INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

71

Décembre 1987

ACTIVITES GEOMETRIQUES

en terminale C

par I. Tenaud et A. Robert

objectif: Activités géométriques en Terminale C

sujet: géométrie

niveau: Terminale

public: professeurs lycée

UNIVERSITE-PARIS VII

ACTIVITES GEOMETRIQUES

en terminale C

Introduction

Les programmes actuels de mathématiques en terminale C prévoient une heure par semaine de Travaux Pratiques en demi-classe. C'est le moment que nous avons choisi pour faire travailler nos élèves en petits groupes, dans le cadre d'une expérience qui porte sur l'enseignement de la géométrie en terminale C.

En effet depuis quelques années, nous expérimentons un enseignement de méthodes en géométrie. Nous pensons ainsi aider les élèves à démarrer leurs exercices et problèmes de géométrie. Nous avons remarqué que le travail en petits groupes sur des exercices sans indication de méthodes est une bonne occasion pour que les élèves réfléchissent explicitement à ce problème de méthodes. En retour, cette réflexion est permise et facilitée par un enseignement sur les méthodes.

Les groupes de trois à quatre élèves sont pratiquement fixes, ils se sont composés par affinité, et le contrat explicite avec l'enseignant, du moins après quelques semaines où l'enseignant intervient plus systématiquement auprès de chaque groupe, est le suivant : "vous m'appelez si vous avez trouvé une réponse ou si vous avez une méthode à proposer ou si vous avez une question à poser ou si vous êtes bloqués longtemps". Ceci dit on laisse travailler les élèves à leur propre rythme, et quelquefois il faut beaucoup de temps à certains pour résoudre un exercice apparemment facile.

Signalons encore que deux jours après la séance de T.P., l'enseignant reprend en classe entière les exercices proposés en T.P. et passe en revue les différentes solutions envisagées par les élèves.

Dans cette brochure, nous présentons brièvement notre enseignement de méthodes puis nous proposons un certain nombre d'activités de T.P. de géométrie données dans ce cadre à nos élèves.

Pour chacune de ces activités, nous indiquons l'énoncé de l'exercice proposé aux élèves et les objectifs qui correspondent à ce qui sera institutionnalisé au moment de la reprise deux jours après. Nous signalons les notions annexes mises éventuellement en fonctionnement par les élèves (notions qui, elles, ne seront pas nécessairement reprises pendant la correction). Bien entendu, tout cela dépend du moment où l'exercice est proposé (par rapport à l'organisation des séances de géométrie). Nous précisons donc à chaque fois les prérequis supposés des élèves et le contexte dans lequel l'exercice correspond bien aux objectifs déclarés. Cela peut permettre d'imaginer des variantes.

Nous résumons ensuite les comportements que nous avons pu observer lors de notre enseignement, en soulignant les effets (présumés) du travail en groupe.

Les exercices sont présentés dans un désordre relatif.

Cependant, il existe une relation entre le contexte, les objectifs et le moment où l'exercice est proposé. Par exemple, si on propose l'exercice 4 ci-dessous au milieu de l'année, on ne le fera pas avec les mêmems objectifs que ceux qui sont exposés ici.

Ceci dit, nous ne prétendons aucunement à l'originalité, on trouvera beaucoup de nos exercices dans beaucoup de manuels, et en particulier dans les brochures de l'IREM de Marseille (du GREG).

Quelques éléments de notre enseignement de méthodes en géométrie.

A) D'une part nous donnons aux élèves quelques points de repère sur les problèmes qu'ils ont à aborder au cours de l'année :

1) Nous avons repris (et indiqué aux élèves) une classification (grossière) des types de problèmes en 6 où 7 catégories :

Classification des problèmes de géométrie (extraite de la brochure du Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de l'IREM d'Aix-Marseille Géométrie I , octobre 1983)

les analyses de la géométrie conduisent à retenir les 7 classes de problèmes suivants :

1) Les problèmes d'incidence (alignement et concours, parallélisme, orthogonalité, cocyclicité),

2) les problèmes d'intersection et de contact,

3) Les problèmes de recherche de lieux géométriques,

4) Les problèmes de construction de configurations,

5) Les problèmes de détermination et d'études de transformations ou de classes de transformations vérifiant certaines conditions,

6) Les problèmes de recherche d'invariants associés à une configuration ou à une classe de configurations,

7) Les problèmes de recherche de configurations astreintes à satisfaire des conditions extrémales de mesure.

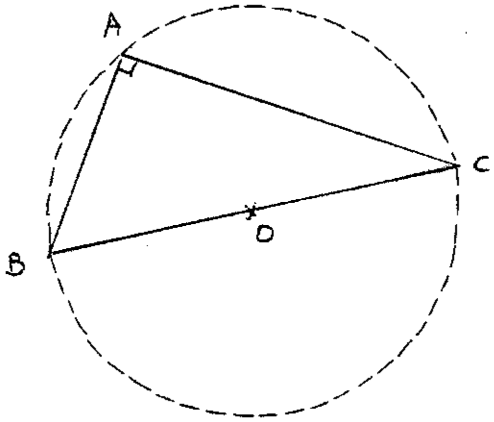
2) Nous avons attiré leur attention sur les outils à leur disposition (cf. liste ci-jointe).

	équidistance
OUTILS	alignement, concours
AFFINES	parallélisme, parallélogr.
et/ou	translations
VECTORIELS	homothéties (+translations)
éventuel-	calcul vectoriel
lement	projections affines
utilisés	symétries affines
dans le plan	Thalès
euclidien	barycentres
	Céva-Ménélaüs (hors progr.)
	affinités
	transformations affines
	similitudes

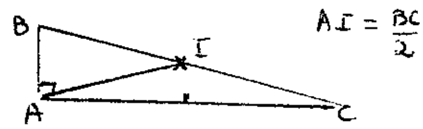
OUTILS AFFINES	projections orthogonales
EUCLIDIENS	symétries orthogonales
et/ou	angles (Chasles), orthog.
VECTORIELS EU-	rotations
CLIDIENS	isométries
plan orienté	cocyclicité
ou non	produit vectoriel (orient.)
	(puissance d'un point/r cercle)
OUTILS	mesures angles, trigo.
NUMERIQUES	calculs de distances, aires et volumes (additivité)
ANALYTIQUES	calculs dans repère affine (resp. orthon., orthon. direct)
ALGEBRIQUES	produit scalaire
	fonction de Leibnitz (scalaire)
	nombres complexes

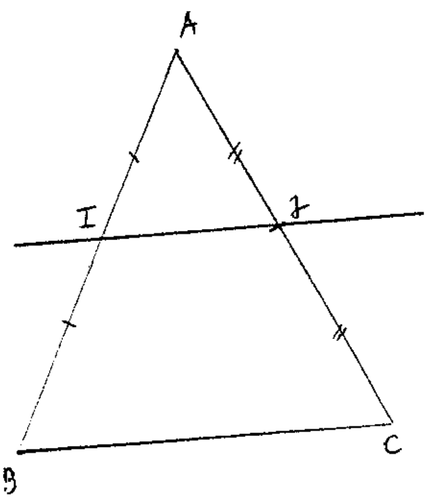
RELATIONS	$\Sigma A = \pi$
METRIQUES	Pythagore
ELEMENTAIRES	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
des TRIANGLES	théorèmes de la médiane 1 et 2
	$a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C=2R=abc/2S$
	$S=(bc\sin A)/2$
	$S=pr$
et QUADRILATERES	$\Sigma A=2\pi$

3) Nous avons précisé avec eux, en l'enrichissant d'ailleurs tout au long de l'année, une liste de "configurations de base" : ce sont des configurations simples que l'on retrouve dans les figures plus complexes intervenant dans les problèmes, et dont on a intérêt à bien connaître les propriétés. Nous joignons les configurations de base du plan que nous supposons connues à l'entrée de la terminale, et celles que l'on rajoute, y compris les configurations simples liées aux coniques.



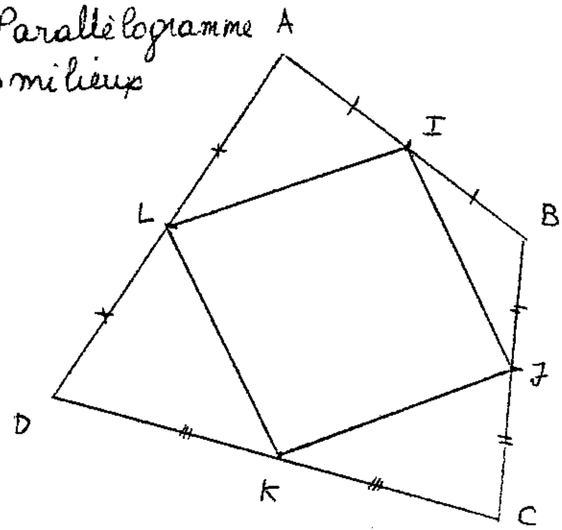
inscription d'un triangle rectangle dans un cercle : [BC] diamètre



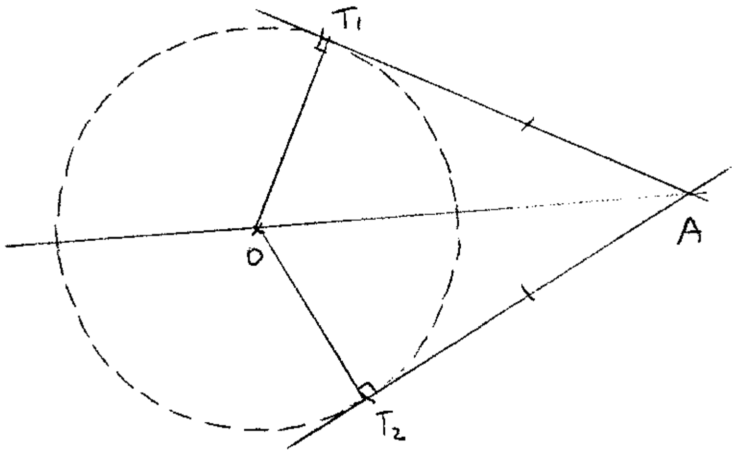


droite des milieux

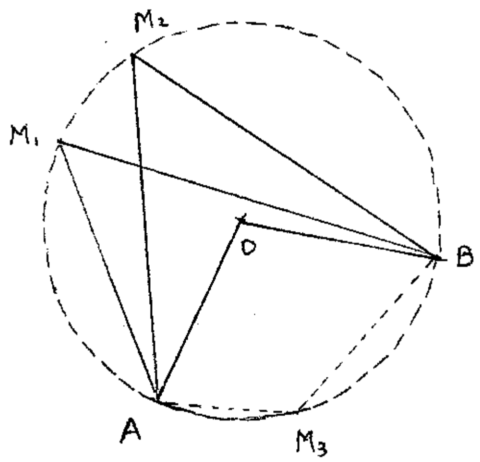
Parallélogramme des milieux



Quelques configurations de base élémentaires



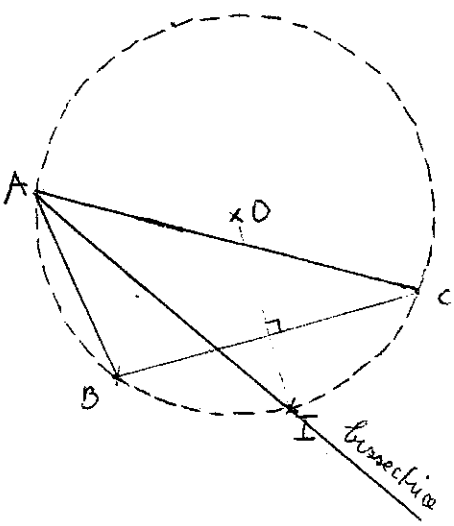
égalité des "tangentes" menées d'un point à un cercle



Angles inscrits et angle au centre

$$(\pi) : (\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) = (\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{M_3A}, \overrightarrow{M_3B})$$

$$(2\pi) \quad (\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1B}) = (\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2B}) = \pi + (\overrightarrow{M_3A}, \overrightarrow{M_3B})$$

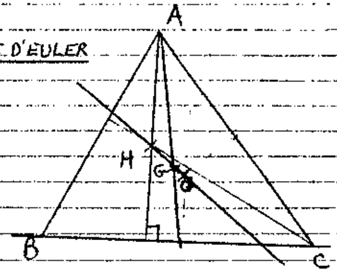


Construction de la bissectrice de (AB, AC) si ABC inscrit dans un cercle

Quelques configurations de base élémentaires

Des Configurations de base en géométrie plane

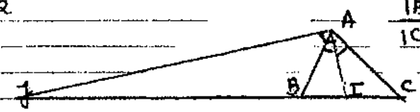
- DROITE D'EULER



H, G, O alignés

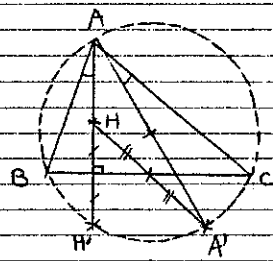
$\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$

- BISSECTRICES



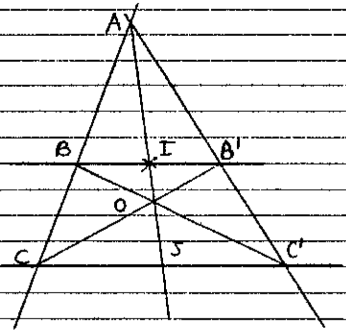
$\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$

- SYMÉTRIQUES DE L'ORTHOCENTRE par rapport aux côtés



- H' appartient au cercle circonscrit à (ABC)
- A' diamétralement opposé à A symétrique de H par rapport au milieu de [BC]

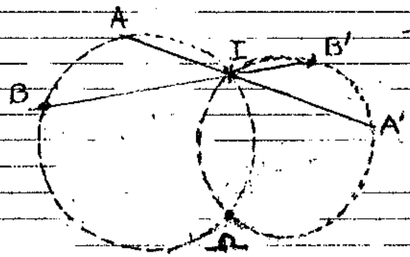
-



(BB') // (CC') <=> 3 des 4 points A, I, J, O sont alignés

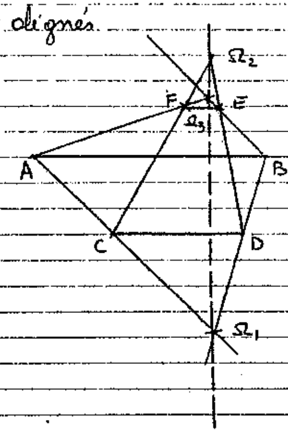
(De plus alors la division (A, I, O, J) est harmonique)

-

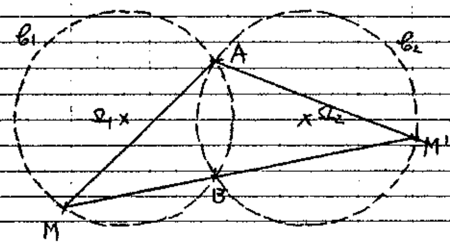


Construction du centre de la similitude envoyant A sur A', et B sur B' comme deuxième point commun aux cercles (AB et (A'B'

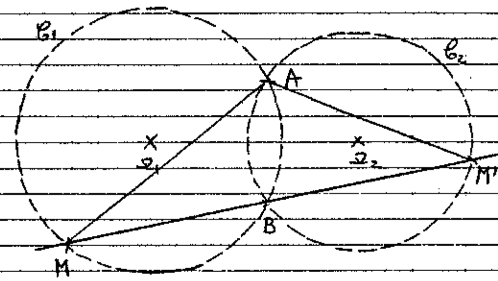
- Les centres de 3 homothéties dont l'une est le produit des 2 autres sont alignés



- Rotations Dans la rotation de centre A envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$, M a comme image M' tel que M, B, H' alignés

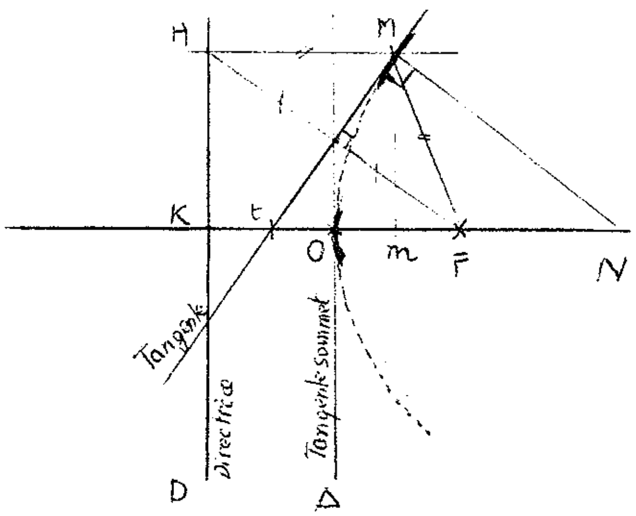


- Similitudes



Dans la similitude de centre A envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$ M a comme image M' tel que M, B, H' alignés

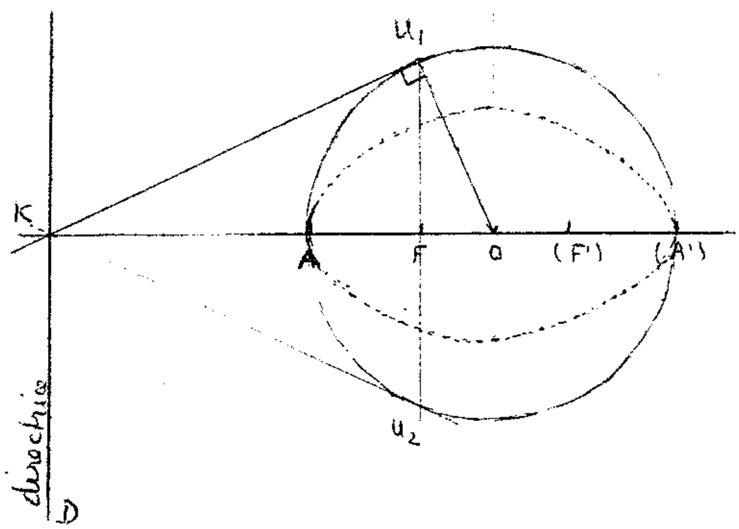
PARABOLE



- la tangente en M est médiatrice de [HF]
- la projection de F sur la tangente en M appartient à la tangente au sommet Δ

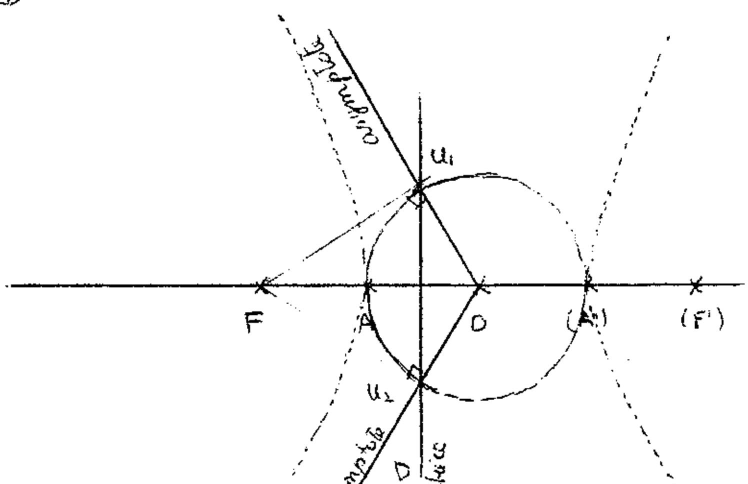
- O milieu de [t,m]
- mN = KF

ELLIPSE



Construction de D à partir de l'axe focal, du foyer F et du cercle principal $\mathcal{C}(O,a)$.

HYPERBOLE



Construction de la directrice D et des asymptotes (Ou_1) et (Ou_2) à partir de l'axe focal, du foyer F et du cercle principal $\mathcal{C}(O,a)$.

4) Enfin, nous faisons établir pendant l'année, pour un certain nombre de problèmes très classiques, (alignement, concours, cocyclicité, lieux et constructions en particulier) des listes d'outils adaptés.

Bien entendu, il n'y a pas de bijection entre les outils et les types de problèmes, à la fois parce qu'un même problème est souvent soluble de plusieurs façons (analytique et géométrique par exemple) et parce qu'un même outil sert dans quantités de problèmes différents.

Cependant le repérage du type de problème et ces listes permettent d'avoir des "pistes" sur les stratégies envisageables, que ce soit directement ou par élimination.

Voici un exemple : qu'est-ce qu'on a à sa disposition pour démontrer que trois droites sont concourantes ?

On peut remarquer que les données du problème considéré induisent que tel ou tel outil semble plus adapté (produit scalaire, barycentre ou au contraire transformations...). Ce sont ces données qui vont orienter le choix du type de stratégie qu'on va essayer de mettre en oeuvre.

Ceci dit, ou bien on identifie globalement les trois droites comme trois droites concourantes, soit à partir d'une configuration de base (directement), soit comme images par une transformation de droites concourantes.

Ou bien on montre qu'un même point est sur les trois droites (par exemple en faisant intervenir le barycentre de trois points non alignés et en faisant jouer l'associativité).

Ou bien on montre que le point d'intersection de deux des droites est sur la troisième (par exemple en utilisant le produit scalaire).

On peut aussi, le cas échéant, utiliser le théorème de Ceva (si on l'a fait démontrer).

S'il s'agit de trois droites de l'espace, on peut utiliser en plus le fait que trois droites concourantes deux à deux et non coplanaires sont concourantes.

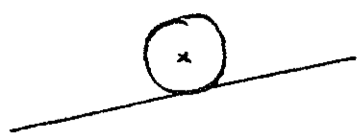
B) D'autre part, nous leur indiquons des méthodes générales de résolution de problèmes (qui ne sont d'ailleurs pas vraiment spécifiques de la géométrie).

Il s'agit de l'efficacité des **changements de points de vue** et des **changements de cadres** (vectoriel, ponctuel ou numérique - complexe ou analytique).

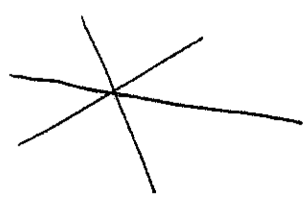
Nous exposons d'abord aux élèves les différents cadres où les concepts qu'ils auront à manipuler interviennent. Pour prendre un exemple très simple, dire que trois points sont alignés (cadre ponctuel) s'exprime dans le cadre vectoriel par la colinéarité de deux vecteurs et dans le cadre numérique par le fait que les coordonnées vérifient une équation.

Nous montrons aussi des changements de points de vue, par exemple

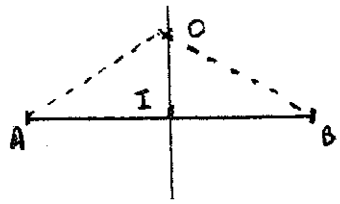
* La figure suivante peut être interprétée comme une droite tangente à un cercle, un cercle tangent à une droite ou une droite et un cercle tangents ; ces trois descriptions ne sont pas équivalentes du point de vue des stratégies éventuelles qu'elles peuvent amorcer.



*Pour interpréter le fait que trois droites sont concourantes, on peut utiliser le fait qu'elles passent par un même point ou qu'il existe un point appartenant à chacune d'elle.



* Un point O est sur la médiatrice d'un segment [AB] s'il vérifie OA = OB mais aussi si la perpendiculaire menée par O à la droite (AB) passe par I le milieu de [AB].



Puis nous expliquons qu'il faut **contrôler** les stratégies mises en oeuvre, en changeant le cas échéant de cadre ou de point de vue. Suivant les cas, on reste dans un des cadres (implicites) de l'énoncé ou on en change, de toutes façons, il est important de vérifier qu'on a tenu compte de toutes les données de cet énoncé.

Il s'agit d'habituer les élèves à ne pas se lancer "la tête la première" dans le problème, en se basant sur un indice éventuellement non pertinent, et sans se poser la question "où va -t-on ?" : nous essayons de leur donner des moyens pour avoir en géométrie une attitude plus réfléchie.

Quelques activités de géométrie

Les figures ne sont pas données aux élèves, sauf exception (c'est alors apparent dans le texte de l'exercice).

Les dernières activités proposées (pour lesquelles nous n'indiquons pas les comportements observés) n'ont pas été expérimentées, non qu'elles manquent d'intérêt mais parce qu'elles nous semblent plus adaptées à des séances un peu plus longues.

Enoncé 1 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère l'application qui à M de coordonnées (x,y) fait correspondre M' de coordonnées (x',y') défini par :

$$\begin{cases} x' = x - y \ , \\ y' = x + y \ . \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble C suivant :

$C = \{ M \ ; \ |x| \leqslant 1 \ , \ |y| \leqslant 1 \}$,

déterminer $f(C)$ et $f^{-1}(C)$ - on justifiera l'existence de f^{-1}.

Prérequis : rien de spécifique à la terminale.

Objectifs : il s'agit de faire travailler sur les images d'ensembles, en particulier pour attirer l'attention des élèves sur la différence entre égalité et inclusion d'ensembles.

Contexte : on peut proposer l'exercice dès le début de l'année et en tout cas avant l'introduction des similitudes.

Notions annexes mises éventuellement en fonctionnement : certains élèves peuvent penser grâce au dessin que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie. Cela peut permettre de vérifier que l'expression analytique de la composée des deux transformations proposées est bien celle qui est donnée.

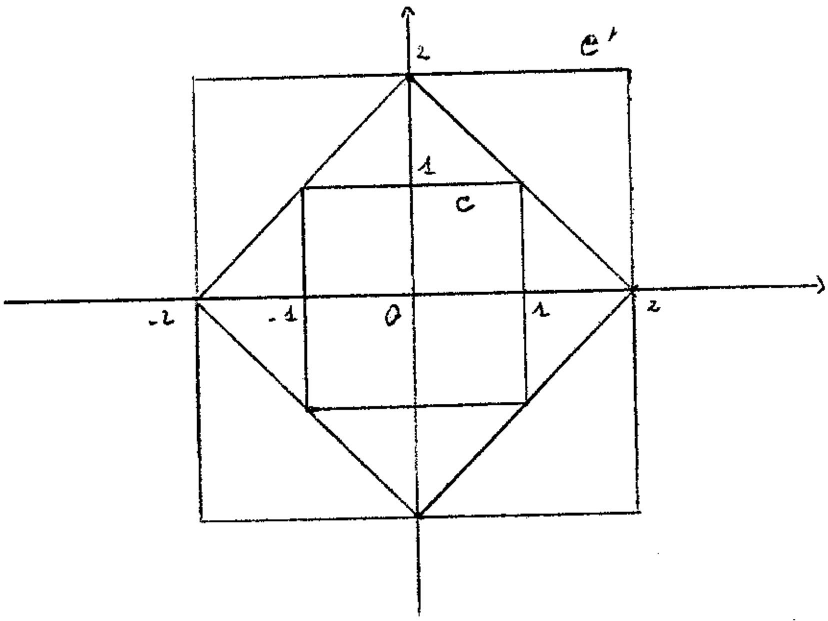
Comportements observés : les élèves commencent tous par dessiner C sans problème. Pour f(C), le comportement le plus fréquent est le suivant : les élèves utilisent les inégalités suivantes :

$-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

pour déduire $-2 \leqslant x - y \leqslant 2$ et $-2 \leqslant x + y \leqslant 2$

et ils oublient la réciproque.

Ils concluent que f(C) est le carré C' de côté 4 au lieu de conclure seulement à l'inclusion de f(C) dans C'. En raisonnant de manière analogue, ils obtiennent $f^{-1}(C) = C$ et remarquent alors qu'il y a une contradiction avec f(C) = C'.



Certains groupes s'aperçoivent plus tôt d'une contradiction en constatant que certains points de C' ne peuvent pas être images par f de points de C.

D'autres élèves prennent pour déterminer f(C) les images des sommets en admettant implicitement que l'image d'un carré est un carré (ce qu'on ne sait pas compte-tenu du contexte).

Tout cela implique de reprendre la détermination de f(C). On peut par exemple commencer par écrire, après avoir vérifié que f est bijective,

$$M \in f(C) \Leftrightarrow \exists\, m,\ m \in C,\ f(m) = M$$

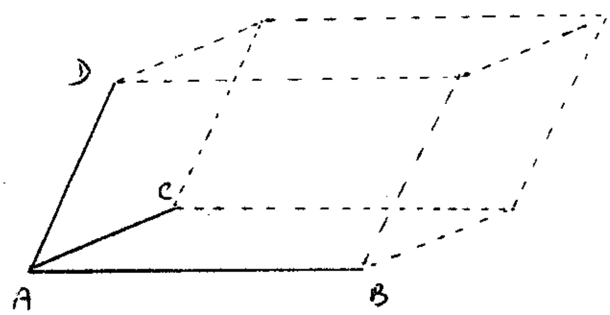
$$\Leftrightarrow f^{-1}(M) \in C$$

On constate là un changement de point de vue : au lieu de dire que M est l'image d'un point de C, on considère M comme ayant un antécédent dans C.

Variante

Si on demande aux élèves dès le début de montrer que f est bijective, ils le font et se posent des questions pour le faire. Alors que dans la variante proposée ci-dessus, les élèves ne se préoccupent pas de cette démonstration.

Enoncé 2 Soit ABCD 4 points non coplanaires. On considère le parallélépipède construit sur les arêtes [AB], [AC], [AD]. Montrer que son volume est égal à $|\vec{AB}.(\vec{AC} \wedge \vec{AD})|$.



Prérequis : produit vectoriel, formule élémentaire sur le volume d'un parallélépipède.

Objectifs et contexte : il s'agit de donner du sens à la fois aux notions de parallélépipède, de volume et de produit vectoriel, juste après le cours sur produit vectoriel.

Comportements observés : il faut une heure aux élèves pour arriver au résultat ! Une partie des élèves ignore la formule élémentaire du volume d'un parallélépipède non rectangle et la retrouve en se ramenant par compensation à un parallélépipède rectangle. Pour tous, il a fallu du temps pour interpréter dans l'espace $\vec{AC} \wedge \vec{AD}$ puis pour reconnaître que le volume est égal au produit scalaire considéré.

Enoncé 3 Soit ABC un triangle, α, β, γ trois réels strictement positifs et M le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

1) Montrer que M est intérieur au triangle ; on appellera N le point d'intersection de (AM) et (BC).

2) Montrer que

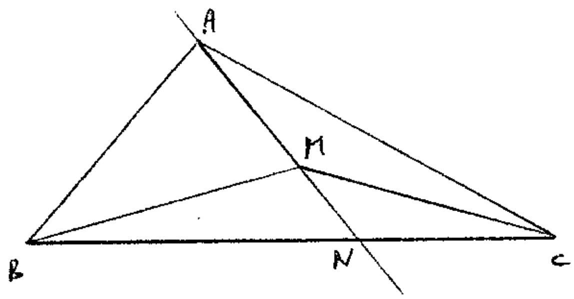
$NB/NC = \gamma/\beta$.

Montrer que, si (NAB) désigne l'aire du triangle NAB,

$\gamma/\beta =$ (NAB)/ (NAC) $=$ (NMB)/ (NMC) $=$ (MAB)/ (MAC)

3) Montrer que α, β, γ sont proportionnels à (MBC), (MAC), (MAB) respectivement.

4) En déduire que le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) avec a = BC, b = AC, c = AB.



Prérequis et contexte : après le cours sur barycentres

Objectifs : * revoir la proportionnalité

* retrouver à la quatrième question un résultat démontré d'une autre façon (par exemple en devoir à la maison)

* revoir les calculs d'aires

* mettre en fonctionnement au sein d'un exercice de géométrie les égalités $\alpha/\beta = \gamma/\delta = (\alpha - \gamma)/(\beta - \delta)$.

Cette utilisation d'une propriété numérique des fractions illustre un jeu de cadres géométrie → numérique → géométrie.

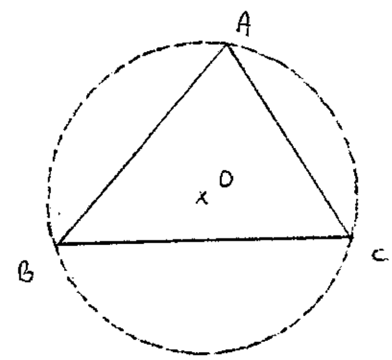
<u>Comportements observés</u> : les élèves les plus rapides ont traité le problème jusqu'à la question 3).

Pour la première question, les élèves ont introduit d'eux-mêmes le barycentre partiel de (B,β) et (C,γ) mais ne l'ont pas identifié tout de suite avec le point N.

Dans la deuxième question, les élèves ont d'abord du se mettre d'accord sur la formule à choisir pour calculer l'aire d'un triangle. Ils passent de formules compliquées à 1/2BH. Puis le passage numérique se fait directement sans utilisation de la formule visée.

Beaucoup d'élèves demandent des précisions sur ce que veut dire proportionnels.

Enoncé 4 Soit un triangle ABC non aplati. On définit le point M par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle. Montrer que M est l'orthocentre du triangle.



Prérequis : rien de particulier à la terminale.

Objectifs : il s'agit d'amener les élèves à réfléchir au démarrage d'un exercice. Ainsi, ici l'hypothèse est posée dans le cadre vectoriel, et la conclusion dans le cadre affine (euclidien). Donc il peut être utile de transformer l'une ou l'autre pour raisonner dans un seul cadre. On peut par exemple transformer la conclusion "M orthocentre" en "$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$".

Cet exercice permet ainsi d'illustrer les notions de cadres et de changements de cadres.

On peut aussi insister sur la nécessité de changer de point de vue. Par exemple dire que les hauteurs concourrent en M équivaut à dire que M appartient à chaque hauteur , pourtant ces deux points de vue n'enclanchent pas nécessairement les mêmes stratégies.

Contexte : comme on veut introduire rapidement la réflexion sur les méthodes, cet exercice est à proposer au début de l'année.

Comportements observés : certains groupes sont restés bloqués pendant 40 minutes et l'enseignant doit intervenir (sur les méthodes justement). D'autres ont résolu l'exercice par des méthodes variées.

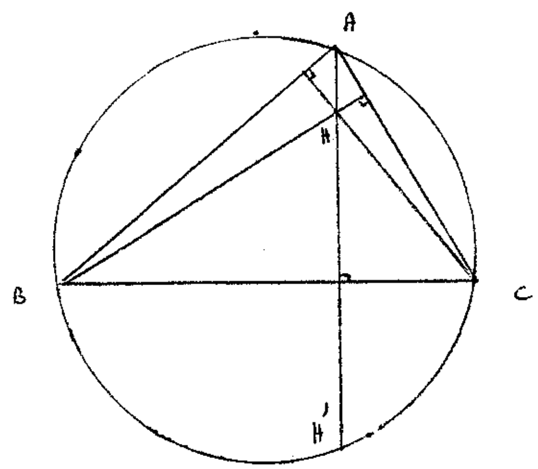
Dans un groupe les élèves trouvent que l'hypothèse implique que $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OG}$ et en concluent que M est sur la droite d'Euler ; ils cherchent alors à prouver que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Ils y réussissent en projetant orthogonalement O, G, H sur (BC).

Dans un autre groupe, les élèves utilisent le résultat suivant (vu en exercice précédemment) : H (resp. O) est le barycentre des points A,B,C affectés des coefficients tanA, tanB, tanC (resp. tanB + tanC, tanC + tanA, tanA + tanB). En fait en utilisant les définitions des barycentres, ils arrivent à $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et donc M = H .

Deux groupes écrivent que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OA'}$ où A' est le milieu de [BC] et en déduisent que (AM), comme (OA'), est perpendiculaire à (BC) ce qui prouve que M est sur chaque hauteur.

Par contre un autre groupe essaie vainement de démontrer le résultat en partant des produits scalaires nuls attachés à H.

Enoncé 5 Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC). Faire la figure. Qu'observe-t-on ? Le démontrer.



Prérequis et contexte : il faut connaître la caractérisation de la cocyclicité par les angles (on peut faire autrement, mais c'est très difficile sans indications). Commme la propriété que l'on démontre ici est utile dans d'autres exercices, il est intéressant de la démontrer le plus tôt possible dans l'année.

Objectifs : * cet exercice est l'occasion de mettre à l'oeuvre la méthode suivante : on caractérise ce qu'on cherche à démontrer en termes d'angles et on essaie de traduire les éléments de l'énoncé en termes d'angles également : hauteurs faisant un angle droit avec les côtés, symétrie changeant les angles en leurs opposés, somme des angles d'un quadrilatère égale à 2π, inscriptibilité d'un quadrilatère ayant deux angles droits non consécutifs.

* cet exercice permet aussi de rendre familière une propriété bien utile.

Comportements observés : il faut très longtemps pour que les élèves arrivent à adopter un comportement méthodique, surtout si l'exercice est proposé tôt dans l'année.

Enoncé 6

1) A et B sont fixes du même côté d'une droite D donnée à laquelle ils n'appartiennent pas. Déterminer M sur la droite D tel que AM + MB soit minimum.

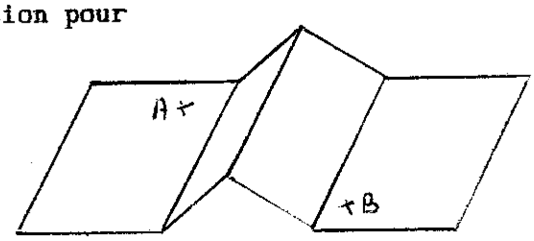
2) Même question avec deux droites D et D' parallèles, A et B appartenant à la bande ainsi définie : minimiser AM + MN + NB (i.e. trouver M sur D et N sur D' tels que ce nombre soit minimum).

3) D_1 et D_2 sont les deux rives parallèles d'une rivière séparant deux villes A et B ; où construire un pont orthogonal aux deux rives pour que le chemin de A à B soit le plus court possible ?

4) Soient A et B deux points situés dans le même demi-espace ouvert défini par un plan P. Déterminer M dans P tel que MA + MB soit minimum.

5) Soient P et Q deux demi-plans distincts de même frontière Δ. Soient A un point de P et B un point de Q. Trouver le plus court chemin de A à B inclus dans PUQ.

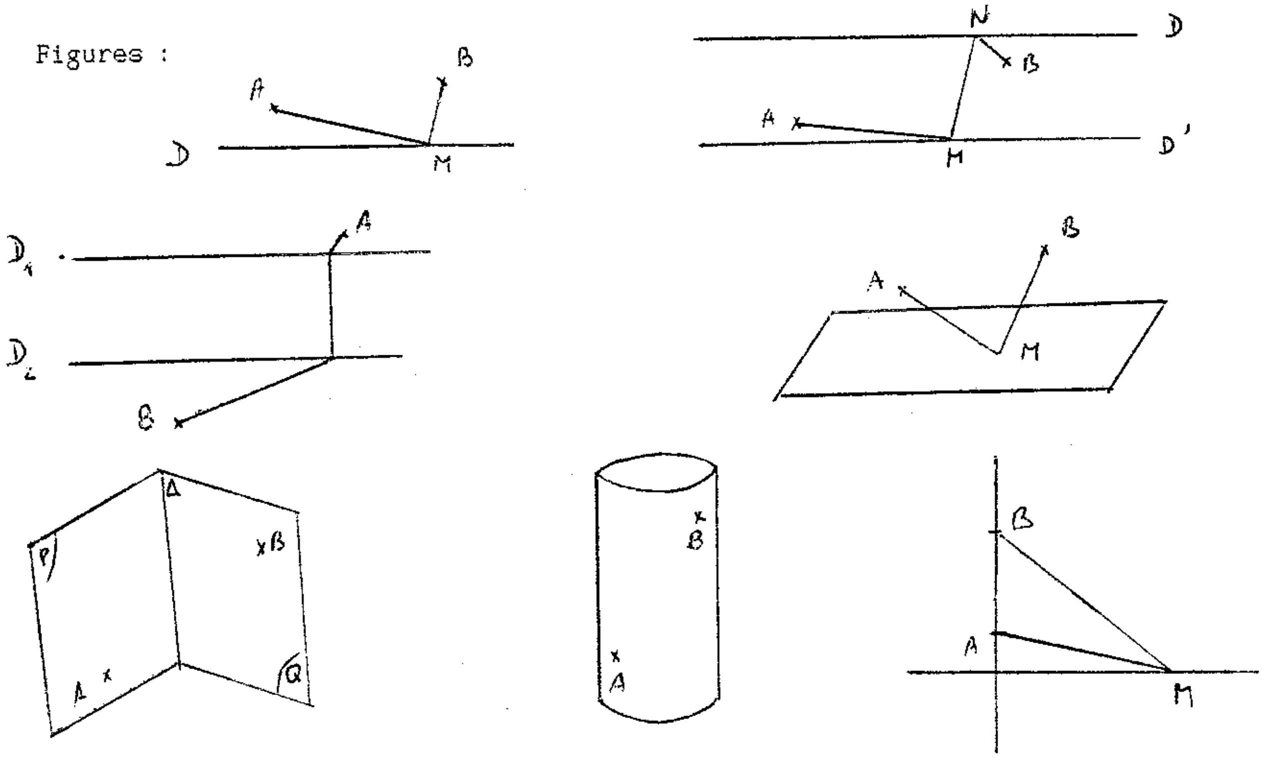
6) Même question pour



7) Même question pour A et B deux points d'un cylindre.

8) On considère dans un plan deux droites orthogonales D et D' et un couple (A,B) de points de D situés du même côté de D'. Déterminer les points M de D' tels que l'angle AMB soit maximal. *Ce problème se présente à propos de la mise en valeur d'une sculpture posée sur un socle ou de la lisibilité d'une affiche.*

Figures :



Prérequis : isométries dans le plan et dans l'espace

Contexte : n'importe quand après le cours sur les isométries.

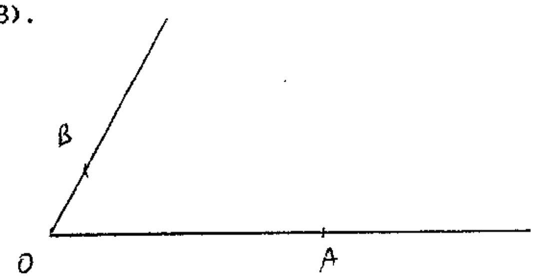
Objectifs : on veut faire résoudre aux élèves un même type de problèmes avec différents outils.

Comportements observés : le premier exercice est difficile, ensuite les élèves sont familiarisés avec cette technique et réussissent à la transférer lorsque c'est possible (jusqu'au 6)).

Ils sont amenés à changer de point de vue dans la question 7) où il faut "déplier" le cylindre pour trouver (ce qu'on ne peut justifier).

Les élèves peuvent penser tout seuls à faire intervenir les outils d'analyse dans la dernière question.

Enoncé 7 On se donne deux demi-droites [OA) et [OB) qui font un angle de $\pi/3$. Chercher le lieu des centres des similitudes transformant la droite (OA) en la droite (OB).



Prérequis et contexte : lignes de niveau $(MA, MB) = \theta\ (\pi)$ et similitudes. Il est intéressant de proposer cet exercice juste après le cours sur les similitudes.

Objectifs : faire prendre conscience aux élèves que dans cet exercice il n'y a pas qu'un centre de similitude qui convient et par là même donner ce genre d'idées pour d'autres exercices.

Comportements observés : les élèves restent perplexes tant qu'ils pensent qu'il n'y a que O qui convient. Petit à petit, ils arrivent à concevoir l'existence d'autres possibilités.

Enoncé 8 *Le tétraèdre équifacial*

Soit ABCD un tétraèdre.

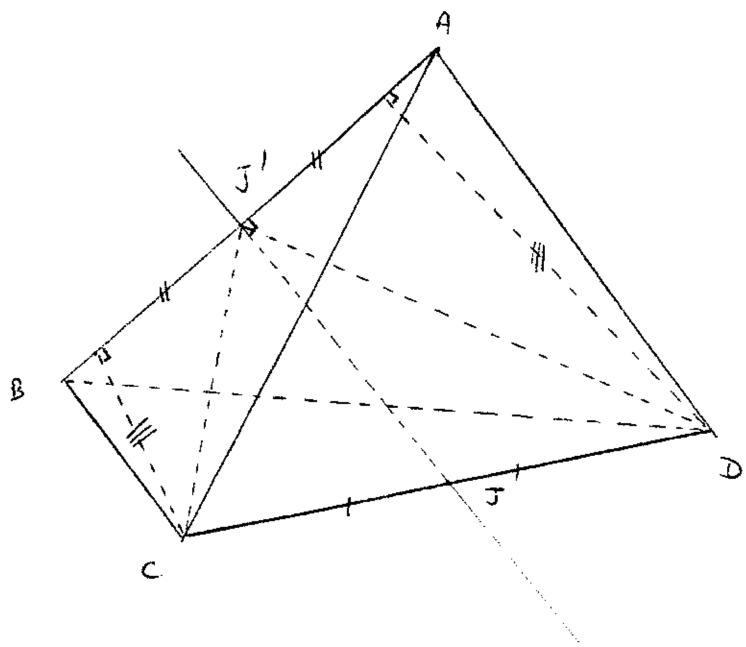
1) Soit J le milieu de [CD]. Montrer que si ABC et ABD ont la même aire, J est le pied de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). On pourra utiliser la projection orthogonale J' de J sur (AB) et montrer que (JJ') est orthogonale à (AB) et (CD).

2) Soit I le milieu de [AB]. Montrer que si en plus DCA et DCB ont la même aire, alors * (IJ) est un axe de symétrie du tétraèdre

* ABC et ABD sont isométriques (les côtés sont deux à deux de même longueur)
* DCA et DCB " "

3) Montrer que si les quatre faces ont la même aire, alors

* il y a trois axes de symétrie
* les quatre faces sont isométriques
* les arêtes opposées ont même longueur
* les trois axes de symétrie sont concourants et deux à deux orthogonaux.

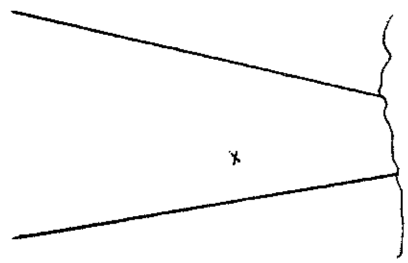


Prérequis et contexte : connaître les demi-tours et la perpendiculaire commune à deux droites de l'espace.

Objectifs : faire utiliser les demi-tours pour résoudre un "vrai" problème et étudier une configuration intéressante de l'espace.

Comportements observés : on peut remarquer qu'ici toutes les indications sont données. Cependant le fait d'être en groupes semble déterminant pour surmonter les difficultés dûes au fait qu'on travaille dans l'espace.

Enoncé 9 Soient deux droites non parallèles données qui se coupent hors de là feuille de papier et un point fixe. Construire la droite joignant ce point et le point d'intersection des deux droites données.



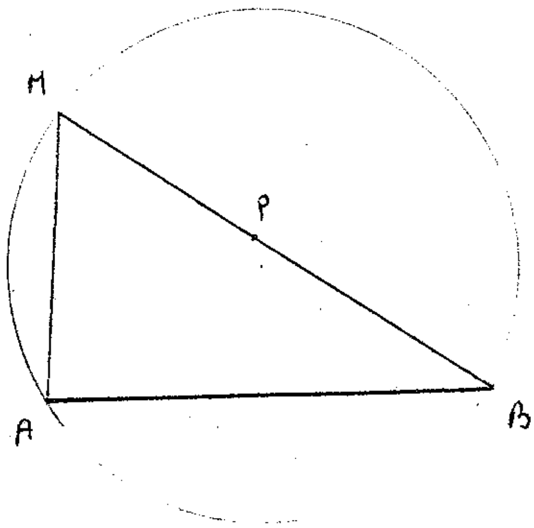
Prérequis et contexte : exercice intéressant à proposer à la fin de l'année lorsque tous les outils du programme sont à la disposition des élèves, en particulier bien après le cours sur les homothéties.

Objectifs : il s'agit de faire trouver aux élèves plusieurs méthodes, alors que l'exercice est bien entendu donné sans indication.

Comportements observés :les élèves trouvent effectivement beaucoup de méthodes.

Enoncé 10 Soit C un cercle fixe passant par deux points fixes A et B. Soit M un point de C, on considère le point P situé sur la demi-droite [BM) d'origine B tel que AM = BP.

Quel est le lieu de P lorsque M décrit C ?



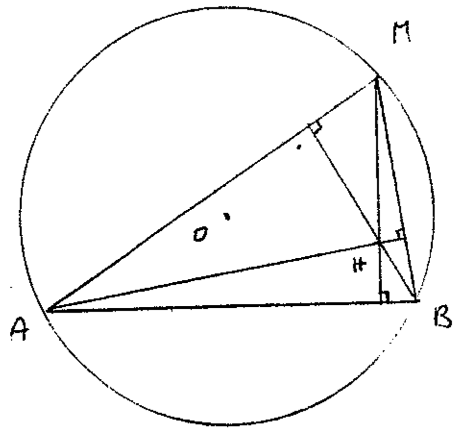
Prérequis et contexte : les rotations

Objectifs: il s'agit de faire résoudre un problème de lieu inhabituel en ce sens que le lieu en question est formé de deux arcs de cercles différents. On est obligé de différencier selon que M est sur un arc $\overset{\frown}{AB}$ ou sur l'autre.

Comportements observés : certains trouvent le lieu expérimentalement (sans savoir démontrer). D'autres commencent par étudier des points particuliers (points fixes, M en A, M en B...) puis, ayant obtenu une idée du lieu, font la démonstration.

Les meilleurs cherchent directement une isométrie transformant A en B et M en P car l'hypothèse est une égalité de longueurs.

Enoncé 11 **Soit C un cercle et [AB] une corde fixe. Quel est le lieu de l'orthocentre du triangle ABM lorsque M décrit C - {A,B} ?**



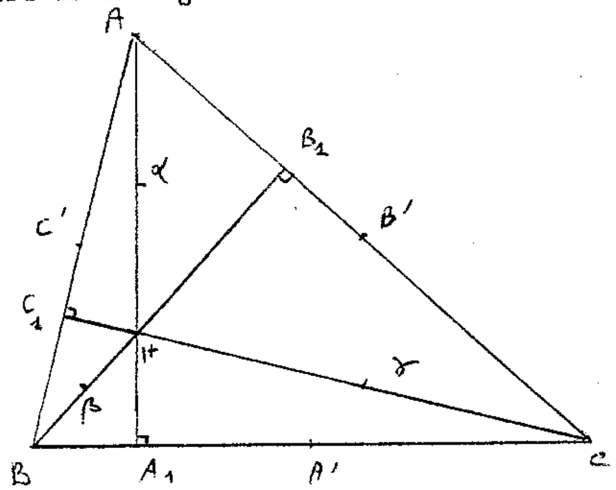
Prérequis : ou bien savoir que le symétrique de l'orthocentre est sur le cercle circonscrit au triangle ou bien connaitre la caractérisation vectorielle de l'orthocentre ($\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$).

Contexte : Illustrer le cas où le lieu est obtenu comme image d'ensemble par une application bijective connue (translation ou composée de symétries).

Cet exercice nous semble intéressant aussi car les deux points à enlever du lieu (les images de A et B) ne sont pas A et B.

Comportements observés : les élèves ne trouvent pas tout de suite les deux points à enlever, ils sont obligés de faire un raisonnement supplémentaire.

Enoncé 12 Soit ABC un triangle. Montrer que les milieux des côtés, les pieds des hauteurs et les milieux des segments [AH], [BH], [CH], où H est l'orthocentre du triangle sont sur un même cercle (cercle d'Euler).



Prérequis et contexte : comme il n'y a rien de spécifique à la terminale, cet exercice peut être utilisé à n'importe quel moment.

Certes, ce problème est très classique, mais nous le posons sans indication et cela permet l'utilisation de nombreux outils élémentaires (triangle rectangle, milieux des côtés dans un triangle...).

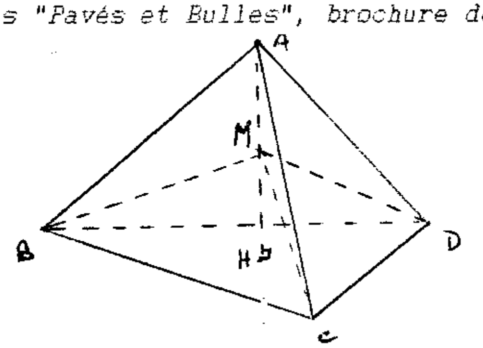
Objectifs : amener les élèves à se poser explicitement des problèmes de méthodes (comment démontrer que des points sont cocycliques).

Comportements observés : certains élèves essaient d'utiliser une caractérisation par les angles de la cocyclicité mais ils échouent. La plupart des élèves utilise d'abord un triangle rectangle ayant comme sommet un des points considérés. Pour obtenir la cocyclicité des 6 autres points, ou bien ils repèrent tout de suite des rectangles complétant le triangle déjà utilisé, ou bien ils utilisent la configuration "milieux des côtes" d'un triangle pour arriver à ces rectangles. En fait, c'est la présence de beaucoup de milieux dans l'énoncé qui les amène à penser à utiliser cette configuration, alors même qu'ils ne savent pas exactement comment cela va leur servir.

L'outil "homothéties", même s'il est évoqué par certains, est rarement utilisé si on n'indique pas soit de quelles homothéties partir, soit quel cercle transformer.

Prolongement : démontrer que les 4 triangles ABH, CBH, ACH et ABC ont le même cercle d'Euler.

Enoncé 13 Soit un tétraèdre ABCD où BCD est équilatéral et où A se projette en H centre de BCD. Soit M un point de [AH]. Minimiser la somme des aires des triangles MBC, MCD, MDB, MAB, MAC et MAD lorsque M décrit [AH] *(d'après "Pavés et Bulles", brochure de l'APMEP).*



Prérequis et contexte : produit vectoriel

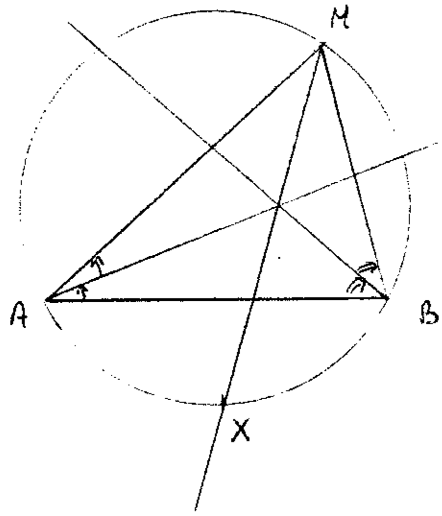
Objectifs : faire utiliser le produit vectoriel pour calculer des aires planes dans l'espace. Cela nécessite le choix d'un bon repère.

Comportements observés : les élèves pensent bien au produit vectoriel et trouvent généralement qu'il faut passer à l'analytique (le problème se ramène à l'étude d'une fonction d'une variable).

Remarques * le point trouvé correspond au centre de gravité G du tétraèdre régulier de même base BCD si G est sur le segment [AH].

* si on plonge deux tétraèdres matérialisés par leurs arêtes (un régulier et un autre de même base) dans de l'eau savonneuse, et si on les ressort, on voit se former une pellicule qui matérialise les triangles correspondant au minimum. Cette expérience est réalisée au musée de la Villette.

Enoncé 14 Soit C un cercle et [AB] une corde fixe de ce cercle. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ABM quand M décrit un des arcs d'extrémités A et B (exclues) ?



Prérequis et contexte : il faut connaître la relation entre angles inscrits et angles au centre, la relation angulaire caractérisant la cocyclicité et el fait que la bissectrice intérieure en M du triangle MAB recoupe le cercle C au milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas M.

Objectifs : illustrer le cas où le lieu ne peut être obtenu (de façon simple) comme image d'ensemble par une application connue : il y a nécessité d'une réciproque.

De plus, il y a une nette différence ici entre trouver (voire deviner) et rédiger, mettre en forme.

Enfin, on est amené à utiliser les relations de cocyclicité modulo 2π : dans la partie directe on a deux points M et le milieu X de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas M qui sont de part et d'autre de la corde (AB) et on utilise $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{XA},\overrightarrow{XB}) + \pi \quad (2\pi)$.

Dans la réciproque au contraire on a deux points A et X du même côté de la corde (BM) et on écrit $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{XB},\overrightarrow{XM}) \ (2\pi)$.

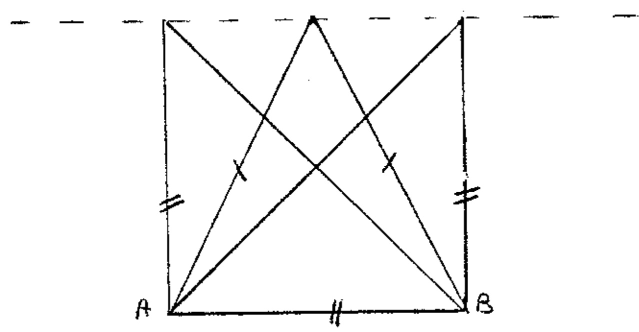
Comportements observés : certains groupes essaient d'abord de reconnaître une transformation connue permettant de passer de M à I (centre du cercle inscrit). N'y arrivant pas ils sont amenés à changer de stratégie.

Les autres, cherchant ce qu'ils ont à leur disposition, se tournent vers l'outil "angles". Ils devinent que (IA, IB) = $1/2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ (π) mais ont du mal à penser à utiliser la somme des angles du triangle IAB pour le démontrer.

Prolongements : * chercher le lieu lorsque M décrit $\mathcal{C} - \{A, B\}$

* chercher le lieu du centre du cercle exinscrit dans l'angle (MA, MB).

* on peut aussi demander aux élèves si l'application qui au sommet M du triangle MAB associe le centre du cercle inscrit dans le triangle conserve l'alignement, en les faisant travailler sur trois triangles particuliers : par exemple

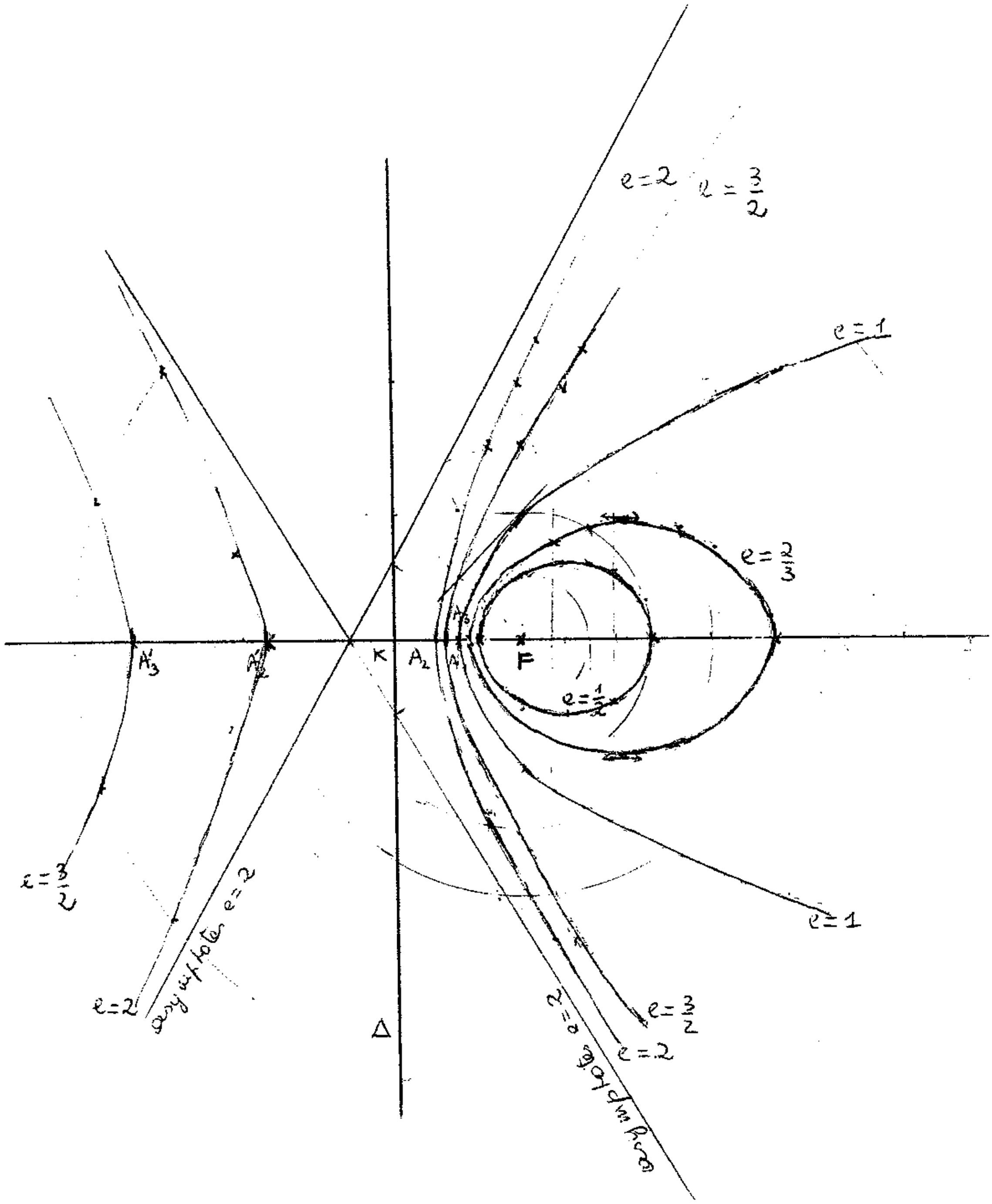


Enoncé 15 Soient Δ une droite donnée et F un point fixe. On appelle K la projection de F sur Δ et on suppose que FK = 2 cm. Construire sur le même dessin la parabole de foyer F et de directrice Δ, les hyperboles de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité 2 et 3/2 et les ellipses de foyer F, de directrice Δ et d'excentricité 1/2 et 2/3.

Prérequis et contexte : après le cours sur les coniques.

Objectifs : il s'agit de faire construire points par points ces lignes de niveau. On peut remarquer qu'un point du lieu s'obtient comme intersection (si elle existe) du cercle de centre F et de rayon ρ et des droites paralléles à Δ et à la distance ρ/e de celle-ci (pour une excentricité e donnée). La construction des sommets de la conique permet de réviser la construction des points divisant un segment (ici [FK]) dans un rapport donné.
De plus, cet exercice permet de constater ce qui se passe quand e diminue ou augmente, le foyer et la directrice étant fixes.

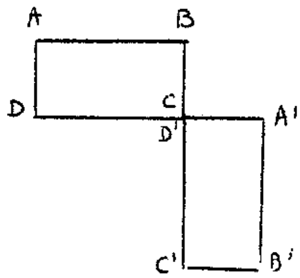
Comportements observés : les élèves mettent un certain temps à comprendre le principe de la construction mais une fois qu'ils ont compris, ils tracent (une fois pour toutes) une famille de cercles de centre F (ou une famille de droites parallèles à Δ) et réussissent à réaliser très vite les constructions demandées.



e=2
e = 3/2
e=1
e=2/3
e=1/2
e=1
e=3/2
e=2
e=3/2
e=2
asymptote e=2
asymptote e=2
A'3
A'2
K
A2
A1
F
Δ

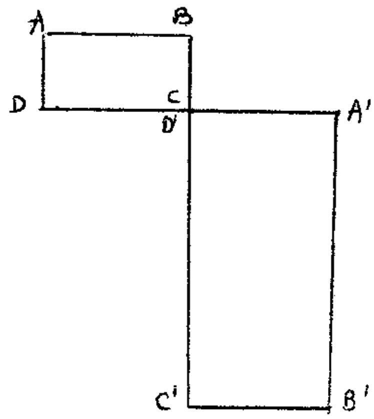
Enoncé 16 A) On considère les rectancles ABCD et A'B'C'D' isométriques suivants (C et D' sont confondus).

Trouver toutes les isométries qui appliquent ABCD sur A'B'C'D'.



B) On considère les rectangles ABCD et A'B'C'D' suivants, où A'B' = 2AB et A'D' = 2AD (et C et D' confondus).

Trouver toutes les similitudes directes échangeant ces deux rectangles. Déterminer leur centre avec précision, en indiquer plusieurs constructions.

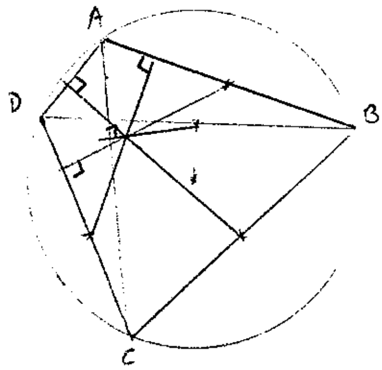


Prérequis et contexte : après les cours sur isométries et similitudes.

Objectifs : il s'agit de faire chercher effectivement, en les identifiant le plus complètement possible, une puis toutes les isométries (resp. similitudes) échangeant deux configurations. On commence par en trouver une, puis on compose avec toutes les isométries (directes seulement dans le cas similitudes) conservant le deuxieme rectangle.

Comportements observés : les élèves ont du mal à comprendre le principe de la recherche de toutes les isométries (resp. similitudes). Ensuite ils ont du mal à identifier les composées qu'ils trouvent.

Enoncé 17 Soient 4 points A, B, C, D cocycliques. On trace les six droites menées du milieu des six segments joignant ces points deux à deux perpendiculairement au segment joignant les deux autres points. Montrer que ces droites sont concourantes.



Prérequis et contexte : rien de particulier à la terminale.

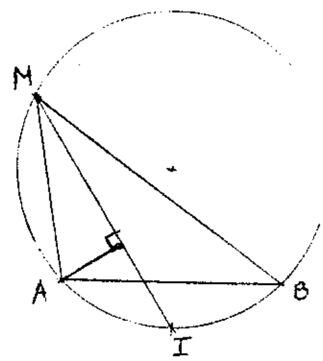
Objectifs : il s'agit encore d'un exercice où il faut réfléchir au choix d' une méthode pour démarrer.

Comportements observés : les élèves se posent effectivement la question de ce qu'ils peuvent utiliser pour démontrer ce concours.

Certains pensent à des hauteurs mais n'aboutissent pas.

D'autres écrivent "milieux, perpendiculaires, cocyclicité" et finissent par trouver l'idée de transformation puis par mettre au point la demonstration.

Enoncé 18 Soit C un cercle et [AB] une corde fixe. Trouver le lieu de la projection de A sur la bissectrice de (MA,MB) lorsque M décrit le cercle C.

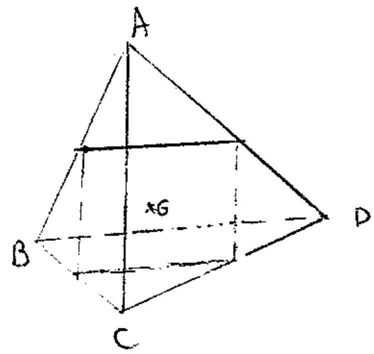


Prérequis et contexte : il est intéressant de connaître les similitudes pour traiter l'exercice, qui peut donc être proposé quelque temps après ce cours.

Objectifs : faire résoudre ce problème de lieu grâce à l'utilisation d'une similitude qui permet de trouver tout de suite les "bons" arcs sur les cercles supports du lieu cherché : en fait, le lieu se compose de deux arcs de cercles portés par deux cercles différents et on doit discuter selon la position de M sur le cercle initial avant de déterminer dans chaque cas quel arc convient. Si on n'utilise pas les similitudes, on trouve tout de suite que les points cherchés appartiennent aux cercles de diamètre [AI] (resp. [AJ]), où I (resp. J) est le milieu de l'arc AB, mais la réciproque, permettant de déterminer les arcs du lieu est difficile.

Il est intéressant de demander à quoi correspond le point d'intersection des deux arcs trouvés.

Enoncé 19 Soit ABCD un tétraèdre. Montrer qu'il existe exactement trois plans passant par G (isobarycentre du tétraèdre) et coupant le tétraèdre selon un parallèlogramme. Que peut-on dire si ce parallèlogramme est un carré ?



Prérequis et contexte : rien de particulier à la terminale.

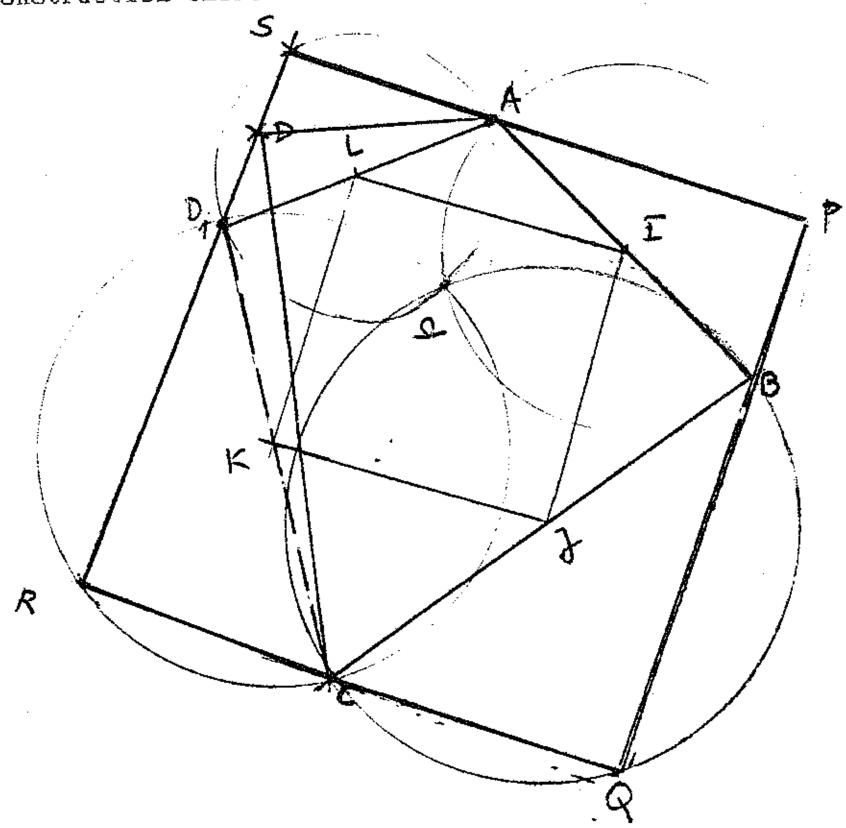
Objectifs : étude d'une configuration de l'espace.

Enoncé 20 Etant donnés quatre points A,B,C,D, construire un carré PQRS tel que A appartient à (PQ), B à (QR), C à (RS) et D à (SP).

Indications : a) Montrer qu'il existe D_1 tel que, si I, J, K, et L sont les milieux de [AB], [BC], [CD_1] et [D_1A], IJKL soit un carré.

b) Montrer que les cercles de diamètre [AB], [BC], [CD_1] et [D_1A] ont un point commun.

c) En utilisant des similitudes convenables, en déduire la construction d'un carré PQRS dans lequel est inscrit $ABCD_1$. En déduire la construction cherchée.



Prérequis et contexte : après le cours sur les similitudes.

Objectifs : utiliser les similitudes dans un problème de construction.

Enoncé 21 *Expression du volume d'un parallèlépipède en fonction des longueurs des arêtes et des angles des arêtes entre elles.*

On considère le parallèlépipède défini par un de ses sommets A et les trois arêtes $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ non coplanaires. On appelle V son volume. L'espace est orienté.

1) Montrer que, pour trois vecteurs quelconques $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, on a

$$\vec{v_1}\wedge(\vec{v_2}\wedge\vec{v_3}) = (\vec{v_1}.\vec{v_3})\vec{v_2} - (\vec{v_1}.\vec{v_2})\vec{v_3}$$

2) Montrer que, pour deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

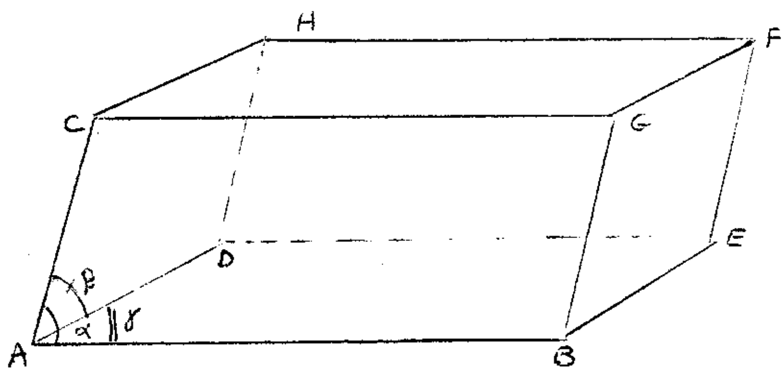
$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + |\vec{u}.\vec{v}|^2 = \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$$

3) On note α (resp. β, γ) l'angle géométrique BAC (resp. CAD, DAB).

Montrer que

$$V^2 = (AB)^2(AC)^2(AD)^2(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) .$$

(tiré de Pavés et Bulles, brochure APMEP)



Prérequis et contexte : on suppose connu la formule donnant le volume comme produit mixte $|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|$.

Objectifs : mettre en oeuvre le produit vectoriel et montrer qu'il existe un moyen pour calculer ce volume à partir de mesures simples.

TITRE : ACTIVITES GEOMETRIQUES EN TERMINALE C

AUTEUR : A. ROBERT et I. TENAUD

DATE : DECEMBRE 87

RESUME :

. La brochure présente une vingtaine d'exercices proposés à des élèves travaillant en petits groupes pendant des séances de travaux pratiques (terminale C).

. Ces élèves ont reçu un enseignement de méthodes qui est résumé au début de la brochure.

MOTS-CLE : MATH
GEOMETRIE
METHODES EN GEOMETRIE

Editeur : I.R.E.M

Directeur/Responsable de la publication : Michèle ARTIGUE

Tirage : 96 exemplaires dépôt légal : 2-86612-047-7 JANVIER 88

I.R.E.M PARIS VII - Tour 56/55 - 3ème étage - 2 place jussieu

75005 PARIS