

REFLEXIONS SUR L'ANALYSE DES TEXTES D'EXERCICES DES
MANUELS

PAR A.ROBERT

suivies de

Quelques illustrations réalisées par des étudiants
du DEA de didactique (UV 543 - 1987/88) sur les
chapitres suivants :

- les nombres complexes par P.Pabion
- les suites en 1ère S, Ter C, Ter D par L.Guénier, D.Magnard
N.Maynard
- la proportionnalité en 6ème par A.Bonneval et M.Lavillunière

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro

MAI 88

Préambule

Dans cette brochure, nous avons réuni plusieurs textes.

Il y a d'abord une réflexion sur l'analyse des textes d'exercices (ou de problèmes) des manuels.

Ce travail s'inscrit dans une réflexion plus générale sur les mathématiques et leur enseignement, où l'on caractérise en particulier les contenus visés par l'enseignement en termes de concepts outils ou objets (avec leurs relations), en s'attachant à distinguer leurs différents cadres d'intervention.

L'article de R. Douady "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", paru dans le volume 7.2 de la revue Recherche en didactique des mathématiques permet une bonne mise au point de toutes ces notions.

On est aussi amené à introduire la différence, pour les caractères outils des concepts, entre le fait d'être utilisés correctement par les élèves si on le leur demande explicitement (on parlera alors de propriété mobilisable) et le fait d'être utilisé à bon escient, sans qu'il en ait été fait mention dans l'énoncé (on parlera alors de propriété disponible).

Ceci se justifie par le fait que nous assignons à l'enseignement des mathématiques l'objectif de rendre disponibles un certain nombre de concepts pour un grand nombre d'élèves, du moins dans l'enseignement obligatoire et pour les élèves scientifiques de l'enseignement post-obligatoire. De plus nous pensons que c'est le caractère disponible de certains concepts, en particulier dans certains cadres, qui permet une

construction satisfaisante de nouveaux concepts, surtout si ces derniers sont source de difficultés (pour les élèves).

Tout cela explique que l'on ait retenu ces critères d'analyse de contenu des textes d'exercice, puisque les analyses didactiques qui pourraient utiliser nos classements se font dans ces termes.

En ce qui concerne l'enseignement précisément, on se place dans une perspective didactique : l'organisation des activités des élèves, et en particulier la répartition entre les interventions de l'enseignant et les travaux des élèves nous semble déterminante (compte-tenu des contenus visés évidemment).

C'est ce qui explique les restrictions apportées au début du texte sur la portée relative des analyses de contenus des exercices, qui ne peuvent prendre leur intérêt qu'à condition de tenir compte de tout ce qui est fait dans la classe. D'ailleurs, il faudrait toujours faire précéder une analyse des exercices de l'analyse mathématique, voire épistémologique, des notions correspondantes, en tenant compte du niveau de connaissances des élèves.

Les textes qui suivent sont de modestes illustrations de la grille d'analyse proposée dans le premier texte.

Réalisées par des étudiants dans le cadre de l'UV 543 du DEA de didactique de PARIS VII (option mathématiques), ces analyses sont limitées à un chapitre ou à un ensemble de chapitres portant sur une même notion mais à des niveaux très divers, sauf la dernière qui est plus superficielle car plus étendue.

Ainsi sont analysés :

- * les exercices sur les nombres complexes d'un manuel de Terminale C (les textes des exercices analysés sont joints)
- * les exercices sur la proportionnalité de deux manuels de Sixième (avec une petite comparaison) (textes joints)
- * les exercices sur les suites en Première S, Terminale C, Terminale D, de deux manuels, l'analyse étant plus rapide vu l'étendue du sujet et les textes n'étant pas joints.

L'intérêt de ces illustrations nous semble triple.

D'une part, cela montre que selon les concepts, tel ou tel critère évoqué dans le texte de référence est plus ou moins pertinent, ce que nous annonçons dans ce texte. Il y a lieu de réfléchir pour se livrer à une analyse des exercices sur un concept donné, il y a peu de critères (intéressants) universels : en fait il faut commencer par une petite analyse mathématique de la notion et une petite analyse des connaissances présumées des élèves (ne serait-ce que pour déterminer les cadres potentiels d'intervention des concepts) pour mener à bien l'analyse des textes d'exercices.

D'autre part cela montre certaines régularités dans le choix des exercices proposés actuellement aux élèves dans les manuels (exercices fermés où la plupart du temps on indique ce que les élèves ont à faire fonctionner) et cela révèle aussi des différences entre certains manuels, et entre certaines classes (ou filières).

Enfin, du point de vue de la formation à la didactique, cela montre que ces analyses limitées sont réalisables rapidement, qu'elles permettent de mettre en fonctionnement (non automatique !) des notions de didactique essentielles à notre avis et qu'elles peuvent même faire

(re)trouver aux étudiants certains résultats, soit sur les exercices eux-mêmes, soit sur les comparaisons entre manuels ou entre filières. Les différences de qualité des analyses proposées indiquent aussi qu'un travail reste à faire à partir du texte initial, et qu'on peut très bien se rendre compte du degré de compréhension et d'investissement personnel des étudiants à travers un travail de ce type.

Pour optimiser les effets d'un travail de ce type, nous suggérons de faire travailler les étudiants en petits groupes, en répartissant les contenus analysés de façon à permettre des comparaisons (soit sur un même sujet en faisant varier le manuel, le niveau ou la filière, soit sur deux sujets d'un même manuel ...).

Signalons enfin que ce type d'analyse peut être complété, très efficacement à notre sens, par une analyse (plus historique) de l'évolution dans le temps de l'introduction des concepts (et des exercices correspondants) dans l'enseignement...

On peut par exemple comparer des exercices dans des manuels choisis sur une trentaine d'années (avec ou non des changements de programmes).

Comment analyser des textes d'exercices ou de problèmes d'un manuel ?

Cette question se pose dans un cadre plus général, qui lui donne son intérêt, notamment quel usage font les élèves (et les professeurs) des exercices des manuels et quel effet peut avoir sur l'acquisition des connaissances des élèves la résolution de tel ou tel exercice compte-tenu de cet usage.

D'ailleurs cette question ne prend son sens que pour l'analyse d'un grand nombre d'exercices.

Ceci dit, selon le moment où un même exercice est proposé aux élèves, il peut servir à plusieurs finalités, différentes pour l'apprentissage : exploration d'un problème (avant le cours le cas échéant), ou familiarisation avec une technique ou un théorème..., ou réinvestissement d'une connaissance déjà acquise dans un certain contexte différent, ou même évaluation.

De même les conditions de production des solutions sont déterminantes pour interpréter l'efficacité (présumée) de l'exercice : ce peut être un contrôle, ou au contraire un exercice à la maison où on a tout son temps etc...

Enfin il y a dans la classe un contrat non entièrement explicite qui a son rôle dans l'interprétation des textes d'exercice par les élèves et leur traitement.

Ainsi, une analyse complète des exercices et de leur rôle présumé dans l'acquisition des connaissances ne peut se faire sans tenir compte du contexte général et de l'organisation de l'enseignement étudié.

Et pourtant, un exercice proposé aux élèves dans des conditions analogues peut ne pas être traité de la même façon suivant la manière dont il est énoncé, le travail nécessaire à sa résolution et à sa rédaction peut même varier considérablement en fonction du texte donné.

Et ce texte est associé a priori à certaines connaissances qui seront nécessaires à la résolution, éventuellement à des titres divers.

Cela justifie le fait de se livrer, sans en exagérer l'importance par rapport à l'étude de l'organisation globale cours/exercices, à une petite analyse "interne", a priori, des textes d'exercices.

Nous allons donc dégager quelques axes d'analyse des textes d'exercice. Nous devons tout de suite préciser que selon les notions étudiées et le niveau considéré (premier cycle ou second, géométrie, analyse, nombres complexes ...) tel ou tel caractère de l'exercice sera plus ou moins pertinent.

Il resterait à analyser sérieusement et en expérimentant les implications éventuelles de la nature de l'exercice telle qu'on sera alors en mesure de la préciser en fonction des indicateurs retenus, ce que nous ne ferons pas ici, nous contentant de quelques hypothèses empiriques et a priori sur le sujet...

Bien entendu la longueur des exercices et la façon dont les différentes questions se relient entre elles sont les premières choses qui peuvent différencier les textes. Nous parlons ici d'exercices pas trop longs et relativement indépendants donc.

Nous supposons aussi que les exercices sont correctement posés.

Voici ces axes d'analyse.

1) Si on peut assigner au cours présenté dans les manuels l'objectif de livrer un certain texte du savoir, avec les caractères objets des concepts, de même on peut a priori assigner aux exercices des objectifs en terme de caractères outil des concepts :

* on peut trouver des exercices destinés à rendre mobilisable tel ou tel caractère outil d'un concept, telle ou telle technique, tel ou tel théorème (par mise en fonctionnement provoquée explicitement dans un contexte plus ou moins particulier)

* on peut aussi rencontrer des exercices destinés à rendre tel caractère outil d'un concept disponible par une mise en fonctionnement qui doit être décidée par l'élève et non provoquée par le seul texte de l'exercice

On pourrait encore penser à des exercices servant d'introduction à un nouveau concept par utilisation (découverte) d'un caractère outil nouveau d'un concept mais ces exercices s'ils sont proposés apparaissent plutôt dans les textes des cours (au début).

Bien entendu il faut tenir compte du découpage du manuel et des indications qui sont données globalement ; ainsi dans certains manuels on indique dans le cours (par un renvoi) les exercices d'application correspondants au texte considéré, dans d'autres on met en titre d'une série d'exercices ce qu'on fait fonctionner etc...

2) Une deuxième possibilité d'analyse complémentaire de la précédente est d'étudier la manière dont les questions sont posées, ce qu'on

appelle l'ouverture de l'exercice, c'est à dire de caractériser ce qu'il reste à faire aux élèves (compte-tenu de leur cours).

On peut avoir des questions complètement fermées, du style "montrer que ... en utilisant ..." où finalement la tâche de l'élève consiste à appliquer sans transformation un résultat du cours plus ou moins précisé (en général cela correspond à un exercice où on cherche à faire simplement mobiliser un caractère outil).

C'est ce qu'on appelle quelquefois un énoncé fermé.

Plus souvent on propose aux élèves des énoncés qu'on peut qualifier de semi-fermés, en ce sens qu'on leur indique par exemple ce qu'il y a à démontrer mais sans leur donner d'indications de méthodes : "montrer que ...". Cependant dans la mesure où l'exercice est posé dans un chapitre donné du cours, éventuellement même précédé d'un sous-titre précisant la partie du cours concernée ou le degré d'éloignement du cours (applications, approfondissement...), l'indication est en fait implicite mais il peut y avoir à adapter, voire à transformer un peu ou l'énoncé ou le cours.

Enfin il existe des exercices qu'on pourrait appeler ouverts ou semi-ouverts, où peu de choses sont indiquées aux élèves, ni précisément ce qu'il y a à démontrer (par exemple avec un énoncé du type "que peut-on dire de...") ni les méthodes, ou bien encore où ce qu'il y a à démontrer est suffisamment général pour que le problème de transformation de la consigne reste entier (par exemple "construire un carré inscrit dans un quadrilatère donné"). Ces exercices sont souvent relativement généraux ou tout au moins généralisables (mise en évidence ou utilisation dans un cas particulier d'un invariant). On n'évoque évidemment pas ici des

exercices trop longs auxquels on pourrait alors ramener toutes les mathématiques ou presque...

Il y a alors intérêt à étudier le degré de transformation qu'il y a à faire subir aux énoncés successifs sur lesquels on travaille (introduction d'éléments auxiliaires ou de notations supplémentaires, changements de formalisation, de points de vue, de cadres, ou même de stratégie), le degré d'adaptation des énoncés du cours qu'il y a à utiliser (contextualisation) et la longueur (moyenne!) du travail à fournir pour arriver au résultat (étapes indispensables).

Enfin selon les exercices il y a ou non plusieurs manières de procéder pour résoudre, et cela nous semble une caractérisation importante des exercices ouverts.

3) Dans le même ordre d'idées, il est intéressant de regarder systématiquement dans quel(s) cadre(s) on fait fonctionner les concepts dans chaque exercice étudié et s'il y a des changements de cadres à effectuer (soi-même ou non).

4) Une quatrième caractérisation, peut-être plus pertinente en géométrie, concerne le degré de généralité des énoncés.

Si on réfléchit à ce qu'il peut y avoir à faire dans un exercice, on arrive aux diverses possibilités suivantes : ou bien appliquer un invariant (exposé aux élèves dans le cours de façon décontextualisée) dans une situation particulière justifiable de la chose ; par exemple trouver que des droites dans une configuration donnée et particulière sont concourantes parce que ce sont les hauteurs d'un triangle. Il faut alors identifier dans la situation particulière l'invariant à utiliser.

Il se peut au contraire qu'il y ait à exploiter les particularités d'une situation pour trouver le résultat, qui alors n'est pas généralisable ; par exemple établir une convergence de suite liée à la forme très particulière de la suite.

Dans certains exercices enfin, il s'agit d'établir un nouvel invariant, avec un certain degré de généralité ; par exemple montrer que dans un triangle l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés. Dans ce dernier cas on peut ou non faire appliquer le résultat qu'on vient d'obtenir à une situation particulière et on peut ou non faire d'abord établir le résultat dans un cas particulier et le faire généraliser ensuite.

5) Une autre caractérisation concerne le degré d'implicite de l'énoncé, par exemple à propos d'existences (admises implicitement) : c'est souvent le cas dans des problèmes de construction. Ainsi, si on demande de construire un carré inscrit dans un quadrilatère, implicitement on suppose que ce carré existe, ce qui n'a rien d'évident dans un premier temps.

Les exercices d'optimisation procèdent souvent de même, faisant admettre sans l'annoncer qu'il existe un objet minimum ou maximum et faisant travailler directement dessus. Par exemple dans l'exercice suivant : "trouver le triangle de périmètre minimum inscrit dans un triangle donné" (problème de Fagnano). Or la démonstration est différente selon qu'on a à caractériser un triangle dont on sait qu'il existe (on démontre qu'un sommet quelconque est pied de la hauteur correspondante donc les trois) ou selon qu'il faut démontrer qu'il en existe un et le caractériser.

Dans le même ordre d'idées on peut analyser si toutes les hypothèses sont rappelées dans l'énoncé, par exemple dans quel plan (orienté ou non) on est, ou si tous les cas particuliers ont été repérés et ont un statut... Cela peut se traduire d'ailleurs par des hypothèses ou par des questions.

Nos hypothèses au sujet des textes d'exercices sont les suivantes.

En premier lieu, nous pensons qu'il faut proposer (selon les moments et les objectifs suivis) des exercices de tous les types aux élèves et ne pas se cantonner aux exercices fermés servant à faire mobiliser un concept dans un seul cadre.

Il serait important que les manuels proposent des formes d'exercices variées, pour faciliter les apprentissages par exemple par des mises en fonctionnement de changements de cadres, ou encore par des recherches de ce dont on dispose pour aborder un problème donné. Il s'agit aussi d'habituer les élèves à la pratique suivante :

contextualisation/décontextualisation/recontextualisation

qui nous semble susceptible d'engendrer une bonne dynamique de construction des connaissances.

Nous estimons de plus que cette variété permet d'établir un contrat non figé, et d'éviter que les élèves, même inconsciemment, ne se livrent à la recherche systématique d'indices extérieurs à la tâche au cas où il n'y aurait qu'un type d'exercices.

En fait, nous pensons que les exercices fermés vont plutôt être associés à des familiarisations (rendre mobilisables certaines notions), et les exercices ouverts à l'acquisition d'une certaine disponibilité (surtout s'ils sont l'occasion de jeux de cadres).

Certes, les exercices ouverts sont plus difficiles mais nous faisons l'hypothèse qu'ils peuvent être proposés moyennant des conditions à remplir pour en rendre possible la résolution (comme un apprentissage de méthodes, ou un travail en groupe ...).

Dans cet ordre d'idées, le fait de donner un titre aux exercices (quand c'est possible), nous semble important pour plusieurs raisons liées à cette ouverture éventuelle. Plus l'exercice est ouvert, plus il est important, nous semble-t-il, de lui donner un titre.

Le titre permet en effet aux élèves de préciser tout de suite le type du problème et son but (construction, étude de suites particulières ou générales, calcul d'aires ...), or de toutes façons l'élève aura à repérer ce type surtout s'il est confronté à un exercice ouvert.

Le fait d'habituer les élèves à des exercices dont on peut donner le titre est une indication implicite du fait que l'on peut classer de cette façon les exercices et qu'un exercice sert à démontrer quelque chose et pas seulement à vérifier des connaissances "ad hoc".

De plus dans une analyse d'exercices de manuels, le fait qu'il y ait un titre est l'indice qu'on propose effectivement de tels exercices.

D'autre part il nous semble que les élèves s'ils ont pris l'habitude d'avoir des titres (au début ils n'aiment pas ça, car c'est souvent l'indice d'un exercice où il va falloir s'investir...) peuvent être par la suite motivés par le fait qu'ils savent ce qu'ils sont en train d'obtenir. Cela peut aussi éventuellement enfin contribuer à mémoriser (même vaguement) le résultat.

Enfin nous pensons que les implicites (cf 5)) sont à éviter dans la mesure du possible, d'autant plus que cela amène à des ruptures de contrat et à des incohérences pour l'élève... Sauf si on en profite pour

faire travailler de manière critique les élèves sur les énoncés correspondants !

Analyse des exercices sur les nombres complexes en terminale C et E
(Collection Magnard, programme 1983) (par P. Pabion)

L'objet de ce travail est l'étude des exercices portant sur les nombres complexes proposés par l'ouvrage "Algèbre - Géométrie" terminales C et E de la collection Magnard (édition 1984, programme 1983).

Dans ce livre, l'étude des nombres complexes est divisée en deux chapitres, le chapitre 3 qui s'intitule "Corps des complexes" et le chapitre 4 "Applications des complexes, compléments de trigonométrie".

On s'intéresse exclusivement aux exercices proposés en fin de chapitre (il y a également des exercices, résolus ou non, tout au long de l'exposé du cours).

I Analyse a priori

On s'intéresse ici au degré d'implicite, au degré de généralité et au degré d'ouverture.

1) Degré d'implicite

Il arrive qu'un énoncé mette en jeu une expression de la forme $A(z)/B(z)$ sans que soit évoqué le problème du domaine de définition ; la restriction à ce domaine est alors implicite (cf exercice III-3 par exemple).

Il arrive également que l'on parle des racines $z_1(m)$ et $z_2(m)$ d'une équation paramétrée du second degré, et de l'application F telle que pour tout m appartenant à C ,

$$F(z_1(m)) = z_2(m),$$

sans donner un moyen de distinguer $z_1(m)$ et $z_2(m)$ qui sont alors insuffisamment définis.

Mais, mis à part ces quelques cas, le phénomène de l'implicite est quasiment inexistant.

2) Degré de généralité

Parfois, pour résoudre les exercices, il faut s'appuyer sur les particularités de la situation :

par exemple on utilise $(1+i)^4 = -4$ (exercice III-4),

ou encore dans l'exercice IV-19, on s'appuie sur des solutions particulières des équations proposées.

Dans d'autres exercices, on fait construire à l'élève un nouvel invariant et on l'applique (IV-60, IV-64 par exemple).

Mais dans la plupart des cas, il s'agit de mettre en oeuvre des outils présentés dans le cours (invariants, techniques ou méthodes).

3) Degré d'ouverture

Le but de l'exercice est quasiment toujours explicité, sauf peut-être dans l'exercice III-12 où on demande de "déduire une propriété du parallélogramme".

Généralement, l'essentiel de la méthode de résolution est donnée. Il n'y a donc pas d'exercice à proprement parler ouvert.

Remarque

On constate que ces axes d'analyse ne permettent qu'une qualification globale de l'ensemble des exercices étudiés, et que l'éventail de ces derniers est assez peu étendu par rapport à ce qui est a priori possible.

Il se pose donc maintenant le problème de trouver un indicateur qui ait un pouvoir séparateur effectif au niveau de notre matériau de travail :

nous allons voir que les distinctions faisant intervenir les changements de cadre et la présence ou l'absence d'indications sur les outils à utiliser conviennent.

II Distinction outil mobilisable/outil disponible et changements de cadres.

1) Construction d'une grille

On peut regrouper les outils que les élève sont à leur disposition pour travailler sur les nombres complexes en trois catégories :

- * techniques de base (algébriques, trigonométriques)
- * changements de cadres
- * invariants

Nous en avons fait la liste suivante, obtenue après une analyse rapide des exercices :

- * manipulations formelles sur les polynômes ou les équations
- * outils algébriques : identités remarquables, somme des n premiers termes d'une suite géométrique, formule du binôme
- * calcul formel sur les conjugués ou les modules
- * utilisation des formules $\operatorname{re}(z) = (z + \bar{z}) / 2$, $\operatorname{im}(z) = (z - \bar{z}) / 2i$
- * passage du cadre algébrique au cadre trigonométrique et réciproquement
- * passage du cadre algébrique au cadre géométrique et réciproquement
- * passage du cadre trigonométrique au cadre géométrique et réciproquement
- * passage du cadre formel au cadre géométrique et réciproquement
- * calcul dans le cadre algébrique
- * produit, quotient dans le cadre trigonométrique
- * formule de Moivre
- * calcul des racines carrées
- * calcul des racines nièmes
- * obtention des racines nièmes à partir de l'une d'elles et des racines de l'unité
- * résolution des équations du second degré
- * formules d'Euler
- * manipulations trigonométriques
- * outils géométriques

Il est bien clair que l'ordre de cette énumération est arbitraire.

Dans les exercices, chacun de ces outils peut être utilisé soit en tant qu'outil mobilisable (c'est donc qu'une indication a été donnée) soit en tant qu'outil disponible (de l'initiative de l'élève).

Nous avons traduit toutes ces informations dans la grille suivante :

en colonne nous indiquons la liste des outils ci-dessus, les exercices figurent en ligne, dans l'ordre dans lequel ils sont proposés dans le livre et dans la case (i,j) nous indiquons par un + que l'outil j est à utiliser dans l'exercice i en tant qu'outil mobilisable et par un - qu'il est considéré comme outil disponible.

Le fait qu'on présente les exercices dans l'ordre dans lequel ils sont proposés dans l'ouvrage en question permet de déceler une éventuelle progression dans la chronologie du manuel.

2) Analyse des résultats

La grille est jointe ci-contre. On distingue des nuages de points assez réguliers :

On constate que, dans la chronologie des exercices, les outils sont d'abord utilisés avec l'indication de leur emploi, puis sans cette indication. Ceci requiert de l'élève (s'il fait les exercices dans l'ordre) une palette de plus en plus large d'outils supposés disponibles, au fur et à mesure que l'on rend de nouveaux outils mobilisables (c'est ce qui se marque par l'obtention du triangle signalé ci-dessus).

Dans la colonne "disponible", on trouve en gros les exercices correspondant aux techniques de bases, dont l'utilisation se passe très vite d'indications.

Quant à la colonne "mobilisable", elle correspond aux exercices où il faut faire un changement de cadre, que l'on indique donc pratiquement toujours aux élèves...

III Conclusion

Le dernier constat semble indiquer que les auteurs du manuel se sont appuyés sur une conception plutôt "objet" des nombres complexes.

En effet le statut outil du concept repose essentiellement sur les relations qu'il établit entre les différents cadres qui lui sont associés (formel, algébrique ($a+ib$), trigonométrique, géométrique).

Exemples :

- * I-12 le cadre formel enrichit le cadre géométrique

- * I-20 la jonction entre le cadre algébrique et le cadre trigonométrique permet de calculer certaines fonctions trigonométriques

- * les exercices de trigonométrie reposent sur l'intégration du cercle trigonométrique dans le formalisme complexe (formules d'Euler)

- * II-40 la théorie des équations dans $\mathbb{C}$ enrichit celle des polynômes dans $\mathbb{R}$.

Par suite, les changements de cadre restant au stade d'outil mobilisable, il risque d'en être de même pour l'aspect outil des nombres complexes.

Forme algébrique — Conjugués

1. Écrire sous forme algébrique :

a) $(3 + 2i)(1 - i) - (2 - i)^2 + (5 - i)(5 + i).$

b) $i^7; (3 - i)^3; (1 + i)^5; (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})^8.$

c) $\frac{9 - 2i}{2i}; \frac{5 - 2i}{2 - 3i}; \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}.$

d) $(2 - 3i)^2 + \frac{17(3 + i)}{4 - i} + \frac{10 - i}{i}.$

e) $\frac{1}{5i} + \frac{2 - i}{2 + i} + \frac{i}{3 - i} + \frac{5 - 11i}{10}.$

f) $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^2}{(3 + 2i)^2 - (1 + i)^2}.$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations et les systèmes suivants :

a) $1 - 2iz + 4z = 3i(1 + 5i); \quad (z + 1)(z - i) = z^2 - 3.$

b) $(i - 5)z = (2 - i)(2 + i) - 5z; \quad (2 + 3i)^2 z + \frac{3i - 5}{i} = \frac{68i}{3i - 5} + 21.$

c) $z + \bar{z} - 4 = 0; \quad z - \bar{z} + 5 = 0.$

d) $z = 2\bar{z} + 5 - 6i; \quad iz + (2 + 3i)\bar{z} = 1.$

e) $\begin{cases} iz - 3z' = 2 - 3i \\ (1 + i)z + 2iz' = 5 - i; \end{cases} \quad \begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1. \end{cases}$

3. Quel est l'ensemble des z complexes tels que :

a) $(z + 1)(\bar{z} - 2) \in \mathbb{R} \quad b) \frac{z + 2i}{z - 4i} \in \mathbb{R}$

c) $(iz - z)(\bar{z} - 1)$ soit un imaginaire pur.

4. Calculer $(1 + i)^n$ suivant la valeur de l'entier naturel n .5. Calculer suivant la valeur de l'entier naturel n la somme $\sum_{k=0}^n i^k$.6. Démontrer sans développer que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$(1 + i)^n + (1 - i)^n$ est réel

$(1 + i)^n - (1 - i)^n$ est imaginaire pur.

7. Soit l'équation d'inconnue $z, z \in \mathbb{C}$:

(E) $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots + a_n z^n = 0$

où $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq p \leq n$ et où tous les a_p sont réels.Montrer que si z_0 est une solution de (E), $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (E).

Images. Affixes. Modules

8. Calculer les modules des complexes :

a) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{5})(\sqrt{2} + i\sqrt{5})$.

b) $\frac{1+i}{1-i}; \frac{3-2i}{2-3i}; \frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$.

c) $(3-2i)^4; \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{543}$.

9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 + 8i = |z|^2 - 2; \quad 2z^2 = 3|z|^2 + 1$.

b) $3\bar{z} - i = 5 + |z|^2; \quad |z| + z = 3 + 4i$.

10. Trouver l'ensemble des points M du plan complexe d'affixes z vérifiant une des relations suivantes :

a) $z + \frac{9}{z} \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{z+2}{z-5}$ est imaginaire pur.

c) $z + \bar{z} = |z|$.

d) $z + \bar{z} = |z|^2$.

e) Les points d'affixes i, z et iz sont alignés.

f) $\frac{|z-12|}{|z-8i|} = \frac{5}{3}$.

g) $\left| \frac{z-2}{iz+3} \right| = 1$.

h) $|z| = |1-z|$.

NB : pour les questions f), g) et h) on pourra utiliser soit une méthode algébrique, soit une méthode géométrique.

11. A, B, C, D sont quatre points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D .
Démontrer les équivalences :

a) ABCD est un parallélogramme $\iff z_A + z_C = z_B + z_D$

b) ABCD est un rectangle $\iff \begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ (z_C - z_A)(\bar{z}_C - \bar{z}_A) = (z_D - z_B)(\bar{z}_D - \bar{z}_B) \end{cases}$

12. Montrer que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

En déduire une propriété du parallélogramme.

13. Dans le plan complexe on donne les points A d'affixe $1 - i$ et B d'affixe $3 + 2i$.
Déterminer les affixes des points C et D tels que l'ensemble ordonné (A, B, C, D) soit un carré dont une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est $+\frac{\pi}{2}$.

(Bac E Rouen 1979 Rempt.)

22. Trouver le module et un argument de $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.

a) Pour quels entiers naturels n , z^n est-il réel? Calculer le plus petit de ces z^n .
b) Pour quels entiers naturels n , z^n est-il imaginaire pur?

23. En utilisant les images A et B des complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = -\sqrt{2}$ construire l'image M du complexe $z = -1 - \sqrt{2} + i$. En déduire la valeur exacte d'un argument de z .

Application : trouver les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{8}$ et $\sin \frac{7\pi}{8}$.

24. Mêmes questions que pour l'exercice précédent avec $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{2}$, $z = -1 + \sqrt{2} - i$ et l'angle $-\frac{3\pi}{8}$.

Suites et complexes

25. Calculer les sommes

$$S_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta \quad (\theta \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*) \quad (\text{on pourra former } S_n + i\Sigma_n).$$

$$\Sigma_n = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$$

26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $z = (1 + i)^n$ et $z' = (1 - i)^n$.
Calculer le module et un argument de z et de z' . Calculer $z + z'$ et $z - z'$.
Application : trouver la valeur des sommes

$$S = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$

$$S' = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$$

27. On appelle j le complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

1) Calculer j^2 , j^3 ; montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2) Calculer $(1 + j)^n$, $(1 + j^2)^n$ et $(1 + 1)^n$. ($n \in \mathbb{N}^*$).
En déduire la valeur de la somme

$$S_n = 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3p} + \dots \quad \left(p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq p \leq \frac{n}{3} \right).$$

28. Soit U et V deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout entier n associent respectivement U_n et V_n définis par :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})U_n + 3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = U_n - i\sqrt{3}.$$

Calculer V_0 . Déterminer une relation entre V_{n+1} et V_n , en déduire en fonction de n l'expression de V_n puis celle de U_n pour tout entier naturel n .

(D'après Bac C Amiens 1978.)

29. Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à $]0, \pi[$. On considère :

$$S_n = \sum_{p=1}^n \cos^p \theta \cos p\theta; \quad S'_n = \sum_{p=1}^n \cos^p \theta \sin p\theta; \quad \Sigma_n = S_n + iS'_n.$$

Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe, dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire la valeur de Σ_n puis de S_n en fonction de n et θ . (On

montrera que $S_n = \frac{\cos^{n+1} \theta \sin n\theta}{\sin \theta}$.)

(Bac C Grenoble 1980.)

Exercices généraux

30. On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de modules 1 et d'arguments respectifs α et β .

1) Montrer que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul. Dans quel cas est-il nul?

2) Soit deux points A et B d'un plan complexe d'origine O d'affixes respectives a et b (on supposera O, A et B non alignés).

Calculer en fonction de a et b l'affixe z du point I barycentre de (A, |b|) et (B, |a|).

3) A l'aide du 1) montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif. Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$.

En déduire que $\vec{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

(Bac C Montpellier 1982.)

31. Dans le plan complexe P on considère l'application f qui transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe z' :

$$z' = 3iz + (i - 3)\bar{z} + 1 - i$$

1) Calculer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.

2) Démontrer que f est involutive.

3) Trouver l'ensemble (D) des points invariants par f .

4) Montrer que pour tout M de P le vecteur $\vec{MM'}$ a une direction fixe et que le milieu du segment [MM'] appartient à D.

Reconnaitre l'application f .

(D'après Bac C Antilles 1981.)

32. Le plan P étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère :

le point M d'affixe $z = x + iy$, x et y réels,

le point M' d'affixe $z' = x + 4iy$,

les points A et B d'affixes respectives -7 et 5 .

Quelles conditions doit vérifier z pour que l'on ait :

$$M \neq A \quad \text{et} \quad M' \neq B?$$

Ces conditions étant remplies, on considère les droites (AM) et (BM').

1) Montrer que : (AM) est parallèle à (BM') si et seulement si $\frac{z+7}{z'-5} \in \mathbb{R}^*$. En déduire l'ensemble (C_1) des points M tels que les droites (AM) et (BM') soient parallèles. Construire (C_1) .

2) Déterminer, de la même manière l'ensemble (C_2) des points M tels que les droites (AM) et (BM) soient perpendiculaires. Construire (C_2) .

(Bac C Bordeaux 1980)

33. On considère l'application φ de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$. On note $\varphi(z) = Z$.

m désigne le point d'affixe z , M celui d'affixe Z , A et A' les points d'affixes respectives 1 et -1 . On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X et Y réels.

1) Déterminer par le calcul :

a) l'ensemble des points m tels que Z soit réel,

b) l'ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur.

2) a) Quelles distances représentent $|1 - z|$ et $|1 + z|$?

Déterminer l'ensemble des points m tels que $|Z| = 1$.

b) Démontrer que l'ensemble (C_k) des points m tels que $|Z| = k$, où k est un réel strictement positif différent de 1, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Chapitre 3 / Corps des complexes

3) a) Quel angle a pour mesure $\arg \frac{1+z}{1-z}$?

b) Déterminer l'ensemble des points m tels que $\theta = \arg \frac{1+z}{1-z}$ dans les cas suivants :

α) $\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$; $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$; $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$. Expliquer pourquoi on retrouve les résultats de 1).

β) θ quelconque.

(D'après Bac C Rouen 1979.)

34. On définit dans $\mathbb{C}$ une relation α de la façon suivante :

pour tout z de partie réelle a et de partie imaginaire b et pour tout z' de partie réelle a' et de partie imaginaire b' ,

$$z \alpha z' \iff \begin{cases} a < a' \\ \text{ou} \\ \begin{cases} a = a' \\ b < b' \end{cases} \end{cases}$$

1) Montrer que cette relation est une relation d'ordre. Ordonne-t-elle totalement l'ensemble $\mathbb{C}$?

2) On appelle « positif » tout complexe z vérifiant $0 \alpha z$.

Le produit de deux positifs est-il toujours un positif ?

A votre avis pourquoi ne retient-on pas cette relation d'ordre ?

35. Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1 . On considère dans le plan complexe, n points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

1) Démontrer que le système de points pondérés $\{(A_k, q^k), 0 \leq k \leq n-1\}$ admet un barycentre G_n .

2) On donne :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, z_k = (z_1)^k \end{cases}$$

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n à l'aide de q et z_1 .

b) Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n (on rappelle que $X_n = \frac{Z_n + \overline{Z_n}}{2}$, $Y_n = \frac{Z_n - \overline{Z_n}}{2i}$).

3) a) Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel ?

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n$.

(Bac C Dijon 1980.)

36. On considère la loi de composition interne dans $\mathbb{C}$, notée $*$, ainsi définie : pour tous complexes $z = \alpha + \beta i$ et $z' = \alpha' + \beta' i$ ($\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ réels)

$$z * z' = \alpha\alpha' + (\alpha\beta' + \beta\alpha')i.$$

1) Quelle est la restriction de la loi $*$ à $\mathbb{R}$?

Quelle est la restriction de la loi $*$ à l'ensemble des imaginaires purs ?

2) On note $z^{(0)} = 1$, $z^{(1)} = z$ et $z^{(n)} = z^{(n-1)} * z$ pour tout entier naturel non nul n .

a) Calculer $z^{(2)}$ puis $z^{(n)}$ pour $n > 2$. Exprimer $z^{(n)}$ en fonction de α, β et n .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^{(2)} = 1$; $z^{(3)} = 1$; $z^{(n)} = 1$; $z^{(2)} - z - i = 0$.

3) Dans le plan complexe on considère le point M_1 d'affixe $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et les points $M_2, M_3, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_2 = z_1^{(2)}, z_3 = z_1^{(3)}, \dots, z_n = z_1^{(n)}$.

Dessiner les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 .

Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n .

Trouver les limites des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(D'après Bac C Lyon 1977.)

37. A) Soit la loi de composition interne $*$ définie sur $\mathbb{C}$ par $z * z' = \bar{z} \cdot z'$ où z et z' sont des complexes.
- 1) Cette loi est-elle commutative? est-elle associative? Existe-t-il un élément neutre?
 - 2) Discuter et résoudre dans $\mathbb{C}$ suivant les valeurs de m et k , l'équation $z * m = k$.
 - 3) Existe-t-il z complexe tel que $(z * z) * z = i$?
- B) Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P^* le plan P privé de O . Pour chaque $k \in \mathbb{C}^*$, on définit l'application T_k de P^* dans lui-même, qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z * z' = k$.
- 1) Pour quelles valeurs de k , l'application T_k est-elle involutive?
 - 2) On prend $k = a^2$, $a \in \mathbb{R}^*$ et on note $f = T_{a^2}$.
 - a) Quel est l'ensemble des points invariants par f ?
 - b) Démontrer que les points O, M, M' sont alignés et que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = a^2$.
 - c) Montrer que les coordonnées (x, y) de M et celles (x', y') de $M' = f(M)$ sont liées par les relations

$$\begin{cases} xx' + yy' = a^2 \\ xy' - yx' = 0. \end{cases}$$
 - d) Quelles sont les images par f
 - ① des droites passant par O (O exclu)?
 - ② des cercles de centre O ?
 - ③ des droites d'équation $x = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)?
 - ④ des cercles centrés sur la droite $(O, \vec{i})$ et passant par O (O exclu)?

Pour les questions ③ et ④ on utilisera les relations démontrées au c) et on fera une figure pour $\lambda = a$.

38. Justification de la notation $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

1) x étant un réel quelconque et n un entier naturel non nul, on pose $X_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = e^x$.

2) z étant un complexe quelconque et n un entier naturel non nul, on pose $Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.
Soit x et y les parties réelle et imaginaire de z .

a) Soit ρ_n le module de Z_n ; montrer que : $\ln \rho_n = \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)$.

Soit $\varepsilon_n = \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}$, montrer que : $\ln \rho_n = \frac{\ln(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} \times \frac{n\varepsilon_n}{2}$.

En utilisant ce produit trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln \rho_n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = e^x$.

b) Montrer que pour tout z de $\mathbb{C}$ on peut trouver, pour n assez grand, un argument, α_n , de $1 + \frac{z}{n}$ qui vérifie : $-\frac{\pi}{2} < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$.

Calculer $\tan \alpha_n$ en fonction de n, x et y . En déduire qu'un des arguments, θ_n , de Z_n peut s'écrire

$$\theta_n = \frac{\alpha_n}{\tan \alpha_n} \times \frac{n y}{n + x}.$$

En utilisant ce produit montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = y$.

3) En comparant les résultats des questions 1) et 2), montrer que l'on est amené à poser :

$$e^x (\cos y + i \sin y) = e^z,$$

c'est-à-dire, pour tout y réel :

$$\cos y + i \sin y = e^{iy}.$$

Exercices

Racines complexes d'ordre n

1. Mettre sous forme trigonométrique les racines d'ordre n du nombre complexe Z suivant, et représenter ces racines par leurs images ponctuelles dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) $Z = -32, \quad n = 5.$

b) $Z = -i, \quad n = 6.$

c) $Z = 1 + i, \quad n = 3.$

d) $Z = -8\sqrt{3} - 8i, \quad n = 8.$

e) $Z = 16 - 16i\sqrt{3}, \quad n = 5.$

f) $Z = 4\sqrt{2}(1 - i), \quad n = 6.$

g) $Z = \frac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}}, \quad n = 3.$

2. En utilisant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^3 = -27;$

c) $z^6 = 8i$ (on calculera d'abord $(1 - i)^6$).

d) $z^4 = -8(1 + i\sqrt{3})$ (on vérifiera que $\sqrt{3} - i$ est une solution).

3. Calculer les racines carrées des complexes Z suivants (On donnera les valeurs exactes des solutions)

a) $Z = i$

$Z = 1 + i$

$Z = -\sqrt{3} + i$

b) $Z = 24 + 7i$

$Z = 5 - 12i$

$Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$

c) $Z = 4 - 3i$

$Z = 9 + 40i$

$Z = 45 - 28i$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 3 + 4i$. (On donnera les valeurs exactes des solutions.)

5. 1) Trouver dans l'ensemble des complexes les racines 6^e de -1 .
2) Mettre $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de 6 binômes du premier degré, puis sous forme d'un produit de 3 polynômes du second degré à coefficients réels.

6. 1) Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ dans l'ensemble des nombres complexes.

2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.

3) Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

(Bac C Reims 1982)

7. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ la somme des racines d'ordre n d'un nombre complexe z est égale à 0

8. On considère le nombre complexe $u = 2 - 2i\sqrt{3}$.

1) Mettre u sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.

2) Déterminer par la méthode algébrique les nombres complexes X tels que $X^2 = u$, puis les nombres complexes z tels que $z^4 = u$.

3) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

(Bac C Montréal 1977)

9. 1) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(E) (2z)^5 - (z+1)^5 = 0$ et vérifier qu'elle admet une racine réelle. (On pourra prendre comme inconnue auxiliaire $Z = 1 + \frac{1}{z}$).
- 2) Vérifier que, dans un plan rapporté à un repère orthonormé, les images des racines de (E) appartiennent au cercle (C) d'équation : $3(x^2 + y^2) - 2x - 1 = 0$.
Montrer que, pour tout entier strictement positif n , les images des racines de l'équation $(2z)^n - (z+1)^n = 0$ appartiennent au cercle (C).

(Bac C Groupe 1 1977.)

Équations du second degré

10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $13z^2 - 4z + 1 = 0$	h) $(1 - i)z^2 - 2(3 - 2i)z + 9 - 7i = 0$
b) $-z^2 + 5z - 7 = 0$	i) $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$
c) $z^2 - (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$	j) $iz^2 + (8 + 4i)z + 3i + 8 = 0$
d) $z^2 + (3 - 2i)z - (3i + 4) = 0$	k) $z^2 - (11 + 2i)z + 21 + 25i = 0$
e) $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$	l) $2z^2 + (i - 1)z + i + 1 = 0$
f) $z^2 - (11 + 5i)z + 24 - 27i = 0$	m) $z^2 - 2(5 - i)z - 12i = 0$
g) $z^2 - 2(1 + i)z + i - 1 = 0$	

11. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 1 + i(3z + 5) = 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$.
3) En déduire quatre nombres réels a, b, c, d tels que

$$(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$$

(Bac E Clermont 1978.)

12. Soit φ un nombre réel donné appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z \cos^2 \varphi + 1 = 0$ où z désigne l'inconnue.
Donner, en fonction de φ , le module et un argument de chaque solution.
- (Bac E Aix 1978.)

13. A étant le point du plan complexe d'affixe $a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$), on considère l'équation d'inconnue z ($z \in \mathbb{C}$) : $z^2 + (1 - b)z + a = 0$.
- 1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b , pour que l'équation admette une racine double.
Représenter dans le plan complexe l'ensemble (Γ) des points A (d'affixe $a + bi$) correspondants.
- 2) Préciser suivant la position du point A dans le plan la nature des racines de l'équation.
- (Bac C Nice 1979.)

14. 1) Mettre le polynôme p , à variable complexe z , défini par : $p(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$, sous la forme d'un produit de deux polynômes complexes du second degré.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$, et montrer que p est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

(Bac C Amérique Centrale 1981 - partiel.)

15. 1) Calculer les racines carrées du nombre complexe $(-2i)$.
 2) m est un paramètre complexe. Résoudre l'équation en z :

$$z^2 - [m(1+i) + 2]z + im^2 + m(1+i) + 1 = 0 \quad (E).$$

 3) Montrer qu'il existe une relation indépendante de m entre les solutions z_1 et z_2 de (E) .
 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M_1 et M_2 sont les points images de z_1 et z_2 . Reconnaitre l'application F , indépendante de m , telle que $F(M_1) = M_2$. (On utilisera le point A , image de 1 .)

(Bac E La Réunion 1978 Remp¹.)

16. On considère l'équation : $(i-1)z^2 - 2i(m+1)z + (1+i)(m^2+1) = 0$
 dans laquelle z est l'inconnue et m un paramètre complexe.
 a) Résoudre cette équation dans le corps des nombres complexes. On désignera par z_1 et z_2 les racines, z_2 étant la racine qui devient réelle quand on substitue 0 à m .
 b) Montrer que le rapport $\frac{z_2 - (1-i)}{z_1 - (1-i)}$ est indépendant de m .
 Soit M_1 et M_2 les images respectives de z_1 et z_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 Montrer que M_2 se déduit de M_1 par une transformation que l'on caractérisera avec précision.
 (D'après Bac C Poitiers 1978.)

17. Soit $p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2pZ + 1 = 0$. On note Z' et Z'' les solutions de cette équation. Dans P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, P, M', M'' d'affixes respectives $1, -1, p, Z', Z''$.
 a) Montrer que P est le milieu de $[M', M'']$, que $OM' \cdot OM'' = OA^2 = OB^2$ et que (Ox) est bissectrice de $\{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}\}$.
 b) Calculer $(Z' - p)^2$ et $(Z'' - p)^2$ en fonction de p . En déduire que :
 $PB \cdot PA = PM'^2 = PM''^2$ et $(M'M'')$ est bissectrice de $\{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\}$.

18. Soit la famille d'équations : $z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0 \quad (E_\theta)$
 dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; à tout complexe $z = x + iy$, (x, y) étant un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on associe le point M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{P}$.
 1) Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser les cas de racines doubles.
 2) Soit $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de $\mathcal{P}$ associés aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.
 a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 b) Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle C que l'on précisera.
 c) Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ .
 d) θ étant donné (on fera la figure avec $\theta = \frac{\pi}{6}$), déduire de ce qui précède une construction simple de $I(\theta)$ et des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$.
 Une figure soignée comportera tous les éléments intéressants de l'exercice.

(Bac C Paris 1980.)

Équations de degré supérieur à 2

19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations qui suivent. (On commencera par déterminer la solution z_0 indiquée).

- a) $z^3 - 6z^2 + (12 + 2i)z - 8 - 4i = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
- b) $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z - 1 - 5i = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
- c) $z^3 - (1 + 8i)z^2 + (-7 + 17i)z - 10i + 30 = 0$, z_0 est imaginaire pur.
- d) $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1 = 0$, z_0 est imaginaire pur.
- e) $z^3 + 2(3 - 2i)z^2 + (8 - 15i)z + 3 - 11i = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
- f) $z^3 + (3 + 2i)z^2 + (3 - i)z + 2(1 - 5i) = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
- g) $z^3 - 2(i + 1)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$, $z_0 = 1 - i$.
- h) $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 5i)z - (6i + 2) = 0$, z_0 est imaginaire pur.
- i) $2z^3 - 5z^2 + (5 - 2i)z + 3(i - 1) = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.
- j) $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$.

20. Soit P le polynôme de variable complexe z défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^3 - (5 + 2i)z^2 + (11 + 5i)z - 12i.$$

- 1) a) Montrer que P admet une racine imaginaire pure et la déterminer.
- b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- 2) Donner la représentation de ces solutions dans le plan complexe. On appelle A, B, C les images des racines de l'équation $P(z) = 0$.
Déterminer la nature du triangle ABC .
Déterminer l'abscisse de l'isobarycentre des points A, B, C .

(Bac. E Bordeaux 1978 Remp¹.)

21. 1) On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (4 - i)z + (12 - 6i) = 0$$

Montrer que cette équation possède une racine réelle z_1 . Trouver les deux autres racines z_2 et z_3 de cette équation.

2) On se place dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Montrer que les trois points A, B, C d'abscisses respectives z_1, z_2, z_3 sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

22. 1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20 = 0$

- a) Montrer que $z_0 = 2i$ est une des racines de cette équation.
- b) Calculer alors les deux autres racines z_1 et z_2 .
- 2) Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A, B et C les points de (P) d'abscisses respectives z_0, z_1, z_2 .
- a) Déterminer l'abscisse du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $-1, 1, 1$.
- b) Déterminer l'ensemble des points M de (P) tels que :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 36.$$

(Bac E Grenoble 1979.)

23. Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$$

- 1) Démontrer que cette équation admet une racine réelle. En déduire les autres solutions, dont on donnera la forme trigonométrique.

2) Démontrer que ces racines sont les éléments d'une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe.

(Bac C Caen 1977.)

24. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z^3 + az^2 + bz - 42 + 24i$ où a et b sont des éléments de $\mathbb{C}$.

1) Déterminer a et b sachant que $\begin{cases} f(1) = -44 + 32i \\ f(-1) = -30 + 16i \end{cases}$.

2) On suppose, dans cette question, que $\begin{cases} a = 5 \\ b = -8 + 8i \end{cases}$. Démontrer qu'il existe un réel r , et un seul, tel que $f(r) = 0$, et résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $f(z) = 0$. (E)
On appelle z_1, z_2 et z_3 les solutions de (E); on note Z le complexe $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$. Calculer Z . Déterminer le module et un argument de Z .

(Bac C Nantes 1978.)

25. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) : $z^3 - \lambda(1+i)z^2 + i\lambda^2 z = 0$

dans laquelle λ est un nombre complexe donné non nul.

Montrer que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, les images des racines de l'équation (1) sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

2) Déterminer λ pour que l'équation (1) admette le nombre $(1+i)$ pour racine. Résoudre l'équation (1) dans chaque cas trouvé.

3) On suppose que l'image M du nombre λ décrit dans le plan complexe le cercle d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$.

Donner avec précision l'ensemble des images, dans le plan complexe, des racines de l'équation (1).

26. 1) Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $|z+i| = |z-i|$. Montrer que ses solutions sont réelles.

2) Soit l'équation (E) : $(z+i)^3 = i(z-i)^3, z \in \mathbb{C}$.

a) Dédire du 1) que les solutions de (E) sont réelles.

b) Résoudre (E) en posant $Z = \frac{z+i}{z-i}$.

c) Montrez que ces solutions peuvent s'écrire sous la forme $z = \tan \alpha$,
Déterminez les valeurs de α

3) En développant l'équation (E), déduire une autre méthode de résolution de (E) (on remarquera que -1 est une solution de (E)). De la comparaison des 2 méthodes, déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{12}$.

27. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$;

d) $z^4 - (3+i)z^2 + 2(1+i) = 0$;

b) $3z^4 + 2z^2 + 1 = 0$;

e) $z^4 - (10i-5)z^2 - 14i - 48 = 0$;

c) $z^4 + (5-i)z^2 + 4 - 4i = 0$;

f) $z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$.

28. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel θ l'équation d'inconnue z :

$$z^4 - 2z^2 \cos \theta + 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

29. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^4 + 3z^2 + 1 = 0$. Montrer que les solutions sont conjuguées deux à deux. Écrire le polynôme $4z^4 + 3z^2 + 1$ sous forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

Chapitre 4 / Applications des nombres complexes.

30. Trouver les valeurs de z complexe pour lesquelles le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - z^2 + 1$ s'annule. En déduire une factorisation de $P(z)$. Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.

31. θ est un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue u : $u^2 - 2(\sin \theta)u + \tan^2 \theta = 0$.
Donner le module et un argument des deux solutions de cette équation quand elles sont distinctes.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^4 - 2(\sin \theta)z^2 + \tan^2 \theta = 0$.

(Bac E Lille 1979 Remp')

32. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- a) $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$;
- b) $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$;
- c) $z^6 + (1 - 2i)z^3 - 2i = 0$;
- d) $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + 16z - 52 = 0$ (sachant que cette équation a deux solutions réelles opposées).
- e) $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7 = 0$ (on cherchera des solutions parmi $1, -1, i, -i$).
- f) $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

33. On considère l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto z^4 - z^3 + z^2 + 2.$$

- 1) a) Montrer que si l'équation $f(z) = 0$ (1) admet pour racine le nombre complexe α , elle admet aussi pour racine $\bar{\alpha}$.
- b) Montrer que $1 + i$ et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont racines de l'équation (1).
- c) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (1)? En déduire une factorisation de $f(z)$.
- 2) Montrer que f est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

(Bac C Cambodge 1977.)

34. Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1 \quad (z \in \mathbb{C})$.

- 1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'équation $P(z) = 0$, alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ sont aussi des racines de cette équation.
- 2) Vérifier que $1 + i$ est une racine de l'équation $P(z) = 0$, puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
- 3) Écrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes du deuxième degré à coefficients réels.

(Bac C Djibouti 1977.)

35. Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1 + 2i)z^3 - 4(1 - 6i)z^2 - 8\sqrt{3}(4 - 6i)z - 192.$$

Démontrer qu'il existe deux éléments a et b de $\mathbb{C}$ tels que pour tout élément de $\mathbb{C}$:

$$f(z) = (z^2 + 2\sqrt{3}z + 12)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Préciser le module et l'argument de chaque solution. Calculer le produit de ces quatre racines.

(Bac C Bordeaux 1982.)

36. On pose, pour tout nombre complexe z ,

$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + 3 - 2i.$$

1) Montrer que le polynôme $f(z)$ possède une, et une seule, racine réelle z_0 que l'on déterminera. En déduire une factorisation de $f(z)$ sous la forme $(z - z_0)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme complexe du 3^e degré que l'on précisera.

2) Vérifier que $Q(i) = 0$; en déduire les solutions de l'équation $f(z) = 0$, ($z \in \mathbb{C}$).

3) On note P un plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

z_1, z_2 et z_3 désignant les solutions de l'équation : $Q(z) = 0$, on appelle M_0, M_1, M_2 et M_3 les points de P d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3 . Montrer que (M_1, M_2, M_3) est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_0 et faire la figure correspondante.

(Bac C Rouen 1981.)

37. On considère dans $\mathbb{C}$: $f(z) = 2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9$.

a) Montrer que si z_0 est une racine de l'équation $f(z) = 0$, il en est de même pour $\bar{z}_0$.

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une solution de la forme $a(1 + i)$; $a \in \mathbb{R}$.

c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

(Bac C Aix 1978 Remp^l.)

38. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation en z :

$$z^6 - 9iz^3 + 18 - 26i = 0 \quad (1)$$

et l'équation en Z :

$$Z^3 - 1 = 0. \quad (2)$$

1) Montrer que $(2 + i)$ et $(1 - i)$ sont des racines de l'équation (1).

2) Résoudre l'équation (2).

3) Montrer que si z_0 est une racine de (1) et Z_0 une racine de (2), alors $z_0 Z_0$ est une racine de (1). En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

(Bac C Canada 1979.)

39. On considère les équations : (1) $z^5 - 1 = 0$

$$(2) z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

1) Résoudre l'équation (1), et en déduire les solutions de l'équation (2).

2) Soit le polynôme $P(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

a) Vérifier que $P(z) = z^2 \left[\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 \right]$, pour $z \neq 0$

b) On pose $u = z + \frac{1}{z}$.

Mettre $P(z)$ sous la forme : $P(z) = z^2 f(u)$, où f est un trinôme du second degré en u .

c) Résoudre l'équation $f(u) = 0$, et en déduire les solutions de l'équation (2).

3) En comparant les résultats obtenus pour la résolution de l'équation (2), en déduire les valeurs de :

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{4\pi}{5}, \quad \sin \frac{2\pi}{5}, \quad \sin \frac{4\pi}{5}.$$

40. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^{2n} - 1 = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $S(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n-2}$.

1) Calculer $S(z)$.

2) Résoudre (E). En déduire que les solutions de l'équation $S(z) = 0$ sont :

$$\left\{ z_k = \left[1, \frac{k\pi}{n} \right] / k \in I \right\} \quad \text{où } I = \{1, 2, \dots, 2n-1\} - \{n\}.$$

3) Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $k' = 2n - k$. Quel est l'ensemble décrit par k' . Comparer z_k et $z_{k'}$. En déduire que le polynôme $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ est à coefficients réels. L'exprimer en fonction de z , k , n .

Montrer que $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$.

4) En considérant $S(i)$, calculer le produit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}.$$

5) En considérant $S(1)$, montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Trigonométrie : linéarisation

41. Calculer (pour $\varphi \in \mathbb{R}$) :

- a) $\cos 9\varphi$, et $\sin 8\varphi$, en fonction de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.
 b) $\tan 6\varphi$, et $\tan 7\varphi$, en fonction de $\tan \varphi$.

42. Linéariser les produits : ($\varphi \in \mathbb{R}$)

- a) $\cos^3 \varphi$; $\sin^3 \varphi$; $\cos^4 \varphi$; $\sin^5 \varphi$.
 b) $\cos^2 \varphi \sin^4 \varphi$; $\cos^4 \varphi \sin^3 \varphi$; $\cos^2 \varphi \sin^5 \varphi$.
 c) $2^{2n} \cos^{2n} \varphi$ ($n \in \mathbb{N}^*$); $2^{2n+1} \sin^{2n+1} \varphi$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

43. Calculer, sans utiliser la calculatrice, la valeur exacte de :

- a) $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8}$.
 b) $\sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30}$.

44. Trouver les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

- a) $f : x \mapsto \cos^3 x \sin^2 x$; $g : x \mapsto \sin^4 x$.
 b) $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^4 x$; $g : x \mapsto \cos^6 x$.
 c) $f : x \mapsto \cos^4 x \sin^2 x$; $g : x \mapsto \cos^8 x$.

45. Trouver une des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

- a) $f : x \mapsto \sin 4x \sin 2x$; $g : x \mapsto \cos 6x \cos x$.
 b) $f : x \mapsto \sin 8x \cos 5x$; $g : x \mapsto \cos 2x \cos 3x$.
 c) $f : x \mapsto \sin 5x \cos 7x$; $g : x \mapsto \sin 5x \sin 3x$.

46. Trouver la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f , définie par $f(x) = \cos 3x \cos 5x \sin 4x$, qui est nulle pour $x = 0$.

47. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$.

48. On considère les deux sommes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$P = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$Q = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$$

1) Linéariser chacun des produits $2P \sin \frac{x}{2}$ et $2Q \sin \frac{x}{2}$

Écrire ensuite chacune de ces expressions sous forme d'un produit.

2) En déduire P et Q.

Vérifier par récurrence les résultats trouvés.

Trigonométrie : factorisation

49. Mettre $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sous forme d'un produit de fonctions trigonométriques, $f(x)$ ayant les valeurs suivantes :

a) $f(x) = \sin^2 2x - \sin^2 3x$.

e) $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

b) $f(x) = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos^2 (2x + \pi)$.

f) $f(x) = \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$.

c) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 4x$.

g) $f(x) = \sin x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x$.

h) $f(x) = \cos x - \cos 2x + \sin 2x - \sin 3x$.

d) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2 \sin \frac{3x}{2}$.

i) $f(x) = \sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.

50. Simplifier les fractions suivantes ($x \in \mathbb{R}$). On précisera dans chaque cas leur ensemble de définition.

a) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 3x}$.

b) $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x}$.

c) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$.

51. Mettre $\frac{\cos a - \cos b}{\tan a + \tan b}$ sous forme de produit et quotient de fonctions trigonométriques.
($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et on suppose $\tan a + \tan b \neq 0$).

52. A, B et C étant trois réels tels que $A + B + C = \pi$, mettre les expressions suivantes sous forme d'un produit de fonctions trigonométriques :

a) $\sin A + \sin B + \sin C$.

d) $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$.

b) $1 - \cos A + \cos B + \cos C$.

e) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.

c) $\sin A - \sin B + \sin C$.

53. Mettre sous la forme du produit d'un sinus ou d'un cosinus par un réel positif les expressions suivantes :

a) $\sin x - \cos x$; $-\cos x + \sqrt{3} \sin x$.

b) $-\cos x - \sin x$; $\sqrt{3} \cos x + \sin x$.

c) $3 \cos x - 4 \sin x$ (valeur approchée).

d) $\sqrt{26} \sin x - 8 \cos x$ (valeur approchée).

Équations et inéquations trigonométriques

54. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$

b) $\sin x + \sin 3x = \sin 5x + \sin 7x.$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}.$

d) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 3x - \cos 5x.$

e) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}.$

f) $-\sin x - \cos x = \frac{3}{2}.$

g) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

h) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = 1.$

i) $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{5}$ (valeurs approchées).

j) $\cos 2x - 2 \sin 2x = 1$ (valeurs approchées).

55. Discuter suivant la valeur du paramètre réel m l'existence des solutions des équations suivantes, d'inconnues x , $x \in \mathbb{R}$:

a) $3 \sin x + m \cos x - 5 = 0.$

b) $(2m - 1) \cos x - (2m + 1) \sin x = m.$

56. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0.$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sin(x + \pi).$

c) $\cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

d) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 0.$

e) $\sin 2x > \sin 3x.$

f) $\cos x - \cos 4x < 0.$

g) $\sin x + \cos x > 0.$

h) $\sqrt{3} \cos x + \sin x > \sqrt{2}.$

i) $\sin x - \cos x \leq -\sqrt{3}.$

j) $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x \leq 1.$

k) $2 \cos x + \sin x < \frac{1}{2}.$

57. Étudier suivant les valeurs du réel x ($-\pi \leq x \leq \pi$) le signe des expressions suivantes :

a) $\sin x + \sin 5x.$

b) $\cos x - \cos 4x.$

c) $\sin x + \cos 3x.$

58. Montrer qu'il existe un réel a , appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que, quel que soit le nombre strictement positif k satisfaisant aux relations $a - k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $a + k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les trois nombres $\sin^2(a - k)$, $\sin^2 a$ et $\sin^2(a + k)$ soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

(Bac C Sud Viet Nam 1971.)

59. a) Étudier les variations de la fonction

$$f : [-\pi, +\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^4 x + 2 \cos^3 x + 1.$$

Tracer la courbe représentative F de f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra le centimètre comme unité de longueur.

b) Calculer $\cos^3 x$ en fonction de $\cos 3x$ et de $\cos x$. Calculer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$. En déduire la primitive F de la fonction f qui est nulle pour $x = 0$. Calculer $F(\pi)$.

(D'après Bac C Clermont 1978 Remp¹)

60. a, b et c étant trois réels donnés tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, on considère l'équation :

$$a \cos x + b \sin x = c \quad (E) \quad \text{d'inconnue } x, x \in \mathbb{R}.$$

- 1) a) Transformer cette équation par les formules d'Euler et montrer, qu'en posant $z = e^{ix}$, on obtient une équation du second degré en z , (E') dont le coefficient de z est réel.
b) Calculer le discriminant réduit Δ' de (E') .
- 2) a) A quelle condition Δ' est-il négatif? On posera alors $\Delta' = -\delta^2, \delta \in \mathbb{R}_+.$
b) Montrer qu'alors l'équation (E') a deux solutions, éventuellement égales, de module 1.
c) En déduire dans ce cas le nombre de solutions de (E) à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).
- 3) a) A quelle condition Δ' est-il strictement positif? On posera alors $\Delta' = \delta^2, \delta \in \mathbb{R}_+.$
b) Résoudre alors l'équation (E') .
c) En utilisant le produit des racines de (E') montrer que le produit des modules de ces racines est 1.
d) Montrer que l'une des solutions de (E') a un module strictement supérieur à 1, en déduire la norme de l'autre par rapport à 1.
e) Quelles sont finalement dans ce cas les solutions de (E) ?

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en appliquant la méthode précédente, les deux équations :

- a) $\cos x - 2 \sin x = 2\sqrt{2}.$
- b) $3 \cos x + \sin x = 2$ (on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des solutions).

Problèmes généraux

61. On considère le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}.$

- 1) On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6.$
Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive.
- 2) Calculer $S + T$, ST puis en déduire S et $T.$

(Bac C Orléans 1979.)

62. 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1.$
Représenter les images des solutions dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$: A_0 est l'image de la solution réelle z_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les images respectives des solutions z_1, z_2, z_3 et z_4 , rencontrées dans cet ordre en suivant le cercle trigonométrique dans le sens positif.
- 2) Montrer que la somme $\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA_0}.$ Montrer qu'elle est aussi colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA_1}.$ En déduire sa valeur, ainsi que celle de la somme $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4.$
- 3) Soit l'ensemble $E = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}.$
Montrer que le conjugué de chaque élément de E est un élément de E , et que le produit de deux éléments de E quelconques est un élément de $E.$
- 4) Calculer les carrés des distances : $x = A_0A_1^2$ et $y = A_0A_2^2.$
Donner les résultats sous forme d'expressions du premier degré par rapport aux éléments de $E.$
- 5) Calculer $x + y$ et $xy.$
En déduire les valeurs de x et y , puis les longueurs des côtés des pentagones réguliers, convexe et étoilé, inscrits dans le cercle de rayon 1.

63. 1) Démontrer que, si $|z| = 1$, le nombre $Z = \frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^m + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m = 2 \cos \alpha, \quad \text{où } m \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

3) (π) est le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A, P, Q les points de (π) d'affixes respectives :

$$z = 1, \quad p = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad q = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Quels sont les points M, images des racines d'ordre m des nombres complexes p et q ? Démontrer que les solutions de l'équation (1) sont représentées par les points de rencontre des droites (AM) avec l'axe $(O, \vec{v})$.

Discuter le nombre de solutions de l'équation (1).

(Arts et Métiers 1962.)

64. Équation du 3^e degré à coefficients réels

1) Soit l'équation : $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$ (1) à coefficients a, b et c réels et d'inconnue X complexe.

On pose $X = x + \alpha$ ($x \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$). Quelle valeur faut-il donner à α pour que l'équation en x qu'on obtient n'ait pas de terme en x^2 ?

On se ramène donc à l'équation : $x^3 + px + q = 0$ (2).

Montrer que p et q sont réels.

2) Montrer que pour tout complexe γ et tout réel p il existe deux complexes éventuellement égaux,

$$u \text{ et } v, \text{ tels que } \begin{cases} u + v = \gamma \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

3) Pour résoudre l'équation (2) on pose $x = u + v$ avec $uv = -\frac{p}{3}$, montrer que (2) revient à la résolution du système

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3)$$

En déduire que u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré dont on calculera le discriminant. Soit δ une des racines carrées de ce discriminant, exprimer u^3 et v^3 en fonction de q et δ .
 u et v sont alors des racines cubiques de ces nombres.

4) Appliquer cette méthode aux équations suivantes :

$$x^3 + 3x^2 + 15x + 76 = 0 \quad (\alpha)$$

$$x^3 - 12x - 8\sqrt{2} = 0 \quad (\beta)$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \text{ (valeurs approchées)} \quad (\gamma)$$

Cette méthode a été inventée par le mathématicien milanais G. Cardan (1501-1576). C'est en résolvant ce problème qu'il s'est heurté (équation γ) à la recherche de racines carrées d'un réel négatif, problème qui débouchera sur la conception des nombres dits « imaginaires », c'est-à-dire complexes.

65. Équation du 4^e degré à coefficients réels

1) a) Démontrer que toute équation du 4^e degré en X ($X \in \mathbb{C}$) à coefficients réels, dont on a rendu le coefficient de X^4 égal à 1 : $X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ (1)

peut être ramenée, par un changement d'inconnue de la forme $X = x + \alpha$, à une équation à coefficients réels de la forme : $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (2)

b) Démontrer que l'équation (2) peut se mettre, d'une infinité de façons, sous la forme :

$$T^2(x) + T'(x) = 0 \quad (3)$$

T et T' étant deux polynômes du second degré en x , T étant nécessairement de la forme $T(x) = x^2 + \beta$.
(On posera $T'(x) = ux^2 + vx + w$ et on calculera u, v et w en fonction de a, b, c et β .)

c) Démontrer que le polynôme T' peut être mis sous la forme $T'(x) = u(x + \gamma)^2$ pourvu que β soit solution d'une équation du 3^e degré définie par $\varphi(\beta) = 0$ que l'on formera.

En déduire que, si l'on peut trouver une solution de l'équation $\varphi(\beta) = 0$, on peut résoudre dans le corps des complexes l'équation (1).

Cette méthode a été inventée par le mathématicien bolonais Ferrari (1522-1565) et ramène ainsi la résolution d'une équation du 4^e degré à celle d'une équation du 3^e degré.

- 2) Appliquer ce qui précède à l'équation $f(x) = 0$ (4), où $f(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 10$. Calculer dans ce cas particulier, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation définie par $\varphi(\beta) = 0$ (l'une des solutions est 1).
En déduire trois factorisations du polynôme $f(x)$ en un produit de deux trinômes à coefficients réels ou complexes, et la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (4).
Représenter les images des solutions dans le plan complexe. Quelle est leur somme et quel est leur produit?
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $F(X) = 0$ (5), où $F(X) = X^4 - 4X^3 + 9X^2 - 4X + 8$.
Quels sont les modules et les arguments des solutions? Quelle est leur somme et quel est leur produit?
Factoriser $F(X)$ sur le corps des réels.

(Bac C Paris 1970.)

66. On considère la fonction h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$h(z) = \frac{(1 + i\sqrt{2})z + 1}{z - (1 + i\sqrt{2})}.$$

- 1) Préciser sur quel ensemble la fonction h est une bijection.
- 2) On muni h de la loi de composition des applications, notée $\circ$. Calculer $h^2 = h \circ h$, puis $h^2 \circ h^2 = h^4$. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{H} = \{h, h^2, h^3, h^4\}$ muni de la loi précédente est un groupe. On en donnera la table d'opération.

67. Dans tout le problème on désigne par P le plan rapporté à un repère orthonormé.

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes une loi de composition interne, notée $*$ par

$$z * z' = xx' + i(xy' + yx')$$

si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

- 1) a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.
- b) Démontrer que $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \quad \overline{z * z'} = \overline{z} * \overline{z'}$
($\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).
- c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z * (2i) = 0$.
- 2) On considère l'équation (E_θ) :

$$z * z + [2\sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)] * z + 1 + 2i \sin 2\theta = 0,$$

où z est l'inconnue complexe et θ un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi[$.

- a) Discuter, suivant les valeurs du paramètre θ , l'existence et le nombre des solutions de (E_θ) .
- b) Lorsque (E_θ) admet deux solutions z_1 et z_2 , vérifier que $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{\cos 2\theta}$.

(Bac E Orléans 1977-partiel.)

68. Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation

$$f(z) = \frac{z - i - 2}{z + i}.$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} - \{-i\}$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ à préciser.
- 2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par f .
- 3) Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixes z qui vérifient $|f(z)| = 1$.

(Bac E Besançon 1982.)

69. Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $P^* = P - \{O\}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et T l'application de P^* dans P^* qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $zz' = ia^2$.

- 1) Montrer que T est involutive. Déterminer l'ensemble des points invariants par T .

- 2) Démontrer que $T(M) = M' \iff \begin{cases} \|\vec{OM}\| \times \|\vec{OM'}\| = a^2 \\ (\vec{i}, \vec{OM}) + (\vec{i}, \vec{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad [2\pi]$

- 3) Quelles sont les images par l'application T :
- a) d'un cercle C de centre O et de rayon R ?
- b) d'une droite D passant par O (O exclu)?

Analyse des exercices sur les suites en première S, terminale C et terminale D dans deux collections (collections Colin et Hachette, programmes 1983) (par D. Magnard, L. Guenier, N. Mainard)

Pour la commodité de l'exposé nous noterons par la suite 1 et 2 les deux collections étudiées.

1) Degré d'ouverture

Il n'est pas toujours facile de placer les frontières entre exercices ouverts, semi-ouverts et fermés.

Dans tous les manuels on remarque une écrasante proportion d'exercices fermés et une faible quantité d'exercices ouverts.

Toutefois deux différences sont à noter :

* il y a beaucoup plus d'exercices ouverts dans la collection 1. Dans la collection 2 en effet, si l'exercice n'est pas une application directe du cours, de nombreuses indications sont données.

* les exercices sont plus ouverts en première S qu'en terminale C ou D. Ceci dit, parfois les mêmes problèmes sont posés en première et en terminale, alors qu'en première les élèves disposent de moins d'outils.

2) Degré de généralité

Il nous a semblé très difficile de distinguer l'utilisation d'un invariant de celle d'une particularité de l'énoncé, car très souvent les exercices consistent à appliquer un invariant dans une situation particulière.

Les exercices établissant de nouveaux invariants sont peu nombreux et consistent à démontrer des propriétés non étudiées en cours et qui servent dans d'autres exercices (somme de deux suites convergentes par exemple).

Il serait peut-être utile de distinguer l'utilisation d'invariants du chapitre concerné et celle d'invariants d'autres chapitres.

3) Degré d'implicite

Nous avons rencontré de nombreux énoncés comportant des implicites.

En voici quelques exemples :

* on étudie la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = 1/(u_n - 3)$, sans se soucier du problème de définition.

* les exercices étudiant le problème de définition sont parfois très mal posés, par exemple "montrer que, pour tout n , $0 \leq v_n \leq 2$; en déduire que, pour tout n , v_n existe "...

On rencontre aussi fréquemment des phrases du type

"Trouver le plus petit entier p tel que $|u_p| < 10^{-3}$ ", alors qu'il n'a pas été démontré qu'un tel entier existe ...

On demande aussi de calculer des limites sans savoir que ces limites existent.

Dans le même ordre d'idées on a lu la phrase

"trouver la suite arithmétique vérifiant"

alors que l'existence et l'unicité d'une telle suite ne sont ni prouvées ni évidentes.

Enfin on a trouvé le texte suivant

"Soit le triangle isocèle inscrit dans le cercle ...",

et seul un dessin complétant l'énoncé (et non joint) permet de savoir de quel triangle il s'agit. N'aurait-il pas fallu expliciter que le dessin permettait de lever l'ambiguïté ?

Ceci dit, il y a beaucoup plus d'énoncés comportant des implicites en terminale qu'en première. Peut-être parce que les élèves ont plus d'expérience mathématique et peuvent lever eux-mêmes les ambiguïtés. D'autre part on note que dans la collection 2, les énoncés des exercices de terminale D sont nettement moins rigoureux que ceux de première S et terminale C : tout se passe comme si on demandait moins de rigueur à ces élèves qu'aux autres...

4) Outils disponibles / mobilisables

Les outils que constituent la définition de la convergence (formelle), et l'utilisation d'une démonstration par récurrence sont à utiliser dans les exercices avec l'indication qu'on doit les utiliser en première et sans cette indication en terminale C et D.

Dans les trois classes les théorèmes algébriques sur les limites sont à utiliser sans indication explicite, on les considère donc comme disponibles.

Enfin un certain nombre de théorèmes du cours, comme celui des suites monotones bornées, sont à appliquer directement, sans aucune adaptation et nous ne les avons pas classés.

5) Changements de cadres

Nous avons distingué les quatre cadres suivants :

- a) cadre numérique (ou algébrique), correspondants à des calculs sur les suites
- b) cadre graphique
- c) cadre géométrique
- d) cadre non mathématique (où la modélisation reste à faire), correspondants à des problèmes de vie quotidienne comme les placements à intérêt donné

Nous dirons qu'il y a un changement de cadre $x \rightarrow y$ si on utilise le cadre y pour résoudre un exercice posé dans le cadre x .

Nous avons noté que les changements de cadres suivants :

$d \rightarrow a$, $c \rightarrow a$

sont considérés comme disponibles, puisqu'il faut les effectuer sans que l'indication en ait été donnée.

Par contre, dans les exercices où il faut passer du cadre a au cadre b , l'indication figure.

Enfin il faut souligner qu'il y a peu d'exercices nécessitant des changements de cadres.

Nous avons joint deux tableaux indiquant les répartitions dans chaque collection des exercices regroupés par types et ceci pour les trois classes.

		1 ^{er} S	TD	TC
GÉNÉRALITÉS				
	Suite, suite monotone, suite périod., suite bornée	X	X	
	Opérations + et x dans l'ens. des suites	X	X	X
	Suites arithmétiques et géom. calcul de u_n et S_n	X	X	X
	monotonie	X		
	Calcul de u_n à l'aide d'une calculatrice.	X	X	X
DIFFÉRENTES FAÇONS DE LES DÉFINIR				
	Par la donnée du terme général u_n	X	X	X
	Par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$	X	X	X
	En compréhension.			
LIMITES D'UNE SUITE.				
Suites	convergentes vers 0			
	définition	X	X	X
	Une suite convergente vers 0 est bornée	X	X	X
	opérations: + de 2 suites convergentes	X	X	X
	x par une suite bornée	X	X	X
	comparaison $ u_n \leq v_n $	X	X	X
Suites	convergentes vers l			
	définition	X	X	X
	unicité de la limite.			
	convergente $\Rightarrow$ bornée			
	opérations: +, x de 2 suites convergentes			
	quotient de 2 suites convergentes			
	comparaisons: th des gendarmes			
	composition par une fct continue		X	X
	passage d'inégalité à la limite	X	X	
	th fondamental		X	X
	suites adjacentes		X	X
Suites	tendant vers $+\infty$			
	définition	X	X	X
	opérations: + et x par une suite $\rightarrow +\infty$			X
	+ suite bornée, x suite bornée de sup		X	X
	comparaison			
Suites	divergentes	X	X	X
Exemples	convergence des suites arithmétiques	X		
	géométriques	X	X	X
	n^d		X	X
	$u_{n+1} = f(u_n)$		X	X
	comparaison de q^n et n^d .		X	X
	$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$		X	X
	comparaison de $\log_a n$ et n^d			

GÉNÉRALITÉS

Suite, suite monotone, suite périod., suite bornée.

Opérations + et $\times$ de l'ense. des suitesSuites arithmétiques et géométriques: calcul de u_n et S_n

monotonie

Calcul de u_n à l'aide d'une calculatrice.

DIFFÉRENTES FAÇONS DE LES DÉFINIR

Par la donnée du terme général u_n Par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

En compréhension

LIMITE D'UNE SUITE

Suites cv vers 0

définition

 cv vers 0 $\Rightarrow$ bornéeopérations: + de 2 (suites $\rightarrow 0$) $\times$ par une suite bornéecomparaison: $|u_n| \leq |v_n|$ Suites cv vers l

def.

 $cv \Rightarrow$ bornéeopérations: +, $\times$ de 2 suites cv quotient de 2 suites cv

comparaison: th des gendarmes

composition par une fct continue

passage d'inégalité à la limite

th fondamental

suites adjacentes

unicité de la limite.

Suites tendant vers $+\infty$

def.

opérations: + et $\times$ par une suite $\rightarrow +\infty$ + suite bornée, $\times$ suite minorée

comparaison.

Suites divergentes.

Exemples

csges des suites

arithmétiques

géométriques

 m^n $u_{n+1} = f(u_n)$ comparaison de q^n et m^n . $u_{m+2} = au_{m+1} + bu_m$ comparaison de $\log_a n$ et m^n .

Michel Lavillunière
Antoine Bonneval

Compte-rendu général d'analyse des deux chapitres de manuels
de 6ème sur la proportionnalité.

Nous nous plaçons dans l'optique où les élèves ont travaillé
préalablement la partie cours des chapitres concernés.

Ceux-ci sont jalonnés, en dehors des rubriques d'information
et de définition, d'exemples de situations classiques ou de la vie
quotidienne traités intégralement :

- prix proportionnel à la masse;
- échelle cartographique;
- pourcentages;
- rabais, augmentation;
- statistique....

Deux outils de reconnaissance de la proportionnalité sont
développés :

1 - recherche d'un coefficient multiplicatif entre deux
lignes ou deux colonnes d'un tableau;

2 - vérification de l'alignement de points avec l'origine
sur une représentation graphique.

Les situations proposées ensuite sont des exercices
d'application très semblables à celles du cours. Il y a très peu de
problèmes ouverts.

Lorsqu'on demande la reconnaissance de la proportionnalité,
celle-ci est explicitée : il ne s'agit plus que de confirmer ce qui
est écrit dans l'énoncé.

La plupart, sinon la totalité des exercices n'offrent pas la diversité de stratégies de résolution. Ils ne peuvent se formuler dans des cadres différents. Un concept unique est impliqué le plus souvent.

L'élève doit mobiliser des techniques vues en cours. Ces exercices ne mettent en jeu que du connu, développent des habitudes.

Il n'a pas à faire fonctionner les connaissances nouvellement institutionnalisées dans des situations complexes où d'autres concepts interviennent. Il sera alors nécessaire que d'autres cycles (autres chapitres non centrés sur la proportionnalité mais la faisant intervenir moins explicitement) permettent à l'élève d'étendre le champ d'action du concept. Ces nouvelles situations favoriseront la disponibilité des outils de la proportionnalité en ne réclamant pas explicitement la mobilisation de ceux-ci.

Analyse de manuel scolaire

Chapitre PROPORTIONNALITÉ du manuel :

Mathématiques 6e collection Digamath (Didier)

I - Description générale

Ce livre contient 10 chapitres qui traitent le programme de 6e. Une table des matières détaillée donne le contenu de chaque chapitre.

Tous les chapitres sont organisés de la même façon. On y trouve toujours les cinq parties suivantes :

- APPROCHES

Ce sont des problèmes, des exercices, des situations qui permettent d'aborder, ou d'illustrer ce qui est étudié dans les chapitres.

- BASES

C'est le cours. A la fin de chaque paragraphe, des exercices rassemblés sous le titre "Vérifie si tu as compris", permettent à l'élève de voir s'il a compris ce qui est étudié dans le chapitre en question.

Les solutions de ces exercices sont regroupées à la fin du livre et classées par chapitre et paragraphe.

Cette partie contient des notes en marge destinées à l'élève pour qu'il comprenne mieux les explications ou quelque fois qu'il approfondisse ses connaissances.

Enfin un mini-dictionnaire est proposé.

- CONTROLE

Ce sont des exercices qui reprennent ce qui a été vu dans le cours (ils ne feront pas l'objet de l'analyse).

- CALCUL MENTAL

On y attire l'attention de l'élève sur l'importance du calcul "de tête" (vérification et économie de temps).

- DECOUVERTES

Partie destinée à mettre en avant des curiosités, des constructions géométriques, des jeux, un peu d'histoire des mathématiques. Ce ne sont pas des exercices mais des situations décrites.

- EXERCICES

Dans le chapitre qui nous concerne plus directement, les exercices sont classés dans l'ordre des paragraphes du chapitre.

II - Le chapitre PROPORTIONNALITE

C'est le 9e chapitre. La table des matières mentionne sous cette rubrique :

- reconnaître une proportionnalité;
- termes manquants de suites proportionnelles;
- représentation graphique.

On reconnaît l'organisation commune à tous les chapitres. Le paragraphe BASES contient deux parties :

- B1 "Reconnaître une proportionnalité";
- B2 "Vie quotidienne".

III - Le paragraphe EXERCICES

Les 78 exercices sont groupés en :

- E1 "Reconnaître la proportionnalité";
- E2 "Utilise tes connaissances".

Pour 76 d'entre-eux il s'agit d'application plutôt directe du cours : l'élève a donc peu de transformations à effectuer pour résoudre les exercices.

On trouve sur le tableau suivant un repérage des exercices selon les deux critères :

- degré d'ouverture de l'exercice. Quelle est l'importance des transformations à effectuer par l'élève dans le passage cours → application ?

Y a-t-il ou non des indications pour la contextualisation des notions, algorithmes, techniques de calcul ou de reconnaissance de la proportionnalité abordés précédemment dans le cours ou les situations d'approche ?

- degré de généralité de l'exercice

Appliquer un invariant mathématique (théorèmes ou résultats généraux...) ou exploiter une particularité de la situation support de l'exercice.

degré croissant d'ouverture

degré croissant de généralité	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 26, 34, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 48, 49, 51, 56, 58, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75	23, 24, 27, 30, 29, 22, 28, 36, 39, 44, 45, 52, 54, 47, 50, 53, 54, 41, 55.	76, 77, 78, 33, 31* Composition "de pourcentages."
			32 31 *

* tout dépend de l'exigence demandée aux enfants.

Quant au degré d'implicite des énoncés : ils sont tous très explicites sauf pour deux d'entre-eux, les numéros 25 (vitesse constante) et 33 (régularité de l'avance de la pendule).

Quelques remarques

1 - des exercices à résoudre avec minutie :

- . lecture fine de graphiques (6,7);
- . construction sur papier millimétré (10, 38, 39, 41);
- . découpage et pliage (24);
- . constructions géométriques (44, 45, 59).

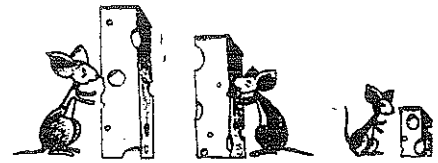
2 - un seul exercice d'invention de questions à partir de thèmes proposés et très fermé (68).

3 - des termes à bien comprendre ("livres semblables", 35).

4 - des raccourcis de langage ambigus ("un segment représente une aire" ! 59).

5 - des données mal exprimées mais inutiles (77).

6 - Et enfin peut-être le plus important, 9 des 17 exercices de la rubrique E1 "Reconnaitre la proportionnalité" sont des demandes de confirmation de celle-ci; elle est par ailleurs explicitée !



PROPORTIONNALITÉ

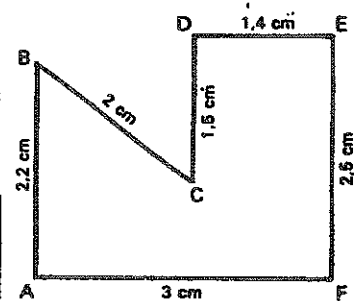
Approches

1. Tracés et échelles

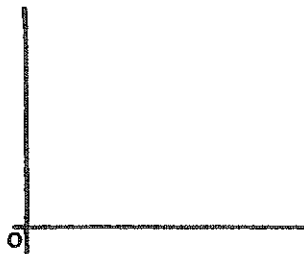
Observe la figure suivante :

- a) Reproduis-la en multipliant toutes les dimensions par 2,5 (tu feras donc un tracé à l'échelle 2,5). Pour cela, complète d'abord le tableau suivant :

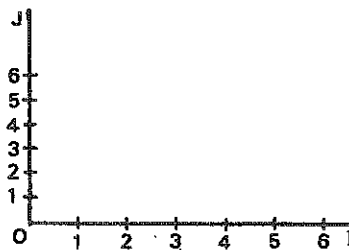
Dimensions réelles en cm	1,4	1,5	2	2,2	2,5	3
Dimensions sur la reproduction en cm						



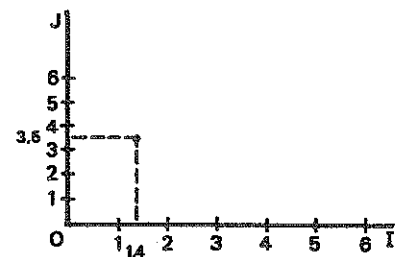
- b) Observe et reproduis les trois étapes de ce tracé :



Deux droites
perpendiculaires



Graduations régulières sur
les droites (OI) [unité 2 cm]
et (OJ) [unité 1 cm]



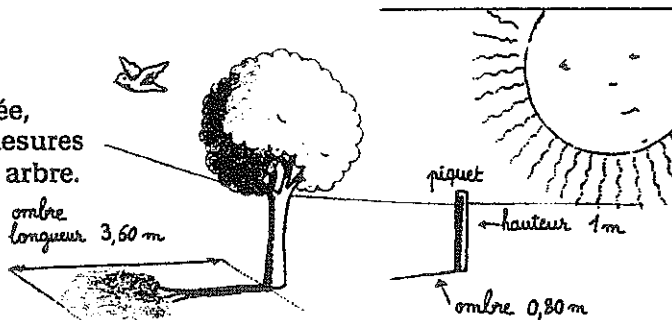
Point correspondant à la
première colonne du tableau :
dimensions réelles : 1,4 cm
dimensions
sur la reproduction :
3,5 cm ($1,4 \times 2,5$)

Place sur le graphique les points correspondants aux autres colonnes du tableau. Comment sont placés tous ces points ?

2. Ombre et lumière

Par une belle journée ensoleillée, un jardinier a pris quelques mesures pour déterminer la hauteur d'un arbre.

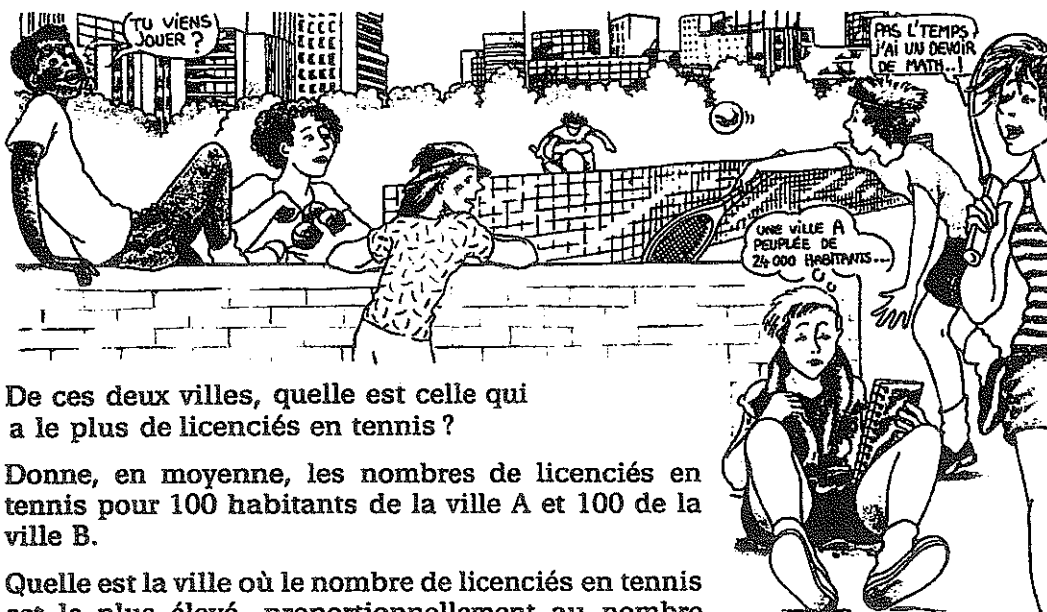
Voici un schéma présentant ces mesures :



Comment le jardinier s'y est-il pris pour déterminer la hauteur de l'arbre à partir de ces mesures ?

3. Au tennis

Une ville A, peuplée de 24 500 habitants, compte 980 licenciés en tennis.
Une ville B, qui a 1 400 habitants, compte 70 licenciés en tennis.



- De ces deux villes, quelle est celle qui a le plus de licenciés en tennis ?
- Donne, en moyenne, les nombres de licenciés en tennis pour 100 habitants de la ville A et 100 de la ville B.
- Quelle est la ville où le nombre de licenciés en tennis est le plus élevé, proportionnellement au nombre d'habitants ?

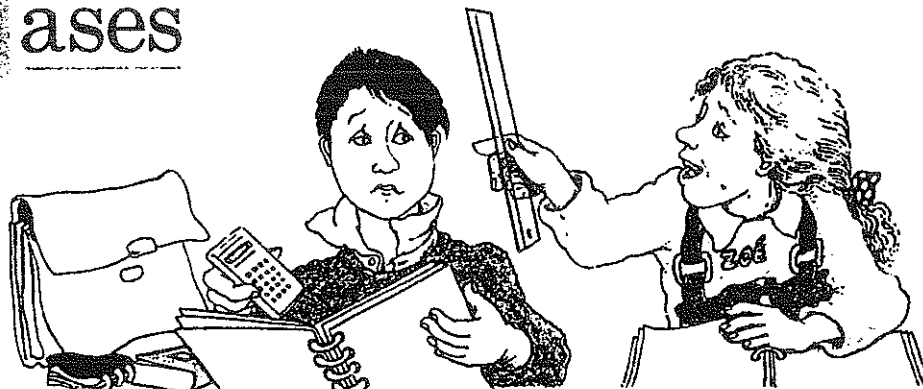
4. Remises sur les prix

Un marchand A offre une remise de 100 F sur un manteau coûtant au départ 800 F.

Un marchand B offre une remise de 90 F sur un manteau coûtant au départ 600 F.

Quel est celui des deux commerçants qui, proportionnellement, offre la plus forte remise ?

Une remise est une réduction de prix.



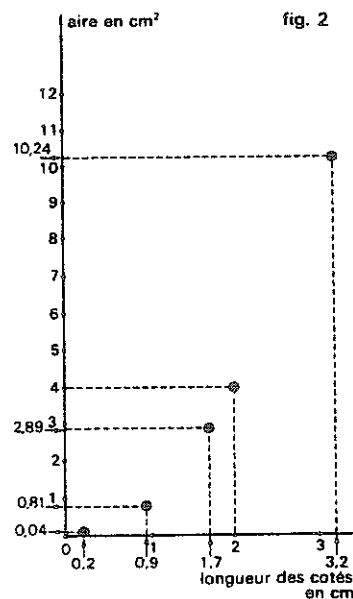
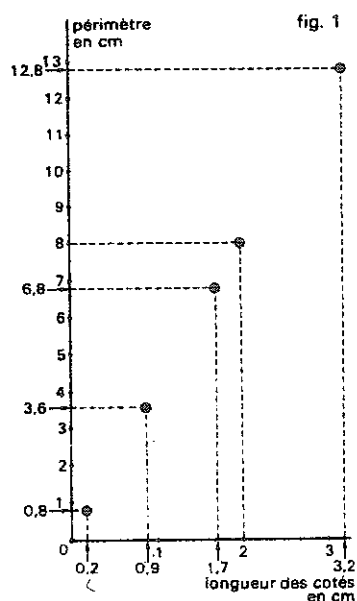
CHAPITRE 9 / PROPORTIONNALITÉ

a) Premiers exemples

Le tableau suivant présente le calcul du périmètre et de l'aire de plusieurs carrés :

Longueur des côtés en cm	0,2	0,9	1,7	2	3,2
Périmètre en cm	0,8	3,6	6,8	8	12,8
Aire en cm^2	0,04	0,81	2,89	4	10,24

Voici deux représentations graphiques traduisant le tableau :



Sur le graphique 1 on remarque que les points sont alignés avec l'origine alors que ce n'est pas le cas sur le graphique 2.

Voir A_1 , A_2 .

Les nombres de la première ligne (longueur des côtés) ont été rangés en ordre croissant. Ce n'est pas obligatoire dans un tableau mais c'est une bonne habitude qui permet d'éviter bien des erreurs.

Tu te souviens que si a est la longueur des côtés, le périmètre est $4 \times a$ et l'aire est $a \times a$ (voir chap. 8).

On porte sur l'axe « horizontal » les longueurs en ordre croissant, et sur les axes « verticaux », de la même façon, les périmètres (fig. 1) ou les aires (fig. 2).

Les unités choisies sur les deux axes ne sont pas les mêmes. Refais ces graphiques sur du papier millimétré en prenant 1 cm comme unité sur l'axe vertical et 2 cm sur l'axe horizontal.

Le graphique 1 représente le périmètre en fonction de la longueur des côtés ; le graphique 2, l'aire en fonction de la longueur des côtés.

Notons L la suite de nombres 0,2; 0,9; 1,7; 2; 3,2
(longueurs)

et P la suite de nombres 0,8; 3,6; 6,8; 8; 12,8
(périmètres)

Pour passer de L à P, chaque terme de L a été multiplié par 4. Autrement dit, les quotients des termes de P par les termes correspondants de L sont tous égaux à 4.

On dit que L et P sont proportionnelles.

Deux suites de nombres non nuls sont proportionnelles lorsque tous les quotients des termes de l'une par les termes correspondants de l'autre sont égaux.

On peut calculer soit les quotients des termes de la seconde suite par les termes de la première soit les quotients des termes de la première par les termes de la seconde : si l'on calcule les quotients des termes de L par ceux de P, on obtient : $\frac{0,2}{0,8} = \frac{3,6}{0,9} = \frac{1,7}{6,8} = \frac{2}{8} = \frac{3,2}{12,8} = 0,25$.

0,25 s'appelle le coefficient de proportionnalité de P vers L; 4 est le coefficient de proportionnalité de L vers P.

Remarques :

1. Graphiquement, la proportionnalité de deux suites se voit à l'alignement des points avec l'origine.

Ainsi, les suites

L : 0,2 ; 0,9 ; 1,7 ; 2 ; 3,2
et A : 0,04 ; 0,81 ; 2,89 ; 4 ; 10,24 (Aires)

ne sont pas proportionnelles : les points ne sont pas alignés (fig. 2).

2. On peut aussi constater la non proportionnalité par le calcul ; ainsi, les deux premiers quotients sont différents :

$$\frac{0,04}{0,2} = 0,2; \quad \frac{0,81}{0,9} = 0,9 \text{ et } 0,2 \neq 0,9.$$

Dès que deux quotients sont différents, les deux suites sont non proportionnelles. Pour vérifier une proportionnalité par le calcul des quotients, il faut vérifier l'égalité de tous les quotients.

$$\frac{0,8}{0,2} = \frac{3,6}{0,9} = \frac{6,8}{1,7} = \frac{8}{2} = \frac{12,8}{3,2} = 4.$$

On dit aussi que L est proportionnelle à P, ou que P est proportionnelle à L.

Bien sûr, il faut que les deux suites aient le même nombre de termes.

Un moyen pratique pour éviter les erreurs consiste à écrire les deux suites l'une au-dessous de l'autre.

C'est-à-dire $\frac{1}{4}$. 0,25 est le nombre par lequel il faut multiplier les termes de P pour obtenir ceux de L. Vérifie.



Coefficient.

Essaie de faire passer une droite par tous les points.

b) Autres exemples

1. Examinons les périmètres et les aires de rectangles de même largeur, par exemple 0,7 m :

Longueur L en m	1,1	1,9	2,2	3
Périmètre P en m	3,6	5,2	5,8	7,4
Aire A en m ²	0,77	1,33	1,54	2,1

Examinons les suites L : 1,1 ; 1,9 ; 2,2 ; 3 (longueurs)
et P : 3,6 ; 5,2 ; 5,8 ; 7,4 (périmètres).

Calculons les deux premiers quotients :

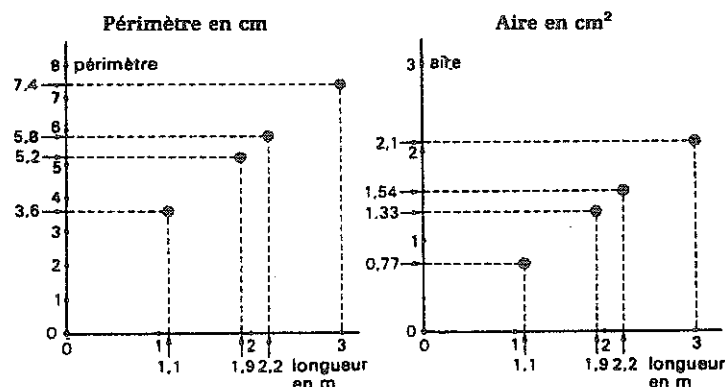
$$\frac{3,6}{1,1} = 3,2\dots ; \frac{5,2}{1,9} = 2,7\dots$$

Ces deux quotients ne sont pas égaux ; les suites L et P ne sont donc pas proportionnelles.

Pour les suites L et A on constate que

$$\frac{0,77}{1,1} = \frac{1,33}{1,9} = \frac{1,54}{2,2} = \frac{2,1}{3} = 0,7. \text{ Ces deux suites sont donc proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité de L vers A est } 0,7 ; \text{ celui de A vers L est : } \frac{1,1}{0,77} = \frac{110}{77} = \frac{10}{7}.$$

Représentations graphiques :



Les points sont alignés, mais pas avec l'origine !
(suites non proportionnelles)

Les points sont alignés avec l'origine
(suites proportionnelles)

2. Conversions

Pour passer, par exemple, de volumes exprimés en m³ à des volumes exprimés en dm³, on doit multiplier par 1 000 :

$$0,07 \text{ m}^3 = 70 \text{ dm}^3 ; 0,81 \text{ m}^3 = 810 \text{ dm}^3 ;$$

$$2,1 \text{ m}^3 = 2\,100 \text{ dm}^3.$$

Ainsi, les deux suites de nombres, exprimant les mêmes volumes en m³ et en dm³ sont proportionnelles puisque l'on passe de l'une à l'autre en multipliant par 1 000 (coefficient de proportionnalité).

Attention ! Les mêmes notations que pour l'exemple précédent sont utilisées, mais ce ne sont plus les mêmes suites.

On obtient les termes de la suite A en multipliant ceux de L par 0,7. Cela n'a rien de surprenant puisque l'aire A d'un rectangle est $\ell \times L$, où ℓ est la largeur (ici toujours 0,7) et L la longueur.

$$\frac{1,1}{0,77} = \frac{110}{77} \text{ en multipliant numérateur et dénominateur par } 100 ; \frac{110}{77} = \frac{10}{7} \text{ en divisant numérateur et dénominateur par } 11 \text{ (voir chap. 3 B1).}$$

Sur les axes « verticaux » on n'a pas choisi les mêmes unités d'un graphique à l'autre pour clarifier les dessins.

Est-ce que les longueurs et les diamètres des cercles sont proportionnels ? Si oui, quel est le coefficient de proportionnalité des diamètres vers les longueurs ?

Les quotients des termes de la seconde par les termes correspondants de la première sont tous égaux à 1 000.

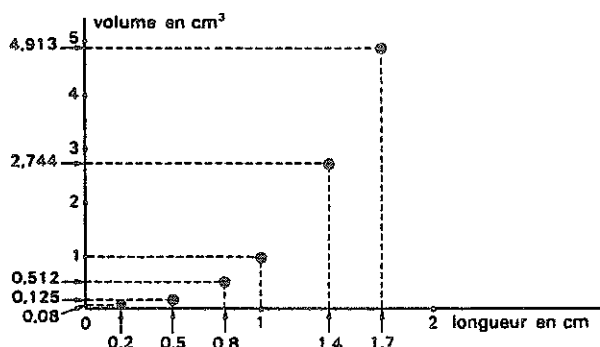
3. Volume d'un cube

Ce tableau présente les volumes de quelques cubes :

Longueur des côtés en cm	0,2	0,5	0,8	1	1,4	1,7
Volume en cm ³	0,08	0,125	0,512	1	2,744	4,913

Les quotients $\frac{0,2}{0,08} = 2,5$ et $\frac{0,5}{0,125} = 4$ sont différents, les suites ne sont donc pas proportionnelles.

En effet, graphiquement, les points ne sont pas alignés :



Remarque :

Dans tous les exemples précédents, les tableaux ont été placés « horizontalement ». On peut bien entendu les placer « verticalement ». L'important est toujours l'ordre dans lequel sont écrits les termes dans chacune des suites.

4. Opérateurs constants d'une calculatrice

Sur certaines calculatrices, si l'on doit multiplier plusieurs nombres par un même nombre, il est possible de le faire en enregistrant une seule fois ce nombre dans la machine.

Par exemple, si l'on a à multiplier par 2,14 chacun des termes de la suite D : 0,4 ; 1,2 ; 2 ; 4,1 ; 5, on « entre » normalement : 2.14 $\times$ 0.4 $=$; on lit alors le résultat : 0.856. Ensuite, on se contente de : 1.2 $=$, la multiplication par 2,14 se fait automatiquement ; lecture du résultat : 2.568.

Puis de la même façon : 2 $=$ (résultat : 4.28)
4.1 $=$ (résultat : 8.774)
5 $=$ (résultat : 10.7)

Les suites de nombres :

D (de départ) : 0,4 ; 1,2 ; 2 ; 4,1 ; 5 et

P (produits) : 0,856 ; 2,568 ; 4,28 ; 8,774 ; 10,7

sont proportionnelles, puisque l'on obtient la seconde en multipliant les termes de la première par 2,14, qui est donc le coefficient de proportionnalité de D vers P.

Fais un graphique en prenant 4 cm pour unité sur l'axe « vertical » et 1 cm sur l'axe « horizontal ».

Prends ta calculatrice et vérifie si elle fonctionne de cette façon ; attention, il faut entrer 2,14 en premier sans revenir à 0 après chaque calcul et sans éteindre la machine en cours de calcul !

On pourrait calculer comme ceci autant de produits par 2,14 que l'on veut : « l'opérateur » $\times$ 2,14 a été enregistré par la machine à la première opération.

De même si l'on doit ajouter 2,14 à chacun des termes de la suite D : 0,4 ; 1,2 ; 2 ; 4,1 ; 5 on « entrera » :

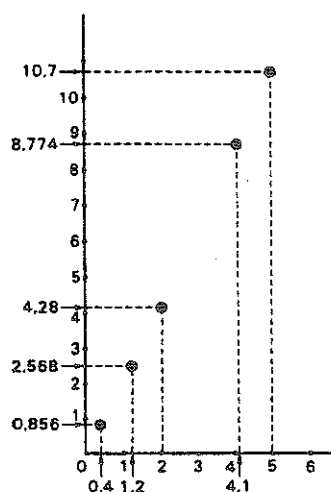
0.4 $\boxed{+}$ 2.14 $\boxed{=}$; lecture du résultat : 2.54,
 puis seulement 1.2 $\boxed{=}$ (résultat : 3.34).
 2 $\boxed{=}$ (résultat : 4.14).
 4.1 $\boxed{=}$ (résultat : 6.24).
 5 $\boxed{=}$ (résultat : 7.14).

Les suites D : 0,4 ; 1,2 ; 2 ; 4,1 ; 5
 et S (Somme) : 2,54 ; 3,34 ; 4,14 ; 6,24 ; 7,14

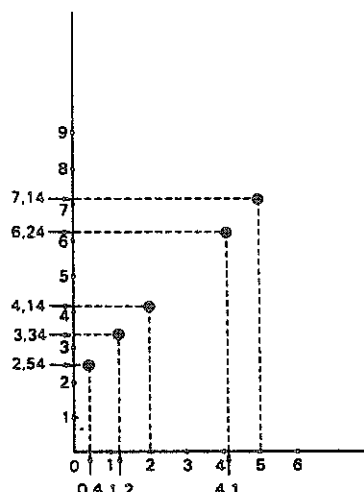
ne sont pas proportionnelles. En effet : $\frac{2,54}{0,4} = 6,35$

alors que, par exemple $\frac{4,14}{2} = 2,07$ (quotients différents).

Graphiquement :



Les points sont alignés avec l'origine : les suites sont proportionnelles.

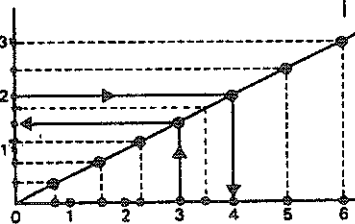


Les points sont alignés ; mais pas avec l'origine : les suites ne sont pas proportionnelles.

Remarque :

Pour éviter les calculs

1. Si deux suites S et T sont proportionnelles et si le nombre 1 est un terme de S, alors le coefficient de proportionnalité de S vers T est le terme de T qui correspond à 1.
2. Lorsqu'un graphique représente deux suites proportionnelles S et T on peut « ajouter » à S ou à T des termes et lire leurs correspondants sur le graphique. Par exemple, sur ce graphique, les points représentant la proportionnalité des suites S et T sont en noir.



Les termes de S sont en noir (axe horizontal) et ceux de T en bleu (axe vertical). Si l'on « ajoute » à S le nombre 3, on peut « lire » graphiquement son correspondant : 1,5 (en bleu). De la même façon, si l'on « ajoute » à T le nombre 2, on peut « lire » son correspondant : 4 (en noir).

Vérifie si ta calculatrice travaille comme cela.

Cette fois, 2.14 est entré en second.

Là, la machine a enregistré au début « l'opérateur » + 2,14.

C'est une « table graphique de multiplication par 2,14 » et une « table graphique d'addition de 2,14 ».

Par exemple, les suites :

S : 0,5 ; 1 ; 4 ; 7,5 et

T : 1,2 ; 2,4 ; 9,6 ; 18

sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité de S vers T est 2,4 (qui correspond à 1).

Quel est le coefficient de proportionnalité de T vers S ?

S : 0,7 ; 1,6 ; 2,3 ; 3,6 ; 5 ; 6

T : 0,35 ; 0,8 ; 1,15 ; 1,8 ; 2,5 ; 3

Naturellement, la lecture est souvent imprécise. Si l'on veut une plus grande précision, il vaut mieux utiliser le calcul.

c) Recherche de termes manquants de suites proportionnelles

Au cours de ce chapitre tu as rencontré des exemples de suites proportionnelles et des exemples de suites qui ne le sont pas. Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'à des suites proportionnelles. Elles sont données sans correspondre à des situations précises. Les façons de procéder que tu vas apprendre sont valables pour tous les exemples possibles de proportionnalité. Les problèmes qui sont posés consistent à trouver un ou des termes inconnus de ces suites.

- Si l'on connaît une suite et le coefficient de proportionnalité de cette suite vers une autre, on peut calculer facilement les termes de cette autre suite (en multipliant par le coefficient de proportionnalité) :

Exemple :

$$\times 0,5 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 0,2 & 2,1 & 3,5 & 4 \\ \hline S_2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad \times 0,5 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 0,2 & 2,1 & 3,5 & 4 \\ \hline S_2 & 0,1 & 1,05 & 1,75 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Si, dans l'exemple précédent, au lieu de donner le coefficient de proportionnalité 0,5 de S_1 vers S_2 on avait donné le coefficient de S_2 vers S_1 il aurait fallu alors diviser les termes de S_1 par ce coefficient pour trouver S_2 .

Ce coefficient est 2. Tu sais, en effet, que diviser par 2 ou multiplier par 0,5 donne les mêmes résultats.

- Si chacune des suites est incomplète et que l'on connaît le coefficient de proportionnalité de l'une vers l'autre :

Exemple :

Le coefficient de S_1 vers S_2 est 3; les trois premiers termes de S_1 sont : 1,7; 2; 3,7 et les deux derniers termes de S_2 sont : 12,3 et 14,7. Chacune des suites a 5 termes. On peut représenter cela ainsi :

$$\times 3 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 1,7 & 2 & 3,7 & & \\ \hline S_2 & & & & 12,3 & 14,7 \\ \hline \end{array} \quad /3$$

Il reste à compléter le tableau :

$$\times 3 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 1,7 & 2 & 3,7 & 4,1 & 4,9 \\ \hline S_2 & 5,1 & 6 & 11,1 & 12,3 & 14,7 \\ \hline \end{array} \quad /3$$

- Si l'on connaît quelques termes de deux suites S_1 et S_2 , sans connaître aucun des deux coefficients de proportionnalité.

Exemple :

S_1 et S_2 ont 4 termes chacune.

Le premier et le troisième de S_1 sont 0,5 et 3; les trois derniers de S_2 sont : 4,4; 6,6; 8,36.

On sait automatiquement que si on passe de S_1 à S_2 , en multipliant par 3, on passe de S_2 à S_1 en divisant par 3 (c'est-à-dire en multipliant par $\frac{1}{3}$: coefficient de S_2 vers S_1 . (On note : /3 qui se lit « divisé par 3 ».)

Deux suites S_1 et S_2 sont proportionnelles; elles ont 4 termes chacune. Les trois premiers de S_2 sont : 15; 12,75; 27,75. Le dernier de S_1 est 40. Le coefficient de proportionnalité de S_1 vers S_2 est 0,75. Trouve les termes manquants dans S_1 et S_2 .

Traduisons cela par un tableau :

$$\times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 0,5 & & 3 & \\ \hline S_2 & & 4,4 & 6,6 & 8,36 \\ \hline \end{array}$$

Le coefficient de proportionnalité de S_1 vers S_2 est le quotient d'un des termes de S_2 par le terme correspondant de S_1 . Dans l'exemple, une seule possibilité de calcul existe : $\frac{6,6}{3} = 2,2$.

On peut donc compléter par calcul le tableau :

$$\times 2,2 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1 & 0,5 & 2 & 3 & 3,8 \\ \hline S_2 & 1,1 & 4,4 & 6,6 & 8,36 \\ \hline \end{array} / 2,2$$

Le tableau est souvent un moyen indispensable pour s'y retrouver. Pense à l'utiliser ! Il faut connaître, dans ce cas au minimum deux termes correspondants.

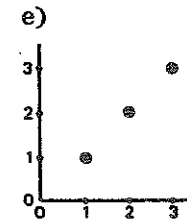
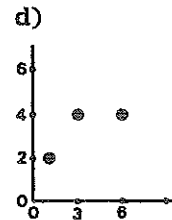
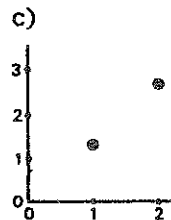
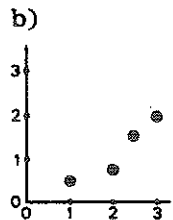
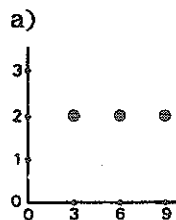
VÉRIFIE SI TU AS COMPRIS

1. Dans chacun des cas suivants, indique si les deux suites sont proportionnelles ou non :

a) $S_1 : 1,2 ; 2 ; 2,5 ; 7$
 $S_2 : 4,8 ; 8 ; 10 ; 27$

b) $S_1 : 0,5 ; 2,8 ; 4 ; 13$
 $S_2 : 1,5 ; 8,4 ; 12 ; 39$

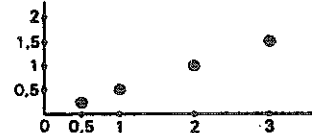
2. Parmi les graphiques suivants, indique ceux qui représentent la proportionnalité de deux suites :



3. Le coefficient de proportionnalité d'une suite S_1 vers une suite S_2 est 1,4. On sait que S_1 est : 0,5 ; 1 ; 2 ; 4,5 ; 8. Donne les termes de S_2 .

4. Le graphique suivant représente la proportionnalité de deux suites S_1 et S_2 ;
 S_1 est : 0,5 ; 1 ; 2 ; 3.

Trouve graphiquement les termes de S_2 :



5. Détermine dans chacun des cas suivants les termes manquants des suites proportionnelles :

a) $S_1 : 0,7 ; 2,1 ; 3$

$S_2 : \dots ; \dots ; \dots$ coefficient de S_1 vers $S_2 : 2$.

c) $S_1 : 2 ; 3 ; \dots$

$S_2 : 1,5 ; \dots ; 4$

b) $S_1 : 0,8 ; \dots ; 6$

$S_2 : \dots ; 1,2 ; \dots ; 2$ coefficient de S_2 vers $S_1 : 0,25$

Si tu commets plus de 4 erreurs, revois ce paragraphe.

B2. Vie quotidienne

Dans la vie de tous les jours, la proportionnalité intervient beaucoup. Cependant, une des difficultés consiste à la repérer.

Par exemple, sais-tu que, en géographie notamment, si tu utilises des cartes à une certaine échelle, ou encore lorsque des pourcentages sont évoqués en sciences naturelles ou en sciences physiques, la proportionnalité est présente ?

Sais-tu aussi que, très souvent, dans les magasins, lorsque les prix de diverses marchandises sont affichés, on te signale une proportionnalité :

Prix au kg : le prix est proportionnel à la masse.

Prix au mètre : le prix est proportionnel à la longueur.

Prix au litre : le prix est proportionnel au volume.

Prix à la pièce : le prix est proportionnel au nombre d'objets.

Ici, c'est la façon d'annoncer le prix qui indique en même temps le caractère de proportionnalité de la situation. Dans d'autres cas, c'est un mot qui précise que l'on a affaire à une proportionnalité ; par exemple, le mot « constant » : si tu entends dire qu'une voiture roule « à vitesse constante » c'est que la distance parcourue est proportionnelle au temps écoulé.

Dans les situations de la vie courante concernant la proportionnalité, il s'agit pratiquement toujours de trouver un ou des termes manquants (connaissant ou non le coefficient de proportionnalité).

En voici quelques exemples

1. Chez un marchand de légumes, les carottes coûtent 4,40 F le kg. Quel est le prix que paiera une personne qui en achète 2,75 kg ?

Le prix est proportionnel à la masse. Les suites de nombres concernées sont celles des masses et celles des prix :

Masses en kg : 1 ; 2,75 ; ...

Prix en F : 4,40 ; ... ; ...

Le nombre cherché (terme manquant) est le produit de 2,7 par le coefficient de proportionnalité de la première suite vers la seconde, qui est 4,40 (puisque c'est le terme qui correspond à 1) : $2,75 \times 4,40 = 12,10$.

Le prix à payer pour 2,7 kg est donc 12,10 F.

Remarque :

Dans la pratique, pour les situations de ce type, on ne fait pas toute la démarche ; on se contente d'effectuer le dernier produit : $2,75 \times 4,40 = 12,10$.

Le coefficient de proportionnalité est toujours dans ces cas, le nombre qui indique le prix au kg (ou au mètre, ou au litre, ou à la pièce...).

Voir A₃, A₄.

Il y a par contre des exemples où la situation n'est pas de proportionnalité : 4 F le tour de manège, 10 F les 3 tours ; jusqu'à 2 tours c'est une situation de proportionnalité ; ensuite cela ne l'est plus.
« Constant » signifie : qui ne change pas.

2. Laure, qui déjeune très souvent au collège, achète ses tickets de repas par carnet de 10. Son amie Magali souhaite exceptionnellement manger au collège pendant 4 jours. Elle utilisera pour cela 4 tickets que Laure lui vendra. Quel est le prix des 4 tickets (10 tickets valent 127 F) ?

Le prix est proportionnel au nombre de tickets ; notons les données :

Nombre de tickets : 4 ; 10

Prix en F : ... ; 127,00.

Le coefficient de proportionnalité de la première suite vers la seconde (inconnue) est le quotient $\frac{127}{10} = 12,7$. Le

terme manquant est donc : $4 \times 12,7 = 50,8$.

La somme que Magali doit payer à Laure est 50,80 F.

Remarques :

1. Le coefficient de proportionnalité $\frac{127}{10} = 12,7$ correspond au prix pour 1 ticket. Et, pour 4 tickets, il faut multiplier par 4. La démarche, qui est parfois appelée « règle de trois », est souvent traduite de la façon suivante : « le prix pour 10 est 127 F, le prix pour 1 est 10 fois moins » (c'est-à-dire $\frac{127}{10}$) « et le prix pour 4 est 4 fois plus » (c'est-à-dire $\frac{127}{10} \times 4$).
2. Cette démarche, qui passe par le calcul d'un coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire au terme correspondant à 1, est appelée aussi « retour à l'unité » (c'est-à-dire à 1).

« Trois » parce qu'il y a 3 termes connus et un inconnu.

Parfois même, pour mieux fixer les idées, on ajoute 1 dans le tableau :

Nombre de tickets :	1	4	10
Prix en F :	...	...	127

Combien coûtent 17 tickets ?

Traite avec la méthode de ton choix le problème suivant : chez un marchand, M^{me} Joséphine Gourmet a acheté 200 g de champignons et a payé 7 F. Combien paiera M. Jean Mange pour l'achat chez le même marchand et le même jour de 300 g de champignons de même qualité ?

3. On sait que le sable a une masse d'environ 1,6 t par mètre cube. À quel volume correspondent 3,6 t de sable ?

Dans le cas du sable, la masse et le volume sont proportionnels ; on a :

Volume en m³ : 1 ; ...

Masse en t : 1,6 ; 3,6

On connaît donc le coefficient de proportionnalité de la première suite vers la seconde : 1,6 (terme correspondant à 1). Pour trouver le terme manquant (situé dans la première suite), il suffit donc de diviser 3,6 par ce

coefficient : $\frac{3,6}{1,6} = 2,25$.

Le volume cherché est 2,25 m³.

Remarque :

Tu peux constater que dans chacun des trois exercices précédents ne figuraient que les données intéressant une même grandeur (volume ou bien masse, ou bien prix, etc.). Lorsque tu résoudras un exercice de cette façon, vérifie cela ; c'est un moyen d'éviter les erreurs.

À quel volume correspondent 0,6 t de sable ?

On sait que la masse de 1,5 l d'une certaine huile est 1,4 kg. Quel est le volume de 2,1 kg de cette huile ?

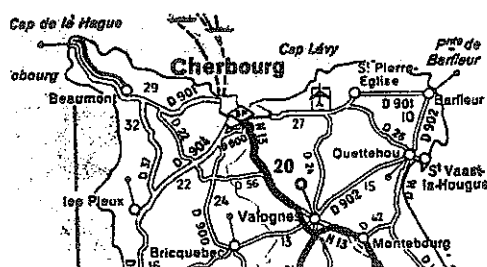
Exemples sur les échelles

Les cartes géographiques ou les cartes routières, les photos représentent des objets. Les dimensions de ces représentations ne sont pas en général les dimensions réelles de ces objets, mais elles leur sont proportionnelles.

L'échelle d'une représentation est tout simplement le coefficient de proportionnalité des longueurs réelles vers les longueurs de la représentation.

- Une échelle supérieure à 1 correspondant à un agrandissement (par exemple : photo au microscope).
- Une échelle inférieure à 1 correspond à une réduction (par exemple : carte routière).
- Une échelle égale à 1 correspond à une représentation en dimensions réelles (par exemple : certaines photocopies).

Voici l'exemple d'une carte routière qui représente la presqu'île du Cotentin.



L'échelle de cette carte est $\frac{1}{1\,000\,000}$, ce qui revient à dire que 1 km de la réalité est représentée par $\frac{1}{1\,000\,000}$ km ($\frac{100\,000}{1\,000\,000} = 0,1$) donc par 0,1 cm.

Tu as remarqué que les distances réelles par la route sont indiquées sur la carte en km : par exemple, la distance entre Cherbourg et Barfleur est de 27 km.

Quelles sont les distances réelles, à « vol d'oiseau », entre les Pieux et Quettehou et entre Valognes et St-Pierre-l'Église ?

Quelles sont les longueurs, sur le plan, des lignes représentant la route reliant Cherbourg au Cap de la Hague et celle reliant Barfleur à Valognes ?

Répartissons les données dans un tableau, en complétant par les distances mesurées sur la carte en cm ou lues sur celles-ci en km :

		Vol d'oiseau Les Pieux- Quettehou	Vol d'oiseau Valognes- St-Pierre	Route Cherbourg- La Hague	Route Barfleur- Valognes
Distances réelles en km	1			24	23
Distances sur la carte en cm	0,1	3,7	1,8		

Ainsi, le coefficient de proportionnalité de la première suite vers la seconde est 0,1 et celui de la seconde vers la première : $\frac{1}{0,1} = 10$.

D'où le tableau complété, donnant les résultats cherchés :

		Vol d'oiseau Les Pieux- Quettehou	Vol d'oiseau Valognes- St-Pierre	Route Cherbourg- La Hague	Route Barfleur- Valognes
Distances réelles en km	1	37	18	24	23
Distances sur la carte en cm	0,1	3,7	1,8	2,4	2,3

Remarque :

Dans le cas où l'échelle est supérieure à 1, on procède de la même façon. Par exemple, une échelle 20 indique que 1 cm dans la réalité correspond à 20 cm sur le dessin.

Pourcentages

Encore quelque chose dont tu as entendu parler, et qui est du domaine de la proportionnalité : les pourcentages.

Par exemple : « Pendant tout le mois de janvier, les magasins X font des remises de 20 % sur tous leurs articles. »

« La hausse qui vient de se produire sur le prix de l'essence est de 2 %. »

Ces deux cas sont du domaine financier, mais les pourcentages sont aussi utilisés dans d'autres domaines, notamment dans celui des statistiques. Par exemple, voici un tableau statistique, tiré d'un sondage, estimant le nombre de voitures particulières par ménage, en France, en 1985 :

Nombre de voitures	0	1	2 et plus
Pourcentage de ménages	28 %	54 %	18 %

Pour traiter correctement des questions où interviennent les pourcentages, il faut que tu aies bien à l'esprit qu'un pourcentage exprime en fait une proportionnalité, dont l'un des deux coefficients correspond au pourcentage donné.

Par exemple : 28 % exprime une proportionnalité dont l'un des coefficients est $\frac{28}{100}$.

Il faut remarquer aussi que souvent, lorsqu'un pourcentage intervient, toutes les données ne sont pas connues. Par exemple, ci-dessus, le nombre de ménages n'est pas connu.

Voici, à titre d'illustration, quelques questions traitées à propos des exemples précédents :

% se lit « pour cent ».

En quoi consiste un sondage ? À interroger ou contrôler un nombre relativement réduit d'individus (échantillon) sur des questions que l'on se pose, en choisissant cet échantillon suffisamment représentatif de la population toute entière pour en tirer des estimations sur cette population toute entière (ici, la population entière est l'ensemble des ménages français).

En fait, donner un pourcentage consiste à donner le terme qui correspond à 100 dans le tableau de proportionnalité que l'on peut imaginer. Le nombre d'unités de référence est donc 100 ; 28 % signifie que l'on en considère 28 sur 100. Pense à « 28 sur 100 », qui te rappellera $\frac{28}{100}$.

On se « ramène » à un résultat sur 100, nombre de référence commode. Pourquoi un nombre de référence ? Parce que, lorsque l'on veut faire des comparaisons, par exemple ici avec un autre pays que la France, pour la même question, il faut bien une référence commune puisque les nombres de ménages sont différents dans les deux pays.

• Rabais de 20 % dans les magasins X, sur tous les articles.

Cela signifie donc que si un article coûte 100 F, le rabais est de 20 F ;

l'article coûtera finalement 80 F ($100 - 20 = 80$).

Question : pour un objet coûtant au départ 85 F, quelle est la remise ?

Réalisons un tableau :

Prix avant remise en francs	100	85
Remise en francs	20	

) $\times 0,2$

en notant que le coefficient de proportionnalité de la première suite vers la seconde est $\frac{20}{100} = 0,2$.

Il suffit donc, pour obtenir la remise consentie, de multiplier 85 par 0,2 ; $85 \times 0,2 = 17$; remise : 17 F.

Autre question : pour un objet coûtant 207 F au départ, quelle est la remise ? De la même façon, il suffit de multiplier par 0,2 ; $207 \times 0,2 = 41,4$; remise : 41,40 F.

En fait, pour l'acheteur, ce qui est intéressant est plutôt de connaître le prix final (après remise), des objets qu'il souhaite acheter. Il peut bien sûr calculer les différences entre les prix de départ et les remises : $85 - 17 = 68$; $207 - 41,40 = 165,60$. Les prix après remise sont 68 F et 165,60 F.

Une méthode plus directe consiste cependant à remarquer que, pour un prix de départ de 100 F, le prix final est de 80 F ; ainsi, le prix final est 80 % du prix de départ.

On se trouve là dans une situation de proportionnalité où l'un des coefficients est $\frac{80}{100} = 0,8$: le prix final s'obtient

en multipliant le prix de départ par 0,8 ;

— pour 85 F : $0,8 \times 85 = 68$. Prix final : 68 F.

— pour 207 F : $0,8 \times 207 = 165,6$. Prix final : 165,60 F.

• Augmentation de 2 % du prix de l'essence

Dans une station-service, l'essence coûtait jusqu'alors 5,50 F le litre. Une augmentation de 2 % du prix est annoncée.

Quel sera le nouveau prix du litre d'essence dans cette station ?

Quelle somme devra régler dorénavant un automobiliste pour obtenir la même quantité d'essence que celle qu'il obtenait jusqu'alors pour 130 F ?

Quelle somme aurait réglée auparavant un automobiliste qui fait, après l'augmentation, un plein qui lui coûte 153 F ?

Cela signifie aussi que si un article coûte 200 F (2×100 F), le rabais est de 40 F (2×20 F), donc son coût final : 160 F.

On peut se contenter d'imaginer de tête ce tableau.

Remarque que 0,2 s'écrivant aussi $\frac{20}{100}$, on peut faire le calcul comme ceci : $\frac{20}{100} \times 85$; on peut alors décrire les choses de la façon suivante : pour 100 F, la remise est de 20 F, pour 1 F elle est « 100 fois moindre » (c'est-à-dire $\frac{20}{100}$) et pour 85 F « 85 fois plus » (c'est-à-dire $\frac{20}{100} \times 85$). Tu reconnais là la « règle de trois » ou encore le « retour à l'unité ».

$$100 - 20 = 80.$$

Cette méthode évite donc de calculer les remises, qui ne sont pas d'un grand intérêt.

Réalise un tableau récapitulant les exemples ci-contre. Calcule le prix final d'un objet coûtant au départ : 62 F ; 181 F.

Augmenter de 2 % signifie que, pour une quantité d'essence qui coûtait jusqu'ici 100 F, l'automobiliste paiera désormais 2 F de plus : 102 F, c'est-à-dire 102 % de l'ancien prix.

Le coefficient de proportionnalité de l'ancien prix vers le nouveau est donc : $\frac{102}{100} = 1,02$.

D'où le tableau suivant :

Anciens prix en F	100	5,50	130	
Nouveaux prix en F	102			153

) $\times 1,02$

et les calculs suivants, pour compléter le tableau :

$$5,50 \times 1,02 = 5,61; 130 \times 1,02 = 132,6; \frac{153}{1,02} = 150.$$

• Statistiques sur les nombres de voitures

Nombre de voitures	0	1	2 et plus
Pourcentage de ménages	28 %	54 %	18 %

Quand cette statistique a été faite, en 1983, il y avait en France 19 866 000 ménages. À combien peut-on estimer le nombre de ménages qui, en 1983, possédaient : 0 voiture ? 1 voiture ? 2 voitures ou plus ?

Pour 0 voiture, il s'agit de « calculer les 28 % de 19 866 000 », c'est-à-dire multiplier 19 866 000 par le coefficient de proportionnalité $\frac{28}{100}$:

$$19\,866\,000 \times \frac{28}{100} = 198\,660 \times 28 = 5\,562\,480.$$

Pour 1 voiture il s'agit de multiplier 19 866 000 par le coefficient $\frac{54}{100}$:

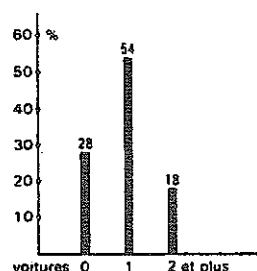
$$19\,866\,000 \times \frac{54}{100} = 198\,660 \times 54 = 10\,727\,640.$$

Pour 2 voitures et plus :

$$19\,866\,000 \times \frac{18}{100} = 198\,660 \times 18 = 3\,575\,880.$$

Remarque :

Souvent, de telles statistiques sont présentées par des graphiques ; ici, par exemple, à la place du tableau du début, on aurait pu donner le graphique :



Remarque que $102 > 100$.

Donc, les réponses aux questions sont :

- pour la première : 5,61 F.
- pour la seconde : 132,60 F.
- pour la troisième : 150 F.

Remarque que $28 + 54 + 18 = 100$. C'est une petite vérification à faire dans ce type de questions.

Regarde sur ta calculatrice si la touche $\%$ figure (touche « pourcentage »). Si oui, pour calculer 28 % de 19 866 000 tape : 19866000 $\times$ 28 $\%$.

Calcule avec ce procédé les autres pourcentages demandés.

À toi de résoudre les exercices suivants :

1. Dans un magasin, le prix de 1 kg d'oranges est 7,60 F.
Quel est le prix à payer pour 2,3 kg d'oranges ? pour 0,4 kg ?
2. Monsieur Dupont a payé 651 F pour 7 repas.
Monsieur Durand, qui était l'un des convives, veut lui en rembourser 3. Combien doit-il verser à Monsieur Dupont ?
3. 1 m³ d'un certain bois a une masse de 0,8 t. Quel volume occupe une masse de 1,2 t de ce bois ?
4. Lors d'une période de soldes, un magasin fait des remises de 25 % sur tous les articles. Combien paiera-t-on un article coûtant au départ 160,00 F ?
Combien coûtait un article payé 150 F après la réduction ?
5. Une statistique faite dans un collège sur les moyens de locomotion utilisés par les élèves pour s'y rendre donne les résultats suivants :

Moyen de locomotion	à pied	deux roues	bus	déposé par la famille
Pourcentage	26 %	40 %	22 %	12 %

Sur les 450 élèves de ce collège, combien y viennent à pied ? en deux roues ? en bus ? y sont déposés par leur famille ?

Les exemples traités dans ce chapitre t'ont montré que la proportionnalité est présente en mathématiques, mais aussi dans de nombreux domaines de la vie quotidienne. Tu auras l'occasion d'approfondir ce thème tout au long de ta scolarité.

Rappelle-toi qu'une condition essentielle de réussite dans un problème où la proportionnalité intervient est une bonne organisation pratique des données : en tableaux ou par graphiques notamment.

Pense aussi, après les calculs, à vérifier la cohérence et la vraisemblance des résultats.

C

ontrôle

1. a) Donne un exemple de deux suites de nombres qui sont proportionnelles et qui ont chacune 3 termes.

b) Donne un exemple de deux suites de nombres qui ne sont pas proportionnelles et qui ont chacune 2 termes.

2. Pour éviter d'avoir à faire les calculs à chaque vente, un boulanger réalise un tableau lui donnant le prix de 1 pain, de 2 pains, de 3, de 4 et de 5. Réalise toi-même ce tableau ; le prix d'un pain est 4,75 F.

3. Sur un jeu d'échecs on imagine que l'on numérote les 8 premières cases de 1 à 8. On imagine aussi que sur la première on place 1 grain de riz, sur la seconde 2, sur la troisième 4, sur la quatrième 8, etc. (On multiplie à chaque fois le nombre précédent par 2.)

La suite de nombres obtenue est-elle proportionnelle à la suite des numéros des cases ?

4. Deux suites proportionnelles

$S_1 : \dots ; 2 ; \dots ; 4$
et $S_2 : 0,5 ; \dots ; 1,5 ; \dots$

dont certains termes sont inconnus sont représentées par le graphique ci-contre. Après

l'avoir reproduit, détermine à l'aide de ce graphique tous les termes manquants.

Donne le coefficient de proportionnalité de S_1 vers S_2 et celui de S_2 vers S_1 .

5. Pour chacune des situations suivantes, indique si tu peux utiliser la proportionnalité pour résoudre la question posée ; si oui, résous-la.

a) 8 tomates ont une masse de 1,2 kg ; quelle est la masse de 5 tomates ?

b) 8 briques identiques ont une masse de 9,6 kg ; quelle est la masse de 5 briques ?

6. Une statistique indique que 55 % des ménages français possèdent un animal domestique et que 15 % en possèdent 2 ou plus.

a) Quel est le pourcentage de ménages français ne possédant aucun animal domestique ?

b) Sachant que lors de cette statistique, le nombre de ménages français pouvait être estimé à 19 866 000, à combien estimes-tu le nombre d'entre eux possédant 1 animal domestique ? 2 ou plus ? aucun ?

7. Le nombre d'entrées dans les cinémas est en moyenne de 40 % plus élevé le lundi que le mardi (à cause des tarifs réduits). Estime le nombre d'entrées le lundi pour un cinéma qui accueille en moyenne 450 spectateurs le mardi. Estime le nombre d'entrées le mardi pour un cinéma qui accueille en moyenne 910 spectateurs le lundi.

C

alcul mental

Dans ce chapitre et le prochain, aucune nouvelle règle de calcul mental ne sera citée ; seuls des exercices d'application des règles que tu as vues tout au long du livre te seront proposés. Bien entendu, dans un même exercice, tu peux utiliser successivement plusieurs règles et aussi plusieurs fois la même, comme tu l'as certainement déjà fait.

1. Calcule les sommes et les différences suivantes :

$7,25 + 3,12$; $77 + 29$; $6,2 + 13,8$; $153 + 48$;

$5,25 + 4 + 0,75$; $4 + 10,2 + 16 + 29,8$;

$49,8 - 25,3$; $584 - 232$; $84 - 57$; $13,2 - 2,7$.

2. Calcule les produits et les quotients suivants :

$140 \times 0,5$; 45×6 ; $4 \times 12,5$; $75 \times 1,6$;

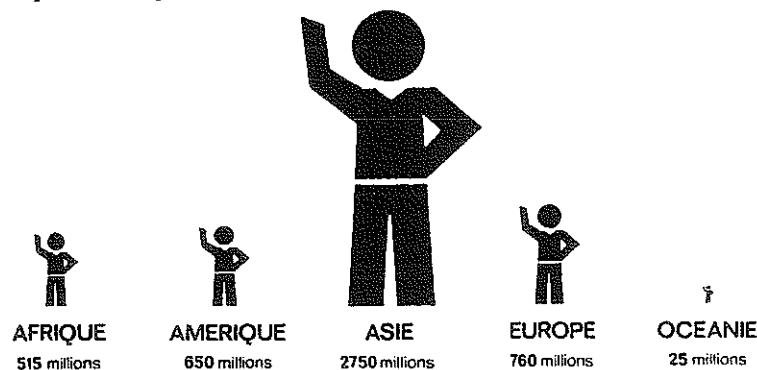
$4 \times 11 \times 0,25$; $2 \times 8 \times 0,5 \times 1,25$;

$\frac{27}{50}$; $\frac{1,1}{1,25}$; $\frac{2,7}{18}$; $\frac{63}{1,4}$.

découvertes

D1 Des nombres en images

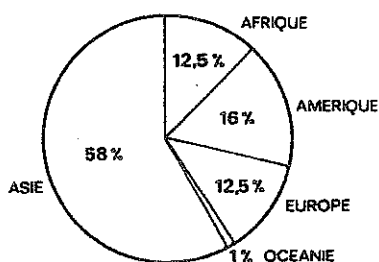
As-tu déjà rencontré dans des revues ou des journaux des dessins qui représentent des nombres ? Par exemple, le dessin suivant représente la répartition de la population mondiale entre les cinq continents : Afrique, Amérique, Asie, Europe et Océanie :



Ici, la hauteur du bonhomme est proportionnelle au nombre d'habitants. L'impression que l'on tire de l'observation de ces dessins renforce l'idée que l'Asie a un nombre d'habitants très élevé.

D2 Des pourcentages imagés

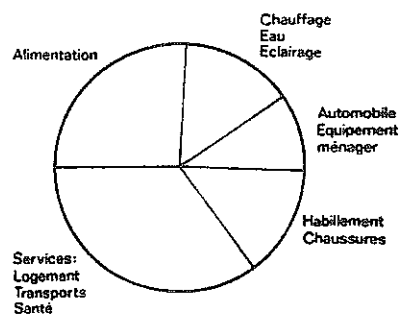
On représente souvent les pourcentages par des dessins. Par exemple :



Structure de la population mondiale
Estimation pour l'an 2000

Cette façon de représenter les pourcentages est beaucoup utilisée lorsque l'on veut illustrer des statistiques : « on découpe le gâteau en parts proportionnelles aux pourcentages ». Le disque tout entier représente 100 %.

Indique maintenant pour le cas suivant, quels pourcentages sont représentés :



Répartition des dépenses des ménages français par postes : alimentation, etc.

Remarque :

On utilise souvent aussi les dessins en bâtons ou en rectangles, comme tu en as déjà rencontré en cours de chapitre.

Exercices

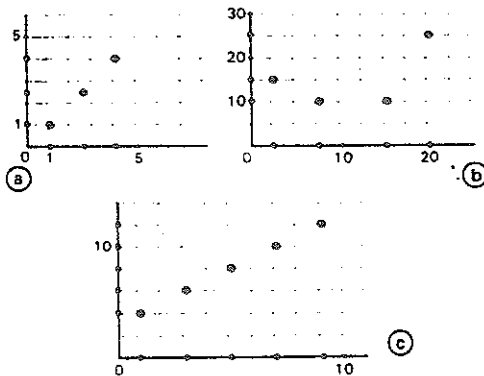
Et Reconnaitre la proportionnalité

1 Deux suites notées S et T sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité de S vers T est 2. On connaît S : 0,7 ; 3,1 ; 4,5 ; 8. Donne T.

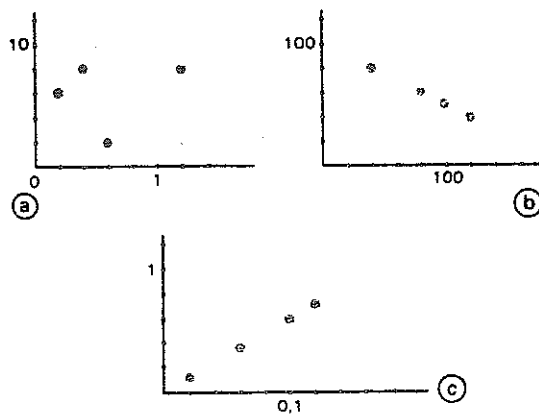
2 Même exercice avec le coefficient 0,3 et la suite S : 0,4 ; 2,2 ; 7 ; 7,3.

3 Même exercice avec le coefficient $\frac{4}{5}$ et la suite S : 2 ; 7,5 ; 10.

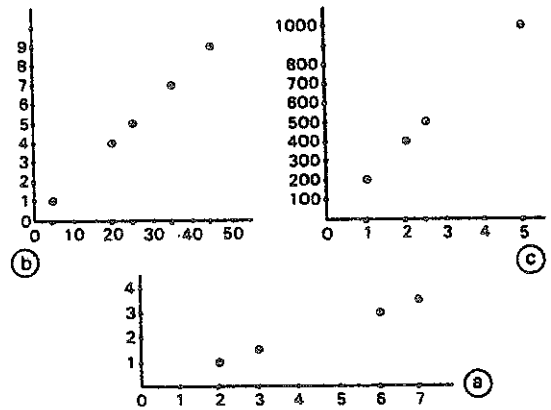
4 Indique, pour chacun des cas suivants, si le graphique représente ou non une proportionnalité :



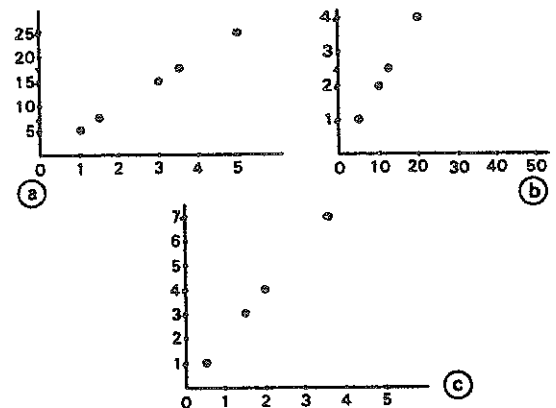
5 Même exercice pour :



6 Chacun des graphiques suivants représente une proportionnalité entre une suite S et une suite T. Les termes de S sont portés en bleu. Trouve les termes de T.



7 Même exercice, mais cette fois ce sont les termes de T qui sont portés (en bleu) et ceux de S que tu dois trouver.



8 Indique pour chacun des cas suivants si les suites S_1 et S_2 sont proportionnelles ou non :

- a) $S_1 : 3 ; 11 ; 14$ b) $S_1 : 0,5 ; 2 ; 4 ; 5$
 $S_2 : 2,1 ; 2,7 ; 10$ $S_2 : 1,5 ; 6 ; 12 ; 15$
- c) $S_1 : \frac{3}{10} ; \frac{5}{10} ; \frac{5}{10}$
 $S_2 : \frac{3}{10} ; \frac{7,5}{10} ; \frac{12}{10}$

9 Même exercice pour :

a) $S_1: \frac{5}{100}; \frac{8}{100}; \frac{25}{100}$ b) $S_1: 0,1; 0,6; 1,8$

$S_2: \frac{20}{100}; \frac{32}{100}; \frac{90}{100}$ $S_2: 0,02; 0,12; 0,30$

c) $S_1: 10; 14; 17$
 $S_2: 7; 9,8; 11,9$

10 Représente par un graphique tracé sur du papier millimétré la proportionnalité des suites S_1 et S_2 dans chacun des cas suivants :

a)

S_1	1	2	3	4	5
S_2	2	4	6	8	10

b)

S_1	0,5	2	2,5	4
S_2	0,6	2,4	3	4,8

c)

S_1	1,5	3	3,5
S_2	0,9	1,8	2,1

11 Indique pour chacun des cas suivants si les suites S_1 et S_2 sont proportionnelles ou non :

a)

S_1	15	5
S_2	47	15

b)

S_1	18	74
S_2	12	111

c)

S_1	3,1	4,2
S_2	5,1	6,2

d)

S_1	0,8	2,3
S_2	2,4	6,9

12 Dans chacun des cas suivants, les suites S_1 et S_2 sont proportionnelles. Complète les tableaux :

a)

S_1	3	4
S_2	9	

b)

S_1		15
S_2	8,4	16,8

c)

S_1	2,5	4
S_2		1,2

d)

S_1	0,7	
S_2	0,84	4,8

13 Recopie et complète le tableau de proportionnalité suivant.

Donne les coefficients de proportionnalité de la 1^{re} suite vers la 2^e suite et de la 2^e suite vers la 1^{re} suite.

1 ^{re} suite	4	14	7	40	47	1		
2 ^e suite		3,5					8	21

14 S_1 et S_2 sont deux suites proportionnelles. Recopie et complète le tableau suivant :

S_1	0,5			3,4	1
S_2		10	12,5		2,5

15 Recopie et complète le tableau pour que S_1 et S_2 soient deux suites proportionnelles :

S_1	0,5			3,4	1,3		6,8	10	
S_2	1,25	10	12,5			7			5

16 Trouve les nombres x et y pour que les suites :

11; x ; 17,6
 et 104; 13; y soient deux suites proportionnelles.

17 Trouve les nombres x et y pour que les suites :

18; x ; 17,6
 et 144; 190; y soient deux suites proportionnelles.

E2. Utilise les connaissances

18 Chez un marchand de légumes, le prix des aubergines est : 9,50 F le kg. Quelle somme paiera quelqu'un qui en achète 2 kg ? 1,5 kg ? 600 g ?

19 Un certain sable a une masse de 1,6 t par m^3 . Quelle est la masse de 3 m^3 ? de 0,8 m^3 ?

20 Dans un magasin, les boîtes de sardines contenant 125 g sont vendues 9,60 F les trois. Quelle somme doit-on régler pour un achat de 6 boîtes ? de 9 boîtes ? Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix au kilo de ces sardines ?

21 8 mètres d'un tissu coûtent 96 F. Combien coûtent 13 mètres ? 6 mètres ?

22 100 kg de pommes donnent 58 litres de cidre. Quelle masse de pommes faut-il presser pour obtenir 2,32 hl de cidre ?

23 Un journal propose les tarifs d'abonnements suivants : 3 mois : 230 F ; 6 mois : 430 F ; 9 mois : 600 F ; 12 mois : 760 F. Les prix sont-ils proportionnels aux durées ? Fais un graphique.

24 a) Vérifie quelles sont les dimensions des feuilles de ton classeur : 21 cm par 29,7 cm ou 16,5 cm par 21 cm ?

b) Prends l'une de ces feuilles, plie-la en deux, puis découpe-la selon le pli. Mets de côté l'une des demi-feuilles obtenues et recommence le travail précédent avec la seconde (pliage et découpage). Garde à nouveau l'une des feuilles obtenues, et poursuis le travail avec l'autre. Réalise cette opération cinq fois

puis jette l'un des deux derniers morceaux obtenus. Il doit te rester cinq rectangles de papier. Reproduis et complète le tableau suivant en inscrivant (en cm) les différentes longueurs et largeurs des cinq rectangles de papier :

	1 ^{re} feuille	2 ^e feuille	3 ^e feuille	4 ^e feuille	5 ^e feuille
Longueur					
Largeur					

Y a-t-il proportionnalité entre largeur et longueur ? Fais un graphique.

- c) Recommence le même travail avec le second type de feuille de classeur (21 par 29,7 si tu avais utilisé une feuille de 16,5 par 21 ; ou l'inverse).

25 Voici un tableau indiquant la consommation d'essence d'une voiture pour trois vitesses horaires :

Vitesse en km/h	90	100	120
Consommation en l	7,2	8,4	11,3

La consommation de cette voiture est-elle proportionnelle à la vitesse ? Fais un graphique.

26 a) Pour un voyage en train les prix sont calculés proportionnellement au nombre de kilomètres parcourus. Le prix au km en 2^e classe pour une personne est de 50 centimes. Combien coûte à une personne un voyage de 37 km ? 228 km ? 564 km ?

- b) Si l'on voyage en famille à deux personnes ou plus on peut obtenir des réductions lors de certaines périodes. Dans ces conditions, voici pour un même voyage le coût en fonction du nombre de personnes :

Nombre de personnes	1	2	3	4
Coût en F	386	579	772	965

Ce coût est-il proportionnel au nombre de personnes ?

27 Pour obtenir 100 kg de farine blanche, il faut 140 kg de blé. Quelle quantité de blé emploie chaque jour une minoterie qui produit journalièrement 270 sacs de farine de 50 kg chacun ?

28 Un bricoleur a acheté 5 panneaux de bois en contre-plaqué pour 42 F. Combien paiera-t-il une douzaine de ces mêmes panneaux si le marchand fait une réduction de 5 F par douzaine ?

29 Sur une boîte de peinture on peut lire : contenance : 0,5 l ; pour environ 8 m² en une couche. Combien faut-il acheter de boîtes pour peindre en deux couches 16 m² ? 24 m² ? 12 m² ?

30 On veut imperméabiliser une bâche de 4 mètres sur 3 mètres. Quelle masse d'enduit spécial faudra-t-il si, avec un bidon de 2 kg on peut en imperméabiliser 5 m² ? Combien de bidons de 2 kg et de 1 kg faudra-t-il acheter pour avoir le moins de reste possible ?

31 Que penses-tu de ces raisonnements ?
7 ouvriers ont fait un ouvrage en 50 jours :

- a) 14 ouvriers l'auraient fait en 100 jours.
b) 14 ouvriers l'auraient fait en 25 jours.

32 Que penses-tu des affirmations ou des raisonnements suivants ?

- a) Le père de Paul pèse deux fois plus que Paul, donc il doit manger deux fois plus.
b) La taille d'un individu est proportionnelle à son âge.
c) La masse de l'eau est proportionnelle à son volume.

33 Une pendule, mise à l'heure le dimanche à midi, avance de 2 minutes 48 secondes par semaine. Quelle heure marquera-t-elle le jeudi suivant, quand il sera 4 heures de l'après-midi ?

34 Voici une recette de « pudding ».

Il faut 150 g de sucre, 60 g de semoule, $\frac{3}{4}$ de litre de lait. Ces proportions sont pour 6 personnes. Indique les quantités nécessaires pour 12 personnes, 4 personnes, 10 personnes.

35 Karim a acheté 8 livres tous au même prix, il a payé 200 F. Sophie a acheté 15 livres semblables, combien a-t-elle payé ?

36 1 kg de fromage coûte 46 F, combien coûtent 500 g, 250 g, 300 g, 5 kg, 2,5 kg, 3 kg, 3,3 kg ? (Fais un tableau.)

37 Une recette prévue pour 4 personnes prévoit 4 œufs, 200 g de farine, 150 g de sucre, 2 pommes. Donne les proportions pour 2 personnes, 8 personnes, 12 personnes, 6 personnes, 3 personnes, 15 personnes.

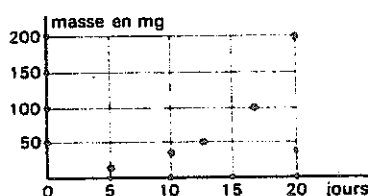
38 Voici un tableau qui donne la correspondance entre les degrés Fahrenheit, utilisés en Grande-Bretagne pour les températures, et les degrés Celsius utilisés en France.

Fahrenheit	41	59	68	86
Celsius	5	15	20	30

- a) Trace un graphique représentant la correspondance entre les deux suites du tableau. (Choisis bien les unités.)
b) Les deux suites sont-elles proportionnelles ?

39 Les bases de quatre parallélépipèdes rectangles ont la même aire : 2 m^2 . Leurs hauteurs sont : 0,5 cm ; 0,8 cm ; 2 m ; 2,5 m. Calcule leurs volumes puis trace un graphique représentant le volume de ces solides en fonction de leur hauteur (sur chaque axe, tu représenteras l'unité par 1 cm). Les volumes sont-ils proportionnels aux hauteurs ?

40 Le graphique suivant représente la masse d'un criquet en fonction des premiers jours de sa vie :
La masse du criquet est-elle proportionnelle au nombre de jours ?



41 Le tableau suivant indique les distances nécessaires au freinage d'une voiture sur route sèche et sur route humide en fonction de la vitesse :

Vitesse en km/h	40	60	80	100	120
Distance sur une route sèche	20	37	58	95	113
Distance sur une route humide	29	57	94	150	193

Les distances de freinage sur route sèche et sur route humide sont-elles proportionnelles à la vitesse ? Les distances de freinage sur route sèche et sur route humide sont-elles proportionnelles ? Fais des graphiques.

42 Complète le tableau suivant donnant les distances du soleil aux planètes (arrondies au centième).

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter
U.A.	0,39	0,72	1	1,52	5,2
Millions de km					

Saturne	Uranus	Neptune	Pluton	
9,55	19,22	30,11	39,5	U.A.
				Millions de km

U.A. : Unité Astronomique
1 U.A. = 149,6 millions de kilomètres

43 Des voitures jouets sont réalisées à l'échelle $\frac{1}{60}$.

- La longueur réelle d'une certaine voiture est 470 cm ; sa largeur 170 cm. Quelles sont les dimensions du jouet ?
- La longueur d'une voiture jouet est 6 cm ; sa largeur 2,5 cm. Quelles sont les dimensions réelles de la voiture ?

44 Représente sur ton cahier à l'échelle $\frac{1}{50}$ un triangle isocèle dont la base a pour longueur 2,50 m et les autres côtés 3,50 m.

45 Même exercice, à l'échelle $\frac{1}{5\,000}$, pour un rectangle de dimensions 100 m par 380 m.

46 Représente avec un grossissement de 500 : une cellule de 22 micromètres de diamètre ; un cheveu de 0,01 mm d'épaisseur ; l'épaisseur d'une feuille de ton cahier (0,08 mm environ).

47 Un architecte dispose de deux plans d'un même immeuble ; l'un au $\frac{1}{20}$, l'autre au $\frac{1}{50}$.

- Par quelle longueur, en cm, est représentée sur chacun des deux plans une longueur de 1 m ?
- Quelle est, sur le plan au $\frac{1}{50}$, la longueur de la façade de cet immeuble si elle est de 36 cm sur celui au $\frac{1}{20}$?

48 Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{1\,000\,000}$ la distance entre deux villes est 18 cm. Quelle est leur distance réelle ?

49 Un microscope électronique a un grossissement de 20 000, quelle est la dimension réelle d'une mitochondrie vue sous la forme d'un disque de 14 mm de diamètre ?

50 Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50\,000}$, un terrain occupe un espace rectangulaire de 28 mm sur 25 mm. Quelle est son aire réelle ?

51 Sur une carte topographique 4 cm correspondent à 1 km dans la réalité.

- Quelle est la distance, sur la carte, de deux villes situées à 13,5 km ?
- Sur cette carte un tronçon d'autoroute mesure 28 cm, quelle est sa longueur dans la réalité ?

52 Un facteur fait régulièrement sa tournée à bicyclette.

Sur un plan au $\frac{1}{80\,000}$ il trouve que sa tournée mesure environ 16 cm.

Il fait sa tournée 270 jours par an. Calcule la distance parcourue annuellement par ce facteur.

53 Dans chacun des cas suivants cherche la bonne réponse. Écris la phrase vraie sur ton cahier.

- a) — Calculer « 70 % de » correspond à :
 $\times 0,70$; $\times 70$; $\times 7$.
 — Calculer « 8 % de » correspond à :
 $\times \frac{1}{8}$; $\times 8$; $\times 0,08$.
 — Calculer « 25 % de » correspond à :
 $\times 4$; $\times 25$; $\times 0,25$.
- b) Augmenter de 20 % correspond à :
 $\times 20$; $\times 80$; $\times 1,2$.
 Augmenter de 7 % correspond à :
 $\times 7$; $\times 1,07$; $\times 1,7$.
 Augmenter de 50 % correspond à :
 $\times 50$; $\times 150$; $\times 1,5$.
- c) Diminuer de 20 % correspond à :
 $\times 80$; $\times 0,8$; $\times 20$.
 Diminuer de 7 % correspond à :
 $\times 9,3$; $\times 0,93$; $\times 1,07$.
 Diminuer de 25 % correspond à :
 $\times 25$; $\times 0,25$; $\times 0,75$.

54 Le petit Archimède prétend que multiplier par 0,75 c'est calculer les « 75 % de » alors que le petit Chimarède affirme que multiplier par 0,75 c'est diminuer de 25 %. Qu'en penses-tu ?

55 La graine de colza donne en huile 24 % environ de sa masse. Combien d'huile peut-on retirer d'un sac de colza de 70 kg ?

56 Un pain contient 57 g d'eau représentant 38 % de sa masse. Calcule cette masse.

57 Le laiton, utilisé en plomberie, est composé de 60 % de cuivre et de 40 % de zinc. Calcule la masse de cuivre et de zinc contenues dans un robinet en laiton de 650 g; de 1,2 kg ?

58 L'année dernière, il y avait 680 élèves dans un C.E.S. À la rentrée, l'effectif a augmenté de 5 %. Combien y a-t-il d'élèves en plus ?

59 Reproduis le dessin suivant :



En bleu, on a tracé le segment représentant 50 %

de l'aire du rectangle. Trace de la même façon les segments qui représentent : 25 % de l'aire; 12 %; 86 %.

60 Complète les schémas (application d'un pourcentage) :

Exemple : $50 \xrightarrow{8\%} 4$.
 $\times 0,08$

250 $\xrightarrow{55\%}$... ; 240 $\xrightarrow{5\%}$... ;

0,8 $\xrightarrow{100\%}$... $\xrightarrow{10\%}$ 6 ;

... $\xrightarrow{15\%}$ 180 ; ... $\xrightarrow{104\%}$ 6 ; 84 $\xrightarrow{150\%}$...

61 2 700 candidats se présentent à un concours. 13 % sont reçus. Combien y a-t-il de candidats reçus ?

62 75 élèves d'un collège représentent les 12 % qui étudient le russe. Combien y a-t-il d'élèves dans ce collège ?

63 Les adhérents d'une centrale d'achat bénéficient d'une remise de 7 % sur tous les prix marqués dans un magasin.

- a) Combien paient-ils des articles marqués 775 F, 860 F.
 b) Ils paient 116,25 F et 864,90 F deux articles; quels étaient leurs prix au départ ?

64 Une campagne visant à diminuer le nombre des accidents de voitures a été intitulée « objectif - 10 % ». Des travaux ont été réalisés pour cela à certains croisements dangereux. L'année précédant la campagne il y avait eu 20 accidents à un certain croisement. À partir de quel nombre annuel d'accidents futurs, à ce même croisement, l'objectif - 10 % sera-t-il atteint ?

65 Le tableau suivant indique, en pourcentages de la population mondiale, la population de quelques pays en 1981 :

Pays	Chine	Inde	URSS	USA	Brésil	France
%	22 %	15,3 %	6 %	5,1 %	2,7 %	1,2 %

À cette époque, le monde avait 4 500 millions d'habitants. Calcule la population que comportait chacun des pays du tableau.

66 En 1981, la France avait 54 millions d'habitants. Reproduis le tableau suivant et complète-le :

Âges	moins de 20 ans	entre 20 et 64 ans	65 ans et plus
% de la population	30,1 %	56 %	13,9 %
Population			

67 Les mers occupent 70,8 % de la surface du globe terrestre et les terres, 29,2 %. La superficie totale du globe est de 510,6 millions de km². Quelle superficie occupent les mers ? les terres ?

68 Dans chacune des situations suivantes, invente une question et résous-la.

- Un couteau en acier inoxydable comporte 18 % de chrome. Il contient 18,9 g de chrome.
- Dans une classe, il y a 7 absents ; ce qui représente 25 % de l'effectif habituel.
- Une voiture tractant une caravane voit sa consommation d'essence augmenter d'environ 25 %. Sans la caravane la voiture consomme 8 litres aux 100 km.
- Un rôti de porc dans l'échine a une masse de 1,500 kg. Ce morceau contient environ 35 % de matière grasse.

69 Sans calculer, donne la réponse qui te paraît la bonne :

Un salaire de 6 500 F est augmenté de 2 %. Le nouveau salaire est-il de :
7 000 F ; 6 630 F ; 130 F ; 6 520 F ; 1 300 F ?

70 Même exercice :

Après une baisse de 30 % un blouson coûte 420 F. Quel était l'ancien prix ?
700 F ; 350 F ; 600 F ; 450 F.

71 Même exercice :

Dans le gruyère, il y a en moyenne 38 % d'eau. Dans un morceau de 400 g, combien y a-t-il d'eau ?
152 g ; 15,2 g ; 38 g ; 380 g ; 200 g.

72 Même exercice :

Un capital de 30 000 F placé dans une banque rapporte 7,5 % d'intérêts par an. Quel est le montant des intérêts au bout d'un an ?
22,5 F ; 225 F ; 2 250 F ; 22 500 F.

73 Dans un club de vacances, la répartition des touristes étrangers est la suivante :

	Nombre de touristes	Pourcentage sur le nombre de touristes
Allemands		25 %
Anglais		6,25 %
Italiens	10	12,5 %
Espagnols	15	
Hollandais		37,5 %

Complète le tableau.

74 Un supermarché accorde une remise de 3 % sur tous ses articles ; complète le tableau suivant :

Prix de l'article (en francs)	Montant de la remise
100	3
200	
50	
150	
200	
20	
370	
530	
	27
	5,40

75 Dans une petite ville, lors d'une élection, cinq listes A, B, C, D et E sont en présence. Sur les 14 000 suffrages exprimés, voici les résultats. Complète-les :

Listes	Nombre de suffrages exprimés	% de suffrages par rapport aux suffrages exprimés
A	4 200	
B		26 %
C	2 800	20 %
D		18 %
E	840	6 %
Total	14 000	100 %

76 Une ville de 600 000 habitants voit sa population décroître en moyenne de 4 % par an. Prévois quelle sera sa population dans 1 an ? dans 2 ans ?

77 Une action en bourse vaut 1 400 F en mai. De mai à juin cette action a augmenté de 10 %. De juin à juillet elle a diminué de 10 %. Combien vaut-elle à la fin juillet ?

78 Un meuble vaut 1 800 F. Le vendeur vous dit : « Nous vous accordons une remise de 10 % sur ce prix ; le transport vous coûtera 10 % du prix payé. »
À combien reviendra ce meuble une fois livré ?

ANALYSE D'EXERCICES PROPORTIONNALITE EN 6E

Le livre examiné est "MATHEMATIQUES 6e", IREM de STRASBOURG, Collection collèges dirigée par F.MOLLET-PETIT, Ed ISTRA-CASTEILLA, PARIS 1986.

I. ARTICULATION COURS / EXERCICES

Elle est relativement originale et très prégnante. Le chapitre " Vers la proportionnalité " (l'avant-dernier de l'ouvrage) démarre par une activité mettant en jeu des suites de rectangles. Après cette activité assez complexe, prévue pour être menée avec le professeur, un auto-test intitulé "Maintenant, faisons le point " propose neuf items. Pour chaque item, on indique clairement :

- Le savoir-faire mis en jeu (l'élève peut nommer ses compétences)
- Le renvoi au cours (page).
- Le renvoi à un exercice résolu (n°) inclus dans le cours.
- Le renvoi à des exercices numérotés.

Le cours est lui-même très articulé avec les exercices résolus ; soit il les introduit, soit il en dégage des définitions de portée générale.

II. ORGANISATION GENERALE DES EXERCICES

Le chapitre comprend 88 exercices répartis en deux catégories :

Des exercices d'entraînement pour lesquels il est indiqué le contenu mathématique auquel ils sont relatifs, avec renvoi à la partie du cours correspondant, éventuellement à un exercice résolu du même type. Ils sont également classés par niveau de difficulté (1 ou 2). On distingue ainsi :

Opérateurs multiplicatifs : Ex 1 à 16

Proportionnalité : Ex 17 à 20

Proportionnalité : oui ou non ? (3 classes)

Géométrie : Ex 21 à 23 (Niv 1), 37-38 (Niv 2)

Numérique : Ex 29 à 36

Vie courante : Ex 24 à 28

Des Applications. Elles s'apparentent à de petites situations-problèmes (au sens du primaire). Elles sont également réparties en deux niveaux de difficulté (1 ou 2).

Niveau 1

Géométrie : Ex 39 à 47

Vie courante : Ex 48 à 78

Niveau 2

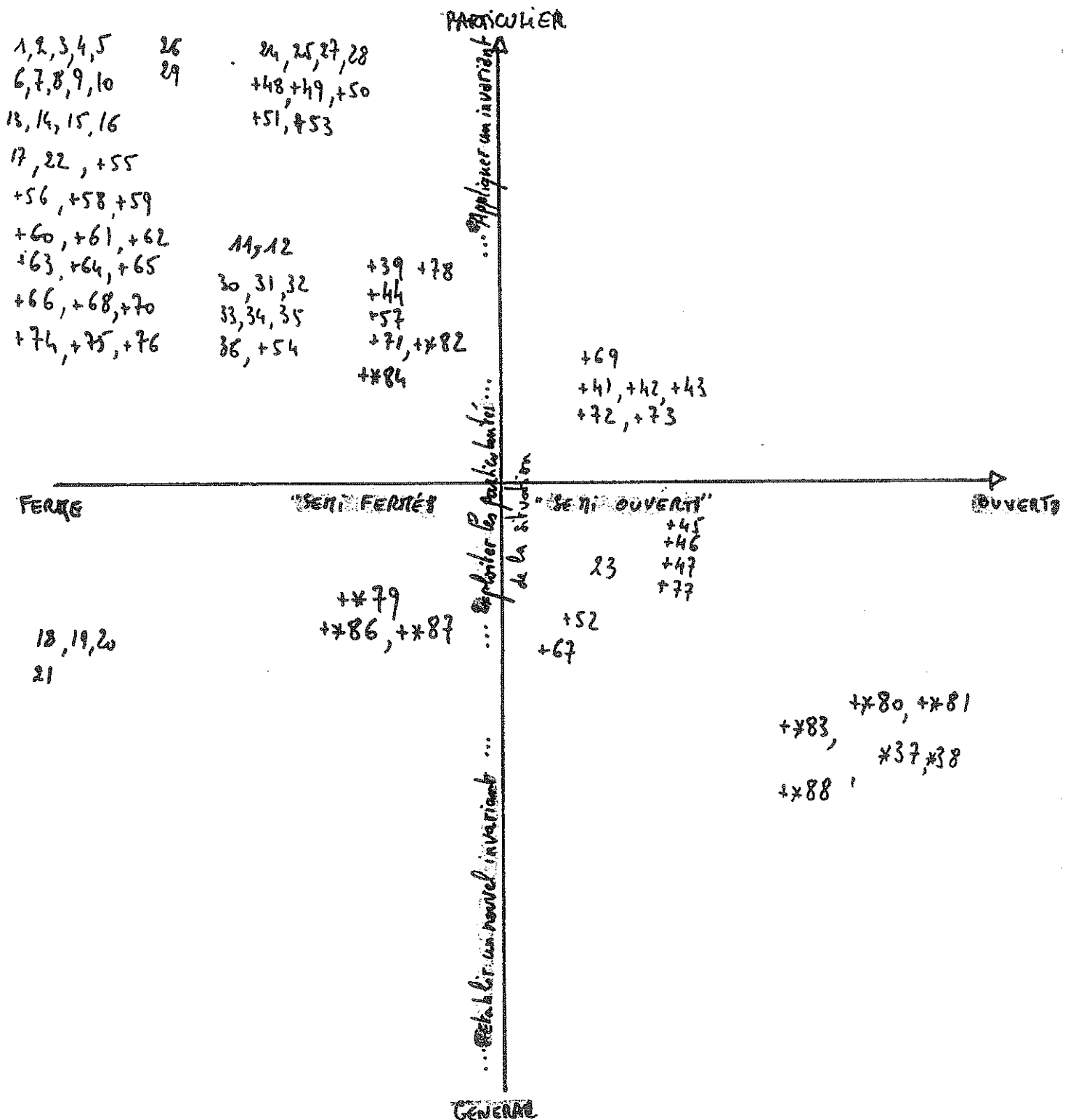
Géométrie : Ex 79 à 82

Vie courante : Ex 83 à 88

III. ANALYSE CROISEE "DEGRE D'OUVERTURE" / "DEGRE DE GENERALITE"

LEGENDE

- N° : Exercice d'entraînement
- *N° : Exercice d'entraînement, niveau 2
- +N° : Application
- **N° : Application, niveau 2



IV. ANALYSE SUIVANT LE CRITERE "IMPLICITE / EXPLICITE"

Les renvois au cours et aux exercices résolus étant systématiques, la dose d'implicite par rapport au contenu est pratiquement nulle. Cela est également renforcé par le fait que les exercices sont regroupés par thèmes correspondant à un contenu scientifique.

D'autre part, sur ce chapitre du cours, l'implicite aurait pu porter sur le caractère proportionnel ou non des situations proposées. En fait, la distinction est bien opérée entre les situations clairement annoncées comme proportionnelles et celles où l'activité consiste justement à déterminer s'il s'agit ou non d'une situation de proportionnalité.

Enfin les remarques concernant le domaine de validité des résultats établis semblent tout à fait opératoires au niveau de rigueur que l'on peut attendre d'élèves de 6e.

Les consignes relatives à la tâche proposée à l'élève, sont en général très explicites

Références informatiques

- Programme : Rectangle sur le matériel d'accompagnement Istra.
- Logiciel "Éducation Nationale" : Linéarité.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Niveau 1

Opérateurs multiplicatifs : cours p. 243

EXERCICES 1 à 10 : exercices résolus 1 et 2 p. 243 et 244

1 Faire dans le cahier un tableau de 2 lignes et 9 colonnes :

	1	2	5	6	10	12	15	20	25
$\times 9$									

Le remplir en faisant agir l'opérateur indiqué.

2 Même exercice avec l'opérateur $\times 2,7$

3 Même exercice avec l'opérateur $\div 4$

4 Même exercice avec l'opérateur $\div 8$

5 Même exercice avec le tableau et l'opérateur indiqué :

$\times \frac{7}{4}$	4	6	8	10	12	40	60	80	100	120

6 Même exercice avec l'opérateur $\times \frac{2}{5}$

7 Même exercice avec ce tableau et l'opérateur indiqué :

$\times \frac{3}{8}$	0,2	0,35	1,4	3,7	4	8,8	14	35	37	40

8 Même exercice avec l'opérateur $\times \frac{11}{7}$

9 Même exercice avec l'opérateur $\times \frac{47}{29}$

10 Même exercice avec l'opérateur $\times \frac{114}{7023}$

EXERCICES 11 et 12 : exercice résolu 3 p. 244

11 a) Par quel nombre faut-il multiplier 3 pour obtenir 15 ?
b) Quel nombre obtient-on en multipliant par ce même nombre : 7,5 ; 30 ; 75 ; 150 ; 1 500 ?

12 Même exercice avec les nombres : 12 et 8 ; 6 et 9 ; 8 et 6 ; 9 et 6.

EXERCICES 13 à 16 : exercice résolu 4 p. 245

13 Dans le tableau ci-dessous, les nombres de la 2^e ligne sont obtenus en appliquant aux nombres de la première ligne, un même opérateur multiplicatif :

$\times ?$	5	9	10	12	20		30		40	45
	7,5	13,5	15	18	30	37,5		52,5		

Trouver cet opérateur et les nombres manquants. Écrire avec les nombres du tableau, des rapports égaux.

14 Même exercice avec ce tableau :

$\times ?$	3	5	7	10	14			25	28	
	2,25	3,75	5,25	7,5	10,5	15	15,75			26,25

15 Même exercice avec ce tableau :

$\times ?$	8	9	10	11	12			15		17
	6,4	7,2	8	8,8	9,6	10,4	11,2		12,8	

16 Même exercice avec ce tableau :

$\times ?$	6	10	12	20	24	30	36		42	
	7,5	12,5	15	25				50		125

Proportionnalité : cours p. 245

EXERCICES 17 à 20 : exercice résolu 5 p. 246

17 Dessiner au moins trois rectangles dont la longueur est proportionnelle à la largeur, le coefficient de proportionnalité valant 2.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Niveau 1

Indiquer chaque fois, la longueur et la largeur du rectangle dessiné. Vérifier en calculant le rapport de la longueur à la largeur.

- 18 a) Dessiner trois rectangles dont la longueur est proportionnelle à la largeur :
- le premier de 10 cm × 2,5 cm,
 - le deuxième dont la largeur est 3 cm,
 - le troisième dont la longueur est 5 cm.
- Expliquer.
- b) Représenter graphiquement la longueur, en mm, de ces rectangles, en fonction de leur largeur, en mm (on prendra en abscisse et en ordonnée 1 cm pour 10 mm). Tracer la droite passant par les points obtenus (les points doivent être alignés).
- c) Lire sur ce graphique des longueurs et des largeurs possibles d'autres rectangles de mêmes proportions. Vérifier en calculant le rapport de leur longueur à leur largeur.

- 19 Même exercice pour un premier rectangle de dimensions 15 cm et 12 cm.

- 20 Même exercice pour un premier rectangle de dimensions 14,4 cm et 9 cm.

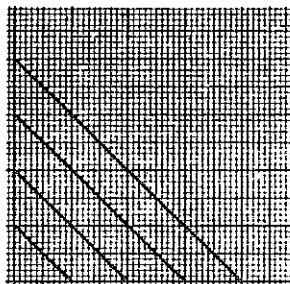
Proportionnalité : oui ou non ? : cours p. 246

EXERCICES 21 à 28 : exercices résolus 6 et 7 p. 247

GÉOMÉTRIE :

- 21 On a dessiné ci-dessous quatre triangles rectangles isocèles, dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Mesurer l'hypoténuse de ces triangles rectangles, à 1 mm près, et noter le résultat dans un tableau analogue à celui qui suit :



Longueur du côté en cm	1	2	3	4
Hypoténuse en cm				
Hypoténuse				
Longueur				

Pour ces triangles, l'hypoténuse semble-t-elle être proportionnelle à la longueur de leurs côtés ? (on verra en 4°, qu'il y a effectivement proportionnalité, le coefficient valant $\sqrt{2}$).

- 22 Regarder le tableau de la p. 225, donnant la longueur des côtés d'un polygone régulier, dont les sommets appartiennent tous à un même cercle, en fonction du nombre de ses côtés.
Y a-t-il proportionnalité ?

- 23 Par deux points, il passe une droite.
Par trois points non alignés, il passe 3 droites.
Déterminer combien de droites passent par 4 points, par 5 points, ...
Y a-t-il proportionnalité entre le nombre de points et le nombre de droites passant par ces points ?

IMPOTS :

- 24 Le tableau suivant donne le montant des impôts que doit payer un célibataire en fonction de son revenu :

Revenu	Impôt
30 000	1 078
30 500	1 278
31 000	1 478
31 500	1 678
35 000	3 358
40 000	4 654
45 000	5 974
50 000	7 474

Peut-on dire que les impôts sont proportionnels aux revenus ?

TARIFS POSTAUX :

- 25 a) Regarder les tarifs d'expédition d'une lettre p. 156 (chapitre 10).
Y a-t-il proportionnalité entre le prix à payer et la masse de la lettre ?
b) Même question pour les paquets-poste tarif général.
c) Même question pour les paquets-poste urgents.

- 26 Voici un tableau indiquant le coût (en décembre 1985) des communications téléphoniques, de Strasbourg à Marseille, dans la journée, en semaine, en fonction de la durée de la communication.

Durée en secondes	12	60	72	300
Coût en F	0,77	3,85	4,62	19,25

Y a-t-il proportionnalité entre ces durées et leurs coûts ? (faire dans le cahier une ligne supplémentaire pour le calcul du quotient $\frac{\text{coût}}{\text{durée}}$).

POINTURES :

- 27 On a ci-dessous un tableau de correspondance entre les pointures de chaussures et les longueurs de pied en cm :

Longueur de pied en cm	17,6	18,3	19	19,6	20,3	21	21,6	22,3	23
Pointure à commander	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Longueur de pied en cm	23,6	24,3	25	25,6	26,3	27	27,6	28,3	29
Pointure à commander	37	38	39	40	41	42	43	44	45

Y a-t-il proportionnalité entre la pointure et la longueur de pied, en cm ?

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

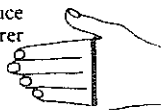
Niveau 1

28

a) Comment déterminer sa pointure de gant ?

On prend son tour de main comme indiqué ci-contre, et on regarde le tableau ci-dessous :

TOUR DE MAIN :
Oris sous le pouce
et sans serrer



Tour de main en cm	17,5	19	20	21,5	23	24	25,5	27,5
Pointure	6 1/2	7	7 1/2	8	8 1/2	9	9 1/2	10

b) Y a-t-il proportionnalité entre la pointure et le tour de main, en cm ?

- a) Y a-t-il proportionnalité entre le périmètre et la longueur des côtés ? Si oui, donner le coefficient de proportionnalité, et expliquer grâce à la formule.
b) Mêmes questions pour l'aire.

RECTANGLES DE LARGEUR CONSTANTE :

31

- Dessiner au moins trois rectangles de largeur 5 cm.
- Faire un tableau analogue à celui de l'exercice précédent et le remplir en calculant le périmètre et l'aire des rectangles de largeur 5 cm, dont la longueur est donnée à la première ligne.
- Se poser les mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

EXERCICES 29 à 35 :

cours p. 248

TABLEAUX DE NOMBRES :

29

Voici des tableaux de nombres :

①	7	1	2	6
	14	8	9	13
②	7	1	2	6
	14	2	4	12
③	7	1	2	6
	15	3	5	13
④	7	1	2	6
	49	1	4	36
⑤	7	1	2	6
	21	3	6	18

Les nombres de la deuxième ligne ont été obtenus en transformant les nombres de la première ligne de l'une des cinq manières qui suivent (elle sont dans le désordre) :

- n° 1 : $a \mapsto a \times 3$
n° 2 : $a \mapsto a \times 2$
n° 3 : $a \mapsto a + 7$
n° 4 : $a \mapsto a \times a$
n° 5 : $a \mapsto a \times 2 + 1$

- a) Associer chaque tableau à la transformation qui a permis de le fabriquer.
b) Quels sont les tableaux de proportionnalité ? Par quelles égalités de quotients cela se traduit-il ?
c) Représenter graphiquement pour chaque tableau les nombres de la deuxième ligne, en fonction de ceux de la première ligne.

VOLUME DU CUBE :

32

Faire l'exercice 35, chapitre 5, p. 85.

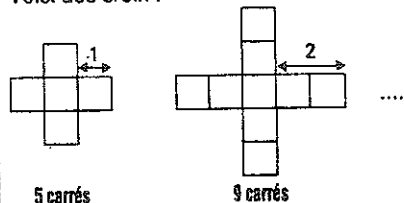
Y a-t-il proportionnalité entre la longueur des arêtes d'un cube (en cm) et :

- a) la longueur totale des arêtes (en cm) ?
b) l'aire de chaque face (en cm^2) ?
c) le volume du cube (en cm^3) ?

DÉNOMBREMENTS :

33

Voici des croix :



- a) Indiquer une règle de construction et en construire deux autres selon cette règle.
b) Faire un tableau, indiquant le nombre de carrés d'une croix, en fonction du nombre de carrés d'une branche :

Nombre de carrés d'une branche	1	2	3	4
Nombre de carrés de la croix	5	9		

Y a-t-il proportionnalité ?
Quelle formule a-t-on ici ?

PÉRIMÈTRE ET AIRE D'UN CARRÉ :

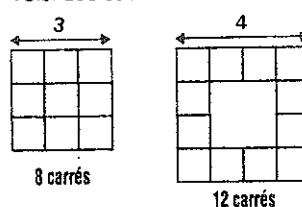
30

Faire dans le cahier un tableau comme celui qui figure ci-dessous et le remplir :

Longueur côté en cm	6	6,5	7	8	8,5	10,5	40	42	72
Périmètre en cm									
Périmètre									
Longueur									
Aire en cm^2									
Aire									
Longueur									

34

Voici des cadres carrés :



- a) Indiquer une règle de construction et en construire deux selon cette règle.
b) Quel est le nombre de carrés d'un cadre en fonction du nombre de carrés d'un côté ?
Faire un tableau.
Y a-t-il proportionnalité ?
Quelle formule a-t-on ici ?

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Niveau 1

PARTAGES :

- 35 a) On veut partager 100 F de manière équitable entre 4 personnes.
Combien chacune aura-t-elle ?
b) Même question s'il y a 5 personnes.
c) Y a-t-il proportionnalité entre la somme reçue et le nombre de personnes à qui elle est donnée ?
Quelle formule a-t-on ici ?

AGES :

- 36 Nathalie a 12 ans ; son père, 36 ans.
a) Quel âge aura-t-elle quand son père aura 50 ans ?
b) Y a-t-il proportionnalité entre l'âge du père et celui de sa fille ?
Trouver une formule donnant l'âge de la fille en fonction de celui du père.

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Niveau 2

Proportionnalité : oui ou non ?

RECTANGLES DE PÉRIMÈTRE CONSTANT :

- 37 On considère ici des rectangles de périmètre égal à 14 cm.
a) Y en a-t-il beaucoup ?
Indiquer des longueurs et largeurs possibles de tels rectangles.

- b) Leur longueur est-elle proportionnelle à leur largeur ?
c) Représenter graphiquement leur longueur en fonction de leur largeur.

RECTANGLES D'AIRES CONSTANTES :

- 38 Mêmes questions que précédemment, avec des rectangles d'aire égale à 12 cm^2 .

APPLICATIONS

Niveau 1

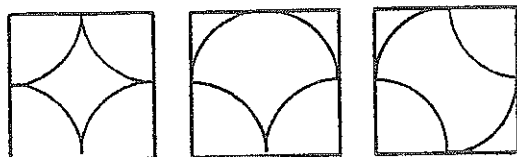
Applications en géométrie :

EXERCICES 39 à 47 : *exercice résolu 8 p. 248*

Les longueurs sont à donner au dixième de millimètre près, sauf à l'exercice 39. On prendra pour les calculs la valeur 3,141 6 à la place de π .

- 39 La longueur d'un cercle est 48 cm.
Quel est, sur ce cercle, la longueur :
a) d'un demi-cercle ?
b) d'un quart de cercle ?
c) d'un arc de 45° ?
d) d'un arc de 270° ?
e) d'un arc de 135° ?

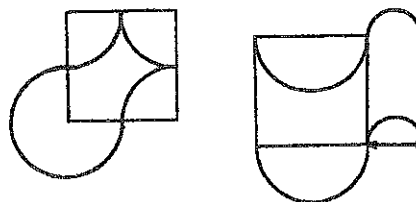
40



- a) Dessiner les courbes ci-dessus dans un carré de 10 cm de côté (elles sont faites d'une juxtaposition de quarts de cercles de même rayon).
b) Calculer leurs longueurs.

41

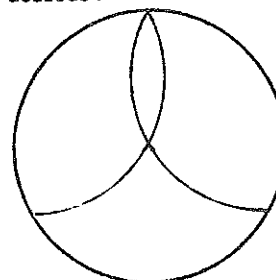
- a) Calculer le périmètre des domaines colorés lorsque le carré rouge a 10 cm de côté.
(les courbes les délimitant sont des arcs de cercles ou des segments) :



- b) En connaissant uniquement la formule d'aire du rectangle, peut-on trouver l'aire des mêmes domaines ?

42

- a) Tracer un cercle de 4 cm de rayon.
b) Le partager en trois parties égales et dessiner trois arcs de cercles de même rayon comme sur la figure ci-dessous :



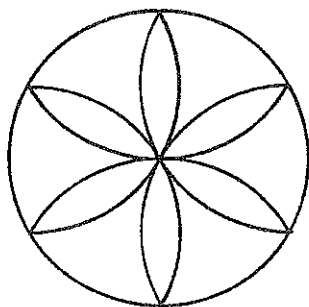
- c) Calculer la longueur de la courbe.

APPLICATIONS

Niveau: 1

43

- a) Dessiner un cercle de 4 cm de rayon.
b) Tracer une rosace à six branches, comme ci-dessous :



- c) Calculer la longueur de la rosace.

44

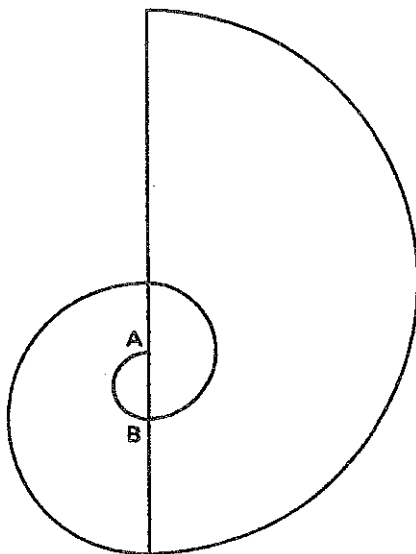
Dans un cercle de 10 cm de rayon, compléter :

Arc en degré	180°	90°	45°	35°	60°	120°	135°	150°
Longueur en cm								

SPIRALES :

45

Voici le début d'une spirale formée d'une succession de demi-cercles :



Le premier demi-cercle a pour extrémités A et B.

- a) Refaire cette spirale en prenant $AB=1$ cm. Indiquer une règle de construction et la prolonger selon cette règle.
b) Faire un tableau de 5 lignes et 4 colonnes :

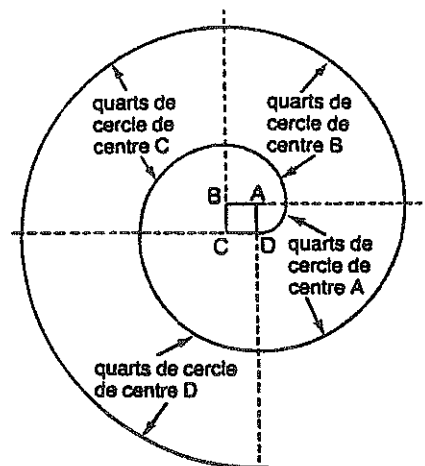
Rayon R du dernier arc de cercle dessiné en cm	Longueur du cercle de rayon R en cm	Longueur du dernier arc de cercle dessiné en cm	Longueur du morceau de spirale dessinée en cm
0,5	3,14	1,57	1,57
1	6,28	3,14	4,71

Le remplir comme indiqué, au fur et à mesure du dessin des demi-cercles successifs.

- c) La longueur de la spirale est-elle proportionnelle au rayon du dernier arc de cercle dessiné ?

46

Voici le début d'un dessin de spirale obtenu à partir d'un carré ABCD :



- a) Refaire cette spirale à partir d'un carré de côté 1 cm. Indiquer une règle de construction et l'appliquer pour dessiner au moins 10 arcs de cercle.
b) Faire un tableau de 10 lignes et 4 colonnes :

Rayon R du dernier arc de cercle dessiné en cm	Longueur du cercle de rayon R en cm	Longueur du dernier arc de cercle dessiné en cm	Longueur de la spirale dessinée
1	6,28	1,57	1,57
2	12,57	3,14	4,71

Le remplir comme indiqué.

- c) La longueur de la spirale est-elle proportionnelle au rayon du dernier arc de cercle dessiné ?

47

Même exercice en remplaçant le carré ABCD par un triangle équilatéral ABC de côté 1 cm.

Applications à la vie courante :

Les exercices qui suivent (48 à 78) sont des exemples de proportionnalité. Les résoudre, en disant ce qui est proportionnel.

EXERCICES 48 à 62 :

exercice résolu 9
p. 249

QUANTITÉS :

48

On compte 125 g de rôti de bœuf par personne.

- a) Combien doit peser au minimum un rôti pour 6 personnes ? pour 9 personnes ?
b) J'ai acheté un rôti de 1,500 kg. Combien de personnes au plus vais-je pouvoir inviter ?

APPLICATIONS

Niveau 1

- 49 Pour faire une tasse de chocolat au lait, on compte :
35 g de chocolat ; 2,5 dl de lait.
Quelles quantités faut-il pour 3 tasses ? 10 tasses ?
20 tasses ?

PRIX ET QUANTITÉS :

- 50 Au supermarché sont affichés les prix de quelques fruits et légumes :
- 3,20 F le kg de carottes
 - 35,95 F le kg de champignons de Paris
 - 7,95 F le kg de pommes
 - 6,75 F le kg d'oranges.
- a) Établir une facture pour un achat de fruits et légumes (choisissez les quantités que vous désirez).
- b) Quelle quantité de carottes a-t-on avec 10 F ? avec 50 F ? avec 100 F ?
- c) Mêmes questions pour les champignons de Paris, les pommes, les oranges.

- 51 A la pompe à essence, le litre de super coûte 5,08 F.
- a) Combien coûtent 19 l ? 38 l ? 9,5 l ? 47,5 l ?
- b) Quelle quantité de super peut-on mettre dans le réservoir avec 50 F ? avec 100 F ? avec 200 F ?

TEMPS DE CUISSON :

- 52 a) Pour le temps de cuisson à la cocote-minute de la poule au riz, un livre de cuisine donne : 25 minutes par kg.
Proposer différents "poids" (masse) de poule et indiquer pour chacun le temps de cuisson.
- b) Il n'en est pas de même de la cuisson de tous les aliments. Par exemple, pour la cuisson du confit d'oie, on lit (toujours à la cocote-minute) :
- 30 minutes pour 1 kg
 - 45 minutes pour 2 kg
 - 60 minutes pour 3 à 4 kg.
- Ici, il n'y a pas proportionnalité : expliquer pourquoi.
- c) Chercher dans un livre de cuisine, des temps de cuisson. Dire chaque fois s'ils correspondent au cas a) ou au cas b).

COTE DES CHANGES :

- 53 Le 24 janvier 1986, la banque demandait :
- 3,14 FF pour 1 Deutschmark
 - 7,70 F pour 1 Dollar (\$)
- a) Quelle somme fallait-il verser pour avoir 50 DM ? 75 DM ? 150 DM ? 100 \$? 200 \$? 450 \$?
- b) Combien obtenait-on de DM avec 100 FF ? avec 300 FF ? avec 500 FF ?
- c) Même question pour les Dollars.

POURCENTAGES :

- 54 On a demandé aux habitants d'une ville leurs opinions sur trois édifices récemment construits, et on a présenté ce sondage sous forme d'un tableau dont les cases contiennent chacune un "fromage" :

LEGENDE : ☐ NON ☒ OUI ☐ SANS OPINION

	UNSE DÉPENSE	PLUS DES CONGRES	NOUVELLE MIRE
PENSEZ-VOUS QUE CET EDIFICE SOIT UNE BELLE REALISATION ARCHITECTURALE ?			
PENSEZ-VOUS QUE CET EDIFICE EST EN HARMONIE AVEC LES CONSTRUCTIONS ATTOUTANTES ?			
CE EDIFICE EST-IL FONCTIONNEL ?			

Choisir un de ces fromages (ne pas oublier d'indiquer lequel) : il est partagé en trois.
Pour chacune des trois parties :

- mesurer l'angle en degrés
- faire le rapport avec 180.

Ce rapport est-il conforme à la valeur indiquée sous forme de pourcentage ?

- 55 Un magasin augmente tous ses prix de 8,5 %.
Quel est le nouveau prix d'un article qui était vendu 100 F ? 150 F ? 200 F ? 300 F ?

- 56 La vente de certains objets est soumise à une taxe à la valeur ajoutée (appelée T.V.A.) de 18,6 % du prix de vente hors taxes. Compléter le tableau suivant, l'unité étant le franc.

Prix de vente hors taxes	100	29	128		
Taxe à la valeur ajoutée				32,9	18,7

- 57 On dira qu'une côte a une pente de 9 % lorsque chaque fois que l'on parcourt un mètre de cette côte on s'élève de 9 centimètres. On admet que la route qui mène à un col a une pente moyenne de 9 %. Cette route a une longueur de 18,750 kilomètres entre le bas de la côte et son sommet.
Quelle est la différence d'altitude (en m) entre le bas de cette côte et son sommet ?

AGRANDISSEMENTS. RÉDUCTIONS :

- 58 On a réalisé, d'une plante, une photographie agrandie 5 fois.
La plante mesure, dans la réalité, 0,5 mm.
Quelle est la dimension de son image ?

- 59 On a observé l'image photographique agrandie 20 fois d'un animal. Cette image mesure 1 cm.
Quelle est la taille de l'animal dans la réalité ?

- 60 Dessiner une table rectangulaire de 1,40 m × 1,80 m à l'échelle $\frac{1}{30}$ (c'est-à-dire, diviser ses dimensions par 30).

- 61 Faire un plan au sol de sa chambre, à l'échelle $\frac{1}{25}$, en indiquant l'emplacement de la porte, du lit, etc.

APPLICATIONS

Niveau 1

- 62 La distance entre Strasbourg et Nancy est de 140 km à vol d'oiseau.
Quelle est la distance de ces deux villes sur une carte à l'échelle :
de $\frac{1}{250\ 000}$? de $\frac{1}{500\ 000}$? de $\frac{1}{1\ 000\ 000}$?

EXERCICES 63 à 77 :

exercice résolu 9
p. 249

PRIX A L'UNITÉ :

- 63 Une bouteille d'eau minérale de 1,50 l coûte 2,10 F.
On en achète 12 bouteilles. Combien paye-t-on ?
Combien coûte le litre ?

- 64 Retrouver le prix à l'unité :

Petit déjeuner
la boîte
de 900 g **15.87**
soit le kilo _ _ _

Bordeaux rouge 1982

la bouteille
de 75 cl **14.95**
soit le litre _ _ _

Whisky
6 ans d'âge 40° **59.95**
la bouteille de 70 cl
soit le litre _ _ _

- 66 Même exercice :

Ketchup
30 cl
le flacon de 315 g **5.95**
soit le kilo _ _ _

Champignons
le lot de 3 boîtes
1/4 (345 g) **10.50**
soit le kilo _ _ _

Assouplissant concentré

le berlingot de 250 ml **3.20**
soit le litre _ _ _

- 67 Par un raisonnement simple, répondre aux questions suivantes :

- a) pour une même marque de bière, quelle est la promotion la plus avantageuse ?
A : 6 bouteilles de 33 cl pour 7,10 F ?
B : 24 bouteilles de 25 cl pour 23,81 F ?
b) pour une même marque de lessive, quel est le conditionnement le plus avantageux ?
A : deux paquets de 750 grammes pour 27 F ?
B : un baril de 5 kg pour 88,80 F ?

COMPOSITION D'UN PRODUIT ?

- 68 Lu sur un bidon de sirop d'orange de 150 cl :
780 g de sucre au litre.
Quelle est la masse de sucre dans ce bidon ?

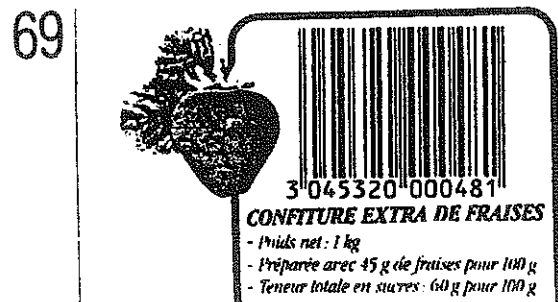
- 65 Même exercice :

6 Bouchées à garnir
le paquet de 150 g **5.15**
soit le kilo _ _ _

Quenelles
pour garniture
la boîte 1/2 (255 g) **3.90**
soit le kilo _ _ _

Confiture de Baies d'Eglantier
le pot de
450 g **6.95**
soit le kilo _ _ _

Bigarreaux
le bocal
de 37 cl (210 g) **3.95**
soit le kilo _ _ _



Commenter.

RECÈTES DE CUISINE :

- 70 Sur une recette de cuisine, on lit :
"Pour quatre personnes, utiliser 150 g de riz".
Quelle quantité de riz faudra-t-il pour huit personnes ?
pour dix personnes ?

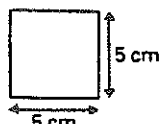
- 71 Une recette de gratin de poireaux prévue pour 5 personnes nécessite les ingrédients suivants :
Poireaux : 750 g ; lait : 50 cl ; beurre : 40 g ; farine : 40 g ; gruyère râpé : 80 g ; sel, poivre, noix de muscade râpée.
Adapter cette recette pour 8 personnes.

APPLICATIONS

Niveau 1

TRICOT :

72 Pour déterminer le nombre de mailles et le nombre de rangs d'un tricot, on fait d'abord un échantillon :



Pour cet échantillon, on a monté 20 mailles et tricoté 29 rangs.

Calculer le nombre de mailles et de rangs nécessaires pour tricoter une écharpe de 20 cm de large et 1 m de long.

Dans les trois cas, indiquer la consommation et le coût (à 5,10 F le litre de super) pour 100 km ; pour 200 km ; pour 250 km ; pour 750 km ; pour 1 000 km.

75 Une voiture a consommé 37 litres pour 354 kilomètres. Combien a-t-elle consommé en moyenne aux 100 km ?

76 Une automobile consomme en moyenne 7,9 l d'essence pour 100 km.
a) Combien de litres consommera-t-elle sur le trajet Paris-Strasbourg (485 km) ?
b) Quelle distance peut-elle parcourir si son réservoir contient au départ du voyage 47,5 l ?

PHOTOGRAPHIE :

73 Une photographie représente un pêcheur tenant à côté de lui deux poissons. Sur cette photo, un poisson mesure 5,1 cm, l'autre poisson mesure 3,9 cm et le pêcheur 10,8 cm. Sachant que le pêcheur mesure en réalité 185 cm, quelles sont les longueurs des deux poissons ?

77 Julien a aidé son ami Baptiste à repeindre le sous-sol de sa maison qui fait 15 m × 9 m. Ils ont utilisé 9 litres de peinture. La semaine suivante, Baptiste vient aider Julien à repeindre le sol de son garage qui fait 5 m × 3 m et lui apporte 3 l de peinture. Julien s'écrie alors : "C'est beaucoup trop pour une seule couche !" Expliquer.

CONSOMMATIONS :

74 Une voiture consomme :
à 90 km/h : 6 litres de super aux 100 km
à 120 km/h : 8,1 litres de super aux 100 km
en ville : 8,8 litres de super aux 100 km.

78 Pierre parcourt 1,2 km sur sa bicyclette dont les roues ont un diamètre de 50 cm.
a) Quel est le nombre de tours de roues effectué ?
b) Même question s'il parcourt : 2,4 km ; 0,6 km ; 3 km ; 3,6 km.

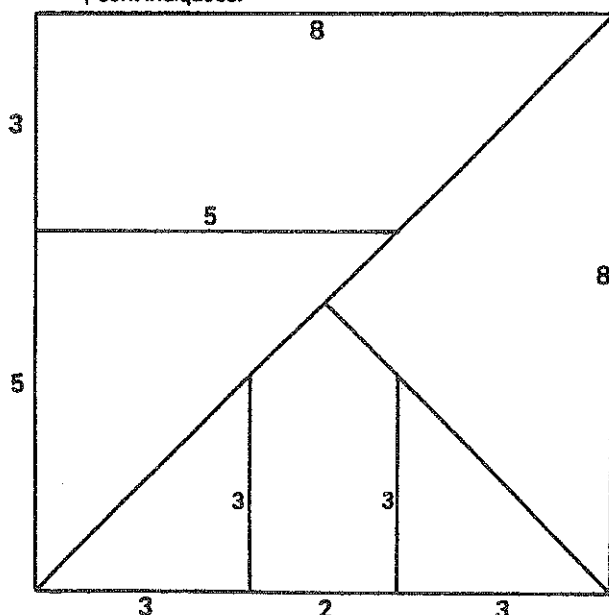
APPLICATIONS

Niveau 2

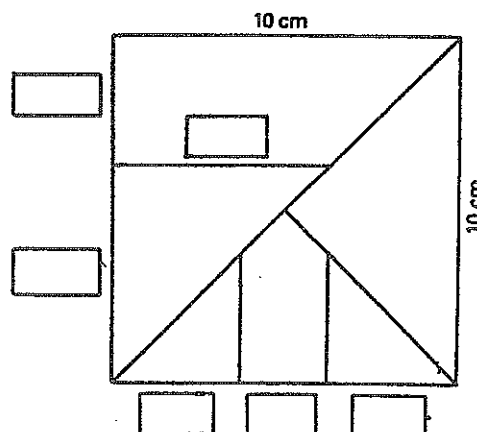
Applications en géométrie :

TANGRAM :

79 On a représenté en vraie grandeur un jeu de "tangram", qui est une sorte de puzzle avec lequel on fait des figures. Les longueurs en cm de certains côtés sont indiquées.



a) On voudrait agrandir le jeu pour qu'il occupe un carré de 10 cm de côté. Faire un croquis comme ci-dessous. Indiquer dans les cadres les longueurs à donner au jeu agrandi.



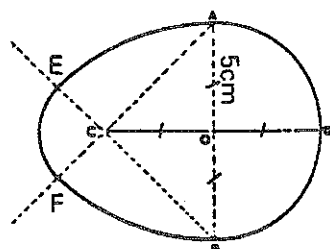
Le représenter en vraie grandeur.

b) Même question pour un carré de 15 cm.

APPLICATIONS

Niveau 2

80



Cet ova est formé d'arcs de cercle de centres O, A, B et C ; sa longueur est 36 cm.
Calculer la longueur de CE et celle de CB au dixième de millimètre près.

- b) le grand côté du parc : il en a fait 729.
c) le petit côté du parc : il en a fait 495.
Expliquer son raisonnement et trouver comme lui les dimensions du parc.

PRIMES - SUBVENTIONS :

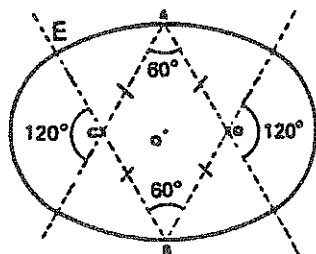
84

Une commune aide les associations qui en font la demande proportionnellement au nombre des membres de chaque association.
L'A.S.S. qui compte 35 membres a une subvention de 500 francs.
Quelle subvention obtiendra l'A.F.F.F. qui compte 125 membres ?

85

Dans une entreprise, une prime de fin d'année est distribuée aux employés. Cette prime est proportionnelle au salaire. Un ouvrier qui gagne 4 500 F par mois a une prime de 210 F. Quelle sera la prime d'un ingénieur dont le salaire mensuel est de 18 700 F ?

81



Cet ovale est formé d'arcs de cercle de centres A, B, C et D ; sa longueur est 38,65 cm et AB est égal à 10 cm.
Calculer la longueur de CE au dixième de millimètre près.

HAUTEUR D'EAU :

86

On verse 10 litres d'eau dans une boîte en forme de cube.

Faire, dans le cahier, un tableau :

Arête du cube en cm	25	50	75	100	125
Hauteur d'eau en cm					

Le remplir, en indiquant la hauteur d'eau dans le cube, en cm, en fonction de la longueur de l'arête, en cm.

82

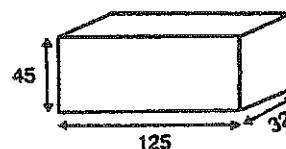
Compléter ce tableau donnant la longueur d'un arc de cercle dont on connaît le diamètre et l'angle :

diamètre en cm	7,5	54		8,4	
mesure de l'arc en degrés	42		78		100
longueur de l'arc en cm		100	68	13,19	43,6

On donnera les longueurs en centimètres, avec deux chiffres après la virgule, et les degrés seront arrondis à l'entier le plus proche.

87

Un aquarium a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont indiquées en cm :



On verse dans cet aquarium 150 litres d'eau. Quelle est la hauteur d'eau obtenue ?

Applications à la vie courante :

MESURER EN MARCHANT :

83

Jean veut connaître les dimensions d'un parc rectangulaire. Il dit avoir trouvé en marchant ; il a compté le nombre de ses pas pour parcourir :

- a) la distance qui sépare deux bornes hectométriques consécutives : il en a fait 179.
(Note historique : autrefois, on utilisait comme unité un pas qui mesurait 0,614 m).

CONTENANCES D'AQUARIUMS :

88

Dans un catalogue spécialisé, différents modèles d'aquariums sont proposés.

Dans la gamme des parallélépipèdes rectangles, ils ont tous les mêmes proportions.

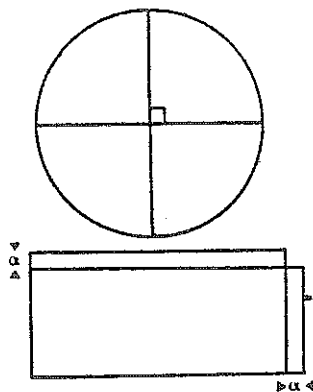
Celui qui a une contenance de 160 litres a une hauteur de 50 cm.

Quelle est la contenance, en litres, de celui qui a une hauteur de 25 cm ? de 75 cm ? de 37,5 cm ? de 62,5 cm ?

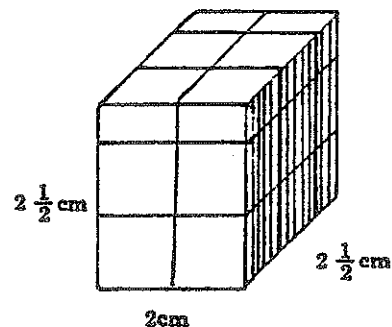
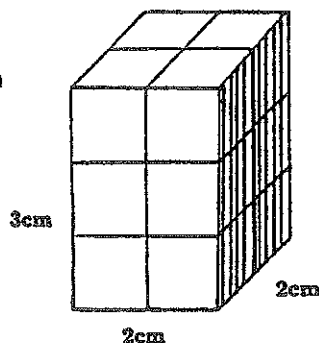
TEST SUR LA PROPORTIONNALITÉ

Question 1 : Figures

- a) Reproduire un disque analogue à celui qui est représenté. Hachurer $\frac{1}{6}$ -ème de la surface coloriée, et indiquer quelle est ainsi la fraction du disque complet qui est hachurée.
- b) La figure représente un terrain rectangulaire, auquel on a retranché en largeur le même nombre de mètres que l'on a ajouté en longueur. Le nouveau terrain ainsi obtenu est colorié. Comparer le nouveau terrain par rapport à l'ancien, pour son périmètre et pour son aire.



- c) Ces parallélépipèdes rectangles sont extraits d'un ouvrage anglais : l'écriture anglaise $2\frac{1}{2}$ signifie $2 + \frac{1}{2}$.
Quel est le volume de chacun d'eux ?



Question 2 : L'excursion

L'économe d'une colonie de vacances prépare un repas froid pour les 125 enfants qui partent en excursion.

Il sait qu'il faut pour 10 enfants :

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| 10 paquets de chips | 20 oranges |
| 10 tranches de jambon | 300 g de gruyère |
| 2 pains | 8 l d'eau minérale. |

Quelles provisions préparera-t-il pour les 125 enfants ?

(durée prévue : environ 35 minutes)

