i.r.e.m.
UNIVERSITE PARIS VII

DEVOLUTION D'UN PROBLEME ET CONSTRUCTION D'UNE CONJECTURE
LE CAS DE "LA SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE"

PAR N. BALACHEFF

cahier de didactique des mathematiques
numéro 39
FEVRIER 1987

Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture

Le cas de « la somme des angles d'un triangle »

N. Balacheff
Equipe de didactique
des mathématiques et de l'informatique
Université de Grenoble 1
BP 68 38402 St MARTIN D'HERES CEDEX

I : Introduction

I.1. La construction d'une situation de validation en cinquième

L'objet de l'opération de recherche que nous présentons ici est d'analyser les contraintes liées à la réalisation d'une situation dans laquelle des élèves, qui n'ont pas encore étudié la notion de démonstration, aient à émettre une conjecture et à considérer le problème d'en fournir une preuve. Le cadre général dans lequel nous nous plaçons est celui que fourni la théorie des situations didactique de Brousseau (1986), dont nous avons montré ailleurs (Balacheff 1987) en quoi elle est pertinente pour des recherches sur l'enseignent de la démonstration à ces niveaux scolaires. Au plan épistémologique nous nous appuyons sur les thèses de Lakatos (1976).

Si l'apprentissage de la démonstration peut être, comme pour d'autres notions mathématiques, abordé d'un point de vue constructiviste, la dimension sociale joue dans son cas un rôle important ; notamment pour ce qui est des implications du contrat didactique. C'est plus particulièrement sur ce point que porte l'analyse que nous présentons ici à propos de la construction et de l'observation d'une séquence didactique particulière, en classe de cinquième.

Une première contrainte sur la situation de validation que nous voulons construire, est que les élèves aient effectivement la responsabilité de la formulation de la conjecture. En effet, si elle était énoncée par le professeur, alors elle perdrait aussitôt son véritable caractère de conjecture pour les élèves. Ils ne pourraient la considérer que comme un énoncé vrai et pas seulement fortement plausible. Par ailleurs le problème pourrait devenir celui de la recherche d'une preuve convenue et non celui de

l'établissement de la vérité d'un énoncé. Rappelons de plus que le statut de conjecture pour un énoncé est un statut très fort. Il ne s'agit pas d'une simple spéculation, mais d'un énoncé sur la vérité duquel l'ensemble de la classe s'engage. Il faut donc qu'il ait été formulé par elle et que se forme un consensus sur cette formulation. Cela ne signifie pas pour autant que l'ensemble de la classe ait une position unique sur sa validité, les recherches peuvent porter aussi bien sur des preuves que sur des contre-exemples.

La complexité de la réalisation d'une telle situation tient à l'exigence de socialisation : il s'agit non seulement que les élèves s'approprient le problème individuellement mais encore qu'ils en partagent la signification.

Le problème, s'il ne peut être formulé par le professeur, ne peut alors que provenir de la confrontation des élèves à une situation spécifique de la conjecture visée. Nous considérons avec Mach (1908) que la source d'un problème est "le désaccord entre les pensées et les faits, ou le désaccord des pensées entre elles" (ibid., p. 254). Mais il faut que ce désaccord soit inévitablement remarqué par les élèves, qu'il soit nettement reconnu, pour que le problème puisse être formulé. Pour cela une situation favorable est notamment celle où les élèves disposent de conceptions erronées ou incomplète mais assez stables, associées à des théorèmes-en-acte assez solides pour que la confrontation aux faits ou à d'autres conceptions conduisent effectivement à des questions. Ces conceptions doivent être telles qu'elles permettent des anticipations susceptibles d'être réfutées.

La formulation d'une conjecture peut être d'une grande complexité par les constructions cognitives qu'elle demande, par la reconnaisance des objets de savoir et des relations qu'elle requiert. Nous souhaitons au niveau qui nous intéresse (la classe de cinquième) minimiser la part prise par ces problèmes de formulation, tant au plan de la langue naturelle qu'à celui celui des constructions symboliques.

Sous ces contraintes nous avons retenu le théorème sur l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle. D'une part, l'idée de la possibilité d'un tel invariant ne devrait pas manquer de défier la conception répandue chez les élèves de ce niveau (cf. ci-dessous § II.1.2.), selon laquelle la valeur de cette somme dépend de la « taille » du triangle. Nous concevrons une situation permettant cette confrontation. D'autre part nous pensons que la formulation de la proposition : « la somme (des mesures) des angles d'un triangle est 180° », est d'une faible complexité langagière ; elle devrait être à portée d'élèves de cinquième.

Enfin cette propriété est susceptible de preuves variées par leur contenu et par leur niveau, dont nous présenterons ci-dessous les principaux types. Cette richesse permet d'envisager de parcourir l'ensemble du processus de la construction de la conjecture jusqu'à son établissement comme théorème, quelle que soit par ailleurs la diversité des classes que nous pourrons observer.

I.2. Remarques préalables sur une approche classique

Une autre origine du choix de ce problème est une observation d'une situation de classe portant sur la somme des mesures des angles d'un triangle, rapportée par des étudiants (F. Barrachin et P. Bouchet) de notre cours de didactique des mathématiques en 1983.

Ces étudiants avaient assisté à une leçon suivant un schéma classique, pour le théorème qui nous intéresse, qui consiste à appuyer l'énoncé de la conjecture sur une constatation expérimentale, puis à demander aux élèves d'en admettre la vérité faute de pouvoir en établir la preuve (au niveau concerné de la classe de cinquième). Voici ce qu'ils rapportent :

> "Le professeur fait tracer à chaque élève un triangle, et mesurer les angles à l'aide d'un rapporteur. Il apparaît alors des difficultés de mesure de plusieurs types :
>
> - les enfants ne savent pas placer le zéro du rapporteur ;
> - ils ne comprennent pas pourquoi il faut aligner le rapporteur sur un côté du triangle ;
> - si le triangle est plus petit que le rapporteur ils ne comprennent pas pourquoi il faut prolonger les côtés du triangle pour lire l'angle .
>
> [...] Le professeur fait calculer la somme des angles, et chacun va marquer ses résultats au tableau. Les élèves remarquent d'eux-même que les résultats sont souvent autour de 179°, 180°, 181°, 182°, avec une prédominance de 182°.
>
> Le professeur fait refaire les mesures à ceux qui ont trouvé une somme éloignée de 180° (165°, 228°, ...).
>
> Le cours suivant commence par une reprise du cours précédent : les élèves recommencent le même travail. Cette fois ils trouvent tous une somme des angles comprise entre 178° et 184°, et la moyenne des résultats est de 182° [...] (nous avons entendu plusieurs élèves dire à leurs voisins pendant qu'ils mesuraient les angles, qu'il fallait trouver 182°).
>
> [...] Puis le professeur annonce que la somme des angles d'un triangle est de 180°, d'où de vives réactions de la part des élèves. Ils sont sceptiques et invoquent les arguments suivants : "on ne trouve pas 180° en mesurant", "si le triangle est grand ça devrait faire plus", "l'an prochain on nous dira que c'est 183°". Le premier argument est celui apparu le plus massivement."

Il s'agit là d'une approche très répandue : après quelques mesures, le fait que le résultat devrait être 180° est révélé, accompagné ou non de la présentation d'une

preuve. Le fondement de cette approche tient à une conception simpliste de la relation entre l'action et la pensée qui fait attendre l'émergence naturelle de la conjecture de l'observation de quelques mesures. Mais, comme le montre la séquence d'enseignement rapportée ci-dessus, les choses ne sont pas si simples. Les conceptions des élèves, qui ne sont pas ici suffisamment prises en compte, résistent fortement à leur transformation. L'idée que les grandeurs associées à un triangle sont des fonctions croissantes de sa « taille », constitue, du fait de sa validité pour l'aire et le périmètre, une véritable connaissance qui ici s'érige en obstacle. Par ailleurs, le contrat didactique et avec lui l'idée de l'existence de réponses convenues ou ad hoc, crée un obstacle d'une autre nature en conduisant des élèves à régler leur conduite sur des indices non intrinsèques à la connaissance visée. Le problème se pose alors de la signification du théorème pour les élèves lorsqu'il leur sera donné pour tel, notamment la question de savoir de quelle façon il prendra place parmi leurs connaissances antérieures et le statut de la preuve apportée finalement par l'enseignant.

L'un des objectifs de l'opération de recherche que nous présentons ici est de montrer comment l'analyse didactique éclaire cette complexité et apporte des éléments de réponse quant aux conditions de la construction d'une conjecture dans la classe et à son établissement comme théorème.

II : Conceptions de l'angle et preuves du théorème

II.1. Définitions mathématiques et conceptions de l'angle

II.1.1. Les principales définitions

Une étude historique de la notion d'angle dépasserait le cadre du travail dans lequel nous nous sommes engagé. Notre propos se limite ici à dessiner les contours de cette notion en relevant quelques jalons historiques, nous examinerons ensuite les conceptions des élèves et les preuves possibles du théorème qui nous intéresse.

Nous laissons délibérément de côté les définitions algébriques et les considérations sur les mesures des angles, de même que les notions d'angle orienté ou d'angle de vecteur; en quelque sorte nous nous limitons à la géométrie plane élémentaire. De même nous avons laissé de côté la discussion sur la confusion que l'on peut parfois rencontrer entre les notions d'angle et de mesure d'angle.

Nous distinguons quatre types principaux de définitions, nous siturons les définitions modernes de l'angle en terme de classe d'équivalence relativement à ces types :

- l'angle, **inclinaison d'une droite sur une autre**

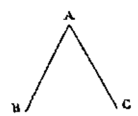
C'est la définition classique des *Eléments d'Euclide* ; on en trouve diverses formulations dans les multiples éditions des "Eléments", nous avons choisi de rapporter ici la traduction en français la plus récente due à Kayas (1978, p.1) :

"l'*angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes coplanaires qui se rencontrent sans être colinéaires "

Comme le souligne Smith (1925, p. 277) cette définition exclut les angles $n\pi$. Nous ajouterons qu'elle incite à ne considérer que des angles de mesure inférieure à 180°. La définition des Eléments a été soumise à de nombreuses critiques et a connu diverses reformulations (cf. par exemple à ce propos Carroll 1885, Heath 1926 p.176 sqq).

- l'angle, **figure formée par deux demi-droites**

Smith (ibid.) attribue cette conception à Aristote. En voici par exemple une formulation issue d'une édition tardive des éléments de Legendre (1875, p.2) :



(Figure 1)

"La figure formée par deux droites AB et AC, qui se coupent, s'appelle angle. Le point A est le sommet de l'angle ; les lignes AB et AC en sont les côtés"

Cet énoncé assez imprécis rend bien compte du type de définition qui dominera dans l'enseignement avant la première guerre mondiale (Berdonneau 1981, p.215 sqq). En voici une formulation plus précise, classiquement rapportée, due à Hilbert (1899, p.21) :

"**Définition**. Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan α, issues d'un point O et appartenant à des droites différentes. L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un *angle* ; nous le désignons par (h, k) ou par (k, h).
Les demi-droites h et k sont les *côtés* de l'angle et le point O est le *sommet* ".

A la suite de cela Hilbert note que "cette définition exclut les angles plats et concaves" (ibid.), puis il introduit les notions d'intérieur et d'extérieur d'un angle.

Cette conception réapparaît récemment sous la définition de l'angle adoptée en classe de troisième lors de la réforme des programmes de 1970, l'*angle géométrique* (par opposition à l'angle du sens commun) étant défini comme une classe de couples

isométriques de demi-droites de même origine (Berdonneau op. cit.).

- l'angle, **région du plan**

Nous proposons de distinguer deux types différents de définition rattachées à cette conception. Un type que nous qualifions de dynamique, comme la définition de Henrici que rapporte Carroll (1885, p.74) :

"The part of a pencil of half-rays, described by a half-ray turning about its end point from one position to another is called an angle" ;

et un type statique comme la définition de Bertrand de Genève (1812) que rapporte Fourrey (1938, p.44) :

"on appelle angle la partie du plan limitée par deux droites partant d'un même point"

Cette conception de l'angle connaît son appogée avec l'introduction dans l'enseignement des "Mathématiques Modernes" de la notion de *secteur angulaire*. L'angle étant alors défini comme une classe de secteurs superposables.

- l'angle, **rotation**

Bien qu'elle aussi très ancienne, Heath (1926, p.177) suggère Carpus d'Antioche comme l'un de ses précurseurs, cette définition ne s'imposera pas véritablement dans l'enseignement. Au moment du débat moderniste sur le renouvellement de l'enseignement des mathématiques, elle est défendue par certains mathématiciens. Notamment, Choquet (1967, p.97) après avoir envisagé les différentes conceptions de l'angle, propose ...

d' "identifi[er] les angles aux rotations autour d'un point O ; on montr[e] ensuite que le choix de O n'importe pas"

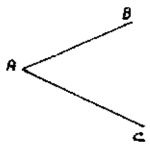
Et pourtant Heath (donc dès le début de ce siècle) note : "it is remarkable however that nearly all of the text-book wich give definitions different from those in group 2 [angle comme rotation] add to them something pointing to a connexion between an angle and rotation : a striking indication that the essential nature of an angle is closely connected with rotation" (op. cit. p.179)

Ce que Papy (1967, p.289) exprime dans un raccourcit saisissant par :

"ANGLE=ROTATION
qui a perdu son CENTRE !"

II.1.2. Une notion difficile

"La notion d'angle est sans doute celle qui soulève le plus de discussions et de difficultés dans l'enseignement de la géométrie" (Choquet 1967, p.96). Si la reconnaissance de ces difficultés fait l'unanimité, il n'en va pas de même des solutions qui peuvent être apportées, notamment pour ce qui concerne la définition. En atteste par exemple le foisonnement de formulations que l'on peut trouver dans les manuels scolaires en usage depuis le début du siècle qui sont autant de tentatives pour résoudre ce difficile problème d'enseignement (cf. à ce sujet l'étude de Berdonneau 1981, pp. 215-224).



(Figure 2)

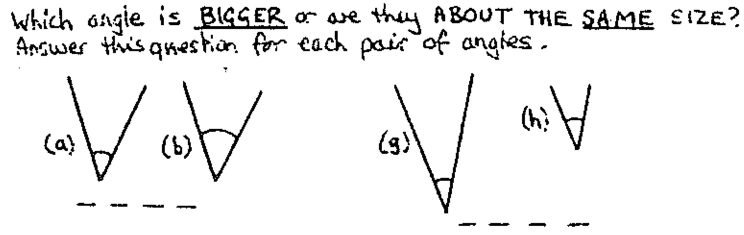
La principale difficulté tient au développement chez les élèves d'une conception de l'angle issue de son identification à la figure qui le représente sur un feuille de papier ou au tableau, comme par exemple la représentation que propose la figure ci-contre. L'angle est alors conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts. Avec une telle conception deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent, apparaissent comme représentant deux angles différents. Cette conception est très résistante et très répandue. On a pu penser qu'elle découlait des définitions mêmes qui était utilisées, comme par exemple la définition de Legendre citée ci-dessus. Pour cette raison certains manuels stigmatisaient l'erreur possible en stipulant que :

> "la grandeur d'un angle dépend uniquement de son ouverture et non de la longueur de ses côtés, qui, théoriquement, doivent être considérés comme illimités" (Thuret, 1934, Précis de Géométrie, Paris : Nathan).

Ce genre de remarque a à peu prés disparu des manuels récents dans lesquels l'angle est dfini comme classe d'équivalence de secteurs angulaires ou de couples de demi-droites d'extrémité commune.

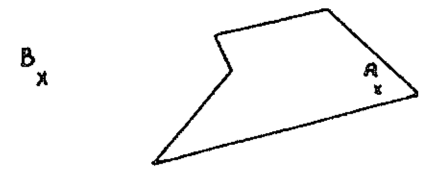
Pourtant cette conception de l'angle chez les élèves de la fin de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire reste présente, c'est un fait bien connu des enseignants. Il semble cependant peu étudié.

Nous prenons ici comme référence l'étude de Close (1982). Cet auteur mentionne les travaux de Giles (1981, p.11) qui atteste de la présence de cette conception chez la moitié de 4881 sujets examinés sur une tâche de classement d'un ensemble d'angles suivant leur taille. Pour sa propre recherche Close a proposé à 87 élèves anglais de 11 à 12 ans, relevant d'un enseignement ordinaire, un questionnaire sur les angles comprenant les items ci-dessous ; elle obtient 53 réponses fausses pour l'item 1, et 49 réponses fausses pour l'item 2 (Close op. cit. p.120, 122).



(Figure 3)

Dans l'usage courant de la langue française, le mot « angle » a pour synonymes « coin » ou « encoignure », il désigne une région relativement bien déterminée. On peut sans trop d'ambiguité fixer un rendez-vous « à l'angle d'une rue », il ne viendra alors pas à l'idée de se placer ailleurs qu'au voisinage du carrefour correspondant. De même en mathématiques, si l'on demande à un élève de montrer un angle d'un polygone, on attendra de lui qu'il désigne un région assez précise ; l'usage conduira à considérer que le point A de la figure ci-dessous se trouve dans un angle du polygone représenté, mais pas le point B.



(Figure 4)

Ainsi l'usage commun, en français, et la signification mathématique du mot « angle » sont en contradiction. A défaut d'une étude analogue à celle de Close que nous venons de rapporter, ce constat nous conduit à faire l'hypothèse que, comme les jeunes anglais, les élèves français de cinquième auront une conception qui privilégie l'identification de l'angle à sa représentation.

II.2. Des preuves du théorème sur la somme des angles d'un triangle

Nous nous appuyons dans cette section sur quelques exemples historiques mais, comme au paragraphe précédent, il ne s'agit pour nous que de s'assurer de quelques points de repère qui apporteront à notre propos le renfort d'exemples de preuves ou de débats effectivement apparus dans les pratiques mathématiques ou dans l'enseignement des mathématiques.

Après avoir décrit les preuves pragmatiques que nous avons pu repérer, nous présenterons des preuves intellectuelles en les regroupant en deux catégories suivant les types de conceptions de l'angle qui les soutendent : inclinaison d'une droite sur une autre ou rotation.

II.2.1. Des preuves pragmatiques

II.2.1.1. La mesure

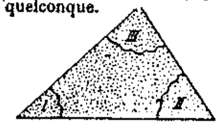
Un premier type de preuve pragmatique, qui relève de l'empirisme naïf, consiste à réaliser les mesures et les calculs utiles pour quelques triangles et à conclure que la propriété observée sur ces quelques cas sera toujours vérifiée. Il nous semble que l'usage d'une telle preuve est facilement disqualifié en mettant en évidence l'inévitable incertitude sur les mesures.

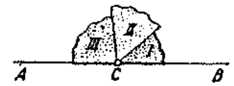
II.2.1.2. Le découpage

Une preuve pragmatique classique consiste à tracer un triangle sur du papier, à le déchirer pour en séparer les trois angles, puis à les associer de façon adjacente comme l'illustre la figure ci-après (Figure 5).

On remarque que cette preuve relève comme la précédente d'un empirisme naïf et est susceptible d'erreurs pratiques tout autant que le recours à la mesure ; les découpages des élèves sont le plus souvent incertains et les assemblages approximatifs. Une autre objection nous semble être qu'il n'est pas évident que d'une part pour les élèves les notions d' « angle » et d' « angles d'un triangle » soient identiques, et que d'autre part ce découpage assure pour eux de façon évidente la conservation des propriétés.

62. — Découpez en papier de couleur un triangle irrégulier quelconque.





Déchirez le coin I du triangle et collez-le sur votre page en plaçant l'un des côtés sur une droite AB. Collez à la suite le coin II puis le coin III. Où finit exactement ce dernier ?

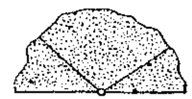
Vous avez ainsi additionné les trois angles du triangle : *Combien de degrés vaut le total ?*

Remarque: Les triangles découpés par les élèves de la classe sont tous différents de forme et de grandeur. Si le travail a été fait avec soin, le résultat sera le même pour tous.

Conclusion:

La somme des angles d'un triangle vaut un demi-tour, soit 180°.

63. —



Découpez une figure de ce genre et faites un triangle qui ait pour angles les trois angles.

Extrait de "Géométrie", L. Grosgurin, Genève, 1944
Ouvrage pour la 5^e primaire

(Figure 5)

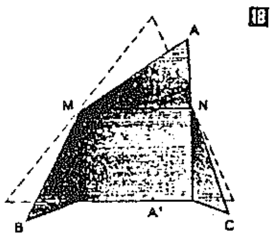
II.2.1.3. Le pliage

Un triangle ayant été tracé sur une feuille de papier, il s'agit de le découper puis de le plier comme l'illustre bien la figure ci-après (Figure 6) : amener le sommet A sur le côté qui lui est opposé en pliant autour des milieux (qui peuvent être déterminés par pliage) des côtés qui lui sont adjacents, puis rabattre les « coins » du trapèze obtenu vers l'intérieur.

II.2.2. L'angle, inclinaison d'une demi-droite sur une autre

II.2.2.1. Les origines

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est réputé pythagoricien. C'est à l'école pythagoricienne que l'on attribue non seulement la démonstration générale mais aussi sa découverte (Caveing 1977, p. 557). Selon Geminus, cité par Caveing : "les anciens étudiaient le théorème des deux angles droits dans chaque espèce



2° PROCÉDÉ : Sur le second triangle ABC, déterminer les milieux M, de AB, N de AC, et plier le triangle autour de MN (FIG. 18). A vient en A' sur BC; plier le triangle BMA' de façon que B vienne en A', et le triangle CNA' de façon que C vienne en A'. Vérifier que les trois angles de ABC sont ainsi construits en A'.
Conclure : « La somme des angles d'un triangle est égale à... » (Cette propriété sera démontrée plus tard.)

Extrait de "Mathématiques 6ᵉ", Collection E. Riche
1969, Paris : Hatier

(Figure 6)

particulière de triangles, d'abord dans l'équilatéral, ensuite dans l'isoscèle, et en dernier lieu dans le triangle scalène, mais les géomètres postérieurs démontraient le théorème général que dans un triangle quelconque les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits" (ibid. p. 558).

Il nous intéresse ici de rapporter la tentative de reconstruction de cette démarche que propose Heath (1956), à la suite de Henkel et Cantor auxquels il se réferre. Ayant rappelé que des triangles équilatéraux ou des hexagones réguliers étaient utilisés pour réaliser des pavages, Heath poursuit :

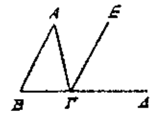
> "it would then be clear that six angles equal to an angle of an equilateral triangle are equal to four right angles, and therefore that the three angles of an equilateral triangle are equal to two right angles [la réalisation de pavages met en évidence que deux moitiés de triangles équilatéraux peuvent être associés pour former un rectangle…] Next it would be inferred, as the result of drawing the diagonal of *any* rectangle and observing the equality of the triangles forming the two halves, that the sum of the angles of *any* right-angle triangle is equal to two right angles, and hence (the two congruent right-angled triangles being then placed so as to form one isoscele triangle) that the same is true of *any isosceles* triangle. Only the last step remained, namely that of observing that *any* triangle could be regarded as the half of a rectangle or simply that any triangle could be divided into two right-angled triangles, whence it would be inferres that in general the sum of the angles of any triangle is equal to two right angles." (ibid.

p.318-9)

Il faut noter que Heath considère lui-même cette reconstruction comme très spéculative.

II.2.2.2. La preuve d'Euclide

La preuve la plus classique est celle que l'on trouve dans les Eléments d'Euclide, liée à la conception de l'angle comme inclinaison d'une droite sur une autre est la preuve suivante (selon Kayas, 1978) :



(Figure 7)

"Soit le triangle $AB\Gamma$; prolongeons son côté $B\Gamma$ jusqu'au point Δ. Je dis que l'on a :

$A\Gamma\Delta = \Gamma AB + AB\Gamma$

et $AB\Gamma + B\Gamma A + \Gamma AB = 2\ dr$

Du point Γ nous menons la droite $\Gamma E // AB$.

La droite $A\Gamma$ étant une sécante des parallèles AB et ΓE, elle forme avec elles des angles alternes-internes égaux : $BA\Gamma = A\Gamma E$

De même la droite $B\Delta$ étant une sécante des parallèles AB et ΓE, les angles correspondants sont égaux : $AB\Gamma = E\Gamma\Delta$.

Ajoutons ces deux égalités membre à membre ; il vient :

$$AB\Gamma + BA\Gamma = A\Gamma\Delta\ ;$$

et en ajoutant le même angle $A\Gamma B$:

$$AB\Gamma + BA\Gamma + A\Gamma B = A\Gamma\Delta + A\Gamma B.$$

Mais

$$A\Gamma\Delta + A\Gamma B = 2\ dr$$

d'où

$$AB\Gamma + BA\Gamma + A\Gamma B = 2\ dr$$

Clairaut (1753), réalisant son projet de montrer comment on parvient à la découverte et au fondement d'un théorème mathématique, donne une explication « intuitive » des origines de la preuve de ce théorème. Il s'agit de l'exposé d'une expérience-mentale qui s'appuie essentiellement sur la conception de l'angle comme inclinaison d'une droite sur une autre (Heath, op. cit. p.321 attribue cette idée à Proclus) :

> "Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B ; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes CA, BC changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit présumer que ce que les angles A & B renferment de degrés doit déterminer le nombre de degré que doit renfermer l'angle C, & qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A & B, si, en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre de degrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.
>
> Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, si les lignes AC, BC, venoient à se rapprocher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il est clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement ; & qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toujours la même, quelle que fut l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE. " (ibid. pp. 63-64)

Clairaut précise ensuite que "cette induction présumée porte avec elle sa démonstration "(ibid.), puis il expose la démonstration classique des Eléments.

Cette preuve d'Euclide est celle que l'on trouve le plus classiquement dans les ouvrages scolaires français avant la réforme des "Mathématiques Modernes". Les deux schéma ci-dessous résument assez clairement pour le lecteur averti, les deux principales variantes que l'on rencontre dans les ouvrages (en fait la figure de droite illustre une preuve généralement attribuée à l'école pythagoricienne ; Heath op. cit. p.320) :

(Figure 8)

Une présentation plus récente de ces preuves consiste à utiliser les transformations géométriques (Figure 9), mais d'un point de vue heuristique il s'agit bien de la preuve classique : les transformations sont là pour « transporter » les angles de façon adjacente autour d'un même sommet. Dans une certaine mesure ces preuves pourraient être comprises dans la filiation des preuves pragmatiques par découpage ou par pliage que nous avons rappelées ci-dessus.

SOMME DES ÉCARTS DES ANGLES GÉOMÉTRIQUE D'UN TRIANGLE

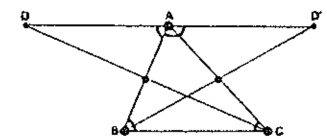


fig 16

Soit un triangle (A, B, C), désignons par S la symétrie centrale par rapport au milieu de (A, B) et S' la symétrie par rapport au milieu de (A, C) soient :

$$D = S(C) \quad \text{et} \quad D' = S'(B)$$

C et D sont donc dans deux demi-plans différents de bord commun (AB) les secteurs angulaires saillants fermés de bords [A, D) et [A, B) pour l'un et [A, B) et [A, C) pour l'autre sont alors adjacents donc

$$E(\widehat{DAB}) + E(\widehat{BAC}) = E(\widehat{DAC}) \quad \text{avec} \quad \widehat{DAB} = \widehat{ABC}$$

car ils ont des représentants isométriques par S.

Mais de la même manière la symétrie centrale S' permet d'obtenir

$$\widehat{CAD'} = \widehat{ACB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD'} = -\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$$

donc D' et D sont dans deux demi-plans distincts de bord commun (AC) les deux secteurs angulaires saillants fermés de côtés [A, D) et [A, C) pour l'un, [A, C) et [A, D') pour l'autre sont donc adjacents et on a :

$$E(\widehat{DAC}) + E(\widehat{CAD'}) = E(\widehat{DAD'}) = k$$

En utilisant la relation $E(\widehat{DAC}) = E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC})$ on obtient finalement :

$$E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC}) + E(\widehat{ACB}) = k$$

THÉORÈME

La somme des écarts angulaires des angles géométriques d'un triangle est égale à l'écart angulaire k d'un angle plat.

Extrait de "Mathématique 3e", Collection Queysanne-Revuz
1972, Paris : Fernand-Nathan

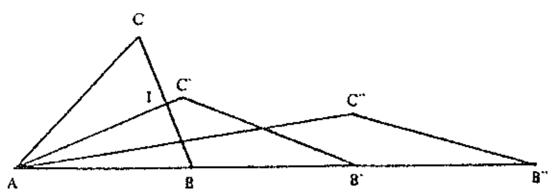
(Figure 9)

II.2.2.3. La critique de Legendre

Nous ne pouvons clôre le paragraphe sur la preuve d'Eclide sans mentionner les critiques dont elle a été l'objet de la part de nombreux mathématiciens au cours de l'histoire. En fait il s'agit d'une critique du fondement essentiel de cette preuve, à savoir le *postulatum* ou cinquième postulat d'Euclide : "si une sécante rencontre deux droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits" (traduction de Kayas, 1978).

Legendre, notamment, s'employa une vingtaine d'année à essayer d'établir ce théorème en se passant du postulat d'Euclide, en reprenant la démonstration dans chacune des douzes éditions de ses éléments (Le Rest 1982, p.144-8). Il est classique de rappeler, à ce sujet, la preuve qu'il donne de la proposition XIX du livre I, "dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits". Nous en donnons ci-dessous les grandes lignes en reprenant la présentation de Le Rest :

"Legendre part d'un triangle ABC avec AB>AC>BC puis il construit le point I de BC tel que CI=IB, le point C' de AI tel que AC'=AB et le point B4 de AB tel que AB'=2AI.



(Figure 10)

Soient A, B, C les angles du triangle ABC et A', B', C' ceux du triangle AC'B'. Legendre montre par les cas d'égalité des triangles que

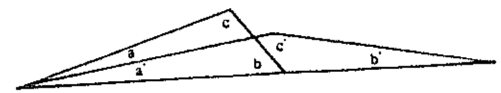
A+B+C=A'+B'+C' et que A'<(A'/2)

Puis il applique la même construction au triangle AC'B' et obtient un triangle AC"B" dont les angles sont notés A", B", C" et vérifient :

A'+B'+C'=A"+B"+C" et A"<(A'/2)

En « *continuant indéfiniment la suite des triangles* » on parvient dit Legendre à un triangle abc dont l'angle a est « *moindre que tout angle donné* ». Si on construit à partir de ce triangle abc le triangle suivant

a'b'c', la somme des angles a'+b' étant égale à l'angle a « *on voit que la somme des trois angles du triangle a'b'c' se réduit pesque au seul angle c'* ».



(Figure 10 bis)

« *Mais on peut concevoir que le triangle a'b'c' varie dans ses angles et ses côtés de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de la même construction et se rapprochent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls* ». A la limite les points a'b'c' sont en ligne droite et la somme des angles se réduit à deux droits. Cette démonstration très astucieuse et très visuelle suppose implicitement que toute droite puisse se prolonger indéfiniment et elle achoppe sur lune supposition où intervient l'infini ..." (ibid. p.145-6).

Bkouche (1984) rapporte que dans la première édition de ses éléments (1794) Legendre donne une preuve qu'il n'utilisera plus par la suite : "on se donne un segment et deux angles, le triangle qui s'en suit est alors connu et le troisième angle est fonction des deux autres (sans être fonctions du segment pour raison d'homogénéité). Pour déterminer cette fonction, on montre que dans un triangle rectangle, la somme des trois angles est de deux droits ; pour un triangle quelconque, sécable par une hauteur en deux triangles, le résultat est immédiat ". Bkouche souligne que la justification par l'analyse de ce qu'un angle est fonction des deux autres peut poser problème, il voit là une raison de l'abandon par Legendre de cette première tentative dans les éditions suivantes. On la retrouve cependant dans la note II à la douzième édition des éléments.

II.2.3. L'angle identifié à la rotation

Une preuve de la propriété de la somme des angles du triangle peut être donnée en s'appuyant sur la conception qui consiste à identifier l'angle avec la rotation. Nous donnons ici la démonstration que propose Choquet (1964) dont nous avons rappelé plus haut la définition. Cette démonstration, qui utilise fortement une formule de Chasles sur les angles (ici orientés), concerne en fait une propriété plus générale des polygones ; le théorème qui nous intéresse en est un corollaire (Figure 11).

59. SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE FERMÉ PLAN

Soit P un polygone fermé plan de n sommets, c'est-à-dire une suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de points de Π, définie à une permutation circulaire près.

On supposera ici que, pour tout i, $a_i \neq a_{i+1}$ (donc aussi $a_n \neq a_1$); on pose alors δ_i = la demi-droite $D(a_i, a_{i+1})$.

On appelle *angle extérieur* de P au sommet a_i l'angle $\widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$; on appelle *angle* de P en a_i l'angle $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}}$.

Proposition 59.1. La somme des angles extérieurs de tout polygone fermé plan est 0.

Démonstration. En effet, d'après la relation de Chasles
$\widehat{\delta_1\delta_2} + \widehat{\delta_2\delta_3} + ... + \widehat{\delta_n\delta_1} = \widehat{\delta_1\delta_1} = 0.$

Corollaire 59.2. La somme des angles de tout polygone fermé plan est 0 ou ϖ suivant que le nombre n de ses sommets est pair ou impair.

En effet soit δ'_{i-1} la demi-droite $D(a_i, a_{i-1})$; on a $\widehat{\delta_{i-1}\delta'_{i-1}} = \varpi$

Donc $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i-1}} = \widehat{\delta'_{-1}\delta_{i-1}} + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i} = \varpi + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$

La somme de ces angles vaut donc $n\varpi + 0 = 0$ ou ϖ suivant que n est pair ou impair (puisque $\varpi + \varpi = 0$).

En particulier la somme des angles d'un triplet (a_1, a_2, a_3) est ϖ; lorsqu'on aura défini la notion d'orientation, on précisera ce résultat en montrant que les trois angles d'un tel triplet ont même orientation.

(Figure 11)

Une preuve de même inspiration heuristique est possible à un niveau plus élémentaire, sous la forme d'une expérience-mentale comme celle exposée dans l'extrait ci-dessous (Figure 12) par le méthodologue genevois Grosgurin (1926).

II.2.4. Remarques sur évidence et intuition

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est souvent pris comme exemple à l'appui de thèses sur les fondements de l'évidence ou sur le caractère intuitif de certaines preuves. En relation avec les conceptions de l'angle que nous avons évoquées plus haut, nous en donnons ci-dessous deux exemples que nous discuterons ensuite dans un dernier paragraphe.

58. Passons, dans cette question, de l'expérimentation pure au raisonnement.

On sait que deux angles opposés par le sommet (fig. 1) sont égaux (N° 37).

Prenons un triangle quelconque (fig. 2). Supposons une aiguille de montre en 1. Je la fais tourner de l'angle A (position 2). Puis je la fais glisser de 2 en 3 et tourner de l'angle B — ou plutôt de son égal, opposé par le sommet (position 4). Enfin je la fais glisser de 4 en 5 et tourner de l'angle C (position 6).

Au départ, en 1, l'aiguille pointait vers midi, à la fin vers six heures. Elle a donc tourné[3], tout en parcourant les trois angles, d'un demi-tour[4].

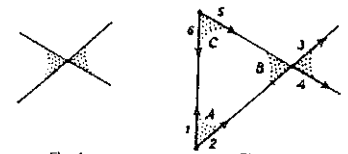


Fig. 1 Fig. 2

[3] Au tableau noir, le maître simule l'aiguille par un crayon. Remarquer que les trois rotations sont de même sens, celui des aiguilles d'une montre.

[4] Cette démonstration, si on en admet le principe, permet de simplifier en certains points les débuts de la géométrie raisonnée. Elle est peut-être — pour l'élève — plus frappante que la démonstration classique au moyen d'une parallèle à un côté du triangle par le sommet opposé, parce qu'elle reprend l'idée de la génération des angles par rotation.

(Figure 12)

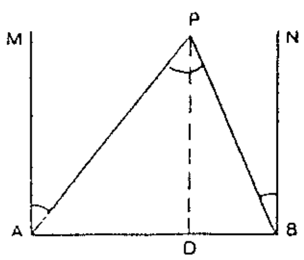
II.2.4.1. E. Fishbein, la vérité intrinsèque

Fishbein (1982) est intéressé au rôle et à la signification de l'**intuition** dans les mathématiques et spécialement dans leur enseignement. « Intuition » ne désigne pas ici l'intuition du sens commun, mais une véritable connaissance du sujet : "an intuition is a *form of knowledge* . It has the rôle of a programme of action -- but it is a cognition [...] An intuition cannot be built by mere verbal explorations nor by blindly practising solving procedures. An intuition can be elaborated only in the frame of practical situations as a result of the personal involvement of the learner in solving genuine problems raised by the practical situations "(ibid. p. 12).

L'intuition au sens de Fishbein apparaît donc comme un concept très voisin des concepts de "modèle implicite" ou "modèle pour l'action" forgés par Brousseau ou celui de "théorème-en-acte" forgé par Vergnaud. Les relations entre ces différents concepts n'ont pas jusqu'ici été étudiées, il serait important que cela soit fait ; quoiqu'il en soit ce n'est pas ici le lieu, nous nous limitons à une analyse de l'usage que Fishbein fait du concept d'intuition dans une réflexion critique sur la notion de preuve ; en particulier pour ce qui concerne la preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle :

"Let us consider again the theorem : « The sum of the angle of a triangle is equal to two right angles ».

Let us now draw a segment AB and the perpendiculars MA and NB to the segment. The angles MAB and NBA are right angles. We can « create » a triangle by « inclining » MA and NB. So, it can be seen that the angle APB « accumulates » what is « lost » by the angle MAB and NBA when « inclining » MA and NB. (Figure 13)

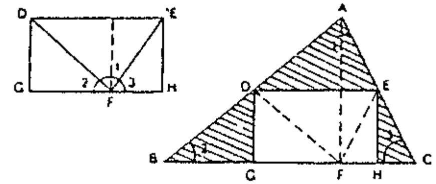


(Figure 13)

Of course this is not mathematical language. It is rather a story about lines and angles, but a story which can catch the spirit, which can impose itself as *intrinsically* true. The same story can be translated into the form of a mathematical proof. Consequently the formal necessity and the intrinsic necessity will coincide.

I expose that procedure to a group of master's students. One of the students presented the following technique which, he said, is more srikingly intuitive and easier to understand. You cut a triangle out of a piece of paper. Let ABC be that triangle. Then you fold the triangle ADE, DBG and EHC so as to make the angles 1, 2 and 3 fit as in the Figure 14. You can see that their sum equals two right angles.

I do not agree with the above technique for the following reason. To « grasp intuitively » does not simply mean to « see ». In the example with the sum of the angles of a triangle what you have to grasp is not merely that, in a particular case, by joining the angles *practicaly* you will get two right angles. The problem is to grasp intuitively *why* that constant effect is *necessarily* concerved, imposed, in the variable condition of a non-determined triangle. Intuitively it must be a problem of compensation. Therefore the matter is not of showing practically that in a particular example the angles fit as the theorem predicted. What we have to « see » is that, in *variable conditions, by the way of*



(Figure 14)

compensation, the sum *must* be conserved. And this I think is better suggested by my procedure because (a) a triangle appears as a particular case in a changeable situation ; (b) the compensation leading to a constant result can directly be grasped ; (c) we are behaviorally unvolved not in merely collecting angles but, rather, in a process of transformation which leaves constant the sum of the triangles ; (d) this representation can be translated directly into a formal proof. The formal proof and the intuitive interpretation are perfectly congruent. " (ibid. pp. 17-18)

II.2.4.2. F. Halbwachs, le transfert de signification

Le propos de Halbwachs (1981) est la recherche de l'articulation entre les "significations et les raisons en tant qu'organisation inférentielle de ces significations" (ibid. p. 199). Il souligne que la raison (R) d'une assertion (A) ne réside pas dans sa preuve déductive ou inductive ; la raison de A n'étant pas sa preuve mais ce qui permet "de la *comprendre* sur le plan des coordinations entre significations. La raison R fonde, non la vérité de A, mais son statut psychologique, en ce sens que la signification de A va être fondée sur la signification de R, et que la découverte de ce type de relation va fonder une intelligibilité nouvelle, et en particulier donner une nouvelle dimension à la nécessité de A" (ibid. p. 200).

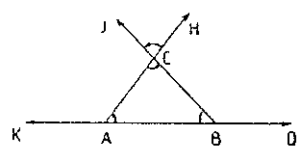
Cette réflexion théorique appliquée à la propriété de la somme des angles d'un triangle, conduit Halbwachs aux critiques et aux réflexions suivantes :

> "La démonstration d'Euclide qui est généralement donnée dans l'enseignement sous telle ou telle variété de forme, est statique et artificielle [...] C'est l'application purement logique de théorèmes antérieurs, dont l'enchaînement est parfaitement convainquant. Mais la *raison d'être* de la propriété échappe, ce qui montre qu'on est dans le domaine structural (enchaînement de composition et de propositions). Pour montrer comment transcender ce point de vue, donnons ce qui

paraît évidemment être la "raison".:

Il faut d'abord rendre le problème dynamique et constructif en précisant (ou modifiant) la notion d'*angle* : un angle peut être conçu comme portion de plan balayée par une demi-droite pivotant autour d'un point fixe, ce qui met au premier plan un *mouvement*. [...]
Ceci dit (voir Fig. 15), on part de la demi-droite ABD, on pivote d'un angle Â autour du point A (counterclockwise) et on vient en ACH. Puis on pivote d'un angle C autour du point C (counterclockwise) et on vient en BCJ. Enfin on pivote d'un angle B autour du point B (counterclockwise) et on vient en BAK. On a donc additionné les trois angles pris dans le même sens, et au total on est passé de la demi-droite ABD à la demi-droite BAK, c'est à dire que l'on arrive sur la droite de départ, mais avec changement de sens, ce qui représente l'angle plat (soit π ou deux droits).

"Raison" du théorème de la somme des angles.



(Figure 15)

Ici contrairement à la démonstration d'Euclide, le passage de la donnée à la conclusion s'est opérée en faisant "fonctionner" la définition dynamique de l'angle [...] Il n'y a plus seulement anchaînement logique de propositions (ou comme on dit "transfert de vérité"), mais en même temps et parallèlement *transfert de signification*. (ibid. p. 201-202)

II.2.4.3. De l'unité des preuves et des conceptions

Les deux « explications » que nous venons de rapporter sont données par chacun des auteurs comme rendant compte de la nature cognitive et épistémologique fondamentale de la propriété démontrée. Comme le dit Halbwachs, de sa *raison d'être*.

Ces deux explications sont tout à fait différentes en ce qu'elles reposent sur deux conceptions différentes de l'angle. Chez Fishbein on retrouve l'explication de Clairaut et l'angle comme inclinaison de demi-droites, chez Halbwachs on trouve l'angle identifié à la rotation. Il serait légitime à ce moment de se poser la question (ou de la poser à chacun des auteurs) de savoir des deux explications laquelle est la plus intrinsèquement liée à la propriété.

En fait on peut imaginer ce que serait la réponse, elle nous semble découler directement des fondements théoriques de chacun de ces deux auteurs : il n'y a pas de preuve intrinsèquement signifiante. Le caractère signifiant tient à la nature des relations entre l'explication (ou la preuve) et les connaissances du sujet. Chacune des deux explications est signifiante, porteuse de raisons, pour chacun des auteurs du fait de leur propre intuition (au sens de Fishbein). Le fondement de chacune de ces explications tient à leur enracinement dans une conception de l'angle qui leur est propre.

En revanche les propositions faites par ces deux auteurs sont pour nous l'expression d'une mise en question fondamentale de la nature des relations entre les conceptions des élèves et les fondements de la preuve euclidienne classique. L'objection ne nous paraît pas être, comme le suggère Halbwachs, que la preuve d'Euclide soit statique, mais que les conceptions (les savoirs tel qu'ils sont appropriés par les élèves) ne permettent pas d'en constituer les raisons au sens d'une *organisation inférentielle des significations*. Nous formulons l'hypothèse que c'est dans ce décalage entre preuve et connaissance que réside l'obstacle à la constitution des raisons, et donc à la compréhension.

Pour ce qui est de la preuve d'Euclide, nous suggèrerions que la construction auxillaire qu'elle demande se « comprend » dès que l'on « comprend » que le théorème sur l'égalité de certains angles déterminés par une sécante sur un couple de parallèles permet une mise en relation des angles ou leur « transport ». Ce même transport est obtenu, par des découpage ou des pliages, pour des preuves pragmatiques.

Ce qui est mis en relief par les critiques de Halbwachs et Fishbein est ce que nous pourrions appeler le décalage entre la valeur déclarative de ce dernier théorème (assertions sur des égalités d'angle) et sa valeur opératoire. Cette valeur opératoire, ou encore cette signification du théorème, n'est à notre sens constructible par les élèves que dans un fonctionnement de la connaissance qui est le plus souvent absent des pratiques scolaires.

Pour ces mêmes raisons on ne peut, comme le fait Fishbein, rejeter une explication sous le seul argument qu'elle ne rend pas compte de la nature intuitive de la propriété (ce qui signifierait que la propriété possède une nature intuitive déterminée ou intrinsèque). Nous suggérons que l'explication en question n'est pas signifiante pour l'auteur, mais qu'elle peut l'être pour l'étudiant qui la propose au regard des significations qu'il attache à la notion d'angle ou à la propriété. Nous avons relevé une preuve analogue dans un manuel chinois (Fig. 16). On peut hasarder l'hypothèse que des pratiques usuelles du pliage de papier en fondent le sens, en prenant appui sur un théorème-en-acte constitué dans la pratique selon lequel le pliage autour du milieu des côtés d'un triangle permet le rabattement d'un sommet sur le troisième côté.

我们按下图做一个实验：把三角形的三个角沿虚线折过去，三个角正好组成一个平角。

由上可知，三角形的内角和是 180°。

(Figure 16)

En revanche nous adhérons à la remarque de Fishbein selon laquelle ce qui constitue le caractère signifiant n'est pas le recours à l'action, qui n'est pas plus intuitive en soi (contrairement semble-t-il à ce que suggère Halbwachs). C'est bien une hypothèse pédagogique de ce genre qui tend à substituer au dogmatisme des preuves intellectuelles celui de preuves pragmatiques tout aussi peu signifiantes au regard des connaissances des élèves.

III : Construction *a priori* de la séquence didactique

III.1. Plan d'ensemble de la séquence

Notre objectif est donc de construire une séquence didactique qui assure la dévolution, aux élèves d'une classe de cinquième, de la responsabilité de construire la conjecture « la somme des angles d'un triangle est 180° » et d'en proposer une preuve.

Nous faisons l'hypothèse que la conception initiale dominante dans la classe sera que « plus un triangle est grand plus la valeur de la somme de ses angles est grande ». C'est cette conception, dont nous pensons qu'elle sera assez résistante, qui servira de point d'appui à la construction de notre séquence : la conjecture résultant de sa mise en contradiction. Par ailleurs il sera nécessaire d'assurer la disqualification du recours aux mesures comme moyens de preuve pragmatique pour permettre l'exigence légitime de preuves intellectuelles.

La dévolution du problème ne signifie pas seulement son appropriation par chaque élève, mais encore qu'il soit reconnu en tant que tel par la classe qui en prend la responsabilité collective. La séquence devra donc assurer cette socialisation.

Enfin, il faudra garantir l'achèvement du processus dans un temps compatible avec le fonctionnement du système didactique. En fait il s'agit là d'une contrainte particulièrement difficile à satisfaire, au plan théorique et pratique, nous l'examinerons à la fin de la présentation de cette séquence. Le problème soulevé est celui de la fermeture de la situation et de l'institutionalisation.

III.2. Les conditions de la genèse de la conjecture

III.2.1. Constituer et stabiliser le milieu

Il s'agit en premier lieu de trouver les conditions dans lesquelles la mesure des angles d'un triangle et la manipulation de ces nombres, pourront être introduits sans qu'il soit nécessaire d'expliciter l'objectif didactique qui est finalement visé.

Au niveau qui nous intéresse, la classe de cinquième (et au moment de cette étude, le deuxième trimestre de l'année scolaire1983-84) la suite des leçons sur les angles fournit un cadre naturel possible.

Des activités de mesure des angles d'un triangle peuvent être introduites aisément, car il est ordinaire que le professeur renouvelle les situations en les complexifiant un peu ou en changeant le contexte. Il n'est donc pas nécessaire de justifier autrement cette introduction. Par ailleurs commencer la séquence par des questions de mesure permet de s'assurer de la maîtrise suffisante, et préalablement nécessaire, des instruments et des techniques correspondantes : usage du rapporteur, technique de mesure des angles d'un triangle (prolongement éventuel des côtés), manipulation des nombres obtenus. Cette « entrée » permettra au professeur de vérifier que les élèves disposent d'une base d'action solide.

Cette situation initiale est définie pour les élèves de la façon suivante :

- *l'enseignant demande que chaque élève trace un triangle, qu'il en mesure les*

angles, puis qu'il fasse la somme des résultats obtenus ;
- l'enseignant justifie cette activité en expliquant qu'il s'agit de poursuivre l'étude de l'usage du rapporteur et de la mesure des angles ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultat obtenus. Il demande un commentaire aux élèves.

A ce moment tous les résultats proposés par les élèves sont acceptables et doivent être acceptés sans distinction. En effet, il s'agit des résultats de mesures effectivement réalisées et non de donner la « vraie » valeur de la somme des angles d'un triangle. Leur diversité n'a pas de signification particulière dans ce contexte. Elle peut résulter aux yeux des élèves de ce que des triangles différents ont été dessinés, bien que certains élèves soient susceptibles d'évoquer le fait de l'incertitude des mesures.

Le commentaire demandé est très ouvert a priori. Il n'est là en quelque sorte que pour "achever" la première activité ; il serait en effet très difficile de passer sans transition de la réalisation de l'histogramme à l'activité suivante. Ce commentaire peut porter sur la dispertion des valeurs attestées par le graphique, notamment en mentionnant l'intervalle numérique dans lequel elles se trouvent.

Au regard de l'objectif visé, la situation ainsi construite ne constitue pas une situation d'action, sa fonction est de **constituer et stabiliser le milieu** dans lequel le problème va ultérieurement être formulé, elle ne vise pas à mobiliser de conceptions spécifiques de ce problème.

III.2.2. Connaître la somme des angles d'un triangle

A la suite de cette première activité, il est nécessaire de différencier ce qui tient à l'incertitude des mesures, de ce qui est expliqué par les conceptions erronées des élèves dans la variété des résulats obtenus. Pour cela il faut que toute la classe soit confrontée à la mesure des angles d'un même triangle, et que puisse être engagées les conceptions sur la relation entre la taille d'un triangle et la somme des mesures de ses angles.

Ceci est l'objet de la deuxième activité définie pour les élèves de la façon suivante :
- l'enseignant remet à chaque élève une copie d'un même triangle ;
- il demande à chaque élève de formuler ***un pari*** *sur la somme des mesures des angles de ce triangle et de l'inscrire sur une feuille de papier qui sera récoltée ;*
- l'enseignant demande ensuite que chaque élève mesure les angles du triangle donné puis qu'il calcule la somme des nombres obtenus ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultat obtenus ;

- pour chaque élève les résultats sont confrontés aux paris, un commentaire est demandé à l'élève ;
- l'enseignant demande des commentaires sur l'histogramme à la classe.

Le triangle proposé est assez grand, et « quelconque », pour favoriser l'engagement des conceptions attendues. En effet, le premier triangle dessiné par les élèves occupe rarement plus de la moitié de leur page.

Pour décider de leur pari les élèves peuvent recourir à une évaluation perceptive de la mesure des angles (qu'ils ont parfois pu pratiquer en classe, notamment pour la reconnaissance des angles de 45° ou 90°), et à la comparaison du triangle qui leur est proposé avec leur triangle initial. C'est de cette dernière procédure que nous pensons que seront issus les paris sur des nombres très sensiblement plus grands que ceux obtenus au cours de la première activité.

Le commentaire demandé à chaque élève sur la comparaison de son pari au résultat obtenu, a pour but de porter à son attention le décalage éventuel entre ces deux nombres.

La situation ainsi réalisée a cette fois les caractéristiques d'une **situation d'action** : elle permet la mobilisation des conceptions qui interviendront comme modèle d'action ou de décision dans l'étude à venir. Aucune question de validation n'est encore soulevée : le décalage entre pari et mesure peut légitimement apparaître comme contingent, lié au choix particulier des triangles. Il ne fait pas nécessairement problème.

Les commentaires sur l'histogramme, demandés à la classe, doivent conduire à l'explicitation de l'exigence que tous les élèves aient trouvé la même mesure pour le même triangle. Les différences qui ne manqueront pas d'apparaître seront expliquées par les incertitudes sur les mesures ; incertitudes propres aux instruments ou dues aux pratiques. L'enseignant le souligne.

III.2.3. Une conjecture possible

A ce stade de la séquence, la conjecture sur l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle n'a pas de raisons d'avoir été formulée. Eventuellement présente à l'esprit de quelques élèves, elle n'est sûrement pas partagée par la classe.

Nous avons en revanche réalisé les conditions de sa genèse :
- les conceptions des élèves qui seront à l'origine de la conjecture ont été sollicitées et le milieu dans lequel elle prendra place a été constitué ;
- le fait de l'incertitude des mesures a été reconnue, le problème de la

connaissance de la somme des angles d'un triangle déterminé est donc posé. La disqualification de la mesure comme moyen de connaître cette somme légitimera l'exigence de preuves intellectuelles de la conjecture attendue.

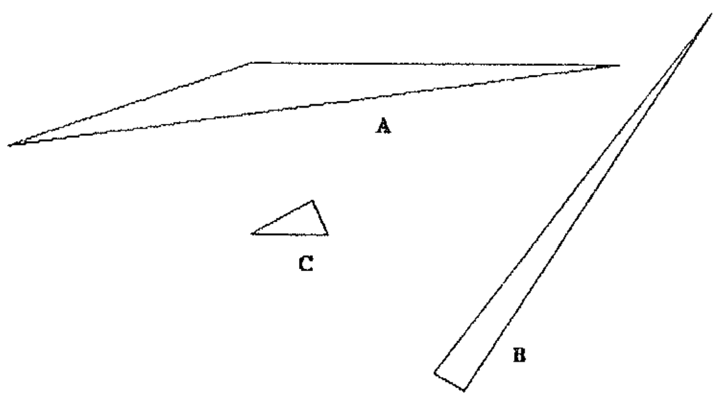
III.3. La dévolution du problème

III.3.1. L'émergence d'un invariant

La phase suivante a pour objectif la formulation du problème de l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle, puis la naissance de la conjecture sur l'égalité de cette somme à 180°. La dévolution de ce problème à la classe signifie non seulement que les élèves se l'approprient individuellement mais aussi qu'il soit placé sous la responsabilité collective. Cette **socialisation** est une condition du débat de preuve que nous souhaitons finalement faire naître dans la communauté de la classe.

Pour amener la question de l'invariance de la somme des angles d'un triangle il est nécessaire que les élèves aient à réaliser ces mesures et ces calculs pour plusieurs triangles. Le nombre d'expériences effectivement réalisables étant très limité, le choix des triangles est donc très important. Par ailleurs ces expériences n'ont de sens que si les élèves engagent effectivement leurs conceptions : la conjecture et le problème de sa preuve naîtront de la confrontation, au niveau des individus et au niveau de la classe, de conceptions suivant lesquelles d'une part la somme des angles d'un triangle est dépendante de la forme du triangle et d'autre part du résultat des mesures qui situeront cette somme au voisinage de 180°.

Pour cela nous avons retenu les trois types de triangles représentés par la figure ci-dessous, dont nous faisons l'hypothèse qu'ils doivent favoriser cette confrontation :



Les triangles **A** et **B** ont été choisis pour le caractère provocateur de la combinaison de la forme des angles et de la taille du triangle. Dans le cas du triangle A ces deux éléments agissent dans le même sens, sollicitant l'idée que la somme des angles devrait être assez grande, pour le triangle B au contraire ces deux caractères agissent de façon contradictoire pouvant rendre problématique l'évaluation de la somme. Le contraste des formes peut être un obstacle à décider que les triangles auraient la même somme d'angles. De plus, les formes de ces triangles sont assez peu habituelles pour que l'on puisse attendre que les paris qui seront demandés, n'aillent pas de soi et conduisent les élèves à des raisonnements non triviaux qui engagent leurs conceptions.

Le triangle **C** est très sensiblement plus petit que les triangles rencontrés jusque là, il devrait susciter des paris très inférieurs à 180°.

Pour favoriser l'explicitation des conceptions et l'émergence des conflits cognitifs nous organisons l'activité des élèves en équipes : chaque équipe, crée sur des critères d'affinité, doit se mettre d'accord sur une évaluation a priori de la somme des angles pour chacun des triangles. L'exigence d'un pari unique pour le groupe réalise les conditions d'une **situation de décision** (ce n'est pas la production d'une preuve commune qui est demandée mais la production d'une décision), la confrontation des points de vue doit amener à la proposition d'explications fondées sur les conceptions de chacun.

La situation est définie pour les élèves, associés en équipes de trois ou quatre (selon les effectifs de la classe), de la façon suivante :

- *l'enseignant remet à chaque équipe une copie de chacun des trois triangles ;*
- *il demande à chaque groupe de formuler un pari sur la somme des mesures des angles pour chacun des triangles puis d'inscrire ce pari sur une feuille de papier qui sera récoltée ;*
- *l'enseignant demande aux équipes de mesurer les angles pour chaque triangle, et de calculer la somme des nombres obtenus ;*
- *à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme pour chaque triangle, les résultat proposés;*
- *pour chaque équipe les résultats sont confrontés aux paris et un commentaire est demandé par l'enseignant*

Le recensement des mesures, avec la réalisation d'un histogramme pour chacun des triangles, est l'occasion pour chacun des groupes d'une confrontation des paris aux résultats des mesures. Le commentaire demandé, comme dans les situations précédentes a pour fonction de favoriser l'explicitation des conceptions et de souligner la contradiction éventuelle entre pari et mesure.

A la suite de cela le professeur demande aux élèves s'ils ont des remarques particulières à formuler après l'examen des trois histogrammes et à la lumière des commentaires qui ont été faits. Une telle question semble-t-il très ouverte est justifiée par l'exigence, éventuellement implicite, que chacun des triangles doit avoir une valeur précise pour la somme des mesures de ses angles qui lui donne du sens.

Le problème de la connaissance de cette valeur doit être posé.

III.3.2. L'explicitation de la conjecture et la dévolution du problème de sa preuve

Après la première activité deux cas peuvent se présenter :

- la valeur 180° est remarquable, mais des élèves continuent à soutenir qu'il est possible de trouver un triangle dont la somme des angles serait différente ;
- la conjecture est exprimée par certains élèves ou groupes d'élèves, et est partagée sans ambiguité par l'ensemble de la classe.

Dans ce dernier cas l'insuffisance déjà reconnue du recours aux instruments pour connaître la somme des mesures des angles d'un triangle doit permettre à l'enseignant de poser le problème de la preuve.

En fait, nous faisons l'hypothèse que la robustesse des conceptions initiales assurera la présence dans la classe de prises de position pour et contre la validité de la proposition. Nous nous attendons donc à nous trouver dans le premier cas. Pour obtenir que 180° soit considérée comme une conjecture, le professeur demande aux élèves qui en doutent…

de chercher à construire un triangle dont la somme des mesures des angles soit très différente de 180°.

A ceux qui soutiennent que cela est impossible il demande d'établir que l'égalité à 180° est nécessaire. Ne prenant pas parti, il laisse la possibilité à la proposition en question de se constituer en conjecture sous la responsabilité de la classe.

Il existe bien sûr un risque pour qu'à la suite d'un tel processus les élèves accueillent le fait que 180° est la somme des angles d'un triangle avec une conviction suffisante pour ne pas ressentir le besoin de preuves. Nous pensons cependant que les tensions qui auront été entretenues entre les deux camps, pour et contre la conjecture, légitime que le professeur insiste pour qu'une preuve soit recherchée. Quoiqu'il en soit ce risque nous paraissait *a priori* bien limité.

Dans les deux situations que nous venons d'envisager les élèves se trouvent dans une **situation de validation** où il leur appartient de produire une (ou des) preuves de la conjecture, ou de la réfuter. Le professeur n'a pas la responsabilité de la validité de la conjecture, sa charge dans le déroulement de la séquence n'a jamais été définie que comme celle de renouveler les situations et d'assurer le maintien d'un objectif de connaissance.

III.4. La fermeture de la situation

III.4.1. Des scénarios possibles

La dévolution du problème signifie le transfert à la classe la responsabilité du vrai. Mais rien ne permet de garantir que les élèves, en particulier du niveau de la classe de cinquième, pourront effectivement construire cette preuve dans un délai compatible avec le fonctionnement du système didactique, ni de quelle nature cette preuve sera finalement (cf. § III.4.2.).

Ainsi le **problème de la fermeture de la situation** est posé.

Il n'est pas possible d'assurer a priori une solution déterminée à ce problème, au moins dans le cadre actuel des connaissances en didactique. En revanche nous pouvons envisager des « Fins » possibles et les discuter au regard de la connaissance construite par les élèves. Une question centrale dans cette discussion est en fait celle de l'institutionnalisation et de son statut cognitif.

Nous envisageons principalement trois types de scénarios possibles, le dernier présentant une alternative :

(i) **les élèves se sont mis d'accord** sur une preuve de la conjecture. Alors il reste au professeur à l'entériner. Cela suppose que la preuve est acceptable de son point de vue. Le contrat didactique initial, après avoir été rompu pour permettre la dévolution du problème, doit être renoué : si la preuve n'est pas acceptable alors le professeur doit en négocier l'abandon ou l'amendement ;

(ii) **les élèves ne sont pas parvenus à un accord**, alors le professeur doit intervenir pour reconnaître les preuves acceptables et rejeter les autres. Il y aura nécessairement une négociation, éventuellement dans deux directions : d'une part pour faire accepter la réfutation des preuves fausses (et en tirer les conséquences), d'autre part pour faire accepter que des preuves différentes soient reconnues ;

(iii) **les élèves ne parviennent pas à une solution**, alors l'enseignant doit aménager une issue. Pour cela deux possibilités s'offrent à lui :

- soit il propose une preuve de la conjecture. Il faudra pour que cette preuve soit acceptable par la classe qu'elle prenne en compte les conceptions de la notion d'angle que les élèves auront attestées et les directions de recherche qu'ils auront adoptées. De même, le niveau de la preuve devra être compatible avec celui auquel les élèves se seront éventuellement situés dans leurs tentatives : preuve expériencementale, exemple générique, ou inférences classiques de la géométrie plane. Cet enracinement dans leurs efforts de résolution du problème est une condition pour que la preuve proposée puisse être acceptée : la dévolution du problème a pour contre-partie implicite que la solution du problème soit «raisonnablement » à portée de la classe.

- soit il propose d'accepter la conjecture pour vraie , laissant ouvert le problème de sa preuve. On semble retrouver là la position classique parfois adoptée dans les classes : « vous montrerez plus tard que … cette année, on admettra … ». Cependant ici la situation est radicalement différente de ce qu'elle est usuellement dans la mesure où l'assertion en question n'a pas seulement été constatée ou entendue par les élèves, elle a été construite comme une conjecture, mise en question, problématisée. Son caractère de vérité potentielle a été mis en débat. C'est la production d'une preuve après un effort de résolution qui est repoussé à plus tard. La proposition faite par l'enseignant prend une valeur pratique (la recherche doit avoir une fin dans un délai acceptable) et non de principe (comme affirmation que « les élèves ne peuvent pas comprendre »).

Nous pensons que cette dernière option pourra le plus souvent être évitée à moins d'une classe disons, « très faible ». De l'expérience-mentale à la démonstration plusieurs types de preuves sont disponibles, s'appuyant sur des conceptions différentes de la notion d'angle ou sur des significations différentes de la conjecture. Cette palette de preuves, que nous envisageons ci-dessous, permet d'aménager des issues en nombre suffisant.

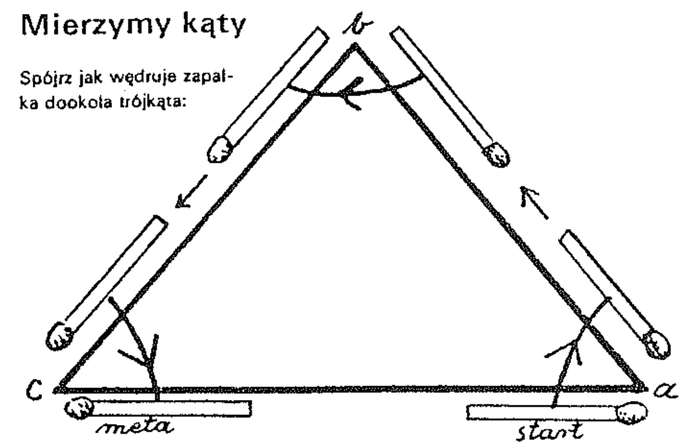
III.4.2. Une palette de preuves

Au moment où nous avons construit cette situation didactique il existait peu d'éléments permettant d'affirmer a priori quelles seraient les preuves constructibles par les élèves. Cette situation était acceptable dans la mesure où en revanche nous nous étions assuré que la palette de ces preuves est assez étendu tant par les types, au sens des stratégies de résolution et et en référence aux diverses conceptions de l'angle, que par les niveaux. Par ailleurs nous avons souligné que la contrainte de constructibilité d'une preuve par les élèves eux-mêmes n'est pas une condition *sine qua non* de « réussite » de la situation que nous proposons. Sans reprendre l'analyse que nous avons déjà présentée des preuves possibles nous allons évoquer ici celles qui pourraient venir en clôture de la situation.

Il est peu plausible que des preuves pragmatiques soient proposées par les élèves : le recours à la mesure est disqualifié par la construction de la séquence ; quant au découpage et au pliage ils sont étrangers aux pratiques usuelles de la classe. L'expérience cruciale ne nous apparaît pas une forme adaptée à la preuve du théorème qui nous intéresse. Eventuellement elle peut être utilisée pour écarter la conjecture selon laquelle il serait possible de construire un triangle dont la somme des angles soit très éloignée de 180°.

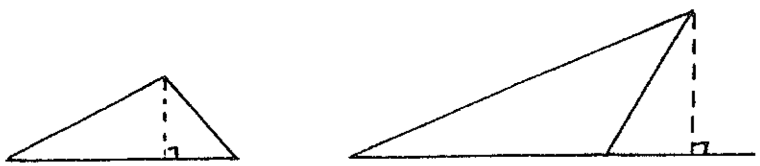
Il nous semble aussi peu probable, au niveau de la classe de cinquième, que des preuves « euclidiennes » ou s'appuyant sur l'angle comme rotation soient proposées par

les élèves. Par contre de telles preuves pourraient être fournies par l'enseignant, à un niveau convenable, si elles sont compatibles avec les conceptions de l'angle attestées par les élèves et en fonction des types de recherches qu'ils auront engagées. Pour les preuves euclidiennes on connaît les présentations classiques, pour les preuves relevant de l'angle comme rotation on peut suggérer une expérience mentale du type de celle proposée par Grosgurin (§ II.2.3.), ou la version ci-dessous tirée d'un manuel polonais



(Figure 18)

Pour ce qui est des preuves intellectuelles que les élèves pourraient produire eux-mêmes on peut penser à celles qui s'appuient sur le postulat qu'un triangle rectangle est la « moitié » d'un rectangle. La source de cette preuve, d'un point de vue heuristique, est l'idée de rechercher un lien avec le fait acquis que la somme des angles d'un rectangle est 4 fois 90°, soit 360°. Tout triangle peut ensuite être considéré comme « décomposable » en triangles rectangles en traçant l'une de ses hauteurs ; il est possible que les élèves considèrent les deux cas d'une hauteur intérieure au triangle et d'une hauteur extérieure (Figure 19).



(Figure 19)

IV : Analyse et mise en oeuvre expérimentales

IV.1. Remarques préliminaires

Le problème de la mise en oeuvre d'une recherche expérimentale se heurte, en didactique, à plusieurs obstacles qui viennent s'ajouter aux contraintes spécifiques de l'objet d'étude.

Nous ne nous étendrons pas longuement sur ces aspects de notre recherche, mais il convient d'en faire mention ici dans la mesure où ils ont pu conditionner notre accès à l'observation, et partant sa conception même.

Il n'existe pas au niveau du collège, d'observatoire ou de véritable laboratoire permettant l'observation didactique, un lieu qui permette la mise en oeuvre de dispositifs expérimentaux parfois importants et le recueil de données. Un tel lieu existe pour l'Ecole Elémentaire dans le cadre de l'école J. Michelet à Talence, associé à l'IREM de Bordeaux, cet outil exceptionnel pour la recherche expérimentale en didactique est le produit de la volonté courageuse d'un chercheur : Guy Brousseau. Ailleurs, la possibilité d'expériences repose essentiellement sur la collaboration généreuse d'enseignants, d'élèves et de chefs d'établissement attentifs et intéressés au développement de nos travaux.

Cette situation précaire a des conséquences matérielles évidentes, mais aussi et de façon plus cachée, elle a des conséquences au plan théorique. Il n'est pas toujours possible que l'enseignant soit totalement associé au projet de recherche ; ce qui constituerait un fonctionnement normal. Se pose alors le problème essentiel de son introduction aux objectifs et à la problématique de l'expérience, celui de son appropriation des différents aspects de la situation didactique à mettre en oeuvre et de leurs motivation. Ceci ne peut être que le résultat d'une négociation qui engage les conceptions propres à l'enseignant pour ce qui concerne les processus d'apprentissage, le fonctionnement didactique mais aussi l'évaluation de la pertinence du dispositif qui lui est proposé.

La réalisation pratique de l'expérience est sous la responsabilité de l'enseignant, il s'agit là non seulement d'une contrainte déontologique mais encore d'une condition inhérente à l'objet même de la recherche. La recherche expérimentale en didactique n'est donc possible que si le dispositif expérimental utilisé est compatible avec les pratiques professionnelles de l'enseignant et le fonctionnement du système didactique. Le dispositif doit pouvoir prendre sa place dans un processus d'enseignement qui le dépasse, qui est né avant lui et se poursuivra après lui. Par ailleurs il doit prendre une place raisonnable dans le temps.

Dans le cas qui nous occupe la réalisation de l'expérience devait occuper au plus deux séances ordinaires de classe (environ 55 minutes) ; il faut reconnaître que le théorème sur la somme des angles d'un triangle, qui ne figurait pas à ce moment là dans les programmes de cinquième, ne pouvait raisonnablement occuper plus de temps. L'observation a été conduite dans deux collèges de l'agglomération grenobloise, à Domène et à Echirolles, avec des enseignants volontaires. L'ensemble de la séquence a été filmé, il n'y avait pas d'autres observateurs dans la classe que l'opérateur de la caméra. Les analyses que nous présentons ici ont été réalisées à partir de la transcription, que nous avons réalisée, des enregistrements vidéo.

IV.2. Une observation dans une classe ordinaire

Une première observation a eu lieu dans une classe de cinquième « ordinaire » du collège de Domène (prés de Grenoble) en Mars 1983. La classe comportait 25 élèves. Le scénario de la séquence avait été discuté en détail avec le professeur, nous avons observé et filmé deux séances de 50 minutes environ.

IV.2.1. Chronique de la séquence

(D1) L'activité des élèves est introduite en référence aux activités courantes :

Prof (1) : *aujourd'hui on va continuer le travail qu'on a fait jusqu'à présent : les mesures des angles. Voilà ce que je demande : vous allez tracer un triangle, chacun trace un triangle sur son cahier ... puis vous mesurez chacun des angles de ce triangle. Quand vous aurez fini, vous ferez la somme de ces trois mesures. Ensuite je recenserai les résultats.*

Alors que les élèves se sont mis au travail, le professeur les visite. Il complète la consigne de quelques remarques adressées à la classe, dans le but de préciser quelques points de pratique éventuellement relevés en visitant les élèves :

Prof (4) : *vous donnez la mesure en degrés, de chacun des angles*
Prof(9) : *si vous voyez pas très clairement, prolongez les côtés*

Certaines interventions ont pour but de porter à l'attention de la classe des points jugés importants liés aux difficultés de certains élèves. C'est en fait le dialogue commencé avec l'un des élèves qui est rendu public :

« La taille du rapporteur » :

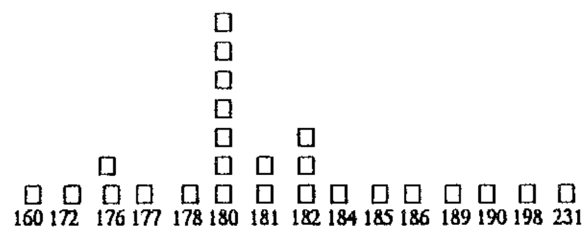
Prof (11) : *si on a pas le même rapporteur on a pas le même écartement ?*
La classe (12) : *si, si ... obligé*
Prof (13) : *on mesure en quelle unité [...] en degré. Est-ce que le degré sur vos ... c'est une question intéressante [à la classe] est-ce que le degré sur le rapporteur de Karelle est le même que le degré sur le rapporteur de Murielle ?*
La classe (14) : *mais bien sûr*
Karelle (15) : *ben, comme y en a un qui est plus grand que l'autre on arrivera pas au même endroit*
Prof (16) : *je comprends pas très bien ce que tu veux dire. S'il y en a un qui est plus grand que l'autre ... ?*
Karelle (17) : *si il y en a un qui mesure ici, il aura pas le même que là*
Prof (18) : *est-ce que c'est la distance entre les deux demi-droite que tu mesures Karelle, quand tu mesures avec un rapporteur ? Est-ce que c'est la longueur que tu mesures ?*
Karelle (19) : *non*
Prof (20): *c'est l'ouverture de l'angle. Est-ce que si je dessine un angle comme ça [au tableau] est-ce qu'il change cet angle lorsque je prolonge les côtés ?*
La classe (21) : *non*
Prof (22) : *c'est toujours le même angle. C'est pas la longueur ici que tu mesures Karelle, c'est l'ouverture de l'angle [il illustre d'un geste au tableau]*

« La désignation des angles » :

Prof (23-24) : *[à X] tu m'écris AB égal 120° [à la classe] si vous avez nommé les sommets du triangle vous pouvez les appeler ... si vous avez appelé les sommets du triangle A, B, C, comment vous pouvez appeler les angles ?*
La classe [avec le professeur] (25) : *A-B-C* ... [Prof : comme les ?] ... *sommets*
Prof (26) : *qu'est-ce qu'on désigne par AB d'habitude ?*
La classe (27) : *les segments*
Prof (28) : *les segments plutôt, alors c'est pas possible de désigner un angle avec cette notation là*

Les interventions auprès des élèves ont pour objectif de les encourager à travailler, ou de repréciser la consigne ; comme par exemple pour cet élève qui a tracé trois angles indépendants sur sa feuille au lieu du triangle demandé.

(D2) La récolte des résultats donne lieu à l'histogramme ci-dessous :



Le professeur accepte sur un ton égal tous les résultats, sans remarques. Cependant les propositions 160° et 231° provoquent de vives réactions dans la classe, alors que les autres résultats ont plutôt été reçus dans l'indifférence. L'élève qui a proposé 231° modifiera son résultat en 180°, ce que le professeur accepte avec suspicion.

Après quoi le professeur invite la classe à des remarques. En général il se contente de répéter les phrases, les montrant en quelque sorte à la classe. Dans quelques cas, il laisse échapper un jugement ou une correction :

- *ça se passe tout entre 150 et 200* (San 84)
  Prof (93) : *c'est une remarque intéressante*

- *il y a beaucoup de 180* (Ele 92)

- *tous les 180, ils ont un angle plat* (Ele 97)
    Prof (98) : *180° correspond à un angle plat*

- *il y a plusieurs triangles, ils ont pas les mêmes angles mais ils ont la même somme*(Ele 99-100)
    Prof (101) : *tu trouves qu'ils ont la même somme ?*
- *dans les 180* (Ele 102)

(D3) La transition vers la phase suivante est réalisée à partir de cette dernière remarque :

> Prof (103) : *parmi les élèves qui ont trouvé 180, est-ce qu'ils avaient tous dessiné le même triangle ?*
> Un élève (104) : *non, p't'être pas, hein*

Le professeur introduit alors l'activité suivante :

> Prof (105) : *Voilà ce que je vais vous demander de faire maintenant. Vous aviez choisi votre triangle et vous aviez mesuré les angles de* **ce** triangle. *Et bien cette fois-ci je vais vous donner à tous le* **même** *triangle. Vous allez recommencer l'exercice, mais avec le même triangle pour tous.*
> Un élève (106) : *pour voir si on trouve le même ?*

A la suite de cette dernière remarque des avis partagés ("oui", "non") sont exprimés, notamment un élève affirme : "*il y a toujours un ou deux millimètres qui s'échappent* "(Ele 117). Le professeur complète ensuite la consigne :

> Prof (124-140) : *vous allez faire un pari avant de commencer ... vous pariez sur la somme des angles de ce triangle ... sur les petites feuilles que je distribue, vous m'inscrivez le pari. Et si possible, si vous avez une raison, vous l'indiquez ... je relève les feuilles avant que vous commenciez les mesures ... vous faites chacun pour vous, pas avec votre voisin si possible ... vous trichez pas, vous donnez les mesures que vous trouvez. Vous trichez pas pour que cela corresponde à vos paris.*

(D4) Au recensement des résultats, chaque mesure est confrontée au pari, et chaque élève est appelé à faire un commentaire. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) suivis du commentaire de l'élève (ou de sa répétition éventuelle par le

professeur lorsque l'élève est inaudible) :

Isa 143	(180, 180)	*tu avais mis à vue d'oeuil*
Mur 150	(180, 180)	*[elle a évalué chaque angle]*
Seb 152	(270, 180)	*l'angle il me paraissait plus grand que quand j'ai mesuré*
Chr 158	(260, 180)	*il te paraissait plus grand que quand tu as mesuré*
San 162	(180, 180)	
Flo 164	(180, 182)	*tu t'es trompée de deux degrés*
San' 166	(250, 181)	*déjà le triangle grand et ensuite un angle qui faisait grand [rires dans la classe]*
Fra 174	(180, 180)	
Yan 174	(180, 180)	*à vue d'oeuil*
Dav 175	(260, 163)	*cet angle t'a influencé*
Jea 185	(220, 180)	*parce que l'angle ... c'est un peu plus grand qu'un angle droit*
Bar 193	(160, 180)	*j'ai vu qu'il y avait deux petits angles alors j'ai dit ça f'ra moins de 180*
Car 197	(180, 180)	
Kar 198	(180, 180)	
Dom 199	(250, 180)	*le triangle il est trop grand ... et puis l'autre il était petit*
Lud 207	(180, 180)	
Kar' 209	(180, 180)	
Phi 213	(180, 180)	*il y a un angle droit et deux aigus*
Phi' 217	(180, 180)	*tu dis toi c'est obligatoirement 180 [agitation dans la classe]*
Val 221	(184, 181)	*les trois angles n'ont pas le même degré*
Eri 222	(440, 180)	*le triangle te paraissait grand [rires dans le classe]*
Abd 225	(185, 180)	
Kar" 227	(180, 180)	
Rac 229	(180, 180)	
Ald 231	(180, 180)	*mais j'croyais que c'était un angle droit et les deux autres c'était 45°*

Au tableau le professeur a représenté l'histogramme des mesures :

163	□
180	□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
181	□□
182	□

Il appelle alors les élèves à des remarques :

- *si on les met ensemble ça fait un angle plat* (Ele 237)

- *163 c'est surprenant* (Ele 240)

- *440 c'est une grosse erreur* (Ele 243)
- *parce qu'un angle ça va jusqu'à 360* (Ele 245)
- *mais la somme !* (Ele 246)
- *si ça dépasserait 360, les angles ils devraient être obtus* (Ele 251)
- *il devrait y avoir au moins un rentrant* (Isa 257)

Ces remarques ne prennent pas en compte que tous les élèves avaient le même triangle. Le professeur intervient pour amener la classe à considérer ce point :

> Prof (258-260) : *quelqu'un avait dit qu'on devrait trouver la même chose. Alors est-ce que tout le monde trouve la même chose ? [« la classe » : non !] Est-ce que ce serait normal qu'on trouve la même chose ou pas ?*

La classe est partagée entre "oui" et "non", quelques élèves expriment des avis plus précis :

- *le petit triangle qui peut être pareil que le grand, mais simplement c'est les angles qu'il faut regarder ; c'est pas la longueur ... ce qui m'a choqué c'est la grandeur* (Dom 263-267)

Prof (272) : *est-ce qu'on devrait absolument trouver tous le même résultat ?*
- *en ayant des mesures bien précises* (Ele 275)
- *ils ont dû mal mettre le rapporteur* (Ele 281)
- *ils ont lu à 1 degré près* (Prof 284)

A la suite de cela, et sous la pression de certains élèves, le professeur demande à David (auteur de la mesure 163°) de recommencer ses mesures : " *regarde un peu puisqu'il y en a qui estiment que tu poses mal ton rapporteur* " (Prof 287). David avouera " *avoir mal lu* " (Dav 298).

(D5) La première séance de classe s'arrête ici, le professeur indique que le travail sera pousuivi lors de la séance suivante, deux jours après.

(D6) La reprise a lieu en annonçant la poursuite de l'activité de mesure des angles d'un triangle :

> Prof (300-5) : *on va continuer le travail concernant la mesure des angles d'un triangle et la somme de ces trois mesures ... cette fois-ci je vais vous en donner trois ... vous aurez les mêmes trois triangles, et vous aurez à mesurer les angles et à faire la somme de ces mesures. Vous aurez aussi, avant, comme la dernière fois, à faire un pari sur la somme des mesures pour chacun des triangles. Et une petite particularité encore, c'est que vous n'allez pas travailler seuls, vous allez travailler par groupes de trois [...] je vous donne d'abord les trois triangles et vous avez à faire un pari, alors ne commencez pas à prendre les rapporteurs tout de suite [...] vous faites un pari pour chaque triangle, pour le groupe, si vous n'êtes pas d'accord vous en discutez*

Le professeur suit l'activité de chaque groupe, il les visite mais sans intervention, notamment dans leurs débats. Chaque groupe donne les résultats de ses mesures, et est confronté aux paris qu'il a effectué.

(D7) Des commentaires sont demandés sur la confrontation des paris aux mesures. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) pour chacun des triangles A, B, C, suivis du commentaire du groupe d'élèves (ou de sa répétition éventuelle par le professeur lorsque ce commentaire est inaudible) :

Group 311	(130, 180) (130, 177) (130, 180) *fallait parier, on a parié ... grande ouverture ... il y en avait des p'tites, alors ça pouvait être égaux aux autres*
Group 335	(200, 180) (180, 180) (180, 180) *cet angle, le grand là qui nous a trompé [...] j'croyais qu'il faisait déjà 180*
Group 349	(175, 184) (130, 177) (30, 180) *le triangle il était p'tit ... alors tu as pensé 30 pour ce triangle*
Group 370	(180, 180) (180, 180) (180, 180)
Group 376	(180, 180) (180, 181) (180, 180)
Group 386	(180, 182) (180, 177) (180, 180)
Group 390	(180, 180) (180, 180) (60, 180) *il était p'tit*
Group 398	(180, 180) (180, 180) (180, 180)

Le professeur a représenté au tableau les histogrammes donnant la répartition des résultats des mesures pour chacun des triangles :

Triangle A :

180 □□□□□□
182 □
184 □

Triangle B :

177 □□□
180 □□□□
181 □

Triangle C :

180 □□□□□□□□

(D8) Le professeur appelle de nouveau les élèves à faire des remarques sur les résultats qui ont été obtenus et qui figurent au tableau :

- *il y en a beaucoup qui ont trouvé 180 pour le C* (Kar 406)
- *ben, tout le monde* (Ele 408)

- *dans tous les triangles qu'on a mesuré c'est tout dans les alentours de 180* (Ele 410) ...
- *170 et 180* (Ele 411)

- *pour le B il y a des différences comme ça parce qu'il est plus petit et qu'il faut prolonger les traits bien droits et...* (Ele 414)
- [mais le professeur fait remarquer que c'est le C qui est le petit triangle]
- *le C est le même que la grande figure, ce sont les mêmes angles* (propos d'élèves répétés par le professeur, 419-421)

Aucune autre remarque ne venant, le professeur relance le débat en s'attachant à favoriser des interventions qui conduiraient à la formulation de la conjecture :

Prof (425) : *et maintenant si je vous donnais un triangle que je choisisse... est-ce que vous pourriez parier sur la somme des mesures des angles de ce triangle*
La classe (426) : *oui, oui*
Prof (427) : *est-ce que quelqu'un saurait me dessiner un triangle dont la somme des angles est très loin de 180°*
La classe (428) : *non, non*
Prof (429) : *par exemple 150°... qui est-ce qui pourrait en dessiner un*
Un élève : *peut-être*

Des élèves invoquent que l'on a trouvé 187°, mais d'autres font remarquer que cela est lié à des erreurs de mesures (Ele 434-5). L'un d'entre eux (Ele 436) exprime que "*si on est bien précis, c'est obligé*" que la mesure soit de 180°. Le professeur exerce une pression un peu plus forte pour favoriser l'apparition de la contreverse dont on peut, dans la confusion des interventions, relever des indices :

Prof (437) : *toi tu dis c'est obligé. C'est obligé, mais, est-ce qu'en voyant les résultats tu es sûr, sûr, sûr que c'est parfaitement 180° ?*
La classe [partagée] : *oui-non*

Devant cette incertitude le professeur rappelle sa demande d'un triangle dont la somme des angles serait de 150° ou à défaut d'une preuve que cette somme est toujours de 180°. Un élève propose alors un triangle dont la somme des angles serait de 4° :

Un élève (450) : *... de 4...*
Prof (451) : *je ne comprends pas de quoi tu parles, tu as tracé un triangle ?*
L'élève (452) : *oui et en tout j'ai 4...*
Prof (453) : *4 degré, la somme des angles 4 degrés, je vais voir*

Un élève (463) : *moi j'ai trouvé 6 degrés*
Prof (464) : *6 degrés, fais voir... oui... mesure moi celui-là là... celui-là... c'est presque un angle...*
Karen (465) : *droit...*
Prof (466) : *droit comme dit Karen... celui-là là... celui-là... ?*
L'élève (467) : *ah ouais...*

Prof (468, il reprend un élève) : *à ton avis un triangle ne peut pas dépasser 180°*
Un élève (469-71) : *un petit peu plus... quand on s'est trompé comme mesure*
Un élève (476-78) : *on peut dessiner n'importe quoi... ça sera égal à... 180... un peu plus un peu moins...*
Un élève (480) : *on peut mettre moins même, on peut faire des triangles qui soient plus petits... je pense*
Un élève (487) : *c'est pas le triangle, c'est les angles qui comptent*

Ludovic propose une explication qu'il a préparée. Il est mal compris, mais il tente de s'expliquer :

- *si on trouve des mesures différentes [de 180°] c'est que... les angles ils sont* *mal mesurés. Les secteurs des angles continuent à l'infini et on trouvera toujours 180° à la somme des angles des triangles* (Lud 500)

La classe bruyante est partagée, des "oui", des "non", alors que la sonnerie marquant la fin de la séquence retentit il règne une certaine confusion. Un élève prétend avoir trouvé un triangle dont la somme des angles serait de 130°.

(D9) Le professeur conclut faisant un bilan de l'activité et en annonçant sa poursuite lors de la prochaine séance (qui ne peut avoir lieu que deux semaines après à cause des vacances de Pâques) :

Prof (511) : *nous on a trouvé des triangles dont la somme des angles étaient entre 177° et 187°. Et bien essayez de me trouver des triangles dont la somme des angles est très loin de ça ; si c'est possible. Si vous n'y arrivez pas, essayez de voir si vous pouvez conclure quelque chose, ou essayez de me montrer quelque chose. Essayez de continuer ce travail*

IV.2.2. Analyse de la séquence

Certainement parce qu'elle fait de façon évidente suite à des activités analogues sur la mesure d'angle, la phase de constitution du milieu (D1) joue bien son rôle. Les élèves s'engagent dans l'activité sans remarques. En revanche les interventions du professeur sont nombreuses. Elles ont pour objectif d'éviter des erreurs ou des difficultés qui sont évaluées comme une gène potentielle pour le développement de la séquence. Elles consistent à exploiter collectivement des observations faites auprès de certains élèves, mais reconnues comme des indices de difficultés dont la mise en évidence et le traitement présentent un intérêt général (remarques sur la taille du rapporteur, la désignation des angles).

Lorsque les résultats sont proposés (D2), le professeur les reçoit effectivement sans commentaires. En fait on peut considérer qu'il les accepte, si l'on apprécie sa neutralité dans le contexte des relations ordinaires dans la classe. On est dans une situation classique, la tâche n'est pas autre chose qu'une tâche technique : le professeur est en charge de ses responsabilités habituelles. Mais lorsque des commentaires sont demandés à la classe, son attitude est moins neutre ; certaines de ses remarques pourraient même constituer des indices pour des activités ultérieures (par exemple : Prof 93). Cela restera cependant sans conséquences comme le montrera la suite de

l'observation.

Le fait notable est que « la classe » va réagir vivement à l'énoncé de certaines valeurs proposées comme somme des angles d'un triangle : 160° et 231°. Pourtant nous constatons ensuite que 7 élèves proposent des valeurs très éloignées de 180° (plus de 200°). Ces réactions apparemment importantes peuvent provenir du groupe des élèves qui ont obtenu un résultat au voisinage de 180° ; ce groupe est majoritaire (il y a 18 élèves entre 176° et 182°) et il peut se considérer comme représentant une normalité.

Un comportement de conformisme, lié à la production d'une « norme » dès les premières mesures récoltées lors de cette première activité, peut expliquer que de 7 résultats égaux à 180° au cours de la première phase, on passe à 18 paris sur 180° lors de la deuxième phase (D3 et D4). Cela ne signifie pas que cette valeur ait pris du sens sur le fond, c'est à dire quant à ce qui concerne la reconnaissance du caractère nécessaire de l'invariant.

Le shéma ci-dessous donne la répartition des paris lors de la deuxième activité :

160 □
180 □□□□□□□□□□□□□□□□□□
184 □
185 □
220 □
250 □□
260 □□
270 □
440 □

Les paris au-delà de 180° ont pour origine soit la prise en compte de la présence d'un angle « grand » dans le triangle proposé, soit la comparaison de la taille de ce triangle au triangle préalablement tracé par les élèves. En revanche tous les paris sur 180° ne signifient pas que cette valeur ait été reconnue comme valeur a priori de la somme des angles d'un triangle (cf. par exemple Isa 143, Yan 174, Ald 231). Dans un seul cas le caractère nécessaire de cette valeur est attesté (Phi' 217) et provoque une agitation dans la classe dont l'origine n'est pas identifiable, mais qui est un indice de ce que « la question des 180° » pourra être l'objet d'un débat.

Une seule valeur est rejetée par des manifestations bruyantes de « la classe », il s'agit de 440°. Ce n'est pas ici la valeur de la somme des angles d'un triangle qui est en jeu, mais la considération de ce qu'est une valeur possible de la mesure d'un angle. Comme le montre l'échange qui suit (Ele 245-257), cette valeur ne pourrait dépasser 360° ; et il en est de même de la somme des angles qui a été définie à partir de la juxtaposition (sans chevauchement) de secteurs angulaires.

Le problème de décider de la valeur de la somme des angles du triangle donné n'est pas soulevé, bien qu'il ait été évoqué *a priori* par un élève comme un but plausible de l'activité (Ele 106). C'est le professeur qui le relance (Prof 272), les quelques remarques faites par les élèves montrent que l'idée de l'incertitude des mesures est présente dans la classe. Mais il n'y a pas d'institutionnalisation de ce fait. La fin imminente de la séance a peut être précipité les choses.

Au terme de cette séance (D5), le professeur indique seulement que le travail sera poursuivi ; mais sans préciser de quel travail il s'agit. Implicitement et évidemment, c'est un travail sur la mesure des angles d'un triangle. Le terrain est prêt, mais la conjecture n'est pas née.

La troisième phase (D6 et D7) montre qu'effectivement la conception erronée qui lie la taille d'un triangle à la valeur de la somme de ses angles, est assez forte pour résister au débat collectif devant des cas de figure assez « troublants ». Le comportement de conformisme éventuellement adopté lors de la phase précédente est fortement ébranlé, on note particulièrement un groupe qui parie 180° pour A et B mais pas pour C jugé trop petit (Groupe 390), ou un autre qui ne parie pas 180° pour A parce qu'il a un angle obtus (Groupe 335).

Dans cette situation la classe se sépare en deux :

- 4 équipes (c'est à dire environ 12 élèves) n'ont pas accédé à la conjecture selon laquelle 180° est la somme des angles d'un triangle. Cependant, pour deux d'entre elles 180° est en quelque sorte une valeur privilégiée (Groupe 335 et 390) ; pour une autre est présente une certaine idée d'invariance alliée à une prise en compte de la taille des triangles, un compromis qui conduit au pari de 130° pour chacun des trois triangles.

- 4 autres équipes semblent acquises à ce que la somme des angles d'un triangle soit 180°.

Le fait que 180° soit le résultat effectivement obtenu dans la majorité des cas (18 mesures sur les 24 effectuées) est un indice du caractère convenu de cette valeur ; il est assez vraisemblable que les élèves ont d'abord trouvé des valeurs au voisinage de 180° puis qu'ils les ont corrigées.

Si la conjecture est bien présente, attestée par plusieurs élèves, elle n'est cependant pas encore identifiée comme telle : le problème de sa preuve n'est pas posé.

Les pressions du professeur (D8) se heurtent à une impasse. Son intervention (Prof 437) vise à obtenir qu'un élève au moins pose le problème de la preuve qu'il pourrait ainsi reprendre et institutionnaliser. En fait l'obstacle est peut-être à ce moment un consensus fort dans la classe sur la validité du résultat en question ; les élèves ne comprennent pas d'emblée ce que l'on attend d'eux. La pression exercée en

réclamant un triangle de 150° a le poids de l'autorité du professeur et par là ébranle les élèves les plus fragiles.

Le succès de cette pression (certains élèves vont chercher des triangles dont la somme des angles soit très éloignée de 180°) légitime que le professeur introduise l'exigence d'une preuve comme élément d'une alternative (fournir un exemple ou une preuve que cela est impossible) ce qui peut préserver la dévolution à la classe de la responsabilité de la formulation de la conjecture et du problème de sa preuve (D9). Ainsi l'autorité du professeur devient-elle un outil pour réussir la dévolution qui impliquerait pourtant essentiellement son abdication (momentanée). Mais nous reviendrons, sur ce point semble-t-il contradictoire, dans la conclusion de cette étude.

La fermeture de la situation n'a pu avoir lieu dans le cadre des deux séances de classe que nous avons observées. Lorsque les élèves sont revenus des vacances de Pâques, ils avaient tous renoncé à construire un triangle dont la somme des angles serait différente de 180°. Le professeur a alors clos la séquence en apportant la « preuve pythagoricienne » (cf. § II.2.2.2., l'étude des angles à côtés parallèles avait été faite par ailleurs), nous ne disposons pas d'éléments suffisants pour évaluer le statut de cette preuve pour les élèves, le problème des effets de l'institutionnalisation reste donc posé.

IV.3. Une observation dans une classe expérimentale

Cette seconde observation a eu lieu au collège d'Echirolles en Janvier 1984, dans une classe où était conduite une recherche visant à renouveler les relations entre professeur et élèves, et entre les élèves eux-mêmes, pour créer « les conditions d'un débat scientifique dans la classe ». Cette tentative originale était conduite dans le cadre des activités du groupe de recherche "Apprentissage de Raisonnement" de l'IREM de Grenoble (Capponi 1986).

La réalisation de la séquence a occupé deux séances consécutives de 50 minutes environ avec une classe de cinquième de 23 élèves.

Le professeur en charge de la classe, membre du groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, a assuré son enseignement avec un autre membre de ce groupe. Les élèves avaient donc ce jour là deux enseignants simultanément. Cette situation n'était pas exceptionnelle, elle correspondait à une forme de travail collectif de ce groupe de recherche à laquelle les élèves étaient habitués. En fait, tout s'est passé comme s'il y avait dans la classe un seul professeur mais deux voix : chacune s'effaçant devant les interventions de l'autre. Les phénomènes spécifiques de notre étude ne nous ont pas paru affectés par cette présence bicéphale, nous avons donc pris la parti de présenter cette observation et son analyse en confondant nos deux collègues en une seule et même personne : le professeur.

En revanche, la démarche pédagogique originale de ce groupe de recherche, par ses références constantes aux règles du "débat scientifique" (Capponi et al. 1986), fait de cette classe un lieu particulier. Notre hypothèse était que la différence avec une « classe ordinaire » porte principalement sur les conditions de la dévolution, ici *a priori* facilitée, mais que les conditions cognitives de la construction de la conjecture ne seraient pas modifiées.

IV.3.1. Chronique de la séquence

(E1) L'activité est introduite d'emblée, sans références particulières aux activités antérieures de la classe ; elle succède de fait à des séances consacrées à l'étude des angles et de leur mesure :

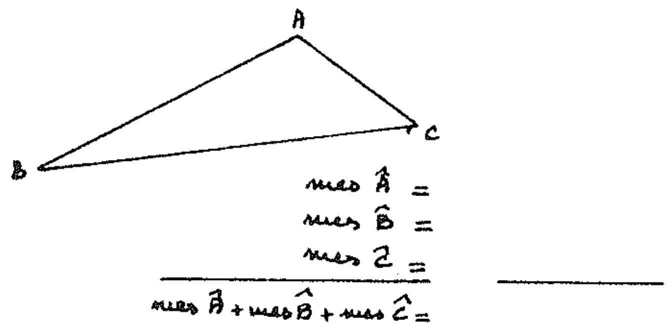
> Prof (1) : *vous allez tracer un triangle sur votre cahier ... très différents les uns des autres [...] la dimension que vous voulez, la forme que vous voulez. Et assez grand, parce que vous allez mesurer les angles du triangle et il faut quand même pas qu'il soit trop petit [...] j'en ai dessiné plusieurs formes [au tableau], mais vous faites un seul triangle [...] Une fois que vous les avez tracés vous appelez les sommets A, B, et C.*

Les élèves réalisent les figures demandées. Mais avec une tendance trop marquée, pour certains, à se conformer au modèle tracé au tableau. le professeur intervient pour que les élèves prennent des distances par rappport à ces exemples :

> (Prof 2-3) : *[j']ai dessiné deux triangles au tableau, il y en a beaucoup qui se croient obligés de dessiner deux triangles [...] vous dessinez un seul triangle mais de la forme que vous voulez. J'ai mis deux formes au tableau mais vous pouvez...*"

puis il complète la consigne :

> Prof (3-11) : *une fois que vous avez fait ça [le dessin] vous appelez A, B, et C ... les trois sommets du triangle ... et puis vous les mesurez et puis à côté de votre triangle vous écrivez les mesures [...] bon, quand vous avez mesuré les trois angles [...] je pense que tout le monde a trouvé ... vous faites la somme des trois mesures*

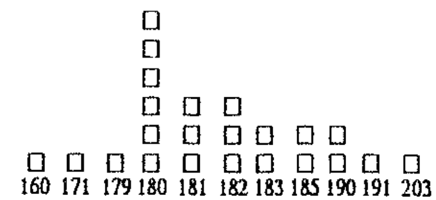


(Figure 20)

Au tableau figure un modèle de présentation (Fig. 20). Certains élèves rencontrent des difficultés dans l'usage du rapporteur, le professeur leur donne des conseils puis fait une intervention à l'intention de la classe :

> Prof (10) : *regardez bien les mesures que vous trouvez. Si elles correspondent bien à des angles aigus ou obtus. On a appris hier à les reconnaître en les regardant [...] alors vous regardez vos mesures.*

(E2) La récolte des résultats donne lieu à l'histogramme ci-dessous :



Le professeur reçoit ces résultats sans commentaires particuliers, sauf pour ce qui concerne deux propositions que, de fait, il refuse :

> Un élève (15) : *moi m'sieur, j'avais 185,5*

Prof (16) : *à 0,5 près, tu sais ... avec les erreurs du ... hein, c'est difficile ... alors ...*

Un élève (18) : *180,5*
Prof (19) : *180,5 tu m'as donné quoi ? 180, qu'est ce que vous en pensez entre 180,5 et 180 ... ou 185,5 et 185*
Un élève (20) : *on arrondit*
Prof (21) : *et on arrondit pourquoi ? Parce que c'est plus simple ou est-ce qu'il y a ...*
Un élève (22) : *pour faire la calcul*
Un élève (23) : *c'est un peu compliqué pour le faire*
Prof (24) : *c'est un peu trop compliqué, c'est vrai que ça nous compliquerait un peu la vie. Tu n'as pas d'autre raisons pour, heu ... arrondir, non ...*

Par ailleurs, deux résultats provoquent des réactions dans la classe : 163° et 203°. Une élève demande :

- *comment elle a trouvé 203 [...] parce qu'il y a presque tout le temps dans les 180* (Ele 27-31)

Un débat s'engage sans que l'élève concerné ait répondu directement à cette interpellation :

- *il a peut être pris un grand triangle* (Ele 32)

- *moi aussi j'ai fait un grand triangle [et obtenu un résultat proche de 180°]* (Ele 35)

- *c'est pas ça, il a dû se tromper parce que si on fait un grand triangle dans le haut automatiquement en bas ça sera plus petit* (Ele 36)
- *lui il dit que le triangle s'il est gros en haut, il doit être petit en bas. Moi j'sais pas si c'est vrai ... Il peut être parfaitement assez grand parce que plus il est grand plus la mesure augmente* (Ele 42)
- *non* (proteste « la classe », 43)
- *tous les triangles qu'on a fait là, ils ont 180 de ... quand on les ajoute [...] 203 c'est trop exagéré* (Ele 45-46)
- *j'pense que c'est faux parce qu'il dit le triangle on l'fait grand ; mais si on l'fait grand en haut, en bas il sera petit* (Ele 49)
- *moi j'pense qu'il a un angle aigu et qu'il a mal mesuré. Quand il a pris [le rapporteur] de l'autre côté, alors au lieu de lui donner, j'sais pas ... 30, ça lui*

donne 150 ... (Ele 53)

Prof (58) : *ça c'est pas impossible, parce que quand je suis passé dans ... pas mal d'entre vous, vous mettiez ... votre zéro, vous l'mettiez sur le 180, du coup ça vous donnais un angle ...*

- *je dis que ce qui a dit ... que le triangle est plus grand, ça fait un plus gros nombre, c'est faux parce que moi j'ai ... il a fait un triangle plus grand que celui de David, et j'trouve plus petit* ... (Ele 59)

Prof (62) : *donc ça aurait pas de relation [i.e. la taille et le résultat]*

(E3) Le professeur fait le bilan du débat pour ensuite passer à l'activité suivante :

Prof (64) : *il y en a parmi vous qui pensent que ça doit être toujours la même chose [...] mais il y en a d'autres qui ne sont pas d'accord ; bon, y en a qui disent s'il a trouvé quelque chose de différent c'est peut-être parce qu'il s'est trompé, et puis y en a d'autres qui disent, ben suivant qu'on fait un triangle plus grand ou plus petit, ben les angles vont changer. Et pour le moment on est pas tous d'accord, on dit pas tous la même chose.*

Un élève demande que le résultat 203° soit vérifié, mais le professeur résiste en invoquant le contrat « du débat scientifique » explicitement établi dans cette classe :

Prof (68) : *je vous ai déjà expliqué que si vous étiez deux ou trois à penser quelque chose et que toute la classe pensait le contraire vous aviez pas à vous écraser en disant : non, non, ça doit être comme les autres. Vous pouvez très bien avoir raison à trois contre les autres. Donc qu'il soit seul à trouver 203 ne prouve pas automatiquement que c'est lui qui s'est trompé.*

Il présente l'activité suivante :

Prof (79 - 81) : *bon alors on va vous donner maintenant à tous le même triangle. On les a photocopié, vous allez refaire la même chose, remesurer les trois angles, et refaire la somme des trois mesures [...] vous essayez à vue de nez ... je demande qu'on mesure pas ... je vous donne un papier sur lequel vous marquez votre nom et votre prénom [...] sur le papier il y a marqué « je pari que la somme des angles d'un triangle vaut : ... », et vous complétez. Vous ne le dites pas tout haut [...] pour ce triangle [...] vous regardez bien le triangle que* *vous avez devant vous... à vue de nez vous essayez de savoir combien font chaque angle et combien vaut la somme.*

(E4) Lors de la récolte des résultats deux histogrammes sont tracés au tableau, l'un pour les paris, l'autre pour le résultat des mesures et de la sommation. Le professeur n'assure pas la confrontation du pari au résultat pour chacun des élèves.

Histogramme des paris :

175 □
180 □□□□□□□□□□□□□□□□□□□
185 □
190 □
275 □
300 □

Cet histogramme ne rend pas compte de certaines nuances exprimées par les élèves sur leur feuillet au moment de leur pari. Ont été assimilés à 180° les paris tels que " *au plus 180°* " (3 fois) ou " *180° en moyenne* " (3 fois), ou encore cette explication pour 175° : " *le premier vaut 35°, le deuxième 90 et le troisième 40* ".

Histogramme des mesures :

178 □
180 □□□□□□□□□
184 □
185 □
190 □□□
262 □

Pour 262° des élèves ont ri, le professeur est alors intervenu pour à nouveau rappeler le contrat dans le cadre duquel la classe travaille :

Prof (85) : *vous savez que l'on a déjà dit plusieurs fois que quand quelqu'un dit quelque chose de bizarre on ne rit pas parce que ce n'est pas intéressant... si ça se trouve c'est elle qui a raison.*

(E5) A ce moment la sonnerie signale la fin de la séance, la séance suivante a lieu après la récréation d'une dizaine de minutes. Au moment de la reprise les élèves

sont assemblés en équipe de trois ou quatre. Au tableau figurent les trois histogrammes : celui de la "première expérience", celui des paris et des mesures de la "deuxième expérience". La consigne est alors donnée, elle n'appelle pas à de simples commentaires sur les résultats présentés :

Prof (86 - 88) : *dans chaque groupe vous discutez silencieusement pour pas qu'on entende... qu'est-ce que vous avez envie de dire à ce sujet là et puis dans deux minutes on fait la mise en commun de ce que vous avez discuté entre vous [...] alors vous discutez doucement en disant, voilà, avec ces expériences on a envi de dire autre chose. Vous vous rappelez on était pas tout à fait d'accord... vous essayez d'en discuter entre vous et si vous êtes d'accord vous essayez de réfléchir à une phrase qui permettra d'expliquer aux autres.*

Les groupes fournissent les phrases suivantes que le professeur inscrit au tableau :

(A) En regardant le tableau on voit que la moyenne est pratiquement 180°
(B) Nous ne sommes pas d'accord car deux pensent 190° et deux pensent 180°
(C) Quel que soit le triangle la somme des trois sommets est toujours 180°
(D) Quel que soit le triangle la somme ne dépasse jamais 180°
(E) Quelle que soit la grandeur du triangle la somme des angles est 180°

Tous les groupes ne fournissent pas une phrase, le professeur ouvre cependant le débat :

Prof (115) : *est-ce qu'il y a des phrases qui sont écrites au tableau sur lesquelles vous êtes pas du tout d'accord... vous pouvez donner une raison pour laquelle vous êtes pas d'accord.*

Des réactions avaient déjà eu lieu lors de la proposition des phrases, à propos de la phrase (A) un élève avait lancé : " *qu'est-ce t'en sais ?* " (Ele 104). Le groupe producteur de (E) rejette la phrase (B) au nom de leur propre énoncé, mais le professeur trouve cela insuffisant et passe la parole à des élèves qui prétendent avoir une preuve :

(Figure 21)

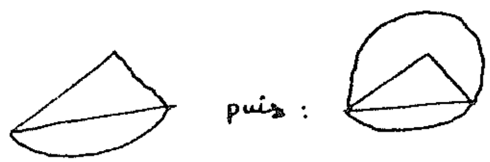
- *oui, j'ai une preuve parce qu'un triangle [...] en fait c'est un demi-tour* (Ele 122)
- *je pense que un triangle là, ça fait 180°, c'est un demi-tour, et si on a aussi celui-là, ça fait un tour complet* (Ele 126, il trace au tableau la figure ci-contre)

«La classe » accepte cette explication. Les auteurs de (B) résistent. Leurs contradicteurs leur répondent :

- *si on arrive pas à les convaincre, eh ben eux... nous convaincre que ça fait 190* (Ele 134)

Une autre tentative d'explication :

- *ça ça fait 180... et ça sera 360... ça forme un cercle* (Ele 138, Fig. 22)



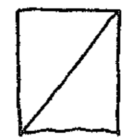
(Figure 22)

Le professeur intervient à nouveau, mais cette fois pour se dégager du débat sur les phrase (B) et (E) sur lesquelles il n'y a pas unanimité :

Prof (139) : *bien, pour le moment il y a donc une proposition de certains qui nous disent c'est 180 et ils nous ont donné une explication, qu'ils ont appelée une preuve : parce que dans un triangle ça fait un demi-tour et si j'fais deux demi-tours ou un demi cercle en dessous ça fait un tour complet.*
Est-ce qu'il y a éventuellement d'autres phrases qui sont au tableau avec lesquelles vous n'êtes pas d'accord... vous pouvez expliquer mieux
La classe (140) : *C*
Prof (141) : *la phrase C qu'est-ce qu'elle dit ?*
Un élève lit le texte de (C) qui figure au tableau.
Prof (143) : *qu'est-ce que tu penses de cette phrase ? Toi tu dis ce n'est pas toujours 180, c'est une moyenne. Alors est-ce que tu as quelque chose pour expliquer ça... est-ce que tu peux convaincre... y a une équipe qui dit en moyenne, c'est vous, y en a qui disent toujours. Toi tu dis, j'suis pas d'accord avec ceux qui mettent c'est toujours. Est-ce que tu peux... quelque chose pour essayer de les convaincre, sur quoi tu t'appuies pour...*

L'élève (144) : *le rapporteur c'est pas très précis. On est pas obligé de trouver 180...*

Un autre élève propose une preuve pour 180, le professeur lui demande de la présenter au tableau :



(Figure 23)

- *si on a un carré [il dessine un rectangle] Un carré, si on compte les angles, 4 de 90° ça fait 360°, c'est ça. Et un triangle 180° [il trace les deux moitiés du rectangle comme ci-contre et les montre] donc un triangle ça fait bien 180°* (Ele 150)

Dans la classe : *ah oui c'est ça qu'on voulais expliquer* (Ele 151)

Cette solution est rédigée par les élèves, nous la recueillerons à la fin de l'observation (Figure 24).

un tour complet = 360°
1 demi-tour = 180°
1 triangle = 180°
Si nous collons 2 triangles cela
fera 1 carré étant donné qu'un
carré a 4 angles droits (90° × 4 =
360°) diviser par deux cela fera
un triangle de 180°.

(Figure 24)

Mais certains élèves ne sont toujours pas d'accord, le professeur les invite à essayer de convaincre leurs camarades, ce à quoi ils répondent :

- *on a trouvé 190 parce qu'on a mesuré* (Ele 159)
Prof (161) : *et à chaque fois tu as trouvé 190… dans le premier triangle et dans le triangle qu'on vous a donné ?*
- *ouais, on a mesuré alors…* (Ele 162)

Le professeur n'insiste pas, il fait le bilan de la situation à ce moment là et propose d'aller plus loin :

Prof (163) : *il y a des arguments qui ont été développés, par exemple : on a fait plusieurs fois la mesure… tombé sur 190, donc il y croit. Et puis il y en a un certain nombre qui sont venus au tableau faire des explications pour convaincre les autres […] On va essayer d'aller un peu plus loin, on va faire encore des expériences pour arriver à se mettre au clair, parce qu'on est pas encore tous tous d'accord pour le moment.*

(E6) Le professeur présente l'activité suivante, les élèves restent réunis en équipes comme dans la phase précédente :

Prof (163 - 8) : *Alors on va distribuer les triangles et à nouveau vous faites pas de mesures […] vous utilisez pas vos rapporteurs […] on vous demande encore de mettre vos noms et puis ensuite, que pensez vous de la somme de chacun de ces triangles. Alors vous allez répondre ce que vous en pensez… quand vous êtes déjà bien d'accord entre vous, alors vous donnez cette réponse […] si vous arrivez pas à vous mettre d'accord, et bien vous mettez : on arrive pas à se mettre d'accord, il y en a deux qui pensent ceci, il y en a deux qui pensent cela […] et vous mesurez pas, hein […] vous pouvez donner des noms aux triangles, les appeler A, B, C pour les différencier.*

(E7) L'élaboration d'un pari et la réalisation des mesures prend un temps assez long. Puis chaque groupe est invité à donner le résultat de ses mesures. Cette fois les résultats sont confrontés aux paris. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) pour chacun des triangles A, B, C, suivis du commentaire du groupe d'élèves (ou de sa répétition éventuelle par le professeur lorsque ce commentaire est inaudible) :

Groupe 169 (190, 190) (180, 180) (165, 165)
je veux dire que… les mesures du gros, du petit et du pointu… elles sont très proches

Groupe 195 (180, 180) (180, 180) (180, 180)
ils font tous 180, peu importe la forme… est-ce que c'est confirmé par vos mesures ? […] ouais
Groupe 180 (180, 180) (180, 180) (180, 180)
ils sont pas d'accord, ils disent que c'est de 190 à 180… c'est la même position que tout à l'heure […] alors vous vous êtes mis d'accord sur 180, vos mesures qu'est-ce qu'elles disent […] elles confirment ce que vous avez dit
Groupe 184 (180, 180) (180, 180) (180, 180)
Groupe 185 (180, 180) (180, 180) (180, 180)

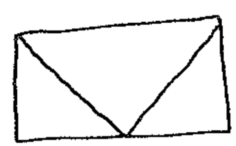
Seuls les résultats des mesures sont portés au tableau, ils sont notés sans que soit tracé un histogramme. Le professeur n'a pas interrogé tous les groupes, deux ne sont pas recensés au tableau ; nous avons retrouvé leur pari sur leur feuillet : pour l'un "*la somme est à 190°. 180°* ", pour l'autre " *ils font 180°* "

Le professeur appelle les élèves à faire des remarques sur les résulats qui ont été obtenus :

- *si on les compare… la E [il s'agit des mesures présentées ci-dessus]… ils disent les triangles ils font 180° et comparé à la A… on pense qu'ils doivent se fier à la grandeur* (Ele 192)

Cette position, reformulée, est soumise à la classe. Celle-ci paraît accepter, le professeur souligne alors qu'il n'y a pas unanimité :

Prof (197) : *il semble qu'il y a ici des avis différents, il y en a qui disent 180, il y en a qui disent 190… est-ce qu'il y en a qui ont trouvé des façons pour convaincre les autres de ce qu'ils pensent ?*
- *c'est 180, c'est toujours la même chose, vous dites c'est 180 : c'est la moitié d'une forme géométrique* (Prof 199)



(Figure 25)

- *m'sieur, un triangle c'est déjà la moitié d'une forme géométrique… pourquoi ils disent c'est la moitié […] alors tu dis, qu'est-ce que ça a à voir de parler de formes géométriques puisqu'un triangle c'est déjà une forme géométrique*
(Ele 200, Prof 203)
Prof (205) : *vous regardez bien si le premier dessin qui est fait au tableau. Si c'est la même chose que ce qu'on a dit tout à l'heure* (puis le

professeur rappelle la preuve précédente)
- *si !... c'est différent parce qu'il y en a trois au lieu d'y en avoir deux*
(Ele 206)
- *celui-là il est plus grand que ces deux là. Si on les met à côté ce sera pareil que ça* (Ele 211)

(E8) Le professeur intervient à nouveau, en fait il va s'agir là d'un long commentaire ou de la reformulation des tentatives de preuve des élèves. La séances se terminera là-dessus :

Prof (214) : *moi je ne sais pas... je vais vous donner un tout petit peu mon avis. Moi je vois une différence entre les deux choses qui sont là, c'est que là il y a un rectangle, il l'a coupé en deux puis il a obtenu un triangle. Est-ce que ce triangle il a pas quelque chose d'un peu particulier ?*
Un élève (215) : *oui m'sieur, il a un angle droit*
Prof (216) : *il a un angle de 90°. Et ici, est-ce qu'il a quelque chose d'un petit peu différent, dans sa méthode... ici, qu'est-ce que ça montre dans ce cas particulier? S'il y a un triangle qui a un angle de 90°, alors on peut toujours fabriquer une sorte de rectangle, et puis ce qui a été fait ici ça a l'air de montrer que ça marche pour ce rectangle là, et il est bien particulier parce qu'il a un angle de 90° et on peut pas faire la même chose ici, alors ici qu'est-ce que ça montre ce que tu viens de faire... écoute ici il y a une proposition au tableau qui est différente de ce qu'il y a là haut, tu essaies de montrer ce que ça montre. Tu peux expliquer mieux...*
[inaudible]
Prof (216) : *là tu reviens à ton idée, c'est la moitié d'une forme géométrique. Tu nous a dit tout à l'heure un triangle lui même c'est une forme géométrique, donc ça nous avance peut-être pas à grand chose...*
[inaudible]
Prof (218) : *c'qui m'semble ici, c'est que son dessin... regardez bien un peu le dessin qui est proposé ici... elle a dessiné un triangle qui était comme celui qu'on vous avait donné... il lui a donc pas imposé d'avoir un angle droit ... elle l'a dessiné comme on vous l'avait donné... et puis elle a fabriqué autour de ça... alors ce qu'elle a envie de dire ici, c'est que là, ces quatre angles là ils sont droits, alors qu'est-ce que tu peux en déduire sur ton triangle de départ. Est-ce que tu peux dire quelque chose sur ton triangle de départ... parce que là, c'coup-ci on a coupé le triangle en trois morceaux*
[inaudible]

(E9) Le professeur clôt ensuite la séquence en laissant ouvert le problème de la décision sur la validité de la conjecture :

Prof (218) : *alors il me semble que là où on en est, pour le moment, personne n'est arrivé vraiment à convaincre les autres... c'est à dire que chacun a apporté ses arguments qui vont dans un sens... on reviendra dessus la prochaine fois.*

IV.3.2. Analyse de la séquence

La première phase (E1) est introduite sans justifications particulières de l'activité mise en place, cela est sûrement acceptable aux yeux des élèves dans la mesure où elle fait suite à des activités de mesure d'angles; le professeur n'a pas à se justifier de ce qui peut apparaître comme un simple changement d'« habillage ». La consigne est présentée en deux temps, d'abord le tracé du triangle, puis la mesure de ses angles et le calcul de la somme de ces nombres. Chacune de ces phases est accompagnée d'interventions qui anticipent des erreurs qui sont jugées a priori non pertinentes au regard des objectifs de la situation et visent à les éviter.

L'une de ces interventions (Prof 1-3) illustre bien ce que l'on appelle classiquement un paradoxe du contrat didactique (Brousseau 1984b, p.46), en fait du processus de dévolution : pour que l'activité « réussisse », il faut que les élèves produisent des triangles quelconques, pour cela la professeur leur montre des exemples (devant libérer les élèves des modèles prototypiques), mais par ailleurs il ne faut pas que les élèves reproduisent ces exemples. De plus cette idée d'un modèle à suivre, et donné par le professeur, est renforcée par la mise en page poposée au tableau (Fig. 20) et à laquelle les élèves devraient se tenir. Cette dernière intervention à pour seul but d'éviter des erreurs contingentes qui seraient dues à une mauvaise gestion des données.

La collecte des résultats (E2) à lieu sans interventions particulières du professeur, ni réactions des élèves ; sauf dans le cas des valeurs extrèmes proposées : 160° et 203°. Cette dernière valeur est discutée. Les élèves s'engagent d'emblée dans un débat sur son acceptation (Ele 32, Ele 42) ou son rejet (Ele 35 et suivants). Les arguments pour le rejet sont de deux types, des arguments sur le fond (Ele 36) ou faisant référence à une normalité qui s'élabore (Ele 45-46). Cela ne signifie pas que 180° soit reconnu comme somme des angles d'un triangle quelconque, mais plutôt que la loi normale qui émerge du tracé de l'histogramme marginalise les résultats extrèmes.

Le professeur fait peu d'interventions, mais elles portent assez nettement sur la validité des assertions (Prof 58 et 62). Si le débat était poursuivi, il pourrait conduire au rejet de la conception erronée (Ele 59), portant ainsi la première phase de cette séquence au-delà de ce que nous avions prévu. Ce risque est reconnu par le professeur qui reprend le contrôle de la situation et intitutionnalise un désaccord qui préserve les débats de validation attendus plus loin. Mais les élèves résistent à cette rupture, et c'est en rappelant les règles de conduite en vigueur dans la classe (Prof 68) que le professeur reprend le contrôle de la situation et qu'il permet le passage à l'activité suivante. On peut penser, dans ce contexte, que du côté des élèves tout se passe comme si des valeurs très différentes de 180° devaient rester plausibles.

La seconde phase (E3) est introduite en insistant sur le caractère individuel de l'activité, par ailleurs le professeur donne une indication un peu lourde sur une stratégie possible pour réaliser le pari sur la somme des angles du triangle, qui consiste à évaluer la valeur de chacun des angles (Prof 79-81). Cette suggestion pourrait occulter la conception erronée dont nous attendions la mobilisation, en effet la confrontation du pari et de la mesure peut alors simplement conduire les élèves à penser à une erreur dans leur évaluation de chacun des angles.

On remarque (E4) que les paris privilégient nettement 180°, ce qui peut être l'indice d'un comportement de conformisme ; quant aux paris différents de 180° leur origine est indéterminée et le reste puisque ces élèves ne seront pas invités à commenter le décalage éventuel entre leur pari et le résultat de leurs mesures. Une réaction amusée de « la classe » à l'énoncé de 262° est rejetée par le professeur qui rappelle que le contrat établi implique le respect de toute production mathématique, sauf à pouvoir la rejeter par des arguments intellectuels.

La mise en place qui suit (E5) est très différente de ce qui avait été prévu dans le scénario initial, mais est conforme aux habitudes de travail collectif de cette classe. Ce travail collectif ne devrait pas modifier sensiblement le déroulement de la séquence. En revanche il n'en va pas de même des commentaires demandés aux élèves conformément à ce qui était prévu à ce moment de la situation. Ces commentaires s'inscrivent ici dans le cadre des règles de fonctionnement "scientifique" en vigueur dans cette classe (comme réalisation du projet du groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, op. cit.). Ils sont compris comme la production de phrases qui devront ensuite être réfutées ou prouvées dans le cadre d'une organisation convenue du débat de validation.

Tous les groupes ne vont pas produire de phrases, cela est une conséquence à la fois de la gestion du temps et de l'activité des élèves, tous doivent être occupés : il est difficile de faire attendre ceux qui sont parvenus assez tôt à une production.

Les élèves ont des difficultés à formuler leurs preuves, mais aussi à accepter ou à retenir pour les examiner effectivement, les arguments qui sont produits. Le professeur prend alors des décisions dans la gestion du débat, se dégageant d'un échange jugé infructueux pour faire place à un autre. Il assure en quelque sorte une

mise à plat des tentatives de preuve ou de réfutation, sans que soient prises des décisions sur leur validité.

Cette seconde phase de la situation n'a en fait pas rempli la fonction qui était attendue :

- des énoncés, de l'ordre de la conjecture dont la construction n'était prévue qu'à l'étape suivante, sont d'emblée discutés, sans que leur statut soit bien clair. Ils peuvent n'être que de simples spéculations ;
- le problème de la connaissance de la somme des angles du triangle examiné n'est pas soulevé. Quant aux considérations sur la précision des mesures, elles ont été écartées par les remarques du professeur au cours de la première phase.

La troisième phase (E6) peut de ce fait avoir perdu une partie de sa fonction, surtout si l'on considère qu'elle vient interrompre intempestivement un débat de preuve qu'elle était justement chargée de susciter. Nous observons (E7) une adoption de fait de la conjecture par l'ensemble de la classe, puisque 5 groupes sur les 7, c'est à dire 17 élèves, font le pari que la somme des angles est 180°, puis « trouvent » 180° comme résultat des mesures et du calcul ; quant aux deux autres groupes il paraissent adopter l'idée que le résultat obtenu doit être au voisinage de 180° (par exemple Groupe 169). Dans ce contexte, où la classe semble avoir atteint un consensus sur la somme des angles d'un triangle, la production de preuves est une réponse aux pressions du professeur qui s'appuie sur le contrat explicitement en vigueur et qui souligne qu'il n'y a pas une stricte unanimité.

Des propositions sont faites mais il n'y a pas véritablement de débat entre les élèves : la responsabilité de la validité de la conjecture n'est pas dévolue à la classe, ou bien la conviction des élèves est trop forte pour qu'ils s'engagent dans une démarche de validation. Les preuves sont maladroitement ou incomplètement formulées, mais il n'y a pas de travail sur cette formulation. Les élèves en sont privés par l'enseignant qui assume cette tâche et finalement vide de son sens l'interaction recherchée. On peut cependant penser que la proposition preuve qui s'appuie sur le découpage du rectangle en deux triangles rectangles emporte l'adhésion de « la classe ». La critique émise par le professeur n'a pas de portée évidente.

Comme dans le cas précédent la fermeture de la situation n'a pu avoir lieu dans le cadre des deux séances de classe que nous avons observées. Lors de la séance de classe suivante (à laquelle nous n'avons pas assisté) le professeur, considérant les propositions de preuves trop peu satisfaisantes, a alors clos la séquence en demandant aux élèves d'admettre la conjecture et remettant à plus tard la production d'une preuve. Il nous a cependant rapporté que les élèves avaient en général trouvé convaincante la preuve consistant en la décomposition d'un rectangle, mais cela ne constitue pas une information assez précise pour conclure quant au statut cognitif de cette institutionnalisation.

IV.4. La confrontation des deux observations

Les observations que nous avons réalisées ont eu lieu dans le contexte de pratiques très différentes : celui d'une classe, disons ordinaire (au sens propre du terme), et celui d'une classe qui est le terrain d'une recherche-action dont l'objectif est l'autonomie intellectuelle des élèves et leur initiation au débat scientifique.

Il nous a fallu négocier la réalisation de l'expérience dans ces deux contextes, c'est à dire la rendre acceptable et lui donner du sens relativement aux pratiques professionnelles des enseignants qui en assuraient la mise en oeuvre. Dans la classe « ordinaire » (la classe D) le principal problème était celui de l'introduction d'un type d'interaction nouveau, tant avec le professeur qu'entre les élèves, dont le point crucial devait être la réussite de la dévolution à la classe du problème de la preuve de la conjecture. Comme cela nous a été fait remarquer par la suite, le caractère de nouveauté d'une telle situation pouvait à lui seul constituer une source d'échec à la mise en oeuvre de notre séquence. En revanche, la seconde classe (la classe E), paraissait *a priori* offrir un contexte plus favorable, puisque les élèves y était systématiquement introduits à la notion de conjecture et au débat de validation, notamment à la nécessité mathématique et sociale des preuves.

Dans les deux classes, l'initialisation de la séquence s'est déroulée de façon analogue ; que le lien avec les activités précédentes de la classe ait été explicité ou non. Les deux enseignants ont eu l'initiative d'interventions qui visent à assurer un fondement pratique solide. Ils contribuent à « constituer et stabiliser le milieu » dans lequel le problème va ultérieurement être construit.

Après la récolte des résultats, les élèves de la classe D font quelques remarques. Cette activité n'avait pour fonction que d'achever, de façon à vrai dire assez artificielle, la première phase. Elle a pu n'apparaître aux yeux des élèves que comme un moment du rite scolaire. En revanche, dans la classe E, s'amorce un débat qui a pour objet de rejeter une mesure qui paraît trop différente des autres. Par là les élèves manifestent qu'ils adhèrent effectivement aux règles de fonctionnement mises en place dans la classe, et que le professeur rappelle justement pour mettre un terme à la discussion (§ IV.3.1., E3). En fait, il veut par là préserver le déroulement de la séquence en évitant une formulation prématurée de la conjecture. On peut remarquer que rien ne s'opposerait à ce que le cas de cette mesure (effectivement grossièrement erronée) soit totalement réglé. En effet, cela aurait seulement pour effet de renforcer un phénomène apparu dans les deux classes et que nous n'avions pas anticipé : la création d'une norme dès la production des premières mesures, « on doit trouver aux environs de 180° » ; les élèves des deux classes manifestent leur amusement lorsque l'on s'en écarte trop. Mais il ne s'agit nullement, pour ce qui concerne « la classe » de la conjecture dont nous

visons la construction. La vérification des résultats extrêmes, et leur correction peut être faite sans risque, si cela est à la demande des élèves.

Ce fait remarquable de **la création d'une norme** dès l'examen des premières mesures est attesté par les manifestations que nous venons de rappeler, mais aussi par le renforcement des paris sur 180° lors de l'activité suivante et plus encore par l'écrasante majorité de 180° comme valeur calculée, aussi bien dans la classe D que dans la classe E. Ce dernier indice est le plus significatif car il implique qu'il y a eu des corrections « vers 180° » de résultats initialement obtenus. Cela ne veut cependant pas dire que les élèves sont acquis à l'idée que la somme des angles d'un triangle quelconque, est 180°. Ainsi dans la classe D, 21 élèves sur les 25 « trouvent » 180° pour le triangle proposé, mais lors de la troisième activité et après une discussion certains d'entre eux se rallient à une valeur différente pour l'un des trois triangles (puisqu'alors de tels paris sont le fait de 12 élèves). Le conformisme à l'origine de ces premières réponse est essentiellement fragile car il ne les fonde pas sur de véritables connaissances, il ne suffira pas à faire face aux situations suivantes où il cèdera la place aux conceptions des élèves qui, bien qu'erronées, constituent au contraire de véritables connaissances.

Au terme de cette deuxième phase les objectifs fixés ont été atteints de façons inégales :

- les commentaires demandés aux élèves ne conduisent pas de façon « naturelle » à expliciter l'exigence que tous aient trouvé le même résultat, même dans la classe où cette question avait été évoquée *a priori* (D3, Ele 106). Elle est soulevée par le professeur dans la classe D pour conduire essentiellement à des remarques sur la précisions des mesures, mais elle ne sera pas évoquée dans la classe E. Dans cette dernière le problème de l'incertitude des mesures a été « réglé » dès la première activité sous l'autorité du professeur. En fait, lorsque les commentaires sont demandés, les élèves des deux classes traitent d'abord un ensemble de nombres sans véritablement le relier à la tâche précise qui a été proposée. Dans la classe E les règles de débat explicitées font obligation aux élèves de produire "une phrase assez précise tendant à cerner « le fait général » observé" (Capponi 1986, p.30), ce qui conduit à occulter l'objet de l'activité proposée : mesurer et calculer la somme des angles d'un triangle déterminé.

- en revanche l'objectif de mobilisation des conceptions, dû à la nécessité d'une décision *a priori* (pour le pari) sur la somme des angles d'un triangle, a été atteint. Cela est attesté dans la classe D où chaque élève est explicitement confronté au décalage éventuel entre son pari et le résultat de son calcul. Dans la classe E, l'examen de l'histogramme des paris montre que des conceptions erronées ont dû être mobilisées, leur présence avait été par ailleurs attestée dès la première phase (§ IV.3.1. E2, Ele 32). Mais cette mobilisation n'a pas le renfort de l'explicitation puisque les élèves ne seront pas individuellement confrontés au décalage éventuel entre leur pari et la mesure qu'ils ont proposée.

La troisième phase atteste de la résistance de la conception qui lie la somme des angles d'un triangle à sa taille. Notamment dans la classe D. Dans la classe E cette résistance semble n'être le fait que d'un groupe d'élève, quoique pour les autres ont ne puisse assurer qu'il ne s'agit pas de la production d'une réponse convenue : 180° est dans cette classe particulièrement mis en valeur et des éléments pour prouver que c'est là la somme des angles de tout triangle ont été apportés. Dans les deux classes cette troisième phase est l'objet d'un travail important de la part du professeur car elle doit conduire à la construction et à la reconnaissance de la conjecture, puis à poser le problème de sa preuve. Mais ces deux classes évoluent d'une façon très différente l'une de l'autre en raison principalement de la nature du contrat didactique et de son évolution plus qu'en raison de l'évolution des élèves sur le terrain des connaissances :

- dans la classe D : le travail du professeur porte sur la construction de la conjecture, pour cela il apporte un soutien marqué aux élèves qui n'ont pas la conviction que 180° est la valeur de la somme des angles d'un triangle. Ce travail vise dans le même temps à donner aux élèves la responsabilité et le devoir de donner une preuve, puisque l'alternative est de produire un triangle dont la somme des angles serait très éloignée de 180° ou de produire une preuve que cela est impossible. Pour cela le professeur utilise sa position par rapport au savoir pour donner une légitimité aux élèves qui doutent de la validité de la conjecture : en prenant leur parti il préserve l'idée d'une égale plausibilité, de son point de vue, des deux positions. Pour reprendre l'expression de Brousseau (1984a, p.189-90) le professeur *dissimule* son savoir pour pouvoir légitimer le recherche d'un triangle dont la somme des angles serait 150°.

- dans la classe E : le problème de la preuve s'est imposé de façon prématurée au regard de la stratégie que nous avions prévue. Elle peut n'apparaître que comme une activité convenue conforme aux pratiques de validation explicitement en vigueur dans cette classe. Par ailleurs le droit explicite à avoir éventuellement raison seul contre tous permet à certains élèves de rester sur leurs positions, les « enjeux à accepter » paraissent nuls. Les paris lors de la troisième phase, les mesures évidemment et massivement corrigées vers 180°, nous conduisent à l'hypothèse que l'énoncé sur la somme des angles d'un triangle a été désamorcé en tant que conjecture : le problème de la preuve ne s'enracine pas dans une problématique de validité d'une véritable conjecture. Les élèves ne s'engagent d'ailleurs pas dans un débat sur les différentes preuves proposées ; ils sont convaincus et montrent peu d'intérêt pour leur comparaison ou leur critique. C'est le professeur qui accomplira ce travail nécessaire.

V. Conclusions

V.1. Un élément de robustesse : les conceptions des élèves

Les observations que nous avons conduites confirment la présence et la résistance d'une conception selon laquelle « la somme des angles d'un triangle est une fonction croissante de sa "taille" » . C'est cette présence, pas nécessairement massive, et cette résistance qui donnent à la situation sa robustesse. Nous soutenons l'hypothèse que la force de cette conception, « contre » de laquelle les situations sont construites, est le garant essentiel de la reproductibilité de la séquence proposée. En fait il s'agit moins de la résistance de cette conception que du fait qu'elle se constitue autour d'un véritable théorème-en-acte (faux) présent en tant que tel dans les décisions au moment des paris, et engagé dans le débat de validation. La construction de la conjecture contre ce théorème-en-acte assure justement l'authenticité de son caractère conjectural.

En effet l'existence, fondée sur cette conception, d'un doute sur l'égalité à 180° de la somme des angles d'un triangle quelconque face à une conviction contraire, qui prend de plus en plus d'ampleur, permet la constitution de ce fait en une véritable conjecture et légitime que le problème de sa preuve soit posé. Par ailleurs, la résistance de la conception erronée limite les comportements de conformisme : un tel comportement est fortement destabilisé par une situation qui apparaît suffisamment différente de celle qui lui a donné naissance. Ainsi, lors du pari sur des triangles atypiques, la conception erronée reprend le dessus. Ceci tient à ce que les comportements de conformisme sont d'abord la production de réponses « convenues » ou supposées telles par les élèves, ils ne rendent pas compte de véritables connaissances.

V.2. Le talon d'Achille de la situation : le contrat didactique

Comme le montre assez nettement l'observation réalisée dans la classe E, les situations proposées et donc la signification même des comportements et des productions des élèves, sont fortement sensibles aux interventions du professeur. Elles ont de même une sensibilité importante au *modus vivendi* de la classe dont nous ne connaissions pas les caractéristiques a priori.

Par exemple l'idée que toute activité de la classe implique l'existence de comportements ou de réponses attendus par le professeur est très probablement à la source de la création d'une norme, ou de réponses « conformes » dès la première situation, quelle que soit la classe observée. Ceci étant renforcé par la réticence que pourraient avoir des élèves à rester en marge de ce qui apparaîtrait comme le comportement dominant ; ce que Watzlawick désigne comme "le désir ardent et inébranlable d'être en accord avec le groupe" (1976, p.91) qui peut conduire à renoncer à la réalité pour le confort "d'être en harmonie avec le groupe" (Ibid.)

C'est là le principal risque d'échec de la situation, car si la conjecture est produite comme un énoncé convenu alors elle perd l'essentiel de sa signification, et partant l'authenticité du débat de preuve est fortement hypothéquée. Nous avons déjà dit comment cela excluait que le professeur soit producteur de cet énoncé, mais cela fait aussi peser des contraintes fortes sur l'institutionnalisation de la conjecture construite par les élèves. Cette construction doit en fait conduire à un consensus vrai et problématique (tention entre les "pour" et les "contre"), puis à la désignation par la classe de la recherche d'une preuve comme une tâche commune ; l'institutionnalisation se limitant à marquer cet état, en quelque sorte à l'entériner pour la communauté de la classe. Le fait que la séquence construite conduise à une situation ayant les caractéristiques d'une situation de preuve repose essentiellement sur la création de ce désir collectif de savoir (auquel adhèrerait chacun des élèves). L'exigence d'authenticité de ce désir constitue le maillon fragile de notre construction par sa sensibilité aux interventions du professeur.

Ainsi les règles adoptées dans la classe E, qui régissent explicitement le débat, si elles permettent la régulation de l'interaction sociale, contiennent aussi en elle-même les sources de difficultés à la mise en place d'une véritable situation de preuve. Notamment le débat contradictoire s'appuyant largement sur l'obligation de convaincre, allié à la légitimité d'une solitude dans la vérité, ouvre la possibilité à refuser d'être convaincu. Au débat de la preuve dont l'enjeu est le savoir, se substitue un jeu social dont l'enjeu est d'être ou de ne pas être convaincu. L'explicitation de règles a pour conséquence possible, mais parfois essentielle, de créer un vide juridique : ici l'absence de règles qui font obligation d'avouer que l'on est convaincu. Par ailleurs, cette législation n'est opératoire que si elle est surveillée : les lois rendent nécessaires les juges. Satisfaire la loi peut signifier d'abord satifaire le juge. Dans notre cas l'existence de règles explicites, bien que précisant un fonctionnement "scientifique", peut provoquer le glissement vers la production de preuves ou d'arguments en fonction de leur capacité à satisfaire le professeur avant les exigences intrinsèques au problème de validité.

Cela ne signifie pas qu'aucune règle ne doive exister, ne serait-ce que parce que "des règles sont *tenues* d'émerger et tout échange, en particulier dans l'interaction humaine, réduit invariablement les possibilités jusque-là ouverte aux deux partenaires" (Watzlawick 1976 p. 97). Le problème est celui de la possibilité, des conditions et de la signification de leur explicitation.

Il ne s'agit pas non plus que le professeur se désengage : la situation ne peut fonctionner sans lui. Elle a besoin de ce qu'il est, de sa position par rapport au savoir. Aini que le souligne Brousseau (1984b, p.46), il est et demeure responsable. Comme

nous l'avons observé, les élèves peuvent avoir des positions très différentes sur la validité de la propriété en question : ceux qui savent déjà, ceux qui rejettent, ceux qui doutent, ceux qui adopteraient volontiers une position majoritaire, ceux qui ne sont pas intéréssés. Face aux élèves qui soutiennent que la somme des angles d'un triangle est invariante, d'autres élèves peuvent prétendre à l'existence d'un cas particulier même s'ils sont incapables d'en produire un. Nous sommes dans une situation de conflit essentiellement intellectuel, aucun feedback matériel ne peut venir contredire l'une ou l'autre des positions adoptées. En revanche, cette incapacité à produire un contre-exemple à la propriété peut donner de l'intérêt à la recherche d'une preuve intellectuelle qui trancherait le débat. Cette problématique de preuve et de réfutation ne peut se développer que si la propriété (ou thèse) et sa contradiction (antithèse) ont une égale potentialité attestée. Elles doivent être défendues de façon assez équilibrée dans la classe pour que puisse se mettre en place une authentique dialectique de la validation. C'est ce que le professeur permet en donnant une légitimité à la recherche d'un triangle dont la somme des angles serait très différente de 180°.

La « vérité » devient problématique non parce que le professeur ne décide pas, mais parce qu'il atteste qu'il est prêt à soutenir ou à donner un statut à la thèse et à l'antithèse. Il donne en quelque sorte un statut à l'incertitude, et dans le même temps marque l'intérêt qu'il y aurait à « savoir ». Ceci assure que l'énoncé en question n'est pas une simple spéculation, mais bien une conjecture.

Si donc la conjecture a ses racines dans la remise en question des savoirs, des conceptions de chacun des élèves, notre recherche montre qu'elle ne conquiert pleinement son statut que dans une négociation sociale qui en atteste à la fois l'intérêt et le caractère problématique. Cette négociation recouvre à la fois des processus de dévolution et d'institutionnalisation dans lesquels le professeur joue un rôle central, nous l'examinerons dans un cadre différent au chapitre suivant.

Références

Balacheff N., 1984, Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18-2, 1987

Berdonneau C., 1981, *Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle.* Thèse de troisième cycle, Université de Paris VII

Bkouche R., 1984, *Les démonstrations de Legendre du postulat des parallèles*

Brousseau G., 1984a, Etudes de questions d'enseignement. Un exemple la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Vol. n° 45. Université de Grenoble 1

Brousseau G., 1984b, Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la III Ecole d'été de didactique des mathématiques.* Université de Grenoble 1

Brousseau G., *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Université de Bordeaux I

Capponi M. T. et al., 1985, *Apprentissage du raisonnement.* IREM de Grenoble

Carroll L., 1885, *Euclid and his Modern Rivals.* New York : Dover Publication Inc., 1973

Caveing M., 1977, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque.* Tome II. Université de Lille, 1982

Choquet G., 1964, *L'enseignement de la géométrie.* Paris : Hermann

Clairaut, 1753, *Elémens de géométrie.* A Paris chez David

Close G. S., 1982, *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer age.* Mastre of Science, Polytechnic of the South Bank

Fishbein E., 1982, Intuition and Proof . *For the Learning of Mathematics*. Vol. 3, n°2, pp. 9-18 and 24

Fourrey E., 1938, *Curiosités Géométriques.* Paris : Lib. Vuibert

Heath T. H., 1925, *The thirteen books of Euclid's Elements.* New York : Dover Publication Inc., 1956

Hilbert D., 1899, *Les fondements de la géométrie*. Paris : Dunod, 1971.

Grosgurin L., 1926, *Enseignement de la géométrie. Méthodologie.* Paris : Payot & C^ie^

Halbwachs F., 1981, Significations et raisons dans la pensée scientifique. *Archives de Psychologie,* Vol. XLIX n°190, pp. 199-229

Heath T. L., 1956, *Euclid's Elements.* Vol. I. New York : Dover Publication Inc.

Hilbert D., 1899, *Les fondemlents de la géométrie.* Paris : Dunod 1971

Kayas G. J., 1978, *Les éléments d'Euclide.* Paris : Editions du CNRS

Lakatos I., 1976, *Preuves et réfutations* . Paris : ed. Hermann, 1985

Legendre A. M., 1875, *Eléments de Géométrie* avec additions et modifications de M. A. Blanchet. Paris : Lib. Firmint-Didot

Le Rest E., 1982, « Il faut que j'y pense encore », (Les axiomes de la géométrie). in : *La rigueur et le calcul.* Ouvrage Collectif. Paris : Ed. CEDIC

Mach H., 1908, *La connaissance et l'erreur.* Paris : Flammarion

Papy, 1967, *Mathématiques Moderne,* Tome III : Voici Euclide. Paris : M. Didier

Smith D. E., 1925, *History of Mathematics,* Vol. II. New York : Dover Publication Inc. 1958

Watzlawick P., 1978, *La réalité de la réalité.* Paris : Seuil