TITRE : ANGLES DE COUPLES ET ROTATIONS

AUTEURS : J.BOUDAREL, F.COLMEZ

DATE : JUIN 1988

RESUME :

Une manière de traiter le programme de première S distinguant nettement les angles et leurs mesures avant d'introduire les confusions de notations souhaitées par les textes officiels ; quelques exercices adaptés.

MOTS-CLES :

- Mathématiques
- Géométrie
- Angles
- Rotations
- Mesures des Angles

Editeur : IREM
Directeur/Responsable de la publication : Michèle ARTIGUE
Tirage : 96 exemplaires dépôt légal : 2-86612-049-3 JUIN 1988
IREM PARIS VII - Tour 56/55 - 3ème étage - 2 place jussieu 75005 PARIS

INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

73

juin 1988

ANGLES DE COUPLES

ET

ROTATIONS

Contenu J.BOUDAREL
F.COLMEZ
B.PARZYSZ

Rédaction J.BOUDAREL
F.COLMEZ

Dactylographie M.LAMY

Dessins J.BOUDAREL

Maquette F.COLMEZ

objectif: Présenter une manière de traiter le programme de première

sujet: Les angles et les rotations en relation avec les autres notions

niveau: première scientifique et, plus généralement, second cycle

public: Enseignants de Mathématiques du second cycle

UNIVERSITE-PARIS VII

SOMMAIRE

AVERTISSEMENT

OBJECTIF

La présentation des "angles et rotations" décrite dans cette brochure a été expérimentée en classe de 1^e S ; elle prend en compte les constructions à la règle et au compas, et les manipulations du rapporteur déjà plus ou moins bien connues des élèves.

Elle a pour objectif de mettre en évidence les résultats importants en tant qu'outils de résolution de problèmes. Ce sont :

* La distinction entre angles de secteurs angulaires et angles de couples de demi-droites (ou angles de rotation).

* Le calcul angulaire, introduit sans utiliser les "mesures" de chaque angle et les relations entre les deux notions ; les analogies et les différences de fonctionnement entre le calcul angulaire et le calcul vectoriel.

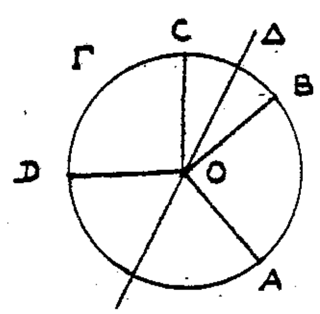
* Le fait qu'une rotation est la composée de deux réflexions.

* L'expression angulaire de l'alignement ou de la cocyclicité. et l'utilisation des angles et des longueurs pour exprimer l'égalité vectorielle ou la colinéarité.

* L'effet des différentes transformations sur les angles et leur utilisation dans le calcul angulaire.

DEMARCHE

La démarche que nous avons suivie repose essentiellement sur la propriété suivante :



Propriété des angles

Etant donné quatre points A, B, C, D d'un cercle Γ de centre O, les phrases suivantes sont équivalentes:

a) l'angle de la demi-droite [OB) avec la demi-droite [OA) est le même que celui de la demi-droite [OD) avec la demi-droite [OC) ; ce qu'on écrit, en utilisant des vecteurs directeurs des demi-droites :

$$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = (\widehat{\vec{OC},\vec{OD}}).$$

b) la rotation de centre O qui transforme [OA) en [OB) transforme [OC) en [OD).

c) les demi-droites [OA), [OD) d'une part, et les demi-droites [OB), [OC) d'autre part, ont même axe de symétrie Δ. Cela peut se dire aussi : les segments [AD] et [BC] ont la même médiatrice* Δ.

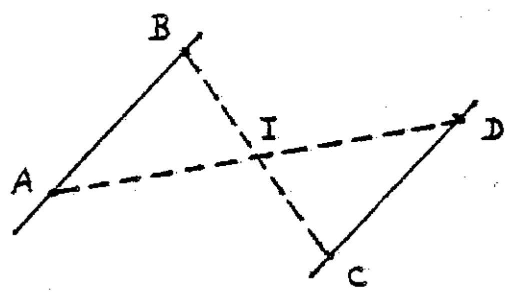
d) $$(\widehat{\vec{OA},\vec{OD}}) = (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) + (\widehat{\vec{OA},\vec{OC}})$$

ou

$$(\widehat{\vec{OB},\vec{OC}}) = (\widehat{\vec{OB},\vec{OA}}) + (\widehat{\vec{OB},\vec{OD}}) \quad \text{etc.}$$

Cette propriété présente une grande analogie avec la propriété relative aux vecteurs et aux translations rappelée ci-dessous. Le passage des vecteurs aux angles se fait en remplaçant les points par des demi-droites et le milieu d'un bipoint par l'axe de symétrie de deux demi-droites de même origine.

Propriété relative aux vecteurs



Etant donné quatre points A, B, C, D du plan, les phrases suivantes sont équivalentes :

* Si l'un de ces segments est réduit à un point, il faut remplacer la médiatrice du segment [XX] par le diamètre de Γ passant par le point X.

a) le bipoint (A,B) et le bipoint (C,D) représentent le même vecteur, ce qu'on écrit : $\vec{AB} = \vec{CD}$.

b) la translation qui transforme A en B, transforme C en D.

c) les segments [AD] et [BC] ont même milieu I.

d) $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ ou $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{BD}$ etc.

CONCEPTION

Cette brochure présente la progression établie au cours de trois années d'enseignement en première S.

Certains exercices présentés en cours de chapitre font partie de cette progression. Par contre les exercices placés à la fin de la plupart des chapitres sont destinés à faire manipuler les notions qui viennent d'être introduites (bien évidemment certains d'entre eux peuvent être traités plus rapidement à l'aide de notions plus élaborées). Ils constituent des exemples et n'ont aucun caractère d'exhaustivité (ainsi il n'y a pas d'exercice sur la droite de Simpson...).

Le chapitre XV est destiné à faire une mise au point sur les notions introduites et à les replacer dans leur environnement mathématique et scolaire. Son contenu peut être éventuellement abordé plus tôt (à partir du chapitre VII) ; il convient alors d'adapter les notations des chapitres ultérieurs.

CHAPITRE I

CONSTRUCTIONS VUES EN PREMIER CYCLE

I-1 Construction d'un secteur angulaire de même angle qu'un secteur donné

Le secteur BAC *étant donné tel que* AB = AC, *construire, à partir de la demi-droite* [DP) *donnée, un secteur ayant même angle que le secteur donné.*

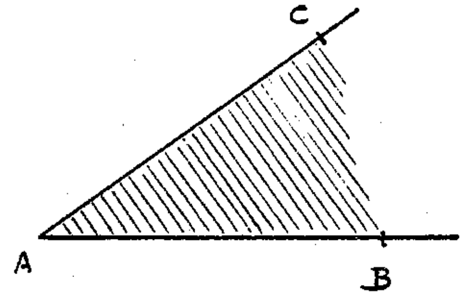


figure 1

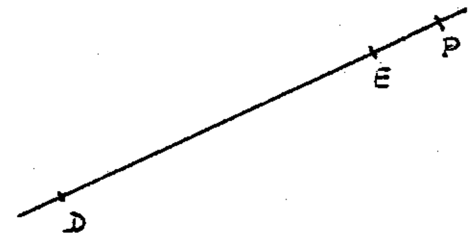


figure 2

I-1.1 <u>Construction avec le compas</u>

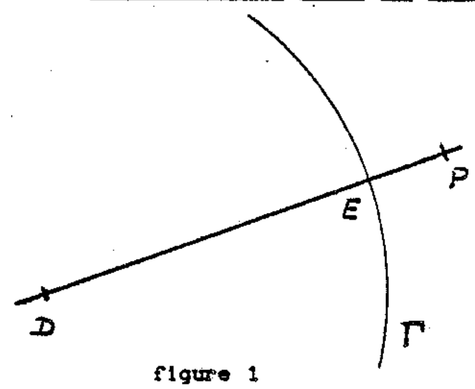


figure 1

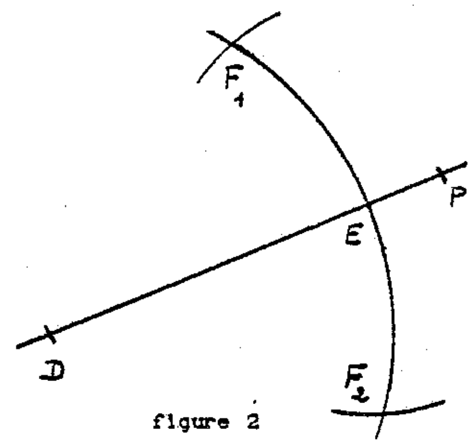


figure 2

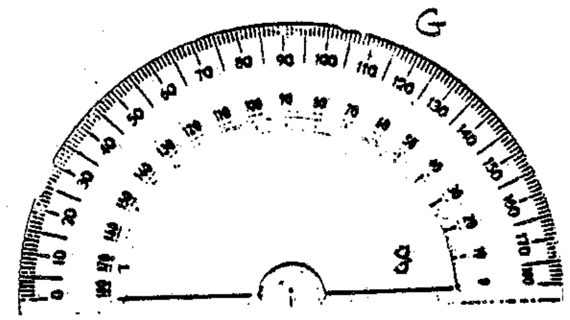
On trace le cercle Γ de centre D, de même rayon que le cercle de centre A passant par B et C. Ce cercle Γ coupe la demi-droite [DP) en E.

On trace le cercle de centre E, de rayon BC, qui coupe Γ en F_1et F_2.

Chaque demi-droite [DF_1) et [DF_2) définit avec la demi-droite [DP) un secteur angulaire saillant (comme le secteur donné) de même angle que le secteur BAC.

I-1.2 <u>Utilisation du rapporteur semi-circulaire</u>

Les rapporteurs usuels comportent (généralement) deux graduations: l'une extérieure, que nous noterons G, l'autre intérieure que nous noterons g.



On peut contrôler ou remplacer la construction au compas par la manipulation suivante :

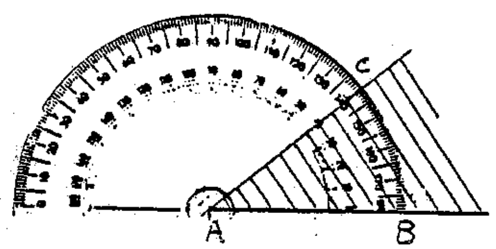


figure 1

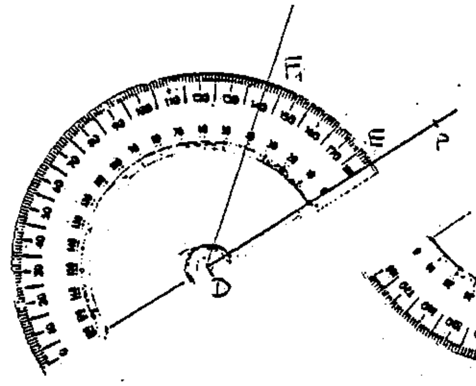


figure 2.1

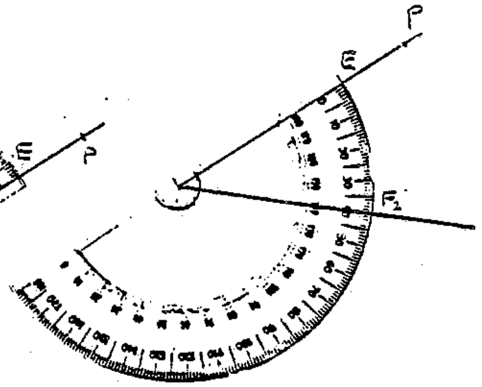


figure 2.2

On place le rapporteur sur la première figure de telle sorte que le centre soit en A et que la demi-droite [AB) passe par le zéro d'une graduation (celle pour laquelle la demi-droite [AC) est située dans le demi-plan du rapporteur - dans notre exemple la graduation intérieure g) et on lit le nombre k permettant de repérer la demi-droite [AC) (ici k = 40). On place ensuite le rapporteur sur la deuxième figure, centré en D de manière que la demi-droite [DP) passe par le zéro de l'une ou l'autre des graduations. La demi-droite d'origine D repérée par k convient (ici c'est $[DF_1)$ qui correspond à g et $[DF_2)$ qui correspond à G).

I-1.3 La manipulation que nous venons d'évoquer permet de distinguer entre les deux solutions obtenues par la construction au compas ; elle donne en fait une réponse au problème suivant.

I-2 Construction d'une demi-droite dans une position donnée relativement à une demi-droite donnée.

Avec les mêmes données que plus haut, construire la demi-droite [DF) *dont la position** *relativement à la demi droite* [DP) *est la même que la position de la demi-droite* [AC) *relativement à la demi-droite* [AB). *C'est-à-dire telles que, par glissement, on puisse superposer le calque du dessin du couple des demi-droites d'origine* A *au dessin du couple des demi-droites d'origine* D.

I-2.1 Cela revient à choisir entre les demi-droites $[DF_1)$ et $[DF_2)$ construites précédemment.

*Les Grecs auraient dit : "tel que [DF) soit à [DP) ce que [AC) est à [AB)".

Dans la construction au compas, ce choix ne peut se faire qu'à l'oeil : on tourne dans le même sens pour aller de [AB) à [AC) et pour aller de [DP) à $[DF_1)$.

Avec le rapporteur usuel, chacun des deux sens est matérialisé par une graduation et la réponse est obtenue en utilisant la même graduation pour les deux figures. Mais, pour une figure donnée, l'une des deux graduations seulement convient et c'est la manipulation qui permet de savoir laquelle.

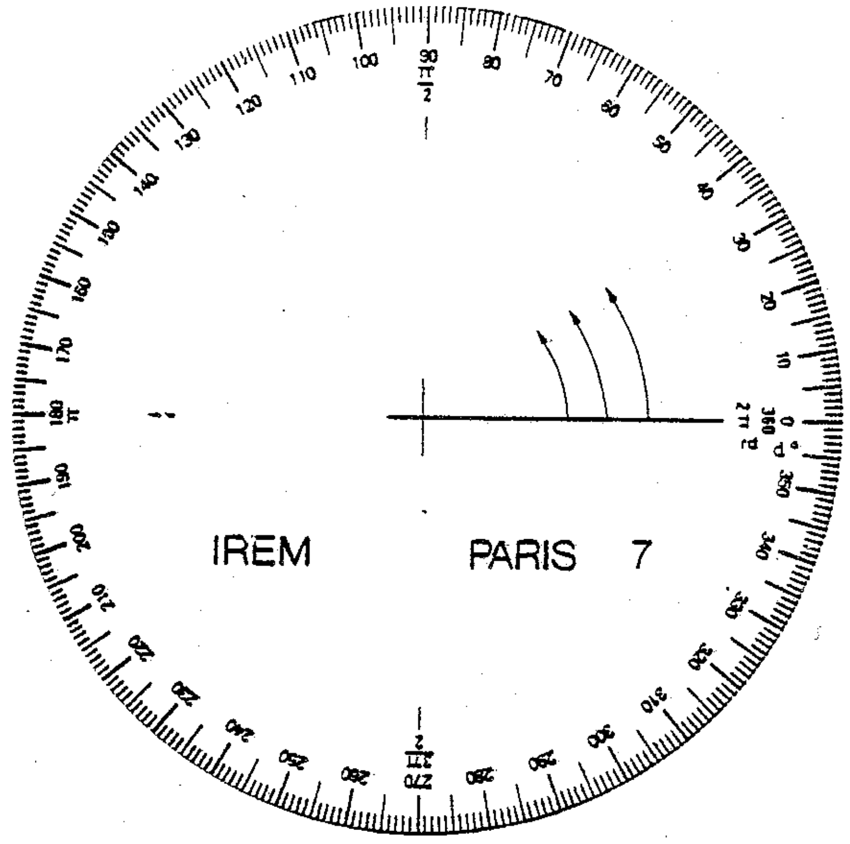
Il existe un autre type de rapporteur, présenté ci-dessous, qui supprime toute hésitation.

I-2.2 <u>Utilisation d'un rapporteur Circulaire</u>

Le rapporteur circulaire présenté ici ne comporte qu'une seule graduation g mais celle-ci permet de repérer par rapport à une demi-droite donnée toutes les demi-droites du plan de même origine .

Ce rapporteur en plastique transparent est en vente à l'IREM - Université Paris 7 Tour 56 2 place Jussieu 75005 Paris

Prix : 4 F au 1.1.88



On place ce rapporteur sur la première figure de telle sorte que A soit au centre et que g([AB))* = 0 ; on lit alors g([AC)). Puis, on place le rapporteur sur la deuxième figure de telle sorte que D soit au centre et que g([DP)) = 0. On a alors $g([DF_1)) = g([AC))$.

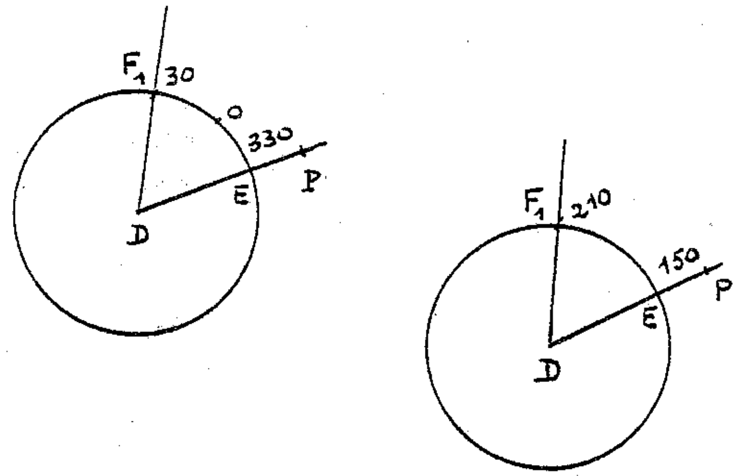
* on notera g([AB)) ou plus simplement g(B) le nombre permettant de repérer la demi-droite [AB), le centre du rapporteur étant en A

I-3 Remarques

I-3.1 Par translation on peut se ramener au cas où D est en A. Dans les deux procédures décrites ci-dessus, la manipulation revient alors à faire tourner le rapporteur autour de A.

I-3.2 Dans le cas du rapporteur circulaire, et dans ce cas seulement, on peut procéder autrement : on centre le rapporteur en A et on le fixe dans une position quelconque ; on lit g(B), g(C) ; on calcule k = g(C) - g(B).

Par exemple : g(B) = 100 g(C) = 40 , d'où k = 60. Puis,



Si on lit g(P) = 150
le point F_1 sera tel que
$g(F_1) = g(P) + k$
(si le zéro est extérieur au secteur saillant PDF_1)
ou
Si on lit g(P) = 330
le point F_1 sera tel que
$g(F_1) = g(P) + k - 360$
(si le zéro appartient au secteur saillant PDF_1)

Selon le choix de la position du zéro, les différences g(C) - g(B) et $g(F_1) - g(P)$ sont, soit le même nombre, soit des nombres dont l'écart est de 360. Ces nombres sont des mesures possibles en degrés de l'angle de [AB) à [AC), qui est aussi l'angle de [AP) à $[AF_1)$.

I-3.3 Les deux problèmes I-1 et I-2 que nous venons de voir font référence à des notions d'angle différentes : dans le premier il s'agit d'angle de secteurs, dans le deuxième il s'agit d'angle de couples de demi-droites. Le changement de type de rapporteur permet de mieux marquer cette différence.

I-3.4 L'objectif des chapitres suivants est de substituer à l'utilisation du rapporteur circulaire une construction à la règle et au compas permettant de donner un statut théorique à la notion d'angle de couples* de demi-droites .

* Nous préférons le vocable "angle de couples" à "angle orienté", pour des raisons exposées dans le dernier chapitre.

CHAPITRE II

VERS LES ANGLES DE COUPLES

II-1 Problème

Pour aboutir à la notion d'angle de couples de demi-droites (les demi-droites étant tout d'abord de même origine), nous devons résoudre le problème suivant :

Etant donné trois demi-droites δ_1, δ_2, δ_3 d'origine O, construire la demi-droite δ_4, d'origine O, telle que la position de δ_4 par rapport à δ_3 soit la même que celle de δ_2 par rapport à δ_1. (voir I.2)

(On dira aussi : telle que l'angle de δ_3 à δ_4 soit le même que l'angle de δ_1 à δ_2).

Les constructions faites précédemment, de même que la manipulation du rapporteur circulaire, nous conduisent à définir chaque demi-droite à l'aide de son point d'intersection avec un cercle de référence , de centre O, et de rayon arbitrairement choisi mais fixé une fois pour toutes.

Si m_1, m_2, m_3, m_4 sont les points d'intersection de δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 avec ce cercle , les constructions rappelées montrent que nécessairement les cordes $[m_1m_2]$ et $[m_3m_4]$ ont même longueur.

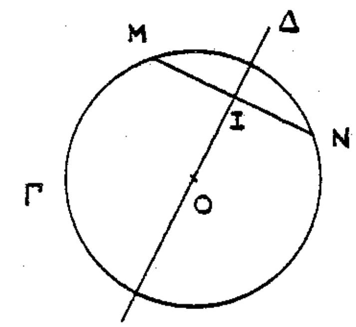
Nous allons étudier cette situation dans trois exercices préliminaires.

II-2 Exercices préliminaires

II-2.1 <u>Premier exercice</u>

Etant donnés un cercle Γ de centre O, de rayon R = 3 cm et un point I distinct de O et intérieur au cercle, construire la (ou les) corde(s) [MN] ayant I pour milieu.

Si [MN] est une corde répondant à la question, c'est à dire ayant I pour milieu, on doit avoir : IM = IN , c'est-à-dire que I doit appartenir à la médiatrice du segment [MN]



De plus, M et N étant des points de Γ, O appartient à la médiatrice du segment [MN]

Il en résulte que la médiatrice du segment [MN] est la droite (OI), c'est-à-dire la perpendiculaire à [MN] en son milieu I.

Comme il n'existe qu'une seule droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée, on ne peut construire qu'une seule corde [MN] ayant I pour milieu, celle obtenue en traçant par I la perpendiculaire à la droite (OI).

Calcul de MN, connaissant $OI = \ell$ (avec $\ell < R$).

Le triangle OIM est rectangle en I, donc $MI^2 = OM^2 - OI^2 = R^2 - \ell^2$

d'où $MN = 2\sqrt{R^2 - \ell^2}$

Réciproquement, si MN = d est donné, on peut calculer OI :

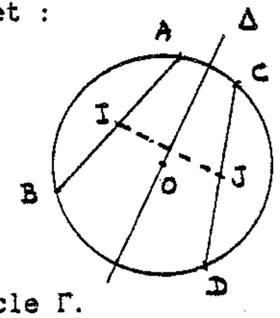
$$OI^2 = OM^2 - MI^2 = R^2 - \frac{d^2}{4} \qquad \text{d'où} \qquad OI = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$$

II-2.2 <u>Deuxième exercice</u>

Etant donné le cercle Γ de centre O *et de rayon* R, *deux cordes* [AB] *et* [CD] *de même longueur* d *et de milieux respectifs* I *et* J *et la médiatrice* Δ *du segment* [IJ],

montrer que Δ *est la médiatrice** $\begin{cases} \textit{soit des segments } [AC] \textit{ et } [BD] \\ \textit{soit des segments } [AD] \textit{ et } [BC] \end{cases}$

La médiatrice Δ du segment [IJ] passe par O ; on a en effet :



$$\left.\begin{array}{r} AB = d \\ OA = OB = R \end{array}\right\} \text{ ce qui entraine que : } OI = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$$

et

$$\left.\begin{array}{r} CD = d \\ OC = OD = R \end{array}\right\} \text{ ce qui entraine que : } OJ = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$$

Il en résulte que OI = OJ et que Δ est un diamètre du cercle Γ.

La réflexion s_Δ par rapport à Δ transforme I en J et conserve le cercle Γ ; notons A' l'image de A et B' l'image de B par s_Δ. Comme dans une réflexion, l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image, J est le milieu du segment [A'B'], corde du cercle Γ.

* Dans le cas où l'un de ces segments serait réduit à un point X, il faudrait, ici et dans toute la suite, remplacer "médiatrice du segment [XX]" par "diamètre passant par le point X".

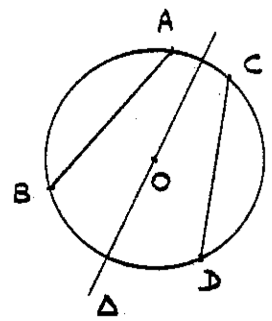
Or on a vu dans l'exercice précédent qu'il n'existe qu'une seule corde du cercle ayant J pour milieu.

Conclusion : les segments [CD] et [A'B'] sont confondus.

La corde [AB] étant donnée, on a quatre cas de figures :

1) Les cordes [AB] et [CD] ne sont pas sécantes

Configuration (1)



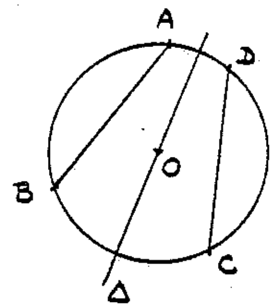
$A \xrightarrow{s_\Delta} C$

$B \longrightarrow D$

Δ est médiatrice de [AC] et [BD]

(ACDB) est un trapèze isocèle

Configuration (2)



$A \xrightarrow{s_\Delta} D$

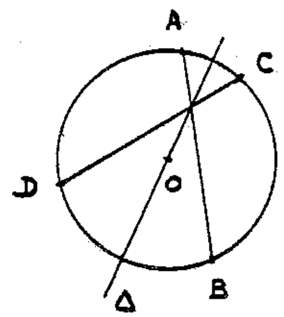
$B \longrightarrow C$

Δ est médiatrice de [AD] et [BC]

(ADCB) est un trapèze isocèle

2) Les cordes [AB] et [CD] sont sécantes

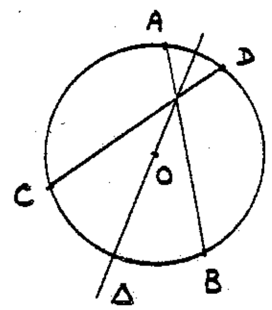
Configuration (1')



mêmes résultats que (1)

(ABCD) est un trapèze isocèle

Configuration (2')



mêmes résultats que (2)

(ADBC) est un trapèze isocèle

II-2.3 <u>Troisième exercice</u>

A l'aide du rapporteur circulaire, comparer les mesures de l'angle de [OA) *à* [OB) *et de l'angle de* [OC) *à* [OD). *Pour cela :*

Placer sur un cercle de centre O, *de rayon* 5,5 cm, *deux cordes* [AB] *et* [CD] *de longueurs égales à* 9,8 cm.

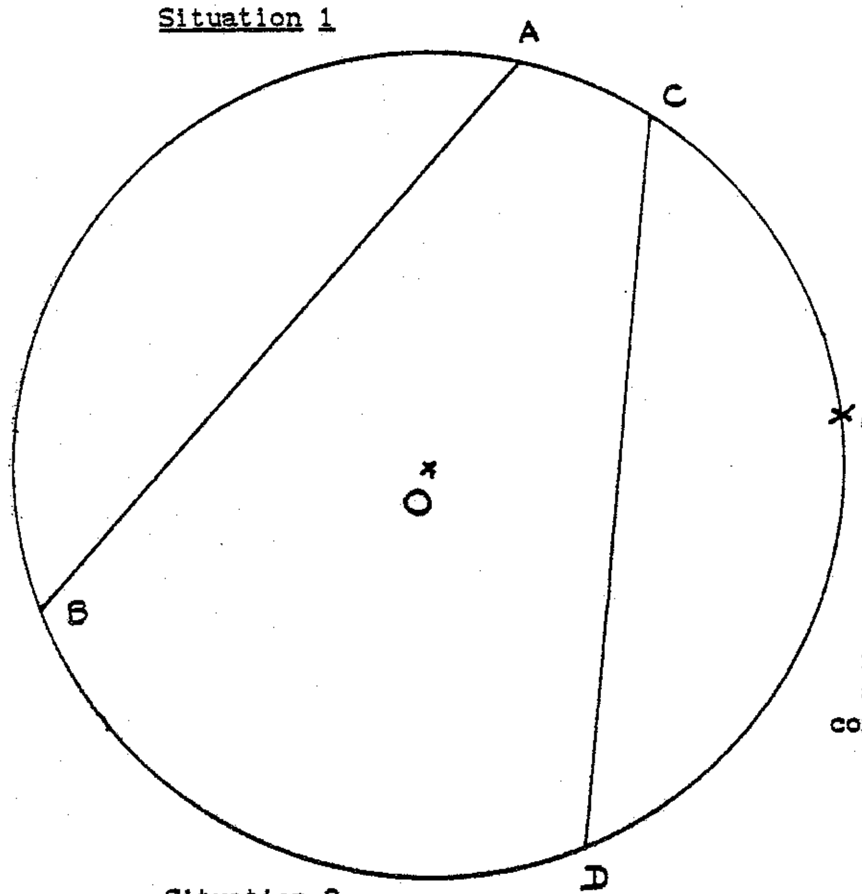
Lire les nombres g(A), g(B), g(C), g(D).

Calculer g(B) - g(A) *puis* g(D) - g(C)

Comparer les résultats obtenus.

Quatre types de situations différentes sont repérés par les élèves :

Situation 1

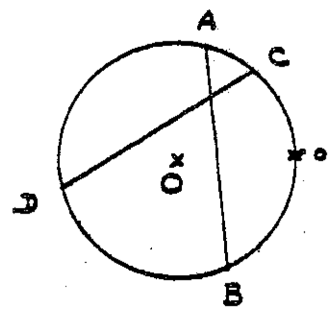


g(A) = 70
g(B) = 195
g(C) = 51
g(D) = 286

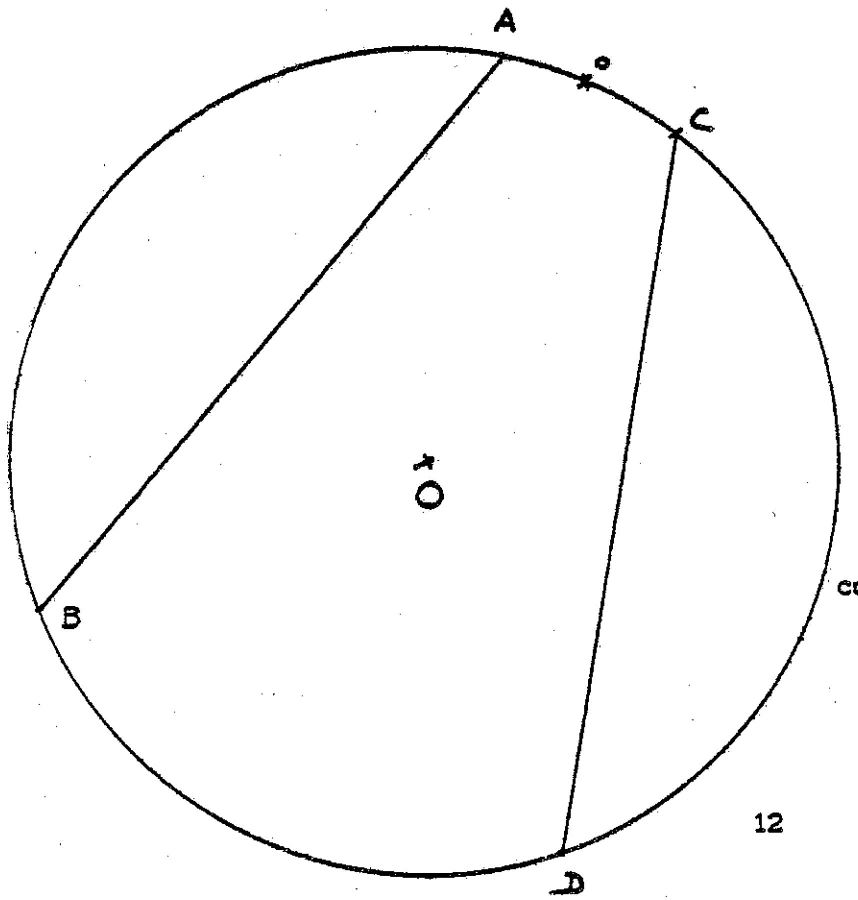
g(B) - g(A) = 125 } résultats
g(D) - g(C) = 235 } tels que

la somme soit égale à 360°

même chose
avec cette
configuration



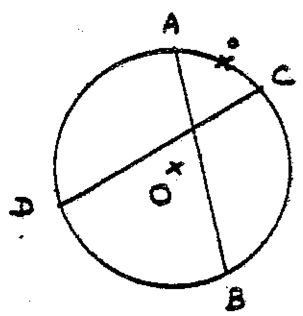
Situation 2



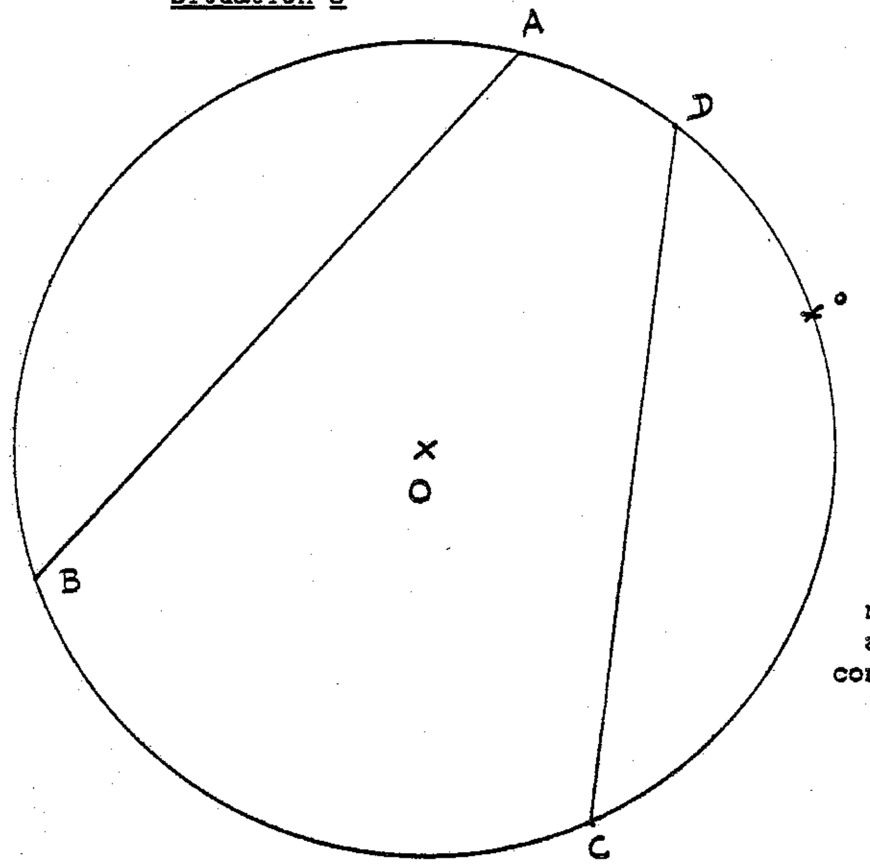
g(A) = 12
g(B) = 135
g(C) = 346
g(D) = 223

g(B) - g(A) = 123 } résultats
g(D) - g(C) = - 123 } opposés

même chose
avec cette
configuration



Situation 3

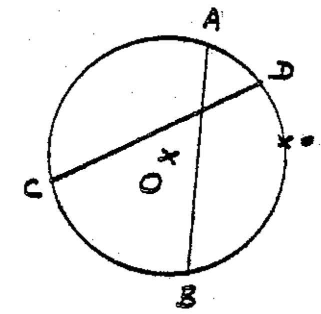


g(A) = 57
g(B) = 180
g(C) = 275
g(D) = 38

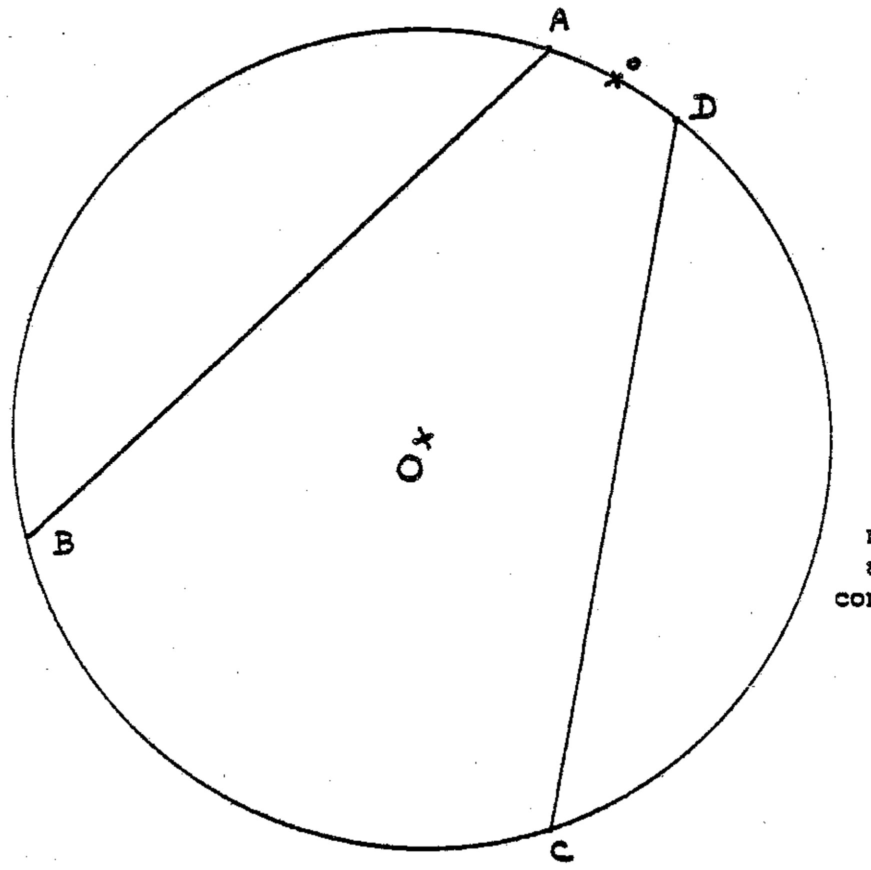
g(B) - g(A) = 123 } résultats
g(D) - g(C) = -237 } tels que

leur différence
soit égale à 360°

même chose
avec cette
configuration



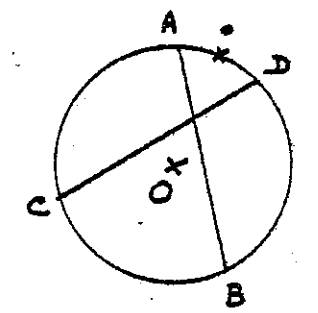
Situation 4



g(A) = 10
g(B) = 133
g(C) = 227
g(D) = 350

g(B) - g(A) = 123 } résultats
g(D) - g(C) = 123 } égaux

même chose
avec cette
configuration



On peut remarquer que :

* résultats opposés et résultats dont la somme est 360 correspondent à la même configuration (1) ou (1'), c'est à dire celle où :

$$s_\Delta : \begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow D \end{array}$$

*résultats égaux et résultats dont la différence est 360 correspondent à la même configuration (2) ou (2'), c'est à dire celle où :

$$s_\Delta : \begin{array}{l} A \longrightarrow D \\ B \longrightarrow C \end{array}$$

CHAPITRE III

LES ANGLES DE COUPLES DE DEMI-DROITES OU DE VECTEURS

III-1 Les conséquences du chapitre II

III-1.1. Dans la configuration (1), pour laquelle Δ est la médiatrice des segments [AC] et [BD], ce sont les couples ([OA), [OB)) et ([OD), [OC)) qui donnent le même angle.

III-1.2. Dans la configuration (2), pour laquelle Δ est la médiatrice des segments [AD] et [BC], ce sont les couples ([OA), [OB)) et ([OC), [OD)) qui donnent le même angle.

III-1.3. Inversement, si M, N, P, Q sont quatre points du cercle C tels que les couples ([OM), [ON)) et ([OP), [OQ)) donnent le même angle, alors les cordes [MN] et [PQ] ont la même longueur, et les segments [MQ] et [NP] ont le même axe de symétrie passant par O.

III-1.4 On a ainsi vérifié graphiquement l'équivalence entre la congruence modulo 360 des mesures au rapporteur, et l'existence d'une réflexion conservant la figure, pour laquelle la première demi-droite nommée correspond à la quatrième et la deuxième à la troisième.

Cela justifie les définitions suivantes :

III-2 Définitions

III-2.1 <u>Première définition</u> **(égalité d'angles de couples de demi-droites)**

Soient M, N, P, Q *quatre points d'un cercle* Γ *de centre* O.

Si les demi-droites [OM) *et* [OQ) *ont même axe de symétrie* Δ *que les demi-droites* [ON) et [OP), *on dira que l'angle du couple des demi-droites* ([OM), [ON)) *est égal à l'angle du couple des demi-droites* ([OP), [OQ)), *et on écrira :*

$$([OM)\widehat{,}[ON)) = ([OP)\widehat{,}[OQ))$$

(les liens indiquent les points qui se correspondent dans la reflexion)

Remarques :

i. Si les points sont distincts, cela revient à dire que les segments [MQ] et [NP] ont la même médiatrice Δ.

ii. Si P = M alors Q = N. En effet $(\widehat{[OM),[ON)}) = (\widehat{[OP),[OQ)})$ devient $(\widehat{[OM),[ON)}) = (\widehat{[OM),[OQ)})$, c'est à dire que les demi-droites [ON)et [OQ) ont toutes deux pour image [OM) dans la réflexion s_Δ ; c'est-à-dire qu'elles sont confondues et N = Q.

iii. Il résulte immédiatement de la définition que l'égalité

$$(\widehat{[OM),[ON)}) = (\widehat{[OP),[OQ)})$$

est équivalente aux trois autres égalités :

$$(\widehat{[OM),[OP)}) = (\widehat{[ON),[OQ)})$$
$$(\widehat{[OQ),[ON)}) = (\widehat{[OP),[OM)})$$
$$(\widehat{[OQ),[OP)}) = (\widehat{[ON),[OM)})$$

iv. Formellement on obtient ces nouvelles égalités par permutation "des moyens" ou permutation "des extrêmes".

v. Les quatre angles ainsi nommés sont en général différents.

vi. Cette écriture n'est pas très lisible ; c'est pourquoi nous utiliserons plutôt les vecteurs directeurs des demi-droites, et nous écrirons : $(\widehat{\vec{OM},\vec{ON}}) = (\widehat{\vec{OP},\vec{OQ}})$,
ce qui conduit à la définition plus générale suivante :

III-2.2 Deuxième définition (égalité d'angles de couples)

Les demi-droites [OM) et [ON) *étant données comme précédemment, on considére quatre points du plan* A, B, C, D *vérifiant les relations :*

$\vec{AB} = \alpha\,\vec{OM}$ et $\vec{CD} = \beta\,\vec{ON}$, *où* α *et* β *sont des éléments de* $\mathbb{R}_*^+$

On dit que l'angle du couple de vecteurs $(\vec{AB},\vec{CD})$ *est égal à l'angle du couple de vecteurs* $(\vec{OM},\vec{ON})$, *et que c'est aussi l'angle du couple de demi-droites* ([AB), [CD)) *ou l'angle du couple* ([OM), [OP)) *; cet angle est noté indifféremment :*

$$(\widehat{\vec{AB},\vec{CD}}) \quad ou \quad (\widehat{[AB),[CD)}) \quad ou \quad (\widehat{\vec{OM},\vec{ON}}) \quad ou \quad (\widehat{[OM),[ON)}).$$

Interprétation géométrique

L'égalité vectorielle : $\vec{AB} = \alpha\,\vec{OM}$, dans laquelle α est un réel strictement positif, indique que le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la demi-droite [OM) aussi bien que de la demi-droite [AB) ; ce qu'on exprime également en disant que les demi-droites [AB) et [OM) sont parallèles et de même sens. Il en est de même pour les demi-droites [CD) et [ON).

D'où la règle : l'angle d'un couple de demi-droites d'origines quelconques est égal à l'angle du couple des demi-droites d'origine O (le point choisi comme origine du plan) respectivement parallèles aux demi-droites données et de même sens*.

Remarque

Cette règle est utilisée dans la recherche, avec le rapporteur circulaire, d'une mesure de l'angle d'un couple de demi-droites n'ayant pas la même origine ; on centre alors le rapporteur à l'origine du plan.

III-3 **Transitivité de l'égalité**

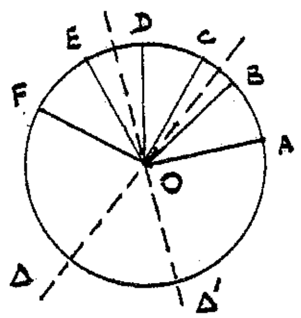
$$\text{si on a:} \quad \text{et} \left[\begin{array}{l} (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = (\widehat{\vec{OC},\vec{OD}}) \\ \\ (\widehat{\vec{OC},\vec{OD}}) = (\widehat{\vec{OE},\vec{OF}}) \end{array}\right. \quad \text{alors} \quad (\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = (\widehat{\vec{OE},\vec{OF}})$$

Observons ce que cela veut dire (on suppose les points distincts) :

$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) = (\widehat{\vec{OC},\vec{OD}})$ | $(\widehat{\vec{OC},\vec{OD}}) = (\widehat{\vec{OE},\vec{OF}})$

Les segments [AD] et [BC] ont même axe de symétrie Δ | les segments [CF] et [ED] ont même axe de symétrie Δ'

$$A \xrightarrow{s_\Delta} D \qquad\qquad D \xrightarrow{s_{\Delta'}} E$$
$$B \longrightarrow C \qquad \text{et} \qquad C \longrightarrow F$$
$$AB = CD \qquad\qquad CD = EF$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{AB\,=\,EF}$$



D'après le deuxième exercice du chapitre précédent, il existe une droite Δ" telle que le

* On a ici une bonne occasion de revoir la définition vectorielle d'une demi-droite.

segment [AB] ait pour image le segment [EF] dans la réflexion $s_{\Delta''}$.

Mais, on ne sait pas si $\begin{array}{c} s_{\Delta''} \\ A \longrightarrow E \\ B \longrightarrow F \end{array}$ ou $\begin{array}{c} s_{\Delta''} \\ A \longrightarrow F \\ B \longrightarrow E \end{array}$

Cet argument ne permet pas de conclure sur la transitivité de l'égalité des angles de couples

Avec les élèves, nous avons admis explicitement cette transitivité, dont la vraisemblance est rendue évidente par l'utilisation du rapporteur.

III-4 Comment démontrer la transivité

Les deux propositions suivantes sont équivalents :

i. *L'égalité des angles de couples est transitive*

ii. *la composée de trois réflexions d'axes concourants en O est une réflexion d'axe passant par O.*

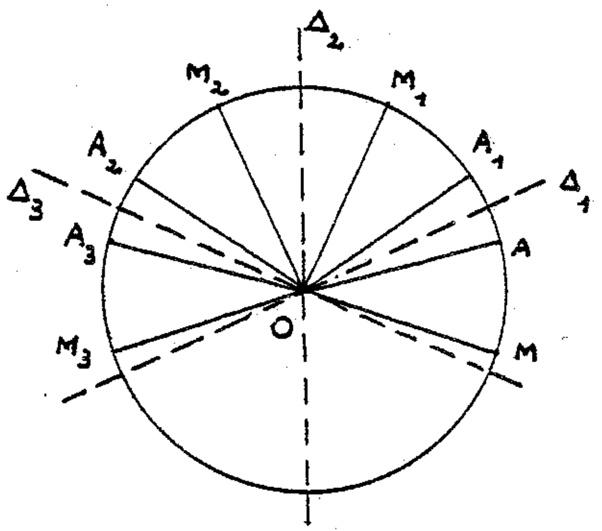
III-4.1 ii $\Longrightarrow$ i (cette démonstration n'est pas dans l'esprit du programme actuel des lycées) On reprend la situation précédente en notant Δ_1 la médiatrice du segment [EF] ; il existe une droite Δ_2 passant par O, telle que : $s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta_2}$; c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccccccc} & s_{\Delta} & & s_{\Delta'} & & s_{\Delta_1} & \\ A & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F \\ B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \\ & & & \underset{s_{\Delta_2}}{\longrightarrow} & & & \end{array}$$

donc $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}})$

III-4.2 i $\Longrightarrow$ ii (cette démonstration peut être donnée en exercice après l'étude de l'effet d'une réflexion sur les angles au chapitre VII)

Considérons trois droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 passant par le point O, et les transformés successifs A_1, A_2, A_3 et M_1, M_2, M_3 de deux points A et M, selon le schéma :



$$\begin{array}{ccccccc} & s_{\Delta_1} & & s_{\Delta_2} & & s_{\Delta_3} & \\ A & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 \\ M & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 \end{array}$$

Notons Δ la médiatrice du segment $[AA_3]$

et montrons que : $s_{\Delta} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$.

La réflexion s_{Δ_1} permet d'écrire l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_1}})$.

La réflexion s_{Δ_2} permet d'écrire l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2}})$.

La réflexion s_{Δ_3} permet d'écrire l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_3},\overrightarrow{OA_3}})$.

Il en résulte l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_3},\overrightarrow{OA_3}})$, qui signifie que les segments $[AA_3]$ et $[MM_3]$ ont la même médiatrice Δ. Le point générique M a pour image M_3 dans la réflexion s_{Δ}. cqfd

III-5 Démonstration de la propriété ii dans le cadre de la théorie des isométries planes

III-5.1 On suppose établie la propriété suivante:

Si une isométrie a deux points invariants P *et* Q, *elle est :*

soit l'identité (alors tous les points du plan sont invariants)

soit la réflexion de droite (PQ) *(alors seuls les points de la droite* (PQ) *sont invariants)*

III-5.2 <u>Lemme</u> *La composée de deux réflexions ne peut être une réflexion.*

Soient Δ et Δ' deux droites ; supposons que $f = s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$ soit une réflexion de droite Δ'' ; considérons un point C de Δ n'appartenant pas à la droite Δ' et notons D son image par $s_{\Delta'}$. Alors f(C) = D et Δ'' est la médiatrice du segment [CD], c'est-à-dire Δ'.

On obtient : $s_{\Delta'} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$; soit encore, par composition avec $s_{\Delta'}$: $Id = s_{\Delta}$

Cela est impossible donc $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ n'est pas une réflexion.

III-5.3 Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites concourantes en O.

Cherchons la nature de l'application $f = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$.

Soit A un point de Δ_1 distinct de O , et B = f(A) ;

on désignera par Δ_4 la médiatrice du segment [AB] si A et B sont distincts, la droite (OA), (c'est à dire Δ_1) si A = B .

$$(s_{\Delta_4} \circ f)(A) = A \Longrightarrow \text{ou} \begin{cases} s_{\Delta_4} \circ f = Id \\ s_{\Delta_4} \circ f = s_{\Delta_1} \quad (\text{car } A \in \Delta_1 \text{ et } O \in \Delta_1) \end{cases}$$

Si $s_{\Delta_4} \circ f = s_{\Delta_1}$, alors $s_{\Delta_4} \circ s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = s_{\Delta_1}$

par composition avec s_{Δ_1} : $\quad s_{\Delta_4} \circ s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} = \mathrm{Id}$

et par composition avec s_{Δ_4} : $\quad s_{\Delta_4} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2}$

Cela est imposible d'après le lemme, donc $s_{\Delta_4} \circ f$ est l'identité et f, égale à s_{Δ_4}, est une réflexion.

III-5.4 <u>Remarques</u>

i si $\Delta_4 = \Delta_1$, alors $s_{\Delta_1} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta}$ entraine $s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta} = \mathrm{Id}$ et $\Delta_2 = \Delta_3$.

ii Comme une réflexion est une involution (égale à sa réciproque), on obtient en prime le résultat intéressant suivant :

Si trois droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes on a l'égalité :

$$s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3} = s_{\Delta_3} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$$

Exercices

Exercice III.1

Dans le triangle isocèle ABC *(*AB = AC*), on a l'égalité :* $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = \widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}$

Indication : Δ étant la perpendiculaire en C à (AB), on note A' et B' les transformés de A et B par s_Δ ; on montre que : $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{BA}$, et, en appliquant les définitions, que : $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = \widehat{(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})} = \widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}$.

Exercice III.2

1) On considère un parallélogramme ABCD*, dont on trace la diagonale* (AC)*.*
Nommer toutes les demi-droites dessinées (par ex. [AB), [BA)...*).*
Combien y a-t-il de couples de demi-droites ?

2) Etant donné un point O on place les points P, Q... tels que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ *(vecteur directeur de* [AB)*,* $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{BA}$*...Combien y a-t-il de tels vecteurs ?*
Combien de couples de vecteurs de la forme $(\overrightarrow{O.},\overrightarrow{O.})$ *obtient-on ?*

3) On trace un cercle C de centre O qui coupe les demi-droites [OP) *en p,* [OQ) *en q... En revenant à la définition, chercher les égalités d'angles de couples. Combien y a-t-il d'angles de couples différents ?*

4) En utilisant un rapporteur circulaire, mesurer chacun des angles de couples :
d'une part en faisant pivoter la demi-droite origine autour de O
d'autre part en laissant le rapporteur fixe et en calculant les valeurs g(q)-g(p)*... Que peut-on dire ?*

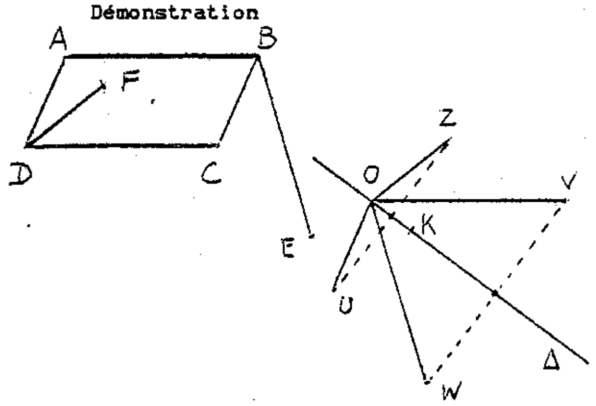
N.B. Il est possible d'utiliser les expressions "angle nul", "angle plat", "angles opposés" qui seront introduites au chapitre VI.

reponses respectives :81, 38, 14.

Exercice III.3

Un parallélogramme ABCD et un angle α *étant donné, on construit le points E et F tels que* $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})} = \widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF})} = \hat{\alpha}$, BE = BA *et* DF = DA. *Montrer que les points A, F, E sont alignés.*

Démonstration



L'origine O du plan étant choisie, on construit les points U, V, W, Z tels que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{BC}$ (= $\overrightarrow{AD}$), $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{AB}$ (= $\overrightarrow{DC}$), $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{DF}$. on a :

OU = OZ, OV = OW et $\widehat{(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OW})} = \hat{\alpha} = \widehat{(\overrightarrow{OV},\overrightarrow{OZ})}$.

Donc les deux paires de demi-droites [OU), [OZ) et [OV), [OW) ont le même axe de symétrie Δ. Par suite, la réflexion s_Δ transforme U en Z et V en W.

Il en résulte que, les points K et L définis par $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OZ}$
et $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW}$,
appartiennent à la droite Δ. (car O et les milieux des segments [UZ] et [VW] appartiennent à Δ). Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont colinéaires.

Mais comme : $\quad \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$
et $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont bien colinéaires, et les points A, F, E sont alignés.

voir aussi VIII.2 et XIII.2.

CHAPITRE IV

ROTATION DE CENTRE O

IV-1 Définition

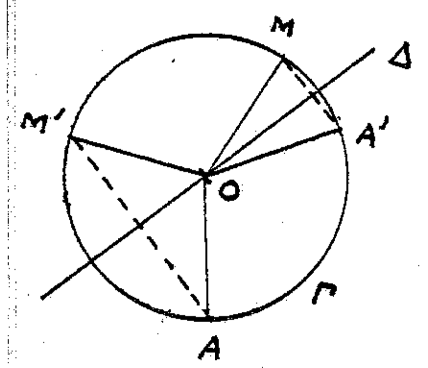
Etant donné deux demi-droites [OP) *et* [OQ),*on appelle rotation de centre* O *et d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$ *la transformation qui, à tout point* M *distinct de* O, *associe le point* M' *tel que* :

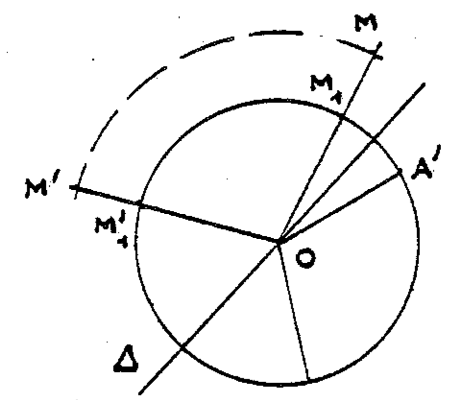
$$\begin{cases} OM' = OM \\ \text{et} \\ (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}}) \end{cases}$$

et qui au point O *associe le point* O.

On notera $\mathcal{R}$ *cette rotation (ou* $\mathcal{R}_{O;(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})}$ *, ou* $\mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}}$, *en notant* $\hat{\alpha}$ *l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})$*)*.

IV-2 Construction de l'image d'un point :





On trace un cercle Γ de centre O et de rayon arbitraire ; ce cercle coupe les demi-droites [OP) et [OQ) respectivement en A et A'.

a) Si M est un point du cercle Γ, on retrouve la construction fondamentale précédente

Les segments [M'A] et [A'M] ont la même médiatrice Δ ; en particulier l'image de A est le point A'.

b) Si M n'est pas un point du cercle Γ ($OM \neq OA$), on construit le point M_1 intersection de la demi-droite [OM] avec le cercle Γ, puis M'_1 image de M_1 par $\mathcal{R}$, et enfin M' intersection de la demi-droite $[OM'_1)$ avec le cercle Γ_1 de centre O passant par M.

<u>Remarque</u> : Dans la construction précédente on peut remplacer A et A' par n'importe quel point différent de O et son image. En particulier pour construire M' on aurait pu utiliser les intersections A_1 et A'_1 du cercle de centre O passant par M avec les demi-droites [OP) et [OQ).

IV-3 Propriétés immédiates de la rotation $\mathcal{R}_{O;\,(\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}})}$

IV-3.1 *O est un point fixe.*

IV-3.2 *Le point O est le seul point fixe, si et seulement si les demi droites [OP) et [OQ) sont distinctes ; dans le cas contraire l'application est l'identité.*

En effet, s'il existe un autre point fixe C, on a : $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$. Cela veut dire que les demi-droites [OA) et [OB) sont toutes deux images de la demi-droite [OC) par la même réflexion, et par suite A = B. En substituant dans ce raisonnement A à C, M (point générique) à A et M' (image de M) à B, on obtient M = M' ; tout point du plan est un point fixe, et l'application est l'identité.

La contraposée de la propriété que l'on vient de démontrer s'énonce :

S'il existe un point ne coïncidant pas avec son image alors il en est de même pour tout point différent de O. (avec les élèves il convient de faire ici un raisonnement par l'absurde)

IV-3.3 *La rotation $\mathcal{R}'$, de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$, est telle que :*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}.$$

En effet, si M est le point générique, posons : $M' = \mathcal{R}(M)$ et $M_1 = \mathcal{R}'(M')$

Nous avons donc : $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.

La première égalité est équivalente à $(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$. L'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}})$ entraine : $[OM) = [OM_1)$ et, puisque $OM = OM_1$: $M = M_1$.

On a bien : $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R} = \mathrm{Id}$. (démonstration analogue pour $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}' = \mathrm{id}$).

Il en résulte que $\mathcal{R}$ est une bijection, dont $\mathcal{R}'$ est la réciproque.

IV-3.4 <u>Conséquences</u>

Par la rotation $\mathcal{R}$, l'image d'un cercle Γ de centre O est ce cercle Γ, et l'image d'une demi-droite [OA) est la demi-droite [OA') (A' désignant l'image de A).

Montrons d'abord que $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \Gamma$ et que $\mathcal{R}([OA)) \subset [OA')$.

Soit M un point du plan et M' son image par $\mathcal{R}$. En effet :

si $M \in \Gamma$, on a $OM' = OM$ donc $M' \in \Gamma$

si $M \in [OA)$, la construction de M' vue en IV-2 montre que $M' \in \Gamma$.

Montrons maintenant que $\Gamma \subset \mathcal{R}(\Gamma)$ et que $[OA') \subset \mathcal{R}([OA))$.

On peut appliquer le résultat précédent à $\mathcal{R}'$; on obtient :

$\mathcal{R}'(\Gamma) \subset \Gamma$ et $\mathcal{R}'([OA')) \subset [OA)$, et, en appliquant $\mathcal{R}$ à nouveau, on obtient :

$\Gamma = \mathcal{R}(\mathcal{R}'(\Gamma)) \subset \mathcal{R}(\Gamma)$ et $[OA') = \mathcal{R}(\mathcal{R}'([OA'))) \subset \mathcal{R}([OA))$.

La conjonction des inclusions nous donne le résultat annoncé.

Exercices

Exercice IV.1

Soit OAB un triangle isocèle (OA = OB) ; on pose : $\hat{\omega} = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$. $\hat{\alpha}$ *étant donné, on note $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$, qui transforme A en A' et B en B'. Montrer que OA'B' est isocèle et que* $(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}) = \hat{\omega}$.

Les exercices de construction qui suivent illustrent l'idée que les relations angulaires sont plus importantes que le centre de la rotation (c'est le concept de rotation vectorielle qui est sous-jacent).

Exercice IV.2

1) On considère trois points non alignés ABC et on note $\hat{\alpha}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
Le point O et le point M étant donnés, le transformé M' de M par la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$ peut être obtenu de la manière suivante :
On construit le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OM}$, *puis le point P', transformé de P par la rotation de centre A et d'angle $\hat{\alpha}$; alors M' est tel que* $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AP'}$.
2) Montrer que cette construction peut se traduire par la relation :

$$\mathcal{R}(O;\hat{\alpha}) = t_{\overrightarrow{AO}} \circ \mathcal{R}(A;\hat{\alpha}) \circ t_{\overrightarrow{OA}}$$

exercice IV.3

On considère un triangle isocèle ABC (AB = AC) ; on note D le transformé de A par la rotation de centre B et d'angle $\hat{\alpha}$, égal à $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ *et E le transformé de A dans la rotation de centre C et d'angle $\hat{\alpha}$.*
1) Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.
2) Montrer que E est sur la droite (BD).
Indication : on peut utiliser l'exercice précédent en introduisant le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA}$, le point Q image de P par $\mathcal{R}$ (rotation de centre A et d'angle $\hat{\alpha}$) et le point R image de Q par $\mathcal{R}$.

exercice IV.4

On considère un triangle ABC rectangle en C et son cercle circonscrit Γ, de centre O. A tout point M de Γ on associe le point P, transformé de O par la rotation de centre M et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
1) Construire plusieurs points P, dont le point obtenu pour M = A
2) Montrer que les points obtenus sont sur un cercle de centre O.
3) On note D le milieu de l'arc BC de Γ qui ne contient pas A. Montrer que le rayon du cercle précédent est BD. **Indication : prendre M en B.**
4) Reprendre cet exercice en supposant que le triangle ABC est équilatéral.

CHAPITRE V

ADDITION DES ANGLES

V-1 Composée de deux rotations

V-1.1 <u>Théorème</u>

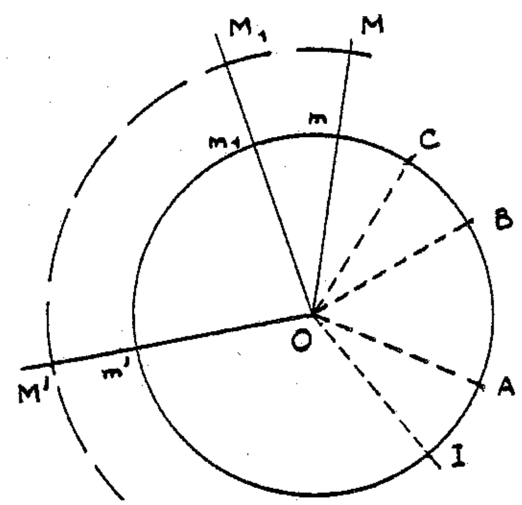
La composée de deux rotations de centre O est une rotation de centre O. L'ordre dans lequel on compose ces rotations est indifférent.

Choisissons arbitrairement un point I du plan distinct de O.

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux rotations de centre O. On appelle A l'image de I par $\mathcal{R}_1$ et B l'image de I par $\mathcal{R}_2$. Cela permet de nommer les angles de ces rotations : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$. Notons C l'image de B par $\mathcal{R}_1$.

Nous allons montrer que $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ est la rotation de centre O, et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$.

Il suffit de montrer que, si M est un point quelconque du plan, en posant : $M \xrightarrow{\mathcal{R}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{R}_2} M'$, on a : $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$; car, par ailleurs, on a : $OM = OM_1 = OM'$.



Notons Γ le cercle de centre O contenant les points I, A, B et C.

Notons m, m_1, m' les intersections respectives des demi-droites [OM), [OM_1) et [OM') avec le cercle Γ.

d'une part : $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \\ \text{et} \\ (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) = (\widehat{\overrightarrow{Om},\overrightarrow{Om_1}}) \end{cases}$

entraine : $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{om},\overrightarrow{om_1}})$

et, par suite, les segments [Bm_1] et [Cm] ont la même médiatrice ;

d'autre part : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{Om_1},\overrightarrow{Om'}})$

et, par suite, les segments [Bm_1] et [Im'] ont la même médiatrice.

En définitive, les segments [Cm] et [Im'] ont la même médiatrice, c'est-à-dire : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{Om},\overrightarrow{Om'}})$

De la relation : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$, on tire : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$. Donc C est aussi l'image de A par $\mathcal{R}_2$. C'est le même point C qui servirait pour l'étude de $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$. Il en résulte que $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ est aussi la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$, c'est-à-dire : $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

V-1.2 <u>Manipulation</u>

A l'aide du rapporteur circulaire, on relève g(I), g(A), g(B) et g(C), puis on compare g(C) - g(I) avec $\left[g(A) - g(I)\right] + \left[g(B) - g(I)\right]$ et on constate que ces quantités sont égales ou diffèrent de 360 , selon la position du rapporteur.

V-2 Somme de deux angles

V-2.1 <u>Définition</u>

Avec les notations précédentes, on dit que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$ *est la somme des angles* $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$; *ce qu'on écrit* :

$$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}).$$

V-2.2 <u>Deuxième définition</u>

Rappelons que, dans la construction précédente, le point C est l'image de I par la réflexion s_Δ, où Δ est la médiatrice du segment [AB] si A et B sont distincts, et la droite (OA) si A et B sont confondus. D'où la nouvelle formulation :

L'égalité $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ *signifie que la demi-droite* [OC) *est symétrique de la demi-droite* [OI) *par rapport à l'axe de symétrie des demi-droites* [OA) et [OB).

Formellement, cette phrase est analogue à celle définissant la somme de deux vecteurs :

L'égalité $\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}$ *signifie que le point* C *est symétrique du point* Ω *par rapport au milieu du bipoint* (A,B).

V-2.3 <u>Relation de Chasles pour les angles</u>

Puisque $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ nous pouvons substituer $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$ à $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ dans l'égalité $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$,

et nous obtenons l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})$.

C'est la *relation de Chasles*.

D'une manière générale, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent des vecteurs, la relation de Chasles s'écrit : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{w}})$.

V-2.4 <u>Changement de notations</u>

Pour simplifier les notations, nous écrirons $\hat{\alpha}$ au lieu de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$, $\hat{\beta}$ au lieu de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}})$ et $\hat{\gamma}$ au lieu de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$.

Avec ces conventions, le théorème V-1.1 s'énonce :

La composée de la rotation $\mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}}$ *de centre* O *et d'angle* $\hat{\alpha}$, *avec la rotation* $\mathcal{R}_{O;\hat{\beta}}$ *de centre* O *et d'angle* $\hat{\beta}$, *est la rotation* $\mathcal{R}_{O;\hat{\gamma}}$ *de centre* O *et d'angle* $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

Exercices

Exercice V.1

1) *Considérons un cercle de centre* O ; *une droite* Δ *coupe ce cercle en* A *et* B *et une droite* Δ', *parallèle à* Δ, *le coupe en* C *et* D. *Montrer que pour tout point* I *du cercle, on a la relation :*

$$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD}})$$

Indication :construire les points E et F tels que :

$$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}}) \qquad (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OF}})$$

et montrer que E et F sont confondus, en utilisant la médiatrice commune de [AB] et [CD].

2) *Réciproquement, montrer que si les cinq points* I, A, B, C, D *du cercle de centre* O *vérifient la relation précédente les droites* Δ *et* Δ' *sont parallèles.*

Exercice V.2

On considère le cercle 𝒞 *de centre O et de rayon R, trois points* A, B, C, *de ce cercle et* Δ *un diamètre du cercle. On pose :* A' = s_Δ(A), B' = s_Δ(B) C' = s_Δ(C). *On trace par* A', B'*et* C' *respectivement, les parallèles à* (BC), (AC) *et* (AB).

Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point du cercle.

Indication : utiliser l'exercice précédent pour montrer que les trois droites passent par le point K du cercle vérifiant l'égalité :

$$(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OK}}) = (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC}})$$

Exercice V.3 (suite de l'exercice IV.1)

On note I *et* I' *les milieux de* [AB] *et de* [A'B']. *Montrer que* $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OI'}}) = \hat{\alpha}$

CHAPITRE VI

ANGLES PARTICULIERS

VI-1 Angle nul et angle plat

VI-1.1 <u>Angle nul</u>

Nous avons vu en IV-3.2 que l'identité du plan pouvait être considérée comme une rotation de centre O. On appelle *angle nul et on note* $\hat{o}$ *l'angle de la rotation identité*. Quels que soient le vecteur $\vec{u}$, le point P ou la demi-droite δ, on a :

$$\hat{o} = (\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = (\widehat{\delta,\delta}) = (\widehat{\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP}})$$

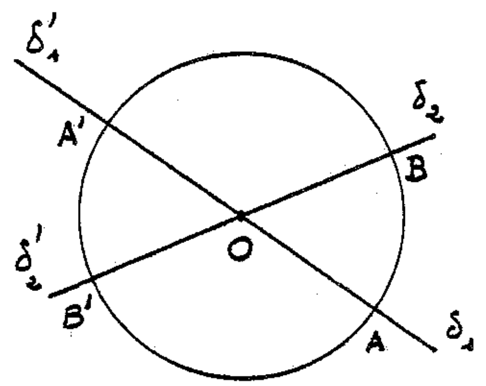
Quel que soit l'angle $\hat{\alpha}$, on a : $\mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ \mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}} = \mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}}$,

ce qui se traduit par : $\hat{\alpha} + \hat{o} = \hat{o} + \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$.

Autrement dit : $\hat{o}$ *est l'élément neutre de l'addition des angles.*

VI-1.2 <u>Angle plat</u>

On appelle angle plat, et on note $\hat{p}$, *l'angle d'une demi-droite avec la demi-droite opposée.*



Montrons que cette définition est cohérente ; c'est-à-dire que si δ_1 et δ_2 sont deux demi-droites d'origine O, δ'_1 et δ'_2 les demi-droites respectivement opposées, on a l'égalité :

$$(\widehat{\delta_1,\delta'_1}) = (\widehat{\delta_2,\delta'_2}).$$

En effet, notons respectivement A, B, A' et B' les intersections respectives de δ_1, δ_2, δ'_1 et δ'_2 avec un cercle Γ de centre O. Le quadrilatère A B A'B' est un rectangle et les segments [A'B] et [B'A] ont même médiatrice ; autrement dit : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}})$.

On peut encore dire que la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}})$ (l'angle plat) transforme B en B' et, plus généralement, tout point M en son symétrique par rapport à O.

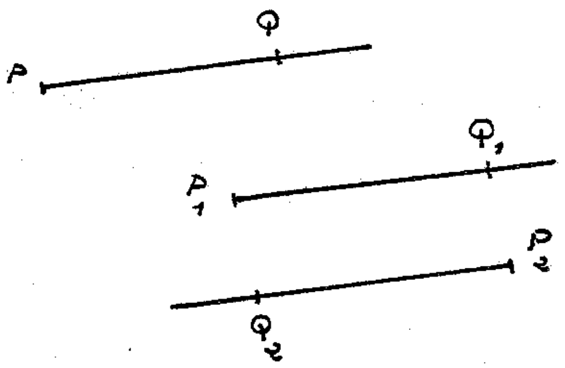
La rotation de centre O et d'angle plat est la symétrie par rapport à O.

Comme S_O est une involution ($S_O \circ S_O = \mathrm{Id}$), *l'angle plat vérifie l'égalité:*

$$\hat{p} + \hat{p} = \hat{o}$$

Enfin, *si* $\vec{u}$ *est un vecteur non nul, on a :* $\widehat{(\vec{u},-\vec{u})} = \hat{p}$

VI-1.3 <u>Première application des notions d'angle nul et d'angle plat</u>



Considérons trois demi-droites $[PQ)$, $[P_1Q_1)$ et $[P_2Q_2)$. Alors :

$[P_1Q_1)$ *est parallèle à* $[PQ)$ *et de même sens* se traduit par $\widehat{(\vec{PQ},\vec{P_1Q_1})} = \hat{o}$,

$[P_2Q_2)$ *est parallèle à* $[PQ)$ *et de sens opposé* se traduit par $\widehat{(\vec{PQ},\vec{P_2Q_2})} = \hat{p}$.

VI-2 Angles opposés

VI-2.1 <u>Définition</u>

Considérons un cercle Γ de centre O, et deux points I et A de Γ. Nous avons vu en IV-3.3 que les rotations de centre O et d'angles respectifs $\widehat{(\vec{OI},\vec{OA})}$ et $\widehat{(\vec{OA},\vec{OI})}$ sont réciproques l'une de l'autre.

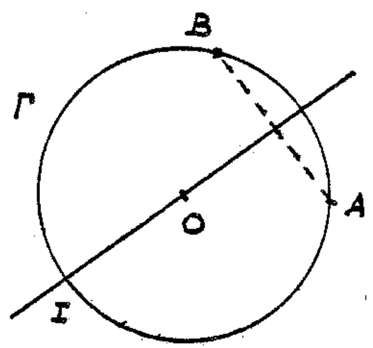
En notant $\hat{\alpha}$ l'angle $\widehat{(\vec{OI},\vec{OA})}$, et $\hat{\beta}$ l'angle $\widehat{(\vec{OA},\vec{OI})}$, cela permet d'écrire :

$\mathcal{R}_{O;\hat{\beta}} \circ \mathcal{R}_{O;\hat{\alpha}} = \mathrm{Id}$ ou encore : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{o}$

Si les angles $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ *vérifient la relation* $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{o}$, *on dit que ces angles sont opposés et on écrit :* $\hat{\alpha} = -\hat{\beta}$, ou $\hat{\beta} = -\hat{\alpha}$.

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs, on a :* $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\widehat{(\vec{v},\vec{u})}$

VI-2.2 <u>Interprétation géométrique de</u> $\hat{\beta} = \widehat{(\vec{OA},\vec{OI})}$



Construisons le point B, image de A par la réflexion $s_{(OI)}$.

Alors d'après la construction donnée en V-2.2 (dans laquelle ici deux demi-droites sont confondues avec l'axe de symétrie (OI)), on a :

$$\widehat{(\vec{OI},\vec{OA})} + \widehat{(\vec{OI},\vec{OB})} = \widehat{(\vec{OI},\vec{OI})} = \hat{o}.$$

C'est-à-dire : $\hat{\beta} = \widehat{(\vec{OI},\vec{OB})}$

VI-2.3 <u>Référence au rapporteur</u>

Cette notation est cohérente avec les mesures faites au rapporteur ; en effet, en centrant le rapporteur en O on constate que toute mesure de $\widehat{(\vec{OI},\vec{OA})}$, c.à d. g(A) - g(I), est congrue, modulo 360, à l'opposée de toute mesure de l'angle $\widehat{(\vec{OI},\vec{OB})}$, c.à d. g(B) - g(I).

VI-2.4 <u>Nouvelle formulation de la relation de Chasles angulaire</u>

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs, la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{w})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})}.$$

Mais puisque $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\widehat{(\vec{v},\vec{u})}$, on obtient : $\widehat{(\vec{u},\vec{w})} = \widehat{(\vec{v},\vec{w})} + (-\widehat{(\vec{v},\vec{u})})$,

ce qu'on écrit plus rapidement : $\widehat{(\vec{u},\vec{w})} = \widehat{(\vec{v},\vec{w})} - \widehat{(\vec{v},\vec{u})}$, définissant ainsi la différence de deux angles comme la somme du premier avec l'opposé du second. C'est la forme soustractive de la relation de Chasles.

VI-2.5 <u>exemples particuliers</u>

De la relation $\hat{o} + \hat{o} = \hat{o}$, on tire : $\hat{o} = -\hat{o}$.

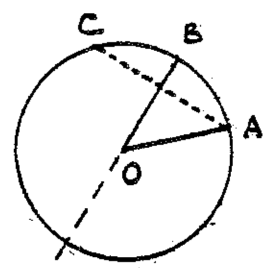
De la relation $\hat{p} + \hat{p} = \hat{o}$, on tire : $\hat{p} = -\hat{p}$.

Les angles nul et plat sont égaux à leur opposé.

VI-3 Double d'un angle

VI-3.1 <u>Définition</u> : *Etant donné un angle* $\hat{\alpha}$, *on appelle double de l'angle* $\hat{\alpha}$ *et on note* $2.\hat{\alpha}$ *la somme* $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}$.

VI-3.2 <u>Interprétation géométrique</u>



Si $\hat{\alpha}$ est l'angle de la rotation, de centre O, transformant A en B, alors $2.\hat{\alpha} = \widehat{(\vec{OA},\vec{OC})}$, le point C étant l'image de A par la réflexion de droite invariante (OB).

VI-3.3 <u>Exemples particuliers</u>

Le double de l'angle plat, comme le double de l'angle nul, est l'angle nul. $2.\hat{o} = 2.\hat{p} = \hat{o}$

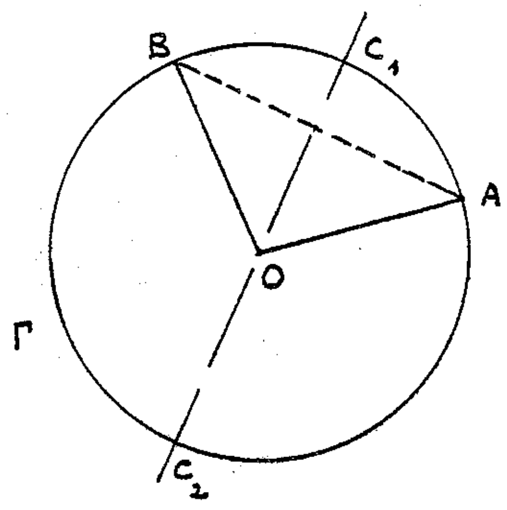
VI-3.4 Généralisation : On pourrait ensuite, par récurrence, définir $3.\widehat{\alpha}$, ... $n.\widehat{\alpha}$, n étant un naturel.

VI-4 Problème inverse

Etant donné un angle $\widehat{\beta}$, peut-on trouver un angle $\widehat{\alpha}$ tel que :

$$2.\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \quad ?$$

VI-4.1 Construction géométrique



Notons B l'image d'un point A par la rotation de centre O et d'angle $\widehat{\beta}$. Cherchons le point C du cercle Γ de centre O passant par A et B tel que $2.\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} = \widehat{\beta}$.
D'après la construction directe il faut et il suffit que le point C se trouve sur la médiatrice du segment [AB]. Or celle-ci coupe le cercle Γ en deux points C_1 et C_2 .

VI-4.2 Conclusions

Il existe deux angles : $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC_1})}$ *et* $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC_2})}$,

tels que : $2.\widehat{\alpha}_1 = 2.\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\beta}$.

Les angles $\widehat{\alpha}_1$ et $\widehat{\alpha}_2$ *ont une différence égale à l'angle plat.*

C'est à-dire : $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\alpha}_2 + \widehat{p}$ *et* $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{p}$

En particulier, les solutions de l'équation $2.\widehat{\alpha} = 0$ *sont* $\widehat{o}$ *et* $\widehat{p}$, (déjà vues plus haut).

VI-4.3 Remarque sur les mesures

Dans le problème direct, si $\widehat{\alpha}$ est un angle dont une mesure en degrés est k, une mesure de $2.\widehat{\alpha}$ est alors 2.k. On obtient quelque fois une mesure en degrés plus commode de $2.\widehat{\alpha}$ en ajoutant ou en retranchant 360 à 2.k. (Ainsi si $\widehat{\alpha}$ a pour mesure -175 une valeur commode de $2.\widehat{\alpha}$ sera 10).

Dans le problème inverse, si une mesure de $\widehat{\beta}$ est k, l'un des deux

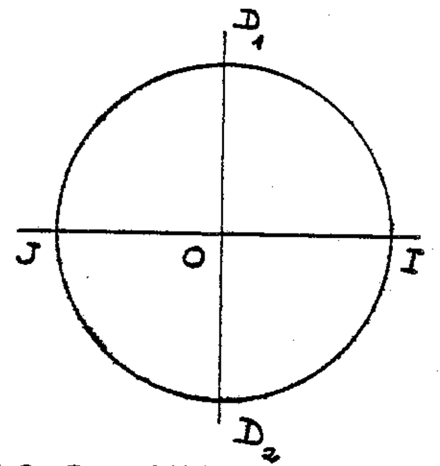
angles $\widehat{\alpha}_1$ ou $\widehat{\alpha}_2$ (mais on ne sait pas lequel) a pour mesure $\frac{k}{2}$, et l'autre a pour mesure $\frac{k}{2} + 180$.

VI-5 Angles droits

VI-5.1 Définition

Les angles droits sont les solutions de l'équation $2.\widehat{\alpha} = \widehat{p}$

VI-5.2 Construction géométrique



Considérons le cercle Γ de centre O, de rayon R, et un de ses diamètres [IJ].
L'angle $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})}$ est plat. Les points D de Γ, tels que l'angle $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD})}$ soit droit, sont sur la médiatrice de [IJ], c'est-à-dire sur le diamètre perpendiculaire à [IJ].

VI-5.3 Propriétés

Les droites (IJ) et (D_1D_2) sont perpendiculaires, ce qui justifie le vocable *angle droit* .

Les deux solutions D_1 et D_2 sont symétriques par rapport à (IJ), ce qui veut dire que :

les deux angles $\widehat{d}_1 = \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD_1})}$ *et* $\widehat{d}_2 = \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD_2})}$ *sont opposés.*

On a : $\widehat{p} + \widehat{d}_1 = \widehat{p} + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_1 - \widehat{d}_1 = \widehat{p} + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_1 + \widehat{d}_2 = \widehat{p} + \widehat{p} + \widehat{d}_2 = \widehat{d}_2$.

De même : $\widehat{p} + \widehat{d}_2 = \widehat{d}_1$, ou encore : $\widehat{p} - \widehat{d}_1 = \widehat{d}_1$ et $\widehat{p} - \widehat{d}_2 = \widehat{d}_2$.

Ces relations permettent de montrer que sur la figure on a:

$$\widehat{d}_1 = \widehat{(\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OJ})} = \widehat{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OD_2})} = \widehat{(\overrightarrow{OD_2},\overrightarrow{OI})}$$

et de même : $$\widehat{d}_2 = \widehat{(\overrightarrow{OD_2},\overrightarrow{OJ})} = \widehat{(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OD_1})} = \widehat{(\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OI})} .$$

VI-5.4 Convention

On a l'habitude d'appeler *angle droit direct* et de noter $\widehat{d}$, celui des deux angles dont une mesure en degrés est $\frac{180}{2} = 90$; l'autre , de mesure 270 est noté $-\widehat{d}$.

Exercices

Exercice VI.1

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs. On pose :* $\hat{\alpha} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$. *Calculer, en fonction de* $\hat{\alpha}$ *les angles suivants :*
$\widehat{(\vec{v},\vec{u})}$, $\widehat{(-\vec{u},\vec{v})}$, $\widehat{(\vec{u},-\vec{v})}$, $\widehat{(\vec{v},-\vec{u})}$, $\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})}$, $\widehat{(-\vec{v},\vec{u})}$, $-\widehat{(-\vec{u},-\vec{v})}$, *etc.*

Exercice VI.2.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *sont donnés. Considérons les rotations* $\mathcal{R}_1(O,\widehat{(\vec{u},\vec{v})})$ et $\mathcal{R}_2(O,\widehat{(\vec{u},-\vec{v})})$. *Quel est l'angle de la rotation* $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$ *?.*

Par définition, cet angle est : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{u},-\vec{v})}$

or : $\widehat{(\vec{u},-\vec{v})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},-\vec{v})} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \hat{p}$

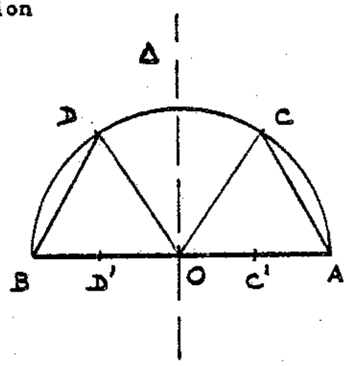
d'où : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{u},-\vec{v})} = 2\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \hat{p}$.

Exercice VI.3

On considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ *de diamètre* [AB], *de centre* O *et de rayon* R. *On construit les points* C *et* D *de* $\mathcal{C}$ *tels que :* AC = BD = R.

Montrer que $3.\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} = \hat{p}$

Solution



Soit Δ la médiatrice du segment [AB].
Soient C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB). Comme :

R = AC = OC = OA = OB = OD = BD

les triangles (OCA) et (ODB) sont équilatéraux.
C' et D' sont les milieux respectifs des segments [OA] et [OB].
Δ est un axe de symétrie de la figure

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{C'O} + \overrightarrow{OD'} = \frac{1}{2}.(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$

donc : CD = R = OC = OD et le triangle (COD) est équilatéral.

Par suite D est le réfléchi de A par rapport à (OC), ce qui se traduit en terme d'angle par : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} = \widehat{(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})}$

Δ étant axe de symétrie de la figure, on a : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} = -\widehat{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})} = \widehat{(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})}$

donc : $\hat{p} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} + \widehat{(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})} + \widehat{(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB})} = 3\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})}$

de plus : $8.\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})} = \hat{0}$ $\quad 6.\widehat{(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})} = \hat{0}$ $\quad 6.\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})} = \hat{0}$ $\quad 6.\widehat{(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA})} = \hat{0}$

L'une des mesures possibles de chacun des angles est donc 0, 60, 120, 180, 240 ou 300 degrés.

Exercice VI.4

Etant donné un triangle quelconque, ABC, *calculer :*

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$$

Remarque : le premier angle $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ étant écrit, les autres sont obtenus en effectuant une permutation circulaire des lettres A B C.

on sait que : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(-\vec{u},-\vec{v})}$ donc $\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(-\overrightarrow{CA},-\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})}$

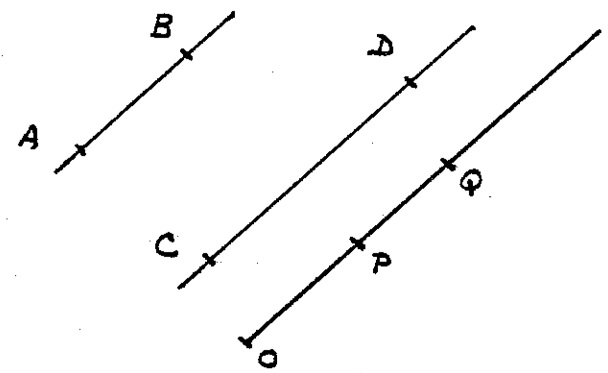
d'où $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})} = \hat{p}$

CHAPITRE VII

Utilisation des angles pour exprimer le parallélisme de droites ou l'alignement de points

VII-1 Parallèlisme de droites

VII-1.1 Soient A, B, C, D quatre points du plan tels que les vecteurs (alors non nuls) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires, c'est à dire tels que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.



Il existe un réel k non nul tel que :

$$\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$$

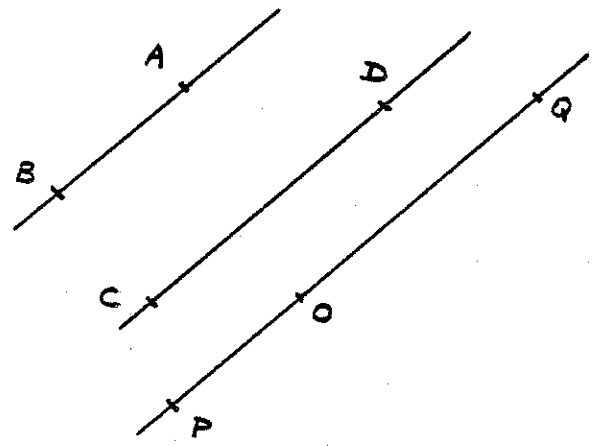
O étant l'origine du plan, construisons les points P et Q représentant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CD}$

Les demi-droites [OP) et [OQ) ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Si k > 0 , les deux demi-droites [OP) et [OQ) sont confondues (première figure), et donc :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \hat{o}$$

Cette égalité caractérise le fait que *les demi-droites* [AB) *et* [CD) *sont parallèles et de même sens.*



Si k < 0 , les deux demi-droites [OP) et [OQ) sont opposées (deuxième figure), et donc :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \hat{p}$$

Cette égalité caractérise le fait que *les demi-droites* [AB) *et* [CD) *sont parallèles et de sens opposés.*

Dans tous les cas, on pourra écrire : $\quad 2.\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \hat{o}$

VII-1.2 <u>Théorème</u>

Pour que les deux droites (AB) *et* (CD) *soient parallèles, il faut et il suffit que l'on ait:* $2.\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \hat{o}$.

VII-2 Alignement de trois points

Trois points A, B et C étant donnés, dire qu'ils sont alignés revient à dire, par exemple, que les droites (AB) et (BC) sont parallèles ; d'où le corollaire :

Pour que trois points A, B et C *soient alignés, il faut et il suffit que :* $2.\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})} = \hat{o}$ ou $2.\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \hat{o}$ ou ...

VII-3 Egalité vectorielle

D'après ce qui a été dit en VII-1, l'égalité vectorielle peut se traduire en termes de longueurs et d'angles, de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} AB = CD \\ \text{et} \\ \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \hat{o} \end{cases}$$

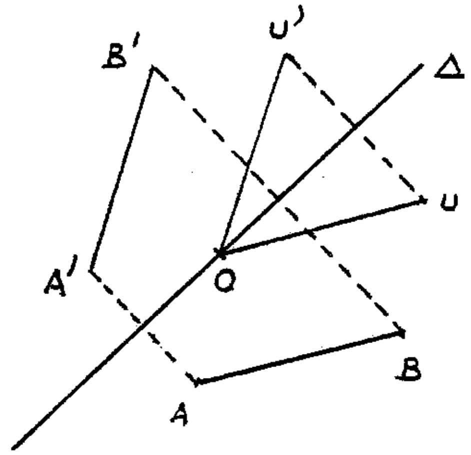
On retrouve ainsi une description de l'égalité de vecteurs, chère aux physiciens, par le module, la direction et le sens.

CHAPITRE VIII

Relations angulaires associées à des réflexions

VIII-1 Caractérisation des points symétriques par rapport à une droite

VIII-1.1 Soit Δ une droite passant par O. Soient A et B deux points du plan, A' et B' leurs images par la réflexion s_Δ de droite Δ.



Choisissons l'origine du plan au point O sur la droite Δ.

Construisons les points U et U' représentant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ($\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{A'B'}$).

Les points U et U' sont symétriques par rapport à Δ, et si I est un point quelconque de Δ on a : $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OU})} = -\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OU'})}$,

c'est-à-dire : $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})} = -\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{A'B'})}$.

Réciproquement, si O et I sont deux points d'une droite Δ et U et U' deux points du plan tels que $\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OU})} = -\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OU'})} \\ \text{et} \\ OU = OU' \end{cases}$ alors les points U et U' sont symétriques par rapport à la droite Δ (puisque les demi-droites [OU) et [OU') le sont.

La propriété que nous venons de démontrer sera utilisée par la suite sous la forme suivante :

VIII-1.2 <u>Théorème</u>

Si A *et* A' *sont deux points symétriques par rapport à une droite* Δ *de vecteur directeur* $\vec{v}$, *pour que deux points* B *et* B' *soient symétriques par rapport à* Δ, *il faut et il suffit que l'on ait :* $\begin{cases} \widehat{(\vec{v},\overrightarrow{AB})} = -\widehat{(\vec{v},\overrightarrow{A'B'})} \\ \text{et} \\ AB = A'B' \end{cases}$

VIII-2 Effet d'une réflexion sur les angles de couples

Soient A, B, C *trois points du plan et* A', B', C' *leurs transformés par la réflexion de droite* Δ, *alors on a :*

$$\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = -\widehat{(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})}$$

en effet, si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ on a :

$$(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{AB}}) = -(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A'B'}}) \quad \text{et} \quad (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A'C'}})$$

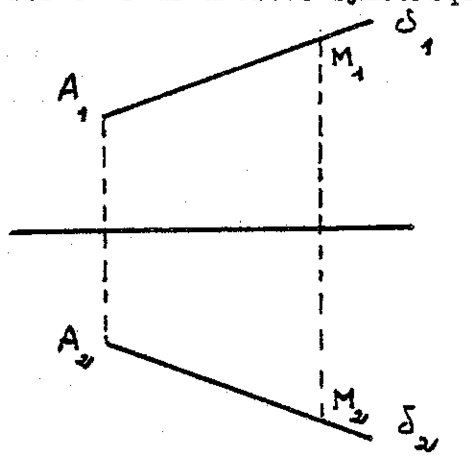
donc $$(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{AC}}) - (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A'B'}}) - (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A'C'}})$$

c'est-à-dire : $$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}})$$

ou encore : $$(\widehat{\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B'}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$$

On exprime cette propriété en disant qu'*une réflexion change les angles en leurs opposés.*

VIII-3 Demi-droites symétriques par rapport à une droite Δ



Soient deux demi-droites δ_1 d'origine A_1 et de vecteur directeur $\vec{u}_1$, et δ_2 d'origine A_2 et de vecteur directeur $\vec{u}_2$. On suppose que les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport à la droite Δ de vecteur directeur $\vec{v}$ (éventuellement $A_1 = A_2$ si A_1 est un point de Δ).

Dans ces conditions, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i δ_1 et δ_2 *sont symétriques par rapport à Δ.*

ii $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2})$.

En effet, puisque pour tout point M_1 de δ_1, par définition, on a $(\widehat{\overrightarrow{A_1M_1},\vec{u}_1}) = \hat{o}$, il vient : $$(\widehat{\overrightarrow{A_1M_1},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}})$$

et de même, pour tout point M_2 de δ_2 on a : $$(\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A_2M_2}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2}) .$$

Choisissons deux points B_1 et B_2 de δ_1 et δ_2 tels que $A_1B_1 = A_2B_2$. Alors,

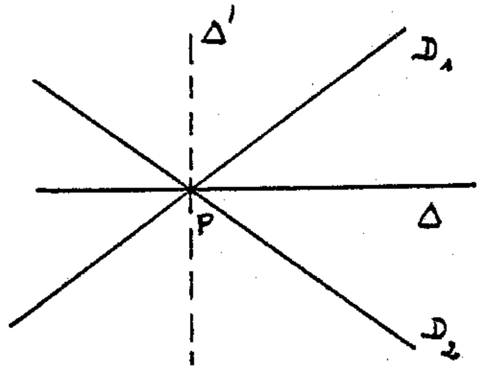
dans ces conditions : δ_1 *est symétrique de* δ_2 *par rapport à* Δ

est équivalent à : B_1 *est symétrique de* B_2 *par rapport à* Δ

ce qui, d'après ce qui précède, est équivalent à : $$(\widehat{\overrightarrow{A_1M_1},\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\overrightarrow{A_2M_2}})$$

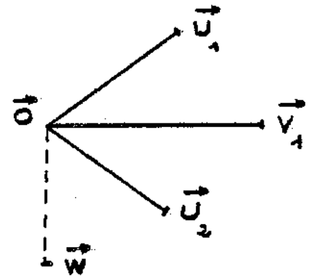
ou encore à : $$(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2})$$

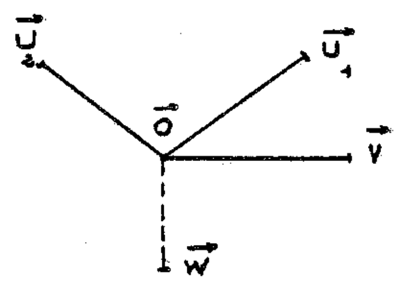
VIII-4 Droites symétriques par rapport à une droite Δ



Soient deux droites D_1 et D_2 de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, symétriques par rapport à la droite Δ de vecteur directeur $\vec{v}$, et coupant celle-ci en un point P; cette situation se traduit par l'égalité angulaire : $$2.(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = 2.(\widehat{\vec{v},\vec{u}_2}).$$

Cette égalité rassemble les deux relations : $$(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2})$$
et $$(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2}) + \hat{p}$$





Dans le cas où $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2})$ les demi-droites d'origine A portées par D_1 et D_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont symétriques par rapport à Δ.

Dans le cas où $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},\vec{u}_2}) + \hat{p}$, c'est à dire où $(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) = (\widehat{\vec{v},-\vec{u}_2})$, ce sont les demi-droites d'origine P portées par D_1 et D_2 de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $-\vec{u}_2$ qui sont symétriques par rapport à Δ.

De plus, si on appelle Δ' la perpendiculaire à Δ en P, de vecteur directeur $\vec{w}$, comme on a $2.(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \hat{p} = 2.(\widehat{\vec{w},\vec{v}})$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2.(\widehat{\vec{u}_1,\vec{w}}) &= 2.(\widehat{\vec{u}_1,\vec{v}}) + 2.(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \\ &= 2.(\widehat{\vec{v},\vec{u}_2}) + 2.(\widehat{\vec{w},\vec{v}}) \\ &= 2.(\widehat{\vec{w},\vec{u}_2}) . \end{aligned}$$

Cela montre que les droites D_1 et D_2 sont également symétriques par rapport à Δ'.

Exercices

En général, à partir de la relation $2.\hat{\alpha} = 2.\hat{\beta}$ on ne peut pas savoir laquelle des deux relations $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{p}$ est vraie. Cependant l'exercice suivant nous montre un exemple dans lequel il est possible de décider.

Exercice VIII.1

Soient A, B, C *trois points non alignés. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

i le triangle ABC est isocèle (AB = AC)

ii $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}})$

iii $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}})$

Solution

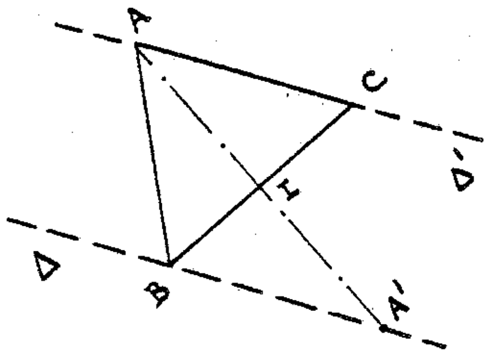
i ⇒ ii Si le triangle ABC est isocèle (AB = AC), alors pour la réflexion par rapport à la médiatrice D du segment [BC], A est invariant, et B a pour image C. On a donc :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}) = -(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC}}) \text{ ; d'où : } (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}})$$

ii ⇒ iii évident

iii ⇒ i : Considérons le triangle ABC et supposons vraie la relation :

$$2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}})$$



Traçons la droite Δ passant par B, de vecteur directeur $\overrightarrow{CA}$.

D'après VIII.4, la relation précédente montre que la droite Δ est symétrique de la droite (AB) par rapport à la droite (BC).

Le réfléchi A' de A par rapport à la droite (BC) est un point de (D).

La droite (AA') coupe donc la droite (BC) en I milieu du segment [AA'].

Considérons la symétrie S_I de centre I. On a :

$A' \xrightarrow{S_I} A$

$\Delta \longrightarrow \Delta'$ mais comme $\Delta' // \Delta$ et $A \in \Delta'$ on a : $\Delta' = (AB)$

$(BC) \longrightarrow (BC)$

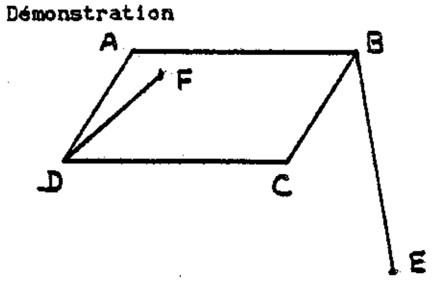
$B \longrightarrow B'$ mais comme $B = \Delta \cap (BC)$, on a : $B' = \Delta' \cap (BC) = C$

I est donc le milieu du segment [BC] et (AA') est la médiatrice du segment [BC]. Le triangle ABC est donc bien isocèle (AB = AC).

Exercice VIII.2

Un parallélogramme ABCD et un angle $\hat{\alpha}$ *étant donnés on construit les points E et F tels que* $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}}) = \hat{\alpha}$, BE = BA *et* DF = DA. *Montrer que les points A, F, E sont alignés.*

Démonstration



Notons $\hat{\omega}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$, par symétrie par rapport au point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD, on aura également : $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) = \hat{\omega}$. En outre on obtient : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}) = \hat{p} + \hat{\omega}$

Dans le triangle isocèle ABE, on peut

écrire : $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) = \hat{p} + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}) = \hat{p} + \hat{\omega} + \hat{\alpha}$

De même dans le triangle isocèle ADF on a :
$$2.(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}) = \hat{p} + (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}})$$
$$= \hat{p} + (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}})$$
$$= \hat{p} - \hat{\omega} + \hat{\alpha}$$

d'où :
$$2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}) = 2.\hat{p} + 2.\hat{\omega} + \hat{p} - \hat{\omega} + \hat{\alpha}$$
$$= \hat{p} + \hat{\omega} + \hat{\alpha} = 2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})$$

d'où : $2.(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}}) = \hat{0}$ et les points A, E, F sont bien alignés.

Remarque : pour une autre solution, plus simple, voir III.2

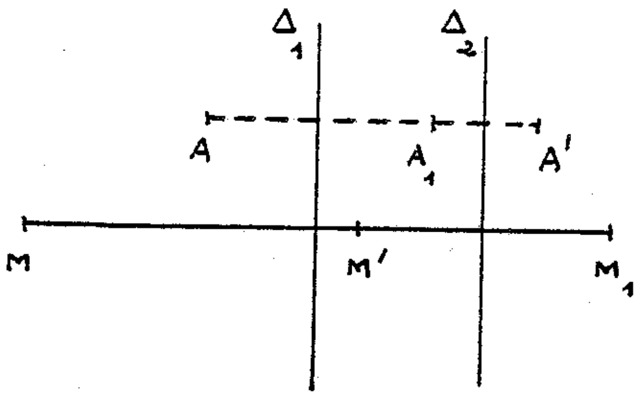
CHAPITRE IX

COMPOSÉE DE DEUX RÉFLEXIONS PAR RAPPORT À DEUX DROITES PARALLÈLES.

IX-1 Question

Etant donné deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2, *quelle est la nature de la transformation* $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$?

IX-1.1



Comme Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, elles ont le même ensemble de vecteurs directeurs ; on notera $\vec{v}$ l'un d'entre eux. Soit A un point fixé arbitrairement, et M un point quelconque du plan. On considère leurs tranformés successifs, selon le schéma suivant:

$$A \xrightarrow{s_{\Delta_1}} A_1 \xrightarrow{s_{\Delta_2}} A'$$
$$M \longrightarrow M_1 \longrightarrow M'$$

D'après le théorème VIII-1.2, on a :

$$s_{\Delta_1}(M) = M_1 \iff \begin{cases} (\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) = -(\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{A_1M_1}}) \\ \text{et} \\ AM = AM_1 \end{cases}$$

et

$$s_{\Delta_2}(M_1) = M' \iff \begin{cases} (\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{A_1M_1}}) = -(\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{A'M'}}) \\ \text{et} \\ A_1M_1 = A'M' \end{cases}$$

il en résulte que $\begin{cases} (\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) = (\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{A'M'}}) \\ \text{et} \\ AM = A'M' \end{cases}$

De l'égalité $(\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{AM}}) = (\vec{v}, \widehat{\overrightarrow{A'M'}})$, on tire l'égalité $(\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{A'M'}}) = (\vec{v}, \widehat{\vec{v}})$ $(= \hat{o})$.

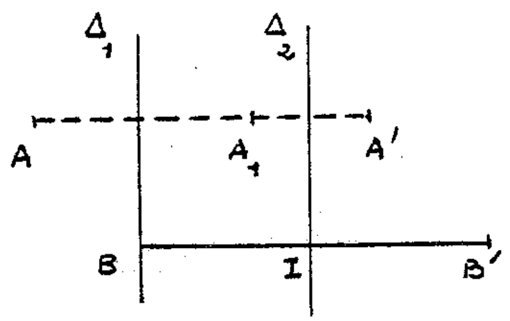
L'égalité VII-3 nous donne encore $\begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \widehat{\overrightarrow{A'M'}}) \\ \text{et} \\ AM = A'M' \end{cases} \iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

Comme cette dernière égalité est équivalente à : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$, la transformation $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ vérifie :

quel que soit le point M du plan $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

La composée $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ *est donc la translation de vecteur* $\overrightarrow{AA'}$.

IX-1.2 <u>Remarque</u> :



Si B est un point de Δ_1, $s_{\Delta_1}(B) = B$ et $s_{\Delta_2}(B)$ est le point B' qui vérifie à la fois $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ et Δ_2 est la médiatrice du segment [BB']. Notons I le milieu du segmant [BB']; le vecteur de la translation est le double du vecteur $\overrightarrow{BI}$.

On peut ainsi énoncer le théorème :

IX-2 **Théorème :**

Si Δ_1 *et* Δ_2 *sont deux droites parallèles,* B *un point de* Δ_1 *et* I *le projeté orthogonal de* B *sur* Δ_2*, la composée* $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ *est la translation de vecteur* $2.\overrightarrow{BI}$.

IX-3 **Réciproque**

On démontre que *si* Δ *est une droite donnée,* A *et* B *deux points tels que la droite* (AB) *soit orthogonale à* Δ, *alors :*

$$t_{\overrightarrow{AB}} \circ s_\Delta = s_{\Delta'} \qquad \text{où} \qquad \Delta' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(\Delta)$$

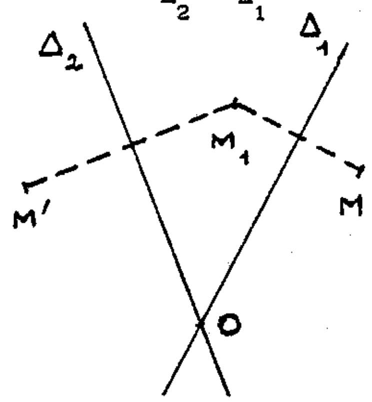
$$s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{AB}} = s_{\Delta''} \qquad \text{où} \qquad \Delta'' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(\Delta) \; .$$

CHAPITRE X

Composée de deux réflexions par rapport à deux droites sécantes

X-1 Question

Etant donné deux droites Δ_1 et Δ_2 *sécantes en* O, *quelle est la nature de la transformation* $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$?



Soient $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de Δ_1 et Δ_2. Soit M un point quelconque du plan, différent de O. On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & s_{\Delta_1} & & s_{\Delta_2} & \\ O & \longrightarrow & O & \longrightarrow & O \\ M & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M' \end{array}$$

D'après le théorème VIII-1.2 on a :

$$s_{\Delta_1}(M) = M_1 \iff \begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{v_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v_1}}) \\ \text{et} \\ OM = OM_1 \end{cases}$$

et

$$s_{\Delta_2}(M_1) = M' \iff \begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v_2}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \vec{v_2}}) \\ \text{et} \\ OM_1 = OM' \end{cases}$$

En utilisant les relations :

$$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{v_1}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v_1}}) = (\widehat{\vec{v_1}, \overrightarrow{OM_1}}) \quad \text{et} \quad (\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \vec{v_2}}) = -(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \vec{v_2}}) = (\widehat{\vec{v_2}, \overrightarrow{OM'}})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) &= \underbrace{(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{v_1}}) + (\widehat{\vec{v_1}, \overrightarrow{OM_1}})} + \underbrace{(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v_2}}) + (\widehat{\vec{v_2}, \overrightarrow{OM'}})} \\ &= \underbrace{2.(\widehat{\vec{v_1}, \overrightarrow{OM_1}}) \quad + \quad 2.(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v_2}})} \\ &= 2.(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}}) \; . \end{aligned}$$

De plus, comme $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$, on a : $OM = OM'$.

La conjonction de ces deux propriétés montre que la composée étudiée est une rotation ; plus précisément, on peut énoncer le théorème suivant.

X-2 Théorème

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux droites sécantes en O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, alors: $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = \mathcal{R}_{(O,\, 2.(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}}))}$ *(rotation de centre O et d'angle $2.(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$).*

X-2.1 <u>Remarques</u>

i. Conformément à ce qui a été dit au chapitre VII, l'angle de cette rotation ne dépend pas des vecteurs directeurs choisis mais seulement des droites elles-mêmes.

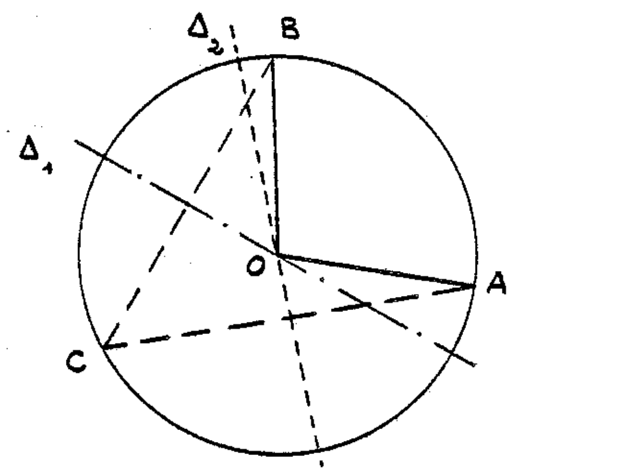
ii. Une vérification à l'aide du rapporteur est utile pour les élèves.

iii. Dans le cas particulier où l'angle $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$ est nul ou plat, il n'y a plus qu'une seule droite et la composée est l'identité.

X-3 Réciproque

X-3.1 *Etant donné une rotation $\mathcal{R}$ de centre O et une droite Δ passant par O, il existe une unique droite Δ' et une unique droite Δ'' telles que :*

$\mathcal{R} = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ *et* $\mathcal{R} = s_\Delta \circ s_{\Delta''}$; *ces deux droites passant par O.*



Soit A un point quelconque du plan différent de O ; la rotation $\mathcal{R}$ donnée transforme A en un point noté B. Δ étant la droite passant par O, notons C le transformé de A par la réflexion s_Δ et Δ_1 la médiatrice du segment [BC] (ou bien la droite (OB) si C = B) ; les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O, si bien que Δ_1 passe par O ;

Δ_1 est une solution, car $s_{\Delta_1} \circ s_\Delta(A) = s_{\Delta_1}(C) = B$; or, d'après X-1, la transformation $s_{\Delta_1} \circ s_\Delta$ est une rotation de centre O ; comme elle transforme A en B, c'est la rotation $\mathcal{R}$ donnée.

La solution est unique ; en effet, si Δ_2 est aussi solution, la relation : $s_{\Delta_2} \circ s_\Delta = s_{\Delta_1} \circ s_\Delta$ donne, par composition avec s_Δ , la relation : $s_{\Delta_2} = s_{\Delta_1}$ et par suite $\Delta_2 = \Delta_1$.

De façon analogue on obtiendra Δ'' comme la médiatrice du segment [AD], D étant l'image de B par la réflexion s_Δ ; (on peut aussi appliquer la première partie du théorème à la rotation $\mathcal{R}^{-1}$, réciproque de R).

X-3.2 <u>Remarques</u>

i. Si Δ = (OA) $\quad\Delta'$ est la médiatrice du segment [AB]

Si Δ est la médiatrice du segment [AB] $\quad\Delta'$ = (OB)

ii. On a la relation : $\mathcal{R}^{-1} = (s_{\Delta'} \circ s_\Delta)^{-1} = s_\Delta \circ s_{\Delta'}$.

iii. Notons $\hat{\alpha}$ l'angle de la rotation R. Si $\vec{i}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{j}$ un vecteur directeur de Δ', on a d'après X-2 : $2.(\widehat{\vec{i},\vec{j}}) = \hat{\alpha}$. En d'autres termes, si on appelle $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ les deux solutions de l'équation angulaire $2.\hat{\beta} = \hat{\alpha}$, chacune des deux rotations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de centre O et d'angle respectif $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ transforme Δ en Δ', et on a : $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$

$$\left.\begin{array}{l} A' = \mathcal{R}(A) \\ B' = \mathcal{R}(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \hat{\alpha}, \qquad \text{donc} \qquad (\widehat{\delta,\delta'}) = \hat{\alpha}.$$

X-4 Exercice : Composée de deux rotations de centres différents*

X-4.1 <u>Question</u> *Soient $\mathcal{R}_1$ une rotation de centre O_1 et d'angle $\hat{\alpha}_1$ et $\mathcal{R}_2$ une rotation de centre O_2 et d'angle $\hat{\alpha}_2$. On pose $f = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$. Quelle est la nature de la transformation f ?*

X-4.2 On remarque que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ étant deux isométries, (voir XI-1), f est une isométrie.

On sait que toute rotation est la composée de deux réflexions par rapport à deux droites passant par le point fixe, l'une étant choisie arbitrairement. Il existe donc une droite Δ_1 de vecteur directeur $\vec{u_1}$ telle que $\mathcal{R}_1 = s_{(O_1O_2)} \circ s_{\Delta_1}$ et une droite Δ_2 de vecteur directeur $\vec{u_2}$ telle que $\mathcal{R}_2 = s_{\Delta_2} \circ s_{(O_1O_2)}$. On a alors : $2.(\widehat{\vec{u_1},\overrightarrow{O_1O_2}}) = \hat{\alpha}_1$ et $2.(\widehat{\overrightarrow{O_1O_2},\vec{u_2}}) = \hat{\alpha}_2$.

On peut donc écrire : $f = s_{\Delta_2} \circ s_{(O_1O_2)} \circ s_{(O_1O_2)} \circ s_{\Delta_1}$ et,

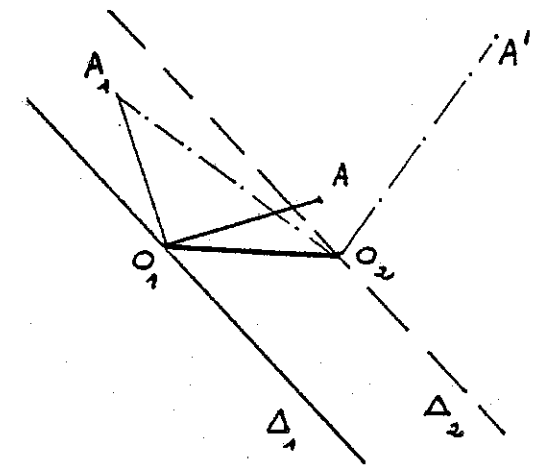
comme : $s_{(O_1O_2)} \circ s_{(O_1O_2)} = Id$, on a : $f = s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$.

Cela permet d'affirmer que f est, soit une translation, soit une rotation, selon la valeur de l'angle $2.(\widehat{\vec{u_1},\vec{u_2}})$.

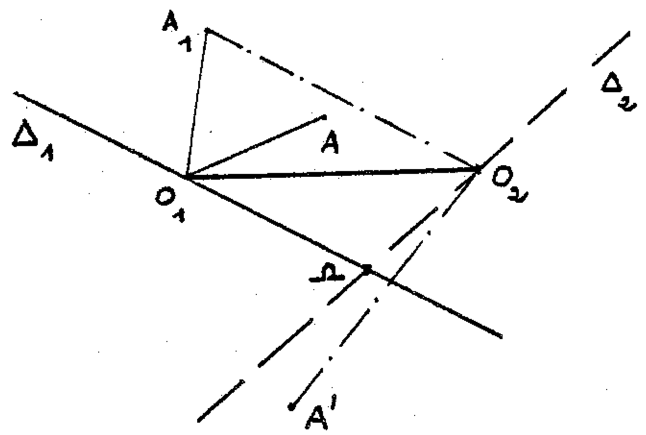
Or on a : $\quad 2.(\widehat{\vec{u_1},\vec{u_2}}) = 2.(\widehat{\vec{u_1},\overrightarrow{O_1O_2}}) + 2.(\widehat{\overrightarrow{O_1O_2},\vec{u_2}}) = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$

*ce résultat ne fait pas partie des connaissances du programme de première

X-4.3 D'où les <u>résultats</u> :



Si $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \hat{o}$, alors Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, et f est une translation.



Si $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 \neq \hat{o}$, alors Δ_1 et Δ_2 sont sécantes ; notons Ω leur point d'intersection ; *f* est la rotation de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2$.

CHAPITRE XI

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ROTATIONS

XI-1 Théorème

XI-1.1 *Une rotation est une isométrie.*

En effet, toute réflexion est une isométrie, et toute rotation peut être considérée comme la composée de deux réflexions.

XI-1.2 Illustrons cette propriété par des figures.

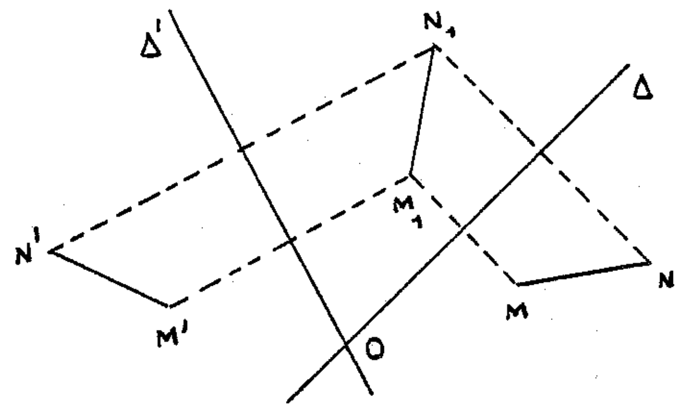


figure ponctuelle

$$\mathcal{R} = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{s_\Delta} & & \xrightarrow{s_{\Delta'}} & \\ M & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M' \\ N & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N' \\ [MN] & \longrightarrow & [M_1N_1] & \longrightarrow & [M'N'] \\ MN & = & M_1N_1 & = & M'N' \end{array}$$

(la réflexion est une isométrie)

Le point O est l'origine du plan.

U est un représentant du vecteur $\overrightarrow{MN}$ ($\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{MN}$; on note $\vec{u}$ ce vecteur).

U_1, réfléchi de U par rapport à δ (δ // Δ) est un représentant de $\overrightarrow{M_1N_1}$ ($\overrightarrow{OU_1} = \overrightarrow{M_1N_1}$; on note $\vec{u}_1$ ce vecteur).

U', réfléchi de U_1 par rapport à δ' (δ' // Δ') est un représentant de $\overrightarrow{M'N'}$ ($\overrightarrow{OU'} = \overrightarrow{M'N'}$; on note $\vec{u}'$ ce vecteur).

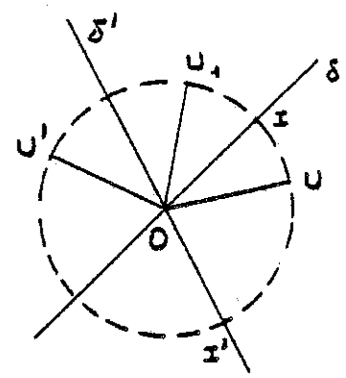


Figure vectorielle associée

$\vec{\imath}$ *et* $\vec{\imath}'$ sont des vecteurs directeurs de Δ et Δ'.

Les points U, U_1 et U' sont sur un même cercle de centre O et on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = 2.(\widehat{\vec{\imath}, \vec{\imath}'})$$

XI-2 Effet d'une rotation sur les angles

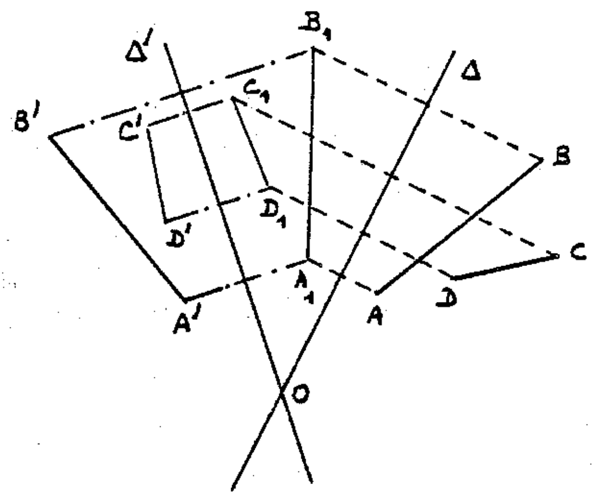
XI-2.1 <u>Théorème</u>

La rotation conserve les angles.

Cet énoncé elliptique veut dire que *si* A, B, C et D *sont quatre points* *du plan, d'images respectives* A', B', C' *et* D' *par la rotation* $\mathcal{R}$, *alors :*

$$(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$$

En effet, si l'on considère la rotation $\mathcal{R}$ comme composée de deux réflexions s_Δ et $s_{\Delta'}$, par rapport à deux droites Δ et Δ' sécantes en O, en utilisant le schéma suivant :



$$\begin{array}{ccccc} & s_\Delta & & s_{\Delta'} & \\ A & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A' \\ B & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B' \\ C & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C' \\ D & \longrightarrow & D_1 & \longrightarrow & D' \end{array}$$

et en sachant que chaque réflexion change un angle en son opposé, on peut écrire :

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{C_1D_1}}) = -\,(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$$

et $$(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{C_1D_1}})$$

d'où : $$(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})\ .$$

XI-2.2 <u>Corollaire</u>

Si deux points A *et* B *ont pour images* A' *et* B' *par la rotation* $\mathcal{R}$ *de centre* O *et d'angle* $\hat{\alpha}$, *alors* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \hat{\alpha}$

En effet, d'après XI-2.1, on a l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{A'B'}})$, laquelle est équivalente à l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}})$

XI-3 Image d'une demi-droite, d'un segment, d'une droite*

XI-3.1 *L'image dans la rotation* $\mathcal{R}_{(O,\hat{\alpha})}$ *d'une demi-droite* δ *d'origine* A *est la demi-droite* δ' *d'origine* A' *image de* A *par* $\mathcal{R}$, *telle que* $(\widehat{\delta,\delta'}) = \hat{\alpha}$.

En effet ; soit B un point (différent de A) de la demi-droite δ d'origine A. On a : $\delta = \left\{ M \;/\; \overrightarrow{AM} = \lambda\ \overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\}$

*Ceci constitue une généralisation de la propriété vue en IV-3.4.

Comme pour $\lambda > 0$, $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}$ est équivalent à $\left\{ \begin{array}{l} AM = \lambda\ AB \\ \text{et } (\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}) = \hat{o} \end{array} \right.$

en posant A' = $\mathcal{R}$(A) , B' = $\mathcal{R}$(B) et M' = $\mathcal{R}$(M), on obtient :

A'M' = λ.A'B' (car $\mathcal{R}$ est une isométrie)

et $(\widehat{\overrightarrow{A'M'},\overrightarrow{A'B'}}) = \hat{o}$ (car $\mathcal{R}$ conserve les angles)

La conjonction de ces deux égalités est équivalente à : $\overrightarrow{A'M'} = \lambda.\overrightarrow{A'B'}$

L'image de δ par $\mathcal{R}$ est donc l'ensemble : $\left\{ M' / \ \overrightarrow{A'M'} = \lambda.\overrightarrow{A'B'},\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\}$, c'est-à-dire la demi-droite δ'.

D'autre part, d'après XI-2.3,

$$\left. \begin{array}{l} A' = \mathcal{R}(A) \\ B' = \mathcal{R}(B) \end{array} \right\} \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \hat{\alpha}, \qquad \text{donc} \qquad (\widehat{\delta,\delta'}) = \hat{\alpha}.$$

XI-3.2 *L'image par la rotation* $\mathcal{R}$ *du segment* [AB] *est le segment* [A'B'] ; (A' *étant l'image de* A *et* B' *l'image de* B *par* $\mathcal{R}$).

Il suffit d'adapter la démonstration précédente en notant que :

$$[AB] = \left\{ M \;/\; \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{AB}\ ;\ \lambda \in [0,1] \right\}$$

XI-3.3 *L'image par la rotation* $\mathcal{R}$ *de la droite* (AB) *est la droite* (A'B') ; (A' *étant l'image de* A *et* B' *l'image de* B *par* $\mathcal{R}$).

C'est immédiat : il suffit de considérer la droite (AB) comme réunion des demi-droites [AB) et [BA).

XI-4 Effet d'une rotation sur les vecteurs

XI-4.1 <u>Théorème</u>

La rotation conserve les relations de colinéarité et les sommes de vecteurs.

En effet, une rotation transforme un parallélogramme en un parallélogramme (puisque c'est le cas pour les réflexions - ou - parce qu'en tant qu'isométrie elle conserve le milieu des segments). Il en résulte que :

- *Si les quatre points A,B,C,D sont tels que* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *leurs images* A',B',C',D' *vérifient :* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$
- *Si* $\overrightarrow{AB} = \lambda.\overrightarrow{CD}$, *alors* $\overrightarrow{A'B'} = \lambda.\overrightarrow{C'D'}$.

En effet supposons d'abord λ strictement positif et C différent de D.

Construisons le point E (de la droite (AB)) tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$. On est alors ramené à la situation étudiée en XI-3.1 et, de $\overrightarrow{AB} = \lambda.\overrightarrow{AE}$ on déduit : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda.\overrightarrow{A'E'}$, et, comme : $\overrightarrow{A'E'} = \overrightarrow{C'D'}$, on a bien le résultat cherché.

Si C = D ou si λ est nul, on A = B et, par suite, A'= B'; c'est encore vrai.

Si λ est négatif, on écrit $\overrightarrow{AB} = (-\lambda).\overrightarrow{DC}$ pour appliquer le résultat précédent.

* *Si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, *alors* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'D'}$.

En effet, ACBD est un parallélogramme, donc aussi A'C'B'D'.

XI-4.2 <u>Conservation des coordonnées</u>

Soit $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ *un repère du plan (orthonormé ou non) et* $\mathcal{R}$ *une rotation de centre* O. *Notons* I' *et* J' *les images de* I *et* J *par* $\mathcal{R}$, *et* M' *l'image d'un point* M *quelconque du plan. Alors les coordonnées* x *et* y *de* M *dans ce repère sont aussi les coordonnées de* M' *dans le repère* (O,I',J').

Il suffit de combiner les différents résultats de XI-4.1, en partant de la relation : $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OI} + y.\overrightarrow{OJ}$, pour obtenir la relation :

$$\overrightarrow{OM'} = x.\overrightarrow{OI'} + y.\overrightarrow{OJ'}.$$

Exercices

Exercice XI.1
Montrer que dans un carré ABCD *on a les égalités d'angle droit suivantes :*
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$. *Généraliser au rectangle.*

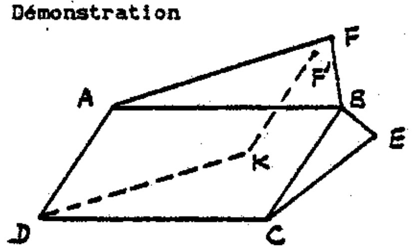
Exercice XI.2
Etudier les images d'un parallèlogramme, d'un carré, d'un cercle... par une rotation donnée.

Exercice XI.3
1) Etant donné deux carrés ABCD *et* A'B'C'D' *dont les arêtes ont la même longueur, montrer que pour qu'il existe une rotation* $\mathcal{R}$, *d'angle* $\hat{\alpha}$ *(non nul) et de centre* O, *qui transforme le premier en le second, il est nécessaire que :* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$ *et que :* $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \hat{\alpha}$
2) Si cette condition est vérifiée, construire le centre de la rotation $\mathcal{R}$.
Indication ; première méthode : montrer que les médiatrices de [AA'] et [BB'] sont sécantes (au point O)
deuxième méthode : en notant $\mathcal{R}'$ la rotation de centre A et d'angle $\hat{\alpha}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$, montrer que $\mathcal{R} = t \circ \mathcal{R}'$ et déterminer O en décomposant $\mathcal{R}'$ et t en réflexions.
3) Que se passe-t-il si $\hat{\alpha}$ *est nul ?*

Exercice XI.4
On considère deux droites D *et* Δ *se coupant en un point* Ω *situé hors de la feuille de dessin. sur* D *on place deux points* A *et* B *tels que leurs symétriques* A' *et* B' *par rapport à* Δ *soient sur la feuille.*
1) montrer que la rotation $\mathcal{R}$ *de centre* Ω *qui transforme* $[\Omega A)$ *en* $[\Omega B)$ *transforme* A *en* A' *et* B *en* B'.
2) Construire le transformé par $\mathcal{R}$ *d'un point* C *sans sortir des limites de la feuille*
a) par composition de réflexions (deux manières possibles)
b) en utilisant une rotation auxiliaire de centre O *(à choisir en fonction de* C*) et d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.
3) Définir et construire la partie de la feuille dont les points ont une image par $\mathcal{R}$ *également sur la feuille ; montrer que cette image est alors constructible par le procédé b).*
4) Déterminer l'ensemble des points dont les images par $\mathcal{R}$ *sont constructibles par chacun des procédés de a)*
Remarque : il est préférable pour cet exercice de procurer aux élèves une feuille reprographiée sur laquelle sont dessinés les éléments de départ.

Exercice XI.5
On se donne un angle $\hat{\alpha}$ *et un parallélogramme* ABCD.
On construit le point E *image de* B *dans la rotation de centre* C *d'angle* $-\hat{\alpha}$ *et le point* F *image de* B *dans la rotation de centre* A *d'angle* $\hat{\alpha}$. *Montrer que le point* F *est l'image de* E *par la rotation de centre* D *et d'angle* $\hat{\alpha}$

Démonstration



Comme : $\mathcal{R}(C,-\hat{\alpha})$: B $\longrightarrow$ E, on a :

CB = CE et $(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}}) = \hat{\alpha}$.

De même : $\mathcal{R}(A,\hat{\alpha})$: B $\longrightarrow$ F donne :

AB = AF et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}) = \hat{\alpha}$.

Considérons la rotation $\mathcal{R}(D,\hat{\alpha})$ de centre D et d'angle $\hat{\alpha}$. On a :

$\mathcal{R}(D,\hat{\alpha})$

C $\longrightarrow$ K
E $\longrightarrow$ F'

ce qui donne :

DK = DC et $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DK}}) = \hat{\alpha}$

KF'= CE et $(\widehat{\overrightarrow{KF'},\overrightarrow{CE}}) = -\hat{\alpha}$

et, par suite : $(\widehat{\overrightarrow{DK},\overrightarrow{AF}}) = (\widehat{\overrightarrow{DK},\overrightarrow{DC}}) + (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}})$
$= -\hat{\alpha} + \hat{0} + \hat{\alpha} = \hat{0}$

Comme, d'autre part, DK = DC = AB = AF, on a donc $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AF}$ et AFKD est un parallélogramme ; donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{CB}$

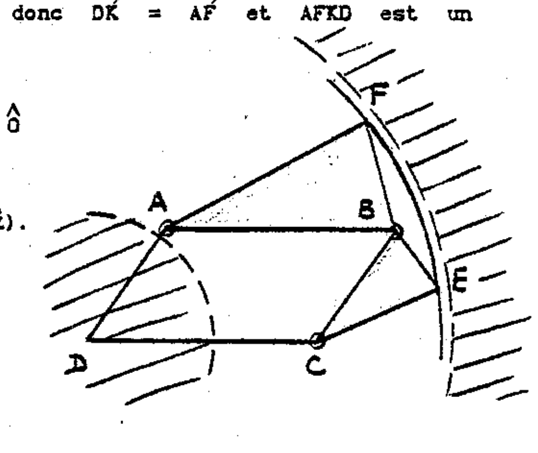
Par ailleurs : $(\widehat{\overrightarrow{KF'},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{KF'},\overrightarrow{CE}}) + (\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}})$
$= -\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{0}$

et KF' = CE = CB donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{KF'}$.

Il en résulte que : $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{KF'}$, et donc que : F = F'

F est bien le transformé de E dans la rotation $\mathcal{R}(D,\hat{\alpha})$.

<u>Application</u> : Le "rotateur" d'angle $\hat{\alpha}$
Le parallèlogramme ABCD est articulé.
D est fixé. Les triangles CEB et ABF sont indéformables.
L'appareil est un rotateur d'angle $\hat{\alpha}$ autour de D, qui fonctionne pour tous les points d'une couronne de centre D.



CHAPITRE XII

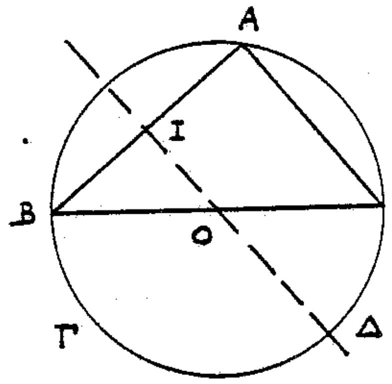
THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT

XII-1 Théorème

Si A, B, C sont trois points d'un cercle Γ de centre O, on a la relation angulaire : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

XII-1.1 <u>Cas particulier</u>

Le triangle ABC est un triangle rectangle en A ; [BC] est donc un diamètre du cercle Γ.



Soit Δ la médiatrice du segment [AB] et $\vec{u}$ un de ses vecteurs directeurs.

Comme $s_\Delta(A) = B$, on a :

$\widehat{(\overrightarrow{OA},\vec{u})} = \widehat{(\vec{u},\overrightarrow{OB})}$, et par suite :

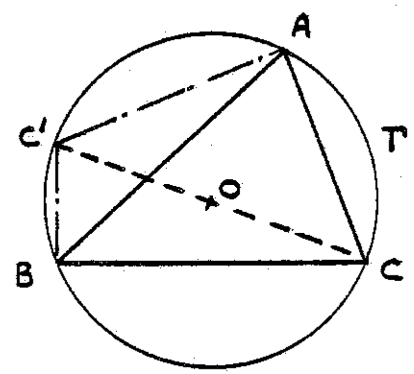
$\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})} + \widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}$

Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires, de même que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CB}$;

donc : $2.\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$, et finalement : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$

XII-1.2 <u>Cas général</u>

Le triangle ABC est quelconque. Notons C' le point diamètralement opposé à C. Le triangle ACC' est rectangle en A et le triangle BCC' est rectangle en B.



On a : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'})} + \widehat{(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB})}$ or

d'après XII-1.1 : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC'})}$

et $\widehat{(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB})}$

d'où : $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC'})} + 2.\widehat{(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$.

XII-2 Réciproque

On considère le cercle Γ de centre O, A et B deux points de ce cercle . Tout point C du plan, différent de A et de B, qui vérifie :

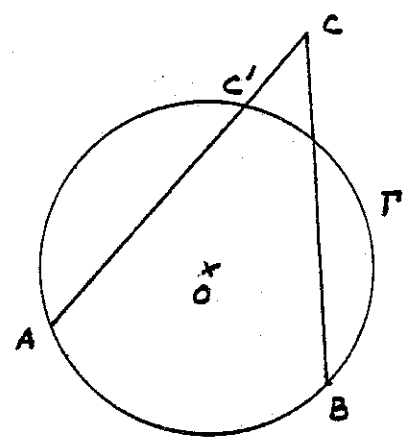
$2\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}$ *appartient au cercle Γ.*

Remarquons d'abord que les deux droites (CA) et (CB) ne peuvent pas être toutes les deux tangentes au cercle Γ, car alors les deux triangles OAC et OBC seraient rectangles respectivement en A et B, les quatre points A,B,C,O seraient cocycliques sur le cercle de diamètre [OC], et on aurait (d'après le Théorème direct, I étant le milieu du segment [OC]) :

$2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})$ et $2.(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})$, d'où : $2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

et finalement : $2.(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \hat{o}$, contraire au fait que $A \neq B$.

Nous supposerons par exemple que la droite (CA) n'est pas tangente au cercle Γ.



Soit alors C' le point d'intersection du cercle Γ et de la droite (AC); les points C', A, B étant sur le cercle Γ, le théorème direct nous donne :

$2.(\widehat{\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{C'B}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, et par suite :

$2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{C'B}})$

en ajoutant $2(\widehat{\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{CA}})$ aux deux membres,

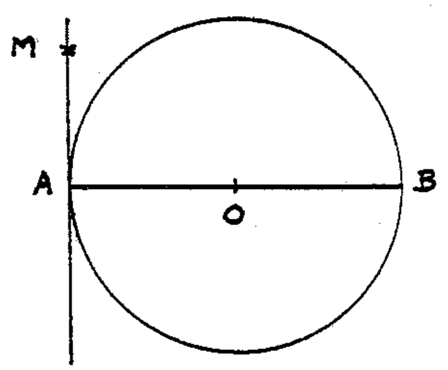
on obtient $2(\widehat{\overrightarrow{C'A},\overrightarrow{CA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{CB}})$

Ce dernier angle est nul car A, C, C' alignés. Donc B, C, C' sont également alignés et comme B n'appartient pas à la droite (AC'), c'est donc que C et C' sont confondus.

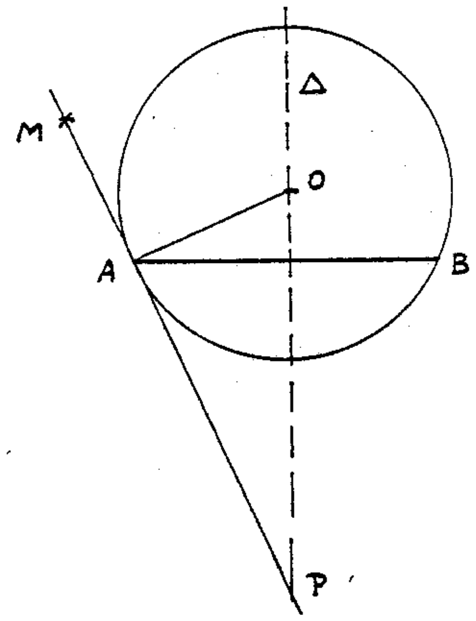
XII-3 Angle inscrit et tangente au cercle

XII-3.1 Théorème

Soient A *et* B *deux points d'un cercle* Γ *de centre* O, *et* M *un point quelconque de la tangente en* A *à* Γ, *alors* $2.(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.



Si A et B sont diamétralement opposés, on a $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \hat{p}$. D'autre part (AM) est perpendiculaire à (AB), donc $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})$ est égal à $\hat{d}$ ou $-\hat{d}$, et la relation est bien vérifiée.



Supposons maintenant A et B non diamétralement opposés. Appelons Δ la médiatrice du segment [AB]. La tangente en A au cercle Γ n'étant pas parallèle à Δ, notons P le point d'intersection de (AM) avec Δ.

Les droites (OA) et (AP) d'une part, (OP) et (AB) d'autre part sont perpendiculaires.

Donc : $2.(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{OA}}) = \hat{p} = 2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OP}})$;

ce qui donne : $2.(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}})$

Comme A et B sont symétriques par rapport à la droite (OP), on a :

$$2(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

et par suite, pour tout point M de (AP) : $2.(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

XII-3.2 Réciproque

Si un point N *du plan, différent de* A *vérifie :* $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, *alors la droite* (AN) *est tangente en* A *au cercle* Γ.

En effet, si M est un point de la tangente en A au cerle Γ, d'après XII-3.1 on a : $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, et par suite : $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}})$, d'où l'on tire : $2.(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}}) = \hat{o}$; les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires et la droite (AM) est égale à la droite (AN).

Exercice

Exercice XII

Soit Γ *un cercle de centre* O, *de rayon* R. *Soient* D_1 *et* D_2 *deux droites coupant respectivement le cercle* Γ *en* A *et* A', *et en* B *et* B'.
Montrer que :

$$2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}) \text{ (égal encore à } (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB}})\text{)}$$

Démonstration

Relation de Chasles : $2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}}) + 2.(\widehat{\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BB'}})$

colinéarité : $2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB'}}) + 2.(\widehat{\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}})$

angle inscrit : $2.(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

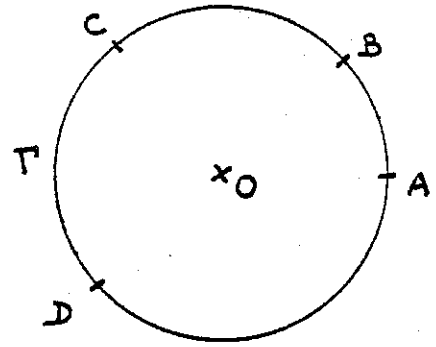
CHAPITRE XIII

CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE QUATRE POINTS SOIENT COCYCLIQUES.

XIII-1 **Théorème**

Pour que quatre points A, B, C, D *soient sur un même cercle, il est nécessaire et suffisant que l'angle* $2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ *soit égal à l'angle* $2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$, *et que cet angle ne soit pas nul.*

XIII-1.1 <u>Condition</u> <u>nécessaire</u>



En effet, si A, B, C, D sont quatre points d'un cercle Γ de centre O, on peut écrire :

A, B, C sur Γ $\Leftrightarrow 2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

A, B, D sur Γ $\Leftrightarrow 2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

d'où : $2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

XII-1.2 <u>Condition</u> <u>suffisante</u>

Soient A, B, C, D quatre points d'un plan vérifiant la relation :

$$2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}).$$

* Si cet angle est nul, alors A, C, B sont alignés et A, D, B aussi ; les quatre points A, B, C, D sont alignés.

* Si cet angle n'est pas nul, A, C, B ne sont pas alignés ; soit alors Γ le cercle circonscrit au triangle ABC, et O son centre.

D'après XII-1 on a : $2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$;

et comme : $2.(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$, on obtient : $2.(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$.

D'après XII-2, cela veut dire que D appartient au cercle Γ ; les quatre points A, B, C, D sont cocycliques.

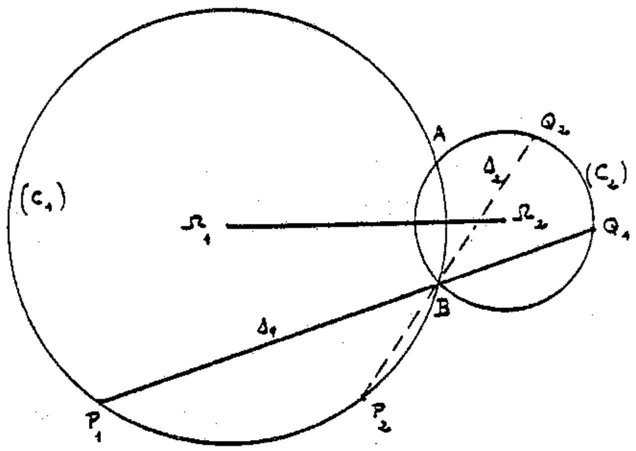
XIII-1.3 <u>En</u> <u>résumé</u>

Si A, B, C, D *sont quatre points d'un plan, pour que ces points soient alignés ou cocycliques, il faut et il suffit que :* $2.(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}})$.

Notons $\hat{\alpha}$ *cet angle ; si* $\hat{\alpha} = \hat{o}$ *les points sont alignés ; si* $\hat{\alpha} \neq \hat{o}$ *les points sont cocycliques.*

Exercices

Exercice XIII.1



1) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres Ω_1 et Ω_2, sécants en A et B. Soient deux droites Δ_1 et Δ_2 passant par B. Elles recoupent Γ_1 et Γ_2 respectivement en P_1 et Q_1, et en P_2 et Q_2. Montrer que l'on a :

$$\widehat{(\overrightarrow{\Omega_1P_1},\overrightarrow{\Omega_1P_2})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_1},\overrightarrow{\Omega_2Q_2})}$$

2) Montrer que si P et Q sont deux points appartenant respectivement à Γ_1 et Γ_2 tels que $\widehat{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{A\Omega_1},\overrightarrow{A\Omega_2})}$ alors la droite (PQ) passe par B.

Démonstration :

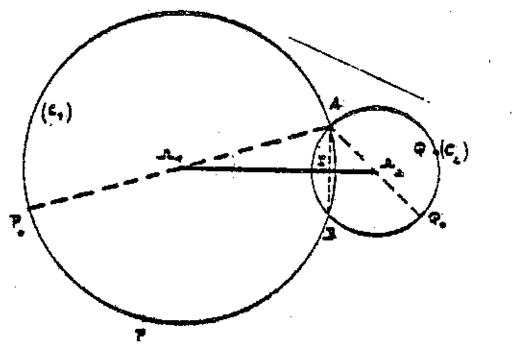
1) $\widehat{(\overrightarrow{\Omega_1P_1},\overrightarrow{\Omega_1P_2})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BP_1},\overrightarrow{BP_2})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BQ_1},\overrightarrow{BQ_2})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_1},\overrightarrow{\Omega_2Q_2})}$

Réciproquement, si P_1, B et Q_1 sont alignés ($P_1 \in C_1$ et $Q_1 \in C_2$), et si P et Q sont deux points des cercles Γ_1 et Γ_2 tels que :

$\widehat{(\overrightarrow{\Omega_1P_1},\overrightarrow{\Omega_1P})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_1},\overrightarrow{\Omega_2Q})}$, alors les points P, B et Q sont alignés.

2) Soient P et Q deux points de Γ_1 et Γ_2 tels que $\widehat{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{A\Omega_1},\overrightarrow{A\Omega_2})}$.

Appelons P_o et Q_o les points diamétralement opposés à A sur Γ_1 et Γ_2. Le milieu I du segment [AB] est un point du segment $[\Omega_1\Omega_2]$.



Appelons h l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; on a :

$$\begin{array}{ccc} & h & \\ A & \longrightarrow & A \\ \Omega_1 & \longrightarrow & P_o \\ \Omega_2 & \longrightarrow & Q_o \\ I & \longrightarrow & B \end{array}$$

Puisque $I \in [\Omega_1\Omega_2]$, alors $B \in [P_oQ_o]$

Soit $P \in \Gamma_1$. Appelons Q' le point d'intersection de la droite (PB) avec le cercle Γ_2. Q étant le point de C_2 tel que $\widehat{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{A\Omega_1},\overrightarrow{A\Omega_2})}$

on a aussi : $\widehat{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AP_o},\overrightarrow{AQ_o})}$

Il reste à démontrer que Q = Q'

$\widehat{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AP_o},\overrightarrow{AQ_o})} \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{AP_o},\overrightarrow{AP})} = \widehat{(\overrightarrow{AQ_o},\overrightarrow{AQ})} \Rightarrow 2.\widehat{(\overrightarrow{AP_o},\overrightarrow{AP})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{AQ_o},\overrightarrow{AQ})}$

d'où : $\widehat{(\overrightarrow{\Omega_1P_o},\overrightarrow{\Omega_1P})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_o},\overrightarrow{\Omega_2Q})}$; mais d'après 1), comme P, B, Q' sont alignés, aisi que P_o, B, Q_o, on a : $\widehat{(\overrightarrow{\Omega_1P_o},\overrightarrow{\Omega_1P})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_o},\overrightarrow{\Omega_2Q'})}$ et, par suite :

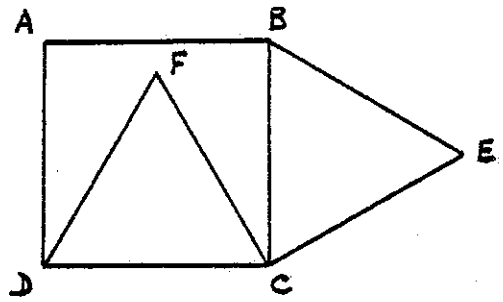
$\widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_o},\overrightarrow{\Omega_2Q})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega_2Q_o},\overrightarrow{\Omega_2Q'})}$, d'où Q = Q' et P, B, Q sont alignés.

Exercice XIII.2

Un carré ABCD étant donné, on construit le point E extérieur au carré tel que BCE soit un triangle équilatéral, et le point F intérieur au carré tel que DCF soit un triangle équilatéral.

Montrer que les points A, F, E sont alignés.

Démonstration :



Notons $\hat{d}$ l'angle droit $\widehat{(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})}$.

I étant le centre du carré, les rotations de centre I qui conservent le carré permettent d'écrire également :

$\hat{d} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})}$

La rotation $\mathcal{R}$ de centre C et d'angle $\hat{d}$ transforme D en B et le triangle CDF en le triangle CBE donc F en E : $\hat{d} = \widehat{(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CE})}$

Le triangle CEF étant isocèle, il admet un axe de symétrie passant par C, d'où : $\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})} = -\widehat{(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE})}$

d'autre part, dans le triangle ECF, on peut écrire :

$\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})} + \widehat{(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CE})} + \widehat{(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FC})} = \hat{p}$ ce qui donne :

(1) $2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})} = p + \widehat{(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF})} = \hat{p} - \hat{d} = \hat{d}$ (car p = 2d)

Le cercle de centre B, passant par A, passe également par C et E d'où (Th. de l'angle inscrit)

(2) $2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})} = \widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = \hat{d}$

(1) et (2) entraîne : $2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})} = 2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})}$

soit encore : $2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA})} - 2.\widehat{(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})} = \hat{0}$, ou : $2.\widehat{(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA})} = \hat{0}$

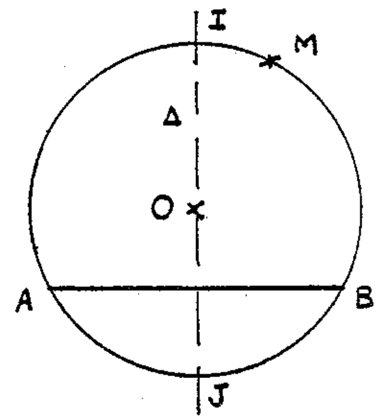
Les points E, A, F sont donc alignés.

NOTA BENE : pour trouver une généralisation de ce problème et un autre type de solution, se reporter en VIII.2

CHAPITRE XIV

ARC CAPABLE

XIV-1 Introduction



Considérons sur un cercle Γ de centre O, deux points A et B de Γ, la médiatrice Δ du segment [AB] qui coupe le cercle Γ en I et J.
On sait que quelque soit le point M du cercle Γ, distinct de A et B, on a la relation

$$2.(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$$

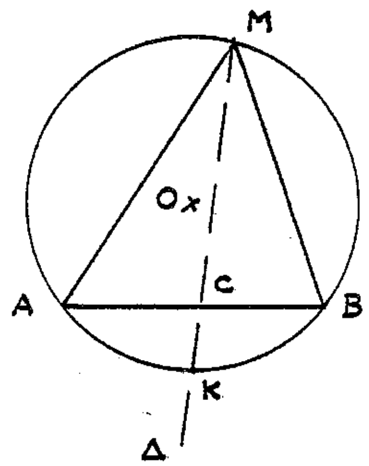
C'est à dire que si $\hat{\alpha}$ est l'un des deux angles vérifiant $2.\hat{\alpha} = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

on a : soit $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \hat{\alpha}$, soit $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \hat{\alpha} + \hat{p}$.

La droite (AB) partage le plan, en deux demi-plans (1) et (2). Nous allons préciser la valeur de ces angles.

XIV-2 Théorème

XIV-2.1 *Si* M *appartient au demi-plan* (1), *l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ *est toujours le même (nous choisirons de le noter* $\hat{\alpha}$*), et si* M *appartient au demi-plan* (2), *l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ *est alors* $\hat{\alpha} + \hat{p}$.



Soit M un point du cercle Γ distinct de A et de B. Soit Δ l'axe de symétrie des demi-droites [MA) et [MB). Δ coupe le cercle Γ en M et le recoupe en un point que nous nommerons K. On a :

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK}}) = (\widehat{\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MB}})$, si bien que :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{MK},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OB}})$$

La conjonction des deux égalités : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}) = (\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OB}})$ et $OA = OB$ implique que la droite (OK) est la médiatrice du segment [AB]. Le point K est donc l'un des points I ou J. Nous démontrerons en XIV-3 le **lemme** suivant :

XIV-2.2 Lemme

Si M appartient au demi-plan (1), *alors* K = J *et si* M *appartient au demi-plan* (2), *alors* K = I.

XIV-2.3 Démonstration du théorème

Supposons que le point M soit dans le demi-plan (1), alors K = J et $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = 2.(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MJ}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}})$. Cet angle est donc le même pour tout point M de l'arc de cercle AB contenu dans le demi-plan (1). Notons le $\hat{\alpha}$.

De même, si M est dans le demi-plan (2), alors K = I et : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}})$. Cet angle est également et vaut $\hat{\alpha} + \hat{p}$ car :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}}) + (\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}) = \alpha + p$$

XIV-3 Démonstration du lemme

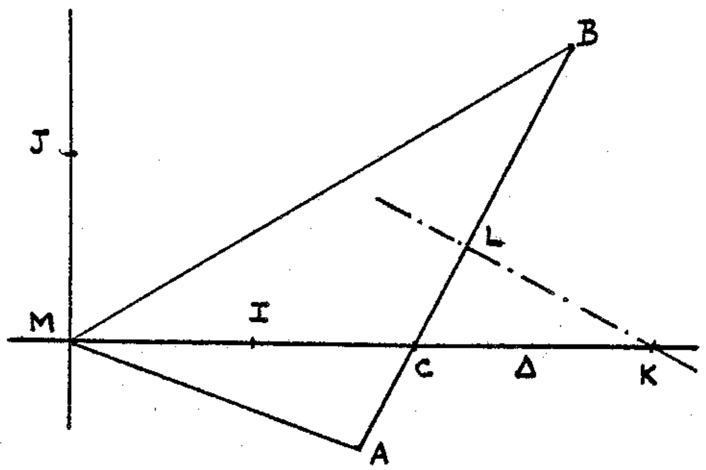
XIV-3.1 Première démonstration

Les points A et B sont dans les deux demi-plans opposés de bord Δ. Le segment [AB] coupe donc la droite Δ en un point C situé entre A et B ; ceci se traduit par l'inégalité : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} < 0$. Or $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ est la puissance du point C par rapport au cercle Γ et peut aussi s'écrire $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CK}$, en utilisant la droite Δ qui coupe le cercle Γ en M et K.

Donc $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CK} < 0$. Autrement dit, C est entre M et K : M et K sont de part et d'autre de la droite (AB).

Si M est dans le demi-plan (1), K est dans (2) et K = J. De même si M est dans le demi-plan (2), K = I.

XIV-3.2 Deuxième démonstration



Considérons le repère orthonormé $(M, \vec{I}, \vec{J})$ où $\vec{I}$ est un vecteur directeur de Δ. Il existe un réel m, non nul, tel que dans ce repère le point A ait pour coordonnées a et ma, et le point B pour coordonnées b et −mb, avec la condition : ab > 0.

La droite (AB) a pour équation : $\dfrac{y + mb}{x - b} = \dfrac{m(a + b)}{a - b}$

Le point C, intersection de Δ vec (AB), a pour abscisse : $x_C = \dfrac{2ab}{a + b}$

Le milieu L du segment [AB] a pour coordonnées : $x_L = \dfrac{a + b}{2}$ et $y_L = \dfrac{m(a - b)}{2}$

On obtient l'abscisse x_K du point K intersection de Δ et de la médiatrice du segment [AB] en écrivant que $\overrightarrow{LK}.\overrightarrow{BA} = 0$, c'est à dire :

$$(x_K - \frac{a + b}{2}).(a - b) + \frac{- m.(a - b)}{2}\, m.(b + a) = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$x_K - \frac{a + b}{2} - \frac{m^2}{2}(a + b) = 0, \text{ d'où finalement : } \quad x_K = \frac{(1 + m^2).(a + b)}{2}$$

Calculons maintenant le rapport $\dfrac{x_K}{x_C}$; nous obtenons :

$$\frac{x_K}{x_C} = \frac{(1 + m^2).(a + b)}{2} \cdot \frac{a + b}{2ab} = \frac{(1 + m^2).(a + b)^2}{4ab} ;$$

on a : $1 + m^2 > 1$ et $\dfrac{(a + b)^2}{4ab} \geq 1$;

en effet : $\dfrac{(a + b)^2}{4ab} - 1 = \dfrac{(a - b)^2}{4ab} > 0$ (car ab > 0)

donc : $\dfrac{x_K}{x_C} > 1$ et, par suite, K et M sont de part et d'autre du point C.

CHAPITRE XV

LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET LA MESURE DES ANGLES

XV-1 Le cercle trigonométrique

XV-1.1 Rappel de propriétés vues en classe de seconde

Le cercle trigonométrique, que nous noterons T est un cercle vérifiant les propriétés suivantes :

i il est centré à l'origine du plan et son rayon est l'unité de longueur u

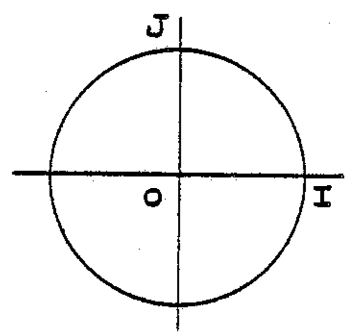
ii sur ce cercle sont placés deux points I et J tels que l'un des deux arcs d'extrémités I et J ait pour longueur le quart de la longueur du cercle, c'est-à-dire $\pi/2.u$ (l'autre ayant pour longueur $3\pi/2.u$)

iii l'origine des abscisses curvilignes sur le cercle T est le point I

iv le sens de parcours positif sur T est celui de I vers J en suivant l'arc de longueur $\pi/2.u$

v tout point du cercle possède une infinité d'abscisses curvilignes; deux d'entre elles diffèrent d'un multiple de 2π ; en particulier les abscisses de I sont de la forme $2k\pi$ et celles de J de la forme $\pi/2 + 2k\pi$, k étant un entier (élément de $\mathbb{Z}$).

XV-1.2 Dessin du cercle trigonométrique



Si l'unité de longueur n'est pas préalablement imposée, le rayon de ce cercle peut être choisi arbitrairement : il détermine alors l'unité de longueur (l'expérience montre que, sur le papier, une longueur de 2cm est souvent une bonne unité).

La convention généralement admise est de nommer I le point le plus à droite du cercle et de nommer J le point le plus haut. Cela revient à choisir pour sens positif "le sens inverse des aiguilles d'une montre" ou "le sens giratoire" de la circulation des véhicules en Europe continentale.

En classe de première, comme en classe de seconde, les abscisses curvilignes peuvent êtres introduites soit par le chemin parcouru, compté positivement dans le sens positif et négativement dans le sens négatif, soit par l'enroulement d'une ficelle, moyen de reporter sur le cercle la graduation d'un axe.

XV-1.3 Remarques

Tout ce qui vient d'être dit est purement conventionnel et ne fait pas partie de la théorie mathématique ; celle-ci peut être illustrée aussi bien par un dessin que par le même dessin regardé dans un miroir.

Il est possible de superposer par glissement des dessins répondant aux mêmes caractéristiques (même unité et même orientation), les points ayant même abscisse dans les deux dessins venant alors en coïncidence ; l'intérêt d'une convention est de permettre la communication des informations sur les points du cercle par l'intermédiaire de nombres.

XV-2 La mesure des angles de couples

XV-2.1 Mesures d'un angle de couples

On peut considérer le cercle trigonométrique comme un rapporteur circulaire fixe gradué en radian et pour lequel, à chaque point de la graduation correspondent, outre le nombre indiqué par le rapporteur, tous les nombres qui s'en déduisent par addition d'un multiple entier de 2π.

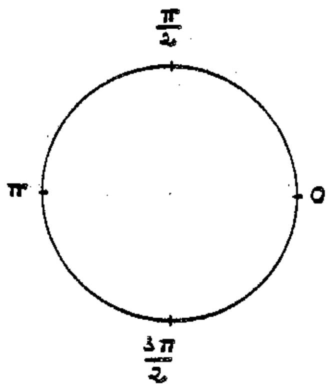
A chaque angle de couples $\hat{\alpha}$, quelle que soit la manière dont il est défini, on fait correspondre le point P du cercle T image de I par la rotation de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$; puis à ce point P on fait correspondre l'ensemble de ses abscisses qu'on appelle ensemble des mesures (en radian) de $\hat{\alpha}$.

Inversement, à tout réel x, on peut associer le point Q du cercle T dont x est une abscisse curviligne, puis l'angle de couples $\hat{\beta}$, égal à $\widehat{(\vec{OI},\vec{OQ})}$; x est une mesure de $\hat{\beta}$, les autres mesures de $\hat{\beta}$ diffèrent de x d'un multiple entier de 2π.

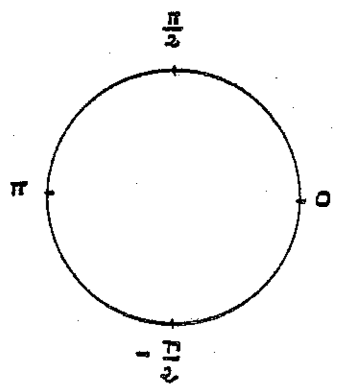
XV-2.2 Déterminations principales

Comme il n'est pas toujours commode d'associer à un angle de couples une infinité de réels, on convient parfois de choisir parmi ces nombres :

soit celle des mesures qui appartient à l'intervalle $[0,2\pi[$



soit celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi,+\pi]$.



Dans l'un et l'autre cas on parle généralement de détermination principale et seul le contexte permet de savoir de laquelle il s'agit.

Nous conviendrons, dans ce chapitre de désigner la première par le vocable "détermination principale positive" et la deuxième par le vocable "détermination principale symétrique". Bien évidemment il n'y a pas d'ambiguïté pour les angles dont une mesure est comprise entre o et π.

La détermination principale symétrique permet de donner un sens à des expressions, souvent utilisées par le physicien, mais que le mathématicien trouve également commodes, telles que :

* un angle positif ou un angle négatif
* un angle "petit", etc...

XV-2.3 Addition des angles et addition des mesures

En nous appuyant sur les manipulations effectuées antérieurement avec le rapporteur (gradué en degré), nous admettrons que si x est une mesure de $\hat{\alpha}$ et y une mesure de $\hat{\beta}$, x + y est une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

De cette propriété résulte que -x est une mesure de $-\hat{\alpha}$, x - y une mesure de $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ et, quel que soit l'entier m, mx une mesure de $m.\hat{\alpha}$.

On peut transférer les calculs sur les angles aux calculs sur les mesures ; mais les observations faites au cours des chapitres précédents montrent que, si x et y sont des déterminations principales (de l'une ou l'autre nature), il n'en est pas toujours de même pour x + y, pour x - y, ni pour mx.

XV-2.4 Division des mesures par un naturel

Considérons deux angles de couples $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ liés par l'égalité : $2.\hat{\alpha} = \hat{\beta}$;

Si x est une mesure de $\hat{\alpha}$, alors 2x est une mesure de $\hat{\beta}$; notons y le nombre $2x + 2\pi$; c'est aussi une mesure de $\hat{\beta}$; mais y/2, égal à $x + \pi$, n'est pas une mesure de $\hat{\alpha}$; c'est une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{p}$. Plus généralement en divisant par 2 n'importe quelle mesure de $\hat{\beta}$ on obtient : soit une mesure de $\hat{\alpha}$

soit une mesure de $\hat{\alpha} + \hat{p}$.

On retrouve ainsi le fait que l'équation d'inconnue $\hat{\gamma}$: $2.\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ a deux solutions qui sont : $\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha} + \hat{p}$.

Il n'est pas ici envisageable de démontrer quoi que ce soit puisque nous ne disposons pas de modèle mathématique de la manipulation physique par laquelle est introduite la notion d'abscisse curviligne

Le même procédé, appliqué à l'équation d'inconnue $\hat{\gamma}$: $n.\hat{\gamma} = \hat{\varepsilon}$ (n naturel), permet de démontrer qu'elle admet n solutions.

Exemple : Notons $\hat{d}$ l'angle droit de mesure $\pi/2$; nous savons que : $4.\hat{d} = \hat{o}$.

L'équation d'inconnue $\hat{\gamma}$: $4.\hat{\gamma} = \hat{o}$, conduit à l'infinité d'équations d'inconnue réelle x : $4x = k.2\pi$ (de paramètre k) dont les solutions sont

des mesures de $\hat{d}$ si k est de la forme : $1 + 4q$ (q entier)

des mesures de $\hat{p}$ si k est de la forme : $2 + 4q$

des mesures de $-\hat{d}$ si k est de la forme : $3 + 4q$

et des mesures de $\hat{o}$ si k est de la forme : $4q$.

Remarque : Il ne semble pas souhaitable d'aller beaucoup plus loin dans cette direction en classe de première, car l'étude de l'ensemble des angles de couples dont les mesures sont de la forme rx (où x désigne n'importe quelle mesure d'un angle $\hat{\alpha}$) est un problème d'arithmétique si r est un rationnel et un problème d'analyse si r est irrationnel (étude de sous-groupes additifs discrets ou partout denses de $\mathbb{R}$).

XV-3 Dénominations, notations et abus de notations

XV-3.1 Radian et Degré

Soit P un point du cercle trigonométrique T et K l'un des points de l'axe que l'enroulement de la ficelle permet de lui associer (cf XV-1.2) ; l'abscisse x_1 de K est **l'une des mesures en radian** de l'angle $(\overrightarrow{OI},\widehat{\ }\overrightarrow{OP})$. Si, au lieu de prendre le rayon du cercle T comme unité de longueur u_1 sur l'axe, on choisit l'unité de longueur u_2 obtenue en divisant la longueur de ce cercle par 360, on obtient une nouvelle abscisse x_2 de K, qui est **l'une des mesures en degré** de l'angle $(\overrightarrow{OI},\widehat{\ }\overrightarrow{OP})$.

En particulier, la plus petite mesure positive en degré de l'angle plat est 180.

En faisant varier P ou K, mais en utilisant le même point K pour évaluer x_1 et x_2, on obtient des nombres proportionnels (changement d'unité sur l'axe), la relation de proportionnalité étant : $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\pi}{180}$.

Cela permet de dire que si a est une mesure en degré d'un angle de couples, le nombre $a \times \frac{\pi}{180}$ est une mesure en radian de ce même angle.

Exemple : Soit $\hat{\alpha}$ l'angle de couples dont une mesure en radian est le nombre $-\frac{5\pi}{3}$ et $\hat{\beta}$ l'angle de couples dont une mesure en degré est le nombre 60. Une mesure en radian de ce dernier angle est le nombre : $60 \times \frac{\pi}{180}$, égal à $\frac{\pi}{3}$; et, comme : $\frac{\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = 2\pi$, on en déduit que : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

XV-3.2 Notations et abus de notations

Nous venons de mettre en évidence, à propos d'un angle de couples, trois notions qui sont :

* l'angle de couples lui-même, noté, entre autres, $\hat{\alpha}$ ou $(\vec{u},\widehat{\ }\vec{v})$
* l'ensemble de ses mesures en radian
* l'ensemble de ses mesures en degré ;

Pour les deux dernières notions nous n'avons pas introduit de notation.

Chacune de ces trois notions est utile ; l'angle de couples pour la résolution de problèmes de géométrie, les mesures pour la transmission de l'information, pour l'utilisation des fonctions trigonométriques et plus généralement pour le calcul analytique. Les disciplines techniques utilisent souvent le degré, les mathématiques le radian ; on trouve les deux (et aussi le grade) sur une calculette.

Le programme des classes de première propose pour ces trois notions une seule notation : celle du couple. A condition d'être averti et de ne pas la prendre dans son sens premier, cette notation unique permet d'alléger les écritures et il est, sans aucun doute, souhaitable en première d'arriver à l'introduire ; cela d'autant plus que, par la suite, les élèves seront contraints d'adopter cette attitude tout-à-fait généralisée.

Cependant quelques précautions d'écriture nous semblent utiles pour que le contexte permette de savoir de quoi il est question. Ainsi :

$(\vec{u},\vec{v}) = (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$ peut signifier l'égalité des angles de couples ou l'égalité de mesures de ces angles (en radian ou en degré indifféremment) ; ces trois significations apportent la même information et l'ambiguïté est sans importance pratique.

$(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}) \mod(2\pi)$ précise qu'il s'agit de nombres (des mesures en radian) différant d'un multiple de 2π, mais apporte la même information que la phrase précédente et que la phrase suivante :

$(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}) \mod(360)$ dans laquelle il s'agit de mesures en degré.

Plus ambigüe est la phrase : $(\vec{u},\vec{v}) = 1$; s'agit-il de radian ou de degré ? Même si bien souvent, comme dans la phrase : $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{8}$, la présence de la lettre π incite à penser qu'il s'agit de radian, il vaudrait mieux éviter ce genre de phrase et choisir le deuxième type d'écriture évoqué ci-dessus ; ne serait-ce que pour rappeler aux élèves que s'ils utilisent la calculette, il faut la mettre en position rad.

XV-4 Autres types d'angles

XV-4.1 <u>Les angles de secteurs</u>

Soient A, B, C trois points non alignés. Considérons les deux angles de couples $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$ et les deux angles de secteurs : le saillant $\widehat{BAC}$ et le rentrant $\overset{\vee}{BAC}$. L'un des deux angles, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ par exemple a une mesure en radian comprise entre o et π ; nous la noterons a. Alors 2π - a est une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$ et ce nombre est compris entre π et 2π.

La mesure du saillant $\widehat{BAC}$ est a et la mesure du rentrant $\overset{\vee}{BAC}$ est 2π - a. Là encore le programme indique de ne pas introduire de notation nouvelle pour les mesures et d'écrire : $\widehat{BAC} = a$ et $\overset{\vee}{BAC} = 2\pi - a$.

XV-4.2 <u>Les angles de droites</u>

Nous avons montré (cf VII) que deux vecteurs non nuls colinéaires $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ vérifiaient la relation : $2.(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{u'}}) = \hat{o}$. Cela peut se traduire par : $(\vec{u},\overrightarrow{u'}) \equiv o \quad mod(\pi)$. Il en résulte que si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont des vecteurs directeurs de la droite D, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ des vecteurs de la droite Δ, on a : $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}) \quad mod(\pi)$.

L'utilisation de relations de ce type permet d'éviter l'introduction du concept d'angle de couples de droites, lequel n'est plus au programme du Lycée, et fait ainsi faire l'économie d'une nouvelle notation.

XV-4.3 <u>Nouvelles formulations de la cocyclicité</u>

Quatre points non alignés A, B, M, P *sont cocycliques si et seulement si on a :* $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) \quad mod(\pi)$ *; alors* M *et* P *sont de part et d'autre de la droite* (AB) *si et seulement si on a :* $\widehat{AMB} + \widehat{APB} = \pi$.

En effet nous avons montré en XIII et XIV que ces points non alignés seraient cocycliques si et seulement si on avait :

soit $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}})$ quand M et P sont du même coté de la droite (AB)

soit $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}}) + \hat{p}$ quand M et P sont de part et d'autre de (AB)

Cela s'écrit encore :

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) \quad mod(2\pi) \quad \text{ou} \quad (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + \pi \quad mod(2\pi).$$

On peut rassembler les deux termes de cette disjonction en :

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) \quad mod(\pi)$$

Posons maintenant a = $\widehat{APB}$ (en radian ; donc $o < a < \pi$) et supposons que, par exemple, on ait : a $\equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) \quad mod(2\pi)$. Puisque M et P sont de part et d'autre de (AB) on a : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + \pi \equiv a + \pi \quad mod(2\pi)$.

Soit encore : $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) \equiv \pi - a \quad mod(2\pi)$, et comme : $o < \pi - a < \pi$, c'est que : $\widehat{AMB} = \pi - a$; on a donc bien $\widehat{AMB} + \widehat{APB} = \pi$, et les saillants sont supplémentaires.

XV-5 Quelques remarques sur ce chapitre

Ce chapitre est essentiellement un chapitre de mise au point et d'institutionnalisation en vue des autres disciplines et des études ultérieures. La plupart du temps il n'est pas possible dans une classe de première d'attendre si longtemps pour aborder certaines notations que des élèves ont déjà vues ; c'est une raison de plus pour faire à un moment donné cette mise au point. Il nous semble que celle-ci peut intervenir n'importe quand après le chapitre VI, et qu'on peut alors enchaîner sur le chapitre XVI si on le désire.

Exercice

Exercice XV : LE POINT AVEC TROIS AMERS

Trois amers (en navigation côtière, points de repère sur la côte) A, B *et* C *sont identifiés sur la carte respectivement en* a, b *et* c.

Il s'agit de construire sur la carte <u>le point</u> m *<u>correspondant</u> à la position* M *du bateau , à l'aide des angles* $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ *et* $(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})$ *que l'on peut relever.*

La construction, qui utilise la règle, l'équerre et le rapporteur, mais pas le compas, est la suivante:

1.On construit une demi-droite [bp) telle que $(\overrightarrow{ba},\overrightarrow{bp}) \equiv (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \quad mod(\pi)$

et une demi-droite [bq) telle que $(\overrightarrow{bq},\overrightarrow{bc}) \equiv (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \mod(\pi)$. (Utilisation du rapporteur).

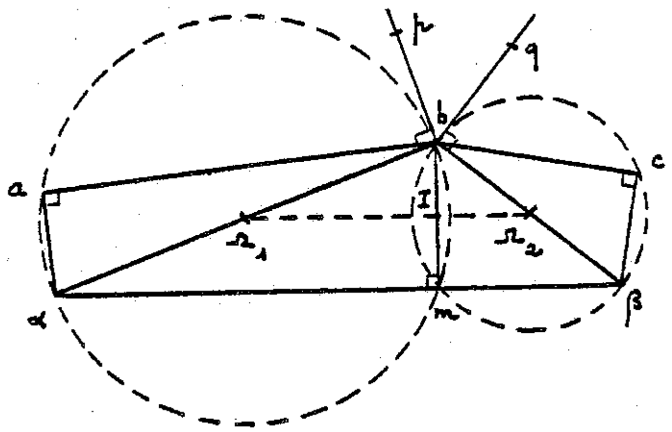
2.Les perpendiculaires en a à (ab) et en b à (bp) se coupent en α. De même les perpendiculaires en c à (bc) et en b à (bq) se coupent en β. (Utilisation de l'équerre).

3.On trace la droite $(\alpha\beta)$. (Utilisation de la règle).

4.Le point m cherché est le projeté orthogonal de b sur $(\alpha\beta)$. (Utilisation de l'équerre).

Sur la figure sont tracés en pointillés les traits utiles à la justification

Justification :



Le cercle de diamètre $[b\alpha]$, de centre Ω_1 est circonscrit au triangle $ab\alpha$ et tangent en b à la droite (bp). Pour tout point d de ce cercle on a :
$(\overrightarrow{da},\overrightarrow{db}) \equiv (\overrightarrow{ba},\overrightarrow{bp}) \equiv (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \mod(\pi)$
m doit donc être un point de ce cercle.

De même le cercle de diamètre $[b\beta]$, de centre Ω_2, est circonscrit au triangle $bc\beta$ et tangent en b à la droite (bq).
Pour tout point e de ce cercle, on a :
$(\overrightarrow{eb},\overrightarrow{ec}) \equiv (\overrightarrow{bq},\overrightarrow{bc}) \equiv (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \mod(\pi)$.
m doit donc être un point de ce cercle.

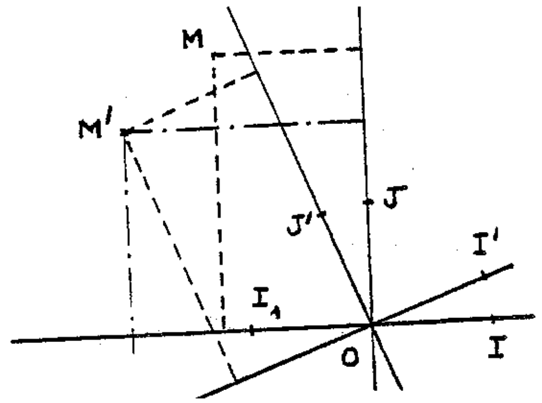
Il en résulte que m est le point d'intersection de ces deux cercles (autre que b).

Les points m et b sont symétriques par rapport à la droite $(\Omega_1\Omega_2)$, et comme l'homothétie de centre b, de rapport 2, transforme Ω_1 en α et Ω_2 en β, elle transforme le milieu I du segment (bm) en m. Comme les droites $(\Omega_1\Omega_2)$ et (bm) sont perpendiculaires en I, I est le projeté orthogonal de b sur $(\Omega_1\Omega_2)$, donc m est le projeté orthogonal de b sur $(\alpha\beta)$.

CHAPITRE XVI

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DE LA ROTATION ET DE LA RÉFLEXION

XVI-1 Rotation de centre O



Considérons un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, et la rotation $\mathcal{R}$ de centre O, d'angle de mesure θ (en radian), qui à un point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y'). Nous noterons I' et J' les images de I et J par $\mathcal{R}$.

Nous savons, que nous avons les relations : $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{OI} + y.\overrightarrow{OJ}$

et (d'après XI-4) $\overrightarrow{OM'} = x.\overrightarrow{OI'} + y.\overrightarrow{OJ'}$.

Comme par hypothèse : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OI'}) \equiv \theta \mod(2\pi)$, nous avons :

$$\overrightarrow{OI'} = \cos\theta.\overrightarrow{OI} + \sin\theta.\overrightarrow{OJ}$$

Cherchons les coordonnées de J' dans le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. Pour cela, appelons r la rotation de centre O (et d'angle droit) qui transforme I en J.

L'image de J par r est aussi l'image de I par $r \circ r$ (rotation d'angle plat) ; c'est donc le point, que nous noterons I_1, défini par : $\overrightarrow{OI_1} = -\overrightarrow{OI}$.

D'autre part nous avons : $J' = \mathcal{R}(J) = \mathcal{R} \circ r(I) = r \circ \mathcal{R}(I) = r(I')$.

En résumé : $r(I) = J$, $r(J) = I_1$ et $r(I') = J'$ et, d'après X-4 nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ'} &= \cos\theta.\overrightarrow{OJ} + \sin\theta.\overrightarrow{OI_1}\\ &= \cos\theta.\overrightarrow{OJ} - \sin\theta.\overrightarrow{OI},\end{aligned}$$

et par substitution dans $\overrightarrow{OM'} = x.\overrightarrow{OI'} + y.\overrightarrow{OJ'}$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OM'} = (x\cos\theta - y\sin\theta).\overrightarrow{OI} + (x\sin\theta + y\cos\theta).\overrightarrow{OJ}.$$

D'où les coordonnées de M' :
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}.$$

XVI-2 Réflexion dont l'axe passe par O

Considérons un repère orthonormé $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ et la réflexion s_Δ par rapport à la droite Δ passant par O et de vecteur directeur u. Notons θ une mesure de $(\vec{OI},\vec{u})$.

Comme $s_\Delta \circ s_{(OI)} = \mathcal{R}_{(O,2.\theta)}$, on peut écrire, en composant avec $s_{(OI)}$:

$$s_\Delta = \mathcal{R}_{(O,2.\theta)} \circ s_{(OI)} ,$$

ce qui donne le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{s_{(OI)}} & M_1 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{(O,2.\theta)}} & M' \\ (x,y) & & (x_1,y_1) & & (x',y') \end{array}$$

pour lequel on a :

$$\text{et} \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = -y \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} x' = x_1 \cos 2\theta - y_1 \sin 2\theta \\ y' = x_1 \sin 2\theta + y_1 \cos 2\theta \end{cases}$$

D'où, par substitution,

les coordonnées de M'
$$\begin{cases} x' = x \cos 2\theta + y \sin 2\theta \\ y' = x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{cases} .$$

XVI-3 Remarque

Les formules trigonométriques de l'addition des angles etc. peuvent s'obtenir classiquement à partir de l'expression analytique de la rotation.

Exercice

exercice XVI

On note t *la translation de vecteur* $\vec{OI}$ *et* $\mathcal{R}$ *la rotation de centre* O *et d'angle* $\hat{\alpha}$ *(dont une mesure en radian est notée* α*). Montrer que les transformations* $t \circ \mathcal{R}$ *et* $\mathcal{R} \circ t$ *sont des rotations d'angle* $\hat{\alpha}$ *dont on déterminera les centres respectifs par leurs coordonnées dans le repère orthonormé direct* $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$.

Remarque : cet exercice peut se traiter entièrement par le calcul, mais on peut aussi commencer par composer des réflexions et calculer les coordonnées des centres ensuite.

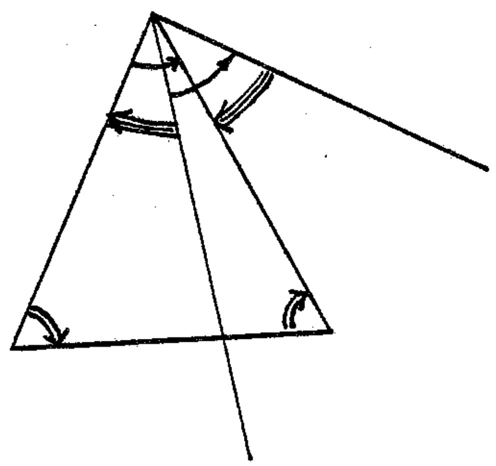
Le lecteur aura pu remarquer que, dans ce qui précède, nous n'avons pas donné de définition d'un angle de couple de vecteurs, ou de couple de demi-droites. Nous avons introduit un langage avec ses règles de fonctionnement, et nous avons montré comment ce langage permettait de traduire certaines propriétés des figures ponctuelles, et, grâce au calcul angulaire, d'en déduire de nouvelles.

-1 L'angle dans la figure

Un angle de couple de vecteurs ou de demi-droites n'est pas une figure ponctuelle. Par contre, une figure ponctuelle, si elle est accompagnée d'une *information*, permet de représenter un angle : en plus de la donnée de la figure formée par deux demi-droites, il faut préciser quel est le couple que l'on considère ; pour cela il suffit de l'énoncer, oralement ou par écrit.

On peut aussi utiliser une *convention graphique* (généralement réservée aux demi-droites de même origine) : une flèche courbe partant d'un point de la demi-droite premier terme du couple, et arrivant à un point de la demi-droite deuxième terme du couple.

Comme dans le cas des vecteurs où la flèche, rectiligne cette fois, permettait d'indiquer le premier et le deuxième terme d'un couple de points, cette convention graphique n'est utilisable qu'un petit nombre de fois par dessin, car très vite on n'y "voit" plus rien. Par une sophistication supplémentaire, qui, curieusement, n'est jamais employée pour les vecteurs, on peut, en utilisant des types de flèches différents (flèches simples, doubles, barrées,...), indiquer que certains couples de demi-droites ont, ou n'ont pas, le même angle. De même que pour les vecteurs, les flèches ne sont pas sans ambiguité, et nécessitent quelques explications lors de leur introduction éventuelle auprès des élèves.



-2 **Définitions possibles**

Si un angle n'est pas une figure ponctuelle, alors qu'est-ce ?. On pourrait, d'une manière un peu sommaire mais que l'on va préciser, dire qu'un angle est *une classe d'équivalence de figures munies d'une légende* ; on a le choix des figures sur lesquelles on travaille.

* Si on choisit l'ensemble des couples de demi-droites du plan, la situation est compliquée ; on peut procéder ainsi : Ayant choisi un point O une fois pour toute, on dira que le couple ([AA'),[BB')) est équivalent au couple ([CC'),[DD')), s'il existe une rotation $\mathcal{R}$ de centre O, des translations t_1 et t'_1 de vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OB}$, et des translations t_2 et t'_2 de vecteurs $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{OD}$ telles que $t'_1 \circ \mathcal{R} \circ t_1$ transforme la demi-droite [AA') en la demi-droite [BB') et que $t'_2 \circ \mathcal{R} \circ t_2$ transforme la demi-droite [CC') en la demi-droite [DD').

Le fait de n'utiliser qu'une seule rotation $\mathcal{R}$ permet d'affirmer qu'on a bien une relation d'équivalence, car ce procédé définit une application de l'ensemble des couples de demi-droites dans l'ensemble des rotations de centre O.

* Si l'on choisit des demi-droites d'origine O, on fait l'économie des translations et la définition est simplifiée : on dira que le couple ([OA),[OB)) est équivalent au couple ([OC),[OD)), si c'est la même rotation $\mathcal{R}$ de centre O qui transforme la demi-droite [OA) en la demi-droite [OB) et la demi-droite [OC) en la demi-droite [OD).

En fait, derrière les deux définitions précédentes se cachent les rotations vectorielles, puisqu'un plan ponctuel muni d'une origine O est en bijection avec le plan vectoriel (à chaque vecteur $\vec{u}$ on associe le point U tel que $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$).

* On peut donc considérer l'ensemble des couples de vecteurs du plan vectoriel et dire : Le couple $(\vec{u_1},\vec{u_2})$ est équivalent au couple $(\vec{v_1},\vec{v_2})$ s'il existe une rotation vectorielle $\tilde{\mathcal{R}}$ qui transforme $\vec{u_1}$ en $\vec{u_2}$ et $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$.

L'angle, classe d'équivalence de $(\vec{u_1},\vec{u_2})$ est alors le *graphe de la rotation vectorielle* $\tilde{\mathcal{R}}$.

Cette dernière définition est tout à fait analogue à la définition d'un vecteur comme graphe d'une translation, mais, dans le cas des vecteurs, il s'agissait de transformations ponctuelles, alors que dans le cas des angles il s'agit de transformations vectorielles.

-3 **A propos de ces définitions**

Remarquons que ces trois définitions sont impraticables en classe de première S.

* La première prend en compte tous les couples de demi-droites du plan : il faudrait vérifier que les classes restent les mêmes lorsqu'on change de point O.

* La deuxième est la restriction de la première à une partie des couples de demi-droites (celles d'origine O) et chaque classe de la seconde définition est incluse dans une classe de la première. Il conviendrait ensuite de généraliser, c'est à dire, théoriquement, de manipuler une infinité (ayant la puissance du continu) d'ensembles quotients et de montrer leurs isomorphismes.

Dans les deux cas ces questions oiseuses n'apportent rien à la compréhension car il est évident que les angles n'ont d'intérêt que pour "tourner", et non pour "rester parallèle" !.

De plus, ces définitions sont plus abstraites qu'il n'y parait, car, outre l'introduction d'ensembles quotients, elles font intervenir des couples de parties du plan et non des couples de points (comme dans le cas des vecteurs). En toute rigueur, il y a abus de langage et de notation lorsqu'on parle de transformée d'une demi-droite par une rotation ; on pourrait d'ailleurs remarquer qu'il n'existe pas pour les angles de mot analogue au mot équipollent utilisé dans la définition des vecteurs.

D'un point de vue théorique, le fait d'utiliser les rotations ponctuelles pour définir les angles n'entraine pas de "cercle vicieux", car on peut définir une rotation comme la composée de deux réflexions, mais cette définition trouve sa place dans une théorie préalable des isométries (que nous avons brièvement évoquée à propos de la transitivité de l'égalité).

* La troisième définition est en apparence plus simple car les isomorphismes signalés ont été étudié dans le passage au vectoriel ; mais pour pouvoir l'utiliser il faut disposer du concept de vectoriel, d'un niveau ensembliste plus élevé, et qui, de toutes façons, n'est plus au programme de première S. Dans les programmes de 70 on utilisait des rotations vectorielles introduites analytiquement pour définir les angles, mais le passage au ponctuel était si tardif qu'il produisait une géométrie sans figure et très abstraite.

Quoiqu'on fasse, l'isomorphisme entre la structure des angles et celle des rotations vectorielles ou ponctuelles de point fixe donné est sous-jacent, à tel point que certains considèrent même l'expression "angle d'une rotation" comme un pléonasme. Nous avons joué de cet isomorphisme en proposant une triple description des figures

par :	axes de symétrie	angles	rotations
analogue à la triple description:	centres de parallélogrammes	vecteurs	translations

de la théorie des vecteurs.

-4 Vocabulaire

Les derniers programmes utilisent encore l'expression "angle orienté". Ce vocable nous semble malheureux et nous avons évité de l'utiliser, préférant des expressions comme "angle de couples de demi-droites " ou "angle de couples de vecteurs", voire "angle de couples" tout court. En effet ici "orienté" signifie simplement qu'on a ordonné la paire de demi-droites (si elles sont distinctes) ; et c'est précisément à cela que sert le mot "couple". En outre l'utilisation du mot "orienté" peut laisser croire qu'il est nécessaire d'avoir orienté le plan ou d'utiliser le cercle trigonométrique pour étudier les angles. Or, comme nous l'avons montré, cette orientation du plan est superflue ; elle ne devient indispensable que pour la communication d'informations sur les angles par l'intermédiaire de mesures.

Sur ce point nous conseillons au lecteur la consultation des brochures MOTS de l'APMEP (numéros V, VI et VII).

Université Paris 7 - I.R.E.M
Tour 56 couloir 56/55 - 3e étage
2, place jussieu 75OO5 PARIS

Tel : 44 27 68 52
ou 44 27 53 83

OCTOBRE 1991

PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M PARIS 7

BROCHURES

N°	Titre	Prix	Avec Port
4	Groupe Français-Mathématiques (Tome 1)	45F	59F
5	Quelques réflexions sur la démonstration	22F	30F
7	Pavages et coloriages	17F	25F
1O	Calcul mental	19F	27F
14	De la température résultante à l'angle solide	19F	27F
15	Groupe Français-Mathématiques (Tome 2)	45F	59F
16	Les jeux du "Club des Cordelières"	56F	70F
17	Coloriages géométriques	34F	52F
21	Almanathématique	12F	20F
23	Récurrence	51F	65F
24	Climatisons les Mathématiques	22F	30F
25	Les Forces en statique	15F	23F
27	Nombre d'or	65F	83F
29	La vitesse	32F	46F
3O	Représentations graphiques	33F	47F
34	Métrologie	25F	33F
36	Au pays des Cycloïdes	36F	50F
38	Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire	46F	60F
39	Pot Pourri	38F	52F
41	Réseaux	52F	70F
43	Cinématique relativiste	30F	38F
45	Petites variations ou l'art de dériver sans le savoir	34F	48F
46	Nombres à l'école élémentaire	39F	53F
47	Matériaux pour Logo	33F	47F
48	Mesure des longueurs et des aires	35F	49F
49	Devoirs à la maison pour le premier cycle	35F	49F
50	Deug SSM Section E - Un an de fonctionnement	35F	49F
51	Instruments de Géométrie	17F	25F
53	Lisp et Prolog	32F	46F
54	Echelles logarithmiques	18F	26F
55	Dessin géométrique	20F	28F
56	Héliomath	24F	32F
57	Statistiques	45F	59F
58	Informatique et Mathématiques en Terminale C	64F	82F
59	"Et si la descriptive servait à quelque chose" (2 tomes)	33F	41F
61	Mathématiques : Approche par des textes historiques	50F	64F
62	Liaison Ecole-Collège, Nombres décimaux	55F	69F
63	Une section de Deug SSM Première année 84-85	58F	76F
64	Une année de Géométrie en Terminale C	28F	36F
65	Programmes de Mathématiques Ecole Elémentaire et Collèges	22F	30F
66	Programmes de Mathématiques des Lycées Techniques	25F	33F
67	Programmes de Mathématiques des Lycées Classiques	20F	28F
68	Problèmes Ruraux - de marins - d'argent - de durée - de grandeurs - de graduations - farfelus - de certificat d'études	48F	62F
69	Situations d'apprentissage en géométrie 6ème - 5ème	45F	59F
71	Activités géométriques en Terminale C	24F	32F
72	De la géométie analytique à l'algèbre linéaire	24F	32F
73	Angles de couples et rotations	32F	40F
74	Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire	40F	54F
75	La géométrie au lycée	45F	59F
76	Questionnaire de travail sur les différentielles	28F	36F
77	Une recherche menée dans le cadre du projet Euclide	46F	60F
78	Calcul mental	43F	57F
79	Mathématiques : Approche par des textes historiques - Tome 2 -	58F	72F
80	Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert)	55F	69F
81	La pratique de mémoires étudiants en Deug SSM première année L'expérience de Lille 1	44F	58F

LES CAHIERS DE DIDACTIQUE

N°	Titre	Auteur(s)	Prix	Avec Port
1	De l'ingénierie didactique	J. Robinet	4F	8F
2	Quelques éléments de théorie piagétienne et.... didactique des Mathématiques	J. Rogalski	8F	12F
3	Rapport enseignement apprentissage : Dialectique outil-objet, jeux de cadre	R. Douady	8F	12F
5	Quelques concepts, quelques généralités et quelques références	Collectif	5F	9F
6	De la didactique des Mathématiques à l'heure actuelle	R. Douady	7F	11F
7	Acquisition des premiers concepts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG	F. Boschet A. Robert	20F	28F
8	Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques	M. Artigue	12F	16F
9	Histoire de la convergence uniforme	J. Robinet	7F	11F
1O	Des Analystes avant l'analyse	M.C Bour	9F	13F