

DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A L'ALGÈBRE LINÉAIRE

par A. Robert , J. Robinet et
I. Tenaud

objectif: Enseignement de géométrie préparant algèbre linéaire

sujet: géométrie analytique

niveau: Terminale

public: professeurs lycée

UNIVERSITÉ-PARIS VII

DE LA GEOMETRIE ANALYTIQUE

A L'ALGEBRE LINEAIRE

Les exercices proposés ci-dessous ont été choisis pour donner une familiarité avec les notions de droites, plans, vecteurs... dans l'espace et dans le plan ; cela devrait permettre de mettre des images sous les mots dans les cours ultérieurs sur espaces affines et espaces vectoriels ; en particulier, le vocabulaire utilisé en algèbre linéaire est en partie le même que celui de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (exemples privilégiés), et souvent la possibilité de se représenter les situations à l'aide du plan ou de l'espace est une aide à la résolution des problèmes.

D'un point de vue plus cognitif, une certaine aisance en géométrie du plan et de l'espace devrait permettre des jeux de cadres efficaces entre l'analytique et le vectoriel (moins connu), facilitant l'apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire.

Dans le même ordre d'idées, nous insistons sur la possibilité de s'inspirer d'une représentation graphique pour se donner des idées.

Rappelons que la géométrie analytique a été développée au 17^{me} siècle, pour étudier en particulier les courbes et les surfaces (Descartes, Fermat ...). A ce moment-là il y a eu opposition entre les tenants de la géométrie "pure" et de la géométrie analytique ; les partisans de celle-ci tiraient la supériorité de l'analytique du fait qu'une seule démonstration analytique suffisait là où en géométrie il en fallait plusieurs (cf. cas particuliers) ; les autres géomètres rétorquaient qu'en analytique on ne voit pas d'où viennent les propriétés ... Ce n'est qu'un siècle plus tard que les mathématiciens ont pu utiliser l'outil analytique ou géométrique selon les besoins spécifiques de chaque problème. Cependant au 17^{me} siècle les notions d'algèbre linéaire sous-jacentes (à l'emploi de coordonnées par

exemple) n'étaient pas du tout dégagées, ce qui n'empêchait pas l'outil de fonctionner bien. Comme le montre J. Robinet dans son travail sur l'histoire des espaces vectoriels (cf. cahier de didactique n°29, IREM PARIS SUD), il a fallu que les physiciens aient besoin du calcul vectoriel et que les mathématiciens aient su calculer sur des objets beaucoup plus variés que les seuls nombres pour que les premières idées de structure se mettent en place, puis que soient introduits et utilisés les espaces vectoriels. En fait les problèmes où ces outils d'algèbre linéaire sont indispensables sont des problèmes difficiles (espaces de dimension infinie) qui ne sont pas abordables au début des cours. Ainsi, beaucoup d'exercices proposés ci-dessous peuvent se résoudre sans l'outil vectoriel, mais nous allons privilégier son utilisation à celle, souvent plus lourde, de l'outil analytique (du moins quand c'est possible).

Dans les exercices suivants $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont supposés munis d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

MODE D'EMPLOI

a) Dans chaque série, les exercices sont supposés être résolus successivement, mais on demande de confronter sa propre solution à celle suggérée ici AU FUR ET A MESURE et non à la fin de la série. En effet, des commentaires sont rédigés à la fin de chaque solution et nous pensons que, souvent, l'apprentissage résulte de la "dialectique" entre l'action (résoudre l'exercice) et le bilan qui en est tiré

(institutionnalisation...) et que les deux composantes sont indispensables.

Quelques indications sont données pour certains exercices (avant les solutions)(*) ; elles peuvent servir aux élèves ayant des difficultés à démarrer.

b) Le texte des commentaires est rédigé pour permettre une certaine progression dans la façon de concevoir les outils utilisés. Il en résulte certains manques apparents initiaux, certaines précisions théoriques ne sont pas données dès le début. Il ne s'agit pas du tout d'un cours !

c) Voici l'organisation des exercices proposés :

Première série : de la géométrie analytique plane aux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Deuxième série : de la géométrie analytique dans l'espace aux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Problème sur le tétraèdre orthocentrique : renforcement des notions précédentes.

Troisième série : utilisation de l'outil vectoriel dans le plan.

Première série

$\mathbb{R}^2$ est supposé muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I. Des équations des droites (AB) , (BC) , (CA) supports des côtés d'un triangle ABC sont les suivantes

$$4x + 3y - 5 = 0$$

$$x - 3y + 10 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Trouver les coordonnées des sommets A, B, C du triangle.

II. Une équation de la droite support d'un côté d'un rectangle est

$$2x - 3y + 5 = 0$$

Les coordonnées d'un des sommets du rectangle sont $(2, -3)$ et on donne les coordonnées d'un point du rectangle $(7/3, 0)$; ce point appartient à un des côtés.

Former des équations des trois autres côtés du rectangle. Donner les coordonnées du centre . Ce problème a-t-il une solution unique ?

* III. Les coordonnées d'un des sommets d'un triangle ABC sont $(2, -7)$; des équations de la hauteur et de la médiane issues des deux autres sommets sont respectivement

$$3x + y + 11 = 0$$

$$x + 2y + 7 = 0$$

Donner des équations des côtés du triangle . Y-a-t-il unicité ?

IV. Soient A, B, C les points de coordonnées respectives (5, 1), (2, 3), (2, -1).

1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité et de l'orthocentre du triangle ABC. * Que pouvez-vous en déduire ?

2) Quelles sont les coordonnées du troisième sommet d'un triangle équilatéral dont les deux premiers sommets ont pour coordonnées (2, 2) et (-1, 2) respectivement ?

V. Peut-on déterminer les coordonnées du sommet D d'un parallélogramme ABCD si on connaît celles des trois points A, B, C ?

Combien suffit-il d'équations de droites (côtés ou diagonales) pour déterminer les coordonnées des 4 sommets d'un parallélogramme ABCD ? Construire un exemple.

VI. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient A, B, E les points de coordonnées respectives (2, -3, -5), (-1, 3, 2) et (4, -1, 7).

Déterminer les coordonnées des sommets du parallélogramme ABCD dont E est le centre. Donner des équations des diagonales.

* Les points A, B, C, D sont donc coplanaires. Donner une équation de leur plan. Pouvez-vous transformer le problème en un problème plan ? Construire un problème identique.

Beaucoup de ces exercices (ainsi que ceux de la deuxième série) sont tirés de l'ouvrage "Problèmes de géométrie analytique" de Kletenik (Editions de Moscou 1981).

Indications

III*On pourra utiliser des équations paramétriques du côté joignant le sommet donné et le sommet d'où est issue la hauteur donnée ; cela permet de traduire le fait que la médiane donnée coupe le côté correspondant en son milieu .

IV*Pensez à la droite d'Euler.

VI*Il y a un changement de coordonnées à effectuer.

Solutions et commentaires (Première série)

I. Les coordonnées de A s'obtiennent en résolvant le système

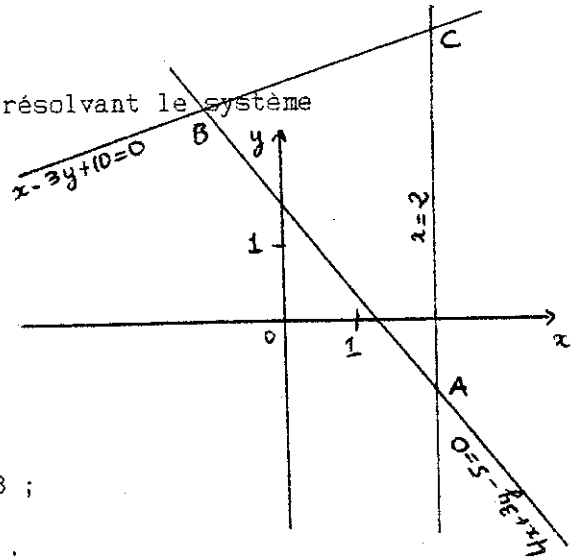
$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

soit $\begin{cases} 8 + 3y - 5 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

ou encore $x = 2$, $y = -1$.

On obtient de même pour B: $x = -1$, $y = 3$;

pour C: $x = 2$, $y = 4$.



Commentaires

Outils mobilisés

Implicite : Si un point est sur une droite, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

Explicite : méthode élémentaire de résolution d'un système linéaire de 2 équations du premier degré à 2 inconnues.

Remarques

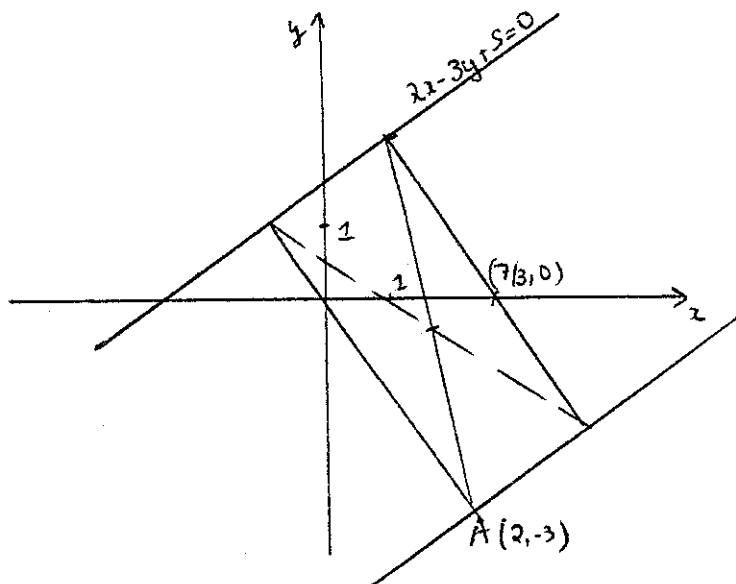
a) Toutes les méthodes de résolution s'appliquent, il est aussi rapide de substituer que d'appliquer les formules de Cramer.

b) Comme, d'après l'énoncé, le triangle existe, on ne se préoccupe pas de l'existence des solutions (assurée).

c) Une représentation graphique, sans s'imposer, permet une vérification visuelle des résultats.

d) L'exercice relève du cadre analytique (outil implicite) ; cependant la résolution effective en est numérique (outil explicite).

II.



Comme les coordonnées du sommet donné ne vérifient pas l'équation

$2x - 3y + 5 = 0$, par ce sommet passent 2 côtés dont l'un parallèle au côté donné et l'autre perpendiculaire.

Côté parallèle au côté donné :
$$\begin{cases} 2x - 3y + a = 0 \\ 4 + 9 + a = 0 \end{cases} \quad (\text{le point } (2, -3) \text{ appartient})$$
 ce qui donne $2x - 3y - 13 = 0$.

Côté perpendiculaire au côté donné :
$$\begin{cases} 3x + 2y + b = 0 \\ 6 - 6 + b = 0 \end{cases} \quad (\text{le point } (2, -3) \text{ appartient})$$
 ce qui donne $3x + 2y = 0$.

Enfin par le point $(7/3, 0)$ passe le dernier côté parallèle au précédent donc d'équation $3x + 2y + c = 0$, avec $7 + c = 0$, soit $3x + 2y - 7 = 0$.

Le centre du rectangle est le milieu de la diagonale joignant le sommet donné et le sommet opposé. Les coordonnées de ce dernier s'obtiennent en résolvant le système $2x - 3y + 5 = 0$

$$3x + 2y - 7 = 0$$

$$\text{soit } \begin{cases} -9y + 15 - 4y + 14 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit } y = 29/13, x = 11/13$$

donc les coordonnées du centre sont $(1/2 (11/13 + 2), 1/2(29/13 - 3))$

soit $(37/26, -5/13)$.

De plus, d'après les calculs mêmes, qui ont toujours une solution unique, le problème a une solution unique.

Commentaires

Outils mobilisés

Equation d'une droite parallèle à la droite dont une équation est

$$ux + vy + w = 0 \quad : \quad ux + vy + w' = 0$$

Equation d'une droite perpendiculaire à la droite dont une équation est

$$ux + vy + w = 0 \quad : \quad ux + vy + w'' = 0$$

Coordonnées du milieu du segment joignant les points de coordonnées

$$(a, b) \text{ et } (c, d) : (a + c)/2, (b + d)/2.$$

Remarques

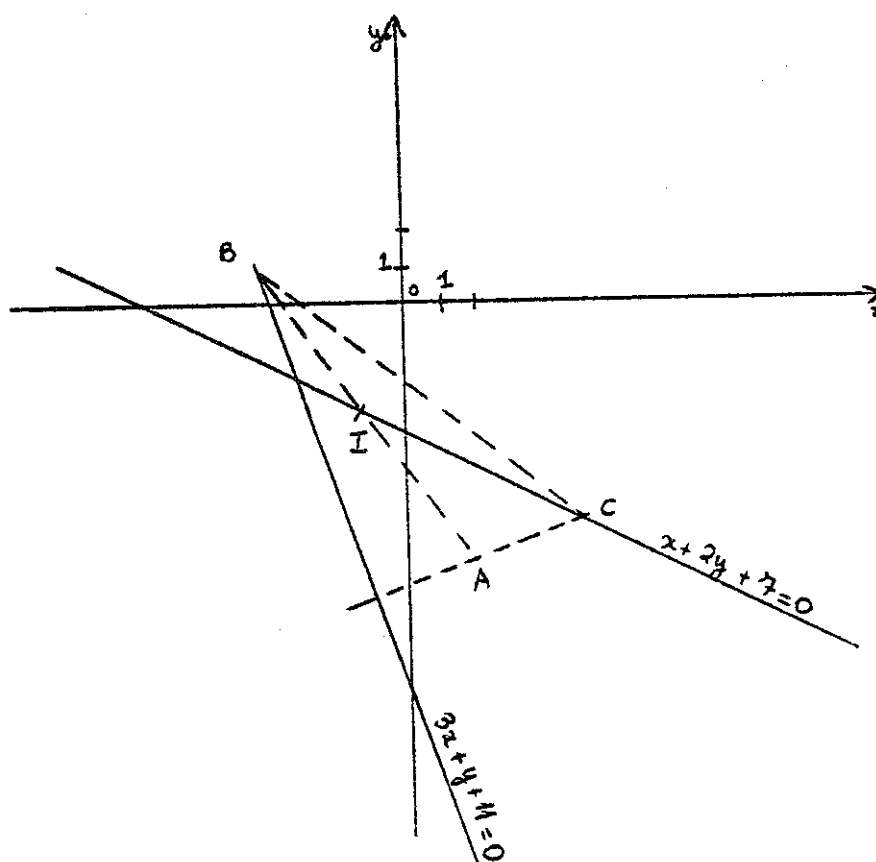
a) Dans cet exercice une représentation graphique semble naturelle dès le début. Elle permet d'organiser simplement les calculs grâce à la visualisation de la figure à obtenir. Ainsi vérifie-t-on tout de suite ce qu'indique le dessin, à savoir que les points donnés ne sont pas sur la droite donnée.

b) Les coordonnées du centre ne sont pas entières ; cela n'est pas "habituel" (cf. contrat) mais ne doit pas trop dérouter : c'est le fait qu'on obtienne toujours des coefficients entiers qui est exceptionnel !

c) Le tableau suivant rappelle les principaux résultats sur les équations des droites, droites parallèles et droites perpendiculaires.

droite D	non parallèle à Oy	cas général
D	$y = ax + b$	$ux + vy + w = 0$ u et v non simultanément nuls
$D // D'$	$y = ax + b$ $y = ax + b'$	$ux + vy + w = 0$ $kux + kvy + w' = 0 \quad k \neq 0$
$D \perp D'$	$y = ax + b$ $y = -(1/a)x + b'$	$ux + vy + w = 0$ $kvx - kuy + w' = 0 \quad k \neq 0$

III.



On appelle A le sommet donné, on appelle B le sommet dont est issu la hauteur donnée et C le sommet dont est issue la médiane donnée.

Le côté (AC) est perpendiculaire à la hauteur issue de B donc son équation est de la forme $x - 3y + a = 0$, avec $2 + 21 + a = 0$ (A y appartient), ce qui donne $a = -23$ et l'équation de (AC) est

$$\underline{x - 3y - 23 = 0}.$$

On en déduit les coordonnées de C intersection de la médiane issue de C et du côté (AC) :

$$\begin{cases} x + 2y + 7 = 0 \\ x - 3y - 23 = 0 \end{cases}$$

ou encore
$$\begin{cases} 3y + 2y + 30 = 0 \\ x - 3y - 23 = 0 \end{cases}$$

donc $y = -6$, $x = 5$.

Le point B est sur la hauteur donnée et sur une droite passant par A qui coupe la médiane issue de C en un point I aligné avec A et B et qui est le milieu de $[AB]$. C'est ce que nous allons traduire en utilisant des équations paramétriques du côté (AB) ce qui permet de faire intervenir les coordonnées des points I et B et d'écrire que I est le milieu de $[AB]$. Soit donc $\vec{X}$ un vecteur directeur de (AB) de composantes (u, v) ; $\vec{X}$ est non nul et à tout point de (AB) correspond un réel λ non nul tel que $\vec{AM} = \lambda \vec{X}$.

La droite (AB) coupe la médiane issue de C au point I de coordonnées (x, y) vérifiant $x + 2y + 7 = 0$, avec $x = \lambda u + 2$ et $y = \lambda v - 7$.
Donc $\lambda = 5 / (u + 2v)$.

Remarquons que $(u + 2v)$ ne peut être nul car cela signifierait que le vecteur $\vec{X}$ est orthogonal au vecteur de composantes $(1, 2)$, ou encore que le vecteur $\vec{X}$ est linéairement dépendant du vecteur $(2, -1)$; or la droite

(AB) serait alors parallèle à la médiane issue de C ce qui est impossible.

La droite (AB) coupe la hauteur issue de B en un point B de coordonnées (x, y) vérifiant $3x + y + 11 = 0$, avec $x = \lambda u + 2$, $y = \lambda v - 7$

Donc $\lambda = -10 / (3u + v)$.

Comme précédemment, $(3u + v)$ ne peut être nul car (AB) ne peut être parallèle à la hauteur issue de B.

Il reste à traduire que I est le milieu de [AB].

$$2 + 5u / (u + 2v) = \frac{1}{2} \left[2 + 2 - \frac{10u}{3u+v} \right], \quad -7 + \frac{5v}{u+2v} = \frac{1}{2} \left[-7 - 7 - \frac{10v}{3u+v} \right]$$

$$\text{soit } \frac{u}{u+2v} = \frac{-u}{3u+v}, \quad \frac{v}{u+2v} = \frac{-v}{3u+v}$$

ou encore $4u + 3v = 0$,

et enfin $u = 3k$ $v = -4k$.

Alors B a comme coordonnées $x = -4$ et $y = 1$.

Les deux autres côtés du triangle sont donc les droites d'équations suivantes: (AB) a comme équations paramétriques $x = 3\lambda + 2$, $y = -4\lambda - 7$

ou encore, en éliminant $4x + 3y + 13 = 0$.

Pour (BC) on peut utiliser la forme suivante : $\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}$;

$$\frac{x + 4}{9} = \frac{y - 1}{-7},$$

soit $7x + 9y + 19 = 0$.

Tous les calculs ont encore une solution unique donc le problème a une solution unique (au nom près !).

Commentaires

Outils utilisés

Equations paramétriques d'une droite de vecteur directeur $\vec{X}$ de composantes (u, v) passant par le point G de coordonnées (g, h) :

$$\begin{cases} x = g + \lambda u \\ y = h + \lambda v \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Equation d'une droite passant par deux points A et B de coordonnées connues (a, b) et (a', b') :

$$\frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b} \quad \text{si } a \neq a' \text{ et } b \neq b' ; \quad x = a \quad \text{si } a = a' ; \\ y = b \quad \text{si } b = b' .$$

Remarques

Des droites dans le cadre analytique aux droites dans le cadre vectoriel

a) Rappels vectoriels

Si les composantes (u, v) d'un vecteur $\vec{X}$ non nul donné vérifient $au + bv = 0$, avec a et b non tous 2 nuls, ce vecteur est orthogonal au vecteur $\vec{A}$ de composantes (a, b) car $\vec{X} \cdot \vec{A} = 0$. Ce vecteur est linéairement dépendant du vecteur $\vec{B}$ de composantes $(-b, a)$ car il existe une combinaison linéaire de ces deux vecteurs nulle, à savoir

$$\text{si } a \neq 0, \quad a\vec{X} - v\vec{B} = 0$$

$$\text{et si } a = 0 \text{ et } b \neq 0, \quad b\vec{X} + u\vec{B} = 0 ;$$

on vérifie en effet que $au + vb = 0$ et $av - bu = 0$ dans le premier cas et que $bu - bu = 0$ et $bv + au = 0$ dans l'autre.

Si $a \neq 0$ on retrouve que $\vec{X} = (v/a)\vec{B}$ et si $b \neq 0$ $\vec{X} = -(u/v)\vec{B}$ ce qu'on exprime habituellement par " $\vec{X}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires".

En toute généralité cette notion de colinéarité traduite par "il existe λ tel que $\vec{X} = \lambda \vec{B}$ " peut s'avérer réductrice. En effet on peut écrire encore $\vec{X} - \lambda \vec{B} = 0$ et on enlève ainsi les combinaisons linéaires du type $\mu \vec{X} + \lambda \vec{B} = 0$, utiles au cas où $\vec{X} \neq 0$ et $\vec{B} = 0$ (alors $\mu = 0$).

Bien que dans le cas traité ci-dessus $\vec{B}$ fut non nul, nous pensons qu'il est intéressant de privilégier l'utilisation des combinaisons linéaires (généralisables) à celle de la colinéarité (pseudo-proportionnalité) qui dissymétrise la relation.

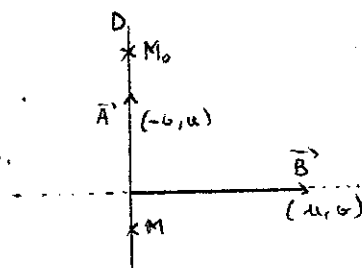
b) Soit une droite D dont on connaît une équation $ux + vy + w = 0$.

Pour en donner un vecteur directeur, on écrit que si deux points M et M_0 appartiennent à cette droite, leurs coordonnées (x, y) et (x_0, y_0) vérifient respectivement $ux + vy + w = 0$ et $ux_0 + vy_0 + w = 0$,

donc $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$,

soit $\overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{B} = 0$ où $\vec{B}$ est le vecteur de composantes (u, v) .

Il en résulte que $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \vec{A}$ avec $\vec{A} = (-v, u)$ par exemple.



Ainsi tout vecteur de composantes $(-kv, ku)$ est vecteur directeur de la droite, dès lors que k n'est pas nul.

c) Réciproquement, si la droite D est définie par $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \vec{A}$ avec $\vec{A} = (a, b)$

on a $x - x_0 = \lambda a$ et $y - y_0 = \lambda b$,

soit si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

et $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$,

si $a = 0$ $x = x_0$, si $b = 0$ $y = y_0$.

d) Dans le cadre vectoriel une droite est associée à l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ de dimension 1 formé par l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{MM_0}$ où M_0 est un point fixe de la droite et M décrit la droite D:

$\mathcal{D} = \{ \overrightarrow{MM_0} ; M_0 \in D ; M \text{ décrit } D \}$, ou encore

$\mathcal{D} = \{ \lambda \vec{A} ; \lambda \in \mathbb{R} ; \vec{A} \text{ vecteur directeur de } D \text{ fixé} \}.$

* Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont linéairement dépendants. Si D et D' ont comme vecteurs

directeurs $\vec{A}$ et $\vec{A}'$ de composantes (u,v) et (u',v') , D et D' sont parallèles si et seulement si $uv' - u'v = 0$.

* Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Ainsi dans le cas des équations déjà données, D et D' sont perpendiculaires si et seulement si

$$uu' + vv' = 0 .$$

Enfin, si la droite D a un vecteur directeur de composantes (u,v) qui vérifie $au + bv = 0$, alors D est parallèle aux droites de vecteur directeur $(-b,a)$ et d'équation $ax + by + c = 0$ et D est perpendiculaire aux droites de vecteur directeur (a,b) et d'équation $-bx + ay + c = 0$.

IV. 1) le centre de gravité a comme coordonnées

$((5 + 2 + 2)/3, (1 + 3 - 1)/3)$, soit $(3, 1)$.

Pour avoir les coordonnées de l'orthocentre, on cherche des équations de 2 hauteurs. Pour avoir une équation de la hauteur issue de A on peut utiliser l'équation vectorielle caractérisant les points M de cette hauteur par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a comme composantes $(0, -4)$ donc un point M de coordonnées (x, y) est sur la hauteur issue de A si $(y-1) \cdot (-4) = 0$ soit $y = 1$.

Une équation de la hauteur issue de A est donc $y = 1$.

De même pour avoir une équation de la hauteur issue de C, on utilise l'équation vectorielle $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et on obtient

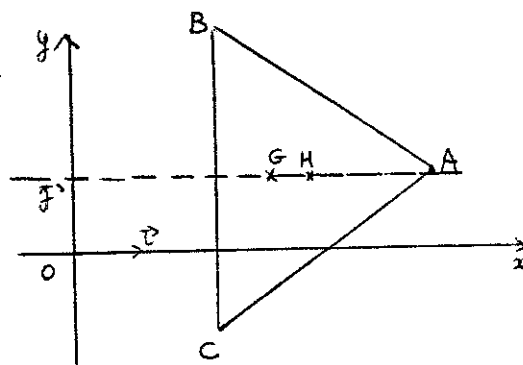
$$2x - 3y + 8 = 0.$$

L'orthocentre a donc comme coordonnées $x = 10/3$ et $y = 1$.

On peut en déduire que la droite d'Euler du triangle qui joint le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle est la droite d'équation $y = 1$. Cela permet d'en déduire une équation de la hauteur issue de B :

$$(x - 10/3)/(2 - 10/3) = (y - 1)/(3 - 1)$$

$$\text{soit } 3x + 2y - 12 = 0.$$



2) Il y a deux solutions si on ne précise pas le sens du triangle (direct par exemple) ; on appelle A et B les deux sommets donnés.

Le troisième sommet C appartient à la hauteur (médiane) perpendiculaire à (AB) au point milieu de [AB]. Et on sait que $CA = AB$.

Le milieu de [AB] a comme coordonnées $(1/2, 2)$. La hauteur a comme équation $x = 1/2$. De plus $AB = 3$,

par suite $CA^2 = (x_c - 2)^2 + (y_c - 2)^2$

et $CA^2 = 9$

par suite $x_c^2 + y_c^2 - 4(y_c + x_c) = 1$;

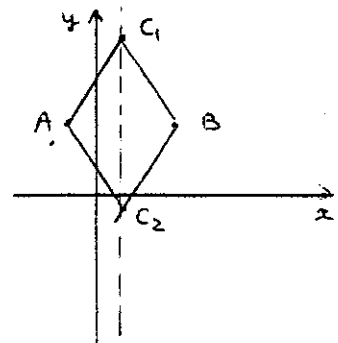
or $x_c = 1/2$

donc $y_c^2 - 4y_c - 11/4 = 0$,

et $y_c = 2 \pm \sqrt{4 + 11/4}$.

On trouve les deux points C qui conviennent, de coordonnées

$(1/2, 2 + 3\sqrt{3}/2)$ et $(1/2, 2 - 3\sqrt{3}/2)$.



Commentaires

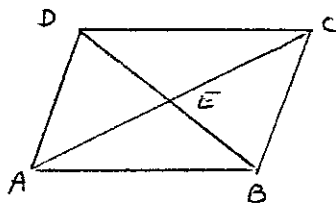
Outils mobilisés

Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre des trois sommets et a comme coordonnées respectivement le tiers de la somme des abscisses et des ordonnées.

Dans un triangle, l'orthocentre, l'isobarycentre des sommets et le centre du cercle circonscrit sont alignés sur la droite dite "d'Euler".

Dans un triangle équilatéral, les 3 côtés ont même longueur et les médianes, hauteurs, médiatrices issues de chaque sommet sont confondues.

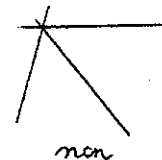
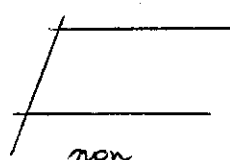
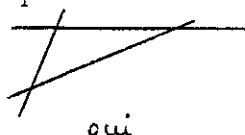
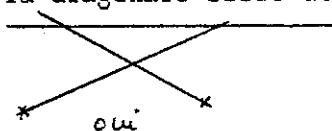
V.1)



On a l'égalité vectorielle $\vec{AD} = \vec{BC}$, qui permet d'obtenir les coordonnées de D par, avec des notations évidentes,

$$x_D = x_A + (x_C - x_E), \quad y_D = y_A + (y_C - y_E).$$

2) Il suffit de se donner trois équations ; deux côtés non parallèles et une diagonale par exemple permettent d'obtenir trois sommets (comme intersection de la diagonale et des côtés et intersection des côtés nécessairement sécants) et on est ramené à la première question ; deux diagonales et un côté permettent aussi d'avoir trois sommets (intersection des diagonales et du côté et symétriques des sommets obtenus par rapport au point d'intersection des diagonales) ; par contre trois côtés ne suffisent pas, pas plus que deux côtés non parallèles et la diagonale issue de leur point de concours.



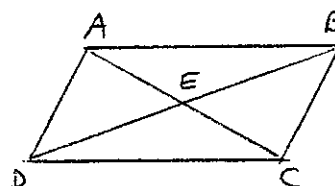
Commentaires

L'outil vectoriel est performant !

VI. Les égalités vectorielles $\vec{AC} = 2\vec{AE}$ et $\vec{BD} = 2\vec{BE}$ permettent d'obtenir les coordonnées des points C et D :

$$x_C = x_A + 2(x_E - x_A) \quad \text{soit } x_C = 6,$$

$$\text{de même } y_C = 1, \quad z_C = 19;$$



et $x_D = 9$, $y_D = -5$, $z_D = 12$.

Pour obtenir les équations des diagonales, on utilise les égalités vectorielles du type $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC}$ pour caractériser la droite (AC) ; on obtient ainsi pour (AC) $x - 2 = 4\lambda$, $y + 3 = 4\lambda$, $z + 5 = 24\lambda$

$$\text{soit } (x - 2)/4 = (y + 3)/4 = (z + 5)/24 ;$$

$$\text{et pour (DB) } x = -1 - 10\lambda, y = 3 + 8\lambda, z = 2 - 10\lambda$$

$$\text{soit } (x + 1)/(-10) = (y - 3)/8 = (z - 2)/(-10) .$$

Les points A, B, E définissent un plan auquel appartiennent les points C et D puisqu'ils sont sur les droites (AE) et (BE) du plan.

Pour avoir l'équation de ce plan, on peut procéder par identification en travaillant sur l'équation $ax + by + cz = 1$ et en écrivant que les coordonnées des points A, B, E vérifient cette équation ; on peut aussi travailler avec des déterminants.

Avec la première méthode on obtient après résolution du système

$$\begin{cases} 2a - 3b - 5c = 1 \\ -a + 3b + 2c = 1 \\ 4a - b + 7c = 1 \end{cases}$$

$$a = 29/28, b = 25/28, c = -9/28$$

ce qui donne l'équation $29x + 25y - 9z = 28$.

La résolution du système peut se faire en utilisant les formules de Cramer ou élémentairement en substituant a et b en fonction de c dans une des équations (par combinaison des lignes 1 et 3 on obtient

$a - 3c = 2$ et $5b + 17c + 1 = 0$); on peut aussi résoudre le système par la méthode du Pivot.

Un vecteur normal $\vec{N}$ à ce plan a comme composantes $\langle 29, 25, -9 \rangle$; donc si on se place dans un repère $(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ où $\vec{k}'$ est colinéaire à $\vec{N}$, le problème devient un problème du plan $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ puisque tous les points considérés sont précisément dans ce plan .

Transformer le problème en un problème plan revient à effectuer un changement de repère et à donner les coordonnées des points A, B, E dans le nouveau repère $(O, \vec{i}', \vec{j}')$; cette notion est vue beaucoup plus tard dans le cours, disons en attendant d'y revenir, que pour caractériser ce changement de repère il suffit de se donner les composantes des nouveaux vecteurs de base par rapport aux anciens, que ces composantes forment un tableau matriciel qui permet d'obtenir les composantes de n'importe quel point par rapport au nouveau repère et que l'équation du plan ABE dans le nouveau repère est $z' = 0$.

Par exemple, on peut se donner les trois points de coordonnées $\langle 1, 3, 8 \rangle$, $\langle -4, 5, 8 \rangle$ et $\langle 7, 9, 8 \rangle$; ces trois points sont dans le plan d'équation $z = 8$ et le problème est un problème du plan $z = 8$. On peut garder les seules deux premières coordonnées pour le résoudre.

Commentaires

Outils utilisés et remarques

A part les outils déjà rencontrés, du type égalité vectorielle dans un parallélogramme, on utilise des éléments de géométrie analytique dans l'espace qui seront repris en détail dans la deuxième série.

Cet exercice a comme objectif de préparer cette deuxième série et peut ne pas être résolu tout de suite.

On y voit une motivation aux changements de repère .

Deuxième série

I Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne les points A, B, C de coordonnées (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1). On appelle O le point de coordonnées (0,0,0) origine du repère orthonormé fixé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Que peut-on dire de la projection de O sur le plan P déterminé par les points A, B, C ? Donner ses coordonnées.
- 2) Donner une équation du plan P.
- 3) Trouver des équations de la hauteur et de la médiane issues de A dans le triangle ABC .

II Soient A, B, C, D les points de coordonnées respectives (1,0,0), (1,1,0), (1,-1,1) et (0,1,1).

Ces points sont-ils coplanaires ?

Donner des équations des faces et des arêtes du tétraèdre ABCD qu'ils définissent.

III Parmi les 12 groupes d'équations suivantes, reconnaître celles qui correspondent à deux plans (resp. droites ou droite et plan) parallèles ou perpendiculaires. Préciser le cas échéant s'il y a coplanarité.

- 1) $(x + 1)/3 = (y - 2)/(-3) = (z + 3)/(-2)$; $x - 3y + 6z + 7 = 0$.
- 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$; $2x + y + 2z - 1 = 0$.
- 3) $x = (y - 1)/(-2) = z/3$; $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = -6t + 1$ ($t \in \mathbb{R}$).
- 4) $(x + 2)/3 = (y - 1)/(-2) = z$; $x + y - z = 0$, $x - y - 5z - 8 = 0$.
- 5) $3x - y - 2z - 5 = 0$; $x + 9y - 3z + 2 = 0$.
- 6) $x - 3z + 2 = 0$; $2x - 6z - 7 = 0$.

$$7) 3x - 2y + z + 3 = 0, 4x - 3y + 4z + 1 = 0 ; 3x - 2y + z + 1 = 0 .$$

$$8) 2x - 5y + z = 0 ; x + 2z - 3 = 0 .$$

$$9) x = 2t + 5, y = -t + 2, z = t - 7 ; x + 3y + z + 2 = 0 \text{ et}$$

$$x - y - 3z - 2 = 0 .$$

$$10) x = 2t + 1, y = 3t - 2, z = -6t + 1 ; 2x + y - 4z + 2 = 0 \text{ et}$$

$$4x - y - 5z + 4 = 0 .$$

$$11) 5x - 3y + 2z - 5 = 0, 2x - y - z - 1 = 0 ; 4x - 3y + 7z - 7 = 0 .$$

$$12) x = 3 + 2t, y = 5 - 3t, z = 2 - 2t ; -3x + 2y + 3z - 5 = 0 .$$

IV Déterminer les réels a et b de manière que les plans d'équations

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$

$$x + 2y - z + b = 0$$

$$x + ay - 6z + 10 = 0$$

* aient un point commun

* passent par une même droite

* se coupent suivant 3 droites distinctes et parallèles .

V Pour quelles valeurs de l les droites dont on donne des équations ci-dessous se coupent-elles ?

$$(x + 2)/2 = y/(-3) = (z - 1)/4 ,$$

$$(x - 3)/1 = (y - 1)/4 = (z - 7)/2 .$$

Indications

L'exercice IV nécessite de savoir résoudre les systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues.

Solutions et commentaires (Deuxième série)

I 1) Soit H la projection de O sur P ; la question qui se pose est d'identifier H dans le triangle ABC. Pour cela on va caractériser les droites (CH), (AH) et (BH) . Remarquons d'abord que le triangle ABC est équilatéral car $CA = AB = CB = \sqrt{2}$ (calculs de longueur faits dans les triangles rectangles OAC, OAB, OBC) . D'autre part la droite (CH) est perpendiculaire à la droite (AB) : en effet d'une part (AB) est orthogonale à la droite (OC) car celle-ci, perpendiculaire au plan OAB est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan et d'autre part (AB) est orthogonale à la droite (OH) car celle-ci est perpendiculaire au plan ABC et donc à toutes les droites de ce plan.

La droite (AB) est donc perpendiculaire au plan OHC puisqu'orthogonale à deux droites de ce plan, donc elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan donc à (CH) .

On démontrerait de même que (AH) et (BH) sont hauteurs du triangle équilatéral ABC : H est donc le centre du triangle . C'est en particulier l'isobarycentre et donc ses coordonnées sont $(1/3, 1/3, 1/3)$.

2) Pour obtenir l'équation du plan P on peut procéder par identification L'équation est de la forme $ax + by + cz = 0$, les points A, B, C y appartiennent et par suite on a les relations suivantes :

$$a + d = 0, b + d = 0, c + d = 0 \text{ soit } a = b = c = -d .$$

L'équation du plan P est donc $x + y + z = 1$.

On peut aussi écrire qu'un point M de coordonnées (x,y,z) est dans le plan P si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{OH} = 0$ soit

$$(x - 1) \frac{1}{3} + y \frac{1}{3} + z \frac{1}{3} = 0 \text{ et on retrouve } x + y + z = 1 .$$

3) Un point M de coordonnées (x, y, z) est sur (AH) si et seulement si on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AH}$; d'où des équations paramétriques

$$x = 1 - 2/3\lambda \quad , \quad y = \lambda/3 \quad , \quad z = \lambda/3 \quad ,$$

ou encore en éliminant λ ,

$$(x - 1)/(-2/3) = 3y = 3z \quad ,$$

soit $y - z = 0$, $x + 2y - 1 = 0$.

Commentaires

Outils utilisés

Equation d'un plan $ax + by + cz = d$

Equation d'une droite : ou bien comme intersection de deux plans dont on donne les équations, ou bien paramétriques (traduisant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite) .

II. On peut déterminer l'équation du plan formé par trois des points et vérifier que le quatrième n'y appartient pas. Par exemple l'équation du plan ABC est $x = 1$ donc D n'y appartient pas puisque son abscisse n'est pas égale à 1 .

On peut aussi utiliser la notion d'indépendance linéaire : les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants ; pour le démontrer on peut calculer leur déterminant qui s'avère non nul (il vaut 1) .

Les équations des faces peuvent s'obtenir par identification. L'équation générale d'un plan étant $ax + by + cz = d$, ce plan passe par A si et seulement si $a - d = 0$

par B si et seulement si $a + b = d$

par C si et seulement si $a - b + c = d$

par D si et seulement si $b + c = d$

Il en résulte les équations suivantes :

$$\text{ABC} \quad x = 1$$

$$\text{DAB} \quad x + z = 1$$

$$\text{DAC} \quad 2x + y + z = 2$$

$$\text{DBC} \quad 2x + y + 2z = 3$$

Quant aux arêtes, le plus simple est d'écrire pour chacune d'elles les deux équations des faces qui la contiennent . Par exemple, les équations de l'arête (AB) sont $x = 1$ et $x + z = 1$. On remarque qu'on peut choisir $x = 1$ et $z = 0$.

Commentaires

Outils utilisés

Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan P d'équation $ax + by + cz = 0$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

L'intersection de deux plans est une droite (en général) ; l'intersection de trois plans est soit vide, soit c'est un point, soit c'est une droite.

Remarques

Du cadre analytique au cadre vectoriel

Vectoriellement un plan se définit par deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (i.e. non dépendants et non nuls) : pour tout point M du plan, si M_0 est fixé dans le plan, il existe λ et μ tels que

$$\vec{MM_0} = \lambda \vec{A} + \mu \vec{B}$$

On reconnaît la définition de l'espace vectoriel de dimension 2 formé par l'ensemble des vecteurs $\vec{MM_0}$.

III. Dans cet exercice, on va systématiquement utiliser l'outil vectoriel pour répondre .

1) Il s'agit d'une droite et d'un plan .

Un vecteur directeur $\vec{A}$ de la droite a comme composantes $(3, -3, -2)$; un vecteur normal $\vec{V}$ au plan est le vecteur de composantes $(1, -3, 6)$. Or

$$\vec{A} \cdot \vec{V} = 3 + 9 - 12 = 0 .$$

Donc la droite est parallèle au plan .

Vérifions que la droite n'est pas même incluse dans le plan : le point de coordonnées $(-1, 2, -3)$ est sur cette droite et comme $-1 - 6 - 18 + 7 \neq 0$ ce point n'est pas dans le plan .

2) Il s'agit de deux plans, de vecteurs normaux de composantes respectives $(4, 2, -4)$ et $(2, 1, 2)$. Ces vecteurs ne sont ni dépendants ni orthogonaux, donc les plans sont quelconques. Ils se coupent suivant la droite d'équations $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$.

3) Il s'agit de deux droites, de vecteurs directeurs respectifs $(1, -2, 3)$ et $(2, 3, -6)$. Ces vecteurs ne sont ni dépendants ni orthogonaux donc les droites ne sont ni parallèles ni orthogonales ; vérifions qu'elles ne sont pas coplanaires : on peut choisir deux points sur chaque droite, par exemple A et B obtenus pour $t=0$, de coordonnées $(0, 1, 0)$ et $(1, -2, 1)$ et chercher si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et les deux vecteurs directeurs des droites sont ou non dépendants. Pour cela, on utilise le déterminant de leurs composantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -26$$

On constate que ce déterminant est non nul, donc les droites ne sont pas coplanaires.

4) Il s'agit de 2 droites, de vecteurs directeurs de composantes $(3, -2, 1)$ et (a, b, c) ; un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans s'obtient en effectuant le produit vectoriel de deux vecteurs normaux à chacun des deux plans. Donc

$$(a, b, c) = (1, 1, -1) \wedge (1, -1, 5) = (-6, 4, -2) .$$

Les vecteurs directeurs des deux droites sont dépendants donc les droites sont parallèles ; comme le point de coordonnées $(-2, 1, 0)$ n'appartient qu'à la première droite, les deux droites ne sont pas confondues et définissent un plan.

Pour avoir l'équation de ce plan, on peut en chercher un vecteur normal, puis utiliser le fait qu'on connaît un point du plan ; un vecteur normal s'obtient comme produit vectoriel du vecteur directeur et d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A est sur la première droite et B sur l'autre . On prend pour A le point de coordonnées $(-2, 1, 0)$ et pour B, on fixe $y = 0$, et on trouve $x = z = -2$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a comme composantes $(0, -1, -2)$ et un vecteur normal au plan cherché est le vecteur $(5, 6, -3)$. L'équation du plan des deux droites est donc du type $5x + 6y - 3z = d$ et comme A appartient au plan, on a $d = -4$.

5) Il s'agit de deux plans, de vecteurs normaux $(3, -1, -2)$ et $(1, 9, -3)$; ces deux vecteurs sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires. Ils se coupent suivant la droite d'équations $3x - y - 2z - 5 = 0$ et $x + 9y - 3z + 2 = 0$.

6) Il s'agit de deux plans, de vecteurs normaux $(1, 0, -3)$ et $(2, 0, -6)$; ces vecteurs sont dépendants donc les plans sont parallèles. Comme le point $(4, 0, 2)$ n'appartient qu'au premier plan, ces 2 plans ne sont pas confondus.

7) Il s'agit d'une droite et d'un plan. On peut remarquer que le plan est parallèle (strictement) à un des deux plans définissant la droite ;

on peut en déduire tout de suite que la droite est parallèle au plan (et n'y appartient pas).

On peut aussi plus classiquement travailler sur le vecteur directeur $(3, -2, 1) \wedge (4, -3, 4) = (-5, -8, -1)$ de la droite et le vecteur normal $(3, -2, 1)$ au plan. Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite est parallèle au plan.

8) Il s'agit de deux plans, de vecteurs normaux $(2, -5, 1)$ et $(1, 0, 2)$. Ces vecteurs ne sont ni dépendants ni orthogonaux donc les plans se coupent suivant une droite d'équations $2x - 5y + z = 0$, $x + 2z - 3 = 0$.

9) Il s'agit de deux droites, de vecteurs directeurs $(2, -1, 1)$ et $(-8, 4, -4)$; ces vecteurs sont dépendants donc les droites sont parallèles; le point $(5, 2, -7)$ n'appartient pas à la deuxième droite donc elles ne sont pas confondues. L'équation de leur plan s'obtient en cherchant un vecteur normal comme produit vectoriel du vecteur directeur et d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que A est sur la première droite et B sur l'autre: on choisit A de coordonnées $(5, 2, -7)$ et B de coordonnées $(-1, 0, -1)$. Le vecteur $(1/2)\overrightarrow{AB}$ a comme composantes $(-3, -1, 3)$ et le vecteur normal correspondant $(2, 9, 5)$. Le plan, d'équation du type $2x + 9y + 5z = d$, passe par B ce qui donne $d = -7$.

10) Il s'agit encore de deux droites de vecteurs directeurs $(2, -1, 1)$ et $(1, 3, 1) \wedge (1, -1, -3) = (-9, -6, -6)$.

Ces vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont orthogonales. On peut chercher si elles sont coplanaires, ce qui revient à chercher si elles se coupent. On résout l'équation en t obtenue en remplaçant dans

une des équations définissant la deuxième droite x, y, z par leurs expressions paramétriques. Cela fournit $t = 2/31$, et par la-même les coordonnées du point d'intersection de la première droite et du plan correspondant ; ce point est-il dans l'autre plan définissant la deuxième droite ? On obtient une expression non nulle en remplaçant dans l'équation de ce plan x, y, z par leurs valeurs. Donc les droites ne sont pas coplanaires.

11) Il s'agit d'une droite et d'un plan, de vecteurs directeur et normal respectifs

$$\langle 5, -3, 2 \rangle \wedge \langle 2, -1, -1 \rangle = \langle 5, 9, 1 \rangle \text{ pour la droite}$$

et $\langle 4, -3, 7 \rangle$ pour le plan.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, donc la droite est parallèle au plan. De plus on vérifie que le point de coordonnées $\langle 0, -7/5, 2/5 \rangle$ qui est sur la droite est aussi dans le plan : la droite donnée appartient au plan donné.

12) Il s'agit d'une droite de vecteur directeur $\langle 2, -3, -2 \rangle$ et d'un plan de vecteur normal $\langle -3, 2, 3 \rangle$. Ces deux vecteurs ne sont ni dépendants ni orthogonaux, la droite et le plan se coupent au point de coordonnées $\langle 29/9, 14/3, 16/9 \rangle$.

Commentaires

Outils utilisés

Implicite

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur orthogonal à chacun d'eux et ses composantes sont $(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - ba')$ si les composantes des vecteurs sont respectivement (a, b, c) et (a', b', c') .

Le déterminant des trois vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Explicite

* Un plan et une droite sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.

* Un plan et une droite sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de la droite est dépendant d'un vecteur normal du plan.

* Si un plan et une droite ne sont pas parallèles, ils se coupent en un point.

* Le vecteur directeur d'une droite définie paramétriquement par les équations suivantes

$x = x_0 + \lambda u, y = y_0 + \lambda v, z = z_0 + \lambda w$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est le vecteur de composantes (u, v, w) ; de même si des équations définissant la droite sont de la forme

$(x - x_0)/u = (y - y_0)/v = (z - z_0)/w$ (avec les conventions habituelles si u, v ou w sont nuls).

Si la droite est définie comme l'intersection de deux plans dont on donne des équations, on en obtient un vecteur directeur en prenant le produit vectoriel de deux vecteurs normaux du plan.

* Le plan, d'équation $ax + by + cz = 0$ a comme vecteur normal le vecteur (a, b, c) .

* Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont dépendants; ils sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Si deux plans ne sont pas parallèles (ni confondus), ils se coupent suivant une droite.

* Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont dépendants. Elles sont alors coplanaires, et sauf si elles sont confondues on obtient un vecteur normal au plan ainsi défini en prenant le produit vectoriel d'un vecteur directeur et d'un vecteur de représentant $\overrightarrow{MM_0}$ où M est sur une droite et M_0 sur l'autre.

* Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs le sont ; elles sont ou non coplanaires.

* Deux droites sont coplanaires si et seulement si le déterminant des deux vecteurs directeurs et d'un troisième vecteur du type $\overrightarrow{AB}$ où A appartient à l'une des droites et B à l'autre est nul.

IV. Les trois plans ont un point commun si le système

$$2x - y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = -b$$

$$x + ay - 6z = -10$$

a une solution unique (le déterminant des coefficients est non nul).

Ce déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = -35 + 5a .$$

Il est non nul si $a \neq 7$.

Si ce déterminant est nul, ou bien le système est de rang 2 et alors les plans ont une droite en commun (cela revient à la nullité du déterminant bordant

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -b \\ 1 & a & -10 \end{vmatrix}$$

On trouve que ce déterminant bordant vaut $45 - 15b$ et qu'il est nul si $b = 3$. Donc si $a = 7$ et $b = 3$ les plans ont une droite commune.

Ou bien le système est impossible ($a = 7$, $b \neq 3$), et alors les plans se coupent deux à deux suivant les trois droites

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = -b \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = -b \\ x + ay - 6z = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + ay - 6z = -10. \end{cases}$$

Ces trois droites ont comme vecteurs directeurs les vecteurs $(-5, 5, 5)$, $(-5, 5, 5)$ et $(-15, 15, 15)$ obtenus par produit vectoriel des vecteurs normaux aux plans qui les définissent et on vérifie que ces vecteurs sont dépendants. Les plans ont donc en commun deux à deux trois droites parallèles.

Commentaires

Cet exercice est immédiat si on connaît la résolution des systèmes de trois équations à trois inconnues et infaisable autrement. Si c'est le cas, on y reviendra.

V. On vérifie d'abord que les vecteurs directeurs des droites ne sont jamais dépendants, quelle que soit la valeur de l . Il suffit alors de déterminer l pour que les droites soient coplanaires, n'étant pas

parallèles elles se couperont. Les droites sont coplanaires si le déterminant des vecteurs directeurs et d'un vecteur du type $\overrightarrow{AB}$ où A est sur la première droite et B sur l'autre est nul : on choisit les points A et B de coordonnées $(-2, 0, 1)$ et $(3, 1, 7)$; le déterminant s'écrit

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 11(21 - 6).$$

On trouve donc qu'il est nul si $1 = 3$, ce qui est la condition pour que les droites se coupent.

Problème : le tétraèdre orthocentrique

A. On considère les 4 points A, B, C, D de l'espace dont les coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement $(0, 2, 0)$, $(3, -1, 0)$, $(-3, -1, 0)$, $(0, 0, 2)$.

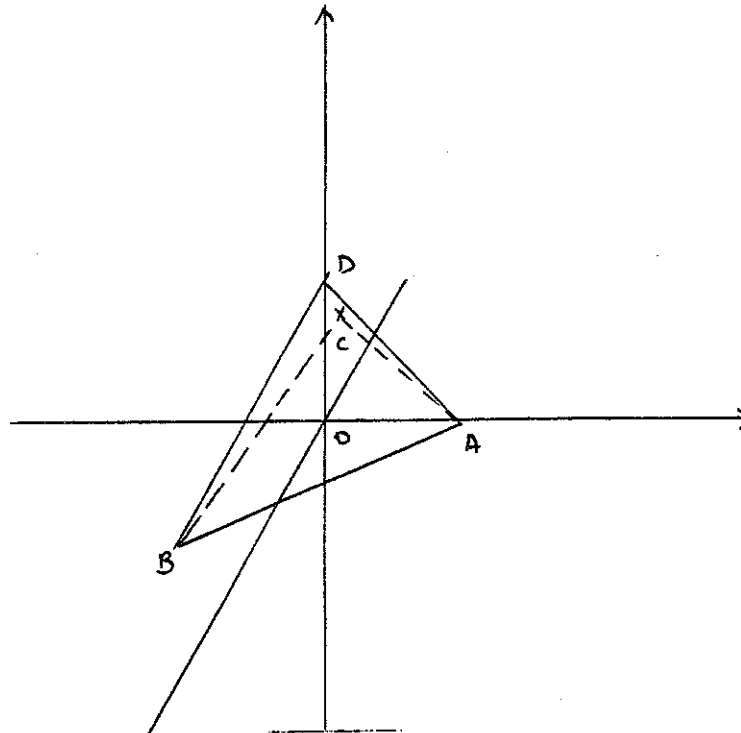
- 1) Les points sont-ils coplanaires ?
- 2) Montrer que les paires d'arêtes opposées du tétraèdre ABCD sont orthogonales .
- 3) Montrer que les hauteurs (c'est à dire les perpendiculaires menées des sommets sur les faces opposées) sont concourantes en un point qu'on appelle l'orthocentre et qu'on note ici H .
- 4) Caractériser les pieds des hauteurs dans chaque face .
- 5) On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre, et O le centre de la sphère circonscrite . Montrer que G, H, O sont alignés . Quelles sont leurs positions respectives sur cette droite ?
- 6) Montrer que les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent par l'orthocentre H .

B. On appelle tétraèdre régulier un tétraèdre dont tous les côtés sont de même longueur.

- 1) Donner les coordonnées des sommets d'un tel tétraèdre (de votre choix).
- 2) Montrer que dans votre tétraèdre les hauteurs concourent .
- 3) Que pouvez-vous dire de l'isobarycentre et du centre de la sphère circonscrite ?
- 4) Montrer que les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont les perpendiculaires communes à ces droites .

Correction du problème

A) Nous avons privilégié les solutions analytiques (avec utilisation de l'outil vectoriel) sauf pour la question 4). Ceci dit, une solution entièrement géométrique de tout le problème est possible.



1) Les points A, B, C appartiennent au plan (O, x, y) ; D n'ayant pas sa cote nulle n'est pas dans ce plan, les 4 points ne sont pas coplanaires et déterminent un tétraèdre.

2) Montrons que $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

Le vecteur $\vec{AB}$ a comme composantes $(\sqrt{3}, -3, 0)$; le vecteur $\vec{CD}$ a comme composantes $(\sqrt{3}, 1, 2)$; on vérifie donc que le produit scalaire est nul. De même on montre que les produits scalaires $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ et $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$ sont nuls, ce qui démontre que les paires d'arêtes opposées sont orthogonales .

3) Nous allons d'abord montrer que deux hauteurs sont concourantes puis vérifier que le point de concours appartient aux deux autres.

La hauteur issue de D a comme vecteur directeur un vecteur normal au plan ABC. Ce plan a comme équation $z = 0$, donc on peut caractériser un point M de la hauteur par

$$\overrightarrow{DM} = \lambda \overrightarrow{U} \text{ où } \overrightarrow{U} \text{ est le vecteur de composantes } (0, 0, 1) \text{ (avec } \lambda \in \mathbb{R}).$$

La hauteur issue de D est la droite d'équations $x = 0, y = 0$.

La hauteur issue de A a comme vecteur directeur un vecteur normal au plan BCD. Ce plan a comme équation

$$ax + by + cz = 1, \text{ avec}$$

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ -3a - b = 1 \\ 2c = 1, \end{cases}$$

car les coordonnées de B, C et D vérifient cette équation.

$$\text{Donc } a = 0, b = -2, c = 1$$

et un point M est sur la hauteur si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{V} \text{ où } \overrightarrow{V} \text{ est le vecteur de composantes } (0, -2, 1).$$

Les deux hauteurs se coupent s'il existe une valeur de λ et une valeur de μ définissant le même point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{on doit donc avoir } \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0 = 2 - 2\mu, \\ z_0 = \lambda + 2 = \mu. \end{cases}$$

On obtient $\mu = 1$ et $\lambda = 1$, et on trouve le point H de coordonnées $(0, 0, 1)$.

La hauteur issue de B a comme vecteur directeur un vecteur normal au plan ACD. Ce plan a comme équation

$$ax + by + cz = 0 \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b = -1 \\ 2b = 1 \\ 2c = 1 \end{cases}$$

Donc $a = -\sqrt{3}/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ et un point M est sur cette hauteur si et seulement si

$\vec{BM} = \chi \vec{w}$ où $\vec{w}$ est le vecteur de composantes $(-\sqrt{3}, 1, 1)$.

Vérifions qu'il existe une valeur de χ telle que $\vec{BH} = \chi \vec{w}$:

$$\begin{cases} 0 = \sqrt{3} - \sqrt{3}\chi \\ 0 = -1 + \chi \\ 1 = \chi \end{cases}$$

On trouve $\chi = 1$ et H est bien sur cette hauteur.

Un calcul analogue permet de montrer que H est aussi sur la hauteur issue de C d'équation

$\vec{CM} = \rho \vec{t}$ où $\vec{t}$ a comme composantes $(\sqrt{3}, 1, 1)$: on doit prendre $\rho = 1$.

En fait les deux hauteurs sont symétriques par rapport au plan d'équation $x = 0$.

4) Une démonstration géométrique permet d'éviter de très longs calculs.

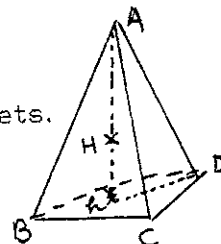
On pourrait aussi utiliser l'outil produit scalaire.

Soit H l'orthocentre, on appelle h l'intersection de (AH) et du plan BCD. Le plan ADh est perpendiculaire à la droite (BC) : en effet (Ah) est orthogonale au plan BCD donc à toutes les droites de ce plan donc en particulier à (BC) ; (AD) est orthogonale à (BC) par hypothèse (cf. 2)).

Donc (BC) est orthogonale à (Dh). De même (BD) est orthogonale à (Ch).

Donc h est l'orthocentre de BCD.

Les démonstrations sont identiques pour les trois autres sommets.



5) Les coordonnées de G, isobarycentre des quatre points A, B, C, D sont $(0, 0, 1/2)$; donc la droite d'équations $(x = 0, y = 0)$ joint les points G et H (de coordonnées $(0, 0, 1)$).

Cherchons les coordonnées du centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre. On remarque que

$OA = OB = OC = 2$, donc le point Ω est sur la droite précédente et doit vérifier $\Omega A = \Omega D$.

Soit z sa cote, on a $\Omega A^2 = 4 + z^2 = (z - 2)^2 = z^2 - 4z + 4$,

$$\text{et } z = 0.$$

On trouve que Ω et O sont confondus, et que, sur la droite (Oz) , G est le milieu de $[OH]$.

6) On va chercher des équations de la perpendiculaire commune aux arêtes $\langle AD \rangle$ et $\langle BC \rangle$: on obtient un vecteur directeur de cette droite en prenant le produit vectoriel des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ et on écrit que la droite passe par un point M_0 de $\langle BC \rangle$ et rencontre $\langle AD \rangle$.

$$\vec{AD} = (0, -2, 2)$$

$$\vec{BC} = (-2\sqrt{3}, 0, 0)$$

$$\vec{AD} \wedge \vec{BC} = (0, -4\sqrt{3}, -4\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}(0, 1, 1)$$

Donc, si M est un point de la perpendiculaire commune, on a

$$\vec{M_0M} = \lambda(0, 1, 1) \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda \\ z = z_0 + \lambda \end{cases}$$

Ecrivons que M_0 est sur $\langle BC \rangle$, d'équations $z = 0$ et $y = -1$:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lambda \end{cases}$$

D'autre part cette droite rencontre la droite (AD) d'équations
 $(x = 0, y + z = 2),$

donc il existe λ tel que $x = 0$ et $\lambda + \lambda - 1 = 2$

$$\text{soit} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

On peut remarquer que cette droite rencontre (AD) au point $(0,1,2)$ et
 (BC) au point $(0,-1,0)$.

D'autre part le point H de coordonnées $(0,0,1)$ est sur cette droite.

Des calculs analogues montrent que H est sur les deux autres
 perpendiculaires communes.

Pour (AB) et (CD), on trouve d'abord comme vecteur directeur de la
 perpendiculaire commune par exemple le vecteur de composantes $(\sqrt{3}, 1, -2)$.

Des équations de (AB) et (CD) sont

$$z = 0, y + \sqrt{3}x - 2 = 0,$$

$$\text{et } 2(y + 1) = z, 2(x + \sqrt{3}) = z\sqrt{3}.$$

On en déduit les équations paramétriques suivantes de la perpendiculaire
 commune : $x = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}\lambda, y = 1/2 + \lambda, z = -2\lambda.$

Par conséquent, H appartient à cette droite (ses coordonnées vérifient
 ces équations pour $\lambda = -1/2$).

Pour (AC) et (BD), on trouve les équations paramétriques suivantes,
 vérifiées par le point H pour $\lambda = -1/2$:

$$x = -\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}\lambda, y = 1/2 + \lambda, z = -2\lambda.$$

B 1) On peut choisir les trois points A, B, C sommets d'un triangle équilatéral et on sait que D doit appartenir à $\langle Oz \rangle$ pour que l'on ait $DA = DB = DC = AB$. Le point D a comme coordonnées $(0, 0, z_0)$.
Précisément, $DA^2 = z_0^2 + 4 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 3 + 9 = 12$,
soit $z_0 = 2\sqrt{2}$ (on le choisit positif).

2) On pourrait démontrer géométriquement que les paires d'arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales, ce qui entraîne la propriété cherchée.

Voici une solution analytique.

Le plan ABC a pour équation $ax + by + cz = 1$, avec $2b = 1$, $\sqrt{3}a - b = 1$, $2\sqrt{2}c = 1$.

On prend le vecteur normal de composantes $(\sqrt{3}, 1, 1/\sqrt{2})$.

La hauteur issue de C a comme équations paramétriques

$$x = \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, \quad y = \lambda - 1, \quad z = \lambda/\sqrt{2}.$$

La hauteur issue de D a comme équations paramétriques

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Ces deux hauteurs se coupent au point de coordonnées $(0, 0, 1/\sqrt{2})$.

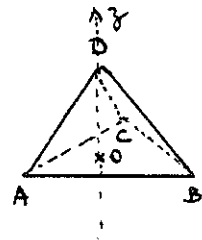
De même on prend un vecteur normal au plan ACD de composantes $(\sqrt{3}, 1, 1/\sqrt{2})$. Il en résulte que des équations paramétriques de la hauteur issue de B sont

$$x = \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3}, \quad y = \lambda - 1, \quad z = \lambda/\sqrt{2}.$$

C'est d'ailleurs la droite symétrique de la hauteur issue de C par rapport au plan $\langle x = 0 \rangle$.

Donc le point H de coordonnées $(0, 0, 1/\sqrt{2})$ appartient à la hauteur issue de B ($\lambda = 1$).

Enfin la hauteur issue de A a comme équations paramétriques



$$x = 0, \quad y = 2 - 2\lambda, \quad z = 1/\sqrt{2} \lambda,$$

et le point H y appartient ($\lambda = 1$).

3) L'isobarycentre est le point G de coordonnées $(0, 0, 1/\sqrt{2})$; il est donc confondu avec H. De même le centre de la sphère circonscrite Ω , qui doit vérifier

$$\Omega A^2 = \Omega D^2, \text{ soit } z^2 + 4 = (z - 2/\sqrt{2})^2, \text{ soit } z = 1/\sqrt{2}$$

est confondu avec le point H.

C'est le tétraèdre régulier qui, dans l'espace, "généralise" le triangle équilatéral.

4) Le milieu de [AD] a comme coordonnées $(0, 1, \sqrt{2})$; celui de [BC] $(0, -1, 0)$; la droite qui les joint a comme équations

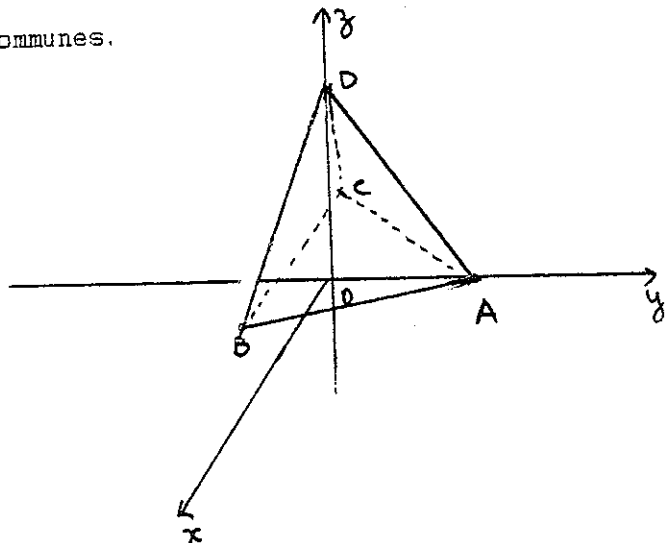
$$x = 0, \quad y - \sqrt{2}z + 1 = 0.$$

Donc un vecteur directeur en est $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, -\sqrt{2}) = (0, \sqrt{2}, 1)$.

La perpendiculaire commune à (AD) et (BC) a comme vecteur directeur par exemple $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BC} = 4\sqrt{3}(0, \sqrt{2}, 1)$.

Les deux droites sont donc parallèles ; de plus ces deux droites passent par H donc elles sont confondues.

Deux calculs analogues permettent de conclure la même chose sur les deux autres perpendiculaires communes.



Troisième série

Les problèmes suivants ne nécessitent pas l'utilisation d'un repère orthonormé.

I Dans le plan P , on se donne un quadrilatère $ABCD$; on note I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. A tout réel t , on associe les points U_t , V_t et O_t tels que $\overrightarrow{AU_t} = t\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BV_t} = t\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{U_tO_t} = 1/2 \overrightarrow{U_tV_t}$.

a) Calculer $\overrightarrow{O_tI} + \overrightarrow{O_tJ}$.

b) Quel est l'ensemble E des points O_t lorsque t appartient à $\mathbb{R}$? Peut-on choisir $ABCD$ de telle sorte que E se réduise à un point ?

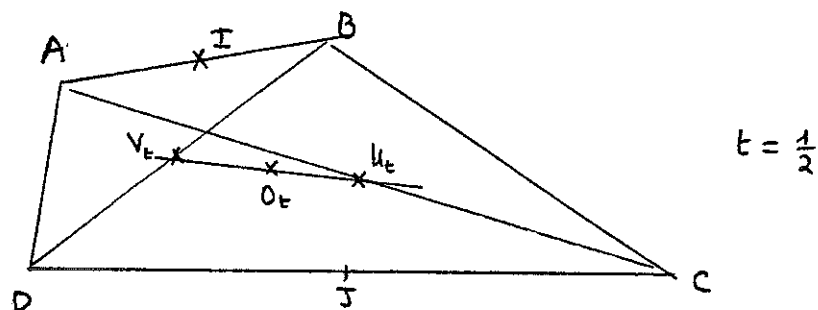
(Ce problème est tiré de la brochure de géométrie "Problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane" publiée par l'IREM de Marseille)

II On se donne 4 points A, B, C, D du plan ; existe-t-il toujours 4 points I, J, K, L tels que A soit le milieu de $[IJ]$, B le milieu de $[JK]$, C le milieu de $[KL]$ et D le milieu de $[LI]$?

On pourra traiter le problème dans le cadre analytique d'abord, le cas échéant.

III A quelle condition, exprimée vectoriellement, étant donnés 6 points A, B, C, D, E, F , existe-t-il 6 autres points I, J, K, L, M, N tels que A milieu de $[IJ]$, B milieu de $[JK]$ F milieu de $[NI]$?

I



a) On remarque, en faisant intervenir les points I et J, que

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{O_t J} = \overrightarrow{O_t V_t} + \overrightarrow{V_t B} + \overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{O_t I} = \overrightarrow{O_t U_t} + \overrightarrow{U_t A} + \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{O_t I} + \overrightarrow{O_t J} = -t(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} = -t(2\overrightarrow{IJ}) + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} = -2t\overrightarrow{IJ}$$

b) Donc $\overrightarrow{O_t I} + \overrightarrow{O_t J} = 2\overrightarrow{O_t I} = -2t\overrightarrow{IJ}$

et $\overrightarrow{O_t I} = -t\overrightarrow{IJ}$.

Donc O_t , I et J sont alignés et O appartient à la droite (IJ).

Réciproquement, soit ω un point de (IJ), est-ce un point O_t ?

Existe-t-il t tel que $\omega = O_t$?

Il existe x tel que $\overrightarrow{\omega I} = x\overrightarrow{IJ}$; on construit U_t et V_t sur (AC) et (BD)

respectivement tels que

$$\overrightarrow{AU_t} = -x\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BV_t} = -x\overrightarrow{BD}$$

On va montrer que ω appartient à $(U_t V_t)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\omega V_t} &= \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BV_t} = \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{AI} - x\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{AI} - x(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}) \\ &= \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{AI} - x(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{\omega I} + \overrightarrow{AI} - x\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{\omega I} - x\overrightarrow{CJ} \\ &= \overrightarrow{AI} - x(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AI} - x(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AI} - x\overrightarrow{IJ} - x\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

soit $\overrightarrow{\omega V_E} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{\omega I} - \overrightarrow{AU_E} = \overrightarrow{A\omega} + \overrightarrow{U_E A} = \overrightarrow{U_E \omega}$.

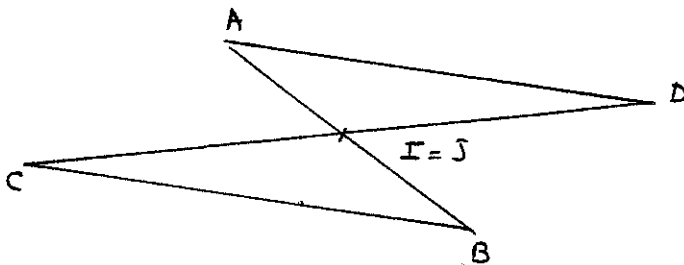
On a donc montré que ω , U_E , V_E sont alignés et que,

comme $\overrightarrow{\omega U_E} = \overrightarrow{U_E \omega} - \overrightarrow{U_E V_E} = \overrightarrow{V_E \omega}$,

ω est le milieu de $[U_E V_E]$.

Donc E est confondu avec la droite (IJ) , en général, si cette droite existe.

Si I et J sont confondus, donc si le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[CD]$ sont confondus (parallélogramme croisé), alors $E = \{I\} = \{J\}$.



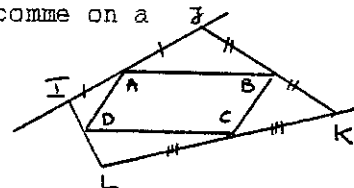
II Le quadrilatère qui joint les milieux des côtés successifs d'un quadrilatère est un parallélogramme. Donc si A, B, C et D ne forment pas un parallélogramme, il n'existe pas de quadrilatère répondant à la question.

Par contre si c'est le cas, il y a une infinité de solutions correspondant au choix de I : à partir de n'importe quel point I du plan, on peut construire un quadrilatère IJKL répondant à la question.

On porte J sur (IA) telque $AI = AJ$, puis sur (JB) on construit K tel que

$BJ = BK$, sur (KC) on construit L tel que $CK = CL$, comme on a

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = 1/2 \overrightarrow{KI}$$

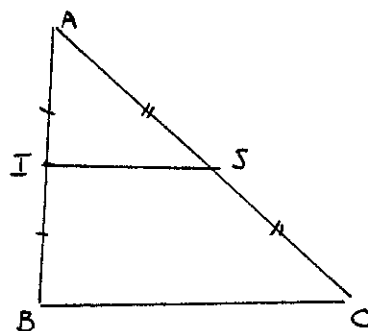


et que le point C est le milieu de [KL], les points D, I et L sont alignés avec D milieu de [LI].

Commentaires

Outils utilisés

Tout le problème se résoud par utilisation de la configuration de base ci-contre :



$$\vec{IS} = \frac{1}{2} \vec{BC}$$

Remarques

On peut aussi se placer dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et, avec des notations évidentes, chercher à résoudre analytiquement le problème en le remplaçant par le système suivant :

$$x_I + x_S = 2x_A \quad y_I + y_S = 2y_A$$

$$x_S + x_K = 2x_B \quad y_S + y_K = 2y_B$$

$$x_K + x_L = 2x_C \quad y_K + y_L = 2y_C$$

$$x_L + x_I = 2x_D \quad y_L + y_I = 2y_D$$

On retrouve que ces systèmes n'ont pas de solutions si $(x_A - x_B + x_C - x_D)$ et son analogue en y ne sont pas nuls, c'est à dire si $\vec{AB}$ n'est pas égal à $\vec{DC}$; ils en ont une infinité si $\vec{AB} = \vec{DC}$, c'est à dire si ABCD est un parallélogramme.

III En raisonnant géométriquement comme précédemment, on trouve à partir des égalités vectorielles suivantes

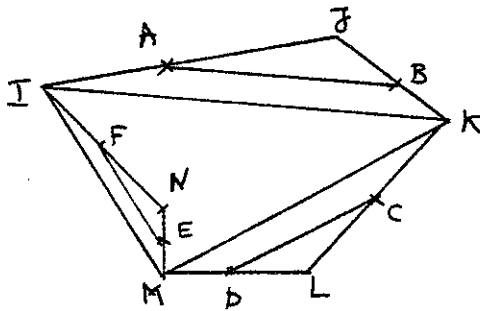
$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IK} \quad , \quad 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{KM} \quad , \quad 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MI}$$

une condition nécessaire d'existence

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = 0.$$

Réciproquement, si les points A,B,C,D,E et F vérifient cette condition, on part d'un point I quelconque et on construit sur (AI) le point J tel que A soit le milieu de [IJ] et ainsi de suite. Est-ce que le dernier point construit F est bien le milieu de [MN] ?

On a $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = -1/2(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KM}) = -1/2(\overrightarrow{IM}) = 1/2\overrightarrow{MI}$, ce qui permet d'affirmer que les points F, N et I sont alignés avec F milieu de [IN].



Une suite naturelle à ces exercices serait une quatrième série avec des mises en fonctionnement d'applications linéaires (ou non), étudiées analytiquement. Voici quelques suggestions dans cette direction.

I. On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par, si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point et (x', y', z') celles de son image :

$$x' = x$$

$$y' = -z$$

$$z' = y$$

*1) Déterminer l'image du vecteur $\vec{U}$ de composantes $(1, 1, 1)$.

2) Déterminer l'image de la droite d'équations $x = y = 0$

3) Déterminer l'image d'une droite, d'un parallélogramme.

4) Quelle est l'image du centre d'un parallélogramme ?

II. Reprendre la première question avec l'application définie de manière analogue par :

$$x' = 2x + 3y$$

$$y' = -z + x + y$$

$$z' = 2y - x + 3z$$

* III. Reprendre la première question avec l'application définie par

$$x' = x^2$$

$$y' = y + 1$$

$$z' = z$$

IV. Pouvez-vous citer une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui ne transforme pas toutes les droites en des droites ?

V. Quelle est l'image d'un cercle dans une projection sur un plan non parallèle au plan du cercle (parallèlement à une droite donnée) ?

Notre site WEB

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

**IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

TITRE :

DE LA GEOMETRIE ANALYTIQUE A L'ALGEBRE LINEAIRE

AUTEUR (S) :

A ROBERT
J ROBINET
I TENAUD

RESUME :

La brochure présente quatre séries d'exercices posés dans le cadre analytique mais que l'on propose de résoudre en utilisant l'outil vectoriel.

MOTS CLES :

Maths-géométrie analytique-vecteurs- algèbre linéaire

Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : décembre 1987
ISBN : 2-86612-048-5