IREM

UNIVERSITE - PARIS VII

UNE INTRODUCTION A LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
(à l'usage des enseignants)

Annexes :
A propos de la formation des maîtres du second degré en mathématiques :
Quelle formation pour quels objectifs ?

PAR A. ROBERT

cahier de didactique des mathématiques

numéro

FEVRIER 88

50

Une grande partie de ce texte existe déjà sous forme de polycopié destiné aux étudiants préparant le CAPES sous le titre :

"Didactique des mathématiques, pédagogie et formation" publié par l'UER 48 et le LMF (Université P.M Curie).

Introduction

Montrer des mathématiques (en les exposant ou en les expliquant), faire faire des exercices et des problèmes, éventuellement parler sur l'activité mathématique, telles sont les composantes inéluctables de l'activité du professeur de mathématiques dans sa classe.

Y a-t-il des raisons de choisir telle ou telle activité plutôt que telle autre, est-ce que cela change quelque chose ?

Plus généralement, chaque enseignant reçoit en début d'année une classe d'élèves, avec des bons, des mauvais, et il a la charge de leur enseigner un certain programme. A la fin de l'année, en principe un certain nombre d'élèves ont appris un certain nombre de choses, il y a des bons et des moins bons (et ce sont plus ou moins les mêmes que l'année précédente). Y a-t-il des différences entre telle ou telle classe, tel ou tel maître par rapport à ce résultat ?

On a l'habitude d'évoquer la pédagogie lorsqu'il s'agit de qualifier les attitudes et les choix des maîtres dans leur classe, et d'évaluer leurs éventuelles différences. Certains font allusion à ce sujet à un certain "art d'enseigner".

Est-ce que toutes les pratiques enseignantes sont équivalentes par rapport aux différences entre enfants (et en particulier celles dues à l'origine sociale) ?

Est-ce qu'au contraire la pédagogie de l'enseignant est décisive pour l'apprentissage des élèves ?

Y a-t-il <u>une</u> "bonne" pédagogie pour tous les élèves ?

Une des ambitions de la didactique, a contrario, est d'essayer de préciser le plus scientifiquement possible les véritables marges de manoeuvre de tout enseignant de mathématiques dans sa classe, en analysant le fonctionnement de l'ensemble du système et de chaque composante, puis de développer et d'étudier certains choix, jugés optimaux dans la gestion globale et locale de la classe. Dans cette perspective, la pédagogie serait l'application en situation, avec tout ce que cela comporte encore de décisions à prendre sur l'instant, d'éléments plus théoriques, issus des connaissances didactiques.

Dans l'exposé qui va suivre, nous nous intéresserons plus particulièrement aux questions suivantes : qu'est-ce qu'un maître peut faire dans sa classe compte-tenu des acquis actuels de didactique des mathématiques ? Quels sont les liens entre pédagogie et didactique ? Et, tout d'abord, du point de vue du didacticien, quelles marges de manoeuvre existent effectivement dans une classe ?
Nous sommes amenées, pour répondre à ces questions, à repréciser dans les deux premières parties ce qu'est la didactique des mathématiques ainsi que nos hypothèses cognitives et didactiques, la troisième partie est consacrée à la recherche des marges de manoeuvre de l'enseignant dans sa classe et dans la quatrième partie nous tentons de présenter certains choix didactiques pour optimiser la dite marge de manoeuvre.
Nous terminons sur les difficultés que peuvent rencontrer les enseignants à changer quelque chose dans leur enseignement ; notre hypothèse à ce sujet est qu'une formation initiale en didactique des mathématiques, complétée par des pratiques collectives à l'école, plus

ou moins liées à des recherches est une des meilleures garantie de la qualité des changements...

I Présentation de la didactique des mathématiques, champ scientifique .

A) Les hypothèses préalables

a) Il ne suffit pas de bien savoir les mathématiques pour bien les enseigner.

L'apprentissage des élèves ne résulte pas automatiquement des seuls exposés de l'enseignant, et/ou des activités qu'il propose quelles qu'elles soient; suivant les maîtres il y a ou non pour le même élève apprentissage d'un contenu donné, et pour un même maître, on note des variabilités interindividuelles et selon les contenus.

L'apprentissage individuel résulte certes pour une part de l'enseignement dispensé par le maitre, mais c'est plutôt l'imbrication de tel type de discours ou d'activité (collective ou non) sur tel terrain individuel à propos de tel contenu qui nous semble constituer l'élément décisif dans l'explication des phénomènes d'enseignement. La théorie des situations de G. Brousseau a largement contribué à illustrer ce point de vue.

Par exemple, nous ne concevons pas de faire une étude séparée des seuls contenus à enseigner, car nous pensons qu'un même contenu, selon les connaissances antérieures des élèves, selon la distribution de ces élèves dans le groupe classe, selon l'organisation de la présentation qui en est faite peut donner lieu à des apprentissages fort différents.

C'est dire que nous pensons qu'il y a lieu de tenir compte des sujets apprenants, de leurs possibilités et de leurs diversités éventuelles pour tenter d'optimiser l'enseignement.

Si nous estimons nécessaire de bien savoir les mathématiques pour bien les enseigner, nous pensons qu'il est aussi très important de savoir comment les mathématiques peuvent être apprises.

b) il existe des régularités dans les processus d'apprentissage scolaire, et on peut les mettre en évidence.

Nous faisons donc une hypothèse préalable très importante en ce qui concerne l'apprentissage: nous pensons que, par delà les diversités des situations qui résultent de toutes les variables en présence, il existe des régularités dans les processus individuels d'acquisition des connaissances compte-tenu des enseignements qui y sont associés.

De plus nous pensons que ces régularités peuvent être mises en évidence par des recherches. Nous introduisons ainsi l'hypothèse d'une certaine rationalité dans les phénomènes d'enseignement, et par suite d'une possibilité de reproduction et de contrôle. Pour beaucoup d'enseignants au contraire la classe est le théâtre d'une pièce toujours improvisée, et les décisions que prend le maître, consciemment ou non, restent de l'ordre de l'intuition, de l'expérience ou même de l'art. Certains enseignants considèrent même qu'il peut être dommageable pour la relation maître/élèves que soient explicitées ces régularités.

Nous rejoignons donc les sciences de l'éducation, dont les chercheurs ont la même hypothèse préalable et nous reprenons d'ailleurs certains de leurs résultats (en psychologie cognitive , ou sociale en particulier). Nous nous distinguons cependant de ces sciences, car nous estimons que les processus d'apprentissage sont intimement liés aux contenus enseignés; nous en déduisons que les régularités les plus intéressantes, les plus pertinentes, sont celles qui se repèrent dans les apprentissages d'un contenu donné. Nous répartissons les contenus à enseigner en unités de base adéquates, appelés "champs conceptuels" et introduits par G. Vergnaud. Ces champs conceptuels sont déterminés de façon à ce qu'il y ait effectivement une certaine unité et une certaine spécificité dans les mécanismes de mise en fonctionnement des notions concernées et par suite dans leur appropriation éventuelle.

c) Conséquences pour l'enseignement, et démarche didactique

Nous pensons que la connaissance des processus d'apprentissage en situation scolaire permet de concevoir des enseignements où sont pris explicitement en compte ces processus. Nous prétendons de plus que ces enseignements sont par là-même susceptibles d'engendrer des acquisitions efficaces pour beaucoup d'élèves; dans une certaine mesure c'est le fait que le rapport enseignement/apprentissage soit plus contrôlé que d'habitude et ceci en référence aux élèves, qui nous amène à cette hypothèse d'amélioration potentielle de l'efficacité attendue.

Ces hypothèses justifient notre interêt pour les régularités évoquées plus haut et nous placent dans une perspective qui n'est pas uniquement fondamentale. Notre démarche globale, en effet, va de la compréhension des processus d'apprentissage en situation à la conception d'enseignements (appelée ingénierie didactique), de cette conception à des réalisations effectives et des réalisations à l'observation et l'évaluation. Les enseignements sont conçus en tenant compte à la fois des résultats des observations des comportements des élèves en situation scolaire, des hypothèses cognitives que nous adoptons et des épistémologies particulières à chaque champ conceptuel (nous y reviendrons). La phase d'évaluation est très importante dans la validation de la démarche, mais très délicate à effectuer; l'évaluation interne, c'est à dire la comparaison des prévisions et des résultats effectifs après enseignement, et le suivi des élèves concernés constituent pour l'instant les méthodes les plus utilisées.

Cela étant qu'est ce donc précisément que la didactique des mathématiques?

B) La didactique des mathématiques: un champ de recherches

La didactique est d'abord un champ scientifique au carrefour de plusieurs sciences, c'est à dire qui emprunte à plusieurs sciences certains résultats, certaines problématiques ou certaines méthodes mais qui ne s'identifie à aucune d'elles; les sciences en question sont essentiellement la psychologie cognitive, la psychologie sociale et l'épistémologie.

Ainsi, l'objet de la didactique des mathématiques, et d'ailleurs l'objet de la didactique d'une discipline en général est l'étude des "processus de transmission et d'acquisition des connaissances relatives au domaine spécifique de cette discipline ou des sciences voisines avec lesquelles elle interagit"..."Elle décrit et analyse les difficultés rencontrées et propose des moyens pour aider les professeurs, les élèves et les étudiants à les surmonter, et notamment pour faire du savoir enseigné un savoir vivant, fonctionnel et opératoire". Cette citation est extraite du rapport d'activités du GRECO "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques" qui regroupe une grande partie des chercheurs en didactique des mathématiques.

En fait les problématiques individuelles des didacticiens s'accrochent à divers endroits à la démarche globale évoquée ci-dessus. Rares sont les recherches qui couvrent, même sur un champ conceptuel précis, l'intégralité du questionnement.

Cependant, toutes les recherches peuvent être replacées dans la perspective systémique qui est celle des chercheurs en didactique des mathématiques, caractérisée par la prise en compte des quatre composantes du système d'enseignement (sujet, contenu, maître et institution) et de leurs interactions.

Certains chercheurs se sont plus attachés à décrire le fonctionnement du système éducatif en ce qui concerne les mathématiques. Ils en ont dégagé certaines régularités, liées à des nécessités sociales en particulier, comme l'obsolescence (le viellissement) et le rejet de certains objets d'enseignement enseignés trop longtemps. Ils ont aussi étudié la transformation des objets de savoir mathématique en objets d'enseignement; ils ont mis en évidence que cette transposition didactique peut devenir très importante, jusqu'à dénaturer certaines notions avec les effets réducteurs correspondants sur les élèves. Ils ont aussi étudié quelques spécificités de ce jeu d'attentes implicites qui se nouent automatiquement dans une classe entre le maître et les élèves et que l'on étiquette "contrat didactique".

Ce type de recherches, menées en particulier par G. Brousseau, Y. Chevallard et leurs équipes, permet une meilleure appréciation de la marge de manoeuvre qui existe effectivement aux différents niveaux de l'enseignement, des commissions chargées des programmes aux classes.

D'autres chercheurs se sont plus intéressés aux conduites des élèves en situation d'apprentissage. Ils ont cherché à mettre en évidence des difficultés persistantes, résistant aux corrections, et se sont attachés à identifier des variables de la situation particulière, liées au contenu, telles que, si le maître agit sur elles, quelque chose change en matière d'apprentissage. Ce sont les "variables didactiques" introduites par G. Brousseau.

D'autres recherches, comme celles de G. Brousseau et R. Douady, ont plus porté sur la conception d'organisations différentes de l'enseignement, à un niveau plus ou moins général (théorie des situations, dialectique outil-objet et jeux de cadres).

Enfin, depuis quelques années, se pose avec acuité le problème de la transmission des résultats de la didactique, tant il est vrai que, une de nos perspectives étant d'agir sur l'enseignement, l'échelon de la classe et de l'enseignant non didacticien dans sa classe doit être atteint. En conséquence de nouvelles recherches sont en cours, en particulier sur les représentations des enseignants et des élèves sur les mathématiques, l'accès au savoir mathématique, l'activité mathématique. On a en effet observé que certaines représentations peuvent faire obstacle à l'apprentissage (côté élèves) ou à un changement dans l'enseignement (côté enseignant). De plus, au fur et à mesure de la diffusion des recherches en didactique et de l'extension d' enseignements conformes aux résultats correspondants, se développent de nouvelles questions et de nouvelles recherches sont entreprises pour y répondre ; ainsi ont été entrepris des travaux sur l'apprentissage des élèves défavorisés socialement, sur l'apprentissage des élèves plus agés (après la troisième), des recherches sont menées sur le travail en petits groupes pour en éclaircir l'efficacité et en préciser les domaines de validité et de nouvelles ingénieries didactiques ont été mises au point et étudiées (équations différentielles, algèbre linéaire par exemple).

D'une façon générale, les caractéristiques communes des nouvelles recherches sont les suivantes : d'une part, les résultats des recherches antérieures servent d'outils aux nouvelles recherches, ainsi la théorie des situations devient un outil d'analyse des situations d'enseignement quelles qu'elles soient, l'ingénierie didactique une méthodologie ...
D'autre part, les domaines de validité des premières recherches sont précisés et souvent les nouvelles recherches se situent précisément en dehors des limites précédentes.

II. Apprentissage des mathématiques en situation scolaire, hypothèses cognitives et didactiques

Avant d'aborder l'exposé de nos hypothèses sur l'apprentissage des mathématiques, nous devons préciser notre choix épistémologique en matière de mathématiques.

a) Quelles mathématiques?

Nous adoptons une épistémologie des mathématiques de type problématique. En toute généralité, notre objectif est de faire acquérir des outils (concepts) pour résoudre des problèmes, problèmes de mathématiques ou y aboutissant (sans renoncer à l'acquisition que nous pensons indissociable des concepts objets). Un certain nombre de textes généraux de J.L. Ovaert précise cette conception, qui s'est inspirée de recherches sur l' histoire des mathématiques.

Ce point de vue n'est pas universellement adopté par la communauté des mathématiciens et des professeurs; dans certains cas, il n'existe pas de réflexion explicite sur le sujet; d'autres représentations individuelles sont même contradictoires, par exemple certains enseignants ou enseignés conçoivent les mathématiques comme un texte, un développement théorique, paré ou non de qualités esthétiques ou encore comme un instrument de calcul de plus en plus sophistiqué ou autres. On conçoit l'importance de ces préalables épistémologiques, dans la mesure où nos objectifs d'apprentissage se définissent à partir de nos conceptions.

Ceci dit, tous les concepts ne nous semblent pas de la même nature (ce mot est sans doute impropre), et par là-même ne sont peut-être pas justiciables du même mode d'acquisition. Ainsi l'algèbre linéaire, les convergences, $\mathbb{R}$, ont un statut de formalisation, unificateur et généralisateur (cf. J. Robinet); en fait, historiquement, ces notions ont été introduites, nous semble-t-il, comme un aboutissement, alors que les résolutions d'une partie des problèmes concernés fonctionnaient déjà bien dans chaque cas particulier; ces concepts ont joué le rôle d'outils indispensables dans des nouveaux problèmes beaucoup plus difficiles, d'une autre complexité (espaces vectoriels de dimension infinie, convergences plus générales dans des espaces topologiques etc...). Pour ces notions, nous avons des difficultés à trouver des problèmes relativement ouverts et néanmoins abordables par les élèves avant le cours correspondant, problèmes où les notions doivent être mobilisées comme outils (ce qui peut servir d'introduction efficace à l'apprentissage comme nous le verrons plus loin); pour d'autres concepts, ou pour introduire des extensions de concepts déjà connus (multiplication sur les décimaux, convergence uniforme par exemple) c'est plus facile, comme le montrent les travaux sur le sujet de R. Douady et J. Robinet respectivement.

Il n'en reste pas moins que c'est cette conception problématique des mathématiques qui nous sert, le cas échéant et pour partie, à guider nos choix de contenus et d'organisation de ces contenus. Nous privilégions systématiquement la mise en fonctionnement des concepts dans des problèmes, et plus précisément dans des "vrais problèmes" susceptibles de donner du sens aux concepts en question.

Nous considérons que, ce faisant, nous optimisons la transposition didactique que nous opérons nécessairement.

Dans ces conditions, nous utilisons le mot "apprentissage" pour désigner cette possibilité de mise en fonctionnement des notions visées par l'enseignement, bien entendu dans des contextes adaptés au dit enseignement.

Nous allons maintenant décrire les hypothèses cognitives que nous adoptons, en rappelant d'abord extrêmement brièvement et même schématiquement les résultats de psychologie qui sont à l'origine de nos réflexions spécifiques. Nous exposerons ensuite les hypothèses valables pour tous les élèves en situation d'apprentissage des mathématiques (issues des travaux de didacticiens travaillant sur l'enseignement obligatoire) et les hypothèses plus particulières que nous avons été amené à préciser en ce qui concerne l'enseignement post-obligatoire. Nous devons préciser ici que ce sont des années d'observation quasi-journalière dans des classes qui sont à l'origine des premiers résultats en didactique des mathématiques.

B) <u>Hypothèses cognitives générales</u>

Les travaux de psychologie sur l'apprentissage individuel sur les quels se basent les hypothèses cognitives de nombreux didacticiens, concernent le plus souvent les enfants jusqu'à 16 ans.

Il faut d'abord citer les travaux de Piaget, dont sont surtout retenus à un niveau très global le caractère constructiviste de l'acquisition des connaissances en mathématiques (par l'action) et la théorie des rééquilibrations. Précisons que par "action" en mathématiques, il faut entendre résolution de problèmes.

Nous retenons aussi les résultats de Bruner, et en particulier l'idée de l'anticipation, permettant une vérification, comme moteur d'apprentissage.

De Vigotski (et très schématiquement) nous retenons l'hypothèse d'une "Zone proximale de développement" qui correspond à des connaissances pouvant être acquises par le sujet grâce à l'aide d'un adulte (et nous rajoutons l'éventualité de l'aide d'un pair pour des élèves plus âgés). De plus l'hypothèse de la communication sociale comme prédesseseur du langage intérieur peut aussi s'avérer transposable à des situations d'apprentissage.

Nous devons aussi faire référence aux travaux de Lautrey (et al.) qui ont mis en évidence certaines diversités fondamentales des cheminements cognitifs des enfants dans l'acquisition de notions comme l'inclusion ou la sériation (cf. développement opératoire).

L'une des originalités de ces travaux de psychologie différentielle est, selon nous, le changement radical de point de vue sur l'interprétation des différences constatées entre les enfants : celles-ci ne sont plus vues comme des "bruits", des décalages individuels, mais comme des indices de progressions personnelles différentes. Cela amène les auteurs, pour interpréter sur le plan théorique ces diversités, à revoir la hierarchie piagetienne mettant en tête "l'action" devant la perception et l'image mentale par exemple, et à proposer une interprétation plus souple, en termes d'interactions, des rôles de ces divers facteurs dans la construction des connaissances. Cependant les connaissances étudiées ne résultent pas spécifiquement de l'apprentissage scolaire, pas plus que chez Piaget.

En ce qui concerne les aspects sociaux de l'apprentissage (en classe) les travaux des tenants des théories interactionistes de la construction des connaissances sont souvent retenus par les didacticiens. Certains auteurs ne s'intéressent là-encore qu'à des apprentissages non spécifiquement scolaires, de l'ordre du développement opératoire, comme Doise, Mugny, Perret-Clermont, ou Beaudichon dans le domaine de l'acquisition de la langue; d'autres, comme Perret-Clermont, Schubauer-Leoni, Brun, ont commencé à investir même le domaine scolaire ; pour tous, le travail collectif et plus spécialement les conflits socio-cognitifs entre pairs facilitent certaines appropriations individuelles, par dépassement de centrations individuelles partielles et éventuellement contradictoires et réorganisation "englobante". Ces phases d'apprentissage ne peuvent évidemment pas avoir lieu n'importe quand, ni avec n'importe quels partenaires, comme le précisent ces recherches.

Il existe aussi de nombreux travaux portant sur les relations "maître-élèves" (Gilly par exemple), d'orientation psychosociologique. Je citerai le travail de P. Marc sur les attentes, implicites ou même inconscientes des maîtres, prouvant l'importance des facteurs sociaux dans la perception qu'ont les maîtres des élèves. Ainsi, à performance scolaire équivalente, des élèves d'origine sociale plus modeste peuvent être plus mal perçus que d'autres, alors même que le maître ne connaît pas ces renseignements. Le concept didactique de "contrat didactique" permet de relayer ce type de résultats.

Ceci nous amène aux recherches sur les représentations inconscientes des divers partenaires de la relation scolaire, en ce qui concerne et l'objet mathématique et son apprentissage; étudiées par exemple par Nimier, ces représentations sont plus difficiles à prendre en compte explicitement dans des travaux de didactique, si ce n'est par la prise de conscience d'une certaine relativité obligatoire des prévisions que l'on peut faire sur les réalisations effectives de séquences d'enseignement. Cependant les derniers travaux de C. Laville (cf. séminaire de Didactique du 30/01/88) laissent entrevoir de nouvelles possibilités à ce sujet.

De tous les travaux de sociologie qui dressent le <u>bilan social</u> de l'école, en décrivant en particulier les échecs scolaires, on peut retenir l'importance considérable de la variable "origine sociale"; cela a amené certains chercheurs à des investigations sur les interprétations cognitives des corrélations entre réussite scolaire et origine sociale; ainsi Lautrey a mis en évidence le lien entre les pratiques éducatives plus ou moins rigides et caractéristiques des différents milieux sociaux et les performances scolaires. Des hypothèses liées au contenu de l'enseignement peuvent aussi être faites à ce sujet (cf. Perrin).

En ce qui concerne l'apprentissage des adultes, on doit citer les travaux de psychologues piagétiens comme Navarro, Vermersch (et al.). On y trouve l'hypothèse que les instruments de psychologie génétique mis au point pour les enfants jusqu'à 16 ans sont encore valides, et opératoires. De plus, ce qui spécifierait les adultes serait la présence simultanée de plusieurs registres de fonctionnement, comme les registres formel, préopératoire,..., utilisés à tour de rôle selon les individus et les situations (cf. Vermersch).

En psychologie du travail enfin, on trouve posées de nombreuses questions méthodologiques en particulier sur l'appréhension des apprentissages chez les adultes.

C) Hypothèses didactiques

1) Hypothèses communes aux enseignements obligatoires et post-obligatoires

Nous adoptons pour partie des hypothèses déjà admises par des didacticiens travaillant sur l'enseignement obligatoire et même partiellement testées dans des réalisations effectives de projets d'enseignement basés sur ces hypothèses. Il s'agit des travaux de R. Douady et de certains travaux de l'équipe de G. Brousseau, par exemple.

* apprentissages individuels

Nous admettons que globalement les différents mécanismes cognitifs correspondant aux apprentissages mathématiques ne sont pas qualitativement différents de ceux qui sont à l'oeuvre avant 16 ans.

Nous nous appuyons pour cela sur la non-contradiction avec cette hypothèse de tous les travaux des didacticiens portant sur le niveau post-obligatoire, que les hypothèses cognitives y soient explicitement précisées ou non (Artigue, Audibert, Berthelot, Cornu, Fishbein, Legrand, Robert, Robinet, Schoenfeld, Tall...).

Nous admettons ainsi l'importance de l'action dans l'apprentissage et, en son sein, des mécanismes de déséquilibres/rééquilibrations.

Nous reprenons en conséquence l'hypothèse de R. Douady de l'efficacité pour beaucoup d'étudiants de résolutions de problèmes du type suivant : une notion mathématique nouvelle, visée par l'apprentissage, est introduite dans un problème et doit être mobilisée comme outil de résolution dans plusieurs cadres. Citons, pour préciser, les cadres graphique, numérique, algébrique, géométrique, vectoriel, formel etc..

De plus, dans les cadres intervenants dans le problème choisi, les connaissances des élèves sur la notion visée doivent être différentes, avec nécessairement un cadre où il existe effectivement des acquis mathématiques, perceptifs ou autres.
Ces problèmes interviennent avant le cours sur la notion, et l'enseignement s'organise suivant le cycle schématisé en "ancien, recherche, explicitation, institutionnalisation, familiarisation, réinvestissement" suivant les termes de R. Douady. Cette organisation est supposée efficace si elle est mise en fonctionnement pour un nombre suffisant de notions, en particulier pour celles sources d'erreurs persistantes.

Les travaux de C. Laborde, après ceux de psychologues genevois comme J. Brun, ont montré d'autre part l'importance d'un apprentissage spécifique des formulations en mathématiques ; contrairement à une opinion répandue, selon la quelle le signe est associé sans difficulté au concept, nous faisons avec elle l'hypothèse, largement étayée dans sa thèse, que les signifiants et leur usage par les élèves sont une source de problèmes réels, même si les concepts correspondants sont en voie d'acquisition.

apprentissage scolaire

Nous admettons également l'efficacité du travail en groupes et des conflits à certains moments de l'apprentissage. Personnellemnt nous y voyons au moins un interêt supplémentaire, d'un autre ordre: faire diminuer l'insécurité au moment de l'abord de nouvelles notions, en particulier dans des problèmes du type évoqué plus haut.

L'apprentissage de l'usage des formulations mathématiques, qui répondent précisément à une nécessité de communication, semble être un terrain qui se prête bien à un travail en groupes de type émission de messages et réception (cf. Laborde et équipe de Grenoble).
Nous reprenons aussi tout le travail sur les preuves en mathématiques de N. Balacheff, montrant en particulier les liens entre les difficultés des élèves à ce sujet et la rareté des situations où il y a vraiment dévolution aux élèves de la preuve, voire de la démonstration.

2) <u>Des hypothèses plus spécifiques: apprentissage pour des élèves plus âgés</u>

* <u>facteurs favorisant l'apprentissage</u>

Nous faisons l'hypothèse qu'à ce niveau d'études, la part de ce qui peut être appris par d'autres moyens que "l'action" et en particulier la résolution de problèmes préalable au cours, est plus grande qu'avant 16 ans. Nous pensons par exemple à l'utilisation de la perception (visuelle en particulier), du formalisme, de l'imitation méthodique etc...Les recherches sur l'utilisation du cadre informatique dans l'enseignement des mathématiques pourraient être très éclairantes à ce sujet d'ailleurs.
Nous pensons aussi qu'à cet âge, le fait d'être impliqué explicitement dans son propre apprentissage est un facteur pouvant favoriser l'acquisition des connaissances. Une possibilité pour ce faire est de jouer sur le registre des métaconnaissances, nous y reviendrons plus loin.

* <u>différents cadres préférentiels</u>

Compte-tenu des diversités dans les cheminements cognitifs antérieurs des étudiants, nous pensons qu'il s'est établi chez certains des cadres préférentiels de fonctionnement mathématique, relativement stables. Cela peut être le cadre graphique chez les uns, le cadre formel chez d'autres, ou encore le cadre numérique, voire analytique en géométrie. Nous avons quelques arguments pour étayer cette hypothèse sur la quelle nous travaillons par ailleurs. Ainsi, en regroupant les procédures qui sont utilisées par les mêmes étudiants dans diverses tâches d'analyse, nous avons mis en évidence des régularités individuelles, et nous avons pu définir des types de comportement (cf. cahier de didactique n°7). Cela a été fait indépendemment de l'exactitude des procédures utilisées. Nous avons repéré des étudiants préférant toujours le recours à des conduites de type algorithmique, même si ce n'est pas adapté; pour d'autres étudiants, on trouve de façon stable des procédures faisant appel aux images mentales, et aux dessins, chez d'autres encore on note une prédilection pour les raisonnements formels.

Nous avons aussi montré que la maitrise des formalisations en analyse n'était pas nécessairement en rapport avec les performances des étudiants. On a constaté que, sur une population donnée d' étudiants de première année, les élèves d'origine sociale modeste, tout en ayant parmi les meilleures notes à un prétest sur les acquis antérieurs, avaient massivement un moins bon type de formulation (déterminé par la formalisation d'une phrase donnée en langage naturel).

Cette hypothèse renforce l'importance des jeux de cadres que nous avons évoqués plus haut; en effet cela peut mieux permettre de garantir que chacun retrouvera dans les activités proposées pour introduire les nouvelles notions un cadre préférentiel pour lui.

* nécessité d'avoir des connaissances dans suffisamment de cadres

Dans la mesure où nous essayons de mettre en place des "jeux de cadres" favorisant l'apprentissage (par déséquilibre/rééquilibration), et compte-tenu de l'existence de cadres préférentiels éventuels chez les étudiants, il est très important que ceux-ci dans leur ensemble disposent de connaissances dans divers cadres.

Mais il y a plus : nous pensons que même individuellement (et pour les mêmes raisons) il y a une meileure prévision d'apprentissage pour un étudiant ayant des connaissances (même imparfaites) dans plusieurs cadres que pour un étudiant ayant plus de connaissances, mais dans un seul cadre.

Nous avons vérifié cette hypothèse à plusieurs reprises sur des populations d'étudiants de première année de premier cycle scientifique (cf. Robert cahier de didactique n°7, n°18 , Houard cahier de didactique n°18 , Authier cahiers de didactique n°31 et 46). Nous avons ainsi montré que les moins bons étudiants sont ceux qui ont des connaissances dans très peu de cadres (étudiants issus de terminale D en général, a fortiori de F et de G) ; de plus, à score global égal à un prétest de début d'année portant sur les connaissances prérequises en analyse, les étudiants ayant des connaissances réparties dans plusieurs cadres (graphique, symbolique, numérique ...) réussissent mieux en général aux postests sur les nouvelles connaissnaces que les étudiants qui ont des connaissances dans un seul cadre (numérique en général).

Les conséquences pour l'enseignement sont évidentes.

travail sur les représentations

Nous émettons une hypothèse sur la quelle nous travaillons par ailleurs (cf. Bautier et Robert (1987)) et qui concerne les représentations qu'ont les étudiants des mathématiques et de la meilleure façon de les apprendre. Il faut préciser tout de suite qu'il s'agit des représentations (préconscientes)qui émergent spontanément à la conscience par simple questionnement.

Nous pensons que l'apprentissage peut être favorisé par un travail explicite sur ce type de représentations, dans la mesure où, vu leur âge, les élèves sont susceptibles de distinguer entre connaissances et savoirs sur les connaissances (métaconnaissances). Autrement dit nous pensons qu'on peut agir efficacement sur les "épistémologies naïves" des sujets apprenants pour reprendre l'expression de Y. Chevallard. Ce travail explicite est de l'ordre du métamathématique ce qui explique que nous le privilégions avec des adultes.

Par exemple, une forme courante de représentation incomplète du fonctionnement du rapport enseignement/apprentissage nous semble être ce que Chevallard appelle l'illusion de la transparence. Véhiculée souvent par le maître, qui croit que son discours, rendu le plus clair possible, peut être entendu tel quel par l'élève, cette illusion peut aussi être partagée par les étudiants qui pensent que la balle est d'abord dans le camp du maître; de ce fait les élèves ne mettent pas toujours dans leurs propres activités l'enjeu d'apprentissage qui pourrait y être. Nous pensons que cette représentation peut être modifiée par des explications, des illustrations bien choisies et des pratiques à condition que ces dernières soient explicitement mises en rapport avec la représentation que l'on vise.

Signalons que le travail sur les productions des mathématiciens au cours des temps semble être une bonne occasion à mener des interventions de type métamathématique sur l'épistémologie des mathématiques.
Nous mettons dans la même catégorie les réflexions méthodologiques que l'on peut faire aux étudiants car elles enrichissent la représentation qu'ils se font du savoir, tout comme les interventions explicites sur les procédures erronées ou les modèles incomplets qui peuvent être faites sur le plan individuel. Par exemple une expérience d'enseignement de méthodes en géométrie en terminale C est actuellment en cours d'analyse dans ce sens (cf. Tenaud (1986), Robert, Rogalski et Samurçay(1987), Robert et Teneud (1987)).

De nombreux auteurs ont déjà proposé d'enrichir l'enseignement de réflexions explicites d'ordre méthodologique ou heuristique. Citons G. Glaeser ou plus récemment une équipe de Grenoble dans le fascicule intitulé "l'apprentissage du raisonnement". Cependant nous avons ajouté cette dimension des représentations du sujet car elle nous paraît être susceptible d'expliquer certains des phénomènes dont nous prétendons qu'ils peuvent se passer.

* <u>Situations impliquant un changement de contrat</u>

Cependant, on peut penser qu'il n'y a pas nécessairement plus transfert de connaissances du type métaconnaisances, comme celles évoquées ci-dessus qu'il n'y a transfert des connaissances mathématiques, suite à une simple exposition. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse de l'efficacité du levier suivant : dispenser des enseignements de type métamathématique, comme ceux évoqués ci-dessus (enseignements de méthode, d'histoire des mathématiques, d'épistémologie ...) et mettre les étudiants dans des situations où ils sont en quelque sorte "plus obligés que d'habitude" de faire fonctionner ce type de connaissance. Notre hypothèse est que la dialectique entre les deux peut engendrer un apprentissage, d'autant mieux que ces situations contribuent également à responsabiliser les étudiants par rapport à la construction de leur connaissances.

Par exemple, nous proposons de dispenser en géométrie en terminale C un enseignement de méthodes et de mettre régulièrement les élèves en petits groupes pour résoudre des problèmes sans indication de méthodes (et dont la résolution passe par l'explicitation d'une méthode à choisir parmi d'autres qui sont susceptibles de convenir). Les élèves sont alors presque "obligés" par la situation de se poser cette question des méthodes à utiliser, et le fait d'être en groupe les aide (d'autant plus qu'un ensiegnement a été fait et rend mobilisable un certain nombre de questions et de réponses sur les méthodes).

Les expériences de débat scientifique à Grenoble sont un autre exemple de ce type de dialectique, nous semble-t-il.

D) De grandes interrogations

Il reste de nombreuses questions portant sur l'apprentissage sur les quelles nous n'avons aucune hypothèse théorique; ainsi sur le rôle de la mémoire et sur des exploitations didactiques appropriées à chacun, nous n'avons pratiquement aucune idée et aucune stratégie prenant en compte les évidentes diversités individuelles à ce sujet ; de même sur le rôle du temps, temps minimum qu'il faut "rester" sur une notion pour en permettre une assimilation par exemple, quelles que soient les méthodes d'enseignement adoptées, notre réflexion théorique est très faible, nous adoptons les positions empiriques que tout enseignant finit par se créer. Nous n'avons pas encore non plus intégré à des projets d'enseignement les différences individuelles de rapidité, mais les travaux sur le travail collectif en petits groupes devraient permettre d'avancer sur ce point (cf. Robert et Tenaud (1987)).

III Quelles marges de manoeuvre pour l'enseignant dans sa classe ? Quelles connaissances la didactique des mathématiques apporte-t-elle à ce sujet ?

Un premier résultat des travaux de didactique est qu'ils permettent d'étiqueter systématiquement les composantes de ce qui est en jeu (et en interaction) dans le système éducatif et donc de les passer en revue pour repérer ce qui est fixe et ce qui peut dépendre du maître du point de vue de la didactique des mathématiques.

Le système d'enseignement tel que l'analysent en général les travaux de didactique comporte trois composantes interagissantes, l'élève, le savoir et le maître, auxquelles se rajoute la composante "institution".

a) L'institution : un facteur fixe

Là, précisément, le maître n'a aucune marge de manoeuvre par rapport à ce qui s'y rapporte, programmes, tranches horaires, cursus...(une exception, l'orientation à laquelle le maître participe).

De plus, les enseignants héritent des attentes des parents, des élèves, des inspecteurs ... auxquelles ils ne peuvent rien a priori.

On peut cependant estimer qu'une certaine connaissance de ces facteurs fixes peut aider les enseignants à appréhender le rôle qu'ils ont à jouer (même à leur insu) et, par exemple, à anticiper et désamorcer le cas échéant des réactions négatives des parents devant certaines modifications de l'enseignement. Justement un certain nombre de travaux de didactique des mathématiques concernent certains fonctionnements du système tel qu'on peut l'analyser, avec ses contraintes propres et ses "lois". On peut évoquer à ce sujet les travaux de Chevallard sur les programmes, avec la nécessité de changer certains objets trop vieillis,ou sur le temps tel qu'il apparait aux différents acteurs du système.

D'ailleurs les travaux de sociologie apportent eux aussi un éclairage indispensable à cette connaissance du milieu, des rouages de l'échec scolaire en particulier et du rôle social de l'école en général.

b) Les élèves

Les élèves, eux,certes renouvelés chaque année, apportent en classe (et cela est indépendant du maître) leurs acquis antérieurs dont l'importance, signalée par de nombreux travaux, mérite éventuellement une investigation préliminaire. Les résultats de cette analyse des "prérequis" permettent et de les estimer et d' avoir une idée des diversités présentes.

Là-encore le maître n'a pas de marge de manoeuvre directe mais les travaux de didactique peuvent lui permettre de prévoir une prise en compte de ce qui lui est donné apparemment sans degré de liberté.

De plus il existe des régularités dans les processus d'acquisition des connaissances individuels en milieu scolaire utilisés par les didacticiens, nous les avons déjà évoquées. En particulier, un travail de repérage et de prise en compte (voire de modification) des représentations métacognitives des élèves peut être également tenté par l'enseignant.

c) <u>les contenus</u>

Les travaux de didactique permettent d'envisager le problème à plusieurs niveaux.

A un niveau très général, des recherches assez récentes ont commencé à mettre en évidence à quel point les représentations des enseignants sur les mathématiques pouvaient varier et à quel point cela pouvait avoir d'importance pour leur enseignement. Les mathématiques sont conçues avant tout comme un langage par les uns, comme une théorie toujours plus achevée par d' autres, comme un moyen de calcul de plus en plus raffiné par certains, comme des outils pour résoudre des problèmes par d'autres encore, ou bien comme un excellent moyen de sélection des intelligences, ou encore comme une bonne formation de l'esprit...

De cette représentation du maître, consciente ou non, mais nécessairement présente, découlent des représentations de l'objectif ultime de l'apprentissage (acquisition d'une théorie, ou d'outils, ou...) et par là même des conceptions de ce qu'il y a à faire (et à faire faire) pour entraîner un tel apprentissage. Et ces conceptions sont transmises implicitement au moins aux élèves, avec des conséquences souvent mal contrôlées. De même, si la question "Que faut-il faire pour apprendre les mathématiques" est peu souvent posée directement aux élèves, les convictions du maitre à ce sujet sous-tendent tout son discours et peuvent engendrer chez les élèves des attitudes peu favorables à leur propre acquisition si les conceptions du maître sont de type empiro-sensualiste ou behaviouriste par exemple.

Comme nous l'avons déjà rappelé, pour des raisons épistémologiques profondes, les didacticiens ont adopté un point de vue problématique sur les mathématiques, tel que l'activité mathématique a essentiellement pour but de résoudre des problèmes et poser de nouvelles questions, donc de tenter de faire acquérir les concepts sous leur double forme objet et outil.

Donc, à ce niveau général en ce qui concerne les contenus, plus qu'une marge de manoeuvre c'est un choix (explicite ou non) que fait le maître, choix qui sous-tend beaucoup d' options ultérieures sur les contenus précis et leur enseignement.

Par contre, ce que le maitre justement peut choisir, c'est d'expliciter plus ou moins ses propres conceptions, ses propres représentations du savoir et de l'accès au savoir, ses modes d'évaluation ; il peut décider d'intervenir sur les méthodes, sur le mode de travail de ses élèves, sur leurs erreurs en tant qu'indices de certaines étapes dans les acquisitions.

L'enseignant est entièrement responsable des interventions de type métamathématique qu'il fait (ou ne fait pas). Pour nous, cette marge de manoeuvre est très importante, dans la mesure où nous supposons que, pour un certain nombre d'élèves, cette explicitation des implicites et la modification éventuelle des représentations à la quelle elle peut contribuer, est fondamentale. Des premières observations ont d'ailleurs montré une grande variabilité dans les pratiques des enseignants dans ce domaine.

Un certain nombre de travaux portant sur l'apprentissage de la lecture ont souligné cette importance d'un travail de type métacognitif pour permettre à des élèves très défavorisés de "se mettre en condition d'apprentissage" (cf. Chauveau (1985)).

Restent précisément les contenus mathématiques eux-mêmes.

Si les contenus sont fixés globalement, l'enseignant est responsable de l'ordre dans le quel il aborde les différents morceaux indépendants du programme, du temps sur lequel il reste sur une notion, de la façon dont il va présenter le contenu, et en particulier du découpage entre cours et exercices.

Autrement dit, l'enseignant a une certaine marge de manoeuvre en ce qui concerne l'organisation globale de l'enseignement des contenus fixés par les programmes. Les choix de présentation portent essentiellement sur l'organisation des activités des élèves et de celles du maître.

Cependant des règles sont à respecter, comme l'a montré Chevallard, en ce qui concerne par exemple l'avancement du cours, qui doit apparaître effectivement aux élèves (et aux parents).

Il existe un concept qui permet de caractériser les transformations du savoir que doit opérer l'enseignant pour le présenter aux élèves, c'est ce qu'on appelle la transposition didactique. On peut dire que, en ce qui concerne les contenus, l'enseignant a une certaine marge de manoeuvre en ce qui concerne la transposition didactique à choisir pour sa classe, reste à déterminer une forme optimale de cette transposition et c'est ce que nous développerons dans la deuxième partie .

d) Le maître

On a déjà évoqué la part d'initiative possible du maître en ce qui concerne les contenus ; il faut encore souligner que le maître est en partie responsable du contrat qui s'installe dans sa classe et a une certaine marge de manoeuvre sur ce contrat, le quel n'est évidemment pas indépendant des choix précédents sur la gestion de la classe et des représentations du maitre sur les mathématiques, et l'accès au savoir mathématique. Cependant, si les décisions conscientes du maître dans ce domaine ne sont pas les décisions habituelles, il est important de laisser le nouveau contrat s'implanter chez les élèves et cela peut n'être pas instantané.

Par exemple, les travaux de Balacheff sur preuve et démonstration ont montré à quel point il est important de construire "exprès" des situations où peut s'engager une véritable problématique de preuve (pour convaincre ou se convaincre) : sinon on risque d'avoir des élèves qui se livrent à un jeu de devinettes (très élaboré éventuellement) sur ce que le maitre attend et qui ne s'engagent même pas dans un processus d'explication, préalable à celui de preuve. Le contrat établi par le maître est fondamental à ce moment là.

Autrement dit, il s'agit en quelque sorte d'optimiser le contrat didactique qu'on veut voir s'installer dans la classe, en fonction des différents moments de l'apprentissage, du moins d'optimiser les clauses qui peuvent en être explicitées. Nous allons développer dans la deuxième partie certains choix que les travaux de didactique des mathématiques actuels permettent de faire à ce sujet.

Ceci dit,"un maitre averti en vaut deux", et nous pensons qu' un travail d'explicitation des représentations des enseignants sur leurs conceptions en matière de mathématiques et d'acquisition des connaissances peut faire évoluer leurs pratiques et leurs choix ; cette marge de manoeuvre est en quelque sorte préalable à l'activité en classe et relève plus de la formation initiale.

IV Quels choix pour l'enseignant dans sa classe ? Didactique et pédagogie

Nous allons préciser des choix que les travaux actuels de didactique des mathématiques nous semblent pouvoir impliquer pour gérer au mieux la marge de manoeuvre mise en évidence dans la première partie. Nous ne prétendons pas résoudre tous les problèmes pédagogiques, en particulier les problèmes de discipline et d'attention ne sont pas dans le champ envisagé; il n'y a pas d'autre part d'univocité entre nos hypothèses et l' organisation présentée ci-dessous, il se trouve simplement que celle -ci réunit un certain nombre de conditions qui vont dans le sens de nos hypothèses didactiques.

D'autres travaux didactiques très importants, comme ceux de G. Brousseau, diffèrent de ce que nous allons présenter en ce qui concerne en particulier les argumentations justificatives ; l'organisation ci-dessous tient d'ailleurs compte des résultats correspondants, mais la présentation en est différente. On y retrouve par exemple les dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation et l'institutionnalisation, types de situations introduites par Brousseau pour entraîner l' apprentissage de nouvelles notions mais l'attention est centrée sur une autre dialectique, celle de l'ancien et du nouveau contenu ; de même le rôle des erreurs dans l'apprentissage, comme témoins d'obstacles particuliers à franchir, la nécessité des sauts informationnels à certains moments pour forcer l'abandon de conceptions primitives et (trop) efficaces sont intégrés aux problèmes proposés dans les premières phases du cycle dont les caractéristiques en termes de cadres sont privilégiées ; enfin la modélisation en terme de jeu n'est pas retenue dans les interprétations de l'efficacité supposée.

a) Une organisation de l'enseignement basée sur le problème, la dialectique outil-objet et les jeux de cadre

Rappelons à ce sujet les hypothèses didactiques de R. Douady sur l'efficacité, pour beaucoup d'élèves, d'une organisation du type suivant.

Une notion mathématique nouvelle, visée par l'enseignement, est introduite tout d'abord dans un problème où elle doit être mobilisée comme outil de résolution, mais ceci peut se faire dans plusieurs cadres. De plus dans ces différents cadres, les connaissances des élèves sur la notion en question doivent être différentes, avec même nécessairement des acquis mathématiques, ou perceptifs au moins, dans un des cadres possibles d'intervention de la notion dans le problème.

L'enseignement s'organise alors suivant le cycle schématisé en "ancien, recherche, explicitation, institutionnalisation, familiarisation, réinvestissement" et cette organisation doit être mise en fonctionnement pour un nombre suffisant de notions.

De plus les phases de recherche sont menées en groupes et les bilans sont collectifs.

Nous allons maintenant expliquer en quoi un tel type d'organisation optimise la marge de manoeuvre du maître compte-tenu de nos hypothèses cognitives et didactiques.

b) Une optimisation de la transposition didactique : donner leur sens aux notions enseignées

Il s'agit donc de minimiser les inévitables décalages entre les objets de savoir et les objets d'enseignement. Nous pensons que ceci peut se faire en restituant le plus souvent possible, compte-tenu des limites de temps en particulier, le caractère outil des notions; nous proposons d'utiliser à cet effet des textes de problèmes appropriés; ces problèmes doivent être ouverts, et présenter de véritables questions aux élèves; souvent on les propose avant le cours; il s'agit que la nécessité de résoudre l'emporte sur toute autre, en particulier celle d'appliquer quelque chose du cours. C'est le caractère outil des notions qui est ainsi exploité et même quelquefois redécouvert par les élèves. Ceci sous-entend que les élèves puissent aborder le problème avec leurs acquis antérieurs, sans toutefois pouvoir le résoudre entièrement. Soulignons que cette phase de résolution ne prend son effet que si elle est suivie d'une phase d'institutionnalisation; il est indispensable d'homogénéiser ce qui a été fait par les uns et les autres, d'étiqueter les nouveaux outils, de les formaliser le cas échéant, de les décontextualiser du problème où les élèves viennent de les rencontrer, de fixer enfin dans le cours les connaissances à retenir. Mais ce cours est fait à partir des activités des élèves. Il est suivi d'exercices de renforcement classiques.

En quelque sorte, comme l'explique G. Brousseau (Brousseau (1987)), l'enseignant amène les élèves, après leur avoir permis un travail contextualisé et personnalisé sur un problème, à décontextualiser et à dépersonnaliser, au cours de la phase d'institutionnalisation précisément.

On peut ici soulever un problème qui est encore en partie ouvert, à savoir l'élaboration de "bons problèmes", ce qui n'est pas toujours chose simple, loin de là (d'où la nécessité de recherches en ingénierie).

c) Coller aux processus d'apprentissage individuel en situation scolaire

Cela consiste d'une part à respecter les processus d'apprentissage individuels, en favorisant les résolutions de problèmes et en leur sein les jeux de cadres qui permettent et les rééquilibrations et l'exploitation positive des diversités.

D'autre part, on cherche à exploiter les caractères producteurs du travail collectif à des moments bien choisis de l'apprentissage (phases de recherche surtout où on peut tirer profit des diversités, des conflits et des avantages de la communication entre pairs).

Enfin on s'efforce de privilégier le travail spécifique sur les notions dont l'étude préalable aura révélé qu'elles sont sources d'erreurs résistantes.

Il se trouve que l'organisation évoquée plus haut tient compte de toutes ces exigences.

d) Optimiser les effets producteurs du contrat didactique

Cette forme de travail, surtout si elle est pratiquée en petits groupes dans les phases de recherche avant le cours, nous semble aussi être susceptible de limiter les éventuels effets réducteurs du contrat didactique (cf. le problème de l'âge du capitaine).

On sait bien en effet que les élèves ont tendance à répondre en fonction du contrat d'abord, et non en fonction du problème (pour dire les choses schématiquement) ; si le travail a lieu avant le cours, si le maître n'a qu'un rôle d'assistant, de coordinateur, dans cette phase du travail le contrat n'est pas encore entièrement fixé et donc moins fort. Le seul point fixé du contrat est que le déroulement de la séance dépend de l'activité des élèves et ce point précisément nous semble positif. Il signifie pour le maître que la gestion de la classe pendant ce temps de recherche doit être faite en respectant le rythme des élèves, et sans imposer son point de vue. C'est ce que nous caricaturons par la formule provocatrice "un bon enseignant est un enseignant qui sait se taire à certains moments".

Ajoutons que la situation est d'autant moins figée que dans un tel schéma de déroulement, l'enseignant ne sait pas exactement à l'avance dans quelle direction les élèves vont aller, et l'institutionnalisation qu'il va proposer ensuite dépend partiellement du déroulement, qui est effectivement variable. Autrement dit il y a pour le maître une certaine incertitude et cette donnée nous semble modifier considérablement le contrat dans un sens producteur.

On réalise ici l'importance des représentations préalables du maître sur les rapports enseignement/apprentissage pour établir tel ou tel type de contrat.

e) Difficultés de mise en application

De telles pratiques sont très difficiles à de multiples points de vue. D'abord il n'y a pas encore assez d'expériences vraiment déterminantes justifiant a priori de telles options pédagogiques, vu la difficulté des évaluations dans ce domaine.

Ensuite une organisation de ce type demande un changement de contrat chez les partenaires, chez les élèves qui doivent jouer le jeu et s'investir effectivement, chez les enseignants qui doivent renoncer partiellement à leurs habitudes d'expliquer d'abord, avec un maximum de clarté, et donc renoncer à la tentation gratifiante d'attribuer à leurs qualités personnelles d'exposition l'apprentissage des élèves. Par suite un tel changement de contrat ne peut être immédiat, et si on veut en voir des effets il faut l'appliquer un certain temps, ce qui nécessite un fonctionnement original prolongé. On ne peut donc pas faire une expérience limitée, pour voir, car on risque de ne rien voir du tout, sans que ce soit concluant. De surcroît, un mode d'enseignement inhabituel peut amener des réactions négatives des parents, et même des élèves qui peuvent préférer le ronronnement habituel. On a constaté aussi que, chez les élèves les plus défavorisés, on ne peut appliquer brutalement ce mode de fonctionnement vu les difficultés spécifiques en ce qui concerne la possibilité de chercher (de se déséquilibrer), la pauvreté des représentations du savoir et de l'accès au savoir, et la vacuité de tous les cadres potentiels. C'est l'objet du travail actuel de M.J. Perrin.

De plus la conception des problèmes en question n'a rien de facile, c'est souvent après des études d'épistémologie, et des travaux sur les conduites des élèves qu'on arrive à élaborer des problèmes adaptés à une génèse artificielle des notions.

Par ailleurs la reprise de séquences imaginées par quelqu'un d'autre est aussi très difficile, ce qui limite encore la pratique de ce mode d'enseignement. Et comme on l' a souligné dans le paragraphe précédent, dans la mesure où un tel mode d'enseignement doit être adopté sur un long terme, il y a là une véritable difficulté.

Enfin, et c'est encore un obstacle de taille, les critères de validation même internes d'un tel fonctionnement, n'existent pratiquement pas même localement, sauf exceptions,et là-encore l'incertitude engendrée par l'organisation elle-même est accrue d'une interrogation constante sur les résultats chez les élèves. Autrement dit les moyens de contrôle ne sont pas encore au point.

Ceci dit, au crédit (quand même !) des thèses didactiques, la relative faillite de l'enseignement ordinaire peut s'expliquer par les hypothèses de didacticiens en ce qui concerne l'apprentissage des élèves. L'enseignement classique, du type "j'apprends, j'applique", ne respecte pas la condition de la (re)construction individuelle du savoir; il joue sur l'imitation et la mise en application et donc risque d'accroître le rôle réducteur du contrat; souvent, le caractère "objet" des notions est plus important que leur caractère outil dans la présentation qui est faite. Nous pensons que les "bons" élèves refont tout seuls un certain cheminement cognitif; cette hypothèse est renforcée par les initiatives qui caractérisent souvent les bons élèves, du type entraînement individuel sur d'autres exercices que ceux déjà vus en classe par exemple.

f) Des moyens : la formation en didactique et le travail d'équipe

Ainsi, il est difficile de se lancer dans un enseignement différent et encore plus difficile de s'y lancer seul; nous pensons qu'un des meilleurs moyens pour y parvenir, avec un maximum d'esprit critique garantissant la qualité du changement, est, outre une formation initiale à la didactique des mathématiques, de s'intégrer à une équipe de collègues formé à la didactique des mathématiques, si ce n'est en contact avec la recherche en didactique.

En effet, un enseignant dans sa classe ne peut à la fois être acteur de la relation éducative qui s'y joue et observateur, ni même juge. Mais il peut soit bénéficier des observations de quelqu'un d'autre, soit travailler en dehors de sa classe pour élaborer des ingénieries didactiques appropriées, tenant compte de l'expérience qu'il a des élèves, soit profiter des nouveaux résultats des recherches en assistant à des séminaires spécialisés ou en lisant les revues correspondantes, ce qui n'a rien d'évident de but en blanc...En retour il peut alors expérimenter les propositions et contribuer à les affiner. Et, réciproquement, ce n'est qu'avec le concours de nombreux enseignants que la didactique peut progresser, aussi bien grâce à la richesse du questionnement, que grâce à la quantité d'expériences indispensable pour évaluer réellement les réalisations et par là-même les hypothèses elles-mêmes.

Reste le problème de la formation initiale à la didactique des mathématiques, dont nous pensons qu'elle doit être effectivement initiale à cause de la mise en place des représentations générales qu'elle engendre. Nous pensons en effet qu'il est plus facile de compléter une amorce de représentations "correctes" que de changer des représentations éventuellement incomplètes, héritées de pratiques empiriques où l'investissement personnel rend difficile le recul et le rationnel...

Conclusion

Un bon "designer industriel" est quelqu'un qui sait bien optimiser les choix à faire compte-tenu des contraintes dues aux nécessités techniques et financières , des désirs supposés des clients, et de sa propre imagination créatrice.

De même, on peut adopter le point de vue qu' un bon enseignant est celui qui réussit à optimiser la conduite de l'apprentissage d'un maximum d'élèves compte-tenu également d' un certain nombre de contraintes plus ou moins contradictoires, comme celles du temps nécessairement limité,ou celles qui viennent des contradictions entre le désir du maître de montrer, d'expliquer clairement, ce qui a l'avantage de gagner du temps (en apparence) et d'être gratifiant pour lui mais qui risque d'être peu efficace pour l'élève et la nécessité de faire travailler les élèves qui ne peuvent tout de même pas tout réinventer, qui vont trop lentement tout seuls, qui sont différents dans leurs acquis antérieurs et dans leurs cheminements cognitifs...

Dans la formation des "designers" une préoccupation importante, explicite si ce n'est explicitée dans l'enseignement, est de leur apprendre à gérer une situation présentant des contraintes contradictoires. En ce qui concerne les enseignants de mathématiques, l'équivalent peut être apporté par une formation initiale en didactique des mathématiques, complétée par un travail sur les pratiques enseignantes pratiqué en équipe.

En somme, permettant de dépasser et le fatalisme social (en cherchant les marges de manoeuvre correspondant aux origines sociales), et l'illusion pédagogiste (en prenant en compte les contraintes incontournables), la didactique pourrait être un des éléments "théoriques" constitutifs d'une bonne pédagogie de tous les jours ; mais cele nécessite des révisions périodiques suite aux nouvelles recherches (accessibles grâce à la formation initiale indispensable) et une pratique collective permettant d'expérimenter...

Bibliographie

Artigue M. (1986) Une section de DEUG SSM première année en 84-85, Brochure IREM Paris VII n°63

Artigue M. et Douady R. (1986) La didactique des mathématiques, note de synthèse R.F.P. n°76

Audibert G. (1982) Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane, Thèse (1982) Université de Montpellier

Authier H. (1986) Etude comparative de diverses producyions d'étudiants de première année de DEUG scientifique selon les séries de baccalauréat d'origine, Cahier de didactique des mathématiques n°31

Authier H. (1987) Connaissance en mathématiques des étudiants issus des Bac F, Cahier de didactique des mathématiques n°46

Balacheff N. * (1982) Preuve et démonstration, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 3.3

Balacheff N. * (1987) Dévolution d'un problème et construction d'une cojecture : le cas de "la somme des angles d'un triangle", Cahier de didactique des mathématiques n°39, Irem Paris 7

Bautier-Castaing E. et Robert A. (1987) Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations de l'accès au savoir mathématique des élèves de l'enseignement post-obligatoire : premiers éléments, Cahier de didactique des mathématiques n°41, Irem Paris 7

Beaudichon J. (1982) La communication sociale chez l'enfant, PUF (1982)

Berthelot C. et R. (1983) _Quelques apports de la théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe de première A_, mémoire de DEA Bordeaux

Brousseau G. *(1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, _Recherches en didactique des mathématiques_, Vol 4.2

Brousseau G. * (1980) Problème de l'enseignement des décimaux, _Recherches en didactique des mathématiques_ Vol 1.1

Brousseau G. * (1981) Problèmes de didactique des décimaux, _Recherches en didactique des mathématiques_ Vol 2.1

Brousseau G. * (1987) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques (à paraître)

Boschet F. et Robert A. (1984) L'acquisition des débuts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année, Cahier de didactique des mathématiques n° 7, Irem Paris 7

Brun (et Saada)(198) Formulations écrites et résolution de problèmes additifs Interactions didactiques, _Recherche_ n° 5, Genève-Neuchâtel

Chauveau G. et Chauveau Rogovas E. (1985) Les processus d'acquisition ou d'échec en lecture au cours préparatoire _R.F.P. n°70_

Chevalard Y. (1985) _La transposition didactique_, La pensée sauvage (1985)

Cornu B. (1983) _Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles_, Thèse 3me cycle (1983) Université de Grenoble

De la Garranderie (1982) _Les profils pédagogiques_, Le centurion (1982)

Doise (et Mugny) (1981) _Le développement social de l'intelligence_, Interéditions (1981)

Douady R. (1984) _Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation dans tout le cursus primaire_, Thèse (1984) Université Paris VII

Douady R. (1986) cf. Artigue M.

Fishbein (1982) Image and concept in learning mathematics, Educationnal studies in mathematics Vol 8 n°2

Gilly M.(1980) Maître-élève, rôles institutionnels et représentations, PUF (1980)

Glaeser G.(1971) Mathématiques pour l'élève professeur, Hermann (1971)

Grenier D., Legrand M. et Richard F.(1985) Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A 1re année, Cahier de didactique des mathématiques n°22, Irem Paris 7

Houard et Quatreville (1985) Rapports enseignement/apprentissage (débuts de l'analyse sur R) : analyse d'une section de DEUG A première année (connaissances antérieures et procédures en cours d'apprentissage), Cahier de didactique des mathématiques n°18, fascicule 2, Irem Paris7

Laborde C.(1982) Deux cadres en interaction dans l'enseignement des mathématiques: Langue naturelle et écriture symbolique, Thèse (1982) Université de Grenoble

Lautrey J.*(1980) Classe sociale, milieu familial, intelligence, PUF (1980)

Lautrey J. *(1984) Diversité comportementale et développement cognitif, Psychologie française 1984 Vol 29,1

Legrand M. cf Grenier (1985)

Legrand M. * (1986) Sur le débat scientifique, à paraître

Marc P.(1985) Autour de la notion pédagogique d'attente, Peter Lang (1985)

Mugny (1985) Psychologie sociale du développement cognitif, Peter Lang (1985)

Nimier J. (1985) Les mathématiques, le français, les langues, à quoi ça me sert ? Cedic (1985)

Navarro C. (1982) In "Perspectives piagétiennes" sous la direction de L. Not, Théorie opératoire de l'intelligence et analyse des processus cognitifs de l'adulte dans la réalisation de tâches: queques études récentes, Privat (1982)

Ovaert J.L. (1985) Quelle philosophie et quelle vision des mathématiques transmet-on aux futurs enseignants? CIEM Grenoble (1975)

Perret-Clermont N. *(1979) La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale, Peter Lang (1979)

Perret-Clermont N. *(1980) (et Schubauer-Leoni) Interactions sociales et représentations symboliques, Recherches en didactique des mathématiques Vol1.3

Perrin Glorian M.J. (1987) Eléments de bibliographie sur la relation entre origine sociale et réussite ou échec scolaires, Cahier de didactique des mathématiques n°36, Irem Paris7

Plaisance E. (1985) L'échec scolaire, nouvelles approches, Editions du CNRS (1985)

Piaget (1975) L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement, PUF (1975)

Richard F. cf. Grenier (1985)

Robert A. *(1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse (1982) Université Paris VII

Robert A. *(1984) cf. Boschet (1984)

Robert A. *(1984b) Rapports Enseignement/Apprentissage (Débuts de l'analyse sur R) Cahier de didactique des mathématiques n°18

Fascicule 0 : connaissances des élèves sur les débuts de l'analyse sur R à la fin des études scientifiques secondaires françaises

Fascicule 1 : Analyse d'une section de Deug A Première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage)

Fascicule 3 : les limites de l'évaluation (la section témoin, heurs et malheurs de la section expérimentale)

Robert A. *(1986) Une démarche dans l'enseignement supérieur, Cahier de didactique des mathématiques n°28, Irem Paris 7

Robert A. *(1986b) Première année de Deug scientifique : une démarche, Actes du colloque franco-allemand de Marseille (1986)

Robert A. * (1987) De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n°47

Robert A. *(1987) cf. Bautier E.

Robert A., Rogalski J. et Samurçay R. (1987) Enseigner des méthodes, Cahier de didactique des mathématiques n°38, Irem Paris 7

Robert A. et Tenaud I. (1987) Travail en petits groupes, Cahier de didactique n° 40, Irem Paris 7

Robinet J.*(1984) Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur, Thèse (1984) Université Paris VII

Robinet J. * (1986) Esquisse d'une génèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG, Cahier de didactique des mathématiques n°29

Robinet J. * (1985) Les modèles des nombres réels, Cahier de didactique des mathématiques n°21, Irem Paris 7

Rogalski J. (1987) cf. Robert (1987)

Samurçay R. (1987) cf. Robert (1987)

Schubauer-Leoni M.L. * cf Perret-Clermont

Schubauer-Leoni M.L. * (1986) Le contrat didactique dans l'élaboration d'écritures symboliques par des élèves de 8-9ans Interactions Didactiques, Recherches n°7, Universités de Neuchatel et Genève

Tall D. *(1977) Conflicts and catastrophs in the learning of mathematics, (1977) Mathematical Education for Teaching 2.4

Tall D. * (et Vinner) (1981)Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics 12 (1981)

Tenaud I. *(1986) Une année de géométrie en terminale C Brochure n°64, Irem Paris 7

Tenaud I. *(1987) cf. Robert (1987)

Tréhard F. (1987) Logiciels pouvant impliquer des activités mathématiques à l'école élémentaire : typologie et enjeux didactiques, thèse de doctorat Université Paris 7Vergnaud G.(1981) Quelques orientations théoriques et méthodiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques Vol 2.2

Vermersch P.(1979) Peut-on utiliser les données de la psychologie génétique pour analyser le fonctionnement cognitif des adultes? Théorie opératoire de l'intelligence et registres de fonctionnement, Cahiers de psychologie (1979) 22 1/2

Vinner (1981) cf. Tall D. (1981)

Ouvrages collectifs

Apprentissage du raisonnement Irem de Grenoble (1986)

Rapports du Greco "Didactique des disciplines scientifiques"

A propos de la formation des maîtres du second degré : quelle formation pour quels objectifs ?

a) En ce qui concerne **les connaissances en mathématiques** il nous semble raisonnable (mais pas nécessairement facile) de viser les objectifs suivants (dans l'optique de la qualité de l'activité professionnelle ultérieure) :

1) Obtenir à l'issue des études universitaires et sur suffisamment de sujets des connaissances **disponibles et adaptables**, et pas seulement mobilisables . *Il y a une grande différence entre savoir appliquer, par exemple, le théorème des fonctions implicites dans une question où c'est demandé explicitement (connaissance mobilisable) et penser à utiliser ce théorème dans un problème où il n'y est pas fait allusion (connaissance disponible).*

2) Avoir doté les étudiants d'un certain "bagage culturel", pour reprendre l'expression de M. D. Lehmann (Lille), leur permettant en particulier de pouvoir revenir, plus tard, sur des sujets qu'ils auront oublié mais qu' ils savent avoir la possibilité de retrouver (moyennant un certain travail).

3) Avoir engendré chez les étudiants des représentations des mathématiques et de l'activité mathématique compatibles avec une conception "problématique" des mathématiques (outils pour résoudre des problèmes et poser des questions).

Nous pensons que la disponibilité et l'adaptabilité des connaissances sont un garant pour une bonne gestion des contenus par les futurs

enseignants, en particulier pour la construction de problèmes adéquats, l'interprétation et l'exploitation positive des procédures et des erreurs des élèves, l'adaptation rapide et non réductrice à de nouveaux programmes, la possibilité de modifier de temps en temps son enseignement pour éviter l'ennui...
Quant aux représentations des mathématiques des futurs enseignants, à notre avis elles interviendront fortement (même si c'ets de manière implicite) dans l'organisation des activités sur les contenus proposées aux élèves (dans la répartition des cours et des exercices par exemple). Or ces activités sont à notre sens déterminantes pour la construction des connaissances des élèves.

Ces objectifs cependant ne paraissent pas différents de ceux que l'on peut se fixer pour tous les étudiants (du moins en début d'études), et ne justifient pas un enseignement spécial ; dans la mesure où ils ne sont pas atteints (ce qui est le cas à l'heure actuelle), nous y voyons un élément préjudiciable y compris à la formation des futurs enseignants.

b) En ce qui concerne des **connaissances plus spécifiques sur l'enseignement des mathématiques**, nous pensons que des connaissances de didactique des mathématiques sont utiles aux futurs enseignants, en particulier des connaissances sur les rapports a priori entre enseignement et apprentissage, sur les marges de manoeuvre dans une classe et sur les différentes façons d'en envisager la gestion.
Une telle formation implique d'ailleurs certaines représentations sur la façon d'apprendre et de faire apprendre les mathématiques,

représentations qui ne sont pas sans rapport avec les représentations des mathématiques évoquées plus haut. Ces représentations nous paraissent déterminer de façon importante les discours sur les mathématiques et leur apprentissage que produisent les enseignants (discours métamathématiques) ; or ces discours, on l'a déjà vérifié, influencent fortement les élèves, d'où leur importance.

Plus précisément, une formation en didactique des mathématiques peut permettre d'échapper à la fois au fatalisme sociologique (tout est joué à l'avance du fait de l'origine sociale des élèves) et aux deux illusions pédagogiques possibles (le pédagogique peut tout, ou au contraire il suffit de bien savoir les mathématiques, de bien les exposer, et de bien les expliquer pour bien les enseigner).
Cette formation permet aux enseignants de savoir quoi repérer pour percevoir correctement une situation d'enseignement donnée, de savoir en particulier qu'il est important de prendre en compte les représentations des élèves, les contrats explicites et implicites de la classe, les prérequis, éventuellement les obstacles épistémologiques liés aux notions considérées... Elle permet de savoir quelles acquisitions sont particulièrement longues et/ou difficiles, quitte à le signaler aux élèves d'ailleurs.
De plus une telle formation permet aux enseignants de distancier, au moins dans une certaine mesure, les phénomènes qui se passent dans leurs classes, grâce à la possibilité de les étiqueter, voire de les prévoir. Cela contribue à aider les enseignants à partager et à discuter plus facilement leurs expériences. Cela peut faciliter le travail d'équipe.

c) **Pour réaliser ces objectifs** nous pensons qu'il y a lieu de prévoir trois temps distincts dans la **formation** :

1) une formation initiale en mathématiques commune à tous les étudiants

2) une formation initiale en didactique par exemple au moment du stage de CPR (ou l'équivalent)

3) une formation continuée en didactique et en mathématiques

Nous allons préciser ces trois étapes.

1) Un certain nombre de textes, comme ceux de M. Legrand (Grenoble) précise très bien les enjeux et les obstacles d'une formation remplissant les objectifs déjà cités.

Cette formation initiale en mathématiques doit être basée sur un certain nombre d'acquis de didactique des mathématiques : on peut évoquer notamment la mise en oeuvre d' enseignements de type métamathématique (enseignements de méthodes, travail sur des textes de mathématiques plus anciens...). Ces enseignements exploitent les capacités réflexives des étudiants et doivent être menés en relation avec des situations responsabilisant les étudiants par rapport à la construction de leur savoir. On peut citer les situations de débat scientifique, le travail en petits groupes sur des problèmes adequats, les projets...).
Dans les enseignements de mathématiques, on cherche à privilégier la construction des connaissances par les problèmes, avec en particulier un travail systématique sur les différents cadres d'intervention des notions. On se base sur le repérage des obstacles épistémologiques liés aux contenus visés pour choisir les notions sur lesquelles un travail particulier semble souhaitable (avec ce que cela représente de temps à y consacrer).
D'ailleurs, une telle réflexion permettrait sans doute d'optimiser les adaptations à apporter aux connaissances des étudiants compte-tenu des logiciels mathématiques actuels et futurs.

Cependant, nous voudrions insister sur un point : si on veut changer les attitudes des étudiants vis à vis de l'engagement scientifique, il est indispensable de changer **l'évaluation** des études et en particulier de **valoriser** ce qu'on cherche à introduire.

C'est précisément ce qui a été fait (au moins partiellement) avec le changement de l'une des épreuves de l'oral du CAPES.

2) La formation initiale en didactique peut s'appuyer sur cette formation initiale, en explicitant certaines pratiques évoquées plus haut.

Cependant, il est à notre avis nécessaire d'intervenir de façon explicite pour exposer un certain nombre d'éléments de didactique.

Il y a d'une part les acquis généraux de la didactique des mathématiques en ce qui concerne les rapports entre enseignement et apprentissage (régularités au niveau des contenus à faire acquérir).

D'autre part on doit présenter des résultats plus spécifiques aux différentes notions à enseigner, comme des éléments d'épistémologie de ces notions, des régularités sur les conduites des élèves (procédures de résolution de problèmes et erreurs persistantes) ainsi que des propositions de séquences (ingénierie didactique comprenant des prévisions de comportements). En tout état de cause, la formation en didactique nous semble devoir être liée le plus possible, pendant la formation, à une mise en fonctionnement effective de mathématiques.

Ceci dit il nous semble indispensable de prévoir dans cette formation une (petite) recherche personnelle : même limitée, une implication de ce type nous semble être le seul garant de compréhension des acquis de la didactique dans leur champ de validité, le seul garant de ne pas figer les connaissances.

Mais tout cela est insuffisant : un tel enseignement ne prend tout son sens qu'à la lumière de l'expérience, en classe donc. Et réciproquement il y a besoin, après l'expérience, de reconsidérer ce que l'on a appris en didactique, d'où le caractère indispensable de la formation continuée.

3) La formation continuée en didactique permet donc le suivi et le feedback qui nous paraissent indispensables non seulement à la prise de sens évoquée ci-dessus, de la formation initiale en didactique mais encore à la survie d'un corps enseignant de qualité.

Il est tout à fait souhaitable à notre avis que les enseignants puissent suivre les résultats des recherches en didactique des mathématiques, et il est tout aussi important qu'il puisse y avoir un retour de la classe vers les chercheurs.

Cela doit s'accompagner d' une prise en compte de cette nécessité par l'institution, puisqu'il faut des locaux et des animateurs.

En outre, ce genre de formation, qu'il est sans doute difficile de rendre obligatoire, sera plus efficace (en particulier en ce qui concerne le nombre d'enseignants concernés) s'il en résulte une incidence sur les carrières.

Ceci dit, à notre sens, cette formation doit aussi être continuée en mathématiques et ceci pour plusieurs raisons.

D'abord (re)vivre de temps en temps l'inconfort de l'apprentissage nous semble important pour des enseignants qui ne sont pas obligés de faire de la recherche. Beaucoup d'enseignants engagés dans des formations nouvelles (informatique par exemple) nous l'ont confirmé.

Ensuite, les mathématiques évoluent, et même les outils élémentaires dont on a besoin. Enfin les meilleurs problèmes s'usent. Dans ces conditions, il y a besoin de renouveler le stock de problèmes riches.

On pourrait penser à mener cette formation continuée en mathématiques dans le cadre d'UV communes avec les étudiants (il est intéressant de mélanger les deux populations sur des sujets "neutres"), UV dans lesquelles on traiterait de sujets transversaux (comme π, ou les fondements de la géométrie ...) avec une introduction épistémologique et un travail sur problèmes, voire même des retombées didactiques.

I Type de connaissances

Reprenons les problèmes auxquels la didactique s'intéresse, en les reformulant en des termes proches des préoccupations des enseignants :
Est-ce qu'il ya plusieurs manières d'enseigner une même notion mathématique (à un même public) ? Et est-ce que cela peut avoir des résultats significativement différents sur les acquisitions des élèves, tant au niveau des simples performances que des procédures et même des attitudes adoptées devant un problème par exemple (et/ou sur le nombre et la répartition des élèves concernés) ?
Et quels sont les coûts des divers choix possibles en matière d'enseignement (par rapport au temps en particulier) ?
Ces questions sur les **différentes organisations éventuelles de l'enseignement**, et sur les **rapports entre l'enseignement et l'apprentissage qui en résulte**, sont donc un des objets d'étude de la didactique des mathématiques qui intéresse directement les enseignants.

Comment les didacticiens abordent ce type de problèmes dans un domaine où les paramètres sont si nombreux, si variables ?
Il faut réaliser ici que ces préoccupations relèvent en partie du champ de ce qu'on appelle les sciences humaines, dans la mesure justement où il y a des acteurs humains parmi les "variables". Et comme dans toutes ces sciences, au lieu de chercher des lois, ou de démontrer des théorèmes, on s'attache à mettre en évidence des régularités. Par exemple, on va chercher à montrer que tel enseignement de telle notion entraîne tel apprentissage, tels comportements (pour beaucoup d'élèves).
Cela présuppose qu'il existe de telles régularités : il y a là une hypothèse préalable, admise (et évidemment partiellement démontrée à chaque fois que l'on trouve de telles régularités...) par tous les chercheurs concernés, en particulier ceux de sciences de l'éducation et ceux de didactique des mathématiques. Rappelons que pour beaucoup d'enseignants au contraire la classe est un théâtre où il faut improviser, et pour eux l'existence et la mise en évidence de régularités est choquante. Pour nous, c'est comme les économies d'énergie : cela n'empêche pas de chauffer, cela permet d'optimiser les dépenses... La connaissance partielle (car elle ne peut être que partielle) des phénomènes de classe permet de partir de plus haut, de mieux ajuster ses improvisations, de mieux contrôler ce qui est possible en fonction des objectifs...
Ceci dit, la différence entre chercheurs en sciences de l'éducation et didacticiens (de n'importe quelle discipline), c'est que les régularités recherchées ne sont pas les mêmes pour les uns et pour les autres : les didacticiens ont choisi d'étudier les régularités au niveau des contenus même de l'enseignement, estimant qu'elles sont les plus pertinentes pour comprendre ce qui est en jeu et amener à des améliorations éventuelles ; en sciences de l'éducation, au contraire, on s'intéresse surtout à des phénomènes au niveau de la classe, indépendants précisément des contenus enseignés.
Mais de plus, pour les didacticiens, cette recherche de régularités est inséparable de la recherche de leurs causes, ou du moins de corrélations fortes (et répétées) entre elles et l'enseignement subi, en particulier on essaiera de dégager ce qui peut ne pas dépendre (au moins en partie) des personnalités en présence. Par exemple comment faire pour qu'un problème qu'on pose aux élèves soit réellement entre leurs mains, quelles sont les alternatives qui peuvent se présenter aux élèves,

qu'est ce qui va en résulter pour les acquisitions uniquement au vu du problème?
C'est bien au niveau des contenus enseignés, et surtout de **l'organisation de cet enseignement**, que les didacticiens ont réussi à dégager des régularités, (qui transcendent les personnes) sur les rapports enseignement/apprentissage : ainsi divers modes de gestion ont été définis, testés (expérimentalement), et on a pu montrer qu'ils entraînent des apprentissages que l'on peut prévoir ou au moins contrôler (au moins pour une bonne partie des élèves) - toutes choses égales par ailleurs.
Seulement, pour caractériser diverses organisations possibles de l'enseignement, y compris pour en trouver de nouvelles le cas échéant, il faut une <u>bonne connaissances des contraintes qui existent dans le système d'éducation</u> : il s'agit d'étudier les contraintes institutionnelles, celles, plus épistémologiques, qui sont propres aux notions visées, de mettre en évidence ce qui peut dépendre des capacités cognitives des élèves, et des conceptions même des élèves et des enseignants sur les mathématiques, la manière de les apprendre... Si les élèves ont une idée des mathématiques comme théorie abstraite, bien construite, réservée "aux savants", il sera difficile de leur faire aborder avant le cours un problème où ils devront utiliser leurs connaissances pour résoudre des questions nouvelles. Même chose si les enseignants pensent qu'on ne peut pas utiliser un outil mathématique avant de l'avoir défini proprement (et pourtant c'est bien ce qu'ils font quelquefois, avec les polynômes par exemple...).
On appelle "ingénierie didactique" le moment de la recherche qui consiste à passer des connaissances sur les contraintes, les difficultés effectives des élèves, les choix de gestion a priori ... à l' élaboration des propositions précises d'enseignement de telles ou telles notions et à l'expérimentation, qui est une phase cruciale de la recherche en didactique. Signalons que le découpage des notions est aussi un problème important, les didacticiens s'intéressent en général à un réseau de notions présentant une certaine unité dans la mise en fonctionnement (champ conceptuel).

Pour résumer, les didacticiens, qui sont d'abord des chercheurs dans l'état actuel des choses, s'attachent à trouver et à décrire avec précision des conditions susceptibles d'engendrer dans la classe tel ou tel apprentissage de telle notion (ou groupe de notions). Cela les amène à caractériser différents types d'activités des élèves, associées à différentes phases de l'enseignement, et de l'apprentissage ; les descriptions qui en sont faites ne portent pas uniquement sur les contenus et les consignes, elles concernent aussi la classe, avec ses habitudes, les demandes implicites et/ou explicites du maître, des élèves (c'est ce que l'on appelle le contrat didactique), et même de l'institution.

Reste une question encore : que veut dire caractériser ? quand dira-t-on qu'on a trouvé telle ou telle régularité ?
Les didacticiens ont l'ambition de faire un travail scientifique, c'est à dire de préciser les hypothèses dont ils partent (admises ou testées), de préciser ce qu'ils veulent montrer, de réaliser des expériences soignées, en un mot de "prouver" ce qu'ils avancent.

Bien sûr il s'agira de preuves du type des preuves en sciences humaines, par exemple

* on peut chercher la reproductibilité de phénomènes prévus suite à des activités planifiées,

* on peut (plus modestement) observer l'adéquation (suite à une expérience prévue) des comportements obtenus et des comportements attendus, adéquation mesurée soit qualitativement, soit quantitativement par l'intermédiaire d'indices numériques (à construire à partir de performances écrites par exemple).

* on peut étudier les élèves après l'expérience, lorsqu'ils sont mélangés à d'autres (suivi).

Dans tous les cas, c'est plutôt la convergence de preuves partielles vers le résultat attendu qui sert à attester les faits recherchés (infirmation ou validation).

3) Soulignons que ce travail, très long, difficile, souvent ingrat, n'est pas le travail de l'enseignant mais bien celui, spécifique, du didacticien. Mais comme un certain nombre des résultats de ce travail intéresse les enseignants, il faut une transmission aux intéressés de ces résultats et à notre avis il faut même une formation, nous allons y revenir.

Nous voulons insister tout de suite sur le fait que certains enseignants ont adopté depuis longtemps un point de vue très proche si ce n'est analogue à celui qui va être exposé...

A ceux-là nous ferons remarquer qu'ils savent très bien que leur point de vue n'est pas adopté par tous les collègues, et que, de ce fait, leurs propres efforts pour enseigner d'une certaine façon peuvent être compromis par les convictions inverses de certains autres.

Et c'est là qu'intervient justement l'apport de la didactique en tant que telle (et l'apport possible de ces collègues dans le futur) : si la démarche est vraiment scientifique, les résultats sont fiables, n'importe quel enseignant peut s'appuyer dessus, il ne s'agit pas de "croire" ou d'adhérer pour des raisons idéologiques ou autres à tel ou tel type d'enseignement, il s'agit d'avoir les moyens de dépasser le niveau de la conviction ou de l'évidence empirique.

A la limite si un enseignant peut avoir trouvé tout seul un grand nombre des régularités que nous allons évoquer ici, il ne peut pas en faire état pour convaincre les autres : seul le passage des connaissances au crible d'une expérimentation (répétée même) et de la critique collective d'une communauté scientifique autorise une argumentation convaincante, et c'est à cette scientificité qu'aspire la didactique. De plus, la décontextualisation inhérente à une démarche scientifique entraîne la création de nouveaux outils, de nouveaux concepts. Et ceux-ci permettent de nouvelles interprétations et amènent à dépasser les constats qui sont sinon répétés sans fin et sans issues.

II) Finalement que peut apporter la didactique des mathématiques à un enseignant ?

a) d'abord une certaine connaissance de ce qu'on peut repérer dans une classe pour comprendre ce qui s'y joue, notamment le contrat, les représentations des élèves et de l'enseignant, le fait que certaines acquisitions sont longues ...

b) ensuite une certaine connaissance des marges de manoeuvre effectives de l'enseignant et des conséquences de certains choix contrôlés qu'il peut faire (reprise de certaines ingénieries, suivies dans l'esprit et non dans la lettre, interventions de type métamathématique sur la difficulté d'acquisition de certains concepts par exemple ...)

c) de plus il nous semble qu'il est plus facile d'apprécier (puis de mettre en oeuvre de façon non réductrice) les changements de programme en terme de transposition didactique, de lutte contre l'obsolescence et de stratégie de construction de connaissances pour les élèves qu'en termes d'addition ou de soustraction par rapport aux programmmes précedents.
d) en outre ces connaissances permettent de suivre les recherches en cours, grâce à une initiation au vocabulaire en particulier, et même de les apprécier avec un regard critique, pour s'en servir ou pour les situer par rapport à une pratique personnelle (en séparant le conjoncturel de l'essentiel).
On peut schématiser ainsi ce type d'apports : une bonne connaissance des contenus donne une certaine liberté dans l'organisation de leur présentation aux élèves, une bonne connaissances des rapports entre l'enseignement et l'apprentissage donne une certaine liberté dans la gestion même de la classe ...
e) enfin, on peut remarquer que des connaissances du type évoqué ci-dessus ont un intérêt qui dépasse la "simple" gestion de la classe (qui n'est pas négligeable). En effet, comme elles permettent de repérer et même d'étiqueter certains phénomènes qui se jouent dans la classe, elles peuvent en entraîner une certaine dépersonnalisation, et rendre par là même possible une plus grande communication des enseignants entre eux.
Il est plus facile, plus confortable, et par suite plus efficace,de discuter des effets de tel ou tel contrat dans une classe que de dire "ce matin j'ai été chahuté...". La connaissance permet une certaine distanciation, plus propice à l'échange que le vécu brut.
Donc les connaissances de didactique peuvent contribuer à la discussion des enseignants, à leur travail collectif.
Or, tout le monde sait qu'il est très important pour les élèves d'avoir un certain suivi dans les modes d'enseignement qu'ils subissent, et que la communication, la discussion entre enseignants sur une base plus rationnelle (permise par la didactique) est peut-être le premier pas vers une homogénéisation (et non une uniformisation évidemment) de ces modes.

III Et la transmission

Si on admet que les connaissances à transmettre en didactique sont du type précédent, se pose tout de suite un deuxième problème qui est celui de la transmission de telles connaissances à des (futurs) enseignants.
Et en particulier, sans rentrer dans le détail, suffit-il de les exposer telles que ?

Notre première hypothèse générale à ce sujet (voeu pieux) est qu'il est vain de séparer la formation en didactique de la formation en général, tant la conception d'un enseignement de mathématiques est lié aux mathématiques elles-mêmes et donc à l'enseignement qu'on en a eu. Nous présentons ci-joint un exemple de projet global de formation des maitres du second degré en mathématiques.

Notre deuxième hypothèse est qu'on ne peut pas faire comme si les (futurs) enseignants étaient vierges en matière d'idées sur l'enseignement des mathématiques. Ils ont tous non seulement des

représentations (conceptions) sur les mathématiques, sur la manière de les apprendre, sur comment il faut les enseigner, mais encore ils ont des convictions, très implicites, qui correspondent souvent à une ambiance culturelle datée et à leurs expériences personnelles.
Nous pensons qu'il y a lieu d'intervenir explicitement sur ce sujet, dès le début de la formation, en pointant et en explicitant un certain nombre de représentations habituelles et en dénonçant un certain nombre de convictions peu justifiées à notre avis. Nous nous basons sur l'âge des formés pour estimer qu'une telle intervention sur les connaissances peut être entendue.
Ceci ne suffit sans doute pas à ébranler les représentations non compatibles avec les notres, mais cela contribue à donner plus de sens à notre discours et à permettre des évolutions (une personne avertie en vaut deux)...
Voici quelques éléments sur ce sujet.
De quelques "théorèmes en acte" chez des enseignants et des représentations contraires que nous défendons (sans justifications pour l'instant):
* apprendre les mathématiques consiste d'abord à apprendre les théorèmes de mathématiques (pour nous au contraire il s'agit de transmettre des outils pour résoudre des problèmes et poser des questions)
* plus un sujet est difficile, ou plus les élèves sont faibles, plus il faut expliquer, simplifier, décomposer...(pour nous au contraire il faut donner des moyens suplémentaires pour résoudre des problèmes difficiles, mais ne pas y renoncer pour ne pas priver les élèves des concepts dans leur globalité, ne pas les vider de leur sens)
Dans le même ordre d'idées nous pensons qu'il faut mélanger les connaissances, les faire fonctionner en même temps dans plusieurs cadres par exemple, contrairement à l'idée de simplification par mise en fonctionnement dans un seul cadre à la fois. En effet nous pensons qu'on apprend par déséquilibre/rééquilibration et non par imitation, répétition...
* le rôle de l'enseignant est de parler, celui des élèves d'écouter...(pour nous au contraire il faut se taire lorsque les élèves cherchent certains problèmes, ne pas intervenir même s'ils sèchent, même s'ils disent des bêtises, du moins dans un premier temps, pour leur laisser vraiment le rôle de chercher et de trouver, même si c'est long)
* l'apprentissage des mathématiques est éminemment individuel...(pour nous au contraire à certains moments de l'apprentissage, l'appropriation collective peut précéder l'apprentissage individuel et contribuer à l'accélérer)
* il n'y a pas lieu d'enseigner des méthodes, les élèves doivent les tirer eux-mêmes des exemples traités par le professeur...(pour nous au contraire si on n'explicite pas les méthodes, un grand nombre d'élèves ne vont pas faire seuls le chemin de cette explicitation et de la mise en fonctionnement qui peut en résulter)

Ceci dit, il y a un moment où on doit aborder explicitement les éléments de didactique évoqués ci-dessus (sans démonstration !). Le problème est alors la prise de sens de ce qui est exposé. Certes, s'il n'y a pas le risque comme en mathématiques de perte de sens, il y a un risque tout aussi grave de dénaturation de sens. Nous en avons eu des illustrations nombreuses, avec des dénaturations, faites en toute bonne foi, de séquences d'enseignement par exemple. Nous pensons qu'il n'y a pas que

les représentations précedemment évoquées qui sont en cause, et qu'il y a lieu de prendre des mesures pour aider cette transmission "correcte".
Plusieurs méthodes, servant de "garde-fous" sont à notre disposition pour assurer une transmission correcte.
Ou bien on fait faire une petite recherche personnelle aux formés, avec l'hypothèse que l'implication individuelle correspondante contribue à donner un sens correct aux résultats de didactique perçus avec leur domaine de validité, et leurs limites donc (et leur portée). Nous supposons qu'il y a transfert, même aux concepts qui n'ont pas été abordé dans la recherche, de l'attitude critique à adopter dans leur appropriation : en somme on fait résoudre effectivement un petit "problème de didactique" aux formés avant d' exposer les fondements.
On peut aussi concevoir de commencer par un enseignement de mathématiques sur un contenu nouveau, ayant un intérêt pour les personnes concernées, par exemple transversal à leur connaissances communes, et éventuellement pouvant avoir des retombées sur leur propre enseignement ; et cet enseignement de mathématiques serait dispensé conformément à une organisation issue de travaux de didactique des mathématiques, ce qui permettrait une double institutionnalisation, mathématique d'une part, mais aussi didactique d'autre part, "sur le vif".
On fait là l'hypothèse que l'expérience personnelle, le vécu, de ce qu'on veut signifier, là aussi sur un cas particulier, permet la généralisation de la bonne appréhension de ce qu'on veut transmettre : en somme on fait jouer aux formés le rôle d'élèves, en pensant qu'il y aura à la fois prise de sens de ce qu'on va exposer et facilité plus grande de reproduction de l'expérience vécue.

Dans tous les cas, notre hypothèse est donc qu'il peut y avoir transfert de prise de sens à partir d'un exemple détaillé, pour lequel l'étudiant a été actif et pour lequel il y a eu une double institutionnalisation (au niveau du contenu de l'exemple et au niveau de ce qui a été fait et pourquoi). Nous ne visons pas à l'exhaustivité, d'autant plus que les étudiants auront à apprendre de nouvelles choses dans leur carrière ...
Par contre, nous essayons de donner des bibliographies.