i.r.e.m.
UNIVERSITE PARIS VII

DE QUELQUES SPECIFICITES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT POST-OBLIGATOIRE (EPO)

PAR A. ROBERT

cahier de didactique des mathematiques numéro 47

Novembre 1987

Les notes sont réunies à la fin du texte.

Dans cet exposé, nous nous intéressons à l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire scientifique long[1] (classes de seconde, première S et terminale C et D des lycées, classes préparatoires scientifiques, Deug SSM et SNV...).

Pourquoi ne pas prolonger simplement les analyses didactiques déjà menées dans l'enseignement obligatoire ?
Pourquoi s'intéresser à un enseignement qui ne concerne pas toute la population scolaire ?
A priori, on peut remarquer que, si on en croit Piaget et très schématiquement, les élèves de l'EPO sont en pleine possession de tous leurs moyens intellectuels, puisqu'ils sont "arrivés" (et cela coïncide avec la fin de l'EO) au stade formel.
On peut aussi estimer que les études à ce niveau peuvent mettre en lumière certains phénomènes dans la mesure où les mathématiques enseignées sont plus riches, plus complexes.
Enfin, tous les futurs enseignants passent par l'EPO et à ce titre, il est intéressant de se pencher sur leur formation en mathématiques.
Ceci dit, tout cela n'implique pas qu'il y ait nécessairement lieu de dissocier les études de didactique des mathématiques entre EO et EPO et dans la première partie nous allons revenir plus systématiquement sur cette question de la spécificité de l'enseignement des mathématiques dans l'EPO.
Compte-tenu des caractéristiques ainsi dégagées, nous précisons dans la deuxième partie nos hypothèses (spécifiques ou non) sur l'enseignement des mathématiques dans l'EPO.

I Existe-t-il une spécificité de l'EPO en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques ?

Par delà les différences flagrantes (entre un élève de seconde indifférenciée et un élève de Math Spe par exemple) peut-on repérer des facteurs communs qui justifient un intérêt spécifique ?

Pour répondre à cette interrogation, nous allons passer en revue un certain nombre de caractères du public et des mathématiques concernés, en nous basant sur des critères didactiques (liés à l'enseignement ou à l'apprentissage) pour les analyser.

a) sociologie

Tous les élèves concernés ont franchi la barrière de la troisième, donc se sont dirigés vers des études longues après une certaine sélection, sans interruption d'études et sans expérience professionnelle. Cela correspond aussi à une certaine sélection sociale(2).

Cependant, leurs motivations, leur "image de soi", la quantité de travail qu'ils sont prêts à fournir, leurs résultats (mentions au bac par exemple) sont très différents. Il peut y avoir des différences essentielles, y compris au niveau du projet personnel(3), entre un élève de terminale C et un élève de terminale D, ou un élève de DEUG et un élève de classes préparatoires.

Il s'agit donc de jeunes adultes, sans revenus propres, dans la foulée des études, sélectionnés mais encore très divers en ce qui concerne les motivations et les performances.

b) <u>institutions</u>

On constate là plus de différences que de points communs. En effet on a affaire à deux structures peu comparables, le lycée et l'université : dans cette dernière la division cours/TD, le personnel enseignant qui fait aussi de la recherche, le peu de contrôles, et l'autonomie relative s'opposent à l'organisation en classes des lycées, au temps plein des enseignants qui y travaillent et aux contrôles de présence et de travail.

De plus, les évaluations, éventuellement de fréquences différentes, nous semblent tout au long de l'EPO pouvoir être de deux types : ou bien on vérifie les "savoir-faire", ou bien on essaie de contrôler un peu plus les connaissances disponibles (et pas seulement mobilisables).

c) <u>contenus enseignés</u>

On peut d'abord remarquer qu'il y a plus de nouveaux concepts à faire apprendre en moins de temps. En outre, en premier cycle universitaire et dans les classes préparatoires, il n'y a plus que trois, voire deux matières enseignées pour un temps scolaire peu différent, et cela correspond à une densité d'activités mathématiques très élevée.

De plus, les concepts à faire acquérir sont souvent des concepts de type généralisateur, unificateur, formalisateur(4) : ils ont été dégagés par des mathématiciens après que de nombreux problèmes particuliers aient été résolus (de façon particulière) et ont souvent correspondu à une nouvelle formalisation. On peut évoquer par exemple le concept de convergence des séries (et des suites), complètement formalisé pour la première fois par Cauchy en 1827, alors que l'on savait déjà étudier bien des séries mais justement sans cet outil formel, qui apparait ainsi généralisateur et unificateur.

On peut aussi citer les espaces vectoriels qui sont apparus comme tels au XIXme siècle alors que leurs propriétés spécifiques étaient déjà utilisées, dans chaque cas particulier, par des physiciens y compris.

Et on constate que les problèmes où ces concepts interviennent de manière indispensable (problèmes nécessitant l'utilisation de la définition de la convergence en (ϵ, N) par exemple,comme le lemme de Césaro, espaces vectoriels de dimension infinie comme les espaces fonctionnels) ne sont pas abordables par des élèves qui commencent à apprendre les notions correspondantes.

Ce dernier constat, relativement spécifique donc du niveau d'enseignement étudié vu sa fréquence, nous semble important en ce qui concerne l'enseignement de ces notions : on est obligé dans ce cas de présenter les notions en cours magistral avant de faire travailler les étudiants dessus ; il est exclus de leur faire (re)trouver certains aspects avant le cours. Par exemple il n'y a pas, nous semble-t-il,de problème, accessible aux étudiants concernés par l'enseignement du concept de convergence (dans sa version rigoureuse), et où la définition en (ϵ, N) puisse être trouvée pour établir un résultat que l'on pressent par ailleurs.

d) <u>caractéristiques psychologiques et cognitives des élèves</u>

Les élèves ont plus de 15 ans et par suite ont des capacités de réflexion sur leurs propres activités. Ils peuvent distinguer les connaissances et les métaconnaissances (connaissances sur les mathématiques). Ils ont de plus un certain bagage de connaissances mathématiques et se sont forgés, même si cela reste implicite, un certain nombre de représentations sur les mathématiques et sur la façon de les apprendre.

Cependant une enquête auprès d'élèves du second cycle des lycées[5] a montré que le facteur dont ces représentations dépendent le plus est l'enseignant de mathématiques "actuel" (l'enseignant de la classe où se trouve l'élève interrogé). Nous en concluons que ces représentations sont encore assez labiles, mais, dans la mesure où elles sont en partie responsables de la façon dont les élèves ont pris l'habitude de travailler, on doit en tenir compte.

En ce qui concerne l'activité mathématique des étudiants, après neuf ans de scolarité et compte-tenu des diversités potentielles des cheminements cognitifs, il se peut que certains aient recours (trop) systématiquement à tel ou tel type de méthodes ou de cadres d'intervention des notions pour résoudre les problèmes : autrement dit, nous pensons qu'il s'est établi chez certains élèves des cadres préférentiels de fonctionnement mathématique, relativement stables.

Ainsi en géométrie les uns n'utilisent jamais l'outil vectoriel, et/ou mettent toujours en oeuvre des méthodes analytiques.

En analyse certains utilisent systématiquement le cadre graphique pour résoudre les problèmes , chez d'autres on trouve le recours privilégié au cadre formel ou encore au cadre numérique, on peut aussi trouver l'essai systématique de recours à des algorithmes (même si ce n'est pas adapté au problème concerné).

Nous avons ainsi[6] mis en évidence sur des tâches portant sur les débuts de l'analyse sur R (en première année d'université) des

régularités individuelles de ce type au niveau des procédures utilisées par les étudiants (indépendemment de leur exactitude).
Il faut souligner que les bons étudiants au contraire se caractérisent par des mises en fonctionnement fréquentes de changements de cadres ou de stratégies.

Enfin les connaissances proprement dites des étudiants sont variables ; de très nombreux tests de connaissances le montrent, beaucoup concluent d'ailleurs à des acquis antérieurs insuffisants, et ceci aussi bien pour les connaissances mobilisables (dont l'utilisation est demandée explicitement dans l'énoncé) que, a fortiori, en ce qui concerne les connaissances disponibles (mises en fonctionnement sans que l'indication en ait été donnée).
Pour ne prendre qu'un exemple de cette variation, un même prétest (sur des connaissances en analyse), proposé à une population d'élèves à la première rentrée universitaire après leur baccalauréat, a permis de détecter un écart de 4 points sur les moyennes des notes sur 20, entre les étudiants d'une section de Deug (issus exclusivement de terminale C ou D) et ceux de quatre classes de Math Sup choisies dans des lycées différents(7)...

En conclusion, les élèves concernés ont certaines connaissances (apprises, mobilisées et organisées différemment selon les individus), ils ont acquis certaines représentations (éventuellement diverses et labiles) des mathématiques et de l'accès aux mathématiques et ils ont tous des capacités de réflexion métamathématique.

Finalement, la spécificité, si spécificité il y a, nous parait tenir surtout aux mathématiques enseignées et aux conséquences directes de l'âge des élèves et de la durée de leur études antérieures.
Certains de ces éléments sont déjà présents dans l'enseignement obligatoire, mais de façon moins systématique : ainsi il ne faudrait pas voir une coupure nette entre la seconde et la troisième.
Pour nous, il s'agirait plutôt de changements quantitatifs qui, mis tous ensemble, engendrent une nouvelle qualité de ce qu'on étudie.

II Nos hypothèses (spécifiques ou non) sur l'enseignement des mathématiques dans l'EPO

Nous avons distingué, de manière un peu formelle il faut bien le dire, ce qui concerne plutôt le côté individuel de l'acquisition des connaissances et ce qui concerne le mode de cette acquisition (ensiegnement en l'occurrence).

1) Hypothèses sur l'acquisition individuelle des connaissances en mathématiques dans l'EPO.

a) Continuité

Nous admettons que globalement les différents mécanismes cognitifs correspondant aux apprentissages individuels ne sont pas qualitativement différents de ceux qui sont à l'oeuvre avant 16 ans : par suite nous adoptons les hypothèses correspondantes déjà admises par les didacticiens travaillant sur l'EO.

Nous nous appuyons pour admettre cette hypothèse de continuité sur tous les travaux de didacticiens portant sur l'EPO[8], que les hypothèses cognitives y soient ou non explicitées : ou bien il y a reprise (implicite le cas échéant) des hypothèses cognitives admises pour l'EO ou en tout cas il n'y a pas de contradiction.

<u>Très schématiquement</u>, nous retenons ainsi de Piaget l'importance de l'action (résolutions de problèmes en l'occurence) et le rôle moteur pour la construction des connaissances des processus de déséquilibres/rééquilibrations.

Nous retenons aussi les hypothèses de Vigotski sur le rôle de la communication comme prédesseceur du langage intérieur et sur la possibilité de progresser grâce à une tierce personne (adulte ou pair) sur des connaissances de la zone proximale de développement.

Nous nous sommes aussi appuyées sur des recherches plus récentes de Lautrey, plus précisément en ce qui concerne les différences potentielles fondamentales de cheminement cognitif chez les enfants (ce qui relativise la hiérarchie piagetienne de l'action sur la perception et l'imagerie en particulier).

Des travaux de psychologie sociale, nous retenons l'hypothèse de l'apport (éventuel) des conflits socio-cognitifs et aussi l'importance des différentes représentations élaborées par les élèves et les enseignants sur les mathématiques et l'accès aux mathématiques. Nous appelons ces représentations "métacognitives" pour les distinguer d'autres représentations plus liées aux contenu.

b) nécessité d'avoir des connaissances dans suffisamment de cadres.

Nous pensons qu'individuellment il y a une meilleure prévision d'apprentissage pour un étudiant ayant des connaissances (même imparfaites) dans plusieurs cadres que pour un étudiant ayant plus de connaissances, mais dans un seul cadre. A notre avis, cela tient en particulier au caractère réducteur que peut prendre la mise en fonctionnement systématique d'un cadre préférentiel et au rôle dynamique (pour la construction des connaissances) que peuvent jouer les mises en oeuvre de changements de cadres dans les problèmes.

Nous avons vérifié cette hypothèse à plusieurs reprises sur des étudiants de première année de premier cycle scientifique à propos de l'apprentissage des débuts de l'analyse sur R(3). Nous avons pu vérifier que les moins bonnes performances en cours d'année étaient le fait d'étudiants (issus en général de terminale D) ayant des connaissances initiales dans très peu de cadres, essentiellement numérique en l'occurence, alors que les autres étudiants, qui s'avereront meilleurs, avaient aussi des acquis dans le cadre graphique voire dans le cadre symbolique.

c) Utilisation du levier "méta".

Nous faisons une hypothèse plus spécifique à l'EPO, compte-tenu des capacités réflexives des élèves plus agés et du fait que tous les concepts ne peuvent pas être abordés par des problèmes leur donnant du sens : nous pensons qu'on peut de manière bénéfique impliquer explicitement les élèves dans leur propre apprentissage. Cela correspond d'une part à des représentations de l'apprentissage intégrant cette dimension, à la fois pour les enseignants et pour les étudiants et d'autre part à un contrat didactique explicite spécifique dans la classe.

Autrement dit, nous pensons qu'on peut donner aux élèves la possibilité d'une action consciente sur leur apprentissage, et en particulier sur la résolution des problèmes conditionnant à notre avis cet apprentissage.

On peut citer ici les travaux de Schoenfeld[10] qui lui s'intéresse aux seules résolutions de problèmes (et non à l'acquisition des connaissances) mais qui développe des idées similaires des notres. Pour cet auteur, les performances en "Problem Solving" nécessitent non seulement des connaissances ("ressources") mais encore la mise en oeuvre d'heuristisques, beaucoup plus précises et détaillées que celles de Polya ; cette mise en oeuvre est conditionnée par un contrôle conscient sur ce qu'on est en train de faire et nécessite des représentations des mathématiques compatibles. Pour cela l'auteur fait un enseignement explicite d'heuristiques et explique les règles du contrôle, c'est ce que nous appelons un enseignement de type métamathématique.

Nous reviendrons plus loin sur le problème de l'enseignement permettant l'utilisation de ce levier "méta".

2) <u>Hypothèses sur le mode d'acquisition des connaissances en mathématiques dans l'EPO</u>.

a) <u>continuité</u>

Là encore nous reprenons les acquis des études sur l'EO quand c'est possible, quitte à les adapter.

Nous reprenons en particulier les hypothèses de R. Douady sur l'efficacité pour beaucoup d'étudiants de résolutions de problèmes du type suivant : une notion mathématique nouvelle, que l'on doit faire apprendre, doit être mobilisée en tant qu'outil de résolution dans un problème proposé aux étudiants avant le cours sur cette notion. Mais cette notion intervient dans ce problème dans deux cadres au moins, et dans l'un des deux cadres les étudiants ont suffisamment de connaissances (même perceptives le cas échéant) pour pouvoir avancer[11].

On crée donc ainsi des conditions pour que se produisent, par le jeu qui s'enclanche entre les cadres, des processus analogues aux déséquilibres suivis de rééquilibrations si importants dans la construction des connaissances.

Après cette phase de recherche, appuyée sur des connaissances "anciennes", l'enseignement s'organise en différentes étapes, explicitation, institutionnalisation (correspondant au cours), familiarisation (correspondant aux exercices de renforcement), réinvestissement (en particulier dans des problèmes où la connaissance n'est pas explicitement appelée).

Pour résumer autrement le cycle proposé par R. Douady, on peut dire, en terme de connaissances d'élèves, qu'on passe d'abord d'anciens outils disponibles à de nouveaux objets, successivement mobilisables (après le cours), puis disponibles (après la familiarisation) ; et ces concepts devienent de nouveaux outils disponibles (après le réinvestissement).

Cette organisation doit être mise en fonctionnement sur un nombre suffisant de notions pour être efficace, en particulier celles qui sont sources d'erreurs persistantes. Autrement dit, la conception d'enseignements selon ce schéma doit d'appuyer sur des recherches sur les difficultés (persistantes) des élèves et sur l'épistémologie des notions.

Une recherche récente sur l'enseignement de résolutions qualitatives d'équations différentielles[12] a brillamment illustré ce point de vue.

Cependant, sur des notions qui ne se laissent pas aborder par un "bon" problème initial, on retient de cette organisation l'idée de proposer (après le cours) des problèmes permettant aux étudiants de travailler sur plusieurs cadres dans lesquels leurs connaissances sont inégales. On retient aussi l'idée de l'importance du réinvestissement, y compris dans des problèmes portant apparemment sur un autre domaine, permettant l'acquisition d' outils disponibles et non seulement mobilisables.

Les travaux de C. Laborde, après ceux de psychologues genevois comme J. Brun ont montré l'importance d'un apprentissage spécifique des formulations en mathématiques, contrairement à une opinion répandue, selon laquelle le signe est associé sans difficulté au concept s'il est en voie d'acquisition. Nous reprenons cette hypothèse, d'autant plus que nous avons pu vérifier au niveau du DEUG la difficulté du bon usage des formalisations en mathématiques , même de la part de bons étudiants[6].

Il peut être nécessaire de faire un enseignement spécifique.

Nous adoptons également l'hypothèse de l'efficacité du travail en petits groupes permettant l'émergence de conflits socio-cognitifs en particulier. Nous y voyons aussi l'intérêt de contribuer à faire diminuer l'insécurité des élèves dans des problèmes difficiles, nécessitant une recherche un peu longue.

b) <u>pour utiliser les nouveaux leviers</u>

Une première possibilité pour impliquer les élèves explicitement dans leur apprentissage est de leur enseigner directement comment nous pensons qu'on apprend, en expliquant l'importance des résolutions de problèmes, "source (et d'ailleurs critère) du savoir", en soulignant le rôle des changements de cadres à la fois pour trouver et pour apprendre, en précisant l'efficacité de la mise en oeuvre de méthodes générales.

Une autre voie est précisément l'enseignement de méthodes.
On peut développer un certain nombre d'idées générales, comme l'utilité de changer (de soi-même) de cadres, ou de stratégies, ou de points de vue, ou même de formalisations dans un problème ; on peut aussi expliquer l'efficacité de considérer à certains moments les paramètres comme des variables ; on peut préciser l'intérêt de rechercher les invariants caractérisant la situation du problème cherché.
On peut aussi expliciter des méthodes plus spécifiques aux différents champs conceptuels (géométrie(13), analyse ...).
Cependant le moment le plus propice à un tel enseignement (par rapport à l'exposiiton des contenus proprement dits) est problématique(14).

On peut aussi proposer un ensiegnement de type épistémologique, basé sur l'étude de textes de mathématiques anciens par exemple. Cela permet sans doute une meilleure représentation de la nature des mathématiques et des activités des mathématiciens.

Ceci dit, nous ne pensons pas qu'il y a nécessairement "transfert" de connaissances, en l'occurrence de métaconnaissances, suite à un enseignement direct, pas plus qu'en mathématiques d'ailleurs. Il nous parait insuffisant de proposer seulement de tels enseignements.

Nous proposons aussi de mettre en oeuvre des situations impliquant un changement du contrat didactique explicite dans la classe (bien entendu cela suppose un enseignant jouant le jeu à fond).

Les situations de débat scientifique ou de travail en petits groupes, expérimentées à Grenoble (par Legrand et son équipe)[15] et à Paris[16] sont ainsi porteuses en elles-mêmes d'un changement de contrat par rapport à l'acquisition des connaissances. Il y a une implication effective des étudiants par rapport au texte du savoir dans le premier cas, par rapport à la résolution de problèmes dans le second cas.

Cependant, là encore s'il y a changement potentiel de représentations des élèves, on ne peut pas être sûr qu'il se fera tout seul, sans intervention explicite de l'enseignant sur ce sujet.

C'est pourquoi il nous est apparu que le plus propice pour nous assurer à la fois du changement souhaité des représentations métacognitives des étudiants et de l'établissement d'un contrat modifié est de travailler de manière dialectique sur les deux leviers.

Il s'agit de mettre les étudiants dans des situations les responsabilisant par rapport à la construction de leurs connaissances et d'institutionnaliser par un enseignement de type métamathématique adapté certaines des métaconnaissances mises en oeuvre pendant le travail. En retour les situations permettent de faire fructifier l'enseignement en question.

Par exemple, pour l'apprentissage de la géométrie en terminale C, on a conçu un enseignement de méthodes et, simultanément, on fait travailler régulièrement (une fois par semaine) les élèves en petits groupes (de trois à quatre élèves) sur des problèmes qui nécessitent la mise en oeuvre de méthodes et qui sont proposés sans aucune indications[17].

Nous allons préciser sur cet exemple ce que nous entendons par dialectique entre les *deux leviers (nous joignons en annexe le résumé de cet enseignement)*.

D'abord, soulignons que les problèmes proposés aux élèves pendant le travail en petits groupes sont assez difficiles pour nécessiter effectivement, pour être résolus, de choisir une méthode. Par exemple si on demande de démontrer un alignement, sans rien préciser de plus, il faut réfléchir à ce que l'on a à sa disposition pour démontrer un alignement, et on peut penser à des méthodes aussi différentes que l'utilisation du vectoriel ou d'une transformation ou..., puis, selon les données, on peut anticiper que telle méthode semble pouvoir s'appliquer ou non, et seulement alors on se lance.

Or le fait de travailler en groupes nous semble favoriser l'émergence d'un questionnement de type méthodologique, compte-tenu de la difficulté des problèmes proposés, à condition toutefois que ce questionnement ait été l'objet d'une intervention explicite antérieure, qui l'ait rendu en quelque sorte mobilisable. Il ne s'agit pas d'avoir exposé toutes les méthodes pour tous les types de problèmes avant de faire chercher les élèves, il s'agit d'amorcer, par un enseignement de type méthodologique, la mise en fonctionnement par les élèves d'une telle démarche. C'est possible à la fois si cette démarche a été "officiellement" reconnue comme non seulement licite mais encore recommandée, et si on a donné des éléments pour la mener : c'est précisément l'objet de l'enseignement de type méta sur les méthodes.

En retour, au fur et à mesure de l'année, l'expérience, grâce au travail en groupes, de l'efficacité (et des difficultés éventuelles) de la mise en oeuvre du questionnement méthodologique et des méthodes elles-mêmes, permet d'avancer l'enseignement sur les méthodes de façon fructueuse.
C'est ce que nous appelons dialectique entre les deux leviers, et nous pensons que c'est en particulier de cette dialectique que résulte le progrès, (si progrès il y a), par l'intermédiaire de la résolution de problèmes difficiles . Ceci dit, il y aurait bien entendu d'autres facteurs à prendre en compte , en particulier des facteurs liés plus spécifiquement au travail en groupes comme la possibilité d'exploiter les diversités et la communication entre pairs[18].

En guise de conclusion

Un certain nombre de recherches sont en cours où on exploite anciens et nouveaux leviers pour essayer de faire acquérir les mathématiques de manière satisfaisante dans l'EPO.

Cependant, il reste beaucoup à faire : quel est le domaine de validité des hypothèses émises ?

Et de plus, au sein de ce domaine de validité, comment articuler les enseignements de type méta sur l'enseignement des connaissances (à quel moment prennent)ils une efficacité optimale) ?

Et comment choisir le type d'enseignement méta (en fonction des contenus, des élèves...) ? Tous ces enseignements sont-ils équivalents ? Schoenfeld place son cours de "Problem Solving" (enseignement de type méthodologique, travail en groupes) après l'enseignement des connaissances correspondantes, sans que l'on sache si cela doit être toujours ainsi programmé ou si c'est lié à l'enseignement actuel tel qu'il se présente.

De même dans leurs travaux, Legrand et Robert ont toujours expérimenté avec des étudiants en terminale ou en première année d'université, donc avec des étudiants ayant théoriquement déjà un certain bagage de connaissances sur les contenus visés.

De plus, dans tous ces cas, les auteurs constatent un manque, voire un échec des enseignements antérieurs. La question qui se pose alors est la suivante, peut -on agir pour éviter cette phase d'échec ? Les hypothèses sont elles les mêmes avec des étudiants déjà formés de manière satisfaisante et les autres ?

Il y a donc nécessité de nombreuses recherches expérimentales pour répondre à toutes ces questions. Or la mise en place d'enseignements de type différents, accompagnés d' organisations non habituellles, se heurtent à de nombreuses difficultés, peut-être d'autant plus que les formes institutionnelles sont rigides (nombre d'étudiants concernés par une section à l'université par exemple).

Cette mise en place de situations responsabilisant les élèves par rapport à la construction de leurs connaissances nécessite des changements de contrat et chez les élèves (mais nous savons que leurs représentations sont encore relativement labiles) et surtout chez les enseignants ; et là les épistémologies en place peuvent au contraire ne pas être compatibles avec les conceptions sous-jacentes à ces changements, d'autant plus que les difficultés liées aux contraintes institutionnelles peuvent servir d'alibi...

Enfin, les évaluations sont très difficiles : en particulier,comparer des performances suite à des enseignements différents nécessite de trouver des tâches "équidistantes" des enseignements et il peut ne pas y en avoir. On ne peut donc pas compter sur des bilans victorieux pour faire évoluer les épistémologies des enseignants peu convaincus...

Seul le suivi des étudiants, après ce type d'expériences, peut donner des résultats, à condition qu'il n'y ait pas une trop grande dispersion ds élèves.

Cependant, l'introduction de l'informatique-outil pourra peut-être constituer un moyen de transition...

Terminons en rappelant un des enjeux de ces recherches : la formation des futurs enseignants de tous les niveaux. On sait bien à quel point il est difficile de ne pas reproduire dans sa classe ce que l'on a vécu soi-même comme élève et qui correspond à une représentation forte de ce qu'est enseigner : un des moyens de modifier l'enseignement obligatoire est peut-être de modifier l'enseignement (post-obligatoire) de ceux qui vont y enseigner...

Notes et bibliographie

1) noté EPO par la suite, l'enseignement obligatoire étant noté EO.
2) cf. Prost L'enseignement s'est-il démocratisé ? PUF (1986)
3) cf. colloque "Orientations et échecs dans l'enseignement supérieur", Université de Paris-Dauphine, 22 Mai 1987
4) cf. la thèse de J. Robinet Ingénierie didactique de l'élémentaire au Supérieur, Université Paris 7 (1984)
5) cf. A. Robert, cahier de didactique des mathématiques n°18_0, Connaisances des élèves sur les débuts de l'analyse sur R à la fin des études scientifiques secondaires françaises, Irem Paris 7 (1984)
6) cf. A. Robert et F. Boschet, cahier de didactique des mathématiques n°7, l'acquisition des débuts de l'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année, Irem Paris 7 (1984)
7) cf. cahier 18_0 supra note 5)
8) travaux de Artigue et al., Audibert, Berthelot, Cornu, Dreyfus, Dubincski, Legrand,et al. Maury, Robert et al., Robinet, Schoenfeld, Sierpinska, Tall, Vinner en particulier.
9) cf. A. Robert et al.cahiers de didactique des mathématiques n° 7, (voir note 6) et 18_1, analyse d'une section de DEUG A première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage), Irem Paris 7 (1984) et
H. Authier, cahier de didactique des mathématiques n° 31, Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de Deug scientifique selon les séries de bac d'origine, Irem Paris 7 (1986)
10) cf. A. Schoenfeld Mathematical Problem Solving Academic press (1985)
11) R. Douady s'exprime ainsi, dans l'article intitulé **Jeux de cadres et dialectique outil-objet** paru dans la revue de didactique des mathématiques p. 11 vol7.2 :
"Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la permière formulation. L'objectif est, pour le chercheur, de se forger des convictions débouchant sur des conjectures et de poser des jalons permettant d'en organiser des plans de démonstration."
12) cf. M. Artigue, Ingénierie didactique à porpos d'équations différentielles, Congrès PME XI, Montréal (Juillet 1987)
13) cf. article non publié de A. Robert et I. Tenaud Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C (1987)
14) cf. cahier de didactique des mathématiques n°38 Enseigner des méthodes de A. Robert, J. Rogalski et R. Samurçay, Irem Paris 7 (1987)
15) cf. divers textes sur le débat scientifique, par exmeple dan sla référence donnée en note 2)
16) cf. A Robert et I Tenaud, cahier de didactique des mathématiques n°40 Travail en petits groupes, Irem Paris 7 (1987)
17) ibidem
18) ibidem

Annexe (tirée du cahier de didactique

des mathématiques n° 38

Enseigner des méthodes

A. Robert, J. Rogalski, R. Samurçay).

Enseignement de méthodes en géométrie

Quelques éléments de notre enseignement de méthodes en géométrie

Nous avons explicité notre fonctionnement pour résoudre un problème de géométrie. Deux idées se sont imposées à nous : l'importance des changements de point de vue, stratégies ou même cadres (géométrique pur, numérique, vectoriel...) et, a contrario, la nécessité de pouvoir s'engager dans une stratégie précise étant donné un type de problème, quite à en changer justement s'il y a impasse. Rappelons que notre objectif est que les élèves arrivent à concevoir des résolutions de problèmes, les questions de précision des démonstrations ou de rédaction ne faisant pas partie des mêmes préoccupations.

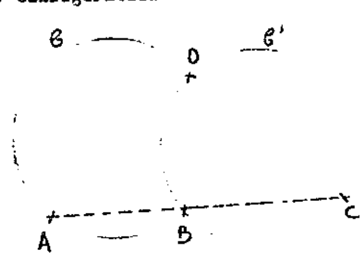
Très schématiquement nous avons repris une classification grossière des types de problèmes de géométrie (en 6 ou 7 types) (cf annexe 2), et élaboré une liste d'outils à notre disposition (annexe 3). Nous avons aussi précisé une liste de "configurations de base" qui sont des configurations très simples, que l'on retrouve très souvent dans les figures (plus complexes) intervenant dans les problèmes et dont on connait bien les propriétés (annexe 4). Enfin, nous avons établi (ou fait établir par les élèves) pour un certain nombre de problèmes des listes d'outils possibles adaptés. Voici une liste, proposée vers la fin de l'année par les élèves d'une classe de terminale C où l'expérience a été faite, des différentes méthodes pour vérifier l'alignement de trois points...

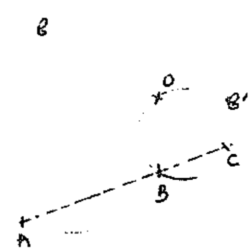
<u>Les quinze démonstrations rencontrées en cours d'année pour démontrer l'alignement de trois points du plan</u> (liste établie à partir de copies d'élèves aux quels la question a été posée à la fin de l'année)

Nous n'indiquons que sommairement les différentes méthodes proposées ; les trois points sont notés A, B, C et sont supposés distincts.

Pour démontrer l'alignement de ces trois points, on peut prouver que

* les coordonnées des trois points vérifient $ax + by + c = 0$ (un repère ayant été choisi)
* les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires
* le déterminant $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est nul
* A est le barycentre de B et C affectés de coefficients convenables
* Si a, b, c représentent les affixes de A, B, C dans $\mathbb{C}$, le rapport $\frac{a-b}{c-d}$ est réel
* l'angle de droite $\widehat{(AB, AC)}$ est l'angle nul
* les trois points sont les projections sur les trois côtés d'un triangle d'un même point du cercle circonscrit au triangle (droite de Simson) ; on pourrait aussi utiliser la droite de Steiner, en démontrant que les trois points sont les symétriques par rapport aux trois côtés d'un triangle d'un même point du cercle circonscrit au triangle, mais les élèves n'y ont pas pensé
* Les trois points appartiennent simultanément à deux plans sécants (cette méthode suppose une utilisation de la géométrie dans l'espace pour résoudre un problème plan ; on l'a rencontrée dans l'exercice 5)
* Les points A, B, C sont les images par une application affine de trois points alignés (ce qui donne plusieurs méthodes en variant les applications !)
* les trois points représentent respectivement le centre d'une homothétie, un point et son image dans cette homothétie
* les trois points représentent les centres de trois homothéties dont l'une est la composée des deux autres
* les trois points sont invariants dans une affinité
* il existe une symétrie glissée f telle que les trois points soient les milieux de trois segments du type $[Mf(M)]$
* il existe une rotation R de centre O, point d'intersection de deux cercles de même rayon $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telle que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par R et que les trois points représentent respectivement le deuxième point d'intersection des cercles, un point du premier cercle et son image par R (cf. configuration de base d'une rotation ci-dessous)





* il existe une similitude de centre O, point d'intersection de deux cercles quelconques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telle que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par S et que les trois points représentent respectivement le deuxième point d'intersection des cercles, un point du premier cercle et son image par S (cf. configuration de base d'une similitude ci-dessus)

Tiré de la brochure Tenaud (1986).

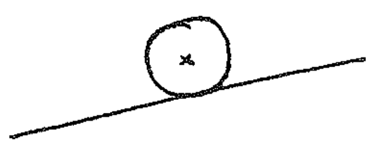
Il n'y a évidemment pas de bijection entre les outils et les types de problèmes, à la fois parce qu'un même problème est souvent soluble de plusieurs façons (analytique ou géométrique par exemple) et parce qu'un même outil sert dans quantité de problèmes différents.

Cependant le repérage du type de problème permet d'avoir des pistes sur les outils à faire fonctionner (par élimination autant que directement). Par exemple, les outils du type "transformations" permettent d'introduire une dynamique dans les problèmes et sont souvent pertinents lorsqu'on adopte le point de vue "ensemble de points".

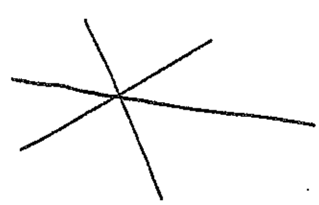
Viennent ensuite, pour chaque cas, l'importance de choisir le bon point de vue, puis en cas d'échec la nécessité de changer consciemment de stratégie, voire même de cadre.

Voici des exemples de "changement de point de vue" en géométrie.

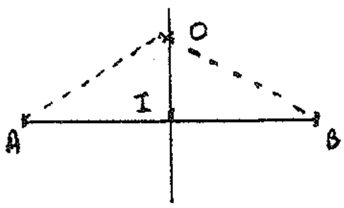
* La figure suivante peut être interprétée comme une droite tangente à un cercle, un cercle tangent à une droite ou une droite et un cercle tangents ; ces trois descriptions ne sont pas équivalentes du point de vue des stratégies éventuelles qu'elles peuvent amorcer.



*Pour interpréter le fait que trois droites sont concourantes, on peut utiliser le fait qu'elles passent par un même point ou qu'il existe un point appartenant à chacune d'elle.

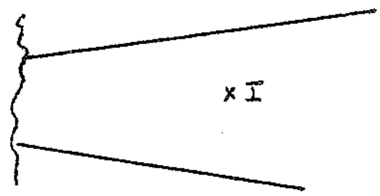


* Un point O est sur la médiatrice d'un segment [AB] s'il vérifie OA = OB mais aussi si la perpendiculaire menée par O à la droite (AB) passe, par I le milieu de [AB].



Nous allons illustrer la méthode (et donc déterminer les méthodes de résolution possibles) par un exemple sur un exercice effectivement proposé aux élèves. Voici le texte :

Soit deux droites qui se coupent en un point O en dehors de la feuille de papier sur laquelle on travaille. Soit I un point de la feuille ; tracer la droite (OI) avec une régle et un compas.



Il s'agit d'un problème de construction : on peut soit reconstituer une configuration (classique) dont la droite cherchée est un des éléments, soit utiliser une transformation pour obtenir une figure semblable à la figure initiale mais dans la feuille ; on peut alors construire l'image de la droite cherchée et revenir par transformation inverse à la droite cherchée. Ces choix font partie (en principe!) des connaissances méthodologiques des élèves.

Si on adopte la première piste, plusieurs points de vue sont encore possibles. Une configuration de base familière, celle du parallèlogramme et de ses diagonales qui se coupent en leur milieu, permet par exemple la reconstitution suivante, au moins dans certains cas (figure 5) : on fait jouer à I le rôle d'un sommet du parallèlogramme et à O le rôle du sommet opposé, les côtés du parallélogramme étant respectivement portés par les deux droites et parallèles à ces droites. Le milieu de la diagonale joignant les sommets portés par les droites données est le point intermédiaire permettant de construire la droite (OI).

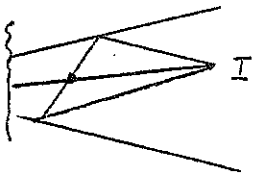


figure 5

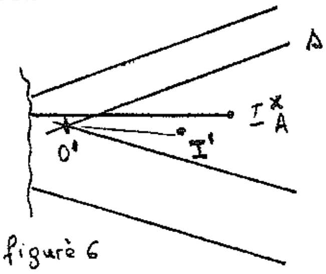


figure 6

Dans le deuxième ordre d'idées (figure 6), il s'agit de choisir une transformation convenable ; on peut choisir une homothétie qui réduit la figure pour être sûr de faire revenir O dans la feuille. Si on prend comme centre d'homothétie un point A quelconque, la droite cherchée sera la parallèle à la droite image (O'I') menée par I.

Annexe 2

<u>Classification des problèmes de géométrie</u> (<u>extraite de la brochure du Groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de l'IREM d'Aix-Marseille Géométrie I</u> , octobre 1983)

les analyses de la géométrie conduisent à retenir les 7 classes de problèmes suivants :

1) Les problèmes d'incidence (alignement et concours, parallélisme, orthogonalité, cocyclicité),

2) les problèmes d'intersection et de contact,

3) Les problèmes de recherche de lieux géométriques,

4) Les problèmes de construction de configurations,

5) Les problèmes de détermination et d'études de transformations ou de classes de transformations vérifiant certaines conditions,

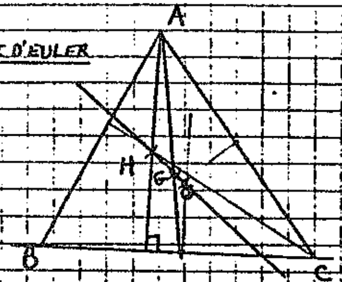
6) Les problèmes de recherche d'invariants associés à une configuration ou à une classe de configurations,

7) Les problèmes de recherche de configurations astreintes à satisfaire des conditions extrémales de mesure.

OUTILS (Plan)

	équidistance
OUTILS	alignement, concours
AFFINES	parallélisme, parallélogr.
et/ou	translations
VECTORIELS	homothéties (+translations)
éventuel-	calcul vectoriel
lement	projections affines
utilisés	symétries affines
dans le plan	Thalès
euclidien	barycentres
	Céva-Ménélaüs (hors progr.)
	affinités
	transformations affines
	similitudes
OUTILS AFFINES	projections orthogonales
EUCLIDIENS	symétries orthogonales
et/ou	angles (Chasles), orthog.
VECTORIELS EU-	rotations
CLIDIENS	isométries
plan orienté	cocyclicité
ou non	produit vectoriel (orient.)
	puissance d'un point/r cercle
OUTILS	mesures angles, trigo.
NUMERIQUES	calculs de distances, aires et volumes (additivité)
ANALYTIQUES	calculs dans repère affine (resp. orthon., orthon. direct)
ALGEBRIQUES	produit scalaire
	fonction de Leibnitz (scalaire)
	nombres complexes
RELATIONS	$\Sigma \hat{A} = \pi$
METRIQUES	Pythagore
ELEMENTAIRES	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos \hat{A}$
des TRIANGLES	théorèmes de la médiane 1 et 2
	$a/\sin \hat{A}=b/\sin \hat{B}=c/\sin \hat{C}=2R=abc/2S$
	$S=(bc\sin \hat{A})/2$
	$S=pr$
et QUADRILATERES	$\Sigma \hat{A} = 2\pi$

DROITE D'EULER



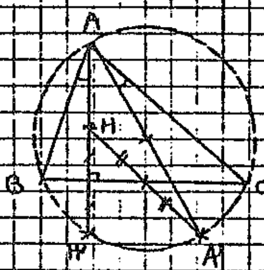
H, G, O alignés

$\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$

• BISSECTRICES

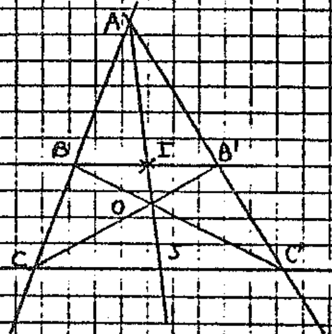
$\frac{IB}{IC} = \frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$

SYMÉTRIQUES DE L'ORTHOCENTRE par rapport aux côtés



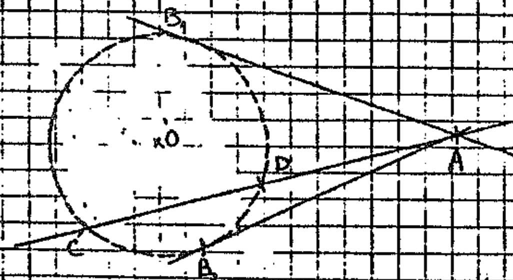
• H' appartient au cercle circonscrit à (ABC)

• A' diamétralement opposé à A symétrique de H par rapport au milieu de [BC]



(BB') // (CC') $\iff$ 3 des 4 points A, I, J, O sont alignés

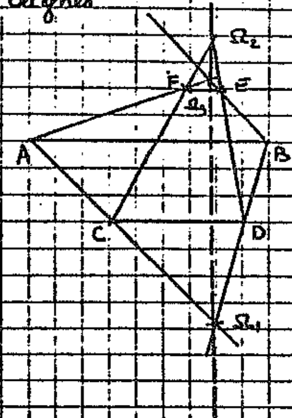
(De plus alors la division (A, I, O, J) est harmonique)



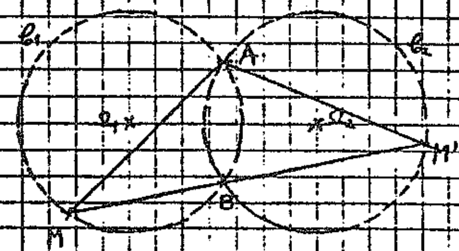
$AB_1 = AB_2$

$AB_1^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} = AO^2 - R^2$

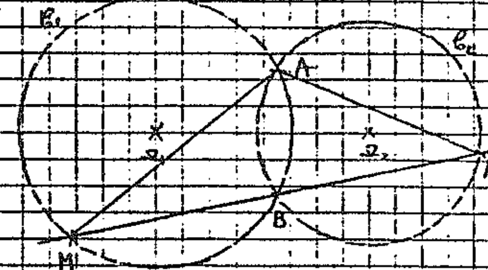
• Les centres de 3 homothéties dont l'une est le produit des 2 autres sont alignés



• Rotations Dans la rotation de centre A envoyant C_1 sur C_2, M a comme image M' tel que M, Ω, M' alignés



• Similitudes



Dans la similitude de centre A envoyant C_1 sur C_2 M a comme image M' tel que M, B, M' alignés