

irem.

UNIVERSITE PARIS VII

REPRESENTATION PLANE DES FIGURES DE L'ESPACE

Par

J. BOUDAREL, F. COLMEZ, B. PARZYSZ

Rédaction : F. COLMEZ

cahier de
didactique des
mathématiques

numéro

48

décembre 87

REPRESENTATION PLANE DES FIGURES DE L'ESPACE

J. BOUDAREL, F. COLMEZ, B. PARZYSZ

I PRESENTATION

Ce cahier est consacré à l'enseignement de la géométrie de l'espace au Lycée ; en fait les observations relatées se sont déroulées pour la plupart en classe de première scientifique et quelques unes en classe de terminale D. Les réflexions théoriques se sont approfondies au fur et à mesure de l'expérimentation et résultent pour certaines de discussions avec T. BAUTIER (IREM de Bordeaux)

L'origine de ce travail est le constat que, dans l'enseignement de la géométrie de l'espace, le problème de la représentation plane des figures de l'espace est escamoté ; dans les livres de géométrie on trouve des **figures stéréotypées** présentées, dans les meilleurs cas, comme résultant de **conventions** insuffisamment expliquées. Tout se passe comme si ces activités de dessin n'étaient pas théorissables, et les responsables de l'enseignement ou les auteurs de manuels semblent estimer que les éléments

théoriques ne sont pas enseignables. On peut même craindre que beaucoup les ignorent.

On a pu trouver quelques (rares) exemples d'essais de justification plus complets de ces règles de dessin, dans des manuels du début de ce siècle ou, plus récemment à l'IREM de Lyon, avec la création du matériel MAPEGE. Mais il s'agissait alors de commenter la solution apportée par la perspective cavalière à la question de la représentation plane des figures de l'espace et non de faire prendre en charge par les élèves cette question

Le problème didactique est ainsi posé : parmi les règles de dessin dans le plan utilisées dans la représentation des figures de l'espace, quelles sont celles qu'il est possible et souhaitable de justifier ou de faire découvrir aux élèves, et comment le faire? Il s'agit de permettre aux élèves de comprendre les relations entre le plan et l'espace, et, pour cela, il est nécessaire de disposer à la fois de figures de l'espace (maquettes et matériels divers) et de figures du plan. Le travail dans le plan seul ne permet pas d'atteindre l'objectif fixé ; c'est sans doute une raison pour laquelle la plupart des manuels n'abordent pas cette question.

Les premières observations effectuées nous ont incités à mener une recherche sur les idées des élèves relatives à la représentation plane des figures de l'espace. (enquêtes menées par B. PARZYSZ)

II ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE.

On trouve **trois** sortes de **réponses** usuelles au problème de la représentation plane d'une figure de l'espace par un seul dessin :

- la **perspective linéaire** (celle de la photographie).
- la **perspective cavalière** (la plus fréquente dans les livres de mathématiques).
- l'utilisation de **schémas**, qui combinent sur un seul dessin différents types de représentation.

Dans chaque cas, on complète l'information par des **indications graphiques conventionnelles** de relations entre les divers composants des objets dessinés.

(Rappelons que, dans la plupart des métiers, on utilise plusieurs "**vues**" pour représenter le même objet; mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici.)

Nous allons, successivement :

FAIRE UN RAPPEL MATHÉMATIQUE 1

DONNER QUELQUES INDICATIONS D'HISTOIRE 2

REGARDER L'ENVIRONNEMENT ACTUEL 3

DRESSER LE CADRE THÉORIQUE INTRODUIT PAR G. BROUSSEAU 4

TRADUIRE DANS CE CADRE LE PROBLÈME QUI NOUS OCCUPE 5

EN EXAMINANT LES RÔLES DES DEUX PERSPECTIVES 6 ET 7

ET DES TYPES DE MATÉRIELS 8

POSER LE PROBLÈME PRINCIPAL 9

II.1 Mathématiquement, pour les deux premières réponses, les choses sont simples.

* **La perspective linéaire** (dite aussi conique ou centrale) est une **projection centrale** déterminée par la donnée d'un plan D (plan du dessin) et d'un point O , extérieur à ce plan, centre de la projection ("point de vue" de la perspective). L'image d'un point M de l'espace est alors le point m , intersection de la droite (OM) avec le plan D ; les points du plan parallèle à D passant par O n'ont pas d'image. Dans la pratique la perspective est la restriction d'une telle application au cône de sommet O déterminé par le cadre du dessin. Cela impose une contrainte rarement respectée : pour regarder un dessin en perspective conique (une photo par exemple), il faudrait **placer l'oeil** (un seul) exactement **au point de vue** pour retrouver, à peu près, les mêmes perceptions rétiniennes que dans la réalité.

* **La perspective cavalière** est une **projection parallèle** déterminée par la donnée d'un plan D et d'une direction de droite d , non parallèle à D (direction des projetantes). L'image d'un point M de l'espace est le point m , intersection de la droite de direction d passant par M avec le plan D ; tous les points de l'espace ont une image. Dans la pratique, la perspective cavalière est la restriction d'une telle application au cylindre dont les génératrices ont la direction d , délimité par le cadre du dessin. Dans le cas où d est orthogonale à D on parle de "vue" (de dessus, de côté...) et on réserve plutôt l'expression "perspective cavalière" aux autres cas. Il **n'est pas possible** de trouver une **position de l'oeil** permettant de faire coïncider la vision du dessin avec celle de la portion d'espace représentée.

Ces deux applications projectives de l'espace sur un plan conservent l'incidence (alignement des points et concours des droites) et le birapport. Mais, par suite de la diminution de la dimension, on ne peut pas remonter des propriétés des images à celles des antécédants sans informations supplémentaires ; ainsi deux dessins de droites peuvent être sécants sans que les droites de l'espace le soient.

La perspective cavalière est en fait une transformation affine ; c'est pourquoi elle conserve le milieu des segments, le parallélisme des droites et les rapports des longueurs de segments parallèles ; toutes ces propriétés sont faciles à mettre en oeuvre dans les constructions de dessins.

La perspective conique est plus difficile à manipuler, car elle ne conserve en général, ni le milieu, ni le parallélisme, ni a fortiori les rapports de longueurs de segments parallèles.

* Il faut enfin remarquer que, en chaque point, l'application affine tangente à une projection centrale est une projection parallèle ; par suite, si l'on s'intéresse à des objets vus sous un angle petit (correspondant par exemple au champ de la fovea) les différences entre les représentations en perspective conique et en perspective parallèle ne seront pas perçues par le cerveau. Cela contribue à expliquer pourquoi les dessins en perspective cavalière sont souvent directement interprétables. Par contre, si l'oeil balaie un champ plus large, les différences deviennent perceptibles, du moins pour des objets tels que cubes ou polyèdres familiers. (figure 1)

II.2. Historiquement.

Il semble que les premiers **dessins cohérents** (au sens où ils sont interprétables par la perspective cavalière, alors qu'ils n'avaient certainement pas ce statut théorique à l'époque) soient ceux d'objets prismatiques ou cylindriques : après avoir dessiné une section droite de l'objet, le dessinateur traçait, à partir de chaque point anguleux de cette section, un segment de droite de longueur et de direction données et complétait son dessin par la partie "visible" d'une deuxième section droite. On trouve de tels dessins en Chine dès le **5^{ème} siècle**, codifiés au 9^{ème} par Yü Hao dans un traité (perdu), repris au 11^{ème} par Li Kiaï. Ce même procédé est appliqué à des dessins de paysages et d'architecture et, au **Moyen-Âge en Europe**, à des représentations de villes en **perspective axonométrique** (la section droite étant cette fois le plan de la ville). Au seizième siècle, en Europe, les militaires représentent les fortifications par des **plans cavaliers** encore mal structurés ; ceux-ci donneront son nom, plus tard, à la **perspective cavalière**. Il semble bien que les premiers utilisateurs de représentations planes aient d'abord cherché à **représenter ce qu'il savaient**, sans avoir les moyens théoriques de s'assurer de la cohérence de leur dessin ; leur seul contrôle étant celui de l'interprétation : le dessin est-il suffisamment proche de la réalité pour être compris ? Mais ce procédé, d'ailleurs **non théorisé**, appliqué à un champ de vision trop grand ne restait plus une bonne approximation et le problème d'une représentation fidèle s'est posé de façon de plus en plus pressante au quatorzième siècle.

La **perspective linéaire** est inventée en 1425 par BRUNELLESCHI, alors qu'il avait résolu un problème célèbre relatif à la **maîtrise des grands espaces** : la construction de la coupole de la cathédrale de Florence ; c'est un exemple de progrès réalisé grâce à l'apport d'un instrument nouveau (miroir plan de qualité acceptable) dans la solution d'un problème d'actualité.

Les commentaires épistémologiques sont très abondants sur la perspective linéaire, mais pauvres sur la perspective cavalière ; est-ce seulement dû au retard de l'histoire des techniques sur l'histoire des arts, ou au fait qu'un procédé bien plus satisfaisant que l'autre et presque magique ait d'avantage intéressé les commentateurs ?

II.3 L'environnement actuel est riche de représentations en perspective conique : photos, cinéma, télévision, B.D., affiches, etc. Beaucoup de producteurs de ces images sont très compétents en matière de perspective ; mais qu'en est-il des consommateurs ? La plupart du temps ils n'ont pas l'œil placé au point de vue quand ils regardent et s'habituent ainsi à voir des "**perspectives déformées**". Au delà de certaines limites, la perspective ne remplit pas sa fonction de trompe-l'œil.

Par contre cet environnement présente très peu d'exemples de perspective cavalière en dehors de quelques stéréotypes de la vie scolaire ; certains corps de métiers utilisent beaucoup les projections parallèles, orthogonales ou non, d'une manière normalisée, avec des dénominations et des normes variant d'une profession à l'autre.

Par ailleurs, les élèves sont plus familiers avec la **projection verticale** sur un plan horizontal (cartes, plans...)

Un autre domaine de connaissances empiriques est celui de l'ombre portée d'un objet sur un plan, la source étant très éloignée (soleil) ou proche (lampadaire).

Nous avons essayé de savoir si certains de ces éléments étaient des aides ou au contraire des obstacles pour la compréhension et comment on pouvait les intégrer dans une démarche rationnelle d'apprentissage.

II.4 Les concepts de micro-espace et de macro-espace introduits par G.BROUSSEAU permettent d'interpréter l'opposition entre ce que l'on sait d'un objet en le manipulant et ce que l'on voit de ce même objet rendu inaccessible, opposition que l'on retrouve dans le passage de l'espace au dessin.

Rappelons que micro-espace et macro-espace désignent deux ensembles de situations, respectivement dans l'espace immédiat du toucher et dans l'espace visible, où les possibilités d'action du sujet favorisent des conceptions différentes

* Dans le **micro-espace** le sujet peut agir directement sur les objets. La psychologie génétique a montré l'importance des actions dans la construction de toute représentation du micro-espace.

Relèvent du micro-espace les situations où le sujet développe une conception de son rapport à l'espace

- **bornée**: seuls les objets à portée de main sont considérés;
- **objective**: le sujet explore l'espace sans interférer avec lui;
- **hétérogène**: l'espace est identifié à l'ensemble des objets, et le vide n'est pas reconnu par le sujet ; le plan est identifié à l'ensemble des figures dessinées.

C'est le **micro-espace** qui procure au sujet ses premières **connaissances** sur les objets et sert de référence lors de toute action, même évoquée, dans l'espace. Nous appellerons "micro" les conceptions ainsi construites.

* Au contraire, le **macro-espace** se caractérise par le très grand **coût** des interventions sur les objets.

Relèvent du macro-espace les situations où le sujet développe une conception de son rapport à l'espace

- **subjective et projective** : le sujet prend en compte les objets inaccessibles, grâce aux informations obtenues par des procédures de **visée**, à partir d'un **point fixe**;

- **anisotrope** : le sujet projette sur tout objet la verticale et l'horizontale frontale qui lui sont propres.

- **homogène** : le sujet doit décoder ses informations visuelles ; il modélise l'espace sous la forme d'un faisceau de droites homogènes, au sens où il ne tient pas compte de la partition entre le plein des objets et le vide de l'espace ambiant.

La maîtrise d'un grand espace passe donc par la construction préalable d'une **représentation mentale** de l'espace ; cette représentation est de **dimensions deux**, comme la rétine de l'œil. Le macro-espace est la référence pour **l'élaboration** ou **l'interprétation** de **dessins plans** représentant des figures de l'espace. Nous appellerons "macro" les conceptions ainsi construites.

II.5 Le problème de la représentation plane des figures de l'espace est compliqué par le fait que le sujet tient compte non seulement de ses **conceptions macro** mais également d'**informations**

de type **micro** obtenues par ailleurs, telles que droites non sécantes dans l'espace, valeurs de certains angles, égalités de longueurs, position d'un point par rapport à un plan ou distances estimées grâce à la vision binoculaire...et qu'il va chercher à les traduire sur le dessin. Il s'agit d'un véritable **conflit entre conceptions macro et conceptions micro**, particulièrement spectaculaire dans le cas des **sphères**, que l'on voit toujours représentées par des cercles ; alors qu'en perspective cavalière comme en perspective conique (sauf cas particulier) on devrait avoir une ellipse. C'est le résultat d'un **compromis** entre les deux modèles ; on aboutit ainsi à un **schéma** qui ne permet pas de faire de constructions utilisant les théorèmes reliant l'espace et le plan. Cela pose le problème suivant : **quels sont les rôles des schémas et des figures (obtenues par l'une ou l'autre des perspectives) dans la pratique de la géométrie?**

En l'absence d'apprentissage sur la perspective, ce conflit est réglé par l'estimation, à partir des conceptions macro, de la vraisemblance des tracés. L'information complémentaire de type micro peut être donnée par une **légende**, mais, bien souvent, on utilise la **punctuation** : utilisation de pointillés pour indiquer les segments "cachés" (mais aux yeux de qui en perspective cavalière?)

Le contrôle du dessin par les conceptions macro impose des **contraintes** dont les raisons sont **physiologiques**. Par exemple un "cube" trop allongé ne sera pas accepté comme tel car il ne fait pas partie des images mentales que procure l'expérience ; en effet le dessin représente alors un cube de l'espace situé hors du champ de vision dans les conditions habituelles d'observation. (figure 2)

Ce contrôle est constitutif du processus didactique puisque c'est en partie contre lui que vont s'organiser les connaissances. La manière dont les élèves font référence à ce contrôle ou, au contraire, le récusent, constitue un indice de l'évolution de ces connaissances.

II.6 La perspective conique est un outil pour coucher sur le papier la représentation mentale de dimension deux ; en tant que processus rationnel elle permet de maîtriser les situations du macro-espace par un transfert au plan du dessin. Celui-ci est un objet du micro-espace ; cependant le sujet le voit d'une manière non isotrope (même en géométrie du plan, où, selon la manière dont on tourne une feuille portant un dessin, la structure de la figure apparaît différemment).

Se posent alors les questions suivantes:

Quelle est l'influence de ce transfert du macro vers le micro sur l'hétérogénéité initiale du plan?

Comment l'homogénéisation du micro-plan se traduit-elle dans l'activité didactique?

Les deux homogénéisations du plan signifiant et de l'espace signifié vont-elles de pair? Ainsi le sujet apprend-il à prolonger ou à gommer, de tête, des faces ou des arêtes de solides de l'espace comme il peut le faire sur le dessin?

II.7 La perspective cavalière est intermédiaire entre la perspective conique et la relation directe au micro-espace.. Elle se caractérise par :

- l'objectivité

- le **caractère borné** de la partie d'espace étudiée, compte-tenu de la taille de la portion représentée, du choix de l'échelle de la représentation et des dimensions de la feuille.

- la **structure** qui modélise l'espace n'est plus un faisceau de droites mais un **quadrillage cubique** fixé par le premier dessin de cube ou de trièdre de référence, structure à l'intérieur de laquelle tous les objets viendront se placer.

La perspective cavalière est donc soumise à la même problématique sur les conditions du **transfert entre macro et micro**, bien que son **domaine d'utilisation** soit en fait le **micro-espace**.

Remarque :

Nous avons, dans notre première approche, estimé qu'il valait mieux utiliser systématiquement un **maillage** fait de **plans horizontaux** et de **plans verticaux** parallèles ou perpendiculaires au plan du dessin (lui même vertical), comme on en voit le plus souvent dans les manuels, car, d'une part on **intègre** ainsi l'**anisotropie** signalée plus haut, et, d'autre part l'un des plans du repère est dessiné en **vraie grandeur**. D'autres choix sont possibles, comme l'utilisation d'une **projection orthogonale** sur le plan du dessin d'un cube repère dont aucun côté n'est parallèle au plan du dessin (ce type de maillage est souvent utilisé dans certains métiers et fait l'objet de choix normalisés par l'AFNOR). Une tentative préalable, menée par J.Boudarel, avait montré que ce type de repère peut être présenté aux élèves ; mais l'**élaboration** du dessin d'un tel repère est un problème mathématique **bien plus compliqué** que celui que nous avons retenu.

II.8 Si l'on veut agir et imaginer des constructions auxiliaires, par exemple à l'aide de droites ou de plan qui vont "transpercer" les objets, il faut conférer au micro-espace l'homogénéité du macro-espace . Dans quelle mesure cela peut-il être facilité par l'utilisation d'objets squelettiques, tels que cubes dont on n'a matérialisé que les arêtes ou par le recours à plusieurs objets nécessitant la prise en compte de leurs relations de position et à quel prix?

II.9 Finalement, comme dans tout problème de représentation plane de l'espace, le sens est dans l'espace et l'algorithme est dans le plan , l'objet du débat didactique est le suivant savoir réaliser ou interpréter un dessin en perspective , c'est posséder une inter-face entre micro-plan et macro-espace ; est-il nécessaire que l'élève soit l'ingénieur de cette inter-face, et, pour cela développe des connaissances de géométrie, ou est-il suffisant qu'il en soit seulement l'utilisateur et comment alors cela l'aide-t-il à faire de la géométrie?

III MONTAGES MATERIELS

(réalisant les projections coniques et parallèles).

III.1 Il y a **deux manières**, avec des variantes, de réaliser des **projections coniques** utilisant les rayons lumineux ; l'une consiste à dessiner sur une **vitre** ce que l'on voit d'objets situés de l'autre côté de la vitre ; l'autre consiste à dessiner l'**ombre au flambeau** sur un plan d'objets situés entre le plan et la source lumineuse.

La **première** manière relève du **macro-espace**, et la **seconde** du **micro-espace** ; mais, d'une part la distinction n'est pas aussi nette que cela, d'autre part l'objectif est d'obtenir la **compatibilité** des deux montages et leur fusion en un seul modèle.

III.2 Dans le cas de la **perspective cavalière** la première n'a plus de signification, **seule** reste l'**ombre portée**, au **soleil** cette fois ; elle relève du **micro-espace**.

III.3 Il est possible de **matérialiser** les rayons lumineux par des fils tendus ou des aiguilles à tricoter ; c'est évidemment plus facile dans le cas d'ombre portée que dans le cas de la glace où celle-ci devrait être remplacée par une matière qui puisse être transpercée (grillage fin par exemple). On peut ainsi faire revenir les élèves dans le **micro-espace**.

IV OBSERVATIONS ET EXPERIMENTATION

cette étude a comporté deux étapes

IV.1 La **première étape** répondait à une nécessité conjoncturelle : comment démarrer l'enseignement de la géométrie de l'espace avec des élèves de Première S qui n'en avaient pas fait auparavant. Il s'agissait d'élaborer une **ingénierie didactique** ; un premier compte-rendu en a été fait au colloque inter-IREM de géométrie à MARSEILLE 1-2 juin 84 (publié par l'IREM de MARSEILLE en décembre 84).

Ces séquences ont été reproduites depuis avec quelques modifications (en particulier suppression du problème sur le tétraèdre que l'on fait tourner)

Nous allons en donner un résumé.

Notre objectif était de dévoluer aux élèves le problème de la représentation plane des figures de l'espace en perspective cavalière, en faisant l'**hypothèse** que les élèves :

- * utiliseraient des droites parallèles pour modéliser les rayons du soleil et mettraient en oeuvre quelques propriétés d'incidence;
- * manipuleraient sans difficulté la projection verticale sur un plan horizontal.

IV.2 Pour la **première séquence**, nous avons posé le problème de l'ombre portée au soleil, sur un plan vertical, d'un tétraèdre

régulier squelettique dont une face, horizontale, possède une arête frontale (parallèle au plan de l'ombre).

Ce problème est intéressant pour les raisons suivantes :

- * il permet de donner un **premier sens** à ce qui deviendra la perspective cavalière ;
- * chaque élève peut aisément **fabriquer** un tel tétraèdre régulier de dimension donnée ;
- * Le contrôle du dessin passe par l'utilisation de la hauteur verticale qui, n'étant pas matérialisée au départ nécessite une **construction auxiliaire**.
- * la comparaison des dessins que les élèves réalisent chez eux conduit à poser le problème de la **longueur** du dessin de l'arête frontale, et du **parallélisme** de ces deux segments ;
- * ce problème permet de mettre en oeuvre immédiatement des connaissances de **géométrie du plan** ;
- * c'est un problème relevant du micro-espace, où le macro n'intervient pas et qui cependant conduit aisément à l'**homogénéisation**.

L'exploitation de ce problème s'est faite sous forme de **débat** (formulation, validation) avec recours à l'**action sur un matériel** en carton et aiguilles à tricoter ; elle a conduit à l'introduction de dessins plans représentant des **coupes de la maquette**.

L'institutionnalisation a porté sur des **propriétés d'incidence** donnant naissance à des **règles sur les dessins des ombres**.

IV.3 Pour la **deuxième séquence**, nous avons posé le problème de dessiner l'ombre du **tétraèdre** après avoir fait tourner celui-ci

autour de sa hauteur verticale, le dessin dans la première position étant donné.

Après une séance en classe consacrée à la mise au point d'une **méthode** reprenant les suggestions des élèves (mais que ceux-ci n'auraient pas élaborée seuls) et utilisant la **projection verticale** sur un plan horizontal auxiliaire, à l'aide d'une **maquette** analogue à la précédente, chaque élève devait faire chez lui le dessin correspondant à l'angle de rotation qui lui avait été attribué.

Nous avons pu vérifier que la projection verticale sur un plan horizontal était un moyen de se repérer dans l'espace, mobilisable facilement ; nous n'avons pas repris cette séquence par la suite car elle est un peu longue et ne donne pas lieu à une institutionnalisation importante.

IV.4 La **troisième** séquence reposait sur la **construction** puis la **représentation** d'un **hexaèdre non régulier**, dont les faces sont des quadrilatères plans quelconques (cube déformé) ; l'objectif était de compléter la panoplie des **relations d'incidence** qui apparaissaient comme **outil obligé de la construction** du dernier sommet et de la **traduction des contraintes** en terme de dessin.

Là aussi le problème a été exploité sous forme de **débat** en classe s'appuyant sur la **manipulation de maquettes** et de recherches personnelles des élèves (en classe ou à la maison). En fait le problème était trop compliqué pour être abordé d'emblée. Aussi a-t-on dû introduire des **jalons** sous forme d'**exercices de construction** ou de **lecture de dessins** portant sur des questions plus élémentaires d'incidence ; Au cours de ces exercices est apparue la nécessité de compléter l'information apportée par le

dessin d'une part en repérant chacun des points par son projeté vertical sur un plan horizontal de référence (mise en place de repère), d'autre part en accompagnant le dessin d'une légende.

IV.5 Le problème de la **punctuation** des figures, déjà abordé lors d'exercices de renforcement de la première séquence, a été traité systématiquement au cours de la troisième ; mais la manière dont nous l'avons abordé n'était **pas satisfaisante** car elle nous a conduit à faire appel à des conceptions macro qui ne seraient légitimes qu'en perspective conique.

IV.6 C'est pour **traiter** différemment ce **problème** et pour essayer de savoir à côté de quelles conceptions, erronées ou non, nous étions passés que nous avons abordé la **deuxième étape** de cette étude.

Dans celle-ci nous avons d'une part effectué quatre **enquêtes**, chacune auprès d'une centaine d'élèves de second cycle (premières S ou premières S et terminales D, selon les cas), d'autre part utilisé la quatrième enquête comme point de départ d'une **nouvelle séquence d'enseignement** préalable à la séquence du tétraèdre.

IV.7 Les enquêtes ont porté sur :

***1** les manières de **représenter des plans** de l'espace dans les quatre situations suivantes

- un plan P , un point A du plan et un point B hors du plan ;
- un plan P , une droite D située tout entière dans P et une droite D' qui coupe P en un point ;
- un plan P et une droite D n'ayant aucun point commun avec P
- un plan P et une droite D perpendiculaire à P

***2 la classification** par les sujets de vingt parallélogrammes dessinés sur une feuille, selon le critère : indiquer pour chacun s'il représente un rectangle de l'espace horizontal - vertical - oblique ou non (réponse par exclusion ou ordre de préférence) ;

***3 les dessins d'une pyramide régulière** squelettique à base carrée présentée aux élèves avec la consigne "ce dessin doit permettre à un observateur non prévenu de reconnaître l'objet ;

***4 d'une part**, le dessin de l'ombre portée au flambeau sur un plan horizontal de la face supérieure d'un cube squelettique posé sur ce plan, et les variations de cette ombre selon sa position par rapport à la verticale de la source lumineuse et selon la hauteur de celle-ci (le matériel étant au préalable présenté aux élèves) ; **d'autre part**, l'appréciation de dessins proposés comme pouvant être des dessins de l'ombre du cube entier.

IV.8 RESULTATS DE LA PREMIERE ENQUETE

Presque la moitié des élèves ont déclaré n'avoir jamais fait de géométrie de l'espace.

* Sur l'ensemble des dessins de plans obtenus, on trouve **90% de dessins "classiques"** (70% de parallélogrammes, 12% de parallélogrammes dont il manque un côté, 7% de "coins"), et 5% de demi-plans (on en trouve 30% en troisième), les autres étant inclassables. Il n'y a pas de trace évidente de points de fuite.

* Parmi les parallélogrammes, complets ou ébauchés, **85% ont deux côtés horizontaux**, les autres étant obliques dans la direction sud-ouest/nord-est (latéralisation à droite) ; nous avons regardé les deux paramètres suivants :

- valeur de l'angle inférieur gauche : la répartition est **unimodale** ; dans 50% des cas la valeur est comprise entre **60° et 80°**
- rapport de la longueur du côté oblique à celle du côté horizontal : la répartition est **unimodale** ; dans 50% des cas le rapport est compris entre **0,5 et 0,7** c'est à dire voisin du **nombre d'or**.

IV.9 RESULTATS DE LA SECONDE ENQUETE

(La très nette prédominance des parallélogrammes dans la première enquête nous assurait que la question posée aurait un sens pour les élèves).

* L'analyse des réponses fait apparaître les **hiérarchies** suivantes dans les **critères** d'interprétation :

- Si le parallélogramme a deux côtés "horizontaux"

. en premier l'angle des directions ; si cet angle est petit, le rectangle est horizontal ; plus grand, le rectangle est oblique ou horizontal ; voisin d'un droit, le rectangle est oblique ou vertical.

. en deuxième le rapport de la longueur du côté oblique à celle du côté horizontal ; plus ce rapport est petit, plus souvent le rectangle est horizontal (sinon oblique)

- Si le parallélogramme a deux côtés "verticaux"

. en premier le rapport des longueurs ; plus celui-ci est faible plus souvent le rectangle est vertical (sinon oblique)

. en deuxième l'angle de la direction oblique avec l'horizontale ; plus celui-ci est faible plus souvent le rectangle est vertical (sinon oblique)

- Si tous les côtés sont obliques, le rectangle est vu le plus souvent oblique, mais si le plus grand côté fait un angle petit avec l'horizontale (resp. verticale), le rectangle peut être vu horizontal (resp. vertical).

Dans tous les cas la latéralisation à gauche (obliques de direction sud-est/nord-ouest) augmente légèrement le nombre de rectangles obliques.

IV.10 *Commentaires sur les deux enquêtes*

* La prégnance des directions horizontale et verticale montre l'importance des conceptions macro dans l'interprétation d'un dessin ;

* La confrontation des résultats de ces deux enquêtes nous a suggéré l'hypothèse suivante

Les élèves imaginent que le plan du rectangle est perpendiculaire au plan du dessin et que le rapport de ses dimensions est voisin du nombre d'or ; dans ces conditions la grande diagonale du parallélogramme donne une bonne idée globale de l'orientation du plan du rectangle.

Les résultats obtenus sur les dessins présentés dans cette enquête ne contredisent pas cette hypothèse. Il nous faudra faire une autre enquête pour tester cette hypothèse

* Il existe une opposition entre deux contraintes : utiliser une projection presque orthogonale pour s'assurer de l'orientation (enquête 2), utiliser une projection beaucoup plus oblique pour montrer qu'il s'agit d'une figure de l'espace et disposer de plus de place sur le dessin (enquête 1). Cette opposition est confirmée par la troisième enquête.

IV.11 RESULTATS DE LA TROISIEME ENQUETE

* **Moins de 10%** des élèves ont tenté une perspective linéaire en représentant le carré par un **trapèze**; les autres dessins du carré sont également répartis entre **parallélogrammes quelconques** et **losanges** (ayant presque toujours deux côtés horizontaux et présentant une latéralisation à droite)

* **25%** des élèves ont placé le **sommet** de la pyramide sur la médiatrice du côté horizontal antérieur, obtenant ainsi une **face antérieure isocèle** (3% ont procédé de même pour la face postérieure) ; les autres ont placé le **sommet** sur la **verticale** de l'intersection des diagonales.

* **16%** des élèves ont indiqué d'une manière graphique des **égalités de longueur**, mais seulement **2%** d'une manière suffisante. La **nécessité** de telles informations supplémentaires a donc échappé à la grande majorité des élèves.

* La répartition des angles du côté oblique avec le côté horizontal est, contrairement à l'enquête 1, **bimodale**, avec un **minimum** pour **60°**. Cela peut s'interpréter par la présence de **deux sortes d'élèves** : ceux qui donnent la **priorité** à la place pour dessiner et ceux qui veulent d'abord montrer que la **face carrée est horizontale**. Il n'y a de corrélation, ni avec le choix losange ou parallélogramme, ni avec la place du sommet.

IV.12 RESULTATS DE LA QUATRIEME ENQUETE .

Le matériel présenté aux élèves est constitué d'un mât télescopique portant une ampoule de lampe de poche, fixé verticalement au milieu de l'un des petits bords d'une planche rectangulaire horizontale. Le cube, dont les quatre arêtes supérieures sont rouges, est placé successivement dans chacune des

positions de la feuille de test. L'ampoule n'éclaire pas suffisamment pour qu'on puisse voir l'ombre.

Rappelons que, puisque le plan du carré rouge est parallèle au plan de la planche, l'ombre est un carré à côtés respectivement parallèles à ceux de la face supérieure ; sa taille ne dépend que de la hauteur de la lampe.

-- *Réponses sur la forme de l'ombre*

* Si le mât portant la lampe est au milieu du cube, l'ombre est unanimement carrée

* Dans les autres positions on ne trouve plus de carrés, mais, selon les cas, des rectangles, des trapèzes et des cerfs-volants, symétriques ou non, dont la pointe est à l'opposé du mât (comme la queue d'une comète par rapport au soleil)

* Si la figure de l'espace formée par le mât et le cube admet un plan vertical de symétrie, en général, on ne retrouve cette symétrie sur le dessin que si ce plan est dans une position privilégiée (parallèle à l'un des côtés de la planche).

* Si le cube a une arête contre le mât, on obtient un cerf-volant avec le plus souvent un angle droit au pied du mât, l'angle au sommet opposé étant aigu (effet comète)

* Si on écarte le cube du mât, l'ombre s'allonge.

* Si la lampe monte la taille de l'ombre diminue.

-- *Réponses sur l'identification de dessins d'ombre du cube complet.* Contrairement à la première partie de ce test, on trouve ici une proportion non négligeable de réponses exactes.

* On demandait également aux élèves d'indiquer sur le dessin l'emplacement du pied du mât. La plupart ont indiqué la place de ce pied en gros dans la bonne direction, mais sans construire le point de fuite ; (certains l'ont franchement mis de l'autre côté)

* Comme dans le dessin de l'ombre, les deux cas les mieux réussis sont le mât au milieu du cube (réussite quasi-totale) et une arête le long du mât (plus de la moitié).

VI.13 Commentaires

* L'écart de réussite entre les deux parties du test ne peut pas s'expliquer uniquement par le fait que les élèves disposent dans la deuxième partie d'un indice important, à savoir la présence d'au moins un carré dans le dessin (l'ombre de la face inférieure qui coïncide avec celle-ci).

* On peut conclure de ce test et des précédents que les conceptions macro empiriques des élèves leur sont plus utiles pour interpréter un dessin que pour en faire un ; quand ils réalisent un dessin ils cherchent au contraire à traduire le plus possible de leur connaissances micro.

VI.14 Dans trois premières S et une terminale D, dans lesquelles enseignent des membres de l'équipe, la passation du test a été suivi d'un débat qui a permis d'explicitier certaines démarches des élèves.

* Dans le cas du mât au milieu du cube, l'argument des élèves est la symétrie des rôles joués par les quatre sommets de la face supérieure (conception micro)

* Si une arête est contre le mât, la connexion ainsi établie permet d'utiliser les deux plans verticaux contenant le mât et les deux faces du cube incidentes (conception micro), mais comme le quatrième sommet apparaît déconnecté, il est traité différemment (conception macro).

* Par contre dans les autres cas les élèves reviennent entièrement aux conceptions macro, soit en s'imaginant à la place de la lampe, soit surtout en s'imaginant à la place du cube et en se référant à l'expérience de leur ombre qui s'allonge quand ils s'éloignent d'un lampadaire.

* Nous avons aussi recueilli deux arguments étonnants :

- Quand on écarte le cube du mât, l'ombre (rectangulaire) du carré a sa largeur qui diminue car la longueur s'allonge et l'aire doit rester constante.
- Les dessins proposés ne peuvent pas être des ombres de cube car ce sont des dessins en perspective.

Signalons enfin que les tests des enquêtes 2 et 4 ont été proposés à plusieurs groupes d'enseignants de lycées en stage à l'IREM, et qu'on a obtenu le même éventail de réponses qu'avec les élèves et, à la suite du test 4, un débat tout à fait analogue à ceux menés en classe, alors même qu'une collègue avait, de prime abord, parlé d'homothétie (mais elle a été gagnée par l'incertitude générale).

Après avoir complètement étudié le problème de l'ombre portée du cube (en près d'une heure avec les collègues - en quelques séances avec les élèves, voir ci-dessous) il est possible de revenir sur les réponses au questionnaire et de montrer que beaucoup d'entre elles deviennent correctes si on les applique aux faces latérales du cube et non à la face supérieure ; cette constatation est réconfortante pour les cobayes.

IV.15 Modification du début de l'enseignement

Pour tenir compte des conceptions révélées par ces enquêtes et tenter de les intégrer, en les corrigeant, dans une représentation cohérente de l'espace nous avons introduit, en classe de première, une séquence d'enseignement nouvelle dont le point de départ est le test 4.

* Nous avons commencé par la "correction" du dessin de l'ombre de la face supérieure du cube ayant une arête contre le mât. En remplaçant l'ampoule par un crochet, il est possible de tendre des fils élastiques entre celui-ci et la planche, s'appuyant sur chacun des sommets de cette face. En faisant cette manipulation les élèves constatent que l'ombre semble être un carré ; mais surtout le problème est maintenant posé dans le micro-espace.

Le recours à la maquette leur permet d'argumenter une preuve utilisant des figures auxiliaires dans des plans verticaux, le parallélisme de plans et des relations d'incidence.

* On leur pose ensuite successivement les problèmes suivants (toujours avec le recours à la maquette) :

- A partir du dessin de l'ombre du cube dans le cas précédent, trouver la hauteur de la source lumineuse.
- Construire l'ombre de certains points du plan de la face supérieure du cube, puis l'ombre d'un point quelconque dont on connaît le projeté vertical sur le plan de la planche ; cela utilise la notion d'homothétie et contribue à l'homogénéisation des plans horizontaux.
- Construire l'ombre d'un cube dont on donne la face inférieure, quand on connaît la hauteur de la source lumineuse ; cela permet d'expliquer les erreurs au test et débouche sur la ponctuation en imaginant le cube translucide.

- Trouver d'autres objets ayant la même ombre que le cube (de même forme ou de forme différente) ; cela contribue à l'homogénéisation des projetantes.

- Etablir le lien avec la perspective linéaire, en trois temps :

- * on bascule le matériel de façon à placer le socle verticalement
- * on compare le dessin de l'ombre, obtenu en tendant des fils, avec le dessin du cube sur une vitre parallèle au socle, située entre l'extrémité du mat où l'on place l'œil et le cube

- * on imagine un plan immatériel se déplaçant de la vitre au socle et la trace sur ce plan des droites joignant le point de vue-source lumineuse aux sommets du cube

- Etudier l'ombre du milieu d'un segment horizontal (le socle étant remis horizontalement) puis d'un segment vertical. Que faudrait-il faire pour que dans ce dernier cas l'ombre du milieu soit au milieu de l'ombre du segment?

- * On arrive ainsi à l'introduction de la projection parallèle, qui pose sur la maquette le problème de la mise en place d'un élastique parallèle à un élastique déjà tendu, d'abord par tâtonnement sous contrôle macro, puis, comme dans le plan par l'utilisation de bipoints équipollents (parallélogramme dans l'espace) ; cela permet d'introduire les vecteurs de l'espace et l'orientation des projetantes qui donnera un sens micro à la ponctuation des figures, en perspective cavalière.

- * On peut alors reprendre le problème de l'ombre au soleil d'un tétraèdre régulier.

V CONCLUSIONS

En l'absence d'apprentissage spécifique, les élèves observés développent des représentations mentales de l'espace incohérentes. S'ils semblent assez bien armés pour interpréter certains dessins dans lesquels ils identifient des éléments de repère conformes à leurs conceptions, ils semblent aussi démunis pour faire le travail inverse qu'on pouvait l'être au Moyen-âge et cherchent, comme le font les enfants de la maternelle, à représenter d'abord les relations qui leur semblent importantes ; l'ensemble constitue un schéma incohérent, intégrant des éléments disparates ; leur représentation est ainsi non homogène.

Le cadre théorique présenté en II permet de rendre compte des difficultés observées, aussi bien chez les adultes que chez les élèves. Le désir de faire une figure cohérente, le plus souvent en perspective cavalière, se heurte à l'opposition des deux types de conceptions. A cette opposition s'ajoute la quasi-impossibilité d'avoir, en conception macro, une vue d'ensemble d'un objet trop étendu ou trop complexe. Cela conduit, par exemple, à exagérer certains angles sur le dessin ou à morceler le dessin en parties vues de points différents. Bien souvent, la non-cohérence d'une figure est due à une combinaison de ces différents facteurs

L'apprentissage doit porter sur l'intégration des conceptions micro et macro (gestion du macro-espace par les connaissances micro), l'homogénéisation de l'espace, la nécessité (logique) et la possibilité (contractuelle) de donner des informations complétant

un dessin au moyen de la ponctuation ou d'une autre symbolique graphique, ou au moyen d'une légende. La production raisonnée de figures cohérentes est le signe que cet apprentissage est en cours; c'est pourquoi nous avons exigé que les élèves fassent des figures soignées et non des schémas

Il ne nous semble pas possible d'aborder ces problèmes sans utiliser des **maquettes** pour matérialiser les figures de l'espace. De plus, comme les conceptions des élèves varient selon qu'il s'agit de faire un dessin ou de lire un dessin, des règles de dessin ne peuvent jamais concorder entièrement avec ces conceptions ; on ne peut pas s'en remettre à l'intuition (la "vision dans l'espace") pour donner un sens à ces règles. On est, au contraire, conduit à étudier la représentation géométrique elle-même, de façon à en dégager les invariants.

Une telle étude, comme celle de beaucoup de problèmes présentées ci-dessus ne peut se faire que par une rupture du contrat didactique usuel, d'ailleurs facilitée par la nouveauté de l'objet d'étude.

Les acquis actuels de notre recherche permettent d'envisager une ingénierie didactique sur l'enseignement de la géométrie de l'espace, d'abord en classe de seconde, en commençant par poser le problème de la construction dans l'espace d'une droite parallèle à une droite donnée (réalisation matérielle avec des ficelles), car le parallélisme des droites nous est apparu comme une notion première qui demande à être explicitée, puis ultérieurement en premier cycle.

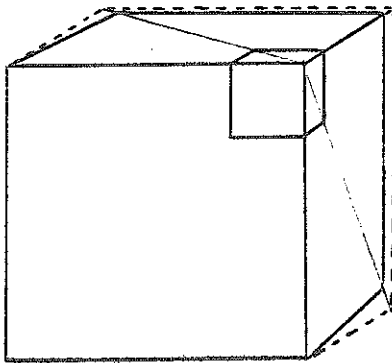
X O_1 

figure 1

en plaçant l'oeil à 40 cm de la feuille sur la perpendiculaire à celle-ci passant par O_1 , on interprète le dessin en traits pleins comme celui de deux cubes de même sommet A ; en pointillé le dessin des mêmes cubes en perspective cavalière. Pour le grand cube la différence est sensible, pour le petit les traits ne sont pas discernables

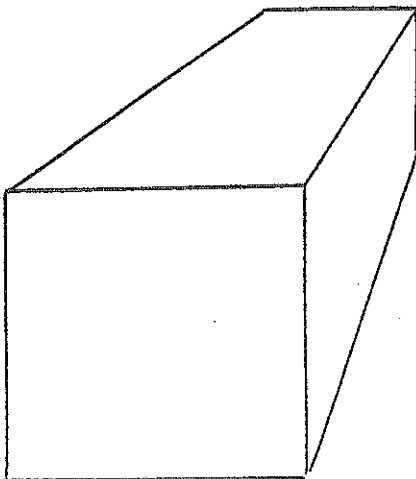
X O_2 

figure 2

en plaçant l'oeil à 4 cm de la feuille sur la perpendiculaire à celle-ci passant par O_2 (le nez contre la feuille), on interprète le dessin comme celui d'un cube dont une partie est hors du champ de vision