D'où, en posant $L_k = \{M/f(M) = k\}$

si $k < h$ $\quad L_k = \emptyset$

si $k = h$ $\quad L_k$ est l'intérieur de ABC (frontière comprise)

si $k > h$ $\quad L_k$ est un polygone de sommets $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$

avec $AA_1 = AA_2 = CC_2 = BB_1 = BB_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(k - h)$.



Formule de la médiane . Sphères.

1°) *Soit* ABCD *un rectangle de l'espace* $\mathcal{E}$. *Démontrer que pour tout* M *de* $\mathcal{E}$, $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{AC^2}{2} = 2MI^2 + \frac{BD^2}{2} = MB^2 + MD^2$$

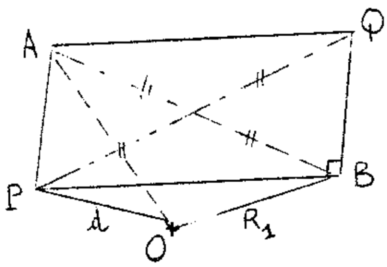
où I est le centre du rectangle ABCD.

2°) *On considère deux sphères* $\mathcal{S}_1(O,R_1)$, $\mathcal{S}_2(O,R_2)$ *de même centre* O $(R_1<R_2)$.

Soit P *un point fixe quelconque tel que* $OP = d$ $(d < R_1)$.

a) *On considère les rectangles* PAQB *tels que* $A \in \mathcal{S}_1$, $B \in \mathcal{S}_1$. *Déterminer le lieu géométrique de* Q.

b) *On considère les rectangles* PEHF *tels que* $E \in \mathcal{S}_1$, $F \in \mathcal{S}_2$. *Déterminer le lieu géométrique de* H.



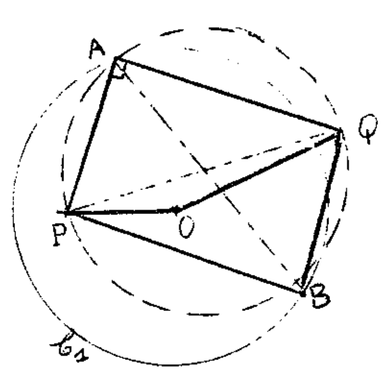
a) * Soit Q un point répondant à la question (avec A et B sur $\mathcal{S}_1$ tels que PAQB soit un rectangle).

$OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OB^2$

d'où $OQ = \sqrt{2R_1^2 - d^2}$ et Q appartient à la sphère $\mathcal{S}(O, \sqrt{2R_1^2 - d^2})$.

* Réciproquement, soit Q un point de cette sphère :

Q est extérieur à $\mathcal{S}_1$ $(OQ > R_1)$.



Plaçons nous dans le (ou un) plan (OPQ): le cercle de diamètre [PQ] coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en A et soit B le 4ème sommet du rectangle PAQB.

On a $OP^2 + OQ^2 = 2R_1^2 = OA^2 + OB^2$

d'où $B \in \mathcal{S}_1$.

($\mathcal{C}_1$ est l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_1$ et du plan (OPQ)).

b) De même qu'au a) on démontre que le lieu de H est la sphère $\mathcal{S}(O, \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - d^2})$ $(OH^2 + d^2 = R_1^2 + R_2^2 = OE^2 + EF^2)$

3°) *Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre* O *et de rayon* R. *Soit* P *un point vérifiant :* OP = d (d < R).

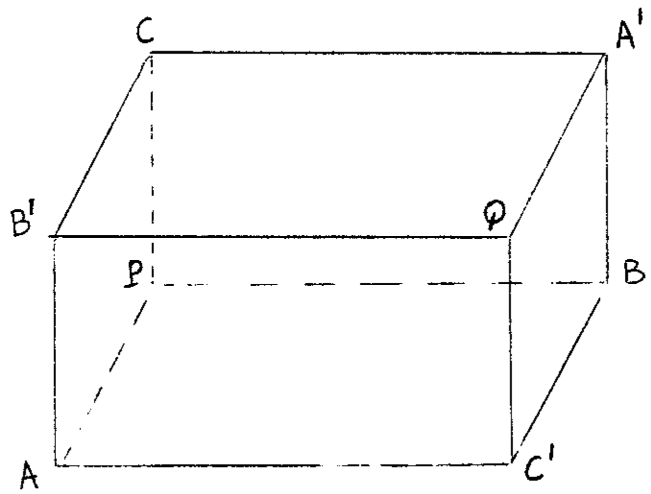
On considère l'ensemble des parallélépipèdes rectangles ayant pour sommet P *et dont les extrémités des arêtes issues de* P, *notées* A,B,C *appartiennent à $\mathscr{S}$.*

On note A', B', C', Q *les points diagonalement opposés à* A,B,C,P.

Déterminer les lieux géométriques des points A',B',C',Q.

En appliquant les résultats du 2°) a) on trouve le lieu de A', (rectangle PBA'C), la sphère $\mathscr{S}(O, \sqrt{2R^2 - d^2})$ (de même pour B' et C').

Pour Q, on applique les résultats du 2°) b) avec $OC' = \sqrt{2R^2 - d^2}$ et $OC = R$ d'où le lieu de Q : la sphère $\mathscr{S}(O, \sqrt{3R^2 - 2d^2})$.



Problème de lieu . Angle . Extrêmum.

Soit ABC *un triangle tel que* $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \theta\ [2\pi]$, $0 < \theta < \pi$.

A tout point M *du segment* [BC] *privé des points* B *et* C *on associe les points* N *et* P *définis par :*

$N \in [BA)$; $P \in [CA)$; $BN = BM$; $CP = CM$.

1°) *Démontrer que le centre du cercle circonscrit à* MNP *est fixe lorsque* M *varie sur*]BC[. *On note* F *ce point.*

2°) *Démontrer que les points* NPFA *sont cocycliques.*

3°) *Déterminer le lieu géométrique du centre* Ω *du cercle* NPFA *lorsque* M *varie.*

4°) *En déduire la position du point* M *pour laquelle* NP *est minimum.*

1°) <u>Démontrons que F est le centre du cercle inscrit au triangle ABC</u>

Les triangles BMN et CMP sont isocèles : les médiatrices de [MN] et de [MP] sont les bissectrices intérieures des angles de sommets B et C du triangle ABC. F est par conséquent le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

2°) <u>N,P,F,A sont cocycliques</u>

. Puisque F est le centre du cercle circonscrit au triangle MNP

$$(\overrightarrow{FN},\overrightarrow{FP}) \equiv 2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) \quad [2\pi]$$

. Exprimons $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$ en fonction de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$:

$$(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) \equiv (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MP}) \quad [\pi]$$

Le triangle BMN étant isocèle : $2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MB}) \equiv \pi - (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BN}) \quad [2\pi]$

De même, le triangle CPM étant isocèle : $2(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MP}) \equiv \pi - (\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CM}) \quad [2\pi]$

D'où $2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) \equiv (\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}) \quad [2\pi]$

or $(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BM}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) \quad [2\pi]$

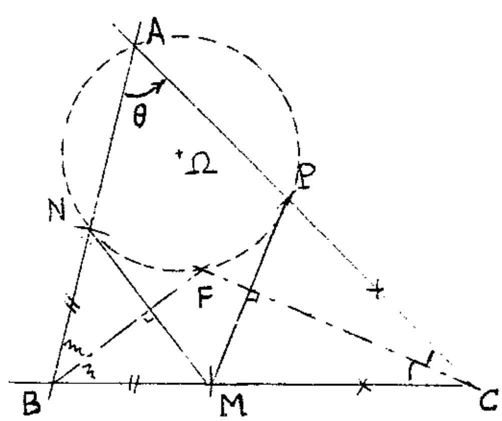
et $(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CP}) \equiv (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \quad [2\pi]$

donc $2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \quad [2\pi]$

Or dans le triangle ABC ,on a

$$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \equiv \pi - (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$$

Donc $2(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) \equiv \pi + \theta \quad [2\pi]$



. Il en résulte que $(\overrightarrow{FN},\overrightarrow{FP}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \quad [\pi]$

d'où $(\overrightarrow{FN},\overrightarrow{FP}) \equiv (\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}) \quad [\pi]$

On reconnaît la condition de cocyclicité des points F, A, N, P puisque les points N, A et P ne sont pas alignés en général.

3°) <u>Lieu géométrique de Ω centre du cercle circonscrit à NPFA</u>

Démontrons que Ω est l'image de N par une similitude fixe de centre F.

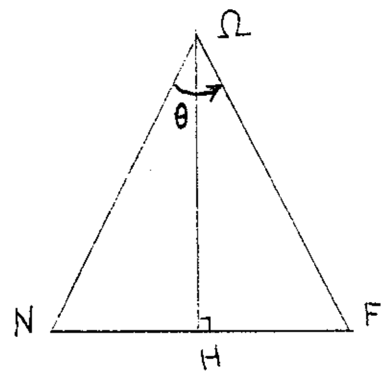
Pour cela, considérons le triangle isocèle ΩNF et H le milieu de [NF].

-) En utilisant le théorème de l'angle inscrit

on a, $(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega F}) \equiv 2(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AF}) \quad [2\pi]$

$\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \quad [2\pi]$

$\equiv \theta \quad [2\pi]$



-) $\dfrac{F\Omega}{FN} = \dfrac{F\Omega}{2FH} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

-) Evaluons $(\overrightarrow{FN},\overrightarrow{F\Omega})$:

Dans le triangle isocèle ΩNF on a :

$2(\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}) \equiv \pi - (\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega F}) \quad [2\pi]$

soit $(\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad [\pi]$

Ce qui donne soit $(\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$ soit $(\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$.

Or, le triangle ΩNF est direct puisque $(\overrightarrow{\Omega N},\overrightarrow{\Omega F}) \equiv \theta$ avec $0 < \theta < \pi$ par conséquent $F\Omega N$ est aussi un triangle direct, ce qui implique que $(\widehat{\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}})$ admet une détermination comprise entre 0 et π .

Or si $0 < \theta < \pi$, $-\pi < -\frac{\pi + \theta}{2} < -\frac{\pi}{2}$ et $0 < \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Par suite $(\overrightarrow{F\Omega},\overrightarrow{FN}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ $[2\pi]$ et $(\overrightarrow{FN},\overrightarrow{F\Omega}) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

En conclusion, Ω est l'image de N par la similitude s de centre F , de rapport $\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ et d'angle de mesure $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.

Le lieu de Ω se déduit de celui de N par s ; le lieu de N est le segment $[BB_1]$ où B_1 est le point de la demi-droite [BA) défini par $BB_1 = BC$, celui de Ω est l'image de $[BB_1]$ par s:

Posons $\Omega_0 = s(B)$ et $\Omega_1 = s(B_1)$; le point Ω_0 est tel que $BF\Omega_0$ soit un triangle isocèle de sommet Ω_0, donc $\Omega_0 B = \Omega_0 F$,ce qui prouve que Ω_0 est le point d'intersection des médiatrices de [BF] et de [AF].

De même le point Ω_1 est tel que $B_1F\Omega_1$ soit isocèle de sommet Ω_1, d'où $\Omega_1 B_1 = \Omega_1 F_1$ ce qui prouve que Ω_1 est le point d'intersection des médiatrices de $[B_1F]$ et de [AF].

Le lieu de Ω est donc le segment $[\Omega_0\Omega_1]$.

<u>Remarques :</u>

* Soit C_1 le point de [CA) tel que $CC_1 = CB$; si $M = B$ alors $P = C_1$ donc Ω_0 est centre du cercle circonscrit à BFC_1A et puisque $CB = CC_1$, Ω_0 appartient à (CF), puisque (CF) est médiatrice de $[BC_1]$. De même on montre que Ω_1 appartient à [BF] et que Ω_1 est le centre du cercle circonscrit à CFB_1A (si $M = C$, $N = B_1$ et $P = C$).

* <u>Montrons que les points Ω_0 et Ω_1 appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.</u>

-) Ω_0 est le centre du cercle circonscrit au triangle ABF, en utilisant le théorème de l'angle inscrit on obtient :

$$(\overrightarrow{\Omega_0 B}, \overrightarrow{\Omega_0 F}) \equiv 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \quad [2\pi]$$

et, puisque (AF) est bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$: $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $[2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{\Omega_0 B}, \overrightarrow{\Omega_0 F}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad [2\pi]$

donc $(\overrightarrow{\Omega_0 B}, \overrightarrow{\Omega_0 C}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad [2\pi]$

Le point Ω_0 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) ;plus précisément, il appartient à l'arc sous-tendu par la corde [BC] contenant A.

-) On montrerait de même que Ω_1 appartient au cercle circonscrit à ABC.

4°) <u>Position du point M pour que NP soit minimum</u>

Exprimons NP en fonction de ΩN dans le triangle ANP.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ANP, de centre Ω et N_1 le point diamétralement opposé à N sur $\mathscr{C}$.

(fig.2) -) Si $\widehat{BAC}$ est aigu, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\widehat{NN_1P} = \hat{\theta}$ et $NP = 2\Omega N \sin\theta$

(fig.3) -) Si $\widehat{BAC}$ est obtus, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $(\overrightarrow{N_1N}, \overrightarrow{N_1P}) \equiv \pi + \theta \quad [2\pi]$

on a alors $\frac{3}{2}\pi < \pi + \theta < 2\pi$ d'où mes $\widehat{NN_1P} = 2\pi - (\pi + \theta) = \pi - \theta$

et $NP = 2\Omega N \sin(\pi - \theta) = 2\Omega N \sin\theta$

-) Si $\widehat{BAC}$ est droit, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $NP = 2\Omega N$.

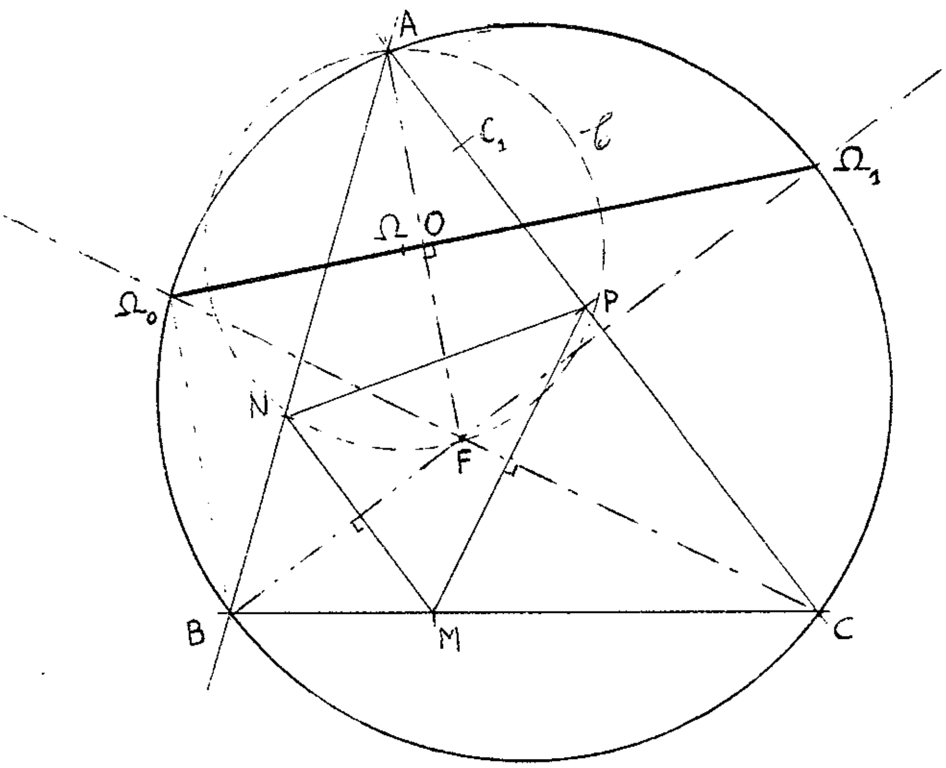
Dans tous les cas $NP = 2\Omega N \sin\theta$ et $\Omega N = \Omega F$; par conséquent NP est minimum si et seulement si ΩF est minimum et ceci est réalisé si et seulement si Ω est le milieu O de [AF].

Le cercle de diamètre [AF] coupe [AB] en N_0 et [AC] en P_0 tels que $\widehat{FN_0A} = \widehat{FP_0A} = 90°$.

N_0 et P_0 sont les projetés orthogonaux de F sur [AB] et [AC] et M_0 est le point de [BC] tel que $BM_0 = BN_0$, <u>M_0 est donc le projeté orthogonal de F sur [BC].</u>

<u>Remarque :</u>

La 4ème question peut être traitée sans utiliser Ω. Si l'on utilise la relation $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ (actuellement hors programme), pour le triangle MNP, alors $NP = 2MF\,|\sin(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})|$ est minimal pour MF minimal.



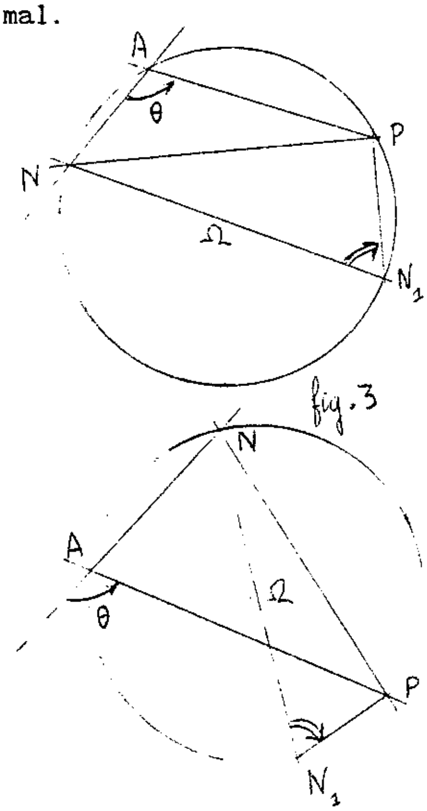


fig.3

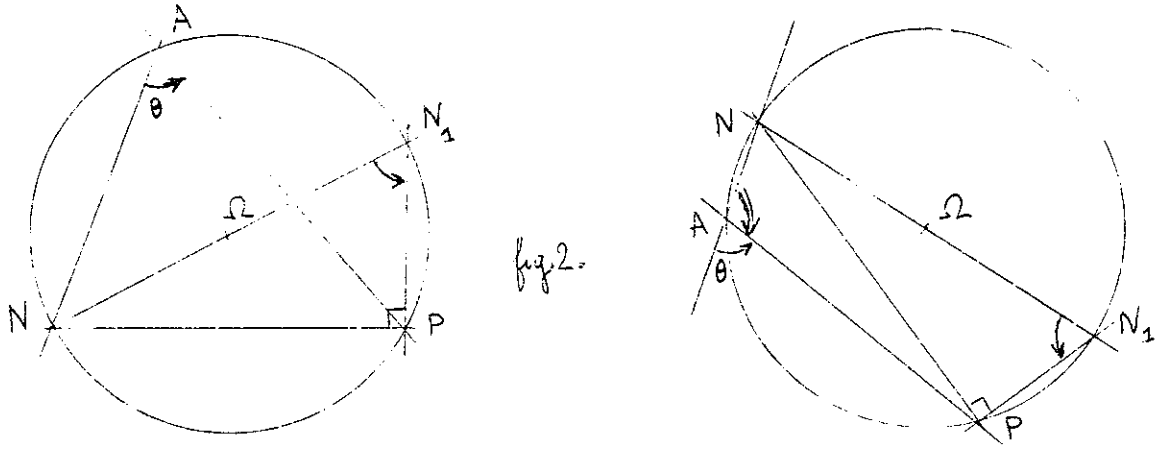


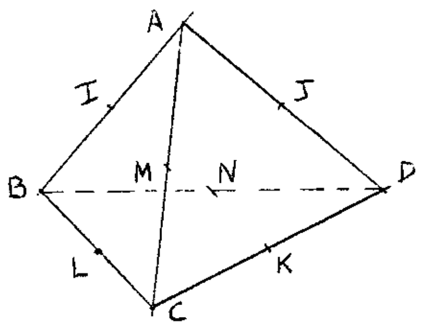
fig.2.

Problème de construction.

Construire un tétraèdre ABCD *connaissant les milieux* P, Q, R, S *de quatre des six arêtes.*

On pourra envisager le cas où P, Q, R, S *sont coplanaires puis le cas où* P, Q, R, S *ne sont pas coplanaires.*

Pour tout tétraèdre ABCD, notons I, J, K, L, M, N les milieux des arêtes ; il y a $C_6^4 = 15$ possibilités de les grouper par quatre.



. IJKL, LMJN, IMKN sont des parallélogrammes (deux points sont pris sur une face de ABCD, deux autres points sur une autre face)

. Pour tout autre des 12 quadruplets restants, les points ne sont pas coplanaires (trois points seront pris sur une même face de ABCD).

1°) <u>Supposons P, Q, R, S coplanaires</u>

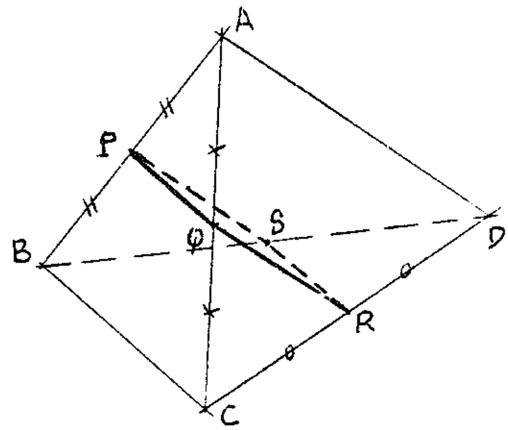
* Soit ABCD un tétraèdre répondant à la question. <u>Il est alors nécessaire que P, Q, R, S soit un parallélogramme</u> (à l'ordre des lettres près).

* Supposons que P, Q, R, S soit un parallélogramme.

Soit A un point quelconque hors du plan (PQRS) ; construisons les points B, C, D tels que :

$s_P(A) = B$, $s_Q(A) = C$ et $s_R(C) = D$.

On a donc $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$ d'où S milieu de [BD].



<u>Remarque</u> :

On pourrait, en utilisant les propriétés des homothéties - translations, démontrer que $s_Q \circ s_P = s_R \circ s_S = t_{\overrightarrow{2SR}}$ d'où $s_R \circ s_Q \circ s_P = s_S$ et $s_S(D) = B$.

Il y a donc une infinité de solutions.

2°) <u>Supposons P, Q, R, S non coplanaires</u>

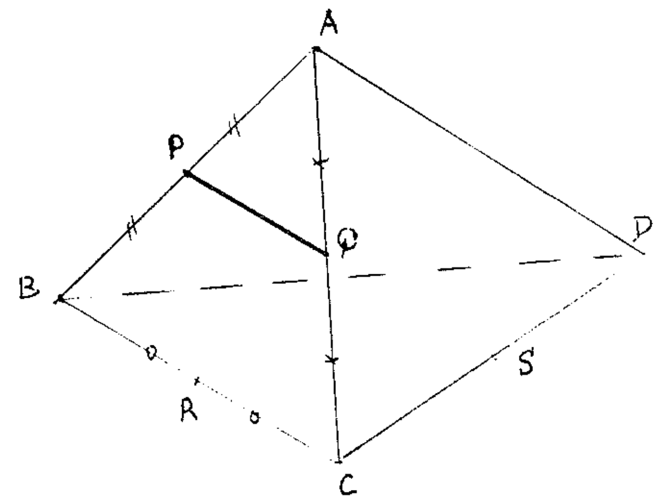
(Nécessairement trois points appartiennent à une même face).

Les points P, Q, R étant donnés, on construit d'une façon unique (à l'ordre près) les points A, B, C tels que:

$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{PQ}$ et $A = s_P(B) = s_Q(C)$.

On peut alors choisir $D = s_S(C)$ (ou $s_S(B)$).

D'après le préliminaire, il y a 12 solutions (à l'ordre près).



Tangentes à une parabole et similitudes.

1°) *Soit une droite* $\mathcal{D}$, *un point* F *n'appartenant pas* $\mathcal{D}$ *et* s_F *une similitude de centre* F. *Démontrer que, lorsque* M *décrit* $\mathcal{D}$, *la droite* (M s_F(M)) *reste tangente à une parabole (de foyer* F) *à préciser.*

(On rappelle qu'une droite (D) *est tangente à une parabole de foyer* F *et de directrice* (Δ) *si et seulement si le symétrique de* F *par rapport à* (D) *appartient à* (Δ)).

Soit K le projeté de F sur $\mathcal{D}$.

On a $s_F \begin{cases} K \to K' \\ M \to M' \end{cases}$; donc il existe une similitude s'_F (de centre F)

telle que $\begin{cases} s'_F\,(K) = M \\ s'_F\,(K') = M' \end{cases}$ (similitudes croisées).

D'où $s'_F(L) = L'$, où L et L' sont les projetés de F sur (KK') et sur (MM') (conservation de l'orthogonalité) et $s'_F(I) = I'$, où I et I' sont les symétriques de F par rapport à (KK') et à (MM').

Il existe donc une similitude s''_F (de centre F) telle que

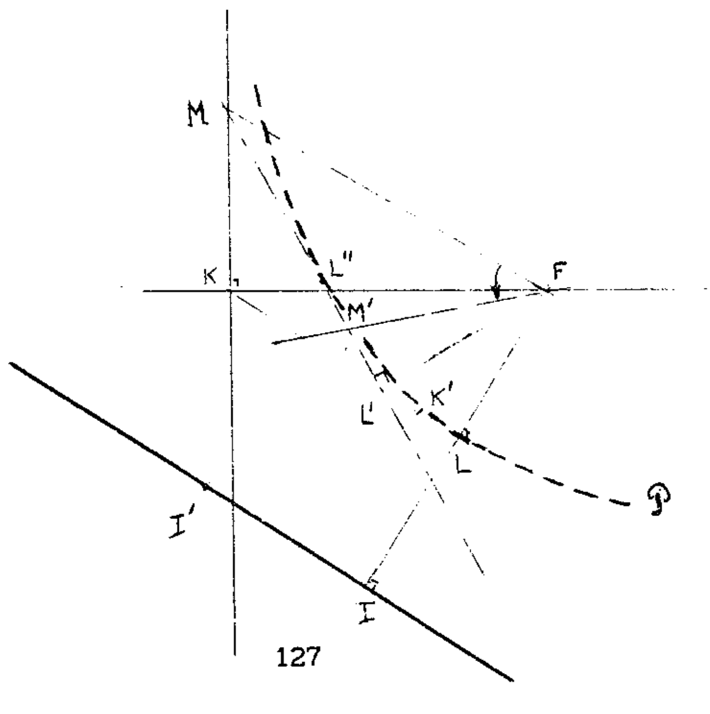
$\begin{cases} s''_F\,(M) = I' \\ s''_F\,(K) = I \end{cases}$

On en conclut que le lieu de I' est l'image de $\mathcal{D}$ par s''_F ; puisque cette droite $s''_F < \mathcal{D} > = (II')$ est fixe, la droite (MM') reste tangente à la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice (II').

<u>Remarques :</u>

* (KK') est la tangente au sommet donc s'_F (L) = L' $\in$ (KK') et, puisque K, K' et L sont alignés, leurs images (par s'_F) M, M' et L' sont alignées.

* le point de contact de (MM') avec $\mathcal{P}$ est L" = s'_F (L')



2°) *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice (Δ).*

a) Démontrer qu'il existe au plus deux tangentes à $\mathcal{P}$ issues d'un point M du plan.

b) Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux tangentes à $\mathcal{P}$ en M_1 et M_2. Démontrer qu'il existe une similitude directe unique de centre F, notée s, vérifiant $s(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$.

En déduire que, pour tout point M de $\mathcal{D}_1$, la droite (M s(M)) reste tangente à $\mathcal{P}$.

c) Réciproquement, démontrer que toute tangente à $\mathcal{P}$ est du type précédent.

a) Supposons qu'il existe trois tangentes à $\mathcal{P}$ issues de M ; les projetés F_1, F_2, F_3 de F sur ces trois droites seraient alignés (puisque leurs images par $\mathcal{H}om(F,2)$ sont sur la directrice). Or ils appartiennent au cercle de diamètre [FM].

b) S'il existe une similitude s vérifiant $s < \mathcal{D}_1 > = \mathcal{D}_2$, l'image par s de F_1, projeté de F sur $\mathcal{D}_1$, est le point F_2, projeté de F sur $\mathcal{D}_2$ ($F_1 \neq F_2$). La similitude de centre F transformant F_1 en F_2 répond à la question.

D'après 1°), la droite (M s(M)) reste tangente à une parabole $\mathcal{P}'$ de foyer F dont deux tangentes sont $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (en effet si Ω est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors $(\Omega\ s(\Omega)) = \mathcal{D}_2$ et $(s^{-1}(\Omega)\ \Omega) = \mathcal{D}_1$). Or, il n'existe qu'une parabole de foyer F admettant deux droites sécantes pour tangentes, celle dont la directrice passe par les symétriques de F par rapport aux deux droites. On en conclut que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$.

c) Soit une tangente T à $\mathcal{P}$, $T \neq \mathcal{D}_1$ et $\{\Omega\} = T \cap \mathcal{D}_1$ et s la similitude de centre F telle que $s < \mathcal{D}_1 > = T$. On a alors $T = (\Omega\ s(\Omega))$.

Géométrie dans l'espace.

Soit ABC *un triangle d'un plan* $\mathcal{P}$ *de l'espace* $\mathcal{E}$.

On considère les sphères $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ *de diamètres respectifs* [AB], [BC] [AC] . *Le but du problème est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que :*

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \neq \emptyset$

A). *On note* $\mathcal{H}$ *l'intersection de* $\mathcal{S}_1$ *et de* $\mathcal{S}_2$.

1°) *Quelle est la nature de* $\mathcal{H}$ *? Déterminer l'intersection de* $\mathcal{H}$ *et de* $\mathcal{P}$.

2°) a) *On suppose qu'il existe* M *dans* $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$. *Caractériser son projeté orthogonal sur* $\mathcal{P}$ *par rapport au triangle* ABC.

b) *Déduire de* a) *une condition nécessaire sur le triangle* ABC *pour que* $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \neq \emptyset$.

c) *Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \neq \emptyset$ *est que* ABC *ait tous ses angles aigus (acutangle).*

B). *Retrouver le résultat de la partie* A) *en utilisant les propriétés du produit scalaire et du résultat suivant à justifier :*

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = \{M \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0\}$$

C). *Déterminer un cube tel que les droites issues d'un même sommet et contenant des arêtes passent par trois points donnés* A, B, C.

Indications

A) 1°). $\mathcal{H}$ est le cercle de diamètre [BB'] (B' pied de la hauteur issue de B dans ABC) situé dans le plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par B .

L'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{P}$ est {B,B'}.

($\mathcal{P}$ est un plan de symétrie pour $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, donc pour $\mathcal{H}$).

2°). a) Supposons l'existence de M dans $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$.

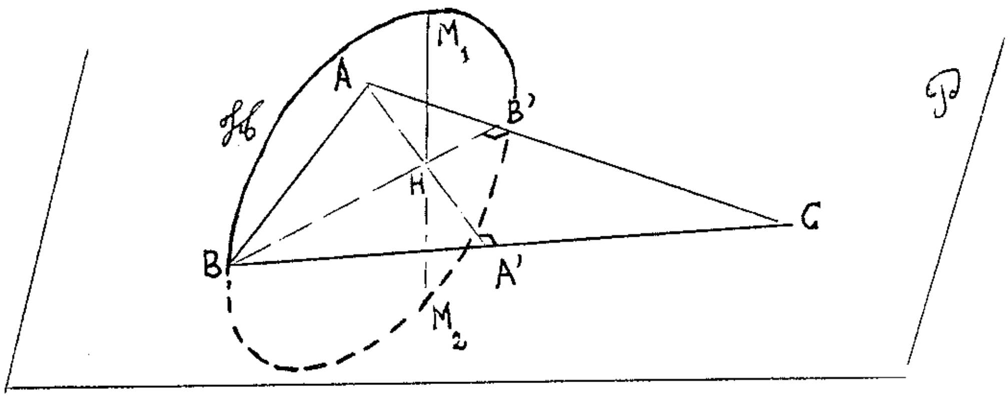
Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$:

on a p(M) ∈ [BB'] ; p(M) ∈ [CC'] ; p(M) ∈ [AA'] (A' et C' pieds des hauteurs issues de A et de B dans ABC) .

Donc p(M) est l'orthocentre de ABC (remarquons que p(M) est intérieur au triangle ABC) .

b) Donc pour que M soit dans $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$, il est nécessaire que les angles de ABC soient aigus. (Si l'un des angles est droit, l'orthocentre est le sommet correspondant).

c) Réciproquement, soit un triangle ABC ayant tous ses angles aigus et H son orthocentre.
La perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ en H coupe $\mathcal{H}$ en deux points M_1 et M_2 (puisque H appartient à [BB']) qui sont symétriques par rapport à $\mathcal{P}$.



* Si ABC est rectangle en B, $M_1 = M_2 = B$ et $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$ contient B.

* Si ABC n'est pas rectangle $M_1 \neq A$, $M_1 \neq B$ et $M_1 \neq C$; montrons que M_1 appartient à $\mathcal{S}_3$:

. $(M_1A) \perp (M_1B)$ $(M_1 \in \mathcal{S}_1)$

. d'autre part le plan M_1HA' est perpendiculaire à (BC), donc $(AM_1) \perp (BC)$ d'où $(M_1A) \perp (M_1BC)$

et $(M_1A) \perp (M_1C)$.

On en conclut qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$ ne soit pas vide est que le triangle ABC soit acutangle ; on a alors $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = \{M_1 ; M_2\}$.

B). * $\mathcal{S}_1 = \{M \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$

* Pour tout point M de $\mathcal{E}$ et K = p(M), $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MK^2 + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$

* $M \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$ ssi $\begin{cases} MK^2 + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = 0 \\ MK^2 + \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC} = 0 \\ MK^2 + \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KA} = 0 \\ K = p(M) \end{cases}$ (Σ)

$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} MK^2 + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = 0 \\ \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ K = p(M) \end{cases}$ $\qquad (\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} MK^2 + \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = 0 \\ \text{K orthocentre de ABC} \\ K = p(M) \end{cases}$

On en conclut qu'il existe un point M de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$ ssi son projeté orthogonal K vérifie $\begin{cases} \text{K orthocentre de ABC} \\ MK^2 = -\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} \end{cases}$

D'où M <u>existe</u> <u>ssi</u> <u>l'orthocentre</u> K <u>du</u> <u>triangle</u> ABC <u>vérifie</u> $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} \leqslant 0$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad & \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{C'A}.\overrightarrow{C'B} \\ & \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{A'C} \\ \text{et} \quad & \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{B'C}.\overrightarrow{B'A} \end{aligned}$$

D'où $\left.\begin{matrix} \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} < 0 \\ \text{K orthocentre de ABC} \end{matrix}\right\}$ équivaut à $\begin{cases} \text{K intérieur au triangle ABC} \\ \text{K orthocentre de ABC} \end{cases}$

On retrouve bien la condition trouvée au A).

C). Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible est que le triangle ABC soit acutangle (ou rectangle).

Dans ce cas, le sommet (du cube) cherché est un point de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$.

Lieux. Rotation vectorielle.

Dans le plan orienté, on considère l'ensemble $\mathcal{H}$ *des parallélogrammes* AMPN *vérifiant :*

A *donné ;* AM = 1 ; AN = k *où* 1 *et* k *sont deux réels positifs donnés* (k > 1).

1°). *Déterminer les lieux des points* M, N, P.

2°). *Soit un parallélogramme* AMPN *de* $\mathcal{H}$ *; on associe alors les points* Q *et* R *tels que* $Q = \mathrm{Rot}_{N,-\theta}(P)$; $R = \mathrm{Rot}_{M,\theta}(P)$ *où* θ *est un réel donné* ($\theta \neq 2n\pi$).

a) *Démontrer que* R *est l'image de* Q *dans une rotation fixe que l'on précisera.*

b) *Déterminer les lieux de* Q *et de* R.

1°) Soit AMPN un parallélogramme de $\mathcal{H}$

* Le lieu de M est le cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A,1)$

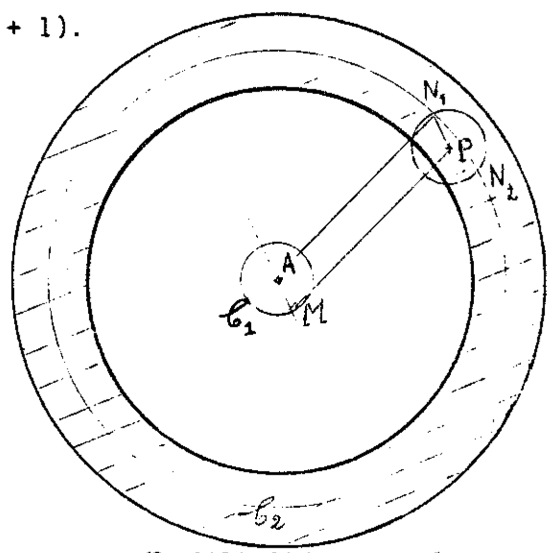
* le lieu de N est le cercle $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(A,k)$

* <u>Lieu de P :</u>

. On a $k - 1 < AP < k + 1$ (en considérant que AMP est un "vrai" triangle).

Réciproquement, soit un point P de la couronne circulaire "ouverte" délimitée par les cercles $\mathcal{C}(A,k-1)$ et $\mathcal{C}(A,k+1)$.

Le cercle de centre P et de rayon 1 coupe $\mathcal{C}_2$ en deux points N_1 et N_2 ; (puisque $k - 1 < AP < k + 1$) ; la parallèle à (PN_1) passant par A coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points M_1 et M_2 : l'un des deux répond à la question pour N_1 (l'autre convient pour N_2).



<u>Donc le lieu de P est la couronne circulaire $\mathcal{C}$ délimitée par les cercles</u> $\mathcal{C}(A, k-1)$ et $\mathcal{C}(A, k+1)$.

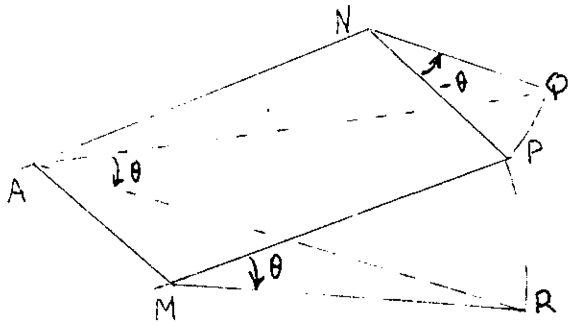
2°) a) Notons r_θ la rotation vectorielle d'angle θ.

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{AN} + r_{-\theta}\,(\overrightarrow{NP})$

$= \overrightarrow{AN} + r_{-\theta}\,(\overrightarrow{AM})$ (puisque $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP}$)

Or $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{AM} + r_\theta\,(\overrightarrow{AN})$

d'où $r_\theta\,(\overrightarrow{AQ}) = r_\theta\,(\overrightarrow{AN}) + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AR}$



R est donc l'image de Q par la rotation de centre A et d'angle θ.

b) Soit AMPN un parallélogramme de $\mathcal{H}$; puisque P appartient à $\mathcal{C}$, le point Q aussi, donc le parallélogramme AQ'QN est élément de $\mathcal{H}$. ($NP = NQ = 1$ donc $k - 1 < AQ < k + 1$).

On en déduit que le lieu de Q est celui de P ; il en est de même pour R.

Couronne circulaire.

Soit $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$ *deux cercles de centres respectifs* O_1 *et* O_2, *de rayons* R_1 *et* R_2.

On note π *l'ensemble des parallélogrammes* ABCD *tels que :*

A *et* D *appartiennent à* $\mathscr{C}_1$, B *et* C *à* $\mathscr{C}_2$.

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu $\mathscr{H}$ *des centres des parallélogrammes de* π.

1°) *Démontrer que* M *appartient à* $\mathscr{H}$ *si et seulement si* $|R_2 - R_1| < O_2M' < R_1 + R_2$ où $M' = \mathrm{Hom}_{(O_1,2)}(M) = S_M(O_1)$.

2°) *Déterminer* $\mathscr{H}$.

1°). M est centre d'un parallélogramme ABCD de π ssi $\begin{cases} S_M(A) = C \ ; \ S_M(D) = B \\ A \in \mathscr{C}_1 \ ; \ D \in \mathscr{C}_1 \\ C \in \mathscr{C}_2 \ ; \ B \in \mathscr{C}_2 \end{cases}$

ssi $S_M < \mathscr{C}_1 > \cap\, \mathscr{C}_2 = \{B, C\}$

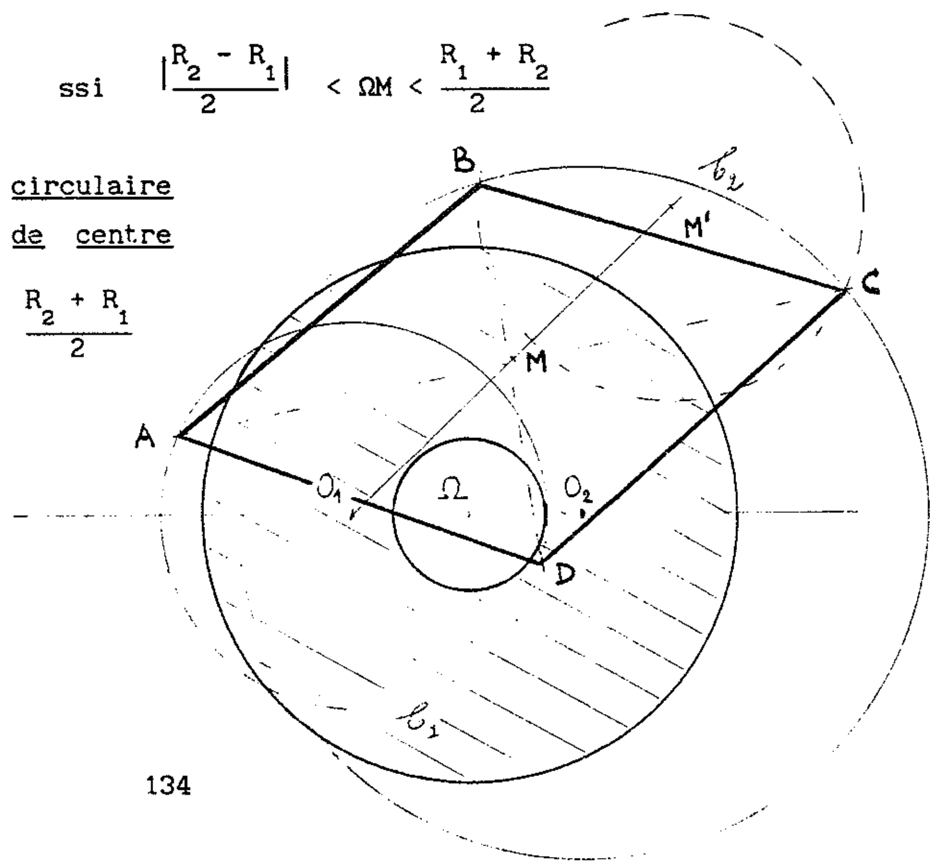
Or $S_M < \mathscr{C}_1 >$ est le cercle de centre $M' = S_M\ (O_1)$ et de rayon R_1 et $S_M < \mathscr{C}_1 >$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécants en deux points ssi $|R_2 - R_1| < M'O_2 < R_1 + R_2$.

2°). Soit Ω le milieu de $[O_1O_2]$

D'après le 1°), M appartient à $\mathscr{H}$ ssi $|R_2 - R_1| < O_2\,M' < R_1 + R_2$

$$\text{ssi} \quad \left|\frac{R_2 - R_1}{2}\right| < \Omega M < \frac{R_1 + R_2}{2}$$

Donc $\mathscr{H}$ __est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre__ Ω __et de rayons__ $\dfrac{|R_2 - R_1|}{2}$ et $\dfrac{R_2 + R_1}{2}$



Quadrangle orthocentrique. Application vectorielle.

Soit deux points distincts B et C de l'espace $\mathcal{E}$.
On note $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans perpendiculaires à (BC) en B et en C.
Pour tout point M de $(BC)\cup\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ on pose f(M)=M.
Pour tout point M n'appartenant pas à $(BC)\cup\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$ on associe le point f(M) orthocentre du triangle MBC.

1°) *Démontrer que l'application f ainsi définie est involutive. En déduire que f est bijective.*

2°) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des points de $\mathcal{E}$ invariants par f.*

3°) *Est-il possible de définir l'application vectorielle associée à f ?*

4°) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points de $\mathcal{E}$ pour lesquels f(M) est intérieur au triangle* BC.

1°) Notons $\mathcal{D} = (BC)\cup\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$

* Si M appartient à $\mathcal{D}$, f(M) = M.

* Si M n'appartient pas à $\mathcal{D}$, posons f(M) = M':

* si M = M', on a bien fof(M) = M

* si M ≠ M', puisque (BC) ⊥ (MM') et (MC) ⊥ (BM') , M est l'orthocentre de M'BC d'où fof(M) = M.

L'application f est bien involutive et par suite $f = f^{-1}$.

2°) * On a évidemment $\mathcal{D} \subset \mathcal{I}$

* Si M n'appartient pas à $\mathcal{D}$, alors

M est invariant par f ssi M est l'orthocentre de MBC

ssi $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$

ssi M appartient à la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre [BC].

En résumé $\mathcal{I} = (BC) \cup \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{S}$.

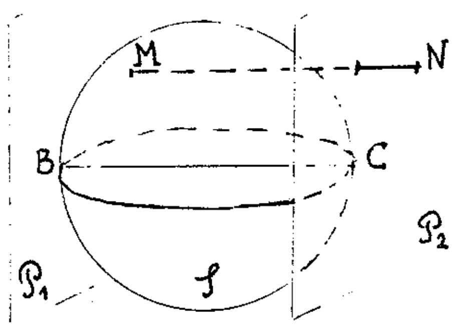
3°) Pour définir une application vectorielle associée à f, il est nécessaire que, pour tout vecteur $\vec{U}$ de représentants (M,N) et (P,Q) on ait $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.

Soit M un point de $\mathcal{S}$ ($M \neq B$) et N le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{Mf(N)}$

Or $N \notin \mathcal{S}$ donc $f(N) \neq N$ et $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{Mf(N)}$;

on ne peut donc pas définir une application vectorielle associée à f.

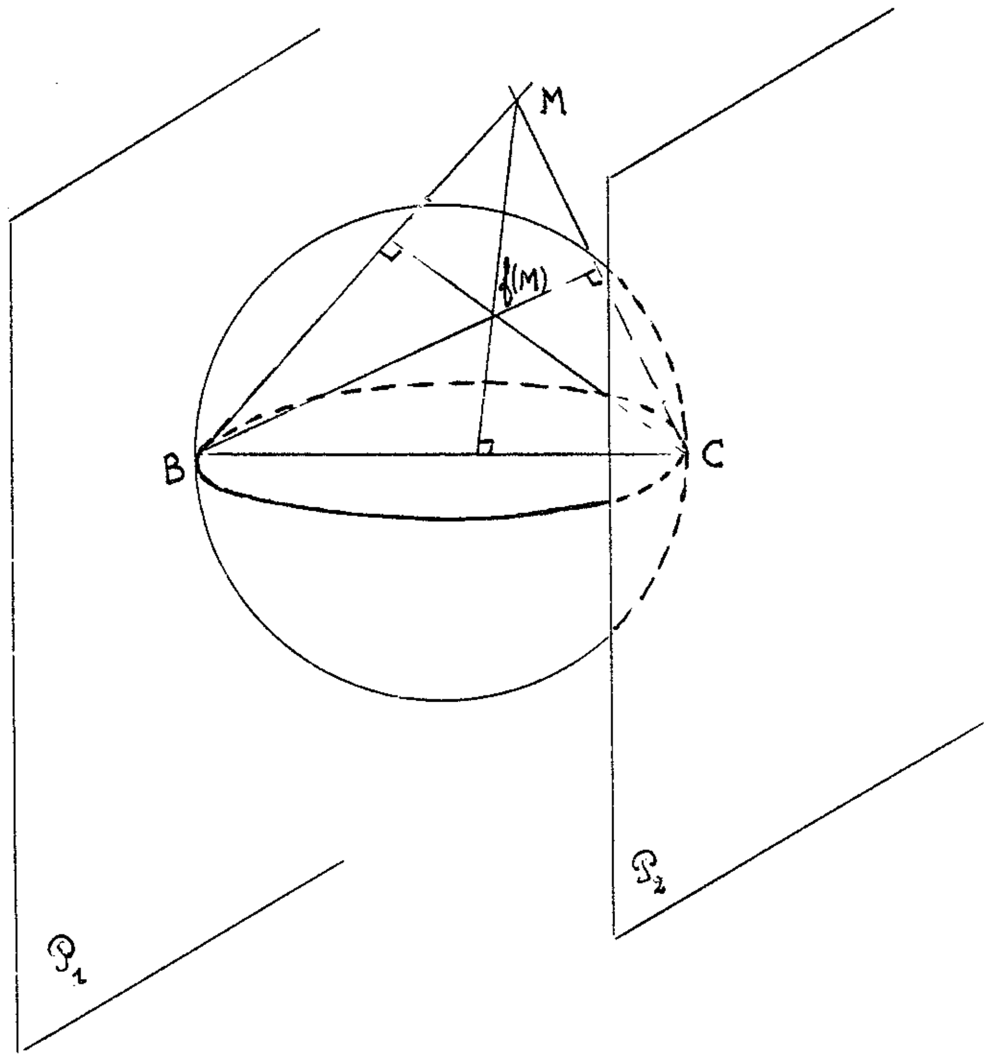


4°) Soit π_1 (resp. π_2) le demi-espace ouvert contenant C (resp. B) et de frontière $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$).

* On a $\mathcal{H} \subset \pi_1 \cap \pi_2$; de plus, si M appartient à $\mathcal{H}$, M est extérieur à la sphère $\mathcal{S}$ (sinon $\hat{M} \geq 90°$).

* Réciproquement, si $M \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \text{ext}\, \mathcal{S}$, $M \in \mathcal{H}$.

Remarque $\mathcal{H} = \{ M \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BM} > 0 \ , \ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} > 0, \ \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM} > 0 \}$



Construction de carrés.

1°) *Soit une rotation* r *d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *(ou* $-\frac{\pi}{2}$ *) et deux droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *parallèles.*

Que peut-on dire des droites $r < \mathcal{D}_1 >$ *et* $r < \mathcal{D}_2 >$ *? Quelle est la figure obtenue ?*

2°) *Soit quatre points distincts non alignés* A,B,C,D.

a) *Construire un carré* PQRS *tel que*

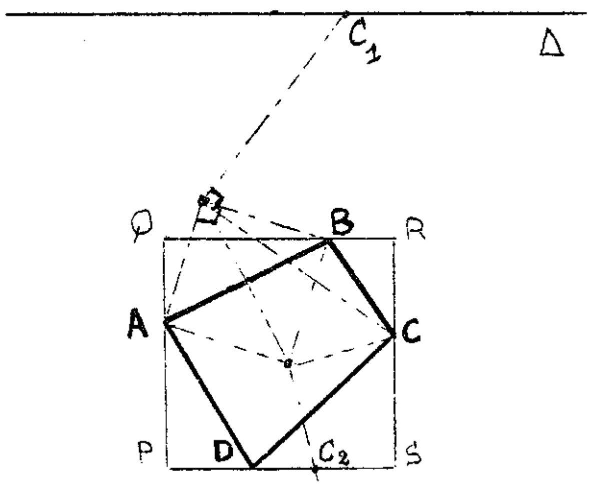
$A \in (PQ)$; $B \in (QR)$; $C \in (RS)$; $D \in (SP)$.

Combien de carrés est-il possible de construire en général ?

b) *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de construire une infinité de carrés.*

1°) Les droites $r < \mathcal{D}_1 >$ et $r < \mathcal{D}_2 >$ sont parallèles, perpendiculaires à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$. Les quatre points d'intersection sont les sommets d'un carré.

2°) a)* <u>Analyse</u> : Soit un carré PQRS répondant aux conditions posées ; supposons de plus PSRQ direct.



Soit r_1 la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ tq r_1 (A) = B.
Soit r_2 la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ tq r_2 (A) = B .
r_1 et r_2 transforment (PQ) en (QR).
Notons $C_1 = r_1(C)$ et $C_2 = r_2(C)$;
C_1 appartient à une droite Δ perpendiculaire à (RS) et la distance de cette droite Δ à (QR) est égale à la distance de (PQ) à (RS) : donc C_1 appartient à (PS) ou à la droite symétrique de (PS) par rapport à (QR).

Dans le cas où C_1 n'appartient pas à (PS), alors C_2 appartient à (PS).

* Synthèse :

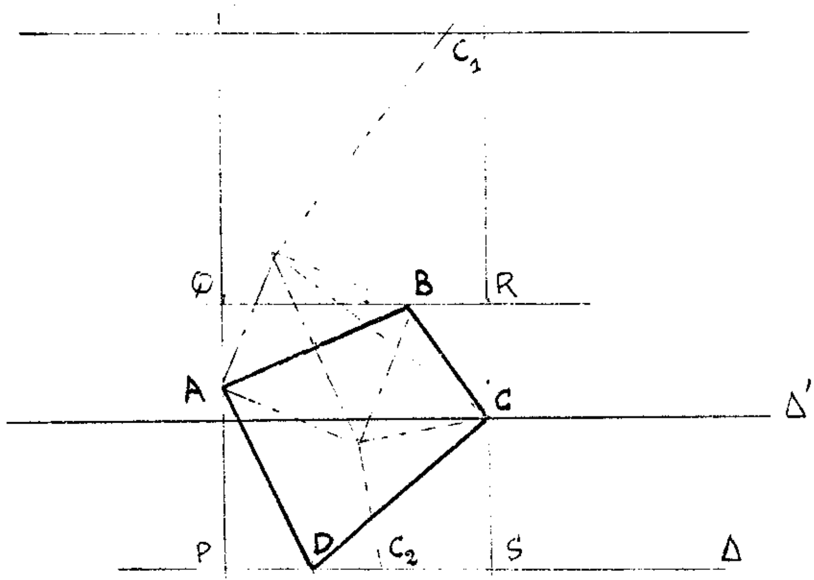
Soit A,B,C,D quatre points distincts non alignés, r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transformant A en B et $C_1 = r_1(C)$, $C_2 = r_2(C)$.

* Si $C_1 \neq D$ et $C_2 \neq D$, la droite (PS) est soit (DC_1), soit (DC_2), on construit alors la droite perpendiculaire à (DC_1) passant par C, on obtient S puis P et Q en prenant les droites passant par A et B et perpendiculaires aux précédentes. PQRS est bien un carré ($r_1(PQ) = (QR)$ et $r_1(SR) = (SP)$).

* Si $C_1 = D$ on a donc $r_1(A) = B$ et $r_1(C) = D$, ce qui est équivalent à $AC = BD$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}}) = \frac{\pi}{2}$.

D'après la question 1°), on en conclut qu'on peut prendre n'importe quelle droite Δ passant par A.

La figure Δ, $r(\Delta)$, Δ', $r(\Delta')$ (Δ' parallèle à Δ passant par C) forme un carré dont les côtés contiennent A,B,C,D.



b) D'après la question précédente, il y a en général deux solutions, la droite (PS) étant soit (DC_1) soit (DC_2).

Si $D = C_1$ ou $D = C_2$, nous avans vu qu'il y avait une infinité de solutions.

Dans le dernier cas où D, C_1 et C_2 sont alignés avec $D \neq C_1$ et $D \neq C_2$, il n'y a pas de solution.

Remarquons que $D = C_1$ ou $D = C_2$ ssi $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$

D, C_1 et C_2 alignés, $D \neq C_1$ et $D \neq C_2$ ssi $AC \neq BD$ et $(AC) \perp (BD)$.

En conclusion, il y a une infinité de solutions lorsque les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et $AC = BD$.

I.R.E.M
Université Paris 7
Denis Diderot
Tour 56 couloir 56/55 - 3e étage, Case 7018
2, place jussieu 75251 PARIS CEDEX 05

Tel : 01 44 27 81 85
ou 01 44 27 53 83
Télécopie : 01 44 27 56 08

Janvier 1998

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 g	3,00 F
50 g	4,50 F
100 g	6,70 F
250 g	11,50 F
500 g	16,00 F
1 000 g	21,00 F
2 000 g	28,00 F
3 000 g	33,00 F

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

BROCHURES

Nº	Titre	Prix	Poids
4	Groupe Français-Mathématiques (Tome 1)	56F	490 gr
5	Quelques réflexions sur la démonstration	27F	220 gr
7	Pavages et coloriages	27F	170 gr
14	De la température résultante à l'angle solide	21F	170 gr
15	Groupe Français-Mathématiques (Tome 2)	52F	440 gr
16	Les jeux du "Club des Cordelières"	58F	420 gr
17	Coloriages géométriques	37F	540 gr
21	Almanathématique	18F	160 gr
22	Frises	10 F	85 gr
23	Récurrence	53F	410 gr
24	Climatisons les Mathématiques	33F	270 gr
25	Les Forces en statique	18F	110 gr
27	Nombre d'or	74F	640 gr
29	La vitesse	35F	290 gr
30	Représentations graphiques	35F	300 gr
34	Métrologie	31F	240 gr
36	Au pays des Cycloïdes	38F	340 gr
38	Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire	50F	430 gr
39	Pot Pourri	44F	350 gr
43	Cinématique relativiste	34F	260 gr
45	Petites variations ou l'art de dériver sans le savoir	39F	330 gr
46	Nombres à l'école élémentaire	45F	390 gr
47	Matériaux pour Logo	36F	300 gr
48	Mesure des longueurs et des aires	40F	340 gr

Nº	Titre	Prix	Poids
49	Devoirs à la maison pour le premier cycle	38F	310 gr
50	Deug SSM Section E - Un an de fonctionnement...	35F	310 gr
51	Instruments de Géométrie	20F	160 gr
53	Lisp et Prolog	39F	320 gr
54	Echelles logarithmiques	22F	160 gr
55	Dessin géométrique	25F	200 gr
56	Héliomath	31F	240 gr
57	Statistiques	50F	420 gr
58	Informatique et Mathématiques en Terminale C	70F	630 gr
59	"Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes).	35F	140 gr
61	Mathématiques : Approche par des textes historiques	50F	450 gr
62	Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux	59F	520 gr
63	Une section de Deug SSM Première année 84-85	62F	560 gr
64	Une année de Géométrie en Terminale C	29F	230 gr
68	Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grandeurs - de graduations - farfelus - de certificat d'études	49F	440 gr
69	Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème	50F	440 gr
71	Activités géométriques en Terminale C	24F	180 gr
72	De la géométie analytique à l'algèbre linéaire	24F	190 gr
73	Angles de couples et rotations	32F	280 gr
74	Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire	45F	380 gr
75	La géométrie au lycée	49F	420 gr
76	Questionnaire de travail sur les différentielles	31F	240 gr
77	Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide	49F	410 gr
78	Calcul mental	43F	400 gr
79	Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 -	60F	530 gr
80	Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert)	55F	530 gr
81	La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1	48F	420 gr
82	Les mythes historiques, sociaux et culturels des mathématiques : leur impact sur l'éducation	31F	270 gr
83	Recherche de spécificités dans l'enseignement à distance des mathématiques en licence-maîtrise à l'université P. et Marie Curie (Paris)	25F	210 gr
84	Modules - TD en Seconde Leur apport dans l'apprentissage des Mathématiques	42F	360 gr
85	La calculatrice en 1ère et Terminale Scientifique	38F	310 gr
86	La calculatrice au lycée	28F	220 gr
87	Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle ?	24F	180 gr

LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

Nº	Titre	Auteur(s)	Prix	Poids
1	De l'ingénierie didactique	J. Robinet	3F	60 gr
2	Quelques éléments de théorie piagétienne et.... didactique des Mathématiques	J. Rogalski	6F	90 gr
3	Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre	R. Douady	6F	90 gr
5	Quelques concepts, quelques généralités et quelques références	Collectif	3F	60 gr

6	De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle	R. Douady	6F	90 gr
7	Acquisition des premiers concepts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG	F. Boschet A. Robert	21F	230 gr
8	Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques	M. Artigue	11F	130 gr
9	Histoire de la convergence uniforme	J. Robinet	6F	80 gr
10	Des Analystes avant l'analyse	M.C Bour	9F	110 gr
12	A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire	J. Rogalski	13F	150 gr
13	Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité (Analyse des effets macroscopiques de l'enseignement)	J. Rogalski	7F	90 gr
15	Analyse non standard et enseignement	M. Artigue V. Gautheron E. Isambert	21F	230 gr
16	Typologie de logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : quelques résultats	F. Tréhard	10F	120 gr
17	Une intervention en didactique des Mathématiques à des élèves instituteurs en 3ème année d'école normale (FP3)	A. Robert	14F	160 gr
18	Rapports enseignement/Apprentissage (débuts de l'analyse sur R)			
	Fascicule O : connaissance des élèves sur les débuts de l'analyse sur R à la fin des études scientifiques secondaires françaises	A. Robert	4F	60 gr
	Fascicule 1 : Analyse d'une section de DEUG A première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage	A. Robert	11F	130 gr
	Fascicule 2 : Analyse d'une section de DEUG A première année (connaissances antérieures et procédures en cours d'apprentissage)	C. Houard M. Quatreville	6F	80 gr
	Fascicule 3 : Les limites de l'évaluation : - la section témoin - heurs et malheurs de la section expérimentale	A. Robert	6F	90 gr
19	Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels	D. Butlen	28F	290 gr
20	A propos de l'enseignement de la proportionnalité	M. Pezard	4F	70 gr
21	Les réels : Quels modèles en ont les élèves ?	J. Robinet	13F	150 gr

22	Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année	D. Grenier M. Legrand F. Richard	24F	260 gr
23	Comment faire du neuf avec du vieux ? Tracés de courbes en Logo	P.Jarraud	12F	150 gr
24	Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du collège	M.J Perrin	15F	180 gr
25_1	Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits Compte-rendu de l'expérimentation	D. Butlen C.Lethielleux	5F	80 gr
25_2	Utilisation de l'ordinateur pour l'apprentissage d'un algorithme de calcul des produits Compte-rendu de l'expérimentation	D. Butlen C. Lethielleux	16F	180 gr
26	L'histoire de l'enseignement des Mathématique comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques	G. Schubring	9F	130 gr
27	Basic, Riemann, Darboux Illustration de l'intégrale sur un micro-ordinateur	P. Jarraud	8F	110 gr
28	Didactique dans l'enseignement supérieur : une démarche	A. Robert	11F	140 gr
29	Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG	J. Robinet	28F	300 gr
30	Sur l'analyse des traités d'analyse : les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914	M. Zerner	7F	110 gr
31	Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de DEUG scientifique selon les séries de baccalauréat d'origine Annexe sur la méthode graphique	H. Authier M. Cantacuzene	22F	250 gr
32	Un essai d'expérience didactique : L'enseignement des Mathématiques à l'école expérimentale de Bonneuil S/Marne	I. Bloch	13F	170 gr
33	Travail en classe en petits groupes - Première approche Introduction de Mme N. LEORAT	N. Baron	37F	390 gr
34	Quelques reflexions sur l'utilisation des jeux en classe de mathématique	J. Robinet	3F	60 gr
35	Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM	C. Laurent P. Jarraud	17F	200 gr
	+ disquette		4F	
	Cahier + disquette		22F	210 gr
36	Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou echec scolaires	M.J. Perrin-Glorian	17F	200 gr

37	Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane	R. Douady, M.J Perrin-Glorian	14F	170 gr
38	Enseigner des méthodes	A. Robert, J. Rogalski, R. Samurçay	8F	110 gr
39	Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture Le cas de "La somme des angles d'un triangle	N. Balacheff	10F	130 gr
40	Travail en petits groupes en Terminale C	M.C Marilier, A. Robert, I. Tenaud	20F	230 gr
41	Apprendre des Mathématiques et comment apprendre des mathématiques : Premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique	E. Bautier, A. Robert	13F	170 gr
42	Représentations de l'enseignement des mathématiques (un exemple : l'organisation de la classe de seconde)	N. Léorat, A. Moussa	21F	240 gr
43	Acquisition de savoirs et de savoir-faire en informatique	J. Rogalski	7F	100 gr
44	Recherche d'une démarche d'enseignement en mathématiques, au C.N.A.M	J.P Drouhard, Y. Paquelier	12F	150 gr
45	Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM 2ème partie	P. Jarraud	14F	170 gr
46	Connaissances mathématiques des étudiants issus des bac F	H. Authier	19F	220 gr
47	De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement postobligatoire (EPO)	A. Robert	8F	120 gr
48	Représentation plane des figures de l'espace	J. Boudarel, F. Colmez, B. Parzysz	8F	120 gr
49	Réussite en IUT selon l'origine scolaire	A. Jacquemin	11F	140 gr
50	Une introduction à la didactique des Mathématiques	A. Robert	17F	210 gr
51	Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels	A. Robert	23F	260 gr
52	Un aperçu des travaux de VYGOTSKI . LEONTIEV et BRUNER, Disciples de VYGOTSKY	F. Boschet	17F	200 gr
53	Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG	A. Robert, J. Robinet	6F	90 gr

CAHIERS DE DIDIREM

1	Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement	A. Robert, J. Robinet	20F	160 gr
2	La genèse du calcul algébrique (Une esquisse)	J. Robinet	14F	100 gr
3	Epistémologie et didactique	M. Artigue	16F	120 gr
4	Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels	A. Robert, J. Robinet	28F	240 gr
5	Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté	M.J Perrin-Glorian, D. Butlen, M.Lagrange	21F	170 gr
6	Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A (*) en algèbre linéaire. (*) Premier cycle scientifique des universités françaises	J.L Dorier, C. Lavergne	48F	420 gr
7	Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire	J.L Dorier	35F	290 gr
8	Innovation pédagogique et représentations des étudiants Présentation et analyse des résultats du dépouillement d'un questionnaire sur l'enseignement des mathématiques en DEUG SSM Première année	P. Jarraud	25F	200 gr
9	Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie - licence en formation continuée)	A. Robert	36F	290 gr
10	Analyse du discours des enseignants : A) Apports de 2 ouvrages récents de linguistique par C.M Chiocca B) Méthode de BRONCKART et références bibliographiques complémentaires		19F	150 gr
11	Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année	M. Rogalski	27F	230 gr
12	Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. (La convergence uniforme)	J. Robinet	15F	120 gr
13	Une expérience d'enseignement de mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté	D. Butlen, M. Pezard	29F	250 gr
14	Illustrer l'aspect unficateur et simplificateur de l'algèbre linéaire	J.L Dorier	21F	170 gr
15	Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : "quelques commentaires épistémologiques et didactiques"	M.Artigue, A.Deledicq	30F	250 gr

16	Analyse du discours des enseignants			
	A) Etude comparée des discours de deux enseignants de mathématiques pendant une même leçon (en 2d).	E. Josse		
	B) Une méthode d'analyse de discours d'enseignant en classe de mathématiques.	C.M. Chiocca E. Josse A. Robert	31F	270 gr
17	Télé enseignement universitaire Les mathématiques dans une section de Deug SSM première année.	C. Cazes	22F	180 gr
18	Les problèmes didactiques de l'enseignement des mathématiques dans l'association AUXILIA	F. Stamon Millet	19F	150 gr
19	L'ingénierie didactique Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.	R. Douady	22F	180 gr
20	"Les oeufs" Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde.	E. Hébert	44F	400 gr
21	Prise en compte du méta en didactique des Mathématiques	A. Robert J. Robinet	27F	230 gr
22	Représentations des professeurs de mathématiques et des élèves de terminales des lycées de Conakry sur les mathématiques et leur enseignement	A. Tidjane Diallo	49F	440 gr
23	Changements de cadres à partir des surfaces minimales.	A. et R. Douady	20F	230 gr
	Numéro Spécial n° 2 : Que faut-il savoir en mathématiques en fin de troisième pour "réussir sa seconde" ?	E. Josse	33F	270 gr
25	A propos de l'utilisation des calculatrices au lycée	M. Lattuati I. S. Rodrigues	18F	120 gr
	Numéro spécial n° 3 : Une recherche sur le logiciel Dérive Rapport	Equipe DIDIREM	88F	780 gr
26	Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques. Un essai de didactique professionnelle	A. Robert	20F	140 gr
27	Rapports entre habileté calculatoire et "prise de sens" dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire.	M. Pezard D. Butlen	27F	200 gr

28	Comment, en didactique des mathématiques, prendre en compte les pratiques effectives, en classe, des enseignants de mathématiques du lycée ? Une approche à travers des analyses de pratiques de quelques enseignants de mathématiques dans des séances d'introduction aux vecteurs en classe de seconde	C. Hache A. Robert	41F	340 gr
29	Pratiques des élèves et des enseignants des mathématiques Rapport de recherche Rôle des gestes de clôture dans l'enseignement des mathématiques Institutionnalisation en classe de seconde : valeur absolue, Intervalles, encadrements, approximations première partie : choix globaux des enseignants et résultats des élèves	A. et R. Noirfalise M.J Perrin	56F	464 gr
30	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques Le tableau noir : un outil pour la classe de mathématiques	E. Roditi	42F	350 gr
31	DEA de didactique des disciplines Didactique des mathématiques L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde	D. Pihoue	44F	390 gr
	Numéro spécial n° 4 Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée	M. Artigue B. Defouad M. Duperier G. Juge J.B Lagrange	114F	1026 gr

DOCUMENT DE TRAVAIL POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

1	Formation en didactique des mathématiques, une expérience en CPR interne	A. Robert	18F	140 gr
2	Formation des moniteurs (Mathématiques)	D. Perrin et A. Robert	13F	100 gr
3	Formation professionnelle initiale des enseignants du second degré en mathématiques Actes de la journée de réflexion organisée le 06/04/1991 à Paris par la Commission Inter-IREM Université et l'équipe DIDIREM		22F	190 gr
4	Un enseignement de didactique des mathématiques à des futurs instituteurs-maîtres-formateurs	D. Butlen et M. Pezard	31F	260 gr
5	Formation à l'enseignement des mathématiques : exemples de pratiques effectives et éléments de réflexion d'un point de vue didactique I Exemples de différentes stratégies de formation (R. Douady et A. robert) II Questions sur la formation, sur l'observation en formation (A. Robert) III Questions sur la formation en didactique des mathématiques (M. Artigue, M. Henry, D. Butlen)		21F	160 gr
6	Une séquence d'enseignement au lycée : Les angles en seconde	C. Jeulin D. Sperandio R. Proteau	13F	90 gr
7	L'isogonologie Un exemple de l'utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie.	F. Rideau	14F	90 gr
8	Quelle didactique des mathématiques en formation des maîtres : quelques questions posées par des expériences d'enseignement en formation initiale et continue d'instituteurs, des professeurs de collèges et de lycées.	D. Butlen J. Bolon	27F	220 gr
9	Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école.	D. Butlen M.L Peltier	20F	150 gr
10	IUFM - An 3 * une réflexion sur la formation des PLC2 * une analyse des modules communs mathématiques à l'IUFM de Versailles	A. Robert	21F	140 gr

11	IUFM - An 3 Diversités et points communs des formations des PLC2 en mathématiques en IUFM - comparaison sur 18 IUFM L'avis des stagiaires (une enquête auprès de néo-certifiés et certifiés de l'an 1)	J. Penninckx	26F	190 gr
12	IUFM - An 3 L'observation de classes Réflexion sur la formation à l'observation de classes des stagiaires PLC2 de Mathématiques à l'IUFM de Rouen	E. Hébert P. Tavignot	26F	180 gr
13	IUFM Rouen Maths 2ème année Evaluation 1993/94	J. Borréani E. Hébert G. Le Hir C. Castela P. Tavignot	24F	190 gr
14	Professeurs de mathématiques de collège et lycée : formation professionnelle initiale, ou comment désaltérer qui n'a pas soif ?	A. Robert	22F	156 gr
15	La formation professionnelle initiale des futurs enseignants de mathématiques : exemples de séances organisées à l'IUFM pour les stagiaires de deuxième année (PLC2)	D. Dumortier, M. Lattuati M. Ponticq, C. Perdon, J. Poirier, A. Robert, C. Robert, et E. Roditi	30F	200 gr
16	Formation professionnelle initiale en mathématiques : Tuteurs et stagiaires en collège et lycée	M.C. Audouin	21F	140 gr
17	La racine carrée en troisième Etude d'une activité	E. Roditi	20F	140 gr

BROCHURE THEMATIQUE

1	Revue de documents à propos des calculatrices dans l'enseignement mathématique au collège et au lycée (IUFM Grenoble mathématiques)	14F	90 gr
2	Publications IREM. APMEP. ESM ... Sur l'enseignement des probabilités et des statistiques au collège et au lycée	16F	110 gr
3	Sommaires des bulletins de liaison des IREM	36F	290 gr
4	Répertoire des thèses autour de la didactique des mathématiques	16F	110 gr
5	Informations générales sur le CAPES et l'AGREGATION de mathématiques	49F	480 gr

DIVERS

Questionnaires de travail	E. Saltiel L. Viennot	29F	310 gr
Systèmes différentiels Etude graphique Ed. Cedic	M. Artigue V. Gautheron	50F	360 gr
Mécanique et énergie pour débutants	L. Viennot	40F	330 gr
Les cinq polyèdres réguliers de R^3 et leurs groupes	J.M Arnaudiès	34F	270 gr
Le calcul des variations	M. Gréhant	21F	150 gr
Rapporteurs (plastique)		6F	

Le groupe M : A.T.H
(Mathématiques : Approche par les Textes Historiques)

vous propose :

1. La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexion à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Quatre fois par an environ, vous trouverez dans Mnémosyne

- Un article de réflexion sur un thème ou un moment de l'histoire des mathématiques. Les numéros reprennent, entre autres, les exposés du séminaire animé par Jean Luc Verley et du séminaire de l'Union des professeurs de Spéciales, animé par Michel Serfati.

- De "bonnes vieilles pages", extraits d'ouvrages anciens peu répandus, des textes inédits ou difficiles à trouver, des traductions inédites...

- "Les contes du Lundi", qui donneront un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors de réunions du groupe M : A.T.H, ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM, une quinzaine d'enseignants partageant notre passion.

- Des exemples d'activités avec les élèves, des documents divers pour les classes.
- Des comptes rendus de lectures, de conférences...
- Un calendrier des diverses rencontres et manifestations parisiennes et nationales sur l'histoire des mathématiques.

numéro 1 : La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes	26F	200 gr
numéro 2 : La querelle entre Descartes et fermat	30F	210 gr
numéro 3 : Fragments d'une étude des systèmes linéaires	30F	220 gr
numéro 4-5 : L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique	40F	300 gr
numéro 6 : Leibniz et l'Ecole continentale	30F	220 gr
numéro 7 : Autour du théorème de Fermat. C. Goldstein	33F	230 gr
numéro 8 : Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode de fluxions	33F	250 gr
numéro 9 : Desargues et Pappus. R. Tossut	33F	240 gr
numéro 10 : Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries Anne Michel Pajus	33F	260 gr

numéro 11 : Des cartes-portulants à la formule d'Eward Wright : l'histoire des cartes à "rumbs" Marie-Thérèse Gambin	33F	255 gr
numéro 12 : Histoire de quelques projections cartographiques Marie Benedittini	33F	255 gr
numéro 13 : Histoire et origine du calcul différentiel	33F	210 gr
Mnémosyne : Numéro spécial N° 1 : Histoires de Pyramides (M. Grégoire)	46F	380 gr

Pour vous abonner : 4 numéros (hors numéros spéciaux)

prix : 4 numéros à 33 F. plus 15 F de frais de port. soit 147 F

- remplissez le bon de commande ci-dessous et envoyez le, à l'IREM, accompagné d'un chèque à l'ordre de l'Agent comptable de l'université Paris VII

" ....

Je désire recevoir les quatre prochains numéros de M N E M O S Y N E

(à partir du n°)

NOM : ....

PRENOM : ....

ADRESSE: ....

....

....

date : ....

Ci-joint un chèque d'un montant de 147 F à l'ordre de l'Agent Comptable de l'université Denis Diderot Paris VII

2. Les brochures (déjà citées en 1ère page)

n° 61 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 1 -.......	50 F	450 gr
n° 79 : Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 -	60 F	530 gr

3. La Reproduction de textes anciens

(Ancienne série) :

I	Disme (Simon Stevin)........................	14 F	80 gr
II	Géométrie élémentaire (Félix Klein)........................	25F	180 gr
III	Dictionnaire Mathématiques (1er fascicule) (M. Ozanam)...............	31F	250 gr
IV	Dictionnaire Mathématique (2ème fascicule) (M. Ozanam)..............	32F	250 gr

(Nouvelle série) :

N° 1 : Histoire des recherches sur la quadrature du cercle (J.E Montucla)........................	38F	340 gr
N° 2 : Elémens du calcul des probabilités (Marquis de Condorcet)........................	28F	240 gr
N° 3 : Traité des Indivisibles (Gilles-Personne de Roberval)........................	32F	270 gr
N° 4 : Les Porismes d'Euclide (Michel Chasles)........................	35F	300 gr
N° 5 : Sur la théorie des Ensembles (Georg Cantor)........................	52F	450 gr
N° 6 : Traité des sections coniques (M. de La Chapelle)........................	42F	450 gr
N° 7 : Traité élémentaire de calcul des probabilités (S-F Lacroix)........................	37F	300 gr
N° 8 : Elémens d'algèbre Alexis-Claude Clairaut........................	41F	350 gr
N° 9 : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal Jean-Frédéric Frénet........................	44F	384 gr
N° 10 Problèmes pour les arpenteurs Lorenzo Mascheroni........................	21F	156 gr
N° 11 Méthode des moindres carrés Carl-Friedrich Gauss........................	36F	295 gr
N° 12 Traité du calcul différentiel et du calcul intégral Sylvestre-François Lacroix........................	70 F	600 gr
N° 13 Géométrie ou de la mesure de l'étendue........................	52 F	395 gr

COPIRELEM

Titre	Prix	Poids
Actes du XVIIème colloque des Professeurs d'Ecole Normale (Paris - Mai1990)	61F	650 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Brochure COPIRELEM)	56F	470 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome II)	55F	630 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome III)	45F	360 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome IV)	67F	612 gr
Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (Tome V)	68F	538 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole. Mathématiques. Annales 92 (24 sujets avec éléments de correction)	95F	700 gr
Second concours interne de recrutement des professeurs d'école Choix de sujets 92-93-94-95 Les sujets du concours 1996 19 académies	61F	500 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 95 (26 sujets corrigés)	110 F	886 gr
Concours externe de recrutement des Professeurs d'Ecole Mathématiques. Annales 97 (21 sujets et leurs corrigés)	110 F 130F port compris	810 gr

BROCHURES INTER-I.R.E.M

Titre	Prix	Poids
N° 3 : Quelles activités pour quel apprentissage	42F	450 gr
Actes du colloque Inter-IREM Histoire et épistemologie des mathématiques	33F	610 gr
Budapest : Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques	65F	440 gr
Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A - Première Année Principes et réalisations	99F	850 gr
Quelques supports pour des activités dans le cadre des enseignements modulaires en seconde (Réseau national des I.R.E.M)	24F	180 gr
Catalogue des publications des IREM de 1988 à 1991	50F	280 gr
Catalogue des publications des IREM de 1991 à 1994	40F	500 gr
Histoire d'infini (Actes du 9ème colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques) (Landerneau, 22-23 mai 1992)	160F	790 gr
Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie	60F	365 gr
L'Enseignement des Mathématiques : des Repères entre Savoirs, Programmes et Pratiques	60F	410 gr
Actes du colloque Inter-IREM de géométrie Limoges, les 11, 12 et 13 juin 1992	80F	800 gr
Enseigner les probabilités au lycée Commission Inter-IREM Statistiques et probabilités	100 F	788 gr

BULLETINS INTER-I.R.E.M

Titre	Prix	Poids
N° 21 : Rétroprojecteur	1OF	190 gr
N° 24 : Astronomie	2OF	340 gr
Suivi scientifique 85-8 6 (6ème)	45F	400 gr
Suivi scientifique 86-87 (5ème)	50F	390 gr
Suivi scientifique 87-88 (4ème)	60F	530 gr
Suivi scientifique 88-89 (3ème)	60F	590 gr

Activités en Première	35F	310 gr
Images et Maths	47F	410 gr
Liaison collège-seconde (1989-1990)	50F	250 gr
Des chiffres et des lettres au collège 1991/92	50F	360 gr
Maths en seconde : énoncés et scénarios	50F	330 gr
Module en seconde	25F	150 gr
Autour de Thalès	60F	350 gr

THESES

Aline Robert : L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. Divers articles de Mathématiques	1O0F	1410 gr
Jacqueline Robinet : Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur	70F	770 gr
Michèle Artigue : Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques	68F	780 gr
(en réd.)	37F	400 gr
Régine Douady : Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques - Une réalisation dans tout le cursus primaire	120F	690 gr
Denis Butlen : Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire	40F	330 gr
Monique Pezard : Une expérience d'enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs	50F	460 gr
Françoise Tréhard : Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : typologie et enjeux didactiques	60F	690 gr
Bernard Parzysz : Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir /savoir	90F	850 gr
Isabelle Tenaud : Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes	130F	1300 gr
Marie-Jeanne Perrin-Glorian : Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème	160F	1390 gr
Antoine Dagher : Environnement Informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions	88F	970 gr
Alain Kuzniak : Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré	98F	920 gr
Maha Abboud Blanchard L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire des mathématiques : symptômes d'un malaise. Un exemple : l'enseignement de la symétrie orthogonale au collège	96F	890 gr
Catherine Houdement Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies	102F	930 gr

Christiane Larere
Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois
enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole.......................... 80F 720 gr

Marie-Lise Peltier Barbier
La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école :
"entre conjoncture et éternité"
Etude des sujets de concours de recrutement et contribution à la recherche
des effets de la formation sur les professeurs stagiaires............................. 100F 924 gr

Brigitte Grugeon
Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves
à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement :
BEP et Première G.. 189F 1600 gr

Jeanne Bolon
Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique
des mathématiques ?
Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège................. 94F 834 gr

Marie-françoise Jozeau
Géodésie au XIXème Siècle
De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande
Regards belges
Compensation et méthode des moindres carrés....................................... 162F 1648 gr

TITRE : LA GEOMETRIE AU LYCEE

AUTEURS : J.L. FORGUES, C. JEULIN, R. PROTEAU, D. SPERANDIO

DATE : DECEMBRE 1988

MOTS CLES :
Mathématiques
Géométrie
Analyse-synthèse
Lieux géométriques
Constructions géométriques
Configurations
Barycentres
Isométries
Similitudes
Angles
Espace

RESUME :

Ce fascicule propose des exercices qui devraient permettre aux élèves de progresser en géométrie.

Il est destiné aux classes scientifiques de première et terminale (C,D,E).

Les principaux thèmes traités :

* Méthodes de raisonnement
* Configurations du plan et de l'espace
* Barycentres
* Angles
* Translations-Homothéties-Symétries-Rotations
* Similitudes
* Espace
* Géométrie en Terminale D .

Il recouvre la plus grande partie du programme de "géométrie pure".

Le dernier chapitre fournit des problèmes plus intéressants.

Editeur : IREM
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY
Dépôt légal : Décembre 1988
ISBN : 2-86612-057-4
IREM Université Paris 7 Denis Diderot
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05