INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 3

Gilles-Personne de Roberval

Traité des Indivisibles

UNIVERSITE - PARIS VII

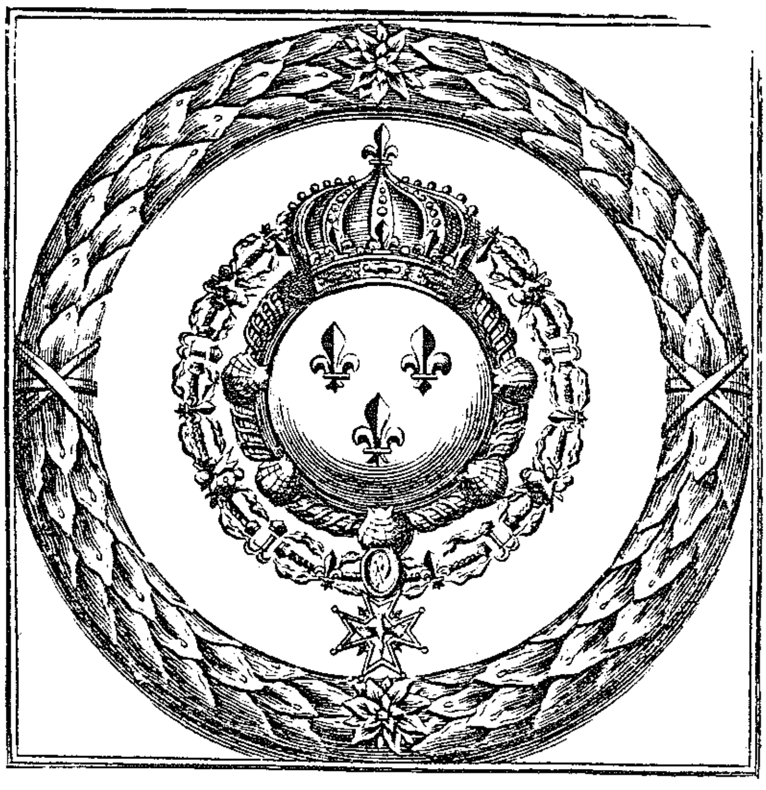
Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 3

Gilles-Personne de Roberval

Traité des Indivisibles

DIVERS OUVRAGES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE.

Par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCIII.

GILLES PERSONNE DE ROBERVAL

1602-1675

D'origine paysanne pauvre, ROBERVAL nait en 1602 dans le village de Roberval, près de Senlis. Après avoir voyagé en France - comme DESCARTES, il va au siège de la Rochelle - en donnant des leçons de mathématiques, il arrive en 1628 à Paris, où il se lie d'amitié avec le Père MERSENNE qui l'introduit dans le milieu scientifique parisien.

Nommé en 1632 professeur de philosophie au collège de Maitre Gervais, il obtient en 1634 la chaire créé par RAMUS au Collège Royal. Cette année "il démontra que l'espace de la roulette est le triple de la roue qui la forme" (PASCAL, Histoire de la roulette) : c'est sa célèbre quadrature de la cycloide, que ROBERVAL appelait trochoide (nom tiré du grec, qui correspond au mot français roulette). La chaire de RAMUS était l'objet d'un concours triennal, et ROBERVAL la conserva toute sa vie. Il est nommé membre de l'Académie Royale des Sciences à sa création en 1666. Il meurt à Paris le 6 octobre 1675.

D'humeur "bizarre et capricieuse et d'un amour propre excessif" (Biographie Universelle de MICHAUD), ROBERVAL cachait avec soin ses méthodes pour conserver sa supériorité, d'où d'innombrables querelles de priorité. Il fut un ennemi irréductible de DESCARTES, dont il attaqua violemment la <u>Géométrie.</u> ROBERVAL ne publia de son vivant que deux ouvrages, cités dans la bibliographie ci-dessous. La description de sa célèbre balance, présentée à l'Académie le 21 août 1669, se trouve dans le <u>journal des savants</u> de 1670 (<u>Nouvelle manière de</u>

balance inventée par Monsieur de ROBERVAL).

Une collection de ses traités se trouve dans le volume in folio Divers ouvrages... publié par l'Académie en 1693. Le Traité des Indivibles est reproduit ici d'après la réimpression de ce volume faite en 1730. Il y de nombreux inédits de ROBERVAL à la Bibliothèque Nationale.

Jean-Luc VERLEY

BIBLIOGRAPHIE

Oeuvre de ROBERVAL

Traité de mécanique. Des poids sustenus par des puissances sur les plans inclinéz à l'horizon. Des puissances qui soustiennent un poids suspendu à deux chordes. Paris, 1636.

Aristarchi Sami de mundi systemate, partibus et motibus ejusdem libellus. Adjecta sunt AE de ROBERVAL... notae in eundem libellum. Paris, 1644.

Divers ouvrages de mathématique et de physique par messieurs de l'Académie royale des sciences, Paris, 1693.
Réimprimé dans Mémoires de l'Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, Tome VI, Paris 1730.

Bibliographie complémentaire

L. AUGER. Un savant méconnu : G.P de ROBERVAL, son activité intellectuelle dans les domaines mathématique, physique, mécanique et philosophique Paris, 1962.

E. WALKER . A study of the Traité des indivisibles de G.P de ROBERVAL, New York, 1932.

TRAITE' DE

MECHANIQVE.

DES POIDS SOVSTENVS PAR DES PVISSANCES SVR LES PLANS INCLINEZ A L'HORIZON.

DES PVISSANCES QVI SOVSTIENNENT vn poids ſuſpendu à deux chordes.

Par G. Perſ. de Roberual, Profeſſeur Royal és Mathematiques au College de Maiſtre Geruais, & en la Chaire de Ramus au College Royal de France.

A PARIS,
Par RICHARD CHARLEMAGNE, rue des Amandiers, à la Verité Royalle.

M. DC. XXXVI.

LE TRAITE DES INDIVISIBLES de ROBERVAL

ROBERVAL ne reconnaissait à son traité aucune autre source d'inspiration qu'ARCHIMEDE. Il est pourtant très probable qu'il avait été, dans une certaine mesure, influencé par KEPLER (Nova stereometria, 1615) et des parties de son ouvrage sont très proches des idées de STEVIN et de VALERIO (De centro gravitatis solidorum .., 1604) ; mais on n'a aucune certitude. Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure l'oeuvre de STEVIN était connue en France lors de la première moitié du XVIIème siècle. La ressemblance de quelques unes des idées exprimées par ROBERVAL et PASCAL avec celles qui figurent dans les écrits de STEVIN, un demi siècle plus tôt, est frappante ; mais ces scientifiques n'ont jamais fait allusion à l'ingénieur de Bruges dont les oeuvres avaient pourtant été publiées plusieurs fois en flamand, en latin et en français.

ROBERVAL était indiscutablement familier avec l'oeuvre de CAVALIERI qu'il a défendue contre de violentes critiques ; mais son point de vue sur les indivisibles apparait beaucoup moins naif que celui de l'italien. Il dit tout à fait clairement que, dans cette méthode, il n'a pas considéré une surface comme réellement composée de lignes, ou un solide comme constitué de surfaces, mais construit en fait à partir de petits morceaux de surfaces et de solides respectivement, ces "choses en quantité infinie" étant considérées" comme si elles étaient indivisibles".

Dans son Traité, ROBERVAL précise que, tout au long du raisonnement, il faudra entendre : "la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes et compose la ligne entière" et que "l'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale", et ainsi de suite (Traité, p. 249-250).

ROBERVAL défend le point de vue de CAVALIERI en disant que ce dernier n'exprimait pas qu'une surface est réellement constituée de lignes ; mais en cela, il est très indulgent. Influencé principalement par les ouvrages classiques d'ARCHIMEDE, il se refusait à reconnaitre que, dans l'oeuvre de CAVALIERI, tout comme dans celle de GALILEE ou de TORRICELLI, les traditions atomistes et scolastiques modifiaient la pensée et la pratique de l'auteur dans la méthode des indivisibles. A la différence d'ARCHIMEDE pourtant, ROBERVAL substitue le concept d'infini à la méthode d'exhaustion, un peu à la manière de Grégoire de SAINT VINCENT, mais sans formuler explicitement le concept de limite. Il a pourtant introduit l'élément essentiel que l'on trouve dans notre conception de l'intégrale définie : après division d'une figure en petites parties, il les fait ensuite décroitre en grandeur, la procédure étant menée d'une manière essentiellement arithmétique et le résultat étant obtenu par sommation d'une série infinie. Cette méthode, qui constitue une extension considérable des méthodes de STEVIN, contraste fortement avec celle des indivisibles de caractère géométrique fixés que l'on trouve dans l'oeuvre de CAVALIERI.

L'équivalent du théorème

$$\int_o^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

avait été anticipé par CAVALIERI pour les valeurs entières positives de n et par TORRICELLI pour les valeurs rationnelles de n (sauf, bien sûr, pour n = - 1). Vers la même époque, ROBERVAL était parvenu à ce résultat, peut-être à l'instigation de FERMAT, à travers des considérations qui mettent clairement en évidence l'originalité (relative) de son oeuvre. Tandis que CAVALIERI et TORRICELLI opèrent à partir de considérations purement géométriques issues de la méthode d'exhaustion et de celle des indivisibles, le grand triumvirat français ROBERVAL, FERMAT et Blaise PASCAL, combine son intérêt pour la géométrie d'ARCHIMEDE avec un enthousiasme pour la théorie des nombres qui colore leur oeuvre. C 'est ainsi que ROBERVAL associe les nombres et les quantités géométriques d'une manière qui ressemble fort à celle des pythagoriciens, particulièrement à celle de NICOMAQUE. Comme nous l'avons déjà indiqué, ROBERVAL considère un segment de ligne comme constitué d'une infinité de petites lignes, représentées par des points qu'il met en correspondance avec les entiers positifs. Si, maintenant, nous considérons successivement les triangles rectangles isocèles dont les côtés sont constitués respectivement de 4, 5, 6,... points ou indivisibles, le nombre total de telles unités dans les triangles sont donnés de la manière suivante :

Le triangle de 4 est $10 = \frac{1}{2}(4)^2 + \frac{1}{2}\,4$

Le triangle de 5 est 15 = $\frac{1}{2}\ (5)^2 + \frac{1}{2}\ 5$

Le triangle de 6 est 21 = $\frac{1}{2}\ (6)^2 + \frac{1}{2}\ 6$

....

Le second terme de droite dans chaque ligne est la moitié du côté, et représente l'excès du triangle sur le demi-carré. Quand le nombre de points et de lignes croit, il diminue continuellement par rapport au premier terme. Puisque le nombre de lignes dans un triangle géométrique ou dans un carré est infini, l'excès, ou la moitié d'une ligne "n'entre pas en considération" (p. 247-48). Il est dès lors clair que le triangle est la moitié du carré. Ce résultat est évidemment équivalent en gros à celui exprimé par l'égalité :

$$\int_0^a x\, dx = \frac{1}{2}\ a^2.$$

ROBERVAL continue ce type de considérations en remarquant de manière analogue que, si les lignes se suivaient l'une l'autre dans l'ordre du carré, la somme de toutes ces petites lignes, ou les points qui les représentent, seraient finalement, prises un nombre égal de fois, comme la pyramide est au prisme, c'est à dire comme 1 est à 3. Par exemple, si nous avons une pyramide rectangulaire de points ayant 4 points par côté, nous avons :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \frac{1}{3}\ (4)^3 + \frac{1}{2}\ (4)^2 + \frac{1}{6}\ 4\ ;$$

s'il y a cinq points par côté, nous avons :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = \frac{1}{3}\ (5)^3 + \frac{1}{2}\ (5)^2 + \frac{1}{6}\ 5\ ;$$

et ainsi de suite. Dans ces relations, le premier terme de droite est le tiers du cube, le second est la moitié du carré et le dernier est le sixième du nombre de points sur le côté de la base de la pyramide. Puisque le nombre de carrés dans un cube géométrique est infini, les deux derniers termes sont comme rien, de telle sorte que la somme est le tiers du cube (p.248). De même, la somme des cubes est le tiers de la quatrième puissance ; la somme des quatrièmes puissances est le sixième de la puissance sixième etc... (p. 248-49). En d'autres termes, ROBERVAL a, à sa manière, obtenu l'équivalent du théorème :

$$\int_0^a x^n\, dx = \frac{1}{n+1}\ a^{n+1}$$

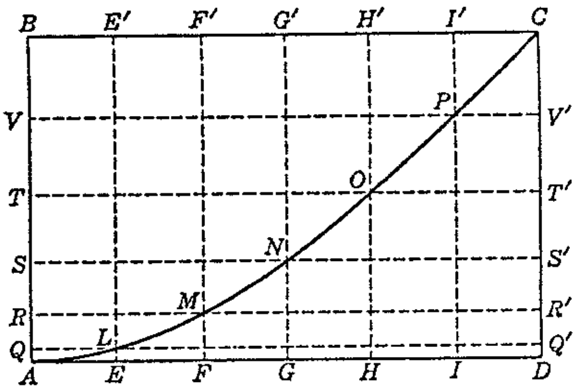
pour des valeurs entières positives de n. Il ne semble pas avoir donné de démonstration pour d'autres valeurs de n, comme l'on fait TORRICELLI et FERMAT.

Les arguments de ROBERVAL ressemblent aux "démonstrations par l'arithmétique de STEVIN, un demi-siècle plus tôt, et à celles, semblables, de WALLIS, quelques années plus tard. Toutes ces tentatives constituent des efforts pour dégager la notion de limite, mais ROBERVAL, dans son traité, occulte, d'une certaine manière, cette idée en ayant recours à sa notion d'indivisible.

Au lieu de tirer ses conclusions des limites des suites arithmétiques qui interviennent, il a recours, comme la plupart de ses contemporains, à l'intuition géométrique. Utilisant l'association pythgoricienne et nicomaquienne de nombres avec des points géométriques, il remarque que puisque le "côté n'a point de rapport au cube,...., si l'on ajoute ou l'on ôte un seul carré, cela n'opérera rien." Une intuition de ce type, conduit, dans le fait de négliger les infinitésimaux d'ordre supérieur, au calcul différentiel de LEIBNIZ, plus qu'à la méthode des limites suggérée par NEWTON et qui s'est finalement imposée.

ROBERVAL applique ensuite avec succès cette méthode quasi-arithmétique des indivisibles à divers problèmes de quadratures. Sa quadrature de la parabole est caractéristique (p. 256-59). La procédure qu'il emploie est tout à fait différente de chacune des vingt et une quadratures de la parabole données par TORRICELLI. La méthode de ROBERVAL ressemble plutôt à la démonstration de STEVIN par les nombres, renforcée par l'intuition des indivisibles.

Soit AE = 1, AF = 2, AG = 3,... (cf. fig.). Il résulte de la définition de la parabole que l'on a $\frac{EL}{FM} = \frac{AE^2}{AF^2}$, et de même pour les autres points de division.



Par suite,

$$\frac{\text{aire ADC}}{\text{aire ABCD}} = \frac{AE(EL + FM + GN + \ldots)}{AD.AC}$$
$$= \frac{(AE(AE^2 + AF^2 + AG^2 + \ldots)}{AD.AD^2}$$
$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + AD^2}{AD.AD2} = \frac{1}{3}$$

Par des méthodes semblables, ROBERVAL détermine les aires limitées par d'autres courbes comme les paraboles de degré supérieur, l'hyperbole, la cycloide et la courbe du sinus, aussi bien que des volumes divers et les centres de gravité correspondants. Il peut ainsi avoir anticipé TORRICELLI dans la découverte de solides infiniments longs. Il utilise aussi une ingénieuse transformation d'une figure en une autre, que l'on peut appeler la méthode des lignes robervalliennes, qui ressemble au ductus plani un planum de Grégoire de SAINT VINCENT. De telles transformations jouent un rôle important dans la géométrie du XVIIème siècle par manque d'une méthode facile d'appréhension des courbes dont les équations comportent des radicaux ; elles perdent leur popularité, et leur intérêt, avec le développement du calcul infinitésimal.

Dans son traité, ROBERVAL manifeste une remarquable souplesse dans son utilisation d'éléments infinitésimaux variés tels que des triangles, des parallélogrammes, des parallélipipèdes, cylindres et couronnes cylidriques concentriques. A travers toutes ces considérations, l'idée de limite est présente mais dissimulée par la terminologie de la méthode des indivisibles. L'occultation de la méthode des limites se traduit aussi par la manière dont ROBERVAL réconcilie les démonstrations par les indivisibles et celles des anciens géomètres. Il montre tout d'abord que la quantité inconnue est située entre des figures inscrites et circonscrites qui diffèrent "de moins de toute quantité connue proposée". Il montre ensuite que cette quantité présente avec la figure circonscrite un rapport inférieur, et avec la figure inscrite un rapport supérieur, au rapport proposé. Il conclut en appliquant le lemme général suivant : Si on a un vrai rapport R : S et deux quantités A et B telles que pour une petite (quantité) ajoutée à A, alors cette somme ait à B un rapport plus grand que R : S et pour une petite (quantité) soustraite de A, le résultat ait à B un rapport supérieur à R : S, alors je dis que A : B est comme R : S. Cette forme de raisonnement, qui ressemble étroitement aux propositions correspondantes de VALERIO (qui devaient lui être familières), est équivalente au fait que la limite d'un quotient de quantités variables est égal au quotient de leurs limites respectives.

On reconnait dans les énoncés de ROBERVAL sur les indivisibles de nombreuses anticipations du calcul intégral, dont certaines sont équivalentes à la détermination des intégrales définies de fonctions algébriques et trigonométriques. Il s'est aussi intéressé à des problèmes de calcul différentiel, car il a développé une méthode des tangentes si semblable à celle de TORRICELLI que l'on a pu parler de plagiat. Dans un traité Observations sur la composition des mouvements, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes , il considère toute courbe comme trajectoire d'un point mobile et prend pour axiome que la direction du mouvement est aussi celle de la tangente.

Interprétant le mouvement d'un point comme le résultat de deux mouvements composants, il trouve la tangente en composant les vitesses de ces mouvements. C'est ainsi qu'il détermine la tangente à la parabole, en utilisant le fait que, puisque cette courbe est le lieu des points équidistants du foyer et de la directrice, elle peut être considérée comme engendré par un point qui se meut suivant un mouvement uniforme de translation le long de la directrice et d'un mouvement radial uniforme par rapport au foyer. Par le parallélogramme des vitesses (ici équilatère), il en résulte donc que la vitesse résultante - et par suite la tangente à la parabole en tout point - est dans la direction de la bissectrice de l'angle du rayon focal au point et de la perpendiculaire abaissée du point à la directrice. Cette direction étant connue, on peut tracer la tangente. Les mouvements introduits ici sont différents de ceux utilisés par TORRICELLI pour la même courbe, mais l'idée sous-jacente de composition de mouvements est essentiellement la même. Cette méthode est évidemment sujette à la difficulté suivante : on ne peut en aucune manière découvrir les lois du mouvement avant de savoir déterminer la tangente. Il semble que ROBERVAL, d'après sa correspondance avec FERMAT en 1636, était en possession d'une autre méthode des tangentes, analytique cette fois, dont il dit qu'elle était liée au problème des quadratures. Ce résultat, qui aurait été important dans l'histoire du calcul infinitésimal est apparemment perdu.

Il est difficile de déterminer l'impact de l'oeuvre de ROBERVAL sur les mathématiciens de son époque, d'autant plus que son Traité des indivisibles n'a pas été publié avant 1693. Il est probable, pourtant, qu'il a eu une forte influence sur PASCAL le jeune dont le père, Etienne PASCAL, était un proche ami de ROBERVAL.

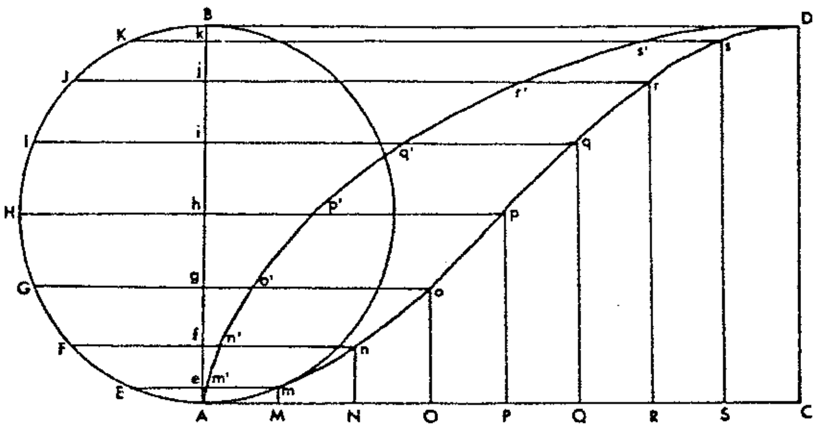
Traduction (libre) d'un extrait de l'ouvrage
Carl B. BOYER, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover Publications, NEW YORK (Première édition 1949).

<u>La quadrature de la cycloide par</u> ROBERVAL

(Traité des indivisibles , pp. 250-253)

Une lecture moderne :

Considérons le segment AC égal à la demi-circonférence $\overset{\frown}{AGB}$ du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que AM = $\overset{\frown}{AE}$. Soient m, n etc.. les points d'intersection des droites Ee, Ff etc.. avec les perpendiculaires menées de M, N etc .. à la droite AC ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval, la "compagne"* de la roulette. Les points m', n' etc des droites Em, Fn etc tels que Ee = m'm, Ff = n'n etc sont les points de la cycloïde ; en effet, lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de M à AC alors $\overset{\frown}{AE}$ = $\overset{\frown}{Mm'}$ etc. La compagne



partage le rectangle ABCD en deux surfaces égales car chacun des segments Mm, Nn etc a son égal dans l'autre moitié. D'autre part, l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle AGB car la somme des segments Ee, Ff etc. est égale à la somme des segments m'm, n'n etc. Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD plus la moitié du cercle générateur, c'est-à-dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur. L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symétrique par rapport au centre du rectangle ABCD.

(*) C'est une sinusoide .

Extrait de :

CLERO (Jean Pierre) - LE REST (Evelyne) - La naissance du calcul infinitésimal au XVII[e] siècle / Jean Pierre Clero - Evelyne Le Rest.-Paris : Centre National de la Recherche Scientifique, Centre de Documentation Sciences Humaines, 1981.-

INDEX HISTORIQUE

ARCHIMEDE. (287-212 Av. J.C)

Le plus grand mathématicien de l'Antiquité, né à Syracuse. Il a écrit des traités sur le volume et la surface des corps de révolution, sur la mesure du cercle, sur les spirales et sur la quadrature de la parabole. Par ailleurs, il a dégagé les lois fondamentales de l'hydrostatique et de la statique. Dans ses calculs d'aires et de volumes, il est un précuseur du calcul intégral.

CAVALIERI Bonaventura (vers 1598-1647)

Mathématicien jésuite italien, élève de GALILEE. Sa contribution majeure est sa méthode des indivisibles, qu'il a développée à partir de 1620. Son traité Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam pro ratione promota est paru à Bologne en 1635 ; une deuxième édition date de 1653. Ses Exercitationes geométricae (1647) donnent d'autres applications de sa méthode. On lui doit également une Trigonométria plana et sphaerica (1643)

FERMAT Pierre de (1601-1665)

Mathématicien français. Magistrat au parlement de Toulouse, il a entretenu une correspondance avec les plus grands savants de son époque. Sa méthode des maxima et des minima et ses techniques de quadrature jouent un rôle essentiel dans la préhistoire du calcul infinitésimal. Sa correspondance avec PASCAL pose les bases du calcul des probabilités et ses travaux en théorie des nombres introduisent des techniques radicalement nouvelles.

GALILEE Galileo. (1564-1642)

Astronome et physicien italien. Du point de vue qui nous intéresse ici, son ouvrage Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (Leyde 1638) introduit des considérations infinitésimales.

KEPLER Johannes (1571-1630)

Astronome allemand, qui a été l'assistant de TYCHO BRAHE avant de devenir mathématicien de l'empereur d'Autriche à Prague en 1601. De 1612 à 1626, il enseigne à Linz. Dans son Astronomia Nova (1609), il énonce les deux premières lois de Kepler sur le mouvement elliptique des planètes autour du soleil ; sa troisième loi est énoncée dans son Harmonice mundi (1619). Du point de vue qui nous intéresse ici, son traité Nova stereometria doliorum vinariorum (Linz 1615) est une étape fondamentale du calcul intégral. En mathématiques, on lui doit également un traité sur les logarithmes (Chilias Logarithmorum, 1624).

LEIBNIZ Gottfried Wilhem. (1646-1717)

Philosophe et mathématicien allemand. Il est le créateur avec NEWTON du calcul différentiel (Nova methodus pro maximis et minimis, 1684) et ses notations sont encore employées de nos jours.

MERSENNE Marin (1588-1648)

Religieux français de l'ordre des minimes. En plus de ses propres ouvrages, il est, dans la première partie du XVIIème siècle la plaque tournante de l'Europe savante et HUYGENS a pu dire de lui : "il a rempli d'aire du l'univers de ses correspondances". Ami intime de DESCARTES, défenseur résolu du mécanisme, il est le témoin et l'animateur de la révolution scientifique du XVIIème siècle.

NEWTON Isaac. (1642-1727)

Astronome, mathématicien et physicien anglais. Il a établi mathématiquement les lois de la mécanique céleste à partir du principe d'inertie de GALLILEE et de la loi de l'attraction universelle qu'il a découverte ; on lui doit une théorie corpusculaire de la lumière. Il est le créateur, indépendamment de LEIBNIZ et avec des notations très différentes, du calcul infinitésimal.

NICOMAQUE. (environ 100 Av. J.C)

Mathématicien et théoricien de la musique dont on sait fort peu de chose. Pythagoricien, il a assigné des nombres et des rapports numériques aux notes et aux intervalles, en reconnaissant l'indivisibilité de l'octave.

PASCAL Blaise. (1623-1663)

Philosophe, mathématicien et physicien français. Les travaux scientifiques de PASCAL portent sur la géométrie projective, la machine arithmétique, la statique des fluides et le problème du vide, le calcul des probabilités, et le calcul différentiel et intégral. C'est durant l'année 1658 et les premiers mois de 1659 que PASCAL a appliqué à l'étude de la cycloide des méthodes infinitésimales (Lettres de A. DETTONVILLE contenant quelques unes de ses inventions de géométrie, Paris).

PASCAL Etienne. (1588-1651)

Mathématicien et musicien de talent, il s'occupe personnellement de l'éducation de son fils Blaise. Ami de MERSENNE, qui lui dédia son traité des orgues (1636), et de ROBERVAL. Son nom est resté attaché au limaçon de PASCAL, qui est la conchoide d'un cercle par rapport à un de ses points.

RAMUS Peter (Pierre de la RAMEE). (1515-1572)

Humaniste et mathématicien français, d'obédience calviniste. Antiaristotélicien farouche, il prône la raison comme critère suprême de la Vérité et l'on peut considérer DESCARTES comme son disciple spirituel. Il renouvelle la logique et la pédagogie en exigeant des définitions simples et claires. Comme mathématicien, il a donné une traduction d'EUCLIDE ainsi que des ouvrages d'enseignement.

SAINT-VINCENT Grégoire de. (1584-1667)

Mathématicien et astronome belge. Il entre dans l'ordre des jésuites en 1607 à Rome, où il est l'élève de CLAVIUS. Il a enseigné à Louvain, à Gand et à Anvers. Son ouvrage principal est le monumental _Opus geometricorum quadraturée circuli et sectionum coni_, publié à Anvers en 1647, où il dégage le lien entre les logarithmes et la quadrature de l'hyperbole.

STEVIN Simon. (1548-1620)

Mathématicien et ingénieur belge. Il a été commissaire des travaux publics de l'armée sous le règne du prince MAURICE de NASSAU, dont il avait été le précepteur ; on lui doit la contruction d'un système d'écluses permettant de défendre la Hollande par inondation. Il a écrit un important traité de statique, où il introduit le parallélogramme des forces, et un traité systématique d'hydrostatique. En mathématiques, il vulgarisa l'usage des fractions décimales (_La Disme_, 1585)

TORRICELLI Evangelista. (1608-1647)

Mathématicien et physicien italien, élève de GALILEE auquel il succède comme professeur à l'Académie de Florence. Son nom est resté attaché à l'invention du baromètre à mercure. Ses _Opera geometrica_ (1644) comprennent des recherches sur les quadratures et les tangentes qui préfigurent le calcul infinitésimal.

VALERIO Luca (1552-1618)

Mathématicien italien, qui a été l'élève de CLAVIUS. Il a passé la majeure partie de sa vie à Rome, où il a enseigné la rhétorique, le grec et les mathématiques. Dans son ouvrage principal _De centro gravitatis_ (1604), il détermine des volumes et des centres de gravité de divers solides avec des méthodes archimédiennes. GALILEE a dit de lui qu'il était "Le plus grand géomètre, le nouvel Archimède de notre temps" (_Discorsi_, 1638).

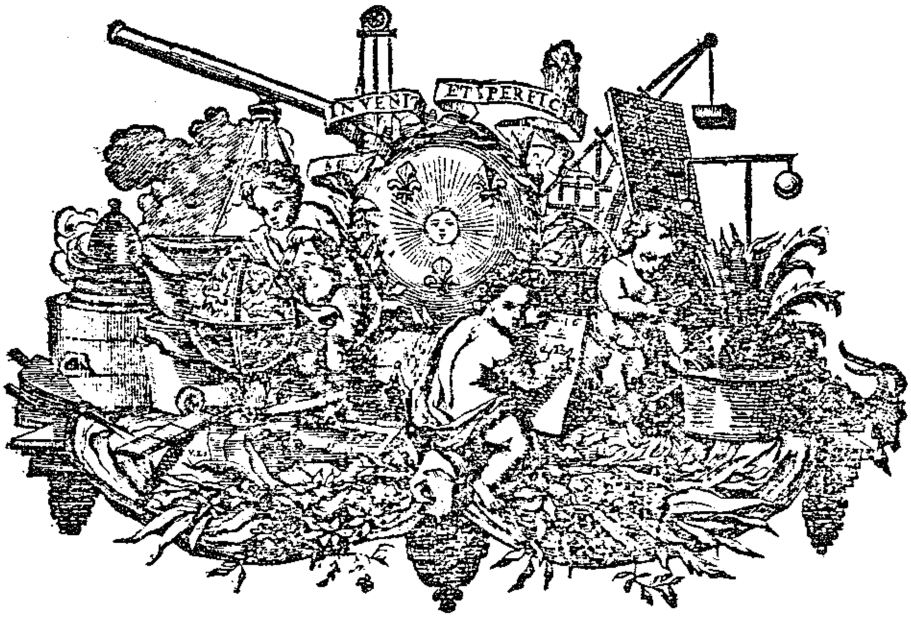
WALLIS John (1616-1703)

Mathématicien anglais, le maître de NEWTON ; il a enseigné à Oxford de 1649 à sa mort, soit plus de cinquante années. Son _Arithmetica infinitorum_ (1655) a joué un rôle crucial dans le développement de l'école mathématique anglaise. Citons aussi son _Treatise of algebra, both historical and practical_ (1685).

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Depuis 1666. jusqu'à 1699.

TOME VI.



A PARIS,
PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES.

M. DCCXXX.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

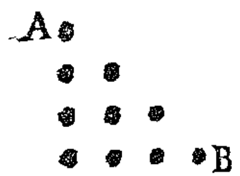
DIVERS OUVRAGES DE M. DE ROBERVAL.

TRAITE DES INDIVISIBLES.

POUR tirer des conclusions par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite ou courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou petites lignes toutes égales entr'elles, ou qui suivent entr'elles telle progression que l'on voudra, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, ou selon quelqu'autre puissance.

Or d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de lignes, on se servira de points; & puis au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose en ladite raison.

Quand toutes les petites lignes ont entr'elles pareille différence, comme est la suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. alors elles sont toutes ensemble à la plus grande d'icelles prise autant de fois qu'il y en a de petites, comme le triangle au quarré qui a pour côté la plus grande ligne, c'est-à-sçavoir, comme 1 à 2, comme on voit au triangle qui est icy, que la surface contient la moitié de l'espace que contiendroit le quarré qui auroit 4 de côté comme le triangle; & encore qu'il ne fallût pas 10 points pour achever le quarré, parce que le côté AB seroit commun à l'autre moitié du quarré, néanmoins dans les indivisibles cela n'est pas considérable, parce que le triangle n'excéde jamais la moitié du quarré que



de la moitié de son côté: or y ayant une infinité de côtez audit quarré pris dans les indivisibles, la moitié d'un d'iceux n'entre pas en considération; ainsi ce triangle-cy qui a 4 de côté n'excede la moitié du quarré collateral, (c'est-à-dire qui a pareil côté) que de 2 qui est $\frac{1}{4}$ de ladite moitié, ou la moitié du côté. Si le triangle avoit 5 de côté, il n'excederoit que de $\frac{1}{5}$ de la moitié du quarré collateral: s'il en a 6, il n'excedera que de $\frac{1}{6}$, & ainsi de suite; & puisqu'on voit que l'excès diminuë toûjours, il s'anéantira enfin dans la division indéfinie.

De même si les lignes suivoient entr'elles l'ordre des quarrez, la somme de toutes ces lignes ou des points qui les représentent, seroit à la derniére prise autant de fois, comme la somme des quarrez au cube, ou comme la pyramide à la colonne, sçavoir comme 1 à 3; car quoique prenant un nombre fini de quarrez leur somme soit plus grande que le tiers du cube collatéral au plus grand quarré, néanmoins dans la division infinie elle ne seroit que le tiers; car ladite somme ne passe jamais le $\frac{1}{3}$ du cube que de la moitié du plus grand quarré $+ \frac{1}{6}$ du côté. Or dans le cube il y a une infinité de quarrez, & partant la moitié d'un d'iceux n'est pas considérable, & encore moins $\frac{1}{6}$ de la ligne ou côté du même cube.

Ainsi le cube étant 64, pour avoir la somme des quarrez dont le plus grand soit collateral audit cube, on prendra le tiers d'icelui, sçavoir $21\frac{1}{3}$, auquel joignant la moitié du plus grand quarré, sçavoir 8, on aura $29\frac{1}{3}$, à quoi joignant encore $\frac{1}{6}$ de 4 qui est le côté, sçavoir $\frac{2}{3}$, on aura 30 pour la somme des quatre premiers quarrez. Et ainsi par les proprietez des puissances suivantes, on montrera que la somme des cubes est $\frac{1}{4}$ du quarré-quarré collateral au plus grand cube; que la somme des quarrez-quarrez est $\frac{1}{5}$ de la cinquiéme puissance; que la

somme

ſomme des cinquiémes puiſſances eſt $\frac{1}{6}$ de la ſixiéme puiſſance, & ainſi des autres. Mais il faut remarquer que les puiſſances ont ainſi rapport l'une à l'autre de proche en proche, & non point ſi on en omet une entre deux. Ainſi la ligne ou côté n'a point de rapport au cube, ni le quarré au quarré-quarré, ni le cube à la cinquiéme puiſſance, &c. car les lignes priſes à l'infini ne faiſant qu'un quarré, & y ayant une infinité de quarrez dans le cube, ſi l'on ajoûte ou ſi l'on ôte un ſeul quarré cela n'operera rien. La même choſe ſe montrera du quarré eû égard au quarré-quarré, & du cube eû égard à la cinquiéme puiſſance, &c.

La ſuperficie ſe diviſe auſſi en une infinité de petites ſuperficies, leſquelles ou ſont égales, ou ont une égale différence, ou gardent entr'elles quelqu'autre progreſſion, comme de quarré à quarré, de cube à cube, de quarré-quarré à quarré-quarré, &c. Et d'autant que les ſuperficies ſont enfermées dans les lignes, au lieu de comparer les ſuperficies, on comparera les lignes à une autre choſe, & la ſomme de toutes les petites ſurfaces ou des lignes qui les repréſentent, ſont à la grande ſurface priſe autant de fois comme 1 à 3, comme il a été dit.

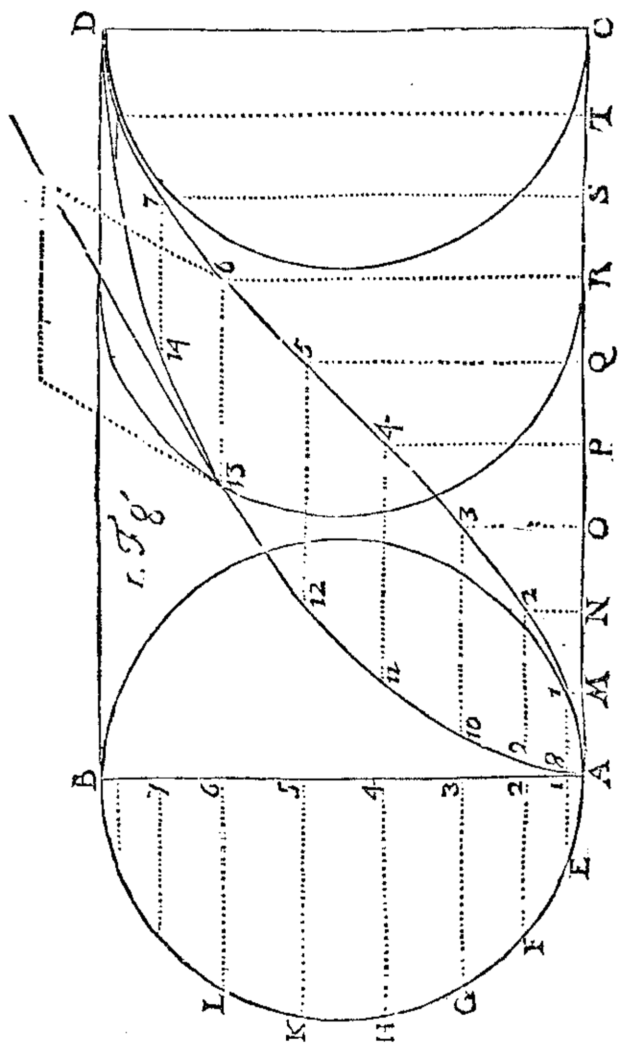
De même les ſolides ſe diviſent en une infinité de petits ſolides ou égaux, ou qui gardent quelque proportion, comme il a été dit des ſurfaces : & d'autant que les ſolides ſont terminez par des ſurfaces, au lieu de dire que ces petits ſolides ſont au grand ſolide pris autant de fois, je dis, l'infinité des ſurfaces ſont à la plus grande priſe autant de fois, comme le cube au quarré-quarré de ſon côté, ou comme 1 à 4.

Par tout ce diſcours on peut comprendre que la multitude infinie de points ſe prend pour une infinité de petites lignes, & compoſe la ligne entiére. L'infinité de

lignes repréſente l'infinité des petites ſuperficies qui compoſent la ſuperficie totale. L'infinité des ſuperficies repréſente l'infinité de petits ſolides qui compoſent enſemble le ſolide total.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS poſons que le diamétre AB du cercle AEFGB ſe meut parallelement à ſoy-même, comme s'il étoit emporté par quelqu'autre corps, juſques à ce qu'il ſoit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamétre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamétre, enſorte que quand le diamétre eſt en CD, le point A eſt venu en B, & la ligne AC ſe trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courſe du diamétre ſe diviſe en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle ſe diviſe auſſi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcouruës par le diamétre, comme il a été dit. En aprés je conſidére le chemin qu'a fait ledit point A porté par deux mouvemens, l'un diamétre en avant, l'autre du ſien propre dans la circonference. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il eſt venu en E il eſt élevé au-deſſus de ſon premier lieu duquel il eſt parti; cette hauteur ſe marque tirant du point E au diamétre AB un ſinus E1, & le ſinus Verſe A1 eſt la hauteur dudit A quand il eſt venu en E. De même quand il eſt venu en F, du point F ſur AB je tire le ſinus F2, & A2 ſera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le ſinus G3, le ſinus Verſe A3 ſera la hauteur de A quand il eſt parvenu en G; & faiſant ainſi de tous les lieux de la circonférence que parcourt A, je trouve toutes ses hauteurs & élevemens pardessus l'extrémité du diamétre A, qui sont A1, A2,



A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par où passe ledit point A, sçavoir la ligne qu'il forme pen-

dant ses deux mouvemens, je porte toutes ses hauteurs sur chacun des diamétres M, N, O, P, Q, R, S, T, & je trouve que M 1, N 2, O 3, P 4, Q 5, R 6, S 7 sont les mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends les mêmes sinus E 1, F 2, G 3, &c. & je les porte sur chaque hauteur trouvée sur chaque diamétre, & je les tire vers le cercle, & des extrémitez de ces sinus se forment deux lignes, dont l'une est A 8 9 10 11 12 13 14 D, & l'autre A 1 2 3 4 5 6 7 D. Je sçai comme s'est fait la ligne A 8 9 D; mais pour sçavoir quels mouvemens ont produit l'autre, je dis que pendant que AB a parcouru la ligne AC, le point A est monté par la ligne AB, & a marqué tous les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, le premier espace pendant que AB est venu en M, le second pendant que AB est venu en N, & ainsi toûjours également d'un espace à l'autre jusques à ce que le diamétre soit arrivé en CD; alors le point A est monté en B. Voilà comment s'est formée la ligne A 1 2 3 D. Or ces deux lignes enferment un espace, étant séparées l'une de l'autre par tous les sinus, & se rejoignant ensemble aux deux extrémitez AD. Or chaque partie contenuë entre ces deux lignes est égale à chaque partie de l'aire du cercle AEB contenuë dans la circonférence d'icelui; car les unes & les autres sont composées de lignes égales, sçavoir de la hauteur A 1, A 2, &c. & des sinus E 1, F 2, &c. qui sont les mêmes que ceux des diamétres M, N, O, &c. ainsi la figure A 4 D 12 est égale au demi-cercle AHB. Or la ligne A 1 2 3 D divise le parallelograme ABCD en deux également, parce que les lignes d'une moitié sont égales aux lignes de l'autre moitié, & la ligne AC à la ligne BD; & partant selon Archiméde, la moitié est égale au cercle, auquel ajoûtant le demi-cercle, sçavoir l'espace compris entre les deux lignes courbes, on aura un cercle & demi pour l'espace A 8 9 DC; &.

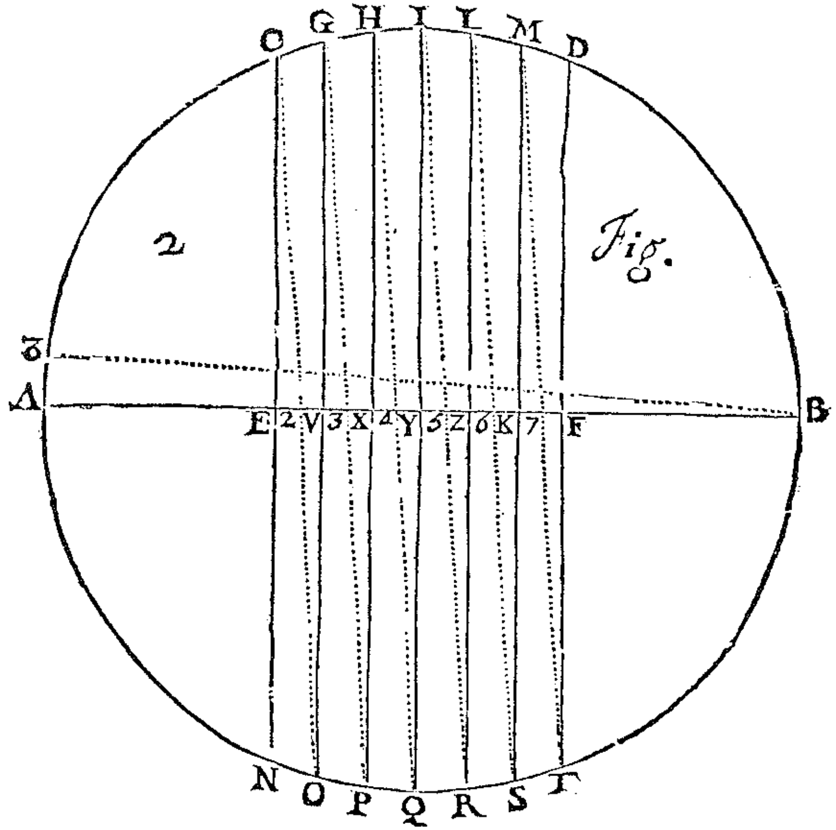
faisant de même pour l'autre moitié, toute la figure de la cycloïde vaudra trois fois le cercle.

Pour trouver la tangente de la figure en un point donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui passeroit par ledit point, car chaque point de cercle se meut selon la touchante de ce cercle. Je considére ensuite le mouvement que nous avons donné à notre point emporté par le diamétre marchant parallelement à soy-même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement, si je paracheve le parallelogramme (qui doit toûjours avoir les quatre côtez égaux lorsque le chemin du point A par la circonférence est égal au chemin du diamétre AB par la ligne AC) & si du même point je tire la diagonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux mouvemens pour sa composition, sçavoir le circulaire & le direct. Voilà comme on procéde en telles opérations quand on pose les mouvemens égaux. Que si on les avoit posez en quelqu'autre raison, comme si lorsque l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre parcouroit dans le même temps l'espace d'un pied & demi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquences suivant ladite raison.

PROPORTION
de la circonférence du cercle à son diamétre.

SOIT le cercle AIBQ, son diamétre AB, & soient tirez les sinus CE, GV, HX, IY, LZ, MK, DF. Que les arcs CG, GH, HI, IL, LM, MD soient égaux: je dis que la ligne EF est à la circonférence CD, comme tous les sinus ensemble, sçavoir CE, GV & tous les autres, sont à autant de sinus totaux ou demi-diamé-

tres. Je le montre ainsi. Je continuë CE jusques en N, GV jusques en O, & ainsi des autres. Je tire ensuite la diagonale de C en O qui coupe la ligne EV en passant. Je tire aussi toutes les autres diagonales, & partant je



fais des triangles semblables, ausquels triangles semblables les lignes DF & NE ne sont point employées, mais cela n'importe à cause de la division infinie dans laquelle nul fini ne porte préjudice. Je tire par-après la ligne B 8 faisant l'arc 8 A égal à CG; & du point 8 j'abaisse la perpendiculaire 8 A pour avoir un triangle semblable aux triangles C 2, E, G 3 V, & aux autres suivans. Nous feignons que la circonférence CD est divisée par infinis sinus, & que la ligne à 8 A étant si proche de la circonférence 8 A, devient elle-même circonférence & égale à 8 A, ou à CG, & à chacune des autres qui ont été divisées en infini. De plus, nous disons que la ligne B 8 peut être tant approchée par une division infinie de la ligne AB diamétre, qu'elle devient elle-même diamétre.

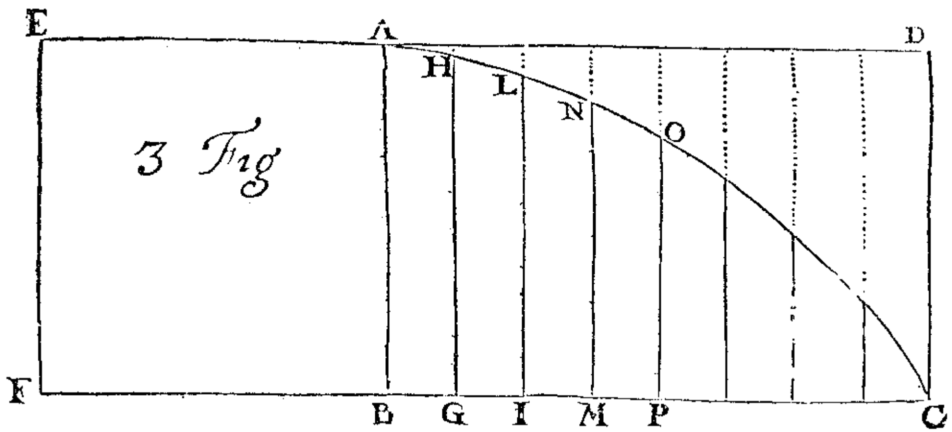
Puis on dira : Comme CE est à E 2, ainsi OV est à V 2, & ainsi de tous les triangles qui suivent la même régle. En après, le triangle CE 2 est semblable au triangle GV 3, parce qu'ils ont les angles C & G égaux, soûtenant circonférences égales NO, OP, car toutes sont égales depuis N jusques en T, & partant comme tous les doubles sinus CN & autres sont à la ligne EF, ainsi CE à E 2 : or comme CE à E 2, ainsi B 8, qui est devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence, qui sera égal à CG & aux autres. Ainsi, comme tous les sinus à la ligne EF, ainsi le diamétre B 8 devenu diamétre, à 8 A devenu circonférence; & au lieu de dire 8 A, je dis CG; & coupant les antécedens en deux, je dis, comme les sinus d'enhaut à la ligne EF, ainsi le demi-diamétre ou sinus total à CG; & multipliant CG autant de fois que la ligne CD contient de divisions, tous les sinus d'enhaut seront à EF, comme autant de demi-diamétres ou sinus totaux qu'il y a de parties égales à CG depuis C jusques en D, sont à la circonférence CD : & changeant, comme tous les sinus d'enhaut sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres, ainsi la ligne EF est à la circonférence CD.

Que si la ligne EF avoit été le demi-diamétre, & que

les sinus eussent été abaissez du quart de la circonférence, le demi-diamétre eût été au quart de la circonférence comme tous les sinus divisans la circonférence sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres.

FIGURE COURBE
égale au Quarré.

SUPPOSANT que le demi-diamétre du cercle est quart de cercle comme tous les petits sinus infinis à tous les sinus totaux, c'est-à-dire, autant de petits sinus à autant de sinus totaux : je trouve que le quarré du demi-diamétre est égal à la figure qui est faite par tous les sinus posez à angles droits sur la circonférence; car en la figure ABC, les lignes GH, IL, MN, PO, qui sont les



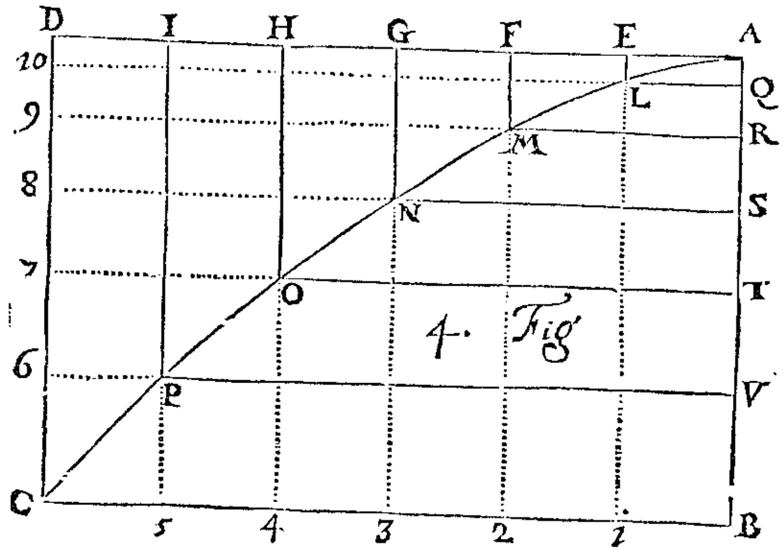
sinus de toute la circonférence BC, font par l'extrémité de leur sommet la ligne AC; & continuant de faire & prolonger lesdits sinus ensorte qu'ils soient égaux au sinus total ou demi-diamétre, ils forment la figure ABCD. Je fais aussi sur AB son quarré ABEF.

Puis je dis : Comme le demi-diamétre AB est à la circonférence BC, c'est-à-dire au quart de la circonférence, ainsi tous les sinus sont à autant de sinus totaux ou demi-diamétres ; & par les infinis, comme la figure ABC sera à la figure ABCD composée des infinis sinus totaux & du quart de la circonférence BC ; donc, comme le demi-diamétre est à la circonference, ainsi la figure ABC est à la figure ABCD. Mais comme la ligne AB est à la ligne BC, ainsi le quarré d'icelle est au rectangle fait de AB & BC ; donc la figure ABC est à la grande ABCD comme le quarré ABEF est au rectangle ABCD ; ainsi le quarré de AB a même raison au rectangle AC que la figure ABC ; & partant le quarré de AB qui est ABFE est égale à la figure ABC, ce qu'on vouloit prouver.

DE LA PARABOLE.

SOIT la Parabole BALMNOPC, le sommet A, le diamétre AB, la ligne touchante AD, laquelle soit divisée en infinies parties égales AE, EF, FG, GH, HI, ID, & de tous les points soient tirées les lignes paralleles au diamétre AB jusques à la ligne CB, sçavoir E 1, F 2, G 3, &c. & des points où lesdites lignes coupent la Parabole, soient tirées les ordonnées LQ, MR, NS, OT, PV. Mais les lignes AQ, AR sont entr'elles comme le quarré de la ligne LQ au quarré de la ligne MR ; & la ligne AR est à AS comme le quarré de MR au quarré de NS, & ainsi de toutes les autres lignes. Or la ligne AD étant divisée en parties égales, & les parties d'icelles étant égales aux lignes ordonnées, sçavoir AE à QL, AF à RM, AG à SN, AH à TO, & AI à VP, il s'ensuit que chaque quarré d'icelles lignes surpassera le précedent selon la progression des nombres impairs, que les quarrez seront faits des côtez differens

toûjours de l'unité, & que le côté du premier étant 1, les autres côtez seront 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les portions du diamétre comprises & coupées par les ordonnées sont les mêmes que EL, FM, GN, HO, IP, DC ; & par ainsi ces lignes sont entr'elles comme les quarrez 1, 4, 9, 16, 25, 36 sont entr'eux. Je dis donc que toutes ces lignes prises ensemble seront à la ligne DC prise autant de fois qu'icelles lignes, comme la somme des quarrez (suivant l'ordre que j'ai dit, c'est-à-dire, à commen-



cer à l'unité, & suivre toûjours en augmentant de l'unité) est au quarré DC pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne AD, c'est-à-dire, en la présente division, six fois. Or multiplier un quarré autant de fois que vaut son côté, c'est-à-dire, par son côté, c'est faire un cube : il est donc vrai que la somme de toutes ces lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC est à la ligne DC prise autant de fois qu'il y a desdites lignes, comme la somme des quarrez susdits est au cube du plus grand nombre. Mais le cube est le triple de la somme des quarrez, partant le triligne CPONMLAD sera le tiers du rectangle CDAB, & par ainsi la Parabole ABCPONMLA sera les deux tiers du parallelogramme ou quarré CDAB ; ce qui a été démontré par Archiméde d'une autre maniere.

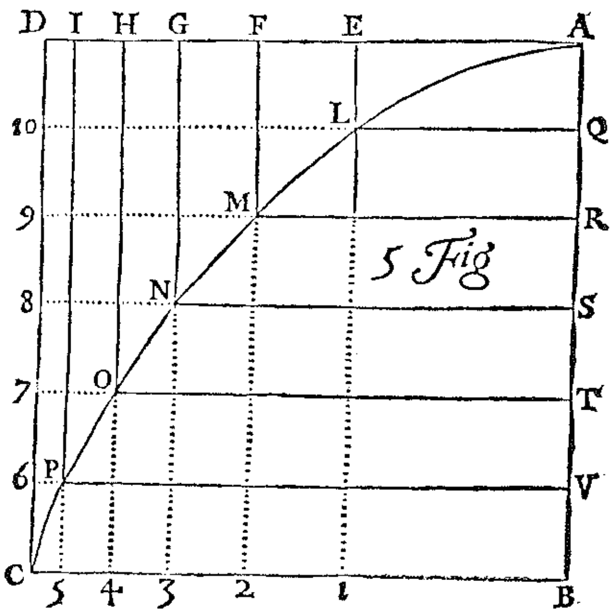
Que si nous voulons considerer une autre nature de Parabole comme M. Fermat, faisant que les portions du diamétre soient l'une à l'autre comme le cube au cube, il se trouvera que la même Parabole que dessus, ou plûtôt le dehors d'icelle COAD, sera au rectangle ABCD comme la somme des cubes à un quarré-quarré, c'est-à-dire, comme 1 à 4. Si nous feignons que les portions du diamétre, c'est-à-dire, les petites lignes EL, FM, GN, HO, IP, DC sont l'une à l'autre comme les quarré-quarrez entr'eux, il se trouvera que la somme de toutes ces lignes seront à la ligne CD prise autant de fois, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube, c'est-à-dire, comme 1 à 5, & par ainsi la Parabole vaudra 4 & le rectangle 5 ; & de cette sorte on pourra continuer & trouver des Paraboles qui changent de valeur, & cela se peut faire de toutes les puissances jusques où on voudra.

Quant au solide de notre Parabole, il se fait en feignant que tout le rectangle tourne sur son axe, & qu'il se fait un grand cylindre par la révolution de ABCD. La révolution de la premiére partie EAB1 se peut nommer cylindre, mais celle de chacune des autres se nomme Rouleau, parce que nous les devons considérer chacune à part, & ceci est pour les grands cylindres ; mais en considérant les petits, comme la révolution que fait FAQL, FARM, & tous les autres, nous rejettons ce qui est au dedans de la Parabole, & ne considérons que ce

qui est dehors ; car toutes les parties de ces petits cylindres ou rouleaux qui sont dans la Parabole ne peuvent faire une partie aussi grande que fait le rouleau DI5C ; & par ainsi nous rejettons toutes ces parties qui n'en valent pas une, qui n'est de nulle considération dans les indivisibles.

Et par les petites lignes, c'est-à-dire par les portions du diamétre, nous considérons l'espace qui est hors la Parabole, & compris dans ces lignes. Tous ces cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme leurs cercles ; mais les cercles sont entr'eux comme le quarré du demi-diamétre de l'un au quarré du demi-diamétre de l'autre : comme en notre figure le quarré de la ligne AE est au quarré de AF comme le premier quarré au second quarré, & le quarré de AF est à celui de AG comme le second quarré au troisiéme, &c. Mais un quarré surpasse son prochain de deux fois son côté, sçavoir le côté du moindre quarré, plus l'unité : il arrive donc que toutes les lignes, sçavoir AE, EF, FG, GH, HI, ID sont toutes differentes des quarrez, c'est-à-dire, chacune prise deux fois plus l'unité ; or toutes ces unitez ne se considerent point dans les indivisibles comme chose finie. Nous prenons donc toutes ces lignes comme deux fois un côté chacune, puis après nous disons que les petites lignes EL, FM, GN, & les autres sont entr'elles comme des quarrez ; nous les considerons comme des quarrez, & disons que l'espace ELQ vaut deux côtez d'un quarré par son quarré EL, & le quarré de FM par le double de son côté FA fait l'espace FMR, & pareillement le quarré de GN par deux GA fait l'espace GNS, &c. Or un quarré par deux fois son côté vaut deux fois le cube ; donc toutes ces petites lignes ensemble, ou l'espace qu'elles contiennent hors la parabole sont comme deux fois la somme des cubes au quarré de CD pris autant de fois qu'il y a de divisions en la ligne DA, c'est-à-dire, au quarré de CD par le quarré du même CD, c'est-à-dire, au quarré-quarré.

Il faut maintenant considerer ABCD, ou la Parabole CPOMAB se tournant sur son axe comme la précedente, mais avec cette difference, que la ligne AB est divisée en parties égales entr'elles. Nous considerons le solide ou cylindre que fait DC qui a pour base le cercle duquel le demi-diamétre est la ligne DA, les petits cy-



5 Fig

lindres ont pour demi-diamétre de leurs cercles les lignes EA ou LQ son égale, MR, NS, OT, PV, &c. or tous ces petits cylindres sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, leurs cercles, & les cercles sont entre eux comme les quarrez de leurs demi-diamétres : or les

quarrez de ces petites lignes sont entr'eux comme les lignes AQ, QR, RS, ST, TV, sçavoir en égale difference de l'unité, c'est-à-dire, que les quarrez de toutes ces lignes sont entr'eux comme l'ordre des nombres naturels. Ainsi le quarré de LQ étant 1, celui de MR vaudra 2, celui de NS 3, celui de OT vaudra 4, & celui de RV vaudra 5. Or les cylindres étant entr'eux comme les quarrez des demi-diamétres de leurs bases ou cercles, il s'ensuit que tous les quarrez de ces petites lignes sont au quarré de la grande BC pris autant de fois, comme la somme de la suite des nombres naturels, à commencer à l'unité, sont au quarré du dernier.

Mais le conoïde parabolique, c'est-à-dire, le solide fait par la révolution de CNLAB, est au cylindre total, sçavoir à celui qui est fait par la révolution de ABCD, comme toutes les petites lignes à la grande prise autant de fois; partant le conoïde parabolique est au cylindre, comme la somme des nombres, c'est-à-dire le triangle, est au quarré, ou bien comme la moitié à son tout; car la somme des nombres est au quarré (en terme d'indivisible) comme la moitié au tout; comme si la somme est 10 triangle de 4, le quarré est 16, dont la moité 8 est excedée de 2 par ledit triangle. Or cela passe pour être la moitié de l'autre; car si on continuoit dans la suite des nombres on verroit que le triangle excederoit toûjours la moitié du quarré d'une moindre portion, laquelle partant s'anéantiroit enfin dans l'infini.

Maintenant il faut considerer la figure ABCD comme faisant son tour sur AD, lors la ligne CD sera le demi-diamétre de la base ou cercle du cylindre total : les lignes PI, OH, NG, MF, LE sont les demi-diamétres du cercle ou base de chacun de leurs cylindres. Or par la proprieté de la Parabole, la ligne EL est à FM comme le quarré au quarré, & ainsi toutes les autres petites lignes de suite ; partant le quarré de EL sera au quarré de FM comme un quarré-quarré à un quarré-quarré, & ainsi toutes les autres petites ; donc toutes ensemble elles seront entr'elles comme le quarré-quarré de DC pris autant de fois qu'il y a de petites lignes, c'est-à-dire, comme la somme des quarré-quarrez au quarré-cube ; & telle est la raison du solide fait par la révolution de CDA au cylindre total fait par la révolution de CB, c'est-à-dire, qu'ils sont entr'eux comme 1 à 5.

Maintenant nous considerons que la figure tourne sur la ligne CD parallele à l'axe. Par cette révolution la ligne AD est le demi-diamétre de la base ou cercle du grand cylindre ; les lignes 10 L, 9 M, 8 N, 7 O, 6 P sont chacune le demi-diamétre du cercle ou base de leur cylindre qui sont l'une à l'autre comme leursdites bases ou cercles, & les cercles sont entr'eux comme les quarrez desdites lignes : donc tous les quarrez de ces petites lignes seront au quarré de la grande ligne prise autant de fois, comme les petits cylindres au grand cylindre. Mais je ne connois pas la raison des petits quarrez aux grands quarrez, laquelle je cherche par une grandeur qui leur soit égale, & je dis que le quarré de L 10 vaut le quarré de Q 10 & le quarré de QL moins le rectangle de Q 10 QL pris deux fois ; le quarré de M 9 vaut le quarré de R 9, & celui de MR moins le rectangle de 9 RM pris deux fois, & ainsi des autres jusques à l'infini. Or faisant la comparaison, nous disons que les quarrez de Q 10 & QL comparez au seul quarré Q 10 font égalité de raison entre les deux grands qui sont égaux : le même soit entendu de tous les autres quarrez. Les grands étant égaux, il ne reste qu'à connoître la valeur des petits LQ, MR, &c. Mais nous avons vû ci-devant qu'ils sont au grand quarré comme la moitié au tout : si donc nous joignons un tout avec sa moitié, & le comparons

à un autre tout, nous ferons une raison de 3 à 2. Posons que le grand quarré vaille 2, l'autre qui est composé du grand & de sa moitié vaudra 3 ; partant la raison sera de ce dernier au premier de $\frac{3}{2}$ ou de 3 à 2 ; & poursuivant, on ôtera ce qui étoit de trop dans les deux quarrez mis ci-dessus pour trouver la valeur du quarré L 10, & nous avons dit que deux fois le rectangle Q 10 QL étoit de trop pardessus le quarré L 10, & ainsi des autres ; il faut donc ôter les rectangles deux fois à chaque quarré. Or tous ces rectangles ont pour même hauteur Q 10, donc ils seront entr'eux comme leurs bases ou petites lignes, & les solides entr'eux comme leurs bases. Mais nous avons vû que ce solide fait par le tour de la parabole étoit le tiers du cylindre total : or il faut ôter deux fois le rectangle, partant il faudra diminuer de deux tiers la raison que nous avons trouvée de 3 à 2, & mettant 9 à 6 au lieu de 3 à 2 & de $\frac{9}{6}$ on en ôtera $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$, & restera $\frac{5}{6}$ pour la valeur de CAB tourné sur DC, & le reste au cylindre entier, sçavoir CAD, vaudra $\frac{1}{6}$ du grand cylindre ABCD.

DE LA CONCHOÏDE.

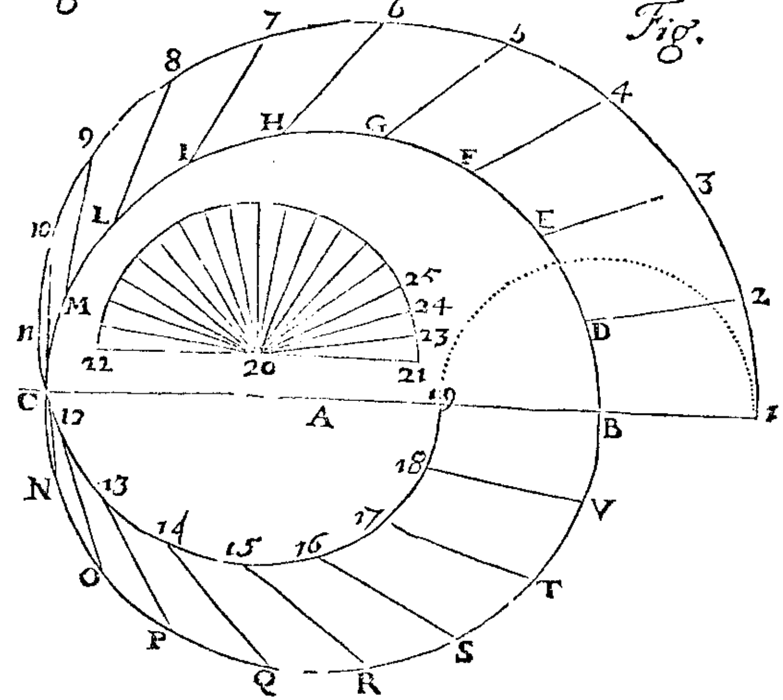
LA Conchoïde se fait, quand d'un point on tire plusieurs lignes qui coupent une même ligne soit courbe ou droite, & que toutes les lignes tirées depuis ladite ligne sont toutes égales, telles que sont B 1, D 2, E 3, F 4, G 5, &c. tirées par le moyen du cercle CGBR, divisé (selon la regle des indivisibles) en parties infinies égales, & par icelui a été composée la Conchoïde 19 C 1, en laquelle, comme en toutes les autres, les lignes depuis la circonférence du cercle jusques à ladite Conchoïde sont toutes égales. Or toutes ces lignes qui divisent la circonference du cercle commençant au point C & finissant

finissant en 1, 2, 3, 4, 5, &c. divise tant la Conchoïde que le cercle en triangles semblables, lesquels par la force des indivisibles se convertissent & deviennent secteurs, & sont l'un à l'autre comme quarré à quarré (quoique dans le fini il y ait quelque chose à dire;) ainsi le secteur C 1 2 est au secteur CBD ou CBV son égal, comme le quarré de C 1 au quarré de CB. En après, le secteur CBD ou CBV son égal est au secteur C 19 18 comme le quarré de CB au quarré de C 19. Mais pour joindre les deux quarrez qui appartiennent à la Conchoïde afin de les comparer aux quarrez du cercle, je regarde la valeur du quarré de C 1 qui vaut les quarrez de CB, B 1, plus le rectangle deux fois sous CB B 1; le quarré C 19 est égal aux quarrez de CB, B 19 ou B 1 son égal (car B 19 commence à la circonference du cercle, & va au point de la Conchoïde 19, & partant doit être égale à B 1 qui part de la même circonference, & va au point 1 de la Conchoïde) moins deux fois le rectangle CB B 19. Or le plus détruisant le moins, ces deux grandeurs jointes ensemble font le quarré CB deux fois, plus le quarré de B 1 deux fois; par ainsi le secteur C 1 2, & le secteur C 19 18 seront aux secteurs CBD, CBV, comme deux fois les quarrez CB, B 1 à deux fois le quarré CB, & prenant la moitié, le quarré CB + le quarré B 1 sera au quarré CB comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV; & tout l'espace de la Conchoïde est à l'espace du cercle comme les quarrez CB, B 1 au quarré CB, ou bien comme les secteurs C 1 2, C 19 18 aux secteurs CBD, CBV.

Je fais un demi cercle de l'intervale B 1, & je le divise en autant de triangles semblables qu'il y en a au cercle premier; & au lieu de compter le quarré B 1, je dis le quarré 20 21; donc comme le quarré CB + le quarré 20 21 sont au quarré CB; ainsi l'espace du cer-

cle & demi-cercle ensemble sont à l'espace du cercle. Mais nous avons montré que toute la Conchoïde est au cercle comme le quarré CB + le quarré B 1 ou leurs

6 *Fig.*

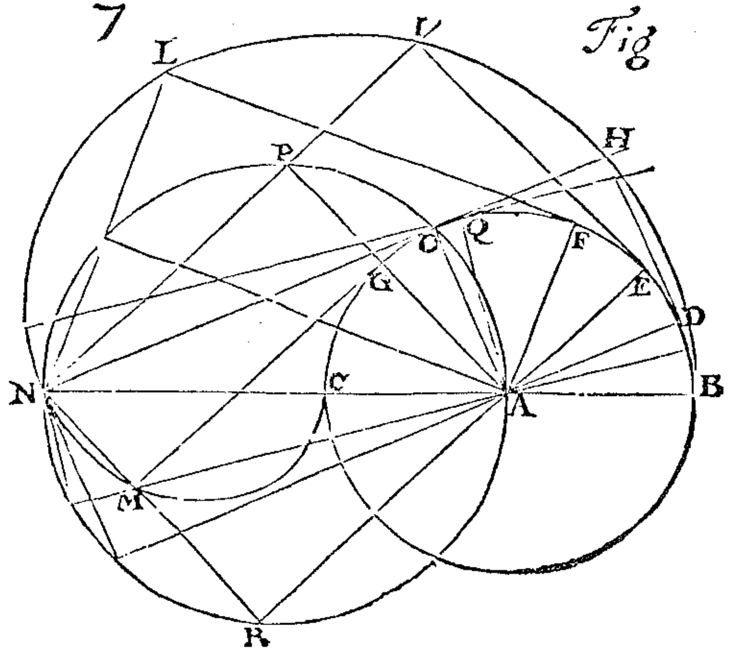


secteurs, est au quarré CB; par ainsi, toute la Conchoïde est au cercle en même raison que le cercle & demi-cercle est au même cercle; & partant la Conchoïde est égale au cercle & demi-cercle pris ensemble.

Conchoïde.

SOIT la base d'un cône oblique le cercle BFC duquel le centre est A; le sommet du cône est en l'air, avec telle obliquité, que de ce sommet la perpendiculaire tombe ſur le point N. Nous ſuppoſons par les indiviſibles, que par tous les points du cercle ſoient tirées des touchantes, comme DH, EI, FL, GM, &c. Nous diſons que ſi du ſommet du cône on tire une perpendiculaire ſur chacune de ces touchantes, & que ſi du point N ſur lequel tombe la perpendiculaire tirée du ſommet, on tire une ligne à ce même point de la tou-

7 Fig



chante, l'angle ſera droit, & ladite ligne perpendiculaire à ladite touchante; & la ligne qui paſſe par l'extrémité de chacune deſdites touchantes & où ſe fait ledit angle droit, ſçavoir la ligne BHILNMC, ſe trouve être une Conchoïde.

Pour le prouver, il faut conſtruire un cercle qui ait

pour diametre NA, lequel cercle ſoit NPOAR, & faire voir que toutes les lignes compriſes entre ſa circonférence APNR & la ligne BHILNMC, ſont toutes égales entr'elles; nous prouvons que AOHD eſt un parallelogramme; car l'angle D eſt droit, puiſque DH eſt touchante & AD demi-diametre; l'angle H eſt auſſi droit pour avoir été tiré tel du point N ſur lequel tomboit la perpendiculaire tirée du ſommet du cône; l'angle O eſt droit pour être fait dans le demi-cercle NPOA, & partant le quatriéme OAD le ſera auſſi; & partant c'eſt un parallelogramme, & les côtez oppoſez ſont égaux; & par ainſi AD ſera égale à OH compriſe entre l'autre cercle & la ligne courbe, & AD eſt égale à AB pour être toutes deux le rayon d'un même cercle. Paſſons outre, & conſiderons PI EA. L'angle E eſt droit, étant fait par la touchante; l'angle I eſt droit, ayant été fait tel par la ligne NI; l'angle P eſt droit, comme étant fait dans le demi-cercle, & partant le quatriéme l'eſt auſſi, & les côtez oppoſez du parallelogramme, ſçavoir PI & AE ou ſon égale OH, ſont égaux; & partant AB, OH, PI ſont égales, & ce ſont les lignes compriſes entre les deux circonferences, ſçavoir entre le cercle NPAR, & la ligne courbe BHILNMC, & on prouvera le même de toutes les autres lignes; & partant cette ligne courbe eſt une Conchoïde.

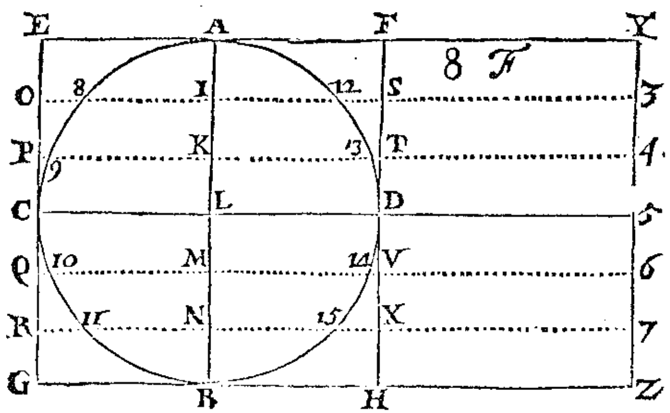
DES ANNEAUX.

SI on décrit alentour d'une figure un parallelogramme (nous avons pris un cercle en cet exemple) & qu'on faſſe tourner le tout ſur un des côtez du parallelogramme, le ſolide fait par ce parallelogramme eſt au ſolide fait par la figure, comme le plan du parallelogramme eſt au plan de la figure.

Nous expliquerons ceci par un cercle autour duquel est écrit le parallelogramme EFHG : au milieu du cercle on a tiré la ligne AB parallele au côté FH du parallelogramme ; la nature de cette ligne doit être telle, que toutes les lignes tirées dans le cercle soient coupées en deux également par cette ligne. Supposant donc que le tout a tourné sur la ligne FH, dans ce tour le parallelogramme a fait pour solide un cylindre, & le cercle a fait pour solide un Anneau bouché qu'on nomme *Annulus strictus*, c'est-à-dire, qu'il se diminuë peu à peu ensorte que rien n'y peut entrer. Or ces deux solides sont égaux entr'eux, excepté les vuides, qui étant remplis au grand solide sont de plus en icelui qu'au petit ; il faut donc tirer lesdits vuide du grand pour sçavoir ce qu'il reste pour le petit, & tout se mesure par les quarrez des lignes qui sont dans la figure. Je commence donc par la moitié du parallelogramme, & je considére que cette moitié fait un cylindre dans sa révolution, & que le demi-cercle fait une figure differente de ce cylindre, de ces petits espaces qu'il faut ôter du cylindre. Considérant les quarrez du cylindre, je dis que le quarré de IS est égal aux quarrez de S 12 & I 12 plus deux fois le rectangle de S 12 I 12 ; le quarré TK est égal aux deux quarrez T 13, K 13 plus deux fois le rectangle K 13 T ; le même se doit entendre des autres quarrez appartenant au cylindre AFHB. Mais si nous ôtons chaque quarré qui compose le vuide, & qui sont hors le cercle de chacun des quarrez du solide, il nous restera tout le dedans du cercle, c'est-à-dire, du petit solide. Si donc du quarré SI on ôte le quarré S 12, il restera le quarré I 12 plus deux fois le rectangle S 12 I : ceci est tiré du premier quarré du cylindre. Quand je tire du second quarré du cylindre le quarré T 13, il me reste le quarré K 13 plus deux fois le rectangle

K 13 T, & ainsi des autres. Puis donc que j'ai de reste le quarré 12 I plus deux fois le rectangle, S 12 I je joins le quarré avec une fois le rectangle, & par-là j'ai le rectangle SI 12, & le rectangle S 12 I. Je retiens ces restes ; & passant à l'autre moitié du cercle pour la joindre avec lesdits restes, je considere ce qu'elle fait quand le tout tourne sur la même ligne qu'auparavant, & ce que font les grands quarrez S 8, T 9 & les autres. Je regarde combien ils surpassent les petits quarrez I 8, K 9, & les autres qui sont dans le demi-cercle, & je dis ainsi : Le quarré S 8 est égal aux deux quarrez SI, I 8 plus deux fois le rectangle S I 8 ; le quarré T 9 est égal aux quarrez TK, K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres. Or il faut ôter de tous ces quarrez les quarrez du cylindre, sçavoir de SI, TK, & autres, & nous aurons de reste le quarré de I 8 plus deux fois le rectangle S I 8, le quarré de K 9 plus deux fois le rectangle TK 9, & ainsi des autres, & ceci se doit joindre à l'autre espace du demi-cercle.

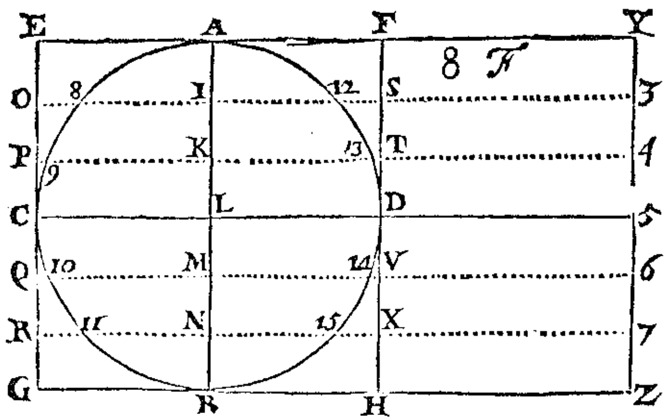
Pour faire cette jonction, je prens le quarré de 8 I que je joins au rectangle S 12 I que j'avois de reste à l'autre demi-cercle, & je fais le rectangle SI 12 que j'avois déja une fois, & partant je l'ai deux fois. Au second demi-cercle, les quarrez 8 I, 9 K étant ôtez il m'est resté deux fois le rectangle S I 8 qui est le même que le précedent, & par ainsi j'aurai quatre fois le rectangle S I 8 ; donc quatre fois ce rectangle sera au quarré de SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total ; & au lieu de dire quatre fois le rectangle, je double les lignes ou côtez du rectangle, & je dis que le rectangle tout seul SO par 8 12 est au quarré SO, comme le solide de l'anneau est au cylindre total. Mais tous ces rectangles pris à l'infini sont tous d'égale hauteur entr'eux & avec le parallelogramme total ; ils seront donc entre-eux comme leurs bases ou lignes, c'est-à-dire, comme l'espace de ces lignes comprises dans le cercle est à l'espace des grandes lignes qui composent le parallelogramme : donc comme le solide au cylindre, ainsi le plan du solide est au parallelogramme; ce qu'il falloit prouver.



Nous trouverons la même chose en faisant tourner toute la figure sur la ligne YZ. Il faut premierement examiner ce que fait ABZY par sa révolution, & ce qu'il differe d'avec ABHF. Le quarré ZB vaut les quarrez de ZH & HB plus deux fois le rectangle ZHB; le quarré 7N est égal aux quarrez 7X, XN plus deux fois le rectangle 7XN, & ainsi de chacun des autres grands quarrez. Il en faut ôter tous les quarrez qui composent l'espace HY, sçavoir le quarré FY, S3, T4, & les autres, lesquels étant ôtez, resteront le quarré SI plus deux fois le rectangle 3SI, & le quarré de TK plus deux fois le rectangle 4TK; prenant le quarré SI, & le joignant à l'un des rectangles, je ferai le rectangle 3IS, & le rectangle 3SI; puis à 4T, si on joint le quarré de KT à l'un des rectangles, on fera le rectangle 4KT, & le rectangle 4TK. Il faut retenir tout ceci, & passer

à la consideration du solide qui se fait par la revolution de AB GE tournant sur même YZ. Nous disons que le quarré de 3O est égal aux deux quarrez de 3I & IO plus deux fois le rectangle 3IO; que le quarré 4P vaut les quarrez de 4K; KP plus deux fois le rectangle 4KP, & ainsi des autres. De la valeur de ces quarrez il en faut ôter tous les quarrez qui remplissent l'espace ABZY, sçavoir les quarrez 3I, 4K, 5L, & les autres; & partant il reste le quarré OI plus deux fois le rectangle 3IO; & ajoûtant au rectangle 3SI qui étoit resté au calcul de l'autre cylindre le quarré OI, je ferai le rectangle 3IO; & par ainsi dans le précedent cylindre j'aurai deux fois le rectangle 3IS; & dans ce dernier, le quarré OI étant ôté, il reste deux fois le rectangle 3IO qui est le même que 3IS; partant le tout ensemble sera quatre fois le rectangle 3IO; partant le quadruple du rectangle 3IO sera au quarré de EY, comme le cylindre, ou plûtôt le rouleau GEFH est au cylindre total EGZY.

Il faut maintenant considerer ce que fait le cercle par sa révolution, tournant sur la même ligne YZ, & le comparant au cylindre total; ce qui se doit faire en considérant une portion, sçavoir la moitié de la figure A 12 B 9 A. Nous prendrons donc premierement la moitié A 12 15 B, & dirons : Le quarré de 3I vaut les quarrez 3 12, & 12 I plus deux fois le rectangle 3 12 I; le quarré de 4K vaut les quarrez 4 13, & 13 K plus deux fois le rectangle 4 13 K, & ainsi des autres. De cette équation il faut ôter les quarrez 3 12, 4 13, & tous les autres qui sont hors le cercle. Au rectangle 3 12 I j'ajoûte le quarré I 12, & je fais le rectangle 3 I 12, & le rectangle 3 12 I. J'ajoûte pareillement le quarré K 13 au rectangle 4 13 K, & je fais le rectangle 4 K 13, & le rectangle 4 13 K; ce qu'il faut retenir afin de l'ajoûter à à l'autre moitié que je cherche maintenant, & je dis que le quarré de 3 8 vaut les quarrez de 3 I & I 8 plus deux fois le rectangle 3 I 8; le quarré 4 9 vaut les quarrez 4 K & K 9 plus deux fois le rectangle 4 K 9. Or il faut ajoûter tout ceci à la quantité que j'avois trouvée dans l'autre moitié du cercle, laquelle est le rectangle 3 I 12 & 3 12 I; & ajoûtant au rectangle 3 12 I le quarré 8 I, je fais le rectangle 3 I 8, tellement que j'ai le rectangle 3 I 12 deux fois, & j'ai trouvé en la discussion de la seconde



moitié (les vuides étant ôtez, c'est-à-dire, les quarrez de I 3, K 4 &c.) le quarré 8 I (que j'ai ajoûté au rectangle que j'avois trouvé auparavant) plus deux fois le rectangle 3 I 8 qui est le même que 3 I 12; tellement que j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8, qui est au quarré de EY comme l'anneau ou solide fait par le cercle roulant sur YZ, au cylindre total. Le rectangle 4 K 13 pris quatre fois est au même quarré EY comme le solide du cercle est au cylindre total fait par EGZY.

Il faut considerer le rapport que nous avons trouvé du rouleau par le tour du parallelogramme EGHF au grand cylindre. La proportion est comme quatre fois le rectangle 3 I O au grand quarré EY, ainsi le rouleau

EGHF au cylindre total. Pour conclure, nous disons que quatre fois le rectangle 3 I O trouvé dans le rouleau GF, est au grand quarré EY, comme le même rouleau GF au grand cylindre GY. Ensuite j'ai quatre fois le rectangle 3 I 8 qui est au grand quarré EY, comme le solide fait par le cercle A 8 B 12 au cylindre total. Il se trouve que le grand quarré est consequent en l'une & en l'autre des comparaisons; partant les solides seront entr'eux comme les rectangles entr'eux : mais les rectangles sont tous d'égale hauteur; rejettant la hauteur ils seront entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire, comme les lignes du cercle aux lignes du rouleau : or ces lignes, en cas d'indivisibles, comprennent l'espace de chaque figure; donc comme le solide ou anneau est au rouleau GF, ainsi le plan A 8 B 12 est au plan GF; ce qu'il falloit démontrer.

Par tout ce discours nous n'avons trouvé que des raisons entre les solides & entre les plans : maintenant nous considerons si les solides sont égaux ou non. Je parlerai premierement du cylindre que fait le parallelogramme EFHG quand il roule sur la ligne FH : sa base est un cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH; sa hauteur est la ligne HF : au lieu du cercle je prens ce qui lui est égal, sçavoir le parallelogramme qui a le demi-diametre pour un côté, & la moitié de la circonference pour l'autre; & par ainsi j'ai trois côtez ou lignes, qui me doivent servir pour les comparer avec le solide que je pretens être égal à ce cylindre. Le solide donc a pour base le parallelogramme EFHG, pour hauteur la circonference d'un cercle duquel le demi-diametre est LD. Or les solides, selon Euclide, sont entr'eux en la raison composée de leur base & de leur hauteur; il faut donc considerer ce qu'ils ont de commun. Je trouve que dans le cylindre il y a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la.

demi-circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne GH : dans l'autre solide j'ai les lignes GH, HF, & la circonférence du cercle qui a pour demi-diametre la ligne LD. Mais dans l'une & dans l'autre j'ai deux lignes communes, sçavoir GH & HF, entre lesquelles il ne peut avoir autre raison que d'égalité, puisqu'elles sont égales, & partant on les peut ôter, & la composition des raisons demeurera entre la circonference d'un cercle & la demi-circonference de l'autre. Mais les circonferences sont entr'elles comme leurs diametres : or le diamétre total du cercle entier qui est DC est égal au demi-diametre GH; partant la circonference entiere appartenant à DC sera égale à la demi-circonference appartenant au demi-diametre GH; & par ainsi le cylindre sera égal au solide; ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut considerer toute la figure, lorsque le parallelogramme EYZG se tournant sur la ligne YZ fait le grand cylindre. Je dis que le rouleau GF est égal au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui aura pour demi-diamétre la ligne L 5. Je dis encore que l'anneau (c'est-à-dire le solide qui se fait par la révolution du cercle quand le tout roule sur YZ) est égal au solide qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference d'un cercle qui a pour demi-diametre la ligne L 5.

Pour prouver cette égalité il faut faire voir que les quatre solides suivans sont proportionnaux, sçavoir le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ. Le second est l'anneau qui se fait par le cercle quand le grand parallelogramme GY tourne sur la ligne YZ. Le troisiéme est celui qui a pour base le parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne ZB.

Et le quatriéme est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5., & par ainsi, faisant voir comme le premier desdits solides est égal au troisiéme, le second par consequent doit être égal au quatriéme. Or nous avons montré que comme quatre fois le rectangle ZBH est au quarré de GZ, ainsi le rouleau GF est au grand cylindre GY. Maintenant il nous faut examiner comment la figure qui a pour base le parallelogramme EF HG, & pour hauteur la circonference du cercle dont le demi-diametre est la ligne L 5, est égale au même grand cylindre GY.

Nous sçavons que les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur : je considere quelles sont les parties de l'un & de l'autre des solides, & je trouve que le grand cylindre a deux parties, sçavoir la ligne GZ qui est le demi diametre de sa base qui est un cercle, l'autre ligne est HF. Mais d'autant que nous avons besoin de trois côtez en ce solide ou grand cylindre, pour le comparer au solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle duquel la ligne L 5 est demi-diametre, lequel solide a trois lignes, sçavoir GH, HF, & la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre. Pour avoir trois côtez au grand cylindre, au lieu de prendre son demi-diametre qui représente son cercle, je prens ce qui est égal au cercle, sçavoir le demi-diametre GZ, & la demi-circonference du même cercle (le rectangle fait de ces lignes est égal au cercle selon Archiméde.)

J'aurai donc trois côtez ou lignes au grand cylindre, sçavoir GZ, HF, & la demi-circonference du cercle dont GZ est le demi-diametre. Il y a donc dans ces deux solides deux côtez qui sont semblables, sçavoir HF en chacun d'iceux; & partant ils ne servent de rien pour la composition des raisons qui demeurera entre les lignes GH, GZ, antécedent & consequent, & la circonference entiere du cercle qui a L 5 pour demi-diametre, à la demi-circonference du cercle qui a GZ pour demi-diametre. Mais d'autant que les circonferences sont entr'elles comme leurs diametres, au lieu des circonferences je prens le diametre entier qui est deux fois L 5, & pour la demi-circonference je pose son demi-diametre GZ ; partant la raison sera composée des raisons de la ligne CH à GZ, & de la ligne L 5 doublée à la ligne GZ.

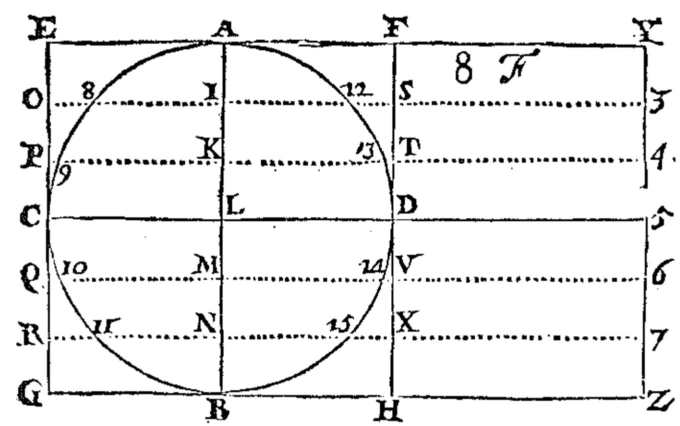
Or si on multiplie les antécedens l'un par l'autre, & pareillement les consequens, on aura ladite raison composée ; donc GZ par GZ, c'est-à-dire le quarré de GZ est au rectangle de GH par le double de L 5 ou ZB en ladite raison composée ; partant les solides seront entr'eux comme le rectangle de ZB deux fois par GH au quarré de GZ. Au lieu de ZB deux fois par GH, on prendra GH deux fois par ZB : or ZB par GH deux fois, est quatre fois le rectangle ZBG ; partant le solide qui a pour base le parallelogramme GF, & pour hauteur la circonference du cercle qui a L 5 pour demi-diametre est au cylindre total, comme quatre fois le rectangle ZBG est au quarré GZ ; donc le rouleau & le solide auront même raison au cylindre total ; & par ainsi le rouleau qui se fait quand le parallelogramme EFHG roule sur la ligne YZ est égal au solide qui a pour base le même parallelogramme EFHG, & pour hauteur la circonference du cercle qui a pour demi-diametre la ligne ZB.

Puisque ces deux solides sont égaux, qui sont le premier & le troisiéme dans les quatre proportionnaux, les deux autres qui sont le second & le quatriéme seront aussi égaux entr'eux. Ces deux solides sont l'anneau qui se fait par le cercle, quand le grand parallelogramme tour-

ne sur la ligne YZ : l'autre solide est celui qui a pour base le cercle ACBD, & pour hauteur la circonference du cercle duquel le demi-diamétre est la ligne L 5.

Il faut maintenant voir ce qui se fait quand le roulement se fait sur la ligne AB. Nous avons ici representé la figure comme un cercle ; le même se doit entendre d'une ellipse : & partant il faut voir ce que fait la sphére qui se forme par la révolution du demi-cercle ABC sur le diametre AB, ou le sphéroïde qui se forme par la révolution de la demi-ellipse sur la même ligne AB.

Il faut entendre que le quarré I 12 est au quarré de K 13, comme le rectangle BIA est au rectangle BKA,



& le quarré K 13 est au quarré LD, comme le rectangle BKA au rectangle BLA, & ainsi des autres, tant au cercle qu'en l'ellipse. Or, tant la sphére que le sphéroïde qui sont formez par le roulement, sont au cylindre qui se fait en même temps, comme tous les quarrez I 12, K 13 & autres petits au grand quarré BH pris autant de fois. Mais pour la raison des petits quarrez, j'ai pris la raison des petits rectangles qui est la même : il faut donc avoir un grand rectangle pour le comparer aux petits rectangles, afin de laisser les grands quarrez. Je prendrai le rectangle BIA qui vaut le quarré de LD ou MV, sçavoir les grands quarrez; & pour faire la comparaison, je dis que le rectangle BIA avec le quarré de LI est égal au quarré de LA ou LD son égal, ou quelqu'autre des grands quarrez; le rectangle BKA plus le quarré de LK est égal au même grand quarré LD, & ainsi de tous les petits rectangles qui se pourront faire; partant les grands quarrez excéderont les petits rectangles de tous les petits quarrez LI, LK qui vont toûjours en diminuant, & par ainsi font une pyramide que nous sçavons être la troisiéme partie de son parallelipipede ou cube. Si donc nous ôtons le tiers, il restera les deux tiers pour la valeur de la sphére ou sphéroïde, qui seront par cette raison les deux tiers de leur cylindre; ce qu'il falloit prouver.

DE L'HYPERBOLE.

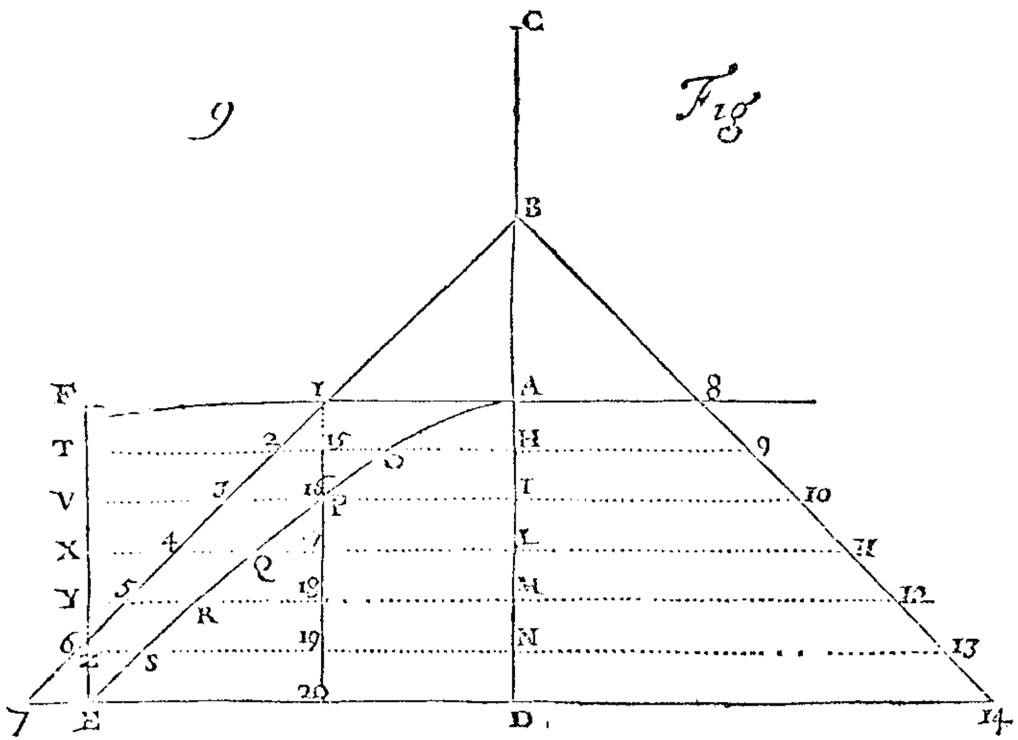
DANS l'Hyperbole AEDBC le sommet est C, c'est-à-dire que du point C on commenceroit l'hyperbole opposée; AC est le diametre transversal coupé en deux au point B qui s'appelle le centre de l'hyperbole. Il faut voir quand l'hyperbole tourne sur la ligne AD, qui est l'axe, quelle raison le solide ou conoïde hyperbolique qui se fait, peut avoir avec son cylindre, c'est-à-dire, le solide qui se fait quand le parallelogramme FD tourne aussi sur l'axe AD.

Nous sçavons que le conoïde est au cylindre, comme tous les quarrez ensemble compris dans l'espace AED, sçavoir le quarré de HO, de IP, LQ, & les autres, font au quarré de ED pris autant de fois qu'il y en a de petits. Il reste à chercher la raison des quarrez entr'eux avec le grand.

La proprieté de l'hyperbole est que le quarré HO est au quarré IP, comme le rectangle CHA est au rectangle CIA; le quarré IP est au quarré LQ, comme le rectangle CIA au rectangle CLA, & ainsi des autres; & par ainsi tous les petits rectangles sont au grand rectangle CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme tous les petits quarrez sont au grand quarré pris autant de fois qu'il y en a de petits. Mais pour sçavoir quelle est cette raison, je change les petits rectangles en leurs égaux, & au lieu du rectangle CHA je pose le rectangle CAH plus le quarré HA; au lieu du rectangle CIA, je pose le rectangle CAI plus le quarré IA, & ainsi des autres; pour le grand, il n'y faut rien changer. On fera ensuite la comparaison, premierement des rectangles CAH, CAI, & des autres petits entr'eux & au grand CDA pris autant de fois qu'il y en a de petits; & nous trouvons que tous les petits rectangles sont de même hauteur, sçavoir CA, & par ainsi, ils seront entr'eux comme leurs bases. Nous avons donc pour les petits rectangles un solide qui a pour hauteur la ligne CA, & pour base tous les nombres naturels qui composent un triangle. Si au lieu de la ligne CA je prens sa moitié AB, j'aurai un solide qui aura pour base le quarré de AD, & pour hauteur la ligne BC; ceci est pour les petits rectangles. Pour le grand rectangle, son solide a pour hauteur DC, & pour base DA pris autant de fois qu'il y a de petits rectangles, c'est-à-dire le quarré DA; partant les deux solides ont tous deux le même quarré DA pour base; & partant nous n'avons à considerer que leur hauteur DC pour le grand, & BC pour le petit; partant tous les petits rectangles sont au grand rectangle pris autant de fois, comme DC est à BC.

Il reste maintenant à considerer comment tous les petits quarrez sont au même grand rectangle. Or tous

les



petits quarrez, ſçavoir ceux de AH, AI, AL, AM, AN, font une pyramide qui a pour baſe le quarré de AD, & pour hauteur la même AD. (car les quarrez diminuez à l'infini font une pyramide) Mais la pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede; c'eſt-à-dire du ſolide qui a pour baſe le même quarré que la pyramide, & qui ſe hauſſe autant que la pyramide, ſçavoir de la ligne DA, donc au lieu de la hauteur DA, j'en prens le tiers, & j'ai le ſolide qui a pour baſe le quarré DA, & pour hauteur le tiers de DA; joignant donc ce tiers de DA

avec BC que j'avois trouvé devant, j'ai le tiers de DA plus BC ou AB ſon égale, à la toute DC.

Pour le faire plus élegamment, je dirai : Comme le tiers de AG (car j'ai ajoûté à AC la ligne CG égale à BC) avec le tiers de DA qui eſt comme le tiers de DG à la ligne DC; ainſi le conoïde hyperbolique ou petit ſolide eſt au cylindre fait par AFED. Que ſi nous voulons avoir la raiſon du cône qui ſe feroit, ſi le triangle AED ſe tournoit ſur la ligne DA (pour avoir ce triangle il faut tirer la ligne droite AE.) Euclide dit que le cône eſt le tiers de ſon cylindre : prenant donc le tiers de la ligne DC, elle ſera au tiers de la ligne DG, ou toute la ligne DC à toute la ligne DG, comme le cône au conoïde hyperbolique ; ce qu'il falloit montrer.

Autre ſpéculation ſur l'Hyperbole.

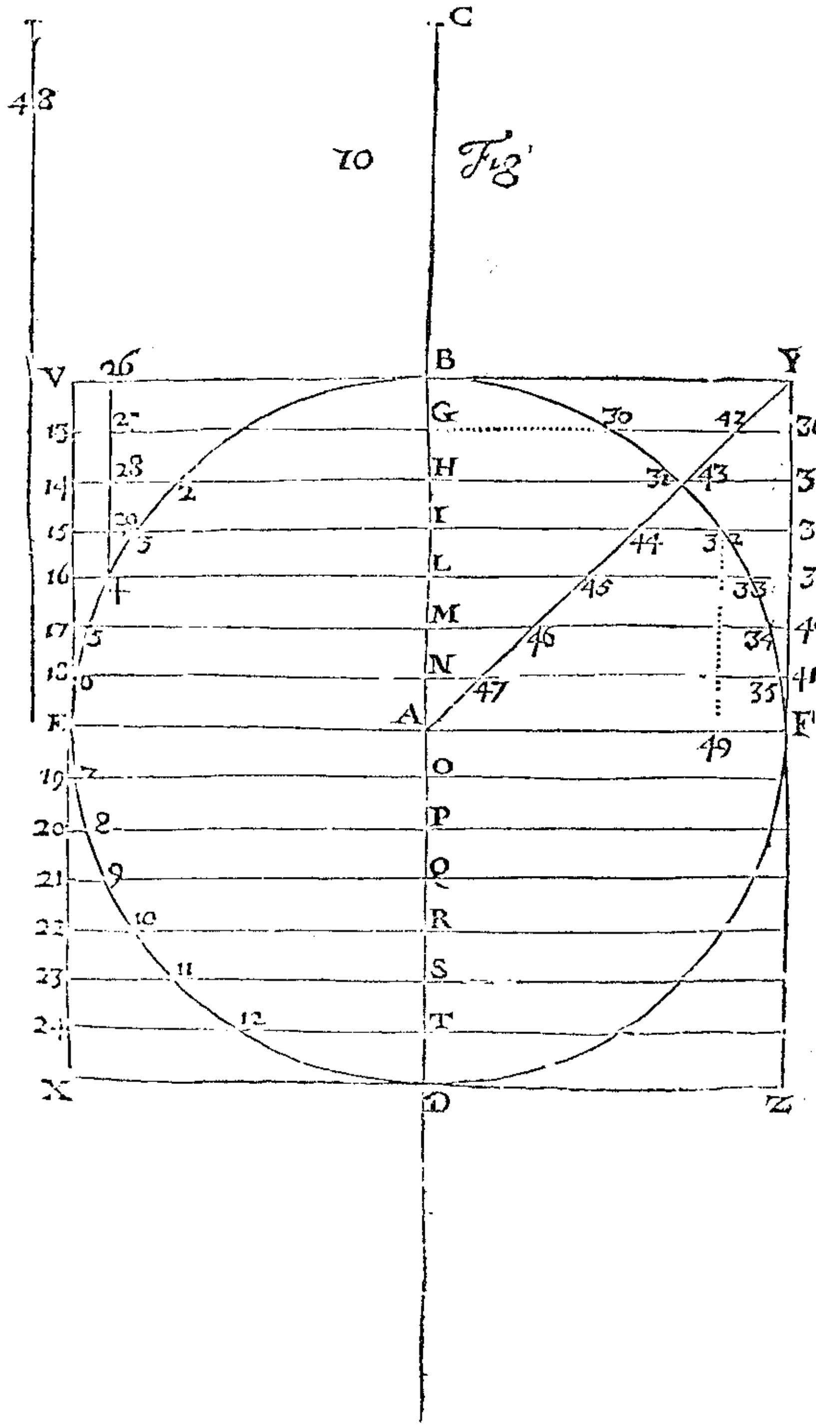
DU centre de l'Hyperbole B j'ai tiré les aſymptotes B 7, B 14. Si par le point A je tire la touchante 8 A 1, & que je tire d'un aſymptote à l'autre infinies paralleles, comme les lignes 9 H 2, 10 I 3, & les autres, le rectangle 8 A 1 eſt égal au rectangle 9 O 2, 10 P 3; & ainſi tous ces rectangles ſont égaux entr'eux. Quand le triangle B 7 D tourne ſur DA, il ſe fait un cône qui eſt égal à tous les quarrez qui ſont dans le plan, ſçavoir au quarré de A 1, H 2, I 3, & à tous les autres, & dans le plan 1 B A. Si donc de tous ces quarrez j'en ôte premierement le vuide 1 B A, & tout ce qui eſt au dehors du plan EDA, il me reſtera le conoïde hyperbolique qui ſe fait par EDA tournant ſur DA. Or le quarré H 2 vaut le rectangle 9 O 2 plus le quarré de HO; le quarré I 3 vaut le rectangle 10 P 3 plus le quarré de IP; le quarré de L 4 vaut le rectangle 11 Q 4 plus le quarré de LQ, & ainſi des autres. Mais chacun des rectangles eſt égal au quarré de A 1, lequel pris autant de fois qu'il y a de rectangles, fera le cylindre 1 20 DA; partant ôtant ce cylindre, il reſtera les quarrez de HO, IP, LQ, qui ſont égaux au conoïde hyperbolique; ce qu'il falloit montrer.

PROPORTION DE LA SPHERE ou Sphéroïde, ou de leurs portions, au Cylindre circonſcrit, & au Cône inſcrit.

ON conſiderera ici ce que fait la figure qui eſt en la page ſuivante tournant ſur BD, & ne prenant que la portion 26 B L 4 que fait le cylindre & la portion de la Sphére ou Sphéroïde qui ſe fait par la révolution de la figure 4 1 B L. Le quarré de G 1 & les autres petits ſont au grand quarré 4 L pris autant de fois qu'il y en a de petits, comme la portion de la ſphére ou ſpéroïde (car c'eſt la même raiſon en l'une & en l'autre) eſt au cylindre 26 B L 4. Il eſt donc queſtion de chercher la raiſon de ces petits quarrez au grand quarré. Or tous les petits quarrez ſont au grand, comme les rectangles DLB, DIB, DHB, DGB ſont au grand rectangle D L B; partant tous leſdits petits rectangles ſont au grand rectangle DLB pris autant de fois, comme tous les petits quarrez ſont au grand quarré pris autant de fois. Pour trouver la raiſon des petits rectangles au grand rectangle pris autant de fois, je change la valeur des petits rectangles en d'autres qui vaillent autant, & je dis ainſi : Le rectangle DBL moins le quarré BL vaut le rectangle DLB; le rectangle DBG moins le quarré BG vaut le rectangle DGB; le rectangle DBH moins le quarré BH vaut le rectangle DHB; le rectangle DBI moins le quarré BI vaut le rectangle DIB; partant dans les petits rectangles je trouve un ſolide qui a pour hauteur

DB, & pour baſe les petites lignes LB, LG, LH, LI qui font la ſomme de nombres naturels qui eſt un triangle lequel eſt toûjours la moitié de ſon quarré; partant je double le triangle pour avoir le quarré; & par ainſi j'aurai un ſolide qui aura pour hauteur DA moitié de DB (car doublant le triangle j'ai ôté la moitié de DB) & pour baſe le quarré de LB comme l'autre ſolide. Pour le grand rectangle, ſçavoir DLB pris autant de fois, il compoſe un ſolide qui a pour hauteur la ligne DL, & pour baſe le même quarré LB. Les baſes étant égales, il n'y a que les hauteurs à conſidérer, ſçavoir DB & BL. Mais il faut ôter des petits rectangles les quarrez qui étoient de moins : or ces petits quarrez compoſent une pyramide qui a pour baſe le quarré de LB, & pour hauteur LB. Au lieu de la pyramide je prens un parallelipipede qui lui ſoit égal : je retiens le même quarré LB, & pour hauteur le tiers de LB, qui eſt la hauteur du parallepipede égal à la pyramide (car toute pyramide eſt le tiers de ſon parallelipipede.) Il faut ôter ce ſolide de l'autre qui a même baſe, & partant il ſuffit d'ôter la hauteur du dernier de la hauteur de l'autre. Voilà touchant le ſolide fait par les petits rectangles. Il reſte maintenant à chercher le ſolide du grand rectangle. Or ce ſolide n'eſt autre que celui qui a le quarré LB pour baſe, & DL pour hauteur. Celui-ci n'a point d'autre baſe que les autres, partant nous ne regarderons que la hauteur DL en celui-ci, puis nous dirons que comme le tiers de la ligne 25 L (car DA moins le tiers de LB vaut le tiers de la ligne 25 L) eſt à la ligne DL, ainſi le ſolide fait par la figure 4 2 B L eſt à ſon cylindre fait par le parallelogramme 26 4 LB.

Que ſi nous voulons avoir le cône qui ſe feroit par la même révolution, ſi on tiroit une ligne B 4. Nous ſçavons que le cône eſt le tiers de ſon cylindre; je pren-



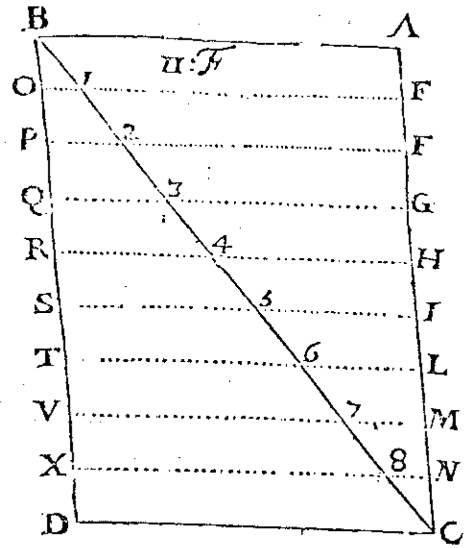
drai donc le tiers de DL (laquelle repréſente le cylindre) & je dirai que comme le tiers de la ligne 25 L eſt au tiers de la ligne DL, ainſi notre ſolide eſt au cône: or qui dit le tiers d'une ligne au tiers d'une autre, dit la ligne entiere à la ligne entiere; partant le ſolide ſera au cône, comme la ligne 25 L eſt à la ligne DL; ce qu'il falloit trouver. Dans la même figure il faut conſiderer que, lorſqu'elle tourne ſur la ligne AB quand le cylindre VEFY ſe fait, il ſe fait auſſi un ſolide par la révolution du plan ABF, qui s'appelle un creux. Il ſe fait encore un autre ſolide par le plan B 30 FY. Nous en avons encore un autre qui ſe fait ſur le triangle AYB qui eſt un cône. Il faut voir quel rapport ont entr'eux tous leſdits ſolides.

Les diviſions étant faites à l'infini, & toutes les lignes tirées telles qu'on les voit en la figure, les figures ſont entr'elles comme les quarrez de ces lignes ſont entr'eux. Or pour ce qui eſt du cône que nous voulons égaler au ſolide fait par B 30 FY, il faut dire que la grande ligne du cylindre total eſt coupée en deux également au point I, ſçavoir la ligne 15 I 38, & en deux parties inégales au point 32; partant le rectangle 15 32 38 avec le quarré I 32, vaut le quarré I 38. Si donc du quarré I 38 j'ôte le quarré I 32, il me reſte le rectangle 15 32 38 qui appartient au ſolide B 30 FY.

Puis après nous entrons dans les proprietez de l'ellipſe; (car ce que je conclurai s'entendra du cercle comme de l'ellipſe.) Le diametre EF, le diametre BD & le côté droit du diametre EF, ſçavoir la ligne 48, ſont trois proportionelles; & la premiere EF eſt à la troiſiéme 48, comme le quarré de la premiere EF eſt au quarré de la ſeconde DB. De plus, le rectangle E 49 F eſt au quarré de l'ordonnée 49 32 comme la ligne EF eſt à la ligne 48 côté droit d'icelle; partant le rectangle E 49 F eſt au quarré 49 32, comme le quarré EF est au quarré DB, ou le quarré de AF au quarré de AB. Au lieu de AF je pose son égale BY; donc le quarré BY est au quarré BA, comme le rectangle E 49 F au quarré 49 32; ou bien prenant leurs égaux, le rectangle 15 32 38 au quarré IA égal au quarré 49 32. Mais le quarré BY est au quarré BA, comme le quarré I 44 est au quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera au quarré IA, comme le quarré I 44 est au même quarré IA; partant le rectangle 15 32 38 sera égal au quarré I 44; & par ainsi le cône sera égal au solide de B 30 FY. Mais le cône est le tiers de son cylindre; si donc j'ôte le tiers du cylindre total, il restera les deux tiers pour le solide ou le creux qui se fait par le plan AFB, qui est ce qu'on cherchoit.

Or, non-seulement le cône est égal au solide extérieur, mais chaque partie est égale à chaque partie; c'est-à-dire que le solide fait par N 47 46 M, est égal au solide fait par 35 41 40 34; le solide 45 LM 46 est égal au solide 33 39 40 34, & ainsi des autres. Par tout ceci nous venons à la connoissance du centre de gravité de tous ces solides; car le centre de gravité du cylindre AY est au milieu de la ligne AB: or le centre de gravité du cône est aux $\frac{1}{4}$ de la ligne AB; le centre de gravité du solide qui lui est égal, se trouve au-même lieu dans la ligne BA aux $\frac{1}{4}$ d'icelle; partant, selon Archiméde, le centre de gravité de la sphére ou spéroïde restant du cylindre sera connu, parce qu'il est en la raison réciproque des deux solides, sçavoir de la sphére ou sphéroïde, au solide de dehors, c'est-à-dire à B 30 FY, aux lignes qui sont depuis le centre de gravité du grand cylindre, au centre de gravité du petit solide, & à la ligne qui part du centre de gravité du même grand cylindre au centre de gravité de la figure restante que je cherche, qui est de la sphére ou sphéroïde.

PROPORTION DU COSNE au Cylindre.



En cette figure le triangle est au parallelogramme, comme tous les nombres naturels sont au quarré du plus grand; c'est-à-dire, comme 1 à 2. Que si vous le faites tourner sur la ligne BD, le cône qui se fera de BDC sera au cylindre qui se fera sur ABDC comme 1 à 3 selon Archiméde.

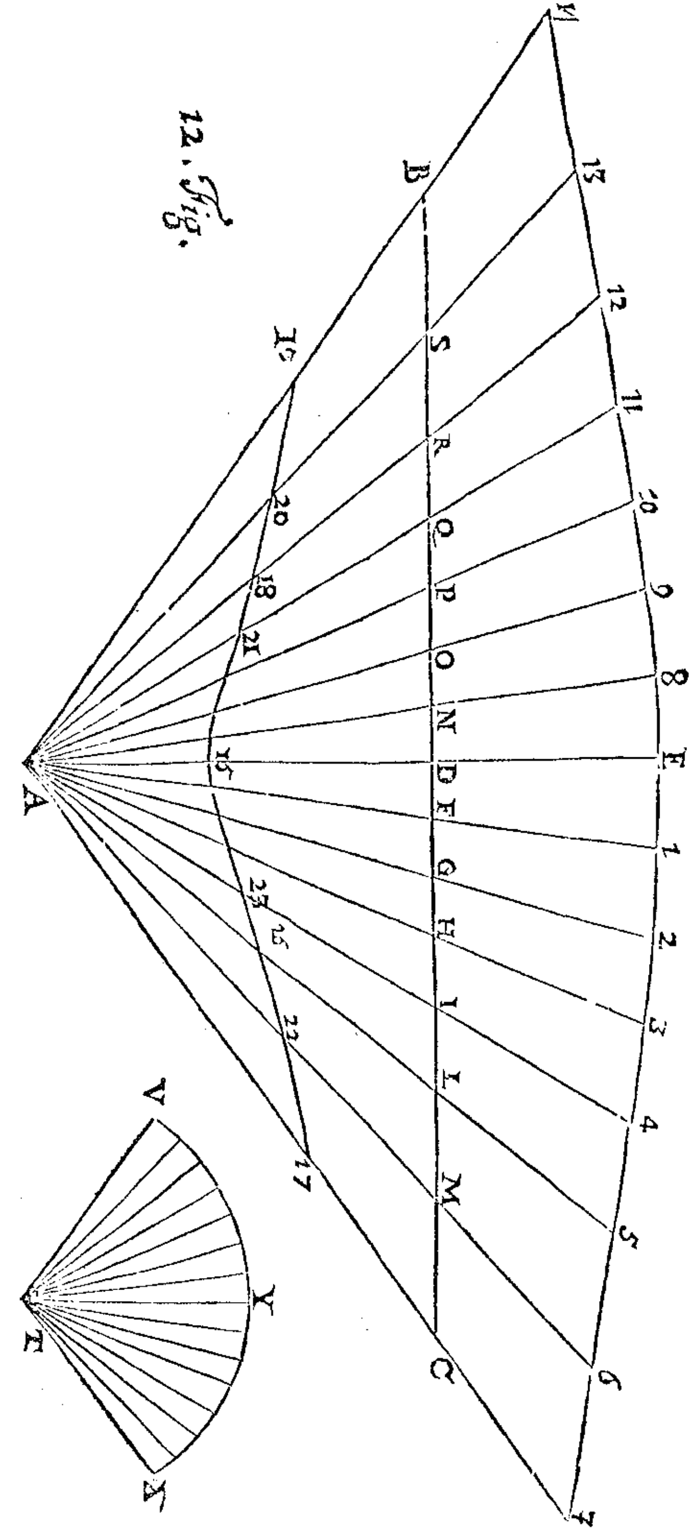
DE LA CONCHOÏDE.

Nous considerons premierement le grand triligne A 7 14. Le centre de la conchoïde est A; la conchoïde 1 4 7 est la premiere, & la seconde conchoïde est 16 17; la régle qui les sépare BC; les lignes qui partent de cette régle ou ligne & qui vont aux deux conchoïdes, sçavoir C 7, M 6, L 5, & les autres, sont toutes égales entr'elles, & pareillement les lignes C 17, M 22, L 19 sont égales entr'elles & aux autres ci-dessus, sçavoir à C 7, M 6, &c. Nous disons donc ainsi:

Le grand triligne est divisé (selon les indivisibles) en secteurs semblables infinis qui ressemblent aux triangles, mais

mais par les indivisibles nous les prênons pour secteurs : or les secteurs semblables sont entr'eux comme leurs quarrez ; nous devons donc chercher la raison & la valeur des quarrez pour tirer nos conséquences. Au lieu de chaque quarré nous considerons son égal ; & par ainsi nous trouvons que le quarré A 7 vaut les quarrez AC, C 7 plus deux fois le rectangle A C 7 ; le quarré A 17 vaut les quarrez AC, C 7 ou C 17 moins le rectangle A C 17 pris deux fois. Tout ceci mis ensemble vaut le quarré C 7 deux fois, plus le quarré AC deux fois, les rectangles qui sont par plus & moins se détruisant l'un l'autre ; or ces quarrez nous représentent les deux trilignes, sçavoir A 7 14, & A 17 16.

Je dis que le grand triligne A 7 14, & le petit A 17 16 sont égaux à deux fois les quarrez AC, & C 7. [La petite figure qui est ici a été faite, d'autant que dans l'espace C 7 B 14 il n'y a point de secteurs qui remplissent ledit espace, mais seulement des quarrez qui sont entr'eux comme les secteurs. Je prens donc des secteurs tous semblables, dont les angles soient égaux aux angles en A, & la hauteur égale aux lignes C 7, M 6, & autres : ces secteurs sont au grands secteurs ; comme les quarrez de C 7, M 6, L 5, & autres, sont aux grands quarrez A 7, A 6, A 5, & autres.] Ayant donc l'égalité susdite entre les trilignes A 7 14 & A 17 16, & les quarrez AC & C 7 pris deux fois : au lieu des quarrez C 7 je prens des secteurs semblables, qui garderont la même raison entr'eux que lesdits quarrez ; partant au lieu de dire, deux fois les quarrez C 7, M 6, & les autres, je prens deux fois les secteurs compris dans la petite figure T V Y X, & je dis, deux fois les petits secteurs avec deux fois le triangle ACB sont égaux au triligne A 7 14, & au triligne A 17 16 ; & c'est ici la premiere conséquence ou conclusion.



12. *Fig.*

Pour la feconde, c'eft quand nous ôtons du grand triligne A 7 14 le petit triligne A 17 16, alors nous avons d'un côté l'efpace 16 17 7 14 pour comparer avec deux fois les petits fecteurs, le triangle ABC, & l'efpace 16 17 CB. Alors l'efpace d'une conchoïde à l'autre, c'eft-à-dire 16 17 7 14, eft égal à deux fois les petits fecteurs plus deux fois l'efpace 16 17 CB; & c'eft ici une autre conclufion.

J'avois omis de dire que quand du grand triligne & du petit triligne j'en ôte le petit, il refte le grand A7 14 qui eft égal à deux fois les petits fecteurs, au triangle ACB & à l'efpace 16 17 CB, qui eft une autre conclufion.

Que fi on veut retrancher du grand triligne A 7 14 le triangle ACB, il reftera l'efpace 7 CB 14 qui fera égal à deux fois les petits fecteurs avec une fois CB 16 17, qui eft une quatriéme conclufion.

Maintenant il nous faut voir quelle raifon il y a entre le triangle ABC & l'efpace BC 7 14. Cela fe fera confidérant le quarré A 7 duquel nous ôterons le quarré AC. Ayant donc divifé le triligne A 7 14 en fecteurs tous femblables & infinis, ainfi qu'il a été fait ci-deffus aux autres conclufions, & fçachant que les fecteurs font entr'eux comme leurs quarrez, nous difons que le quarré A 7 eft égal aux quarrez AC & C 7 plus le rectangle A C 7 pris deux fois. Si j'en ôte le quarré AC, il me refte le quarré C 7 plus le rectangle AC 7 deux fois. Il faut confidérer quels folides ils font.

Tous les quarrez C 7, M 6, & les autres font tous égaux; & par ainfi tous joints enfemble font un parallelipipede ou folide qui a pour hauteur & largueur la ligne C 7, & pour longueur une ligne telle qu'on voudra, fçavoir autant qu'on aura pris de fois & ajoûté les quarrez l'un à l'autre; c'eft le premier folide qui fe forme.

L'autre fe fait du rectangle AC7 pris autant de fois que les fufdits quarrez, & forme un folide qui a pour hauteur C 7 comme l'autre, mais fa longueur eft diverfe, fçavoir des lignes AC, AM, AL, & des autres qui toutes font inégales.

Or ces deux folides fe doivent mettre enfemble afin de les comparer à celui qui eft compofé des quarrez AC, AM & autres qui tous font inégaux; & partant ce folide fera racourci de deux côtez. Or ce folide fe peut confidérer comme fi j'avois fait un cercle du centre A & de l'intervale AD : car alors la ligne BC fera une touchante dudit cercle au point D; la ligne AD fera le finus total; & les lignes AN, AO, AP feront toutes des fécantes, & ainfi le folide fera formé des quarrez des fécantes. Or ces deux folides étant de même hauteur, fçavoir de la ligne C 7 & autres, il eft aifé de les joindre enfemble, & de tous deux en faire un folide compofé de tous les quarrez C 7, M 6, &c. d'une part, & de la ligne C7 multipliée par la fomme des lignes AC, AM, & les autres prifes deux fois (parce que le rectangle AC7 eft deux fois dans le quarré A 7) c'eft-à-dire, qu'il faut doubler les lignes AC, AM, & autres.

Le folide qu'il faut comparer à celui-ci eft fait par la fomme des quarrez des lignes AC, AM, & des autres qui toutes font inégales. Nous difons donc, Comme le folide fait par la fomme des quarrez AC, AM, & autres, eft au folide compofé des deux ci-devant mis; ainfi le triangle ABC eft à la figure C 7 14 B. Mais dans le premier folide les lignes C 7, M 6 me font données, & partant leurs quarrez : de plus les lignes AC, AM, & autres me font auffi données, d'autant que la lignes AD (que je prens pour finus total ou demi-diametre d'un cercle que je feins être fait) m'eft donnée, & la ligne DE fur lefquelles j'ai formé ma conchoïde; & par le moyen de AD finus total & de l'angle BAD, je connois toutes les fécantes de ce cercle que je pose être décrite sur le rayon à AD: ces fécantes font AN, AO, AP, & les autres qui suivent. Dans le dernier solide tous les quarrez de AC, AM me seront donnez, puisque les lignes sont données; & ainsi je joins les quarrez C 7, M 6 avec le rectangle fait de AC doublé & C 7, le tout pris autant de fois qu'il y a de quarrez. Or CA, & MA sont fécante; donc par le calcul il nous sera facile d'en trouver la valeur que nous comparerons avec le second solide qui est composé de l'aggregé ou somme des quarrez des fécantes; & telle sera la raison de ABC à l'espace BC 7 14.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT *un espace égal à un Quarré donné, & ce d'un seul trait de Compas.*

ON demande qu'il soit tracé sur un cylindre droit d'un seul trait de compas un espace égal au quarre de la ligne AB. Pour le faire je coupe en deux également la ligne AB au point C, & je décris le cercle FME, le diametre duquel FE soit égal à AC. Sur ce cercle j'éleve un cylindre dont la hauteur soit du moins le double de FE, & au milieu de cette hauteur soit le point F; puis ouvrant le compas de l'intervale FE, je décris un espace sur la superficie du cylindre. Je dis que cet espace vaut le quarré de AB.

Pour le prouver, je divise le cercle en parties infinies aux points EGHI & autres: de chacun de ces points j'éleve des perpendiculaires au plan du cercle en nombre infini, comme les points sont infinis: du point E qui est l'extrémité du diamétre, je tire à chaque point de la division des lignes droites EG, EH, EI, &

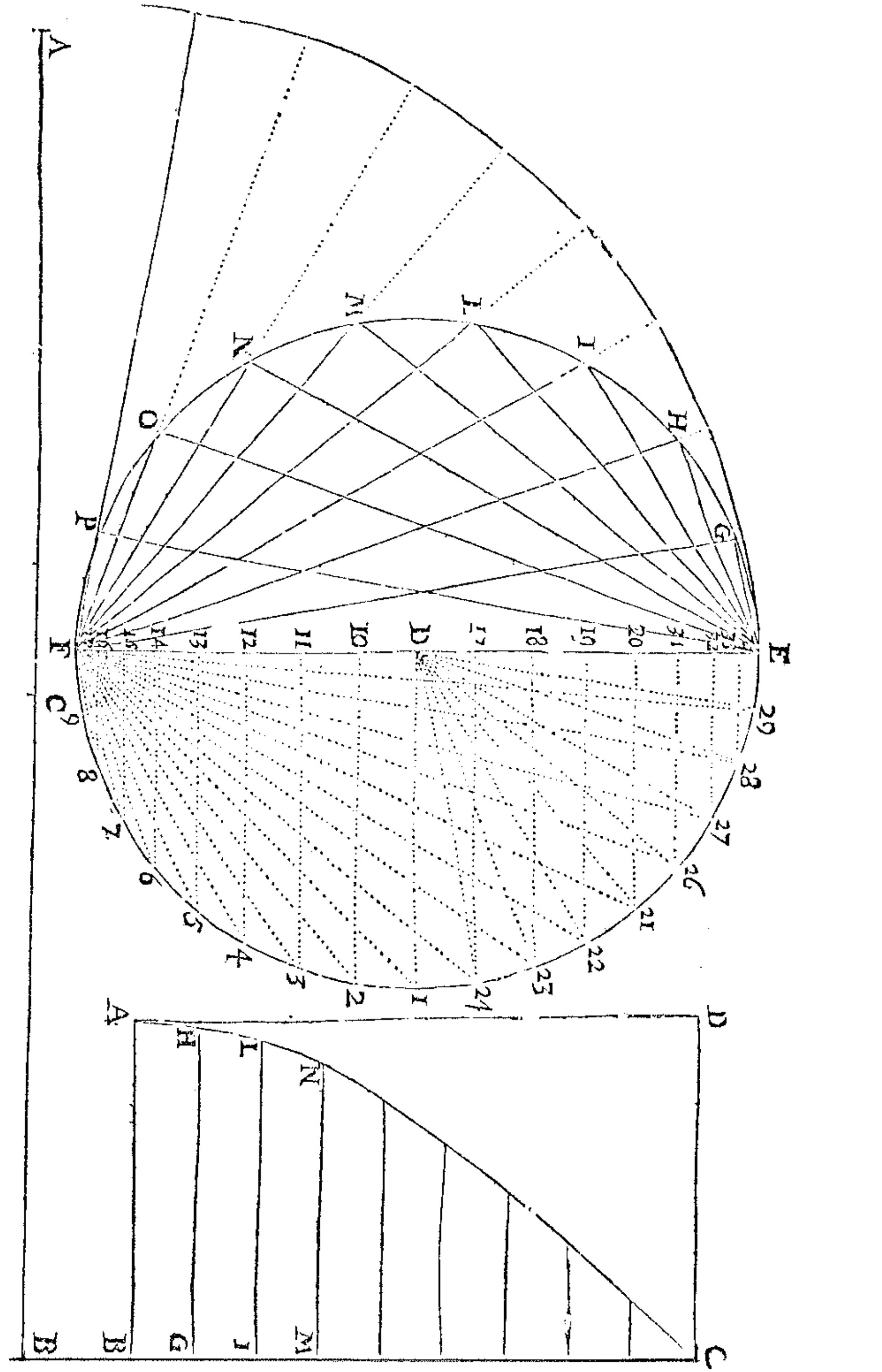
autres qui sont dans le demi-cercle ELF. Or toutes ces petites lignes sont des finus du quart d'une circonférence; ce qui se connoîtra, faisant du rayon FE & du centre F un cercle qui ait pour diametre le double de EF; mais ici je me contente de la quatriéme partie de la circonférence. Si donc du centre F je tire des lignes en nombre infini qui soient toutes égales à FE, elles iront jusques à la circonférence de ce cercle, & couperont toutes les petites lignes EG, EH & les autres à angles droits, car l'angle se trouve dans le demi-cercle ELF; & partant toutes les petites lignes sont les finus du quart d'une circonférence.

Nous sçavons que le demi-diametre du cercle est au quart de la circonférence, comme tous les petits finus sont au finus total pris autant de fois. Nous sçavons aussi que le quarré du demi-diametre est égal à la figure qui est faite par les infini petits finus qui divisent ce quart de circonférence. Or le demi-diamétre est FE qui est égal à la ligne droite AC moitié de AB; partant son quarré quatre fois vaudra le quarré de AB. Or les finus EG, EH, &c. sont égaux aux perpendiculaires élevées des points GH, &c. jusques au retranchement fait par le compas, comme il sera montré; & par ainsi la figure ou l'espace tracé par le compas qui est ouvert de la grandeur EF, l'un des pieds posé sur F qui est un point pris en quelque endroit que ce soit de la surface du cylindre, & l'autre pied, par exemple sur le point E, & tournant sur la superficie du cylindre tant qu'il revienne au même point E: cet espace compris sur le cylindre vaut quatre fois l'espace compris des petits finus qui divisent le quart de la circonférence; car le compas parcourt les quatre quarts de la circonférence du cylindre, s'il se peut ainsi dire. Or le cylindre est présumé prolongé tant en haut qu'en bas autant qu'il faudra, dessus & dessous ledit point F, & le cercle FME parallele à sa base pour satisfaire à la question.

Reste à montrer que la ligne EH est égale à la perpendiculaire élevée du point H, quand elle a été retranchée par le compas ouvert de la grandeur FE. Pour cet effet, il faut tirer la ligne FH, & concevoir deux triangles, l'un de la ligne FH & FE portée à l'extrémité de la perpendiculaire tirée du point H, & qui monte vers le haut du cylindre & de ladite perpendiculaire qui sort de H jusques au retranchement fait par FE portée sur la surface du cylindre. Ces trois lignes font un triangle rectangle qui est égal au triangle FEH; car en tous les deux triangle la ligne FH est commune; l'angle en H est droit, car il se fait de la ligne FH & de la perpendiculaire sur le point H en l'un des triangles, sçavoir en celui qu'on veut montrer égal à FEH & pareillement l'angle en H de l'autre triangle FEH est droit, étant dans le demi-cercle; la ligne FE qui a coupé la perpendiculaire élevée sur le point H est égale à FE; partant la ligne EH est égale à ladite perpendiculaire qui part du point H, & qui est coupée par la ligne FE par la révolution du compas. Le même se prouvera de toutes les autres lignes, EG, EI, EL, EM, & autres.

On considere ici deux triangles qu'on veut prouver être égaux : l'un est FHE; l'autre a pour base FH, pour catet la perpendiculaire tirée du point H jusques au retranchement fait par le compas, & l'hipotenuse sera égale à FE, puisque c'est l'ouverture du compas.

Or cette figure se trouve être la même que la troisiéme figure ci-devant, si on suppose que la circonférence EHLF est égale à BC dans la troisiéme figure, & qu'elle est divisée infiniment en sinus GE, HE; IE, & les autres, tout ainsi que la ligne BC de la troisiéme figure est divisée en sinus infinis, sçavoir GH, IL, MN, &c. Or nous devons considérer cette troisiéme figure ou bien la présente, car il n'importe pas, & voir ce qu'elles font. Par exemple, quand la troisiéme figure tourne sur la ligne BC, elle fait un cylindre avec le rectangle BD, & un autre solide avec la figure courbe ACB



ACB. Je trouve que le cylindre eſt double du petit ſolide fait de la figure courbe. Pour le prouver je me ſers de la treiziéme figure préſente, & je feins avoir tiré une infinité de lignes du point F à tous les points, comme FP, FO, FN, & autres, qui ſont toutes égales aux premieres tirées du point E aux mêmes points, ſçavoir à EG, EH, EI, &c. Je dis enſuite que les quarrez de GE & GF ſont égaux au quarré de FE : il en eſt de même des quarrez de EH & HF, & ainſi des autres ; partant tous ces quarrez enſemble ſeront égaux au quarré de EF pris autant de fois. Mais dans ces petits quarrez je n'ai beſoin que de ceux qui compoſent la figure, ſçavoir des quarrez de EG, EH, EI, & autres tirez du point E, qui ſont la moitié de tous ceux que j'avois comparez avec le grand quarré FE ; partant tous ces petits quarrez ſeront à autant de fois le grand quarré FE comme la moitié au tout. Mais les ſolides ſont entr'eux comme tous les quarrez pris enſemble ; partant le petit ſolide fait de la figure courbe ABC en la troiſiéme figure, ſera au cylindre fait de BD, comme 1 à 2 ; ce qu'il falloit démontrer.

On conſidérera encore en la même figure un autre trait de compas. Je poſe une des pointes ſur le point F que je prens dans la circonférence du cercle F 1 E L, lequel cercle eſt la baſe mitoyenne du cylindre qu'on ſuppoſe toûjours prolongé en haut & en bas autant qu'il eſt neceſſaire. On met donc l'un des pieds du compas en F, & l'ouverture d'icelui eſt F 1 qui eſt la ſoutendante du quart de la circonférence totale F 5 1. Or cette circonférence eſt diviſée en parties égales & infinies aux points 2, 3, 4, &c. ſur chacun deſquels j'éleve des perpendiculaires, comme ci-devant : des mêmes points je tire des perpendiculaires ſur le demi-diametre FD qui le diviſent en une infinité d'autant de parties inégales.

Il faut maintenant conſidérer les proprietez de toutes ces lignes. Nous voyons qu'il ſe fait pluſieurs triangles rectangles dont les côtez ſont F 2, F 1, & la perpendiculaire ſur le point 2, laquelle eſt en l'air ; le ſecond, F 3, F 1, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 3 ; F 4, F 1, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 4, & cette perpendiculaire tirée en l'air s'augmente à meſure que la ſoutendante diminuë. Car les quarrez des deux lignes F 2, & la perpendiculaire en l'air ſur le point 2, ſont égaux au quarré de F 1 ; les quarrez de F 3, & de la perpendiculaire ſur 3 en l'air ſont égaux au même quarré F 1, & ainſi des autres. Mais le quarré F 1 eſt égal au rectangle EFD, le quarré F 2 eſt égal au rectangle EF 10, le quarré F 3 au rectangle EF 11, & ainſi des autres quarrez & rectangles, partant tous les rectangles EFD, EF 10, EF 11, & les autres, ſont entr'eux comme les quarrez F 1, F 2, F 3, &c. & partant tous les rectangles EF 10, EF 11, & autres tous enſemble ſont au grand rectangle EFD, comme tous les quarrez F 2, F 3, &c. ſont au grand quarré F 1. Quand du rectangle EFD j'ôte le rectangle EF 10, il reſte le rectangle EF par 10 D qui eſt égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 2 en l'air ; quand du même rectangle EFD j'en ôte le rectangle EF 11, il reſte le rectangle EF par 11 D qui eſt égal au quarré de la perpendiculaire tirée du point 3 en l'air. (Or j'ai beſoin des quarrez de ces perpendiculaires, d'autant qu'en tournant la troiſiéme figure ſur BC, ces lignes repréſentent les demi-diametres des cercles qu'il faut comparer avec le quarré du demi-diametre de la baſe du cylindre.) Mais tous les rectangles ſuſdits ont une même hauteur, ſçavoir FE ; & partant ils ſont entr'eux comme les lignes FD, F 10, F 11. Si on ôte de la baſe d'un rectangle la baſe d'un autre rectangle, il reſtera leur différence : comme ſi de

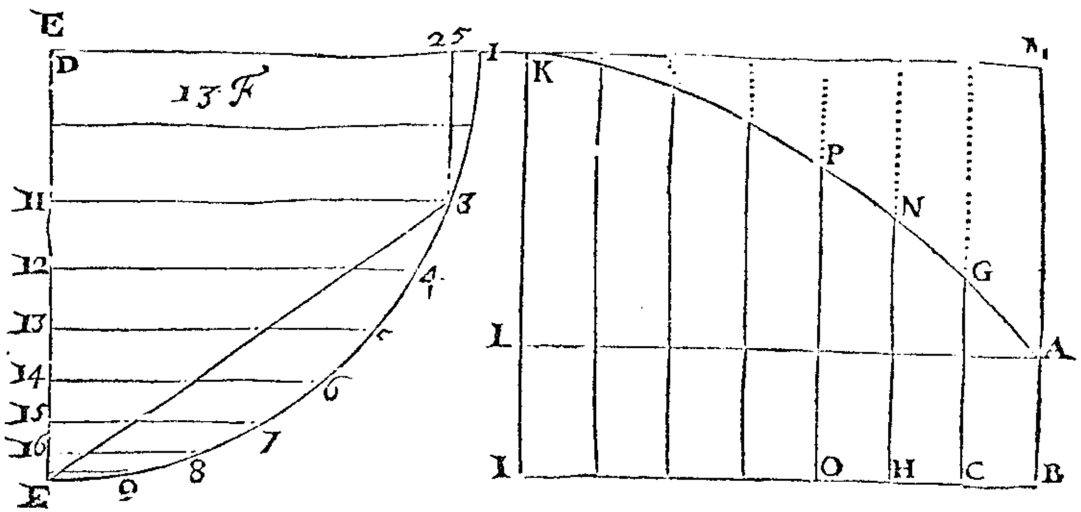
FD j'ôte F 10, il reſtera D 10; ſi de FD j'ôte F 11, il reſtera D 11, & ainſi des autres. Or ces reſtes ſont homologues avec les quarrez des lignes perpendiculaires qui reſtent quand j'ai ôté le quarré F 2 du quarré F 1: du même quarré F 1 j'ai ôté le quarré F 3, puis F 4, &c. il reſte les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air des points 2, 3, 4, &c. partant les lignes D 10, D 11, & autres garderont entr'elles la même raiſon que les quarrez deſdites perpendiculaires. Mais les lignes D 10, D 11, D 12, &c. ſont ſinus; car les lignes 2 10, 3 11, 4 12, &c. ſont perpendiculaires ſur le diametre EF; donc les quarrez des perpendiculaires ſont au quarré de la grande FI priſe autant de fois, comme tous les petits ſinus ſont au ſinus total DF pris autant de fois. Mais les petits ſinus ſont au ſinus total pris autant de fois, comme le demi-diametre du cercle eſt au quart de la circonférence; partant le ſolide fait par la révolution de la figure courbe ACB ſur la ligne BC, ſera au cylindre fait du rectangle BD, comme le demi-diametre du cercle eſt au quart de la circonférence.

Il faut entendre ici que la figure ABC eſt faite de toutes les perpendiculaire elevées ſur les points 2, 3, 4, &c. & que AB eſt égale à FI.

Conſidérons maintenant le trait du compas fait de l'intervale F 3, gardant toûjours le point F pour poſer ledit compas. Il ſe trouve que le quarré F 4 avec le quarré de la perpendiculaire tirée du point 4 en l'air, eſt égal au quarré de F 3; le quarré F 5 avec celui de la perpendiculaire ſur le point 5 en l'air, ſont égaux au même quarré F 3, & ainſi des autres. Or le rectangle EF 11 eſt égal au quarré F 3, & le rectangle EF 12 eſt égal au quarré F 4, & ainſi des autres rectangles & quarrez. Si donc du rectangle EF 11 j'ôte le rectangle EF 12, il reſte le rectangle EF par 12 11 égal au quarré de la perpendiculaire ſur 4 tirée en l'air. Si du même rectangle EF 11 on ôte le rectangle EF 13, il reſte le rectangle EF, par 13 11 qui eſt égal au quarré de la perpendi-

culaire tirée ſur 5, & ainſi des autres. Que ſi nous feignons une parabole être tirée du ſommet 11 vers la circonférence du cercle, & que des points 11, 12, 13, 14, 15, pris ſur ſon axe 11 F on tire des ordonnées juſques à la circonférence de ladite parabole, les quarrez de telles ordonnées ſeront égaux aux rectangles; ſçavoir le quarré de la ligne tirée du point 12 à la parabole, ſera égal au rectangle fait par le côté droit de ladite parabole qui eſt FE, & la portion de l'axe 11 12; le quarré de l'ordonnée tirée du point 13 à la parabole, ſera égal au rectangle EF par 11 13, & ainſi des autres. Ce qui fait voir que les quarrez des ordonnées ſont égaux aux quarrez des perpendiculaires qu'on a tirées en l'air des points 3, 4, 5, &c. & par conſequent les ordonnées ſeront égales auſdites perpendiculaires. Mais d'autant que les perpendiculaires ſont en égale diſtance l'une de l'autre, & les ordonnées inégalement diſtantes l'une de l'autre, cela eſt cauſe qu'on ne peut pas comparer le plan fait par les perpendiculaires avec le plan qui ſe fait par les ordonnées, d'autant que les perpendiculaires diviſent la ligne en parties égales, mais les ordonnées ne diviſent pas l'axe également, mais inégalement; & ainſi le plan qui ſe fait des perpendiculaires ne peut pas être comparé avec le plan fait par les ordonnées pour en ſçavoir la raiſon.

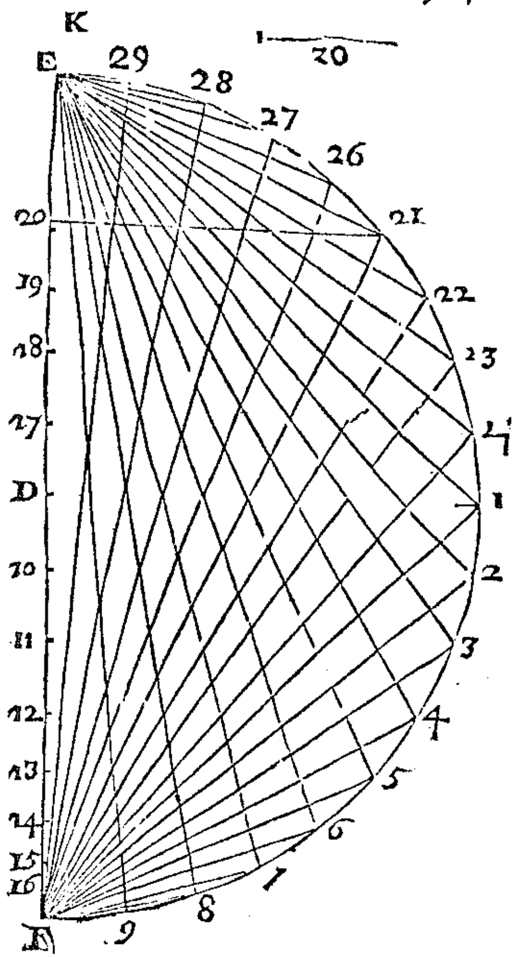
Maintenant il faut conſidérer la raiſon des ſolides, ſi la figure ſe tournoit ſur la ligne F 5 3 étenduë en ligne droite, ſuppoſant que le trait du compas ſe faſſe du point F, & de l'ouverture F 3. Or nous avons trouvé par le précedent diſcours, que le rectangle EF par 11 12 eſt égal au quarré de la perpendiculaire ſur 4 en l'air; le rectangle EF par 11 13, égal au quarré de la perpendiculaire ſur 5 en l'air, & ainſi des autres: partant toutes ces lignes ſeront homologues avec les quarrez desdites perpendiculaires. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. ne sont point sinus, parce qu'elles ne partent pas du demi-diametre D 1, car il s'en faut la ligne D 11 qu'elles ne viennent jusques à D 1. Que si elles étoient des sinus, nous ferions la raison comme en l'autre précedente raison des solides, sçavoir comme les petits sinus au sinus total D 1 pris autant de fois. Or les lignes 11 12, 11 13, 11 14, &c. sont les mêmes que si du point 4 on menoit une perpendiculaire sur 11 3, & du point 5 & 6 sur la même 11 3, & ainsi de tous les autres points qui divisent la circonférence. Or toutes ces lignes ne sont point sinus, car il s'en faut la ligne 11 D, ou la perpendiculaire qui seroit tirée du point 3 sur la ligne D 1, sçavoir 3 25. Comme donc la ligne 11 3, ou D 25 son égale, à la circonférence F 5 3, ainsi tous les petits sinus sont au sinus total pris autant de fois. Mais pour trouver l'équation des solides il faut avoir la différence des sinus, sçavoir D 12, D 13, D 14, D 15, D 16 moins autant de fois D 11; partant toutes les différences des petits sinus sont au sinus total pris autant de fois, moins le même espace D 11 pris autant de fois, comme le solide fait par les quarrez des perpendiculaires au cylindre qui se fait. Ceci sera mieux représenté par la petite figure qui est ici. Que IB soit égal à la circférence F 5 3; AB à D 11 ou à 3 25; & les lignes CG, HN, OP, &c. égales à D 12, D 13, D 14, & autres sinus, desquels il faut retrancher AB ou D 11 pris autant de fois, c'est-à-dire, le parallelogramme ABIL. Tout cela se doit comparer au sinus total pris autant de fois, qui est DF en la grande figure, mais en la petite c'est IK qui fait le parallelogramme IKBM duquel il faut ôter le même parallelogramme ABIL; & partant il reste le parallelogramme LAMK, & de IKAB il restera le triligne LAPK; & partant le solide fait par les quar-

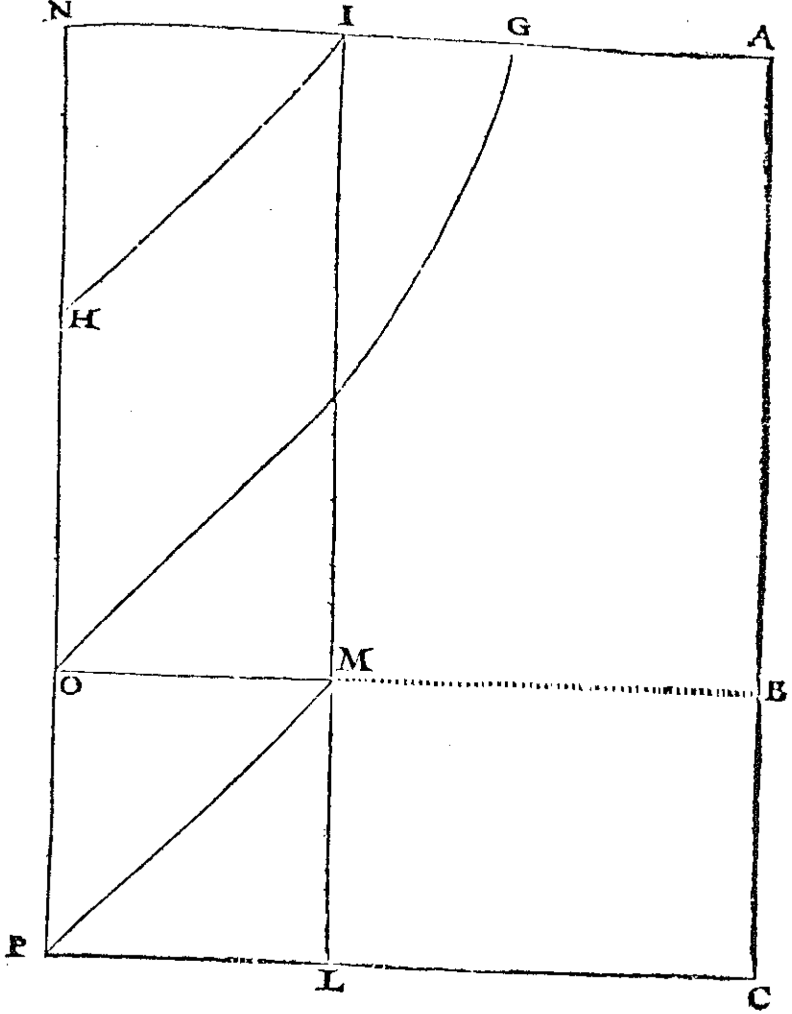


rez des perpendiculaires est au cylindre de la grande, comme le triligne LAK au parallelogramme LKMA. Mais ne nous contentant pas de cela, nous cherchons des raisons en lignes; & retournant à la grande figure, nous disons : Comme tous les petits sinus sont au grand sinus pris autant de fois; ainsi le sinus 11 3 est à la circonférence F 3. Or il faut ôter de cette raison ce qui y est de trop, & dire : Comme tous les petits sinus moins 11 D pris autant de fois, au sinus total pris autant de fois, moins le même 11 D pris autant de fois; & changeant la proportion on dira : Comme le sinus total DF est à D 11, ainsi la circonference F 5 3, sera à quelque portion de la même circonférence F 5 3, laquelle portion il faut ôter de la ligne ou sinus 11 3; & par ainsi la ligne 11 3, quand on en a ôté ce qui avoit été retranché de ladite circonférence F 5 3, est à ce qui reste de ladite circonférence F 5 3, comme le petit solide fait des quarrez de perpendiculaires est à leur cylindre. Or tous les sinus & la circonférence me sont donnez; & partant la raiſon des ſolides ſera connuë, ce qu'il falloit prouver.

Maintenant il faut conſidérer ſur la même figure la raiſon des ſolides entr'eux quand elle roule ſur la ligne circulaire F2 21 étenduë comme droite, & quand l'ouverture du compas eſt F21, ſans répeter ce qui a été dit ci-devant : on trouve que les quarrez des perpendiculaire tirées en l'air des points 21, 22, 23, 24, &c. ſont entr'eux comme les lignes 20 19, 20 18, 20 17, &c. Or toutes ces lignes ſe doivent conſidérer en cette ſorte, 20 D — 19 D; 20 D — 18 D; 20 D — 17 D, & ainſi des autres. Les ſuivantes ſe conſidérent ainſi, 20 D + 10 D; 20 D + 11 D; 20 D + 12 D; 20 D + 13 D, &c. enſorte que 20 D eſt pris autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F2 21 & les autres ſinus, ſçavoir D10, D11, D12, D13 &c. ſont pris autant de fois qu'il y a de diviſions au quart de la circonférence F51. De tout ceci il en faut ôter les lignes D19, D18, D17, & les autres priſes autant de fois qu'il y a de diviſions dans la circonférence 1 21. Voilà une des équations; l'autre eſt la ligne F20 priſe autant de fois qu'il y a de diviſions en la circonférence F2 21.

Pour mieux entendre ce diſcours, on fera la figure qui eſt ici à côté du demi-cercle, en laquelle AB vaut F1, quart de la circonférence; BC vaut 1 21; & la toute AC vaut la circonférence F3 21; AN vaut F20, & par ainſi le parallelogramme NC vaut ce qui eſt contenu dans 20 F2 21; NG vaut FD ſinus total; AG ou ſon égale NI vaut D20; NH égale à OP vaut la circonférence 1 21. Nous diſons donc que comme le rectangle ANPC eſt au rectangle INPL + le triligne NGO — le triligne INH ou OMP ſon égal, ainſi le cylindre eſt au ſolide qui ſe fait quand la figure rectan-





chée du cylindre tourne ſur la circonférence F1 21 étenduë en ligne droite; ce qu'il falloit démontrer.

Nous venons maintenant à une conſidération qui eſt que prenant toûjours le même point F, & l'ouverture du compas telle que ſon quarré ſoit égal aux quarrez de FE & de la ligne 30, il ſe trouve, par exemple, que les

les quarrez de FE & de 30 sont égaux aux quarrez de F 22 & de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22, & ainsi de tous les autres. Or le quarré FE vaut les quarrez E 22 & 22 F; partant les quarrez de E 22, 22 F, & de 30 sont égaux au quarré de 22 F & à celui de la perpendiculaire tirée de 22 en l'air. J'ôte des deux équations ce qui est commun, sçavoir le quarré F 22, & il me reste d'une part le quarré E 22 + le quarré 30 égal au quarré de la perpendiculaire tirée en l'air du point 22; & ainsi tous les quarrez des perpendiculaires tirées en l'air de tous les points qui divisent la demi-circonférence, sont égaux aux quarrez des lignes qui partent du point E, & se terminent ausdits points, plus le quarré de la ligne 30. Il faut remarquer que la ligne 30 ne change point, mais les autres changent toûjours, puisque les quarrez E 22 & 22 F, E 23 & 23 F, & tous les autres sont égaux au quarré FE pris autant de fois. Mais de tous de ces quarrez je n'ai besoin que de la moitié; partant cette moitié sera égale à la moitié du quarré FE pris autant de fois. (On ne prend que la moitié de cette somme de quarrez, parce qu'on n'en a pas besoin d'autre chose; car joignant lesdits quarrez au quarré de 30 pris autant de fois, on aura la valeur des quarrez des perpendiculaires en l'air, qui est ce qu'il faut avoir.)

Nous conclurons donc que le solide qui se fait par la révolution des perpendiculaires qui tournent sur la circonférence étenduë comme une ligne droite, est égal à deux cylindres, le premier desquels a d'une part la ligne FE, & de l'autre la même circonférence étenduë; & de celui-ci il n'en faut prendre que la moitié. L'autre cylindre a la même circonférence étenduë, & la ligne 30 pour hauteur; car en l'un & l'autre cylindre, la même tourne sur la circonférence étenduë; & ainsi le cylindre des perpendiculaires est égal à ce petit cylin-

dre & à la moitié du grand tout ensemble; ce qu'il falloit démontrer.

Il faut voir maintenant la comparaison des plans, & comment ils sont entr'eux. Nous avons trouvé que les quarrez de E 22 & de 30 sont égaux au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22, & le rectangle FE 19 est égal au quarré E 22. Je fais un rectangle égal au quarré 30 sur la ligne EF, & sur quelqu'autre ligne tirée depuis E en K, & ainsi les deux rectangles joints ensemble, sçavoir FE 19, & FEK, qui valent le rectangle FEK 19 sont égaux aux quarrez de E 22 & de la perpendiculaire 30, comme aussi au quarré de la perpendiculaire élevée sur le point 22. Or si du point K comme sommet je décris une parabole, dont le côté droit soit égal à FE, & KF soit l'axe: le quarré de l'ordonnée qui partira du point 19 sera égal au rectangle FE par 19 K, & ainsi de toutes les autres; partant les quarrez desdites ordonnées seront égaux aux quarrez des perpendiculaires tirées en l'air, & les mêmes ordonnées égales aux perpendiculaires; c'est pourquoi le plan occupé par les perpendiculaires devroit être égal au plan occupé par les ordonnées.

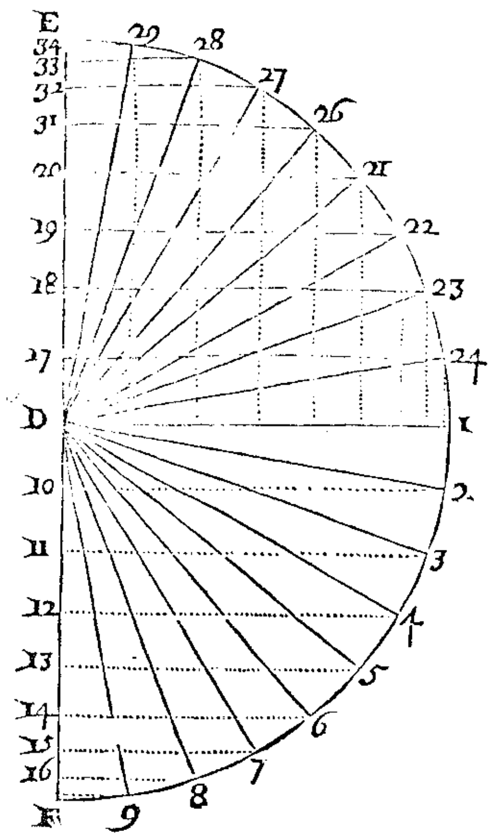
Mais la comparaison ne se peut pas faire de la sorte, parce que les perpendiculaires sont également distantes l'une de l'autre; mais les ordonnées le sont inégalement, puisque la ligne FE est toute coupée en parties inégales, & partant le plan ne peut être comparé au plan.

Voyez la Figure suivante.

Nous venons maintenant à considérer qu'elle est la raison, ou comparaison des quarrez des sinus avec le quarré du diamétre FE. La circonférence F 1 E est divisée en parties infinies & égales, & les lignes 24 17, 23 18, 22 19, 21 20, 26 31, 27 32, 28 33, & 29 34 sont toutes sinus droits. Je dis que le quarré D 24 demi-diametre vaut le quarré 17 24, & le quarré 17 D qui est ſinus de complément égal à la ligne tirée du point 24 perpendiculaire ſur le demi-diamétre D 1, & eſt égale au ſinus 29 34. Le même quarré du demi-diametre D 23 eſt égal aux quarrez de 18 23, & de 18 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 23 ſur D 1, & auſſi au ſinus droit 28 33. Le quarré de D 22 eſt égal aux quarrez de 22 19, & de 19 D ſinus de complément égal à la perpendiculaire tirée de 22 ſur D 1 & au ſinus 27 32, & ainſi de tous les autres, en telle ſorte que tous les ſinus de complément ſont égaux aux ſinus droits, ci-devant marquez; & ainſi les quarrez de tous les ſinus pris deux fois (ce qui ſe doit faire, puiſque les uns ſont égaux aux autres) ſont égaux au quarré du demi-diametre D 1 pris autant de fois qu'il y a de ſinus. Mais le quarré du demi-diametre n'eſt que le quart du quarré du diametre; partant le quarré du diametre ſera huit fois la ſomme des quarrez des ſinus, c'eſt-à-dire, que les quarrez des ſinus ſont au quarré du diametre pris autant de fois comme 1 à 8. Voilà la premiere partie.

Pour la ſeconde. Le quarré de FE eſt égal aux quarrez de F 33 & 33 E, plus deux fois le rectangle F 33 E, qui eſt à dire le quarré 28 33 deux fois; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 32 & 32 E, plus deux fois le rectangle F 32 E, ou deux fois le quarré 32 27; le même FE eſt égal aux quarrez F 31 & 31 E, plus deux fois le rectangle F 31 E, ou le quarré 31 26; le même quarré FE eſt égal aux quarrez F 20 & 20 E, plus deux fois le rectangle F 20 E, ou le quarré 20 21, & ainſi de tous les autres tant en haut qu'en bas: & de cette ſorte le quarré FE vient à être égal à deux fois tous ces petits quarrez F 34, 34 E; F 33, 33 E; F 32, 32 E, & tous les autres en telle ſorte que le quarré FE pris autant de fois eſt double de tous ces quarrez, & de plus, à deux fois les quarrez de 34 29, 33 28, 32 27, & les

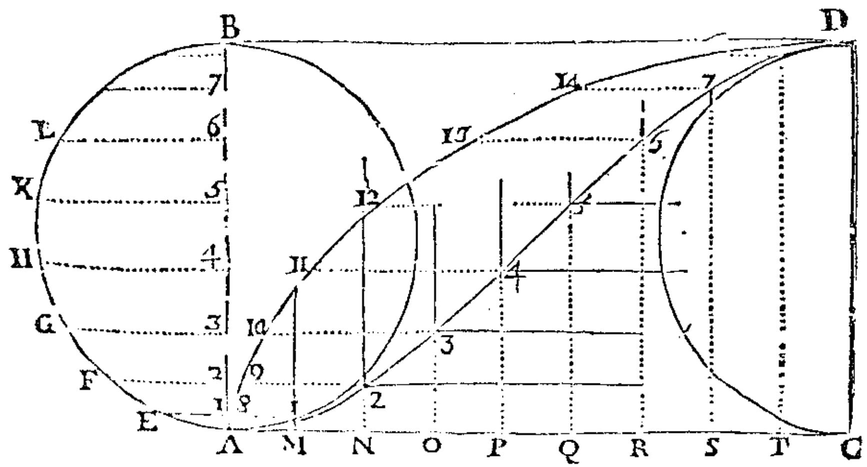
autres. Nous avons vû comme tous les quarrez de ces



ſinus 34 29, 33 28, &c. ſont au quarré du diametre FE pris autant de fois, comme 1 à 8. Or ils ſont ici deux fois & les ſinus verſes auſſi deux fois; partant deux fois les quarrez des ſinus verſes, & deux fois les quarrez des ſinus droits ſont égaux à huit fois les quarrez des ſinus droits; & ôtant de part & d'autre deux fois les quarrez des ſinus droits, reſtera d'une part deux fois les quarrez des ſinus verſes égaux à ſix fois les quarrez des ſinus droits; & prenant la moitié, les quarrez des ſinus verſes ſeront égaux à trois fois les quarrez des ſinus droits; partant les quarrez des ſinus verſes ſont à ceux des ſinus droits, comme 3 à 1, mais le quarré de FE pris autant de fois eſt aux quarrez des ſinus droits, comme 8 à 1: donc le quarré de FE pris autant de fois eſt aux quarrez des ſinus verſes, comme 8 à 3, ce qu'il falloit trouver.

La précedente concluſion nous ſervira pour trouver la raiſon du ſolide que fait la Roulette, quand elle tourne ſur la circonférence du cercle générateur étenduë en ligne droite. Car le solide fait par les sinus verses (voyez la figure de la Roulette, qui est placée ci-après page suivante) sçavoir par M 1, N 2, O 3, P 4, &c. est au solide fait par le parallelogramme composé du diametre du cercle, & de la circonférence d'icelui étendué en ligne droite, comme 3 à 8 par la conclusion précedente. Nous sçavons aussi que l'espace compris entre les deux lignes A 11 D & A 4 D est égal au demi-cercle AHB, parce que les lignes d'un des espaces sont égales aux lignes de l'autre espaces par la construction : partant le double de l'espace est égal au cercle entier AHBA, de sorte que tout ce qui se dira du cercle se doit entendre dudit espace doublé. Mais il a été démontré que le cylindre de AB est au solide qui se fait lorsque la figure A 12 D 5 A tourne sur la ligne ou circonférence AC, comme 8 à 2, lesquels 2 joints à 3 qu'on a trouvez ci-devant, font 5, qui est la raison qu'il y a du solide entier de la roulette, à son cylindre ABDC doublé ; car ABDC n'est que la moitié de l'espace parcouru par la Roulette.

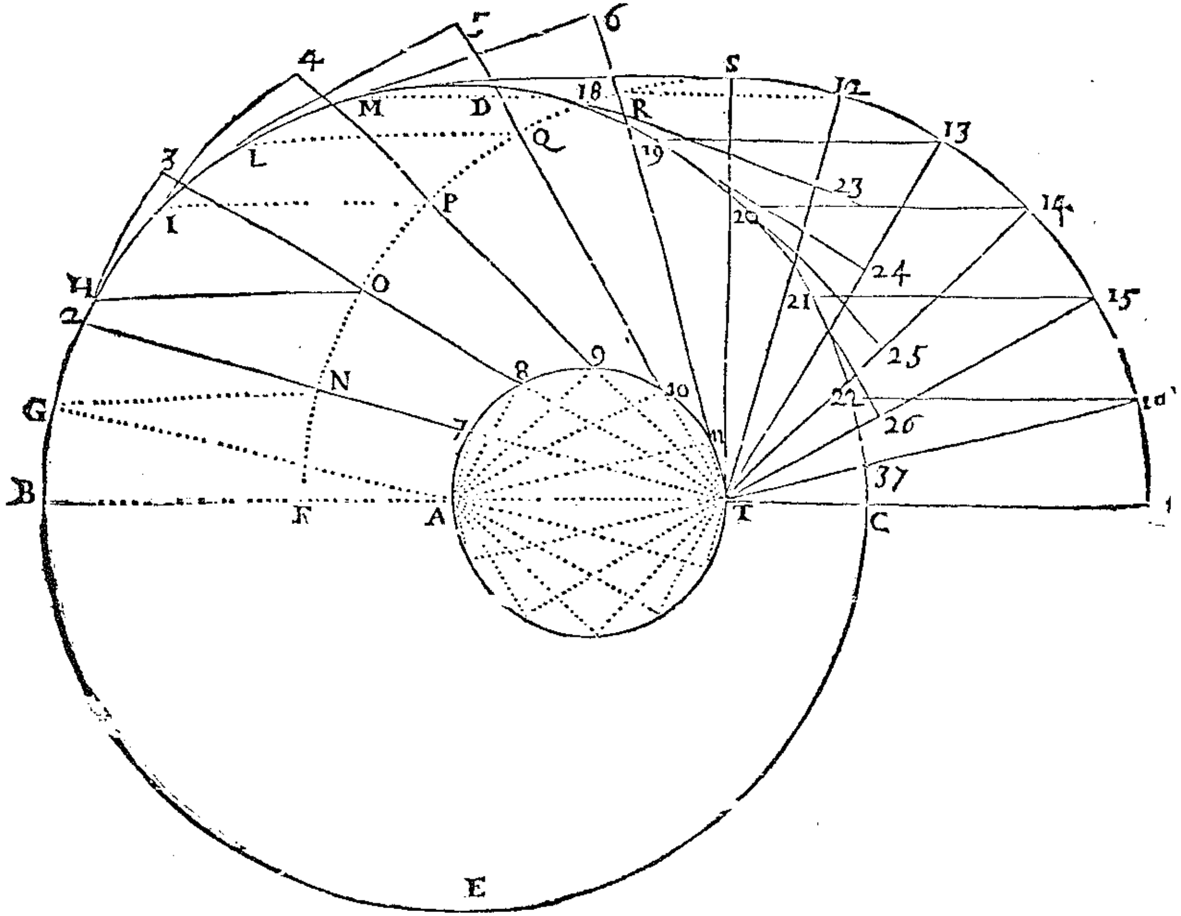
Remarquez que ce solide qui est au cylindre AD tour-



né sur C, comme 1 à 4, ou 2 à 8 : est celui que fait l'espace compris entre les deux lignes A 12 D & A 4 D, qui est égal à celui que feroit le demi-cercle AHB par la même révolution, parce que l'une & l'autre figure a ces lignes égales, & posées en même distances de AC, & partant est le quart dudit cylindre AD : & joignant ledit solide à celui qui se fait par l'espace compris entre les lignes A 4 D & AC, qui est audit cylindre comme 3 à 8, on aura le solide fait par l'espace compris entre A 12 D & AC, qui sera 5, ledit cylindre AD étant 8.

TRACER SUR UN CYLINDRE DROIT un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique donné, & d'un seul trait de Compas.

LE cercle BDCE est la base d'un cylindre oblique, les côtez duquel partans des points B, G, H, I, &c. vont obliquement rencontrer un autre cercle en haut, qui est l'autre base du cylindre, & est parallele au premier BDCE :) ce cercle peut être représenté par le cercle FNOP, &c. mais il est en l'air & à plomb au-dessus de celui-ci) l'axe du même cylindre sort du centre A, va rencontrer obliquement le centre dudit cercle superieur. Or nous feignons que du sommet de l'axe soit tirée une perpendiculaire qui tombe sur le point T ; & que du sommet de tous les côtez du cylindre s'abaissent des perpendiculaires qui tombent aux points F, N, O, P, &c. qui font la circonférence d'un cercle dont le centre est le point T, & lequel est égal au premier BDC, comme il est aisé à voir. Or divisant les deux cercles ou bases du cylindre en parties infinies aux points G, H, I, L, &c. feignant des lignes tirées GH, HI, IL, &c. ces petites lignes passent pour la circonférence même, & le cylindre en cette sorte se trouve divisé en infinies parallelogrammes; car les côtez du cylindre avec la portion de la circonférence des deux cercles font des parallelogrammes qui composent tout l'espace du cylindre; de sorte qu'il faut comparer tous ces parallelogrammes au grand parallelogramme pris autant de fois. Si du point G je tire une ligne touchante G 2, & du point correspondant à G, sçavoir de N, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, qui la rencontre au point 2; si du sommet du côté du cylindre (j'entens du côté qui commence en G, & va finir à l'autre cercle au-dessus du point N) je tire une ligne au point 2: cette ligne sera perpendiculaire à la ligne G 2. Du point H je tire une ligne touchante, & du point O correspondant à H, je tire une perpendiculaire à ladite touchante, sçavoir O 3, & ainsi des autres points I & P, L & Q, &c. je ne parle plus de la ligne tirée d'enhaut, car il suffit d'avoir dit une fois qu'elle sera perpendiculaire à la même touchante. Ayant ainsi tiré autant de perpendiculaires qu'il y a de touchantes à chaque point, ces lignes seront N 2, O 3, P 4, Q 5, &c. Si chacune de ces lignes est continuée comme 2N7, 3 O 8, 4 P 9, &c. elles iront toutes finir au point T centre du cercle FS 17. Pour la preuve, nous feignons qu'il y a une ligne AG, laquelle avec 27 compose un quadrilatere: en icelui l'angle 7 2 G par la construction est droit; l'angle A G 2 est droit, sçavoir du centre au point d'atouchement; partant 2 N, & GA sont paralleles. Soit tirée NT, l'arc GB étant égal à l'arc NF. Il s'ensuit que l'angle GAB est égal à l'angle NTF, puisqu'ils sont faits tous deux aux centres T & A des deux cercles égaux BDC & FS 17, & partant la même GA sera parallele à NT; donc 2 N 7, & NT sont paralleles entr'elles; mais elles se joignent au point N, & partant elles ne font ensemble qu'une même ligne.



Maintenant il faut considerer les parallelogrammes, au lieu desquels je prens la perpendiculaire qui tombe du sommet sur les touchantes ci-devant, comme du sommet du cylindre qui part de G & va en l'air, j'abaisse la perpendiculaire sur le point 2, laquelle est la hauteur ou perpendiculaire du parallelogramme composé de ligne G 2, qui passe dans les indivisibles pour circonférence,

circonférence, & du côté du cylindre qui part de G & va en l'air, lequel côté vaut pour deux côtez du parallelogramme, sçavoir commençant en G & 2, & finissant en la circonférence de la base superieure du cylindre; & par ainsi on a les quatre lignes du parallelogramme, sçavoir G 2 (qui passe pour circonférence) & son égale en la circonférence de la base superieure, & les deux côtez du cylindre. Mais au lieu du parallelogramme nous considerons un triangle qui a pour un de ses côtez la perpendiculaire tirée du sommet du coté sur le point 2, & qui se peut nommer la perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme; & pour les deux autres côtez, la ligne G 2, & le côté du cylindre tiré de G en l'air. Or en ce triangle le côté du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire tirée du sommet & finissant en 2. Il faut ensuite considerer un autre triangle, dans lequel la même perpendiculaire tombant en 2 soit un des côtez; 2 N soit un autre côté; & le troisiéme soit la ligne tombante perpendiculairement du sommet du côté sur le plan du cercle au point N. Or en ce triangle la perpendiculaire qui tombe sur 2 peut autant que les deux lignes 2 N, & la perpendiculaire qui tombe du sommet sur N. Mais cette perpendiculaire qui tombe du sommet sur N, O, P, Q, & autres points de la circonférence est toûjours égale : mais les lignes 2 N, 3 O, 4 P, 5 Q, &c. sont inégales; car 2 N vaut 7 T; 3 O vaut 8 T; 4 P est égale à 9 T, & ainsi des autres qui toutes sont inégales.

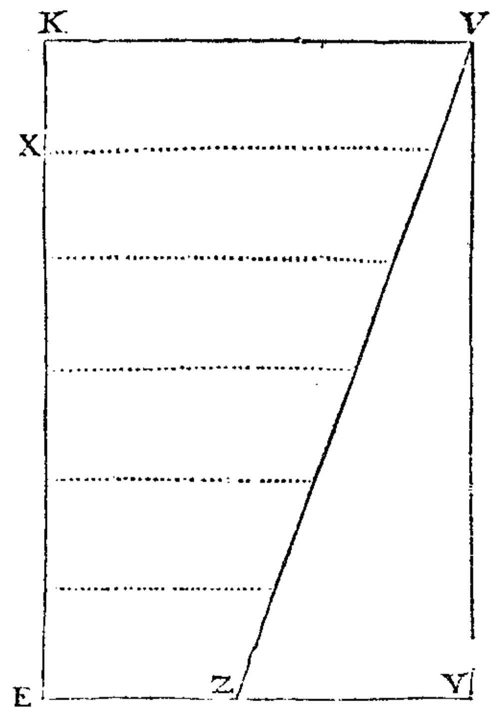
Au premier triangle G 2 & l'autre point qui est au cercle superieur le côté du cylindre qui va de G en l'air à l'autre cercle superieur, vaut la ligne tirée du sommet (qui est ce troisiéme point en l'air) & qui finit en 2, & la ligne G 2. (on doit entendre ceci de tous les autres points & triangles qui se peuvent former de

la même sorte.) Mais les lignes G 2, H 3, I 4 &c. vont toûjours augmentant; car G 2 est égal à la soutendante A 7, la ligne H 3 à A 8, I 4 à A 9; toutes lesquelles lignes A 7, A 8, A 9 sont inégales. Mais avant que de conclure il faut prouver que la ligne G 2 est égale à A 7, H 3 à A 8, & ainsi des autres; de plus que 2 N est égale à 7 T, 3 O à 8 T, &c. Pour cet effet, il faut considérer les triangles 2 GN, & AT 7, ausquels l'angle 2 NG est égal à l'angle AT 7; car les lignes GN, AT sont paralleles, l'angle N 2 G est droit, par la construction, & pareillement T 7 A qui est dans le demi-cercle, & partant le troisiéme angle est égal au troisiéme; la ligne GN est égale à AT, & partant tout le triangle à l'autre triangle, & partant la ligne 2 N à 7 T, & G 2 à la soutendante A 7; ce qu'il falloit démontrer.

Il nous reste à voir le rapport & la raison de tous les petits parallelogrammes à leur plus grand pris autant de fois. Or il faut considérer que les petits parallelogrammes bien qu'ils ayent les côtez égaux, car ils sont composez des côtez du cylindre & de la portion de la circonférence divisée en parties égales infinies, & cette division est faite aux deux cercles ou bases d'icelui cylindre; & d'autant que les angles sont inégaux, les parallelogrammes sont inégaux, & ainsi leur hauteur sera inégale, c'est par cette hauteur qu'il faut considérer lesdits parallelogrammes. Il faut voir premierement le plus grand de tous qui est fait de BG, tant en la base du cylindre BDC, qu'en l'autre qui est en l'air, & des côtez du cylindre. Or en ce parallelogramme il faut remarquer que la perpendiculaire qui est la hauteur dudit parallelogramme, & qui du sommet tombe sur le point B, n'est autre chose que le côté du cylindre; & considérant le second parallelogramme qui a pour côtez GH & les côtez du cylindre, on voit que ce côté du cylindre vaut en puissance la ligne G 2, & la perpendiculaire ou hauteur du même parallelogramme ; & partant ladite perpendiculaire ou hauteur du parallelogramme est plus petite que la perpendiculaire du premier, qui est égale au côté du cylindre ; & par ainsi ces hauteurs perpendiculaires ou vont toûjours en diminuant jusques au quart de cercle, & puis après vont en croissant au quart suivant.

Remarquez que les lignes G 2, H 3, I 4, L 5 qui sont touchantes, passent pour la circonférence des divisions du cercle, & pour côtez des parallelogrammes.

Il faut entendre en cette figure rectiligne, que KV est égale à la plus grande des perpendiculaires, & aussi au côte du cylindre, & qui tombe perpendiculairement sur le côté BG au point B : la ligne KX & les autres divisions représentent & sont égales à celles de la circonférence, comme KX à BG, & ainsi des autres ; car KE est supposée égale au quart de la circonférence BHD. Le plus grand des parallelogrammes est fait des lignes KV, KX ; & quand il est pris autant de fois qu'il y en a de petits, il occupe l'espace KVYE ; partant toutes ces lignes sont à la grande KV prise

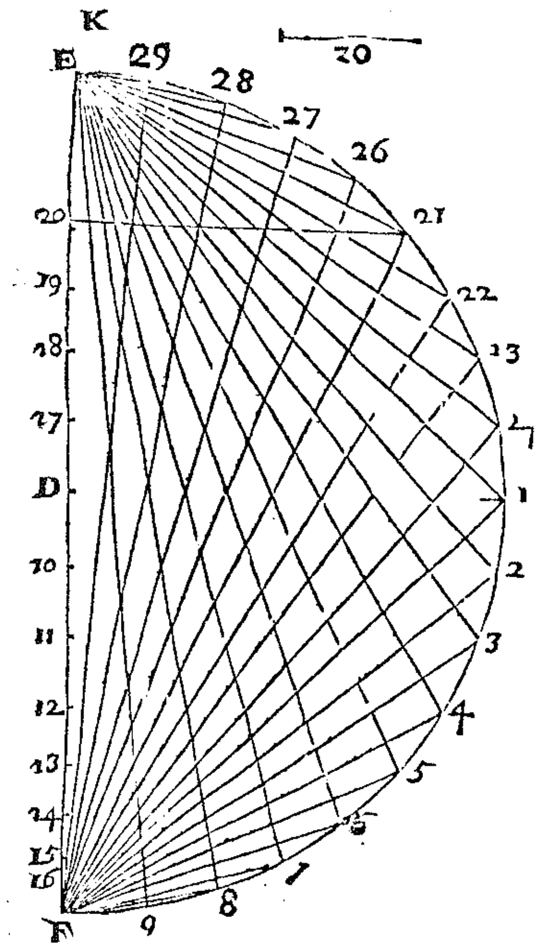


autant de fois, comme la figure KVZE est au quart de la superficie du cylindre qui est ici représenté par le parallelogramme KVYE.

Il faut passer plus avant, & considérer les perpendiculaires qui sont tirées du sommet sur les points 2, 3, 4, 5, &c. du cercle BDC. Or chacune de ces perpendiculaires, par exemple celle qui part du point 2, vaut la ligne qui tombe perpendiculairement sur le point N & la ligne N 2 ; la perpendiculaire qui tombe sur le point 3 vaut en puissance celle qui tombe perpendiculairement sur O, & la ligne O 3 ; & ainsi des autres. Ceci s'explique mieux dans le petit cercle A 9 T. Il faut donc concevoir la ligne qui part du point A centre du grand cercle BDC base du cylindre oblique, & qui va trouver le centre de l'autre cercle qui est la base supérieure du même cylindre, duquel centre on abaisse la perpendiculaire qui tombe sur la circonférence du petit cercle A 9 T au point T. Ayant trouvé le point T, de l'intervale AT comme diametre je forme le cercle A 9 T ; la demi-circonférence duquel est divisée en autant de parties égales qu'il y en a au quart BD de la circonférence du cercle BDC. Puis après, du point duquel j'ai tiré la perpendiculaire sur le point T, je tire des lignes aux points 11, 10, 9, 8, 7, &c. qui font la division du cercle, comme il a été dit. Du point T je tire des lignes aux mêmes points 11, 10, 9, 8, 7. Je dis davantage que le cercle A 9 T nous représente la base d'un cylindre droit qui a son autre base en l'air, sçavoir un cercle dont la circonférence passe par le point d'où est tiré la ligne qui tombe sur T, & est aussi le centre de la base supérieure du cylindre oblique, & on nommera ici ledit point qui est en l'air, sommet. Nous disons donc que la ligne tirée en l'air dudit sommet sur le point 7, est égale en puissance aux deux lignes dont l'une est celle qui tombe perpendiculairement dudit sommet sur le point T; & l'autre est T 7. La ligne qui part dudit sommet, & va au point 8, est égale en puissance à la susdite qui tombe dudit sommet sur T, & à T 8, & ainsi de toutes les lignes qui vont au point du cercle A 9 T. Or la ligne qui tombe sur le point T est toûjours la même, & la hauteur perpendiculaire du cylindre oblique; & toutes ces lignes qui partent dudit sommet, & vont sur les points 7, 8, 9, 10, 11, &c. forment un cône dont ledit point d'où sortent toutes ces lignes, & aussi celle qui tombe sur T, est le sommet; & chacune desdites lignes qui vont dudit sommet sur 7, 8, 9, &c. sont chacune égales en puissance à ladite ligne qui tombe sur T, & à celle qui de T va sur le point de la circonférence A 9 T, auquel celle qui part du sommet aboutissoit aussi.

Or en tout ceci on doit considérer la figure du discours précedent, qui est ici décrite, en laquelle nous feignons que l'ouverture du compas se doit faire sur un cylindre droit posant un pied du compas pour pole sur le point F, & traçant de l'autre sur le cylindre, & faisant ladite ouverture plus grande que le diametre FE : la pointe du compas va toucher la plus petite des perpendiculaires, laquelle partira du point E, & montera le long du cylindre, & les perpendiculaires suivantes qui partent des points 29, 28, 27, 26, 21, 22, 23, &c. jusques au même point F, auquel lieu la perpendiculaire est égale à l'ouverture du compas, & partant la plus grande de toutes ces perpendiculaires. Or la ligne qui est l'ouverture du compas est égale en puissance à la ligne FE, & à la moindre perpendiculaire, sçavoir à celle qui va du point E le long du cylindre. Prenons maintenant quelqu'autre point comme 22. Nous disons que la ligne qui est l'ouverture du compas vaut les quarrez de la ligne F 22, & de la perpendiculaire du point

22 en l'air; partant les quarrez de FE & de la perpendiculaire sur E en l'air, sont égaux aux quarrez F 22 &



de la perpendiculaire sur 22 en l'air. Au lieu du quarré FE, je prends les quarrez de F 22, & de 22 E; partant les quarrez de F 22, & de la perpendiculaire sur 22 en l'air, valent les quarrez de F 22, 22 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air. Des deux grandeurs ôtez ce qui est commun, sçavoir le quarré de F 22, restera le quarré de la perpendiculaire sur 22 en l'air, égal aux quarrez de 22 E & de la perpendiculaire sur E en l'air; & faisant le même aux autres points 23, 24, 25, 26, 27, &c. on aura le quarré de la perpendiculaire sur 23, par exemple, égal aux quarrez de 23 E, & de la perpendiculaire sur E en l'air, & ainsi des autres: par ainsi nous trouvons que les quarrez desdites perpendiculaires en l'air sont égaux aux quarrez de la perpendiculaire sur E en l'air, & des soutendantes 23 E, 22 E, 26 E, &c.

Or si on suppose que le cercle A 9 T soit aussi grand que F 22 E de la présente figure, & qu'ils soient tous deux également divisez, & que l'ouverture du compas vaille en puissance le diametre FE, & la hauteur du cylindre oblique, sçavoir la ligne qui tombe perpendiculairement sur T, alors les perpendiculaires bornées par le trait du compas, & tirées en l'air des points E 29, 28, 27, 26, &c. sont toutes égales aux lignes qui tombent sur les points T, 11, 10, 9, 8, 7, A, & qui sont tirées du centre de la base supérieure du cylindre oblique, qui est le sommet d'où tombe perpendiculairement la ligne sur le point T, & cette ligne est la plus courte de toutes celles qui tombent dudit point sur le cercle A 9 T, & est égale à la perpendiculaire tirée sur le point E en l'air, & coupée par ladite ouverture du compas; la ligne qui aboutit au point 11, & vient du même sommet, est égale à la perpendiculaire sur le point 29 en l'air, & coupée par le compas; & ainsi toutes les lignes tirées du sommet, ou centre de la base supérieure du cylindre oblique sont égales aux perpendiculaires retranchées par le compas sur la surface du cylindre droit. Or les lignes ainsi tirées du centre oblique sur le cercle A 9 T sont égales aux lignes qui tombent sur les points 2, 3, 4, &c. & qui sont tirées de la circonférence de ladite base supérieure du cylindre oblique, sçavoir des points de ces perpendiculaires aux points F, N, O, P, &c. & les soutendantes T 7, T 8, T 9, &c. sont égales au lignes N 2, O 3, P 4, &c. Nous disons donc que les parallelogrammes qui sont en même hauteur, & dont les bases sont égales, doivent être égaux, & contiennent des espaces égaux. Or pour mieux entendre cette égalité, nous de-

Voyez la Figure de la page 312.

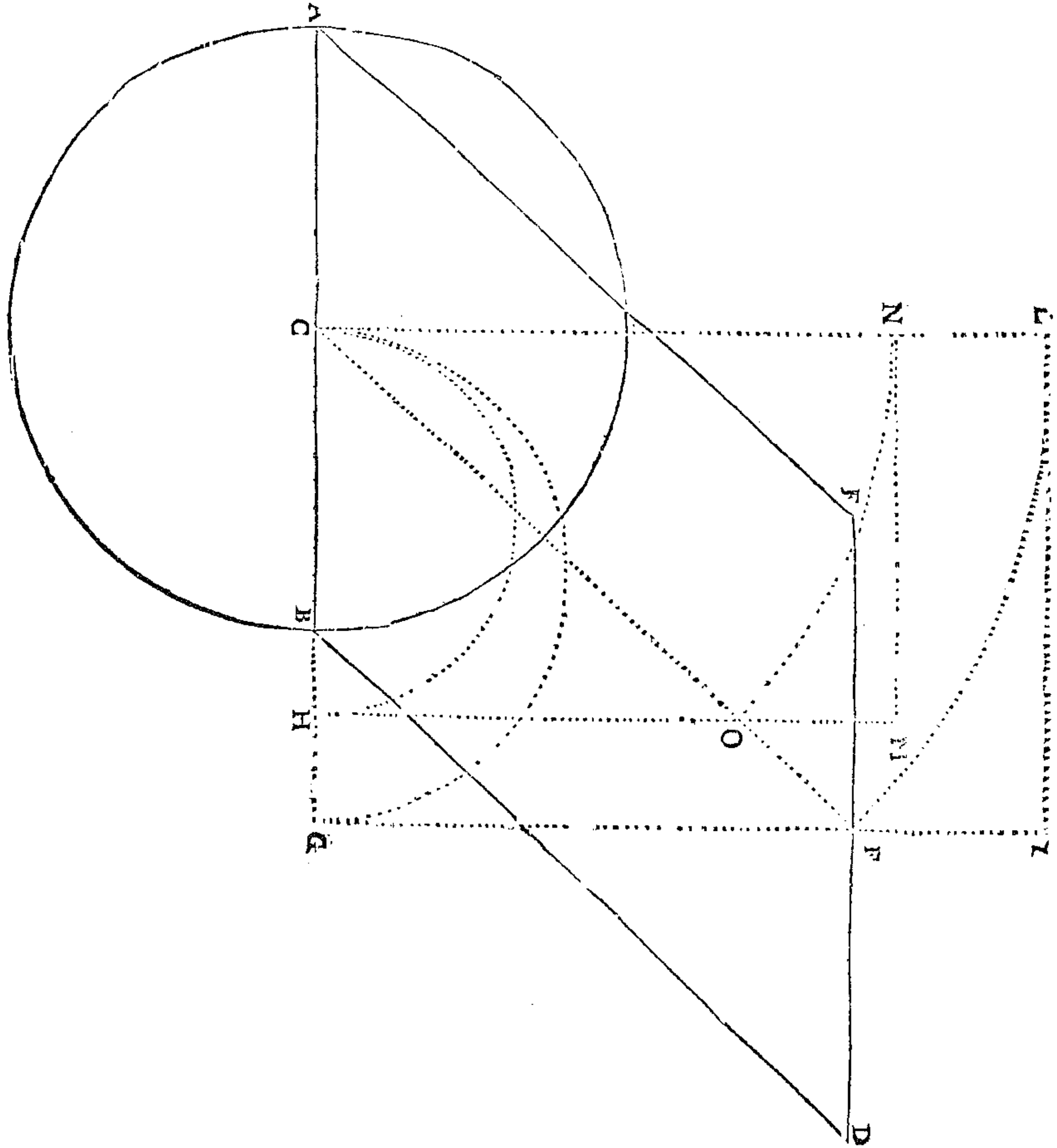
vons feindre que le cercle A 9 T va jusques au centre du cercle FPS 17, & que son diametre AT est égal à BA demi-diametre du cercle BDC; & ainsi le demi-cercle A 9 T sera égal au quart de cercle BD. Or le trait du compas qui s'est fait en la derniere figure F 22 E, se rapporte entiérement à ce qui s'est fait dans le cercle A 9 T de l'autre figure; & partant le trait du compas fait sur le cylindre droit est égal au quart de la circonférence du cylindre oblique.

Pour conclusion. Si le cercle de la derniere figure F 22 E est égal à celui de l'autre figure, sçavoir BDC, & que la perpendiculaire retranchée par le compas, & qui part du point E en l'air) quand le compas est plus ouvert que FE) est égale à la perpendiculaire tirée de la base supérieure du cylindre oblique à l'autre base, & qui est la vraye hauteur dudit cylindre oblique, & qu'on a supposé tomber de la base supérieure sur les points F, N, O, P, &c. & même sur C: toutes les perpendiculaires retranchées par le compas sur le cylindre droit dont la base est F 22 E seront égales aux perpendiculaires tirées du cercle supérieur du cylindre oblique sur les points B, 2, 3, 4, 5, &c. & la figure retranchée par le compas sera égal à la superficie du cylindre oblique duquel la base est le cercle BDC, & la hauteur perpendiculaire double de la perpendiculaire sur E en l'air, & retranchée par le compas, sçavoir de la perpendiculaire tant dessus que dessous ledit point E.

Voyez la Figure suivante.

Que la ligne C G soit le diametre d'un cercle qui serve de base à un cylindre droit duquel on ait retranché une superficie; A C B soit le diametre d'un cercle qui soit la base d'un cylindre oblique proposé; C F soit l'axe dudit cylindre oblique; F le centre de la base supérieure, duquel tirant la ligne F G perpendiculaire sur A B, ladite F G sera la hauteur du cylindre

cylindre oblique. Mais si on éleve ledit axe CF perpendiculairement sur C, on aura son égale CL qui est la hauteur qu'il faut donner au cylindre droit qui a la ligne CG pour diametre de sa base ; & si on tire de L en I une parallele à CG, & du point I la ligne IFG, le cylindre droit est achevé, sur lequel du point C, & intervale CL, on retranchera avec le compas la superficie LF, &c. Or nous avons vû ci-devant que ce qui est retranché sur la superficie du cylindre droit CLIG, est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre du cylindre droit CG, sçavoir de sa base au demi-diametre de la base du cylindre oblique AC ou CB. Or si le diametre du cylindre droit est égal au demi-diametre de l'oblique, alors ce qui est retranché du cylindre droit sera égal à la superficie du cylindre oblique. Mais l'un n'étant pas égal à l'autre, pour trouver un retranchement qui soit égal à la superficie du cylindre oblique, il est necessaire de trouver un cylindre droit semblable au premier CLIG, comme est CNMH. Pour le trouver, on prend une moyenne proportionnelle entre CB, & CG, laquelle est CH : du point H j'éleve la perpendiculaire HOM qui coupe la ligne CF en O, & fait le triangle CHO semblable au triangle CGF : ces triangles semblables servent à faire le petit cylindre droit semblable au grand cylindre droit ; car du petit cylindre CNMH, on retranche NEO, &c. & ce qui est retranché est égal à la superficie du cylindre oblique proposé ; car le retranché LF du cylindre droit CLIG est à la superficie du cylindre oblique proposé AEDB, comme le diametre CG au demi-diametre CB. Mais le petit cylindre CNMH étant semblable au grand cylindre CLIG, le retranché de l'un sera semblable au retranché de l'autre : les superficies des cylindres sont entr'elles en raison doublée de leurs diamétres ;

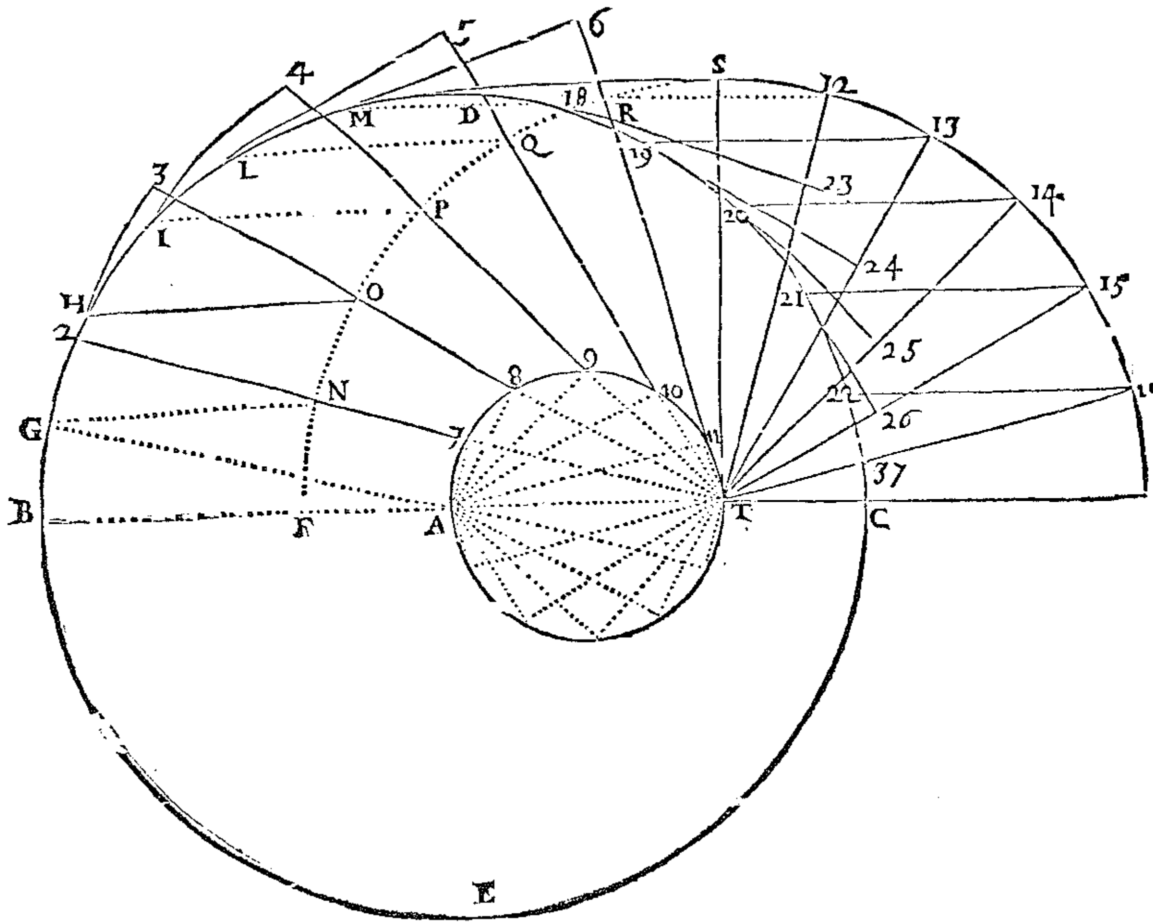


partant la superficie du grand cylindre est à celle du petit en raison doublée de CG diametre du cercle du grand cylindre à CH diametre du cercle du petit ; la superficie de l'un sera donc à celle de l'autre en raison doublée de CG à CH, c'est-à-dire, comme CG à CB. Mais les cylindres droits étant semblables, le retranché de l'un sera au retranché de l'autre, comme toute la superficie de l'un à toute la superficie de l'autre; partant le tranché du cylindre droit CLF est au retranché du petit cylindre droit CNEO, comme CG à CB. Mais le retranché du grand cylindre droit est à la superficie du cylindre oblique, comme CG à CB; partant le retranché du petit cylindre est égal à la superficie du cylindre oblique, puis que l'un & l'autre a même raison au retranché du grand cylindre.

Tout ce qui a été dit ci-devant pour couper sur un cylindre un espace égal à la superficie d'un cylindre oblique, se peut réduire à ce qui s'ensuit.

Soit fait la figure suivante dans laquelle le diametre du petit cercle, sçavoir AT, doit être égal au demi-diametre du grand cercle BDC base inférieure, & de FPS 17 représentant la base supérieure en l'air du cylindre oblique dont le centre est perpendiculaire sur T joint au point C. Je dis que si on ouvre le compas autant que le côté du cylindre oblique, & que laissant un des pieds du compas sur le point F joint au point A, on trace une ligne sur le cylindre droit dont la base est A 9 T, l'espace compris entre ladite ligne, & ladite base A 9 T, sera égal à la superficie du cylindre oblique.

Soient divisées les bases desdits cylindres oblique & droit en une infinité de parties égales, sçavoir, faisant autant de divisions sur le quart de cercle BLD que sur le demi-cercle A 9 T, & ce, tant aux bases supérieures qu'aux inférieures desdits cylindres; & tirant des lignes



par les points desdites divisions, on fera plusieurs parallelogrammes qu'on prendra au cilindre oblique d'une base à l'autre; mais au cylindre droit on les prendra depuis la base inférieure jusques à la section faite par le compas. Or lesdits parallelogrammes sont égaux en multitude en l'un & l'autre cylindre, & on les démontrera aussi égaux en quantité, comme il s'ensuit.

Puiſque les parallelogrammes ſuſdits ont même baſe, puiſqu'ils contiennent égale portion ou quantité en la circonférence de la baſe de chacun des cylindres, reſte à montrer que leur hauteur eſt égale. Cette hauteur eſt facile à connoître au cylindre droit. puiſque le côté même du cylindre coupé par le compas, la dénote: mais au cylindre oblique cette hauteur eſt la ligne tirée de la baſe ſupérieure repréſentée par les points N, O, P, &c. perpendiculairement ſur la tangente tirée du point correſpondant en la baſe inférieure; ainſi la ligne tirée du N en l'air ſur la touchante G 2 (qui part du point G de la baſe inférieure correſpondant au point N de la ſupérieure) enſorte qu'il ſe faſſe un angle droit au point 2, eſt la hauteur du parallelogramme tiré de G au point N en l'air de la baſe ſupérieure. Et de même, la hauteur du parallelogramme tiré du point H au point qui eſt au-deſſus de O en l'air en la baſe ſupérieure, eſt la ligne tirée du même point O en l'air au point 3 ſur la touchante H 3 où elles font enſemble un angle droit; & ainſi les hauteurs de tous les parallelogrammes ſont les lignes tirées des points de la baſe ſupérieure perpendiculairement ſur les tangentes qui partent des points correſpondans en la baſe inférieure; & ainſi, le moindre de tous les parallelogrammes ſera celui qui du point D de la baſe inférieure, eſt tiré au point correſpondant à S en la ſupérieure; car il n'a pour hauteur ſimplement que la hauteur du cylindre oblique, ſçavoir les tirées perpendiculairement des points C, F, N, O, &c. à la baſe ſupérieure. Comme le plus grand deſdits parallelogrammes eſt celui qui de B eſt tiré vers F en l'air; car ſa hauteur eſt le côté entier du cylindre oblique: il reſte à démontrer que ces perpendiculaires ſont égales en l'un & en l'autre cylindre.

Premierement, il eſt certain que l'ouverture du com-

pas, qui fait le retranchement ſur le cylindre droit, étant égale au côté du cylindre oblique, la perpendiculaire ſur A au cylindre droit, bornée par le trait du compas, ſera égale à celle qui va du point B au point correſpondant de la baſe ſupérieure du cylindre oblique, qui eſt auſſi le côté du cylindre oblique. Et pareillement la perpendiculaire ſur le point T au cylindre droit eſt égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la ligne tirée perpendiculairement du point S à ſa baſe ſupérieure; car l'axe du cylindre oblique qui du centre A de la baſe inférieure va à celui de la ſupérieure qui eſt au-deſſus de T, eſt égal au côté du cylindre oblique, & partant à l'ouverture du compas: mais ledit point T en l'air, centre de la baſe ſupérieure, eſt le point du cylindre droit retranché par le compas; partant ladite perpendiculaire ſur T au cylindre droit, ſera égale à la hauteur du cylindre oblique, & à la perpendiculaire ſur S.

On le démontreroit encore autrement, imaginant un triangle rectangle dont un des côtez ſoit DS; le ſecond, la perpendiculaire qui va de S à la baſe ſupérieure; & le troiſiéme qui va de D audit point ſur S en l'air; car ce triangle eſt entiérement égal à celui qui ſe fait au-dedans du cylindre droit dont un des côtez eſt AT; l'autre, la perpendiculaire ſur T juſques au retranchement; & le troiſiéme eſt l'ouverture du compas, qui va de A à T en l'air, & eſt égale au côté du cylindre oblique, ſçavoir à la ligne qui va de D au point S en l'air: la ligne AT eſt égal à DS, comme il eſt aiſé de le montrer; les angles en T & en S ſont droits; & partant les triangles ſont égaux, & la ligne ſur T égale à la ligne ſur S.

On montrera, comme ci-devant, l'égalité des autres perpendiculaires; ſçavoir, celle ſur 7 au cylindre droit, à celle qui tombe ſur 2 à l'oblique; celle ſur 8, à celle ſur 3, &c. & nous le répeterons encore ici. L'ouverture du compas eſt égale en puiſſance aux quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T du cylindre droit; & pareillement elle eſt égale aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7, & aux quarrez de A 8 & de la perpendiculaire ſur 8, &c. Donc les quarrez de AT & de la perpendiculaire ſur T ſont égaux aux quarrez de A 7 & de la perpendiculaire ſur 7; & ſi au lieu du quarré AT on prend les quarrez de A 7 & 7 T qui lui ſont égaux, on aura les quarrez de 7 T, 7 A, & de la perpendiculaire ſur T égaux aux quarrez de 7 A, & de la perpendiculaire ſur 7; & ôtant de part & d'autre le quarré 7 A, on aura le quarré de la perpendiculaire ſur 7 égal aux quarrez de 7 T, & de la perpendiculaire ſur T.

De plus, on a montré que 2 N eſt égal à 7 T par le moyen du rectangle 7 A G 2. Il faudra donc pour la perpendiculaire ſur 2 imaginer un triangle rectangle en l'air ſur le point N dont un des côtez ſera N 2; le ſecond, la perpendiculaire qui du point N va trouver le point correſpondant en la baſe ſupérieure du cylindre oblique; & le troiſiéme eſt la perpendiculaire cherchée, qui du point N en l'air eſt menée au point 2, & ce troiſiéme côté étant opposé à l'angle droit en N, vaut en puiſſance les quarrez de la perpendiculaire ſur N (égal à celui de la perpendiculaire ſur T) & de la ligne N 2 égale à 7 T; donc la perpendiculaire ſur 7 ſera égal à la ligne qui du point N en l'air tombe ſur 2. Mais ces lignes déſignent la hauteur des parallelogrammes faits ſur les cylindres, & partant leſdits parallelogrammes ayant la baſe égale & la hauteur égale ſont égaux; & partant la ſurface du cylindre oblique égale à ce qui eſt coupé du cylindre droit. Mais ſi la perpendiculaire

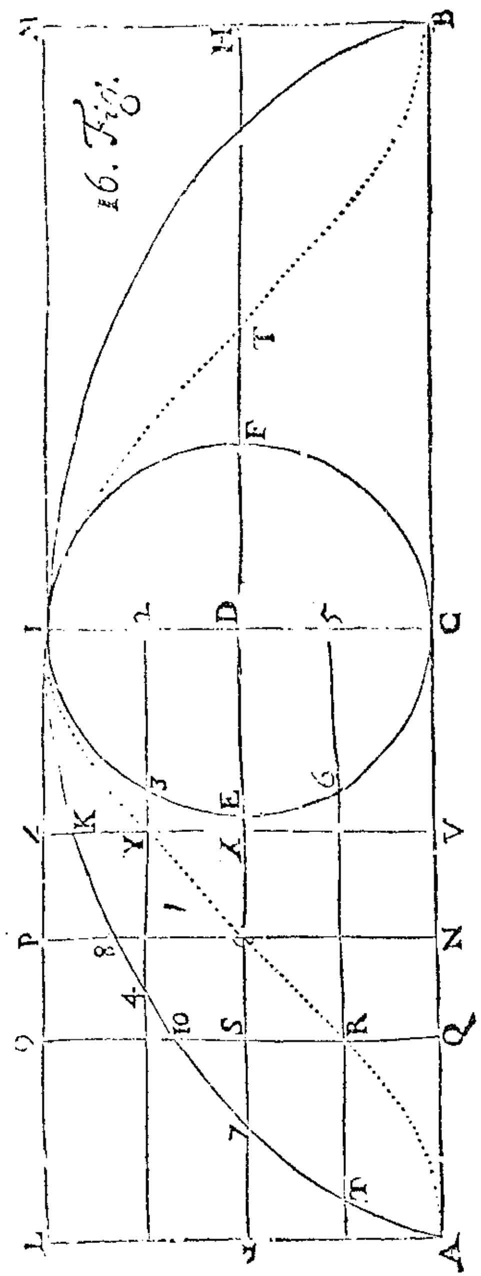
tirée du centre de la baſe ſupérieure ne tombe pas ſur la circonférence de la baſe inférieure, enſorte que AT ne ſoit pas égal au demi-diametre de ladite baſe, alors il faut proportionner, comme on a montré au diſcours ſur la page 322.

DU SOLIDE DE LA ROULETTE.

QUE AIB ſoit le chemin de la Roulette; ALMB le parallogramme fait du diamétre IC, & de la circonférence AB étenduë en ligne droite. Nous cherchons la raiſon qu'il y a du cylindre fait par le parallelogramme, au ſolide fait par la Roulette AIB, lorſque le tout tourne ſur ladite circonférence ACB. Pour cet effet, je tire la ligne GDH parallele à ACB; & cette ligne ſe prend pour le chemin du point D centre de la Roulette. Or cette ligne GDH coupe la figure AOI 4 & le demi-cercle CEI, chacune en deux parties ſemblables: or il y a un Théoréme qui porte que, quand deux figures ſont ainſi coupées par une ligne parallele à la ligne ſur laquelle les figures font leur tour, les ſolides des figures ſont entr'eux comme les figures; & partant le ſolide fait par la figure AOI 4 eſt égal au ſolide fait par la demi-circonférence IEC; car nous avons vû comme le plan AOI 4 eſt égal au demi-cercle IEC que nous avons trouvé être le quart du parallelogramme; ainſi ces ſolides ſeront chacun le quart du cylindre fait par le parallelogramme. Mais ne prenant que le ſeul ſolide fait par AOI 4 qui ſera le quart du cylindre, & ayant tiré la ligne QRS qui repréſente toutes les lignes tirées perpendiculairement de AN premier quart de la circonférence ACB ſur GDH, & la ligne VXY qui repréſente toutes les lignes tirées de NC ſecond quart, ſur la ligne courbe OYI: nous diſons que le quarré de QR eſt égal

aux

aux quarrez de QS & SR, moins deux fois le rectangle QSR, & ainsi des autres lignes tirées sur ledit quart AN; & de plus que le quarré de VY est égal aux quarrez de VX, & XY plus deux fois le rectangle VXY, & ainsi des autres lignes tirées sur le second quart NC. Or les rectangles qui se trouvent dans l'espace AO sont égaux à ceux de l'espace NI; & étant de plus d'un côté & moins de l'autre, on les ôtera de part & d'autre. Il restera donc que les quarrez de QR, VY & des autres lignes tirées de AC sur la ligne courbe AROYI pris tous ensemble, seront égaux aux quarrez du demi-diametre QS ou VX pris autant de fois, & aux quarrez de SR, XY, & autres lignes tirées de GD sur la ligne



courbe AOI pris aussi autant de fois. Or lesdites lignes SR, XY, &c. sont des sinus droits dont les quarrez sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 1 à 8, & les quarrez du demi-diametre sont aux quarrez du diametre, comme 2 à 8. Si on joint ces raisons, on aura celle de 3 à 8 qui est celle des quarrez des lignes tirées de AC sur la ligne courbe AOI au quarré du diametre pris autant de fois; & si on y joint la raison de la figure AOI 4 au parallelogramme AI, qui est comme 2 à 8, on aura la raison de 5 à 8, qui est celle du solide que fait la Roulette AIB, au cylindre AM, le tout tournant sur ACB.

On conclura la même chose en considérant les quarrez des sinus verses QR, VY, & les autres, lesquels sont au quarré du diametre pris autant de fois, comme 3 à 8; & l'espace ARI 4 est au parallelogramme AI, comme 2 à 8, qui joint avec la raison de 3 à 8, font celle de 5 à 8; & telle est la raison du solide de la Roulette au cylindre, comme en l'autre conclusion.

Maintenant il faut voir quelle raison il y aura entre le solide de la même Roulette & son cylindre, lorsqu'elle tourne sur LM parallele à AB, où il faut considérer que le quarré de N 8 vaut les quarrez de NP & P 8 moins deux fois le rectangle NP 8; & ainsi le quarré N 8 plus deux fois le rectangle NP 8 est égal aux quarrez NP, P 8. On sçait que les quarrez de N 8, VK, & de toutes les autres sont au quarré du diamétre CI ou NP son égal pris autant de fois, comme 5 à 8, à quoy il faut joindre deux fois les rectangles NP 8, VZK, & tous les autres: or ces rectangles ont tous pour hauteur NP, & partant ils seront entr'eux comme toutes les lignes P 8; ZK, 9 10, & les autres. Mais tout l'espace rempli de ces lignes, ou plûtôt toutes ces lignes sont au diametre pris autant de fois, comme 2 à 8: & il faut prendre deux fois ces rectangles; partant ils seront au quarré du diametre pris autant de fois, qu'il y a de lignes VK, N 8, Q 10, &c. comme 4 à 8; laquelle raison jointe à celle de 5 à 8 ci-devant, font celle de 9 à 8, ou $\frac{9}{8}$; & parce que les quarrez Q 9, N P, VZ, &c. repréſentent les 8, il s'enſuivra que les quarrez 9 10, P 8, ZK, &c. vaudront $\frac{1}{8}$; car puiſque les quarrez Q 10, N 8, VK, &c. avec deux fois les rectangles Q 9 10, NP 8, VZK, &c. (qui tous enſemble avec leſdits quarrez vallent $\frac{9}{8}$) font égaux aux quarrez Q 9, 9 10, NP, P 8, VZ, ZK, &c. ceux ci vallent auſſi $\frac{9}{8}$. Si donc on en ôte les quarrez Q 9, NP, VZ, qui vallent $\frac{8}{8}$, reſtera $\frac{1}{8}$ pour les quarrez 9 10, P 8, ZK, qui ôtez encore des mêmes quarrez Q 9, NP, VZ, reſtera $\frac{7}{8}$ pour le ſolide de la Roulette, qui ſera au cylindre comme 7 à 8.

La même choſe ſe peut conclure d'une autre façon, en diſant que le quarré P 8 eſt égal aux deux quarrez PN, N 8 moins deux fois le rectangle PN 8, & tous les autres de même, ſçavoir le quarré de ZK égal aux quarrez de ZV, & KV moins deux fois le rectangle ZVK, & ainſi des autres. On a vû que les quarrez de N 8 & les autres, font au quarré du diametre pris autant de fois, comme 5 à 8; & joignant le quarré de NP qui eſt 8, avec 5, on aura la raiſon de 13 à 8. De cette ſomme il faut ôter le moins, ſçavoir les rectangles PN 8 & autres, tous leſquels ont même hauteur, ſçavoir PN; ils ſeront donc entr'eux comme leurs baſes VK, N 8, Q 10, & les autres. L'eſpace A 8 I D C rempli par les petites lignes VK, N 8, &c. eſt au grand parallelogramme AI, comme 6 à 8; & le rectangle pris deux fois ſera audit parallelogramme, comme 12 à 8; & ôtant la raiſon de 12 à 8 de celle de 13 à 8, reſtera celle de 1 à 8, comme ci-devant pour la valeur des quarrez ZK, P 8, 9 10, & les autres.

Il faut maintenant conſidérer les ſolides qui ſe font

Tt ij

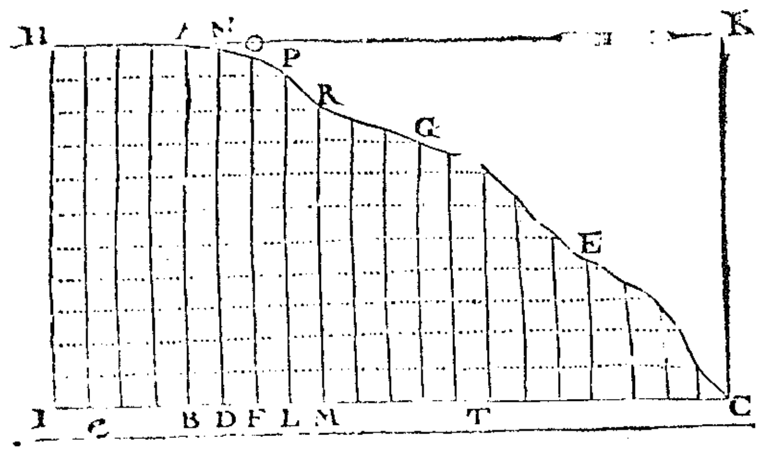
quand la figure tourne ſur LA, où on remarquera que la ligne IC parallele à ladite LA, coupe le parallelogramme AM & la figure AIB en deux également; & partant les ſolides ſont entr'eux comme les plans; & ainſi le ſolide fait par AIB ſera au cylindre formé par le parallelogramme AM, comme le plan de l'un eſt au plan de l'autre. Mais les plans ſont entr'eux comme 4 à 3; partant le cylindre ſera au ſolide de la Roulette comme 4 à 3.

Conſidérons maintenant le ſolide fait par le plan de la compagne de la Roulette AOITB. On voit que la ligne IC coupe en deux également tant le parallelogramme A M, que ladite figure A O I T B; partant les ſolides ſeront entr'eux comme les plans : mais les plans ſont entr'eux comme 2 à 1, partant le cylindre ſera au ſolide fait par A O I T B, comme 2 à 1, c'eſt-à-dire double.

On conclura de là que le ſolide fait par la figure AOI 10 eſt au cylindre AI, comme 1 à 4; car puiſque le ſolide fait par A 8 I D C eſt au cylindre AI comme 3 à 4: ſi on en ôte le ſolide fait par AOIDC qui eſt au même cylindre AI comme 2 à 4, reſtera la raiſon de 1 à 4, pour celle du ſolide fait par AOI 10, au même cylindre AI.

PROPORTION DES SOLIDES composez de lignes courbes, avec le cylindre qui aura même baſe & même hauteur, enſemble de leur centre de gravité.

QUE AGEC ſoit une ligne irrégulieres telle qu'on voudra, pourvû toutefois qu'elle baiſſe toûjours vers C; & ſoient tirées les lignes AB, BC, qui faſſent un angle en B, lequel ſoit ici ſuppoſé être droit, car cela n'est pas necessaire, & on aura le triligne ABC. Que les lignes AB, BC soient divisées en une infinité de parties égales, & chaque partie de AB soit égal à chaque partie de BC : de chaque point de la division soient ti-



rées des paralleles aux lignes AB, BC, qui divisent le triligne, comme on voit ici. Du point C j'éleve en l'air une perpendiculaire au plan ABC égale à BC; puis je conçois un plan sur la ligne AB, tellement incliné, qu'il vienne rencontrer l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air. Ensuite j'éleve de chaque point de la ligne BC une perpendiculaire qui rencontre ce plan incliné, & chacune de ces perpendiculaires est égale à sa correspondante, sçavoir à celle qui va du point dont elle a été tirée jusques à la ligne AB : comme la perpendiculaire tirée sur D sera égale à BD, celle qui est élevée sur F est égale à BF, & ainsi des autres. Il faut aussi concevoir un triangle rectangle isocelle qui se fait par la ligne BC, la perpendiculaire en l'air sur C qui est égale à BC, & la ligne qui va de B à l'extrémité de ladite per-

pendiculaire : le plan de ce triangle est égal à la moitié du quarré BC; le même doit être entendu de tous les triangle qui se font par le moyen du plan incliné, qui tous sont égaux à la moitié du quarré de leurs côtez égaux.

Il faut ensuite considérer une perpendiculaire élevée sur le point A qui chemine sur la ligne AGEC, & qui rencontre le plan incliné : cette ligne par son chemin décrit une superficie; & par conséquent on a quatre superficies qui enferment un solide, la premiere est le plan du triligne ACB; la deuxiéme, le plan incliné qui commence à AB; la troisiéme est le triangle sur BC en l'air & perpendiculaire sur le plan ABC; la quatriéme est celle que fait la perpendiculaire en parcourant la ligne AGEC. Ce solide est distingué & comme composé d'une infinité de triangles tous paralleles & semblables à celui qui est élevé perpendiculairement sur BC, & qui est une des faces du solide; partant ce solide partagé de cette sorte est formé de la moitié de tous les quarrez de la ligne BC, & de ses paralleles.

Que si on veut couper ce solide d'un autre sens, sçavoir par des plans paralleles à la ligne AB, alors on fera dans le solide des parallelogrammes égaux aux parallelogrammes BDN, BFO, BLP &c. partant tous ces parallelogrammes ensemble seront égaux aux demi-quarrez de la ligne BC & de ses paralleles; car c'est le même solide qui ne change point. On peut donc établir, que tous les demi-quarrez de la ligne BC & de ses paralleles, sont égaux à tous les parallelogrammes NDB, OFB, PLB &c.

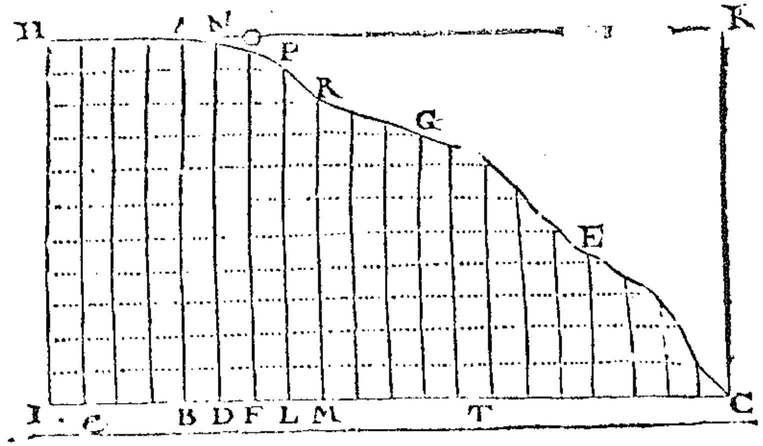
Soit tiré une parallele à AB en quelque part qu'on voudra : que ce soit HI, sçavoir hors de la figure, & soit achevé le parallelogramme HICK, & soit élevé un plan sur la ligne HI, incliné en telle sorte; qu'il rencontre comme le précedent, l'extrémité de la perpendiculaire sur C en l'air prise de la longueur de IC; & soit aussi prolongé les lignes de la figure jusques à la ligne HI : on trouvera que les demi-quarrez de la ligne IC & des autres paralleles à cette ligne, qui aboutissent à HI sont égaux à tous les parallelogrammes compris dans la figure ABC, en les prolongeant jusques à HI, & dans l'espace HIBA, sçavoir ABI, NDI, OFI, &c.

Nous considérerons maintenant la figure quand elle tourne sur HI. Alors elle forme trois solides, sçavoir un cylindre par HIBA; un solide qui se nomme creux par la figure ACB; un autre par HACBI; & le grand cylindre HICK. Nous cherchons les raisons de ces solides entr'eux. Pour le petit cylindre, il est au grand cylindre comme le quarré de HA est au quarré de HK; le solide fait de HIBCA est au grand cylindre, comme le quarré de IC & des autres paralleles jusques à HA, sont au quarré de HK pris autant de fois; le solide de la figure ABC est au grand cylindre comme le quarré de IC & des autres paralleles moins le quarré IB, pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois : & si on prend la moitié du solide, elle sera au grand cylindre, comme la moitié des quarrez IC, & des autres moins la moitié du quarré IB pris autant de fois, est au quarré HK pris autant de fois. Au lieu des demi-quarrez je prends ce qui leur est égal, sçavoir tous les parallelogrammes moins les petits de la figure HABI, & ils seront au grand quarré HK pris autant de fois, comme la moitié du solide de la figure est au grand cylindre. Que si on fait tourner la figure ABC sur AB, alors la moitié du solide fait par ABC sera au cylindre fait par ABCK, comme la moitié des quarrez de BC & de ses paralleles, sont au quarré de BC pris autant de fois; & en general, sur quelque ligne qu'on fasse

tourner la figure, pourvû qu'elle soit parallele à AB, on aura toûjours la même équation; sçavoir, que la moitié du solide fait par la figure, sera à son cylindre, comme la moitié des quarrez compris dans la figure, sera au grand quarré pris autant de fois. J'entens que la figure commence à la ligne sur laquelle elle tourne, & que le parallelogramme commence à la même ligne.

Tout cela posé je viens à chercher le centre de gravité du plan de la figure ABC. Pour cet effet je suppose que la ligne BC est un levier dont le point B est l'appui & en C la puissance : tous les points sont les lieux sur lesquels les pesanteurs pesent; on nommera ces points centres de gravité de chaque portion de la figure, laquelle se divise en parallelogrammes qui tous ont chacun leur centre, sçavoir le point sur lequel chacun d'iceux pese; & tous ces centres ensemble viennent à être égaux (eu égard à la pesanteur qu'ils supportent) au centre total de la figure. Or nous disons que le premier point, sçavoir D, est le centre de gravité du premier parallelogramme; F, du second parallelogramme; L, du troisiéme &c. Les centres de gravité sont entr'eux en raison composée des côtez de leurs figures; par exemple, le centre D est au centre F en raison composée de celle de ND à FO, & de celle de BD à BF; ce qui veut dire que comme le rectangle ou parallelogramme des antécedens est à celui des conséquens, sçavoir comme le parallelogramme NDB est au parallelogramme OFB : ainsi toutes les pesanteurs sur tous lesdits points ou centres de gravité sont entr'elles comme tous les parallelogrammes sont entr'eux. Au lieu des parallelogrammes je prens leurs hauteurs, sçavoir les lignes AB, ND, OF, & je pose chacune de ces lignes pour le fardeau étendu, & qui pese sur chacun de ces points. Pour trouver le centre de gravité de la figure, sçavoir le point sur la ligne

BC où les parties sont contrepesées les unes aux autres, je feins par l'analize qu'il est en M, & j'attache à ce point M un poids égal à tous les autres ci-dessus représentées par toutes les lignes qui sont sur les points. Ce poids



est donc une ligne égale à toutes les lignes ci-dessus, & je dis ainsi : Toutes les pesanteurs, ou centres de gravité ensemble sont au poids de toute la figure qui est en M, comme tous les parallelogrammes de la figure sont au grand parallelogramme qui a un côté égal à toutes les lignes ci-dessus, & la ligne BM pour l'autre côté (car on prend ici les parallelogrammes qui étant perpendiculaires sur les lignes ND, OF, PL, &c. vont rencontrer le plan qui part de la ligne AB, & en montant va rencontrer le point sur C en l'air élevé à la hauteur de CB, comme il a été dit ci-devant.) Mais toutes les pesanteurs assemblées sont égales à la pesanteur qui est en M; partant tous les parallelogrammes de la figure sont égaux au parallelogramme qui a toutes les lignes BA, DN, FO, &c. pour un de ses côtez, & BM

pour l'autre : étant égaux ils auront même raison à une autre grandeur; c'est pourquoi tous les rectangles sont au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle qui a toutes les lignes susdites AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM, pour l'autre, est au même quarré pris comme ci-devant.

Au lieu de tous les rectangles susdits je prens ce qui leur est égal, sçavoir les demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, BM, BC, &c. ils seront donc au grand quarré BC pris autant de fois, comme le grand rectangle susdit qui a BM pour un de ses côtez, & pour l'autre toutes les lignes AB, ND, OF, &c. est audit quarré BC pris &c. Mais nous avons vû que comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait quand la figure tourne sur AB, ainsi le quarré BC pris autant de fois, est aux demi-quarrez des lignes BD, BF, BL, &c. Donc le rectangle qui a les lignes AB, ND, OF, &c. pour un de ses côtez, & BM pour l'autre, est au quarré BC pris autant de fois, comme la moitié du solide fait par ABC est au cylindre. Par les indivisibles je fais des solides de tous ces plans, & je dis que la moitié du solide fait par ABC est au cylindre fait par ABCK, comme le solide qui a pour base la figure ABC, & BM pour hauteur, est au solide qui a pour base le parallelogramme ABCK, & BC pour hauteur. Or les solides sont entr'eux en raison composée de leur base & de leur hauteur; partant la moitié du solide de ABC, & le cylindre du parallelogramme ABCK, font la raison composante des deux solides, qui sont entr'eux en la raison composée du parallelogramme ABCK à la figure ABC, & de celle de la ligne BC, à BM. Nous connoissons la raison composante, c'est-à-dire de la moitié du solide au cylindre; car (si c'est une parabole) son solide est à son cylindre comme 8 à 15 : ici nous n'avons que la moitié du solide; c'est pourquoi ce sera comme 4 à 15. Pareillement la raison du plan de la parabole à son parallelogramme est connuë, qui est comme 2 à 3, ôtant donc de 4 à 15 la raison de 2 à 3 ou de 4 à 6, il reste celle de 6 à 15; & telle est la raison de BM à BC, & le point M est le centre.

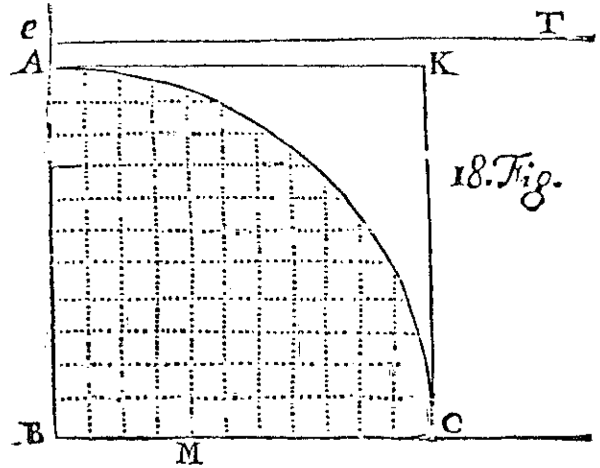
Que si nous feignons un cylindre tel qu'il soit la moitié d'un solide, & que nous disions : Comme le cylindre est à la moitié du solide, ainsi quelque ligne, comme *e*T est à ligne BM; & comme le parallogramme ABCK est au plan ABC, ainsi la même ligne *e*T est à la ligne BC: ces trois lignes composent la raison qui est entre la moitié du solide & le cylindre, qui sera la raison composée de *e*T à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M sera le centre de gravité.

Auparavant que de proceder selon cette derniere façon il faut avoir trouvé cette ligne *e*T, faisant que, comme le plan ABC est au parallelogramme ABCK, ainsi la ligne BC soit à *e*T; & puis dire : Comme le cylindre fait par ABCK est à la moitié du solide fait par ABC tournant sur AB, ainsi la ligne *e*T soit à BM : le point M marque le centre de gravité. Cette méthode est pour agir plus élegamment, & plus briévement que par la premiere qui est plus sûre, sçavoir par la composition de raison des deux solides qui sont entr'eux en la raison composée de celle de leur base, & de celle de leur hauteur, comme il a été dit ci-devant.

Il nous faut maintenant chercher le centre de gravité d'un quart de cercle par le solide qui se fait quand un quart de cercle qui partiroit du point A & viendroit en C, puis après du point C l'autre quart de cercle viendroit rencontrer la ligne AB prolongée tant que de besoin. Quand ce quart de cercle tourne sur AB, il se fait un solide de ce quart, & il se fait un cylindre du

Voyez la Figure suivante.

parallelogramme ABCK, lequel, en cette figure, est un quarré; car AB est égale à BC, & chacune est le demidiametre du cercle. Je trouve premierement le centre de gravité, sçavoir, le point M, en la façon ordinaire, sçavoir, que le demi - solide du quart de cercle, est à son cylindre comme le solide qui a pour base le quart de cercle, & pour hauteur la ligne BM, est



18. Fig.

au solide qui est composé du quarré BC pris autant de fois qu'il y a de divisions en BC. Mais les solides sont entr'eux en la raison composée de celle de leur hauteur, & de celle de leur base, sçavoir comme le quart de cercle, au quarré BC, & comme la ligne BM, à BC; en telle sorte que ces quatre termes composent la raison de la moitié du solide fait par le quart de cercle, à son cylindre, laquelle est connuë; car le cylindre est au solide comme 6 à 4; mais ici il n'y a que la moitié, & partant la raison sera comme 6 à 2. La raison du plan au plan, & de la ligne à la ligne, sera donc comme 2 à 6; la raison du plan au plan est connuë; car en cette figure, selon Archiméde, elle est comme 11 à 14. Si donc je soustrais la raison de 11 à 14, de celle de 2 à 6, ou de 11 à 33, il restera la raison de 14 à 33 pour celle des lignes BM à BC; & le point M vient à être le lieu du centre de gravité, en la premiere maniere.

La deuxiéme façon est en disant : Comme le cylindre de ABCK est à la moitié du solide du quart de cercle, ainsi la ligne *e* T est à BM; (on trouvera la ligne *e* T comme ci-devant, sçavoir en faisant comme le plan du quart de cercle est au parallelogramme, ainsi la ligne BC est à *e* T) c'est pourquoi nous voyons que la moitié du solide est à son cylindre, en la raison composée de *e* T à BC, & de BC à BM; & ainsi le point M est encore le centre de gravité, selon la seconde méthode.

La troisiéme méthode est la plus subtile, & elle est telle : comme le quart & demi de la circonférence, sçavoir AC & sa moitié, le tout pris comme ligne droite, est à BC demi-diametre, ainsi BC est au tiers de la ligne *e* T trouvée comme ci-dessus; & il se trouvera que BM sera le tiers de ladite *e* T; & ainsi le point M sera le centre de gravité. Il faut montrer que BM est le tiers de *e* T; de plus que le quart, & demi de la circonférence est à son demi-diametre, comme le même demi-diametre est à BM tiers de *e* T.

Pour le premier, il est aisé à voir; car faisant que comme la moitié du solide est au cylindre, ou bien comme le cylindre fait par ABCK, est à la moitié du solide fait par le quart de cercle, ainsi la ligne *e* T soit à BM. Nous sçavons que le cylindre est triple de la moitié du solide; partant la ligne *e* T sera triple de BM, ce qu'il falloit prouver.

Il faut maintenant prouver que les trois lignes, sçavoir le quart & demi de la circonférence pris comme ligne droite, le demi-diametre & le tiers de *e* T sont proportionnelles. Ceci se démontre par la proportion

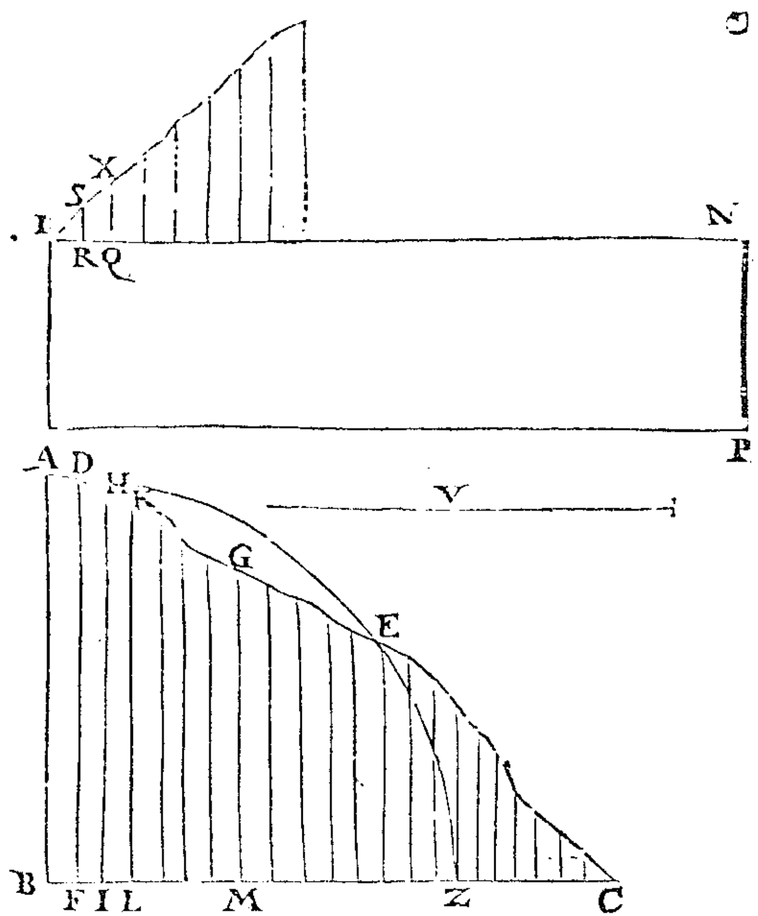
troublée que je dispose comme il s'ensuit. Que le quart & demi de la circonférence soit *a*; le demi-quart de la même circonférence soit *b*; le demi-diametre soit *c*; le même demi-diametre soit aussi *d*; la ligne *e* T soit *e*; & le tiers de la ligne *e* T ou la ligne BM, soit *m*. On fera les proportions suivantes.

Comme *a* est à *b*, ainsi *e* est à *m*; & comme *b* est à *c*, ainsi *d* est à *e*; partant comme *a* est à *c*, ainsi *d* est à *m*; partant les trois lignes *a*, *c*, *m* sont proportionnelles, ce qui restoit à démontrer.

Tout ce qui a été dit jusques à présent ne sert que pour trouver le centre de gravité des plans par le moyen d'un solide. Maintenant nous chercherons le centre de gravité d'une ligne telle qu'elle puisse être, soit droite, circulaire, ou irréguliere.

TROUVER LE CENTRE DE GRAVITE' de la ligne AGEC.

SOIT divisé la ligne AGEC en une infinité de parties égales; & ayant tiré les lignes AB, BC, comme ci-devant, soit aussi tiré des paralleles à AB de chaque point de la division, qui diviseront la ligne BC en parties inégales. Les parties de la ligne AGC ont chacune leur pensanteur; & le poids d'une partie n'est pas égal au poids de l'autre. Or le poids de chaque portion est représenté par le point de sa division : les paralleles portent chaque pesanteur sur le levier BC aux points de sa division; & c'est sur ces points de BC que pesent toutes les parties de la ligne AGC. Nous sçavons que les poids sont entr'eux comme les rectangles; c'est-à-dire que le poids du point D est au poids du point H, comme le rectangle fait de AD & de BF, au rectangle fait de AD ou son égale DH, & de BI. Au lieu de dire, comme les rectangles, je dis, comme la ligne BF est à BI, parce que les rectangles ont tous un côté égal, sçavoir la portion de la ligne AGC. Je feins que le cen-



tre soit en M, duquel point je fais pendre une ligne égale à AGC qui représente sa pesanteur; puis je dis que le poids du point F est au poids du point M centre, comme la ligne BF est à la ligne BM; le poids du point I est au

poids de M, comme la ligne BI à BM, & ainsi des autres. De là nous reviendrons aux rectangles, & nous dirons que tous les points pesans sur ceux de la ligne BC sont au poids universel pesant sur le point M centre total, comme le rectangle fait d'une seule portion de la ligne AGC & de toutes les lignes BF, BI, BL, BM, &c. est au rectangle fait par la ligne AGC penduë au point M, & par la ligne BM. Or tous les petits poids ramassez ensemble sont égaux au poids en M, qui est le poids de toute la ligne; & partant les deux rectangles sont égaux, & leurs côtez sont quatre lignes proportionnelles. Pour faciliter la résolution de la question du rectangle fait par une portion de la ligne AGC & des lignes BF, BI, BL, &c. j'ôte par les indivisibles la portion de la ligne AGC : cette portion étant une & terminée, ne diminuë rien dans l'infini; (car tout ce qui est fini & terminé comme 1, 2, 3, 4, & tant de nombres terminez qu'on voudra, n'augmente ni ne diminuë rien dans les infinis) ayant donc retiré cette unique portion du rectangle, il me reste l'espace compris par les lignes BF, BI, BL, &c. qui est égal au même rectangle de AGC par BM. Je pose que la ligne AGC soit la droite TN, laquelle étant divisée infiniment, j'éleve sur chaque point de la division perpendiculairement la ligne RS égale à BF, QX égale à BI, & ainsi des autres. Les lignes ainsi élevées composent une figure égale au rectangle TP dont le côté NP est égal à BM, & TN égal à AGC, puis je cherche un quarré qui soit égal à la figure ou à ce rectangle, (car l'un est égal à l'autre.) Que son côté soit la ligne marquée V. Nous dirons que comme la ligne AGC est à la ligne V, ainsi la ligne V est à la ligne BM cherchée; & ceci est la proposition universelle. Comme la ligne proposée à la ligne dont le quarré est égal à la figure ou plan fait par toutes les lignes BF,

BI,

BI, BL, &c. ainſi cette même ligne qui eſt le côté dudit quarré, eſt à la ligne BM cherchée; & ainſi ces trois lignes, ſçavoir la donnée, celle qui eſt le côté du quarré ſuſdit, & la cherchée BM ſont continuellement proportionnelles.

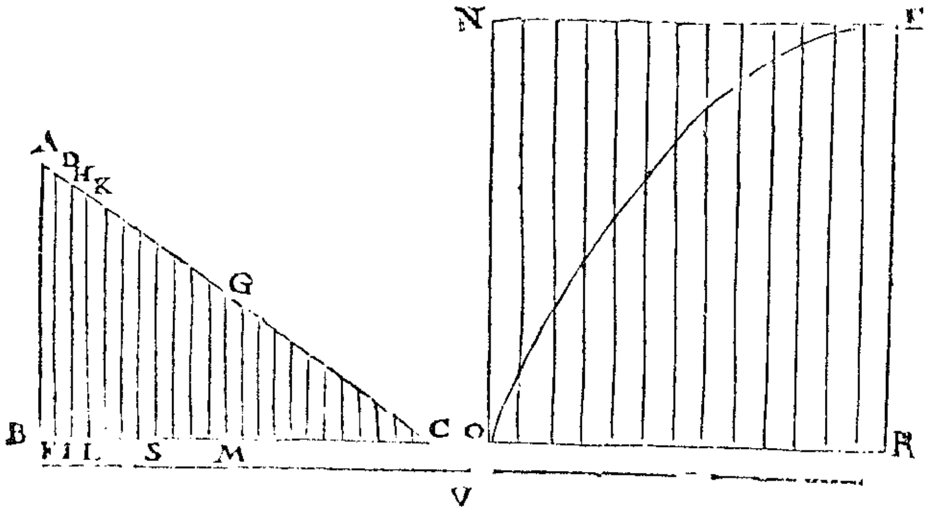
Cherchons maintenant le centre de gravité du quart de circonférence AGZ. Alors il faudra dire : Comme la ligne AGZ étenduë en ligne droite eſt à ſon demi-diametre BZ, ainſi ce demi-diametre eſt à la ligne cherchée BM. Mais le quart de la circonférence eſt au demi-diametre, comme tous les ſinus tirez par les points eſquels eſt diviſée la circonférence, ſont au ſinus total pris autant de fois; or tous ces ſinus ſont les lignes BF, BI, BL, &c. répondans aux points de la circonférence diviſée en parties égales infinies; & tous ces ſinus ſont égaux au quarré du demi-diametre, comme il paroît par la troiſiéme propoſition.

Voyez la Figure ſuivante.

Mais ſi on ſuppoſe que la ligne AC ſoit droite, pour en trouver le centre de gravité je la diviſe en une infinité de parties égales & de chaque point de la diviſion je tire des lignes paralleles à AB, qui tombent ſur le levier BC & le diviſent en parties égales entr'elles, & diviſent la figure ABC en triangles ſemblables : les points de la ligne BC marquent les centres de gravité de chaque portion de la ligne propoſée AC. Or tous ces centres ou peſanteurs ſont entr'elles, comme les rectangles ſont entr'eux, c'eſt à ſçavoir comme le rectangle BF par AD eſt au rectangle BI par DH ou ſon égale AD; & d'autant que la portion de AC eſt toujours la même en tous les rectangles, les centres ſont entr'eux, comme les lignes BF, BI, BL, &c. de ſorte que ces petits centres ou peſanteurs particulieres ſont au centre ou peſanteur totale qui eſt au point M (d'où on a pendu une ligne égale en grandeur & peſanteur à la ligne AC) comme

toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ſont au rectangle AC par BM; car par les indiviſibles on a retranché du rectangle fait de la portion de la ligne AC, ſçavoir de AD & de toutes les lignes BF, BI, BL, &c. priſes enſemble, ladite portion AD. Il faut trouver une ligne qui ſoit égale en puiſſance à l'eſpace fait par toutes les lignes BF, BI, BL, & les autres; puis je dis que comme la ligne donnée, ſçavoir AC, eſt à cette ligne dont le quarré eſt égal à l'eſpace & plan ſuſdit fait par toutes les lignes BF, BI, BL, &c. ainſi cette ligne ou côté de quarré eſt à BM; enſorte que la ligne ſuſdite qui peut l'eſpace fait par les lignes BF, BI, BL, &c. ſoit moyenne proportionnelle entre la ligne propoſée AC, & la cherchée BM. Mais toutes ces lignes ſont à BC pris autant de fois, comme le triangle au quarré de la ſomme ou multitude deſdits points, c'eſt-à-dire, comme 1 à 2; partant la ligne BM vaudra en puiſſance le quart du quarré BC; & partant BM eſt la moitié de BC; & ainſi le centre de ladite ligne propoſée eſt au milieu d'icelle : car du point M tirant une ligne parallele à AB, elle paſſera par le point G milieu de la ligne AC, & marquera le lieu de ſon centre de gravité.

Je viens maintenant à chercher le centre de gravité d'une figure ſolide, ſoit cône, cylindre, conoïde parabolique & hyperbolique, ſolide elliptique, ou de quelqu'autre ſolide connû. Parlons premierement du cône qui eſt repréſenté par la ligne AC, & par CB tirée perpendiculairement ſur AB. Le ſommet du cône eſt C, l'axe eſt CB, & la ligne AB étant doublée vient à être le diametre du cercle, ou baſe du cône. Que l'axe de ce cône, ſçavoir BC, ſoit coupé par des plans perpendiculaires à cette axe en une infinité de parties égales : toutes ces diviſions ſont autant de cercles, qui tous enſemble par les indiviſibles compoſent le cône, & ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres; sçachant donc comme les diametres sont entr'eux, on sçaura aussi la proportion des quarrez. Or cette division fait dans le cône & sur son axe des triangles semblables, comme



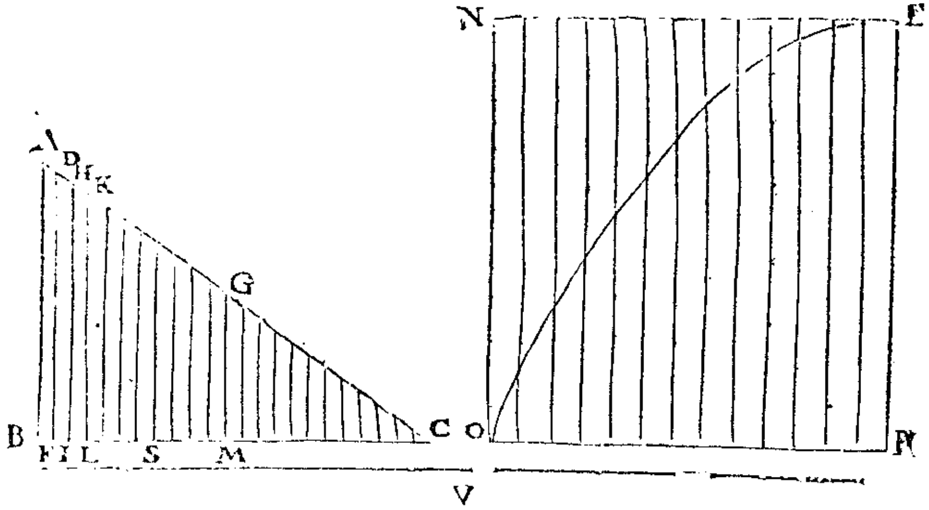
ABC, DFC, HIC, KLC, &c. c'est pourquoi les demi-diametres AB, DF, HI, KL &c. sont entr'eux, comme les portions de l'axe BC, FC, IC, LC sont entr'elles: or ces portions ayant différences égales, elles gardent entr'elles l'ordre naturel des nombres; les demi-diametres garderont donc entr'eux l'ordre naturel des nombres. Si les diametres gardent l'ordre naturel des nombres; leurs quarrez garderont l'ordre naturel des quarrez desdits nombres; & partant ces cercles seront entr'eux comme les quarrez des nombres qui suivent l'ordre naturel; c'est-à-dire comme 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Cela posé, pour trouver le centre de ce cône, il faut chercher un plan dans lequel les lignes tirées gardent

la même proportion, c'est-à-dire que la ligne soit à la ligne comme un quarré à un quarré; car le plan qui aura cette condition ne manquera pas d'avoir le centre de gravité au même lieu que le solide. Je prens pour le plan une parabole qui a pour sommet le point E: son axe est ER; & la touchante EN représentera l'axe du cône BC. Je divise EN en parties infinies & égales, & de chaque point je tire des lignes paralleles à NO (représentant AB) qui divisent le plan ou triligne EON. On a montré que ce triligne est à son parallelogramme comme 1 à 3; on dira donc: Comme le triligne est à son parallelogramme, ainsi NE sera à une autre ligne V; partant V sera triple de NE; & si NE vaut 4, V vaudra 12. Je dis ensuite: Comme le cylindre fait par le parallelogramme de la parabole, est à la moitié du solide fait par le triligne OEN qui est renfermé dans le cylindre, ainsi 4 à 1; & ainsi la ligne V qui vaut 12 est à 3 qui sera la ligne CS, & le point S montrera le centre de gravité. Or BC étant 4, BS sera 1, & CS sera 3.

CENTRE DE GRAVITÉ' *du Conoïde parabolique.*

SI je cherche le centre de gravité du conoïde parabolique, je le couperai, ou son axe, en parties infinies & égales par des plans qui diviseront tout le solide en cercles (car dans le conoïde parabolique aussi bien que dans le cône, les sections faites par un plan parallele à la base, engendrent des cercles.) Or tous ces cercles sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres; & partant sçachant comme les diametres sont entr'eux, nous sçaurons comment sont leurs quarrez. Mais dans la parabole les quarrez des ordonnées sont entr'eux comme les portions de l'axe: ici les portions sont



égales, & partant ils sont entr'eux comme les nombres naturels; les quarrez des diametres seront donc entr'eux en l'ordre des nombres naturels; & le premier quarré étant 1, le second sera 2, le troisiéme sera 3 &c.

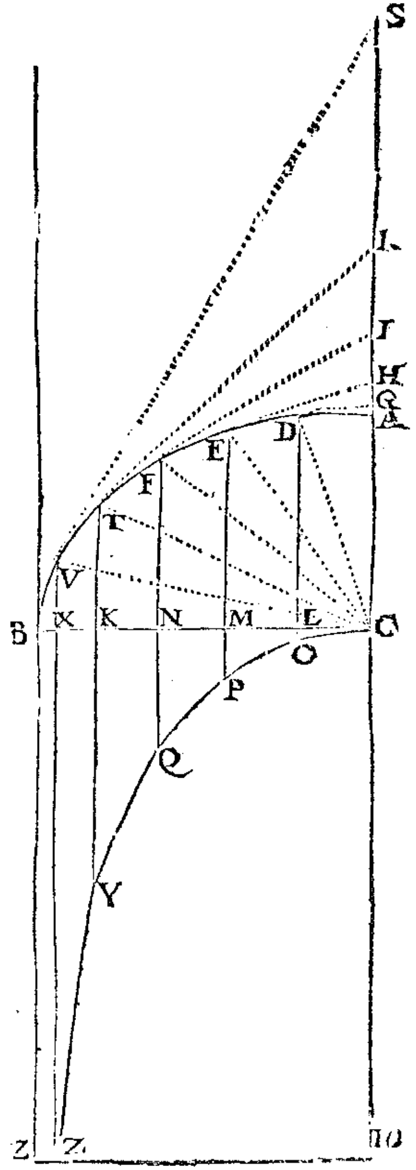
Par nostre doctrine il faut trouver une figure ou plan qui ait cette même proprieté. Je trouve que le triangle fait la même chose; il faut donc feindre que ABC est un triangle. Je divise BC en parties égales & infinies, & par les points je tire des paralleles à AB : or BC represente l'axe du solide dont on cherche le centre. Cela fait je dis : Comme le plan du triangle est à son parallelogramme, ainsi BC est à la ligne V. On sçait que le triangle est au parallelogramme comme 1 à 2; partant V sera double de BC; si BC est 3, V sera 6. Aprés on dit : Comme le cylindre fait par le parallelogramme du triangle est à la moitié du solide, ou du cône fait par le triangle, ainsi la ligne V sera à BM qui marquera le centre. Or le cylindre susdit est à la moitié du cône comme 6 à 1; partant BM sera $\frac{1}{6}$ de la ligne V, &

le tiers de BC; le centre de gravité du conoïde parabolique sera donc au tiers de son axe du côté de la base; & ainsi divisant l'axe en trois parties égales, le premier point du côté de la base sera le centre de gravité.

Il faut observer en général, que quand on veut trouver le centre de quelque solide, aprés avoir divisé son axe en une infinité de parties égales, & par conséquent tout le solide, sçachant quelle proportion ou raison gardent toutes les sections faites par le plan qui a divisé le solide : il faut trouver un plan duquel la proprieté soit telle, que les lignes qui le divisent en une infinité de parties égales, soient entr'elles comme toutes les sections du solide sont entr'elles : si les sections, ou plans du solide sont entr'eux comme le quarré au quarré, les lignes du plan doivent être entr'elles comme le quarré au quarré. Si la proportion ou raison est autre dans le solide, elle doit être telle dans le plan : observant toûjours dans le solide que si le plan est au plan comme le quarré de son demi-diametre, au quarré du demi-diametre de l'autre, dans le plan la ligne soit à la ligne, comme un quarré à un quarré. Voilà ce qu'il faut remarquer.

Soit la ligne courbe ou circulaire BTEA divisée en une infinité de parties égales aux points V, T, F, E, D, &c. & de chacun desdits points soit tiré une touchante comme VS, TR, FI, EH, DG, &c. à telle condition que la derniere comme DG étant tirée, toutes les autres rencontrent plus haut la ligne CS, sçavoir plus loin du point C, comme aux points H, I, R, S &c. qui partant seront tous plus éloignez de C que le point G dans la ligne CS. Outre cela, du point B je tire la touchante, qui vient à être parallele à CS. Cela fait, des points d'atouchement comme de D, je tire une ligne, sçavoir DO, qui soit égale & parallele à CG; du point

E, la ligne EP égale & parallele à HC; de F, la ligne FQ égale & parallele à IC; semblablement la ligne TY égale à RC, & VZ égale à SC, & ainsi des autres points infinis, la ligne CS étant prolongée tant qu'il faudra, & la touchante en B tirée à l'infinie, laquelle viendra à être asymptote au regard de la ligne qui se forme par l'extrémité des lignes tirées des points de la division paralleles à CS, qui est la ligne courbe COPQYZ. Puis après, si du point C on tire des lignes à chaque point de la division de la courbe BFA, tout l'espace AFBC viendra à être divisé en secteurs infinis, lesquels par les indivisibles se convertissent en triangles, à cause que les petites portions des lignes courbes deviennent droites par la division infinie. Je dis davantage que tout l'espace BFACQZ jusques au bout de la courbe CQZ tirée à l'infini, & qui est entre ladite courbe, & la touchante B tirée aussi à l'infini, se trouve divisé en



parallelogrammes infinis, l'un desquels est DOCG qui représente le moindre. C'est un parallelogramme, parce que dans les indivisibles la touchante DG passe pour la partie de la ligne courbe DA, comme il a été dit cidevant dans une autre proposition : or DO a été faite égale & parallele à GC, & pareillement de tous les autres points, on a tiré les lignes égales & paralleles à leurs correspondantes en CS.

Pour venir à la conclusion, les parallelogrammes ont tous un même côté que les triangles, qui est chaque portion égale de la ligne courbe AEB. Je dis donc que les triangles qui ont pour sommet le point C duquel partent les deux côtez du triangle, & dont le troisiéme est la portion de la courbe BFA divisée à l'infini; tous ces triangles, dis-je, qui remplissent l'espace AFBC, partent du point C comme de leur sommet. Mais les parallelogrammes qui sont sur bases égales & entre mêmes paralleles que les triangles, sont doubles desdits triangles, & les uns & les autres sont entre les paralleles CO & DG & entre CP & EH &c. (ces lignes CO, CP sont seulement imaginées pour montrer que les triangles, & les parallelogrammes sont entre les mêmes paralleles, & sur des bases égales; car les bases des uns & des autres sont les portions de la ligne courbe divisée à l'infini, & les portions des touchantes comprises entre les paralleles à CA passent & sont prises pour ces portions de courbes comprises aussi entre les mêmes paralleles.)

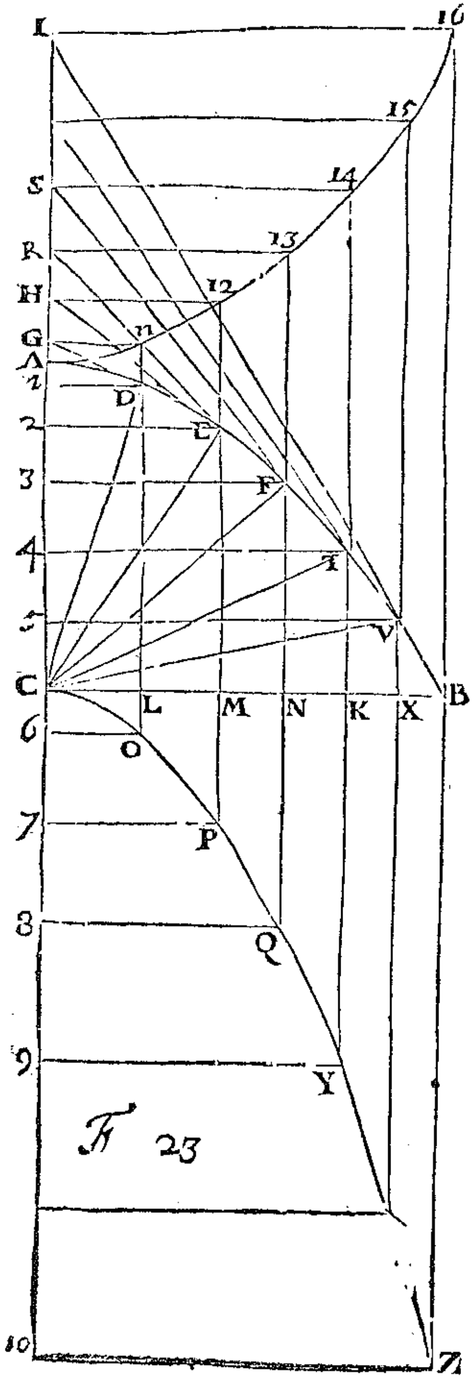
Puisque les parallelogrammes sont doubles des triangles, par les indivisibles, l'espace qui est occupé par lesdits parallelogrammes, lequel se trouve compris entre la courbe AEB d'une part, & la courbe CQZ produite à l'infini, d'autre part; & entre les lignes droites AC & la touchante B tirée à l'infini, tout cet espace, sçavoir le quadriligne ZBFACQZ sera double de l'espace AFBC.

AFBC. Mais l'espace AFBC est celui qui est fait par les triangles; partant il sera égal à l'autre espace compris dans ZBCQZ, les deux lignes BZ & CZ étant tirées à l'infini; ce qu'il falloit démontrer.

Or la touchante BZ est asymptote, d'autant que, comme la ligne DO qui part de la touchante DG est égale à la ligne GC qui part de l'extrémité de la même touchante, & ainsi de toutes les autres lignes qui partent des touchantes, il faudroit que la ligne qui sort du point B, & qui devroit rencontrer la même ligne CQZ en quelque point plus éloigné, fût égale à la portion de la ligne CAI prolongée & comprise entre le point C & la rencontre de la touchante en B. Mais il est impossible que la touchante en B la puisse rencontrer, puisqu'elles sont paralleles; ainsi elle ne rencontrera jamais la ligne CQZ en quelque point que ce soit, & partant elle est asymptote.

Considérons la figure quand nous aurons tiré les ordonnées des points D, E, F, &c. sur l'axe CA, & pareillement des points O, P, Q, &c. sur l'axe C 10, supposant que la figure ABC soit une parabole.

Soit D 1 la premiere ordonnée de la figure ABC, & O 6 de CZ 10, on aura DO égal à GC, & aussi à 1 6; & si des deux lignes égales GC, & 1 6 on ôte la ligne C 1 qui leur est commune à toutes deux, il restera G 1 égale à C 6. Or par la proprieté de la parabole, G 1 est divisée en deux également par le sommet A; partant C 6 est double de A 1; & ainsi de tous les autres, sçavoir C 7 sera double de A 2; C 8 de A 3, &c. & ainsi, comme les lignes, ou parties de l'axe de la parabole ABC sont entr'elles, ainsi les doubles parties seront entr'elles dans l'autre figure CZ 10. Mais dans la parabole les parties sont entr'elles comme les quarrez des ordonnées, & partant dans la figure CZ 10 les parties de l'axe se-



ront aussi entr'elles, comme les quarrez des paralleles aux ordonnées (qui sont les ordonnées de ladite figure CZ 10) sçavoir, comme le quarré de O 6 est au quarré de P 7, ainsi C 6 est à C 7; d'où il s'ensuit que la figure CZ 10 sera aussi une parabole, qui sera double de la parabole ABC.

Mais si l'on veut que les portions de l'axe soient entr'elles comme les cubes des ordonnées, & qu'ainsi G 1 soit triple de A 1, alors C 6 sera triple du même A 1, & la parabole CZ 10 sera triple de la parabole ABC. La même chose se fera toûjours changeant les paraboles, & faisant que les portions de l'axe soient entr'elles comme les quarré-quarrez, quarré cubes &c. des ordonnées à l'axe desdites paraboles.

Maintenant il faut voir comment se fera

la quadrature de la parabole. Pour cet effet il faut considérer dans ABC que les ordonnées & les portions de l'axe forment des parallelogrammes qui remplissent la figure. Pour l'autre figure CZ 10, je la puis considérer comme ayant tiré du point B une touchante qui rencontre CI en I (car dans la parabole la touchante au point B n'est point parallele à CI, comme à la figure précedente, & partant elle doit rencontrer la ligne CI.) De ce même point B on tire BZ parallele à CI qui rencontrera la ligne CQZ; car cette ligne n'est formée que par l'extrémité des lignes paralleles à CA. Du point de la rencontre soit fermée la figure CQZ 10. Les ordonnées de la parabole ABC seront égales aux ordonnées de la parabole CZ 10. Mais les portions de l'axe de la parabole ABC ne valent que la moitié des portions de l'axe de la parabole CZ 10; partant celles-ci sont doubles de celles-là, & partant les parallelogrammes de la parabole CZ 10 sont doubles des parallelogrammes de la parabole ABC; & partant la parabole CZ 10 sera double de ABC, ou du triligne qui lui est égal BCQZ; & le parallelogramme CBZ 10 triple de la même parabole ABC; donc ladite parabole CZ 10 sera les deux tiers dudit parallelogramme CBZ 10; & de cette sorte je trouve la quadrature de la parabole, puisque j'ai un parallelogramme qui a raison avec la parabole, Archiméde s'étant contenté de trouver une parabole égale, ou bien en raison, à un triangle. Que si on prend les cubes, quarré-quarrez & autres puissances des ordonnées on en conclura de même la quadrature de ces paraboles.

Il faut maintenant prouver que les deux trilignes DA 1, & OCL sont égaux; & pour cet effet ayant tiré la ligne droite CD, je dis que le triligne CDA est la moitié du quadriligne CODA: si donc de ce quadriligne

gne j'ôte le parallelogramme CLD 1, il restera les trilignes COL & AD 1; si du triligne on ôte le triangle CD 1, il restera le triligne DA 1; par ainsi d'une grandeur double d'une autre grandeur, j'ai tiré une partie double d'une partie que j'ai tirée de l'autre, partant le reste de la grande doit être double du reste de la petite, & de cette sorte DA 1, & LCO sont doubles de DA 1; donc DA 1 sera égal à LCO, ce qu'il falloit démontrer.

Il reste à faire voir que la ligne CD coupe en deux également le quadriligne CODA (car il n'est pas toûjours véritable.) Pour cet effet, on suppose OD pour un des côtez du parallelogramme, & pour l'autre la portion DA indivisible sur la touchante DG ou sur la ligne courbe DA qui est la même chose, & le triangle CD avec la même portion indivisible DG ou DA. Je dis que le parallelogramme est double du triangle; car ils sont sur des bases égales, qui sont lesdites portions indivisibles, & entre mêmes paralleles, sçavoir OC & DG; ainsi CD coupe le parallelogramme, ou pour mieux dire, le quadriligne ODAC en deux également; car nous ne considérons plus l'espace DAG ni celui qui est compris entre la courbe OC & la droite OC; car ces espaces ne sont point de nos parallelogrammes & triangles. Or tous ces triangles ne sont considérez que comme des lignes, sçavoir CD, CE, & les autres à l'infini; & toutes les lignes ou triangles remplissent l'espace ABC comme les parallelogrammes (au lieu desquels nous prenons les lignes DO, EP, FQ, &c.) remplissent l'espace ZBACQZ, soit que les lignes BZ & CQZ se rencontrent ou non.

Venons maintenant au solide qui se fait par la révolution de la figure sur l'axe AC. Nous voyons qu'il se fait plusieurs cylindres, rouleaux de cylindres, cônes, ou rouleaux de cônes; comme le cylindre fait sur l'axe

CA par le parallelogramme CADO; le cône fait sur la même CA, & par le triangle CAD; puis les rouleaux de cylindres faits par les petits parallelogrammes, comme sont DOPE & les autres semblables qui ont pour base les portions indivisibles de la courbe, & les rouleaux de cônes qui sont faits par les triangles comme CDE, CEF & les autres semblables autour de l'axe CA. Mais les cônes sont aux cylindres qui sont sur même base, comme 1 à 3, & les rouleaux des cônes sont aux rouleaux des cylindres en même raison; & partant le solide fait de ABC sera le tiers du solide ZBACQZ; & si les lignes BZ, CZ ne se rencontre point, il faut supposer le solide continué à l'infini de ce côté-là, & ôtant le solide fait de ABC, restera le solide BCZ, qui sera double du même ABC. Dans les plans nous avons trouvé que le plan ABC est égal au plan BCZ continué à l'infini s'il est besoin. Il faut maintenant considérer ces figures comme paraboles; & par conséquent la touchante du point B, ou plûtôt la ligne tirée de B parallele à AC rencontra la courbe CZ continuée. Soit donc fermé la figure au point de la rencontre, & soit CZ 10 la figure tournant sur son axe, & comparant les cylindres faits par les parallelogrammes D 1 A, E 2 A, &c. à ceux de l'autre parabole comme O 6 C, P 7 C, &c. parce que les ordonnées D 1, O 6, &c. de l'une & de l'autre figure sont toutes égales; mais les portions de l'axe de la parabole CZ 10, comme C 6, &c. sont doubles des portions de l'axe AC, comme A 1 &c. il s'ensuit que chaque cylindre d'embas sera double de celui d'enhaut, & partant tout le solide d'embas fait par CZ 10 roulant sur C 10 sera au solide fait par ABC tournant sur AC, comme 2 à 1. Mais on a vû que le solide de AB étoit au solide fait par ZQCB, comme 1 à 2; partant ledit solide de ZQCB sera égal au solide de CZ 10;

& ainsi le solide de CZ 10 sera la moitié du cylindre fait par le parallelogramme CBZ 10, ce qu'il falloit démontrer.

Voyez la Figure de la page 354.

Il faut maintenant considérer une autre figure qui se fait élevant du point L une ligne égale & parallele à CG, sçavoir L 11; du point M tirant M 12 égale & parallele à CH, & ainsi des autres, & par l'extrémité desdites lignes se forme la ligne courbe A 11 12 16, & de chacun desdits points on tire les ordonnées 11 G, 12 H, 13 R, &c. qui sont égales à celles de ABC tirées des points correspondans DEF, &c. qui sont infinis: de plus AG est égal à A 1, AH égal à A 2, &c. dans la parabole simple.

On considérera aussi que les lignes L 11, & DO sont égales, & pareillement M 12 & EP; N 13 & FQ, &c. & partant les parallelogrammes 11 LM 12, 12 MN 13, &c. sont égaux aux parallelogrammes ODEP, PEFQ, &c. car on ne prend ici que les lignes DOEP &c. ou leurs égales L 11, M 12, &c. au lieu desdits parallelogrammes. Or on a montré que les triangles CAD, CDE, CEF &c. sont la moitié des parallelogrammes AO, DP, EQ, &c. partant ils seront aussi la moitié des parallelogrammes ACL 11, 11 LM 12, 12 MN 13, &c. l'espace ABC est donc la moitié de l'espace 16 ACB, soit que les lignes A 16, & B 16 se rencontrent ou non. D'où il s'ensuit que ABC est égal à l'espace BA 16, quand même les lignes A 16 & B 16 étant prolongées à l'infini, ne se rencontreroient point. On pourroit montrer la même chose plus briévement, comme il s'ensuit. Les lignes 11 L, 12 M, 13 N, & les autres infiniment, étant égales aux lignes DO, EP, FQ, &c. il s'ensuit que l'espace ZCAB est égal à BCA 16; ôtant donc ABC commun, restera BA 16 égal à BCZ qui a été ci-devant montré égal à ABC, & partant 16 AB lui est aussi égal.

Maintenant ſoit ABC la premiere parabole, la touchante B I rencontrant C I, la ligne B 16 égale & parallele à C I rencontrera la courbe A 16 au point 16, & la figure A 16 I ſera une parabole égale & ſemblable à ABC : car les ordonnées de l'une ſont égales aux ordonnées de l'autre, ſçavoir, D 1 à G 11, E 2 à H 12 &c. puiſqu'elles ſont entre les mêmes paralleles; & par la proprieté de la parabole, AG eſt égal à A 1, AH à A 2, AR à A 3, &c. ſçavoir les portions de l'axe où aboutiſſent les ordonnées correſpondantes ſont égales; & partant toute la parabole ABC ſera égale à toute la parabole A 16 I. Or on a trouvé que l'eſpace BA 16 eſt égal à ABC; partant les trois pieces ou eſpaces ABC, A 16 I, & BA 16 compriſes dans le parallelogramme ICB 16, & qui le forment, ſont égales entr'elles.

Ce que nous venons de dire ici de la premiere parabole, ou de la parabole du premier genre, ce qui eſt la même choſe, ſe doit entendre auſſi des paraboles des autres genres, c'eſt-à-dire que, ſi la parabole ABC eſt du troiſiéme genre, la parabole A 16 I ſera auſſi du troiſiéme genre; mais elle ne ſera pas la même que la parabole ABC : car les parties AG, AH, AR, &c. ſont bien entr'elles en même raiſon que les parties A 1, A 2, A 3 &c. mais AG n'eſt pas égale à A 1, ni AH égale à A 2 &c. comme elles ſont dans la parabole du premier genre.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Traité des indivisibles

AUTEUR :

Gilles-Personne de Roberval

RESUME :

La méthode des indivisibles est associée au nom de CAVALIERI mais, vers la même époque, Roberval appliquait des raisonnements semblables pour déterminer des aires, des centres de gravité et des volumes. Son traité des indivisibles, reproduit ici, est caractéristique de ses méthodes

MOTS CLES :

Histoire-épistémologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1987
ISBN : 2-86612-043-3