i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

REPRESENTATIONS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
(UN EXEMPLE : L'ORGANISATION DE LA CLASSE DE SECONDE)

N. LEORAT

A. MOUSSA

cahier de didactique des mathematiques

numéro 42

juin 87

Introduction

L'objectif avoué de l'école et de l'enseignement des mathématiques en particulier est d'apprendre un certain nombre de savoirs et de savoir-faire aux élèves. Grande est donc la tentation de centrer sur les élèves les études visant à une amélioration éventuelle de ces apprentissages. Mais ce serait bien illusoire d'en rester là, car le processus "enseignement/apprentissage" ne peut se découper en tranches indépendantes et les autres acteurs de la relation éducative sont tout autant à prendre en compte dans l'analyse, en tant qu'acteurs précisément, c'est à dire avec leurs personnalités, leurs désirs, leurs contradictions et leurs connaissances.

Ceci dit, prendre en compte les enseignants en tant que personnes est très complexe car beaucoup de facteurs interviennent : par exemple, les enseignants font partie d'un établissement qui a une vie propre et souvent des traditions particulières avec un recrutement spécifique, mais ils ont aussi une place dans la hierarchie sociale générale et ceci module le vécu au niveau de l'établissement.

D'autre part ces enseignants sont spécialisés (à des degrés divers) dans une discipline et ils ont un rapport personnel à ce savoir qui résulte à la fois de leurs pratiques, de leurs connaissances, de leurs aspirations et de leurs convictions personnelles, sociales ou plus liées aux contenus.

Or, et c'est ce qui nous intéresse ici, ces enseignants se sont forgés des représentations de ce savoir et de comment l'enseigner (représentations que nous appelons métacognitives) qui peuvent à notre avis en partie expliquer leurs choix en matière d'enseignement. Ces représentations interviennent donc dans l'analyse du système d'enseignement que nous tentons de faire dans un objectif d'amélioration (à moyen terme). En particulier, elles sous-tendent, au moins partiellement, ce que les élèves reçoivent, tant au niveau des discours (éventuellement chargés d'implicites) métamathématiques (c'est à dire sur les mathématiques) qu'au niveau de l'organisation globale de la classe (organisation des contenus et des activités) ; c'est pourquoi il nous semble important de les expliciter.

En fait, les représentations sociales et métacognitives des enseignants sont très imbriquées. Rappelons que déjà chez les élèves le niveau métacognitif est relativement superficiel et les représentations sont souvent peu fixées et peu dégagées des déclarations sociales générales ; nous avons montré en particulier à ce sujet que les explicitations des élèves en ce domaine reflètent d'abord les représentations du maître qu'ils ont au moment où ils sont interrogés et donc changent avec l'enseignant (cf. cahier 41). Cela ne fait d'ailleurs que renforcer l'importance de ce que le maître dit ou sous-entend sur les mathématiques et leur apprentissage et la nécessité pour l'enseignant (et le chercheur) d'expliciter ses représentations, sans chercher à trop démêler dans un premier temps le social du cognitif.

Nous sommes deux enseignantes de mathématiques d'un lycée périphérique parisien, engagées dans le système depuis une vingtaine d'années et c'est à ce titre que dans ce travail, nous avons tenté de décrire au moins partiellement le réseau de nos représentations sociales et métacognitives, en essayant de les mettre en relation le plus précisément possible avec nos choix en matière d'enseignement. Pour cela, nous avons choisi de présenter un certain nombre de textes autour du sujet, textes que nous avons élaborés de 1974 à 1984 ; nous estimons en effet que c'est dans le suivi de nos déclarations que l'on peut le mieux lire nos conceptions dans ce qu'elles ont de fondamental ou de plus conjoncturel. De plus cela peut contribuer à mettre en évidence le lien étroit entre le social et le métacognitif, dans la mesure où on saisit ce qui dans une situation donnée amène à des déclarations cognitives. Dans la première partie, nous avons joint à ces textes (livrés tels quels) le résumé d'un entretien sur nos représentations métacognitives (du moins en ce qui concerne les élèves de l'enseignement post-obligatoire), entretien réalisé sur un an par une collègue qui fait de la recherche en didactique des mathématiques (A. Robert) ; les propos recueillis n'ayant pas été enregistrés n'ont pas faits l'objet d'analyse fine, d'analyse de discours en particulier et sont à prendre en tant que tels. La deuxième partie est consacrée aux choix que nous avons faits pour organiser notre enseignement en classe de seconde de 1981 à 1984, choix que nous présentons en liaison avec les représentations décrites dans la première partie.

I Nos représentations sur l'enseignement des mathématiques

Nous aimerions que le lecteur lise les textes qui vont suivre en se représentant l'enseignant de mathématiques placé à différents carrefours qu'on n'évoque pas toujours dans ce contexte. L'enseignant en effet se trouve entre les élèves, qui ne savent pas ce qu'il a à leur transmettre et le savoir, qui a d'ailleurs évolué depuis qu'il a fini ses propres études, sans qu'il ait les moyens de suivre ces progrès. Il se trouve aussi entre les parents qui veulent que les élèves réussissent (tous?), l'institution locale, qui désire un certain taux de réussite, et les élèves dont l'avenir est en jeu sans qu'ils en soient toujours bien conscients. Il est confronté aux enseignants des autres disciplines qui ont un avis, souvent défavorable, sur les mathématiques et les "savants" de leur propre discipline qui peuvent avoir tendance à les dévaloriser car ils ont arrêtés leur apprentissage et ne font pas de Recherche.

Quotidiennement le professeur est aussi amené à gérer des situations présentant diverses contradictions : il est par exemple placé entre son plaisir de faire des mathématiques "intéressantes", en particulier de redécouvrir des choses nouvelles, son désir de faire partager son plaisir aux élèves et l'ennui, voire le désintérêt de ceux-ci qui ne trouvent pas du tout ça intéressant et encore moins "beau". Il est pris entre son désir d'expliquer clairement, d'exposer en dévoilant les structures clefs, ce qui peut être très gratifiant, et son besoin d'être efficace, en laissant au contraire les élèves faire seuls une grande partie du chemin. Il hésite entre la facilité de donner des notes correctes (et donc des contrôles "faciles"), pour encourager les élèves, ou pour avoir une bonne ambiance, et la négociation permanente avec les élèves pour les forcer à aller plus loin. Ne parlons pas ici de la prégnance de la "dynamique transférentielle" étudiée par d'autres (cf. C. Laville) qui joue aussi son rôle dans les rapports conflictuels qui s'établissent avec certains élèves sans qu'on sache toujours pourquoi.

Le métier de professeur de mathématiques peut donc être apprécié comme une activité d'optimisation permanente, entre des réalités plurielles, voire contradictoires qu'on ne peut ignorer si l'on étudie ses représentations de l'enseignement des mathématiques.

Pour illustrer dans notre cas particulier le vécu de ces contradictions et la rationnalisation des choix que nous avons été amenées à faire, voici donc quelques textes, classés chronologiquement, et livrés tels quels, ainsi que le résumé d'un entretien réalisé en 87 plus directement sur le thème de l'apprentissage mathématique des élèves.

1) A l'origine, après la réforme de 1970

a) Quand les mathématiques étaient "le vrai"...

Ce texte a été rédigé en Juin 84 par 3 enseignants dont nous deux et un professeur de lettres, dans un contexte de remise en question.

A la suite d'une question élaborée par les professeurs delettres dans un conseil d'enseignement et présentée aux professeurs de maths dans les termes suivants:quelle est la valeur de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire?quel est son role dans l'orientation des élèves?Question qui a un double sens:nous (profs de lettres)voudrions bien comprendre (et ce qui a fait au cours de maths nous voudrions comprendre) et éventuellement combattre ce que nous ressentons comme un impérialisme des maths dans le lycée, on peut faire les remarques suivantes:

I.Il est difficile de préciser le rôle que jouent les maths dans la pratique professionelle;il faudrait faire l'enquête à deux niveaux:

-l'utilisation directe de ce que l'on a appris au lycée

-le rôle de la formation mathématique(endéfinissant en quoi consiste cette formation)dans la manière de poser et de résoudre un certain nombre de problèmes

Cette enquête existe-t-elle?et où?

De plus,en tant que profs de maths,nous n'avons jamais utilisé les maths dans le cadre de la production,ni de la production mathématique ("la recherche")ni de la production économique.Mais nous partons de la constatation suivante:en enseignant les maths,nous n'avons pas l'impression d'enseigner ce que nous appelons"les maths";ce que nous enseignons nous parait avoir comme but essentiel de sélectionner. Nous pouvons donc essayer,à notre niveau,de comprendre pourquoi et comment les maths sont un mode efficace de sélection,qel rapport existe entre ce rôle sélectif et ce type de maths que nous enseignons.

2-Ce n'est pas le raisonnement=mathématique qui fait l'objet de l'enseignement des maths,il est acquis par hasard.Deux axes ne nous semblent jamais distingués:d'une part,les maths comme pratique du raisonnement mathématique sur des objets mathématiques,et d'autre part, les maths comme source de modèles à usage externe,dont les modalités d'emploi sont à préciser.En particulier dans l'enseignement primaire, on ne différencie pas objet mathématique et objet réel,raisonnement sur un objetmathématique et raisonnement sur un objet réel.Sans jamais aucune explicitation,cette confusion se prolonge dans tout l'enseignement secondaire,plus accentuée dans les classes de A que de C(_ comme exemples,les exercicesde probabilités des classes terminales,les livres de maths des classesde A qui sont souvent illisibles) Pour un élève qui dans le primaire aélaboré des maths àpartir d'objets réels,le professeur du secondaire qui n'y fait pas allusion entretient sans le vouloir une confusion qui empêche l'élève aussi bien de préciser l'objet mathématique que l'objet réel et qui ne permettait pas de saisir la spécificité du raisonnement mathématique.

Tout cela passe dans"l'implicite mathématique",qui permet tant d'acrobaties...

Or l'articulation de ces deux axes n'est pas claire pour nous et nous ne connaissons pas de réflexion pédagogique à ce sujet.
Cette confusion peut se perpétuer en particulier parceque les élèves n'ont pas la parole.S'ils parlaient,il deviendrait clair pour le professeur que cette distinction doit être faite au moins un petit peu dans sa propre tête comme dans celle de ses élèves pour arriver àtrier cequiest mathématique et ce qui ne l'est pas.Nous n'entendons pas par parole cette parole canalisée,dirigée,reproduisant le langage écrit:en maths,il ya toujours un implicite considérable qui le reste à l'écrit.Une expression plus libre permettrait aux élèves de trier dans cet implicite ce qui est raisonnement mathématique et ce qui ne l'est pas,de trouver diverses façons de résoudre une question et surtout de trouver les questions à se poser.
La langue écrite,qui prend une grande place dans l'enseignement des maths,est essentielle comme mode de controle et de communication de son propre raisonnement;mais ce n'est qu'une suite de déductions dont le mode de création est totalement absent.

Cette confusion nous parait être une première méthode de sélection: elle met d'un coté les bons élèves qui soit comprennent d'eux-mêmes, implicitement,la différence entre objet mathématique et objet réel, soit se soumettent à ce que dit le professeur,sont obéissants et dociles(leur résistance prenant la forme du cynisme);de l'autre côté,elle met les"mauvais élèves",la majorité qui ne comprennent pas l'objet des maths,leur nécessité,etqui ne se soumettent pas à une discipline non justifiée.Ils se rejettent vers une pratique où l'efficacité des maths est effacée au profit d'une sorte d'empirisme,de bon sens qui finalement ne donnent aucune arme pour agir sur le monde.Finalement onretrouve dans ce tri la division du travail telle qu'elle est opérée dans la société:travailleurs intellectuels et travailleurs manuels.

L'enseignement des maths est conçu comme pyramidal,doublé d'une course contre la montre.
pyramidal:on constate qu'en faculté,on n'apprend pas les maths comme au lycée:onpeut faire indépendamment de la logique ou des probabilités,etc.. Au lycée,on est obligé,pour faire une première,d'avoir fait une seconde, puor faire une seconde,d'avoir fait une troisième,etc...L'organisation des connaissances est faite de telle sorte que les acquisitions antérieures sont indispensables aux acquisitions suivantes,une lacune dans les connaissances compromet toute la suite des acquisitions ultérieures
course contre la montre:le programme est suffisamment étendu pour qu'on ne laisse pas les élèves aller à leur rythme.Et leur imposer

un rythme signifie leur apprendre la discipline,la régularité,et aussi leur imposer une certaine efficacité locale dans le rendement:au fond, parcelliser le travail intellectuel.

On peut remarquer que dans certaines disciplines,en particulier les lettres,qui précisemment sont en train de perdre un pouvoir de sélection on renonce à faire cette construction pyramidale;on abandonne l'histoire littéraire(le I7$^{\text{è}}$ après le I8$^{\text{è}}$,etc...)au profit de textes choisis selon les"désirs"des professeurs et des élèves:plaisir du texte,etc;;;. Les sujets du bac,sur l'architecture,l'audiovisuel,le cinéma ou la chanson,justifient cet abandon.Il ne s'agit pas de glorifier le type d'histoire littéraire que l'on trouve dans le Lagarde et Michard.On est loin d'une histoire.ILs'agit de montrer qu'on ne se préocuppe même plus d'en refaire une,ou d'en refaire une en critiquant les perspectives des histoires de la littérature.La littérature au lycée prend la voie de la litterature dans les C.E.T. ou dans le cycle court:dans le dernier la sélection est déjà opérée,dans le premier,le français ne sélectionne plus.

Il reste à expliquer pourquoi les maths sont devenues un instrument privilégié de la sélection,actuellement,dans le cadre de la démocratisation de l'enseignement(pourquoi ont-elles remplacé le latin?)

Il nous paraitrait utile de reprendre tous les discours sur les maths qu'on entend à l'école(profs,parents,élèves):

D'abord,on peut toujours comprendre les maths si on travaille suffisamment;donc,si on est éliminé,c'est qu'on l'a bien voulu:la pyramide des connaissances mathématiques est complètement intériorisée et les maths ne sont plus qu'une discipline,sans aucune création,sans aucune action sur le réel.

D'autre part,dans une société technologiquement dévloppée,la "science" reste une valeur sûre sur le marché de l'emploi;quelqu'un qui a appris les maths peut toujours faire autre chose,le contraire n'étant pas admis:c'est simplement reconnaitre le rôle sélectif joué par les maths, seuls les bons en maths ont des situations telles qu'elles leurs permettent de faire autre chose ou de se reconvertir

Ensuite,les maths,ça s'apprend comme une autre langue,c'est un mode de langage fondamental",qui n'est pas lié directement à l'origine sociale.Là,il nous semble que dans le primaire,le calcul s'oppose au français: des enfants des milieux prolétaires peuvent être très bons en calcul(en partie par compensation?);mais à l'arrivée dans le secondaire,il semble que le problème de la langue familaiale intervienne à nouveau de façon décisive;il nous semble plausible que cela provienne du fait que dans leprimaire,lesmaths sont enseignées de façon telle que maths et applications sont constamment jointes,sans que jamais ne soit précisée quand il ne s'agit plus d'expérience concrète,mais déjà d'élaboration mathématique avec ce que cela introduit de distanciation;par contre dans le secondaire,seul l'aspect savoir"mathématique pur " est enseigné:toute pratique des maths est absente,le langage mathématique perd sa nécessité:se retrouvent à nouveau favorisés lesélèves qui ont un usage plus courant d'un langage abstrait;

Finalement,il nous semble que les maths ont été retenues,dans leur forme actuelle d'enseignement,comme critère de sélection,parcequ'elles permettent:

-l'apprentissage de l'obéissance,de la régularité,de la discipline

-une certaine conceptionde la vérité mathématique:la vérité interne~~s~~ des maths devient une vérité atemporelle,ahistorique,universelle tout raisonnement devient reconnu comme vrai dès qu'il utiliseun modèle~~s~~ mathématique;

-ces maths ne donnent aucun controle sur le réel,soit parcequ'ellesont été totalement rejetées et avec elles souvent tout raisonnement scientifique,soit parcequ'elles conduisent àune obéissance telle qu'elle empêche~~s~~ de~~s~~ poser les questions valides,quileurs donneraient tout leur intérêt.Seule une petite minorité peut les utiliser et en tirer un certain pouvoir dans ce contexte actuel.

Finalement,actuellement,dans quelle mesure,les maths peuvent-elles être enseignées(partiellement) de telle sorte qu'elles donnent prise sur la réalité sans être automatiquement intégration définitive à la hierarchisation des tâches?

Anne Brigitte [illegible]
[illegible]

b) <u>Une autre face de la médaille</u>

Ce texte, non sans rapport avec le précédent, a été rédigé par nous en Mars 75.

une tranche sans vie

1.1 Notre demande (nous sommes deux) : arriver à regrouper, réorganiser toute une série d'anecdotes tournant autour de nos histoires de profs de maths

Comme profs de maths, nous sommes coincées entre l'administration, les parents d'élèves, les collègues et les élèves; coincées entre ces divers groupes par des rapports de force car nous sommes chargées ~~dap~~ par l'institution d'effectuer la sélection des élèves en fonction de la hiérarchie sociale imposée par le système.

1.2.1 Par rapport à l'administration : Il faut avoir vu fonctionner un conseil de classe où l'on demande au prof de maths de prendre la décision, quelle que soit la classe, A, B, C...

contre exemple : une élève de 1ère B, passé de 2e en 1ère "grâce aux maths" (un petit coup de pouce, tout le monde était d'accord), absent de façon trop courante pour que l'administration ne s'en préoccupe pas. En montant en classe, à brûle pourpoint, le censeur me demande ce qu'il fait en maths : "pas grand chose", sans plus (ses nombreuses absences, l'absence de travail m'ont fait oublier une règle d'or : ne jamais rien dire à l'administration). le ~~lundi~~ lendemain matin : « comme vous m'avez dit qu'il ne faisait rien en maths, surtout vous, je l'ai mis à la porte deux jours ». En fait c'était une question de discipline, avec le masque « ne fait rien en maths ».

1.2.2 Par rapport aux collègues : Toute "initiative pédagogique" (dans le cadre de l'éducation nationale bien sûr, des programmes, etc...) se heurte à une hostilité très pesante de la part des collègues, essentiellement les hommes : il semble qu'ils identifient l'autorité des maths et leur propre autorité (autorité des maths dans la société actuelle et leur virilité). Si on enseigne les maths d'une façon "familière", "maternelle" "décontractée", "avec plaisir (travail de groupes, fiches), nous devenons des bonnes femmes, « fonctionnant avec leurs tripes », donc indignes d'enseigner les maths et nos élèves ne peuvent qu'être ignorant en maths.

1.2.4 Par rapport aux parents :

Histoire très courante ; un rendez vous à midi : « je viens vous voir vous. Comment mon fils suit-il en mathématiques ? s'il a besoin de cours particuliers, je suis prêt à lui en faire donner autant que necessaire. En donnez vous ? – Non – Pourquoi ? je comprends, une femme, trop de travail, les élèves ... – non c'est que je pense que dans la plupart des cas c'est néfaste, ça détruit toute velléité d'autonomie de la réflexion – pourtant votre collègue l'an dernier, fils mon, fils est passé de 8 à 12, il a pu passer en C et j'espérais que cette année... ; si vous ne le faites pas passer en C, vous brisez son avenir, il veut devenir médecin ...

Autres bribes : si elle ne passe pas en C, du moment qu'elle arrive au bac, c'est une fille, alors c'est moins grave.

Autre histoire : un enfant de 6e, un peu timide, sans plus apparemment ; sa mère vient me voir au bout de 2 mois : « je m'excuse de vous envoyer un enfant perturbé ... » (et il n'est même pas "mauvais" en maths)

1.2.8 Par rapport aux élèves :

1.2.8.1 Un groupe de travail en 1ère B : " Madame, cette année, ça ne va pas ; vous vous énervez plus contre nous que l'an dernier ; vous savez, d'un prof de maths, je n'arrive pas à le supporter (sous entendu : si un prof de maths dit « c'est faux », j'entends : je suis irrémédiablement bête) – mais d'un autre prof ? – oh, ce n'est pas pareil, ..

1.2.8.0 Si on passe dans les couloirs, aux heures de maths, dans la première semaine de l'année, que de queulantes, c'est effrayant. Faites l'expérience. Pas de maths sans travail, pas de travail sans solitude et silence, pas de silence sans autorité, pas d'autorité sans bon prof, non c'est le contraire ....

1.2.8.3 bis Le jour où j'ai fait un joli cours, bien net, bien propre, sans bavures, bien déduit, je suis très contente de moi, je me sens un "bon prof"; les élèves aussi sont très contents de moi ils se sentent de "bons élèves" à qui on a bien expliqué"! tout le monde est content. Simplement, au prochain contrôle, le quart seulement en a tiré profit. Au contraire le jour où le cours n'est pas organisé linéairement, (1.1.2, 1.1.3, 1.1.3 bis....) où il part dans toutes les directions non nécessairement prévues, tout le monde est mécontent: les élèves se sentent frustrés et revendiquent: "vous n'expliquez pas assez, vous nous faites perdre du temps [~~c'est votre travail~~], c'est trop difficile pour nous, on ne peut pas comprendre tous seuls, c'est votre travail d'expliquer": pour les élèves il est hors de question qu'ils soient capables de résoudre une difficulté en math (sauf dans le cas d'un exercice d'aplication)

1.3 La rentrée. Je connais déjà les deux tiers des élèves je dis mon nom puis nous remplissons les paperasses de rentrée: établir les diverses listes, dicter l'emploi du temps....; fin, nous bavardons un peu et puis je parle travail et soudain une élève que je ne connais pas dit: "pourquoi? vous êtes le prof de math? ça alors!..." (Ah le pied! pour moi).

1101 La rentrée en 2nde C.

Question indiscrète: pourquoi êtes vous en 2nde C? parce que papa l'a voulu (> 30%), pour être médecin, chirurgien, ingénieur, pour réussir quoi;... — aimez vous les maths: — non, mais il faut bien, ou alors; — oui parce qu'il y a toujours une solution et une seule, parceque pendant ce temps là je ne pense à rien d'autre, je suis tranquille.

1001 A un exercice de sept questions, la huitième est: quelle question supplémentaire peut-on poser en tenant compte des sept précédentes; réponse d'un élève : cette huitième question n'est pas interressante puisqu'on peut donner plusieurs réponses.

1002 Une élève de 1ère B, excellente, : "Comme j'ai à régler le problème de mon rapport au langage, je ne peux plus faire autre chose que des math en ce moment"

1003 Les "petites filles" (qu'on ne trouve qu'en 1er cycle ~~ou~~ dans les classes peu nobles du 2nd cycle) : elles limitent leur intervention dans l'école et dans le monde à une perfection formelle qui constitue un ordre dans lequel elles sont justifiées et stérilisées, une fois pour toute ; l'échec en math n'a alors qu'un sens : elles ne sont pas faites pour les math. C'est un de mes désespoirs. Pour les petits garçons bien sages, il y a toujours une théorisation du rôle de l'école et du cry, ils s'en sortent en maths.

0024 Les grandes filles bonnes en maths : il semble que très souvent, il faut qu'elles rachètent le fait qu'elles sont bonnes en maths, soit en travaillant beaucoup, soit en s'enlaidissant, soit en étant plus "généreuses", c.à.d prenant en charge les difficultés mathématiques ou autres de leurs camarades.

3 Et avec tout cela, les maths à enseigner : pour quoi faire ?

3.1 Question que les élèves me posent tout le temps, et que je laisse sans réponse si ce n'est la réponse locale : à l'école ça sert à ~~sélectionner~~ la sélection, et c'est moi qui l'opère sans être maître du "jeu" où que ce soit. Comment elle fonctionne, je n'en sais rien. Il me semble que le problème se situe avant tout au niveau de la langue. La langue de l'enseignement des maths est une langue écrite (à l'écrit comme à l'oral), extrêmement rigide, qui fonctionne à vide ; alors, j'essaie essentiellement de réintroduire la langue orale parlée dite vulgaire (cf bulletins scolaires...) entre élèves et entre les élèves et moi, pour réintroduire les impressions, les associations d'idées, les images à partir desquelles on essaie de trier ce qui rentre dans la formulation demandée par le programme (ou en tout cas ce que j'entends comme tel), pour revenir ensuite à l'écrit, comme seule trace de production effective. Cela reste dérisoire ... Ceci n'empêche pas que la sélection fonctionne toujours de façon toujours aussi efficace. La seule honnêteté (actuellement, sans se suicider professionnellement) dans notre fonction de prof, c'est d'essayer de préciser à chaque fois aux élèves comment s'opère la sélection et comment je la fais opérer. Et je n'ai pourtant pas perdu totalement l'envie de leur apprendre des maths ; le mythe ou plutôt la réalité veut que le prof de maths préfère les élèves doués en maths, c.à.d les classes de C, classes "intéressantes" d'élèves "intéressants". Je suis personnellement très partagé sur le sujet, j'aime les classes de A ou B, de premier cycle (6^e, 5^e), où je n'ai pas ou plus de sélection à faire (elle est déjà faite ou pas encore à faire), où je peux enfin enseigner en paix ; j'ai l'impression, je ne sais pas bien pourquoi, que je peux leur apporter quelque chose et que j'en tire moi-même des satisfactions ; mais j'ai quelquefois besoin de trouver en face de moi des élèves qui comprennent vite et bien les maths, et pas seulement pour me conforter dans mon rôle de prof.

2) <u>Un premier choix pédagogique issu de cette crise : une expérience de travail autonome en section B</u>.

Une équipe pluridisciplinaire constituée au lycée depuis 72, dont nous faisions partie, a animé de 1974 à 1977 une organisation en travail autonome d'élèves de seconde A/B, première B et terminale B successivement. Il s'agissait de suivre des élèves réputés en échec, en essayant de dégager des diverses pratiques par discipline des éléments de méthodes communs qui étaient explicités, en s'attachant dans toutes les matières à travailler sur ce que font les élèves, sur leurs productions. Il s'agissait par là-même de combattre l'échec en redonnant en particulier aux erreurs un rôle dans la construction des connaissances (au lieu de les assimiler à des fautes et de les associer à des mauvaises notes). Voici une platteforme sur le sujet rédigée par les professeurs concernés, puis le bilan des trois premières années de l'expérience.

Signalons que l'expérience a été répliquée de 77 à 80 avec une classe de type II, dont beaucoup d'élèves, initialement voués à l'échec, ont non seulement réussi le baccalauréat (tous l'ont eu en deux ans) mais ont même des professions tout à fait "honorables"...

Bilan du travail autonome (1974-1980)

Quatre puis cinq professeurs (Economie, Histoire-Géographie, Lettres, Mathématiques, Philosophie) ont engagé depuis cinq ans, deux classes de B, de la seconde à la terminale, dans une expérience de travail indépendant.

Ces élèves de B se vivent le plus souvent en situation d'échec, échec qu'ils n'ont pas compris. Il s'agit donc pour nous de leur permettre de se situer par rapport à leur savoir, leur expérience, au savoir qu'on leur apporte, à celui des autres, aussi bien celui de leurs camarades que celui extérieur à l' école (mass media, etc...). Ceci ne nous parait possible que si l'élève peut retrouver sa propre parole, donc trouver un lieu où celle-ci n'est plus uniquement suscitée et encadrée par le professeur, le texte ou le cours magistral . De plus, si les élèves sont passifs devant leurs savoirs, c'est qu'ils les perçoivent comme atomisés, ne discernant ni leurs origines, ni leurs relations ni leurs spécificités. Pour nous, pluridisciplinarité ne signifie donc pas traiter un même thème dans plusieurs disciplines, mais faire prendre conscience aux élèves de la particularité d'objet et de méthode de chacune d'entres elles. Nous avons donc été amenés à travailler par groupes: en effet, dans un groupe, la parole n'est plus prononcée par l'élève comme devant être évaluée, jugée, notée: cette parole étant plus libre, il devient possible au professeur de découvrir la méthode effective de recherche, l e cheminement réel de la pensée, les lieux de blocage; nous arrivons donc par là à obtenir une production individuelle qui ne reste pas un exercice formel.

Nous nous sommes heurtés à deux types de difficultés:

-d'une part des difficultés internes à l'expérience qui demande un investissement plus grand aux élèves, difficilement compatible avec les horaires scolaires et les impératifs d'examen

-d'autre part des difficultés dues au fait que tous les professeurs n'étaient pas engagés dans l'expérience: il est difficile pour un élève d'être pris entre deux rythmes d'acquisition différents.

1974 - 1977

Bilan de l'expérience de Travail Autonome

pour les 3 années de second cycle, engagé en { économie / histoire géographie / Lettres / mathématiques / philosophie

au lycée François Villon.

Ce bilan est double : celui de l'équipe enseignante, en fonction de ses objectifs, celui des élèves perçu au travers d'un questionnaire individuel et d'une séance de synthèse.

Les objectifs :

Nous complétons ici les compte rendus précédents (années 74-75 et 75-76) concernant la même classe. Pour nous, la recherche de l'autonomie consiste à amener les élèves - à se forger eux mêmes au cours de leurs travaux un outil de travail efficace

- à comprendre et à utiliser un type de raisonnement spécifique à chaque discipline

Ce qui nous est commun est une méthode et non l'utilisation formelle de la pluridisciplinarité - Nous avons cherché une même définition de : travail de groupe, documentation, production.

Il n'est pas question de remplacer le cours magistral par un simple travail de documentation, de confection d'un dossier. Dans un cours magistral, le professeur est dans ce qu'il enseigne, il est une médiation, il se situe, même implicitement. Un dossier élaboré à partir d'une documentation non repensée et maîtrisée est pire : il évacue toute nécessité de situer l'élève par rapport aux textes et à son travail - L'aspect collecte de documents risque de taire toute réflexion, d'empêcher toute production personnelle de l'élève. C'est un refuge, une sécurité contre une pensée qui lui soit propre, au profit d'un ambitieux "produit fini" Sous prétexte d'autonomie, le travail devient fruit des hasards :

l'élève choisit son sujet, cherche où il veut, ce qu'il peut, met en page, ne sait d'où ils viennent, mais peut reproduire des "objets" tout faits, parcellisés. Il répète idées ou points de vue sans en savoir l'enjeu. Deux exemples :

- un travail sur Phèdre : l'élève utilise Mauriac et le reproduit sans situer l'enjeu de la lecture, le travail critique étant apparu comme total, fermé, donc suffisant.

- pour un exposé sur la féminité, un élève confond l'objet de son propos et le "mythe de la féminité" découvert dans l'Encyclopédia Universalis".

Il s'agit là d'une facilité réductrice, même par rapport au cours le plus traditionnel et frustrante pour les élèves qui ont à l'origine investi un désir d'appréhender l'objet, de se l'approprier.

Pour nous il faut d'abord enseigner aux élèves à lire les documents, plutôt qu'à les chercher. Il faut qu'ils se situent personnellement par rapport à un savoir. Il vaut mieux donc préparer le document, le leur fournir, la recherche n'a de sens qu'en fin de parcours. (Il est arrivé cependant, en fin de première, que des élèves soient capables de prendre en charge l'intégralité de leur travail, de la documentation à la réécriture personnelle).

Ce "dirigisme" est cependant nuancé. Il s'agit de guider les élèves pas à pas dans les documents. L'intervention dépend du contenu, du groupe, de chaque élève du groupe ; on habitue les élèves à prendre au sérieux leur pensée (le professeur est la médiation qui reconnait ce qu'ils pensent (ou l'obstacle par rapport auquel ils se situent). Cela suppose, au départ, une part importante de subjectivi[té] par exemple dans le trajet qui conduit à la réappropriation de l'objet mathématique. La réflexion passe d'abord par la parole (toujours plus subjective) à l'inté[rieur] du groupe, mais il est nécessaire de retourner à l'écriture, individu[elle] car le point d'arrivée est toujours unique, ainsi que la façon de l'exprimer. L'écriture oblige l'élève à assumer sa propre pensée, La "production" devient alors appropriation des documents, leur donne une signification par une réécriture.

Evaluation des résultats :

- Conditions spécifiques à l'expérience :

• 1/3 des élèves sont nouveaux en Terminale

• sur 33, 18 seulement ont suivi l'expérience pendant trois ans

• Aucun dédoublement n'a été obtenu.

. A ces obstacles s'ajoute le rétrécissement inévitable de l'expérience en classe terminale. Il est impossible de conjuguer l'apprentissage des programmes et l'élaboration de dossiers sur des thème librement choisis. En économie et en histoire-géographie, on a abandonné au second trimestre les travaux de recherche au profit d'un travail sur documents, beaucoup plus ponctuel, limité, dirigé. S'y ajoute aussi la difficulté de mener l'expérience dans une seule classe, le travail de documentation et d'élabration, fort lourd, gagnerait à être partagé et discuté avec une autre équipe.

- Des résultats nous paraissent négatifs :

• Nous ne sommes pas parvenu à determiner si l'expérience favoris ou défavorisait telle ou telle catégorie d'élèves. (les élèves ont eux donn quelques réponses interessantes, plus loin)

• Nous avons souffert de l'empirisme : tâtonnements entre une liberté large et des formes plus directives, dans le choix des thèmes par exemple.

. Les difficultés majeurs sont liées au rythme de travail. Nous ne sommes pas tous et toujours parvenus à faire travailler les élèves au même rythme en travail strictement indépendant, à les faire travailler à un rythme autre que le leur (des matières sont privilégi par eux, à certains moments) et à un rythme continu exigé en classe terminale (ils resteraient volontiers plus longtemps sur des sujets les interessent particulièrement). Difficulté aussi d'imposer un temps limi pour la réalisation des travaux.

• Nous ne sommes pas arrivés, pour tous les élèves, à faire apparaître dans leur production, tout ce qui était positif dans le rapport au savoir. La "production" est parfois décevante par rapport aux potentialités qui apparaissent en groupe de travail et oralement. Du même ordre est l'impossibilité de fonder pour tous la nécessité de l'écriture logique en mathématiques.

- Des résultats positifs

• Les élèves, orientés en AB à l'issue de la classe de 3e ont cessé rapidement de se vivre en situation d'échec.

• Ils ont acquis une attitude critique vis à vis du document, du savoir à l'élaboration duquel ils ont participé. Ils savent déchiffrer un texte, le resituer dans son contexte. La plupart d'entre eux savent qu'il n'y a pas d'idées innées, que le savoir ne tombe pas du ciel ; ils savent repérer à quel système d'analyse appartient tel ou tel document ; ils ont une certaine autonomie de démarche et d'analyse.

• les acquis ont été pour la plupart directement utilisable pour une méthode plus conventionnelle et même ont favorisé la préparation à l'examen. On peut cependant déplorer que le décalage avec la conception actuelle du baccalauréat ne permette pas la reprise en compte de tous les apprentissages (en particulier en Economie ou en Hist Géographie).

• Aucun élève n'a eu de propension à monopoliser le savoir ou les moyens de l'acquérir ; aucun ne cherche à reproduire un "modèle". Au contraire, la production dans la classe est pour chacun différente, originale, même pour un seul sujet de type épreuve de l'examen, réalisé dans des conditions classiques

Le Bilan fait par les élèves

Les élèves ont dressé de l'expérience un bilan largement

favorable, inégal selon la durée de leur appartenance à la classe.
Un sujet d'amertume clairement exprimé est précisément l'élimination de 5 élèves à l'issue de l'année de première.

Deux élèves (sur 33) se sont montrés réticents : l'un entré dans la classe en 1ère, avoue avoir eu du mal à s'adapter, considère l'expérience hasardeuse vis à vis du baccalauréat et insiste sur le fait que l'efficacité dépend par trop de la valeur du groupe. Une jeune fille déclare, non pas y être hostile, mais s'être heurtée au Travail Autonome depuis la 2nde du fait de son caractère indépendant. Elle en conclut d'ailleurs que l'expérience a renforcé sa personnalité individualiste.

La majorité de la classe semble pleinement satisfaite, tant sur le plan du travail que par l'épanouissement et l'affermissement de leur personnalité.

a) la méthode de travail leur paraît en tous points positive :

- pour la classe : "la classe prend un sens". On a plus d'intérêt pour les autres ; le "chacun pour soi" disparaît. L'apport humain de l'expérience est très grand, car elle a développé le sens de l'entraide et de la solidarité. Ils notent tous de meilleurs rapports, entre eux, avec les professeurs plus disponibles et intéressés, avec les disciplines enseignées, qui par la médiation des professeurs leur paraissent beaucoup moins isolées de la vie.

- pour tous les élèves : l'échange par la parole a permis une "heureuse combinaison des atouts propres à chaque individu et des éléments de connaissance". Le travail de groupe "favorisait peut-être, au début, ceux qui avaient une certaine facilité" mais la différence s'est estompée dès la classe de 1ère. Chacun peut s'exercer à la parole, prend confiance en soi comme dans les autres. La méthode "ne gomme pas les différences culturelles, mais les fait éclater au grand jour" et donc "les prend en compte". Une élève enfin considère que l'expérience a permis d'intégrer "les nuls, ceux qui ont des problème de parole, de travail".

- pour chacun d'eux : La plupart ont été sensibles à la nécessité de s'affirmer : "liberté, initiative, responsabilité, investissement de soi, exigeant plus de volonté" ; demandant "plus d'attention, de régularité", sensibles aussi à la naissance d'un désir d'aller plus loin, de s'accomplir dans des activités extra scolaires, de supprimer les barrières séparant l'école de la vie.

b) le travail et les résultats :

Le travail est apparu souvent comme plus contraignant, mais les élèves insistent sur :

- le plaisir, voire le bonheur d'un travail redécouvert, plus libre, plus personnel.

- l'utilité : "on explique le quoi, le comment, le pourquoi"

- un rapport différent aux disciplines : l'expérience a notamment réduit "l'hostilité face aux mathématiques", "démystifié mathématiques ou histoire"

- une unicité dans l'acquisition des savoirs : "les matières s'étayent et se relaient, tout en restant spécifiques" et "chaque discipline est revalorisée"

- l'acquisition des connaissances est considéré (sauf une exception) comme plus lente, de rythme pas toujours efficace au point de vue strictement scolaire. Par contre les acquis sont jugés plus sûrs et plus définitifs, soit que l'effort ait été plus grand, soit l'acquisition mieux intégrée : « ce qui est compris se retient plus facilement et longtemps car on se place dans un ensemble bien determiné », soit que le plaisir ait été fort : « ce qu'on a appris, on a envie de le garder »

Enfin, les élèves ne se sentent pas plus mal préparés à l'examen ; l'un avance même l'idée que cette perspective passe par "un élan, une volonté collective"

3) <u>Depuis la réforme Haby : l'état actuel de nos représentations sur l'enseignement des mathématiques à des élèves de l'enseignement post-obligatoire</u>

Le public de l'enseignement post-obligatoire, même sélectionné, n'est pas homogène et on ne peut pas donner de réponses absolument générales à cette question : entre des élèves de terminale A et des élèves de terminale C, les programmes, les motivations et les objectifs par rapport à l'examen final sont suffisamment différents pour que les enseignants n'aient pas exactement les mêmes stratégies.
Cependant tous ces élèves suivent la même classe de Seconde, dite indifférenciée, et c'est donc surtout en référence à cette classe commune que les conceptions qui suivent sont à lire.

a) <u>Objectifs généraux</u>

* Une de nos premières préoccupations est que les élèves donnent un sens à leurs activités mathématiques, puis à leurs productions écrites. Pour certains , il s'agit d'une véritable restitution, leurs activités s'avérant presque vides de toute signification pour eux.
Il nous semble plus facile d'obtenir cela d'abord à l'oral, quitte à accepter des détours par des déclarations (produites en classe) ayant du sens mais plus ou moins éloignées des mathématiques visées dans un premier temps.
Une étape intermédiaire est d'arriver à faire produire aux élèves, avec le label "activité mathématique",des conjectures, même si la résolution ne suit pas tout de suite, de façon à leur faire saisir que les résolutions numériques ne sont pas les seules activités mathématiques authentiques, loin s'en faut.
Le passage à l'écrit avec prise de sens se fait ensuite, facilité par un contrat original en ce qui concerne l'évaluation, dont nous reparlons ci-dessous.

* Tout ce qui précède sous-entend un de nos objectifs fondamentaux, qui est de faire apprendre des mathématiques de qualité, pas au rabais, à tous les élèves. Il s'agit précisément de nous donner les moyens si les élèves ne sont pas "bons" d'y arriver quand même, non pas en baissant les exigences ou en restreignant les connaissances transmises mais en développant au contraire les jeux de cadres, les explicitations métamathématiques, en rajoutant des étapes orales, en favorisant le travail en groupes ...

* Une autre préoccupation plus générale, mais liée à la précédente, est celle de la formation de l'esprit en relation avec la prise de sens évoquée ci-dessus. Faire des mathématiques c'est aussi faire fonctionner son esprit, en respectant certaines règles, en sachant se repérer, et c'est une occasion d'apprendre à apprendre. A ce propos, il est important d'essayer de dissocier aux yeux des élèves le succès (scolaire) en mathématiques et l'activité elle-même.

* En ce qui concerne les acquisitions liées au contenu, un certain nombre de savoirs et de savoir-faire sont visés, avec toujours la volonté d'apprendre aux élèves le repérage explicite (pour des changements éventuels) des différents registres (graphique, numérique, algébrique, vectoriel, géométrique) et des différents points de vue (ponctuel, local et global). Ce repérage est considéré comme indispensable à la fois à l'apprentissage et à la prise de sens (du nouveau par rapport à l'ancien en particulier), et à la résolution des problèmes. Il sert tout particulièrement au démarrage des problèmes et pour s'autocontrôler.

* Il reste un dernier objectif, fort différent, mais qui est une condition nécessaire pour un fonctionnement correct de notre part, à

savoir nous préserver un espace de liberté dans notre travail, garantissant notre créativité, et par là-même notre intérêt et notre renouvellement. Nous trouvons cet espace à deux endroits, au niveau de l'organisation globale des contenus au sein d'un programme imposé que nous réorganisons suivant des lignes de force variables (cf. ci-dessous) et au niveau de l'organisation des activités elle-mêmes. D'où l'importance que soient préservées un minimum de conditions de travail (effectifs des classes, horaires, travail en équipe des enseignants ...).

b) Moyens

Le programme d'une année scolaire est organisé globalement au préalable autour de notions considérées d'entrée de jeu comme incontournables (pour l'enseignement et pour l'évaluation), que ce soit par leur nouveauté ou parce qu'elles sont sources d'erreurs résistantes ou parce que les savoirs ou savoir-faire correspondants nous apparaissent fondamentaux.

Ces notions sont traitées dans tous les registres où elles interviennent et sous les différents points de vue, en mettant en évidence les restrictions (ou les contraintes) propres à chaque point de vue. L'alternance des registres étudiés, qui est explicitée,permet de mettre en relation les notions de différentes façons et la cohérence est soulignée à chaque étape.

Ces organisations globales peuvent varier d'une année sur l'autre, par exemple en ce qui concerne l'ordre dans lequel on aborde les notions ou les registres.

Les notions importantes donnent lieu à des activités de type problèmes, où les élèves doivent changer de registre ou de point de vue. Ces activités sont souvent traitées en petits groupes et avant le cours, qui se présente plutôt alors comme une synthèse. Par exemple on établit avec les élèves des tableaux synthétiques de toutes les transformations étudiées. D'autres activités y compris écrites, (renforcement ou vérification des connaissances par exemple) ont lieu après le cours.

Le travail en groupes permet la discussion de différentes propositions, la mise en évidence des analogies ("c'est comme...") ; l'élève s'y sent plus en liberté, pensons-nous, parce que le déroulement est d'abord oral et que ce sont des pairs qui sont impliqués. Pour nous, ce travail peut être l'occasion de la prise de sens recherchée. Ce peut être aussi l'occasion de faire passer l'idée qu'il y a une différence entre "faire des math" et "réussir en math à l'école".

Au contraire les travaux écrits correspondent à une autre étape, la transmission de la pensée, qui, selon nous, soit suivre la communication.

A ce propos, les didacticiens interpréteraient ces choix en évoquant le fait que le savoir est personnalisé dans la phase orale telle qu'elle est décrite ci-dessus, que cette phase est d'autant plus indispensable que les élèves ont des difficultés, et qu'à l'écrit on apprend à dépersonnaliser.

L'apprentissage des techniques proprement dites se fait en général après le cours en séances d'exercices explicitement dévolus à cela (T.D. par exemple).

Le cahier où sont consignées toutes les activités est régulièrement "vérifié" par l'enseignant, pendant que les élèves travaillent en groupes par exemple...

Beaucoup des interventions de l'enseignant sont des discours sur le savoir mathématique (par opposition au discours mathématique). L'enseignant explique les différents registres, développe l'intérêt qu'il y a à les repérer, pose le problème de la preuve en mathématiques, explicite ce qu'il attend des rédactions, illustre comment utiliser un manuel, commente les erreurs individuelles en terme de connaissances, il essaie de débusquer et d'éclairer le maximum de connaissances implicites qui sous-tendent ce qu'on demande aux élèves.

En ce qui concerne les productions écrites en particulier, le contrat établi au début de l'année par l'enseignant précise que les élèves doivent repérer ce qu'ils écrivent et le montrer, que ce soit des conjectures, très appréciées même sans démonstration, ou des démonstrations, ou des commentaires explicatifs, ou la conclusion, ou le repérage du registre dans lequel on travaille. La remarque d'une contradiction entre deux résultats, même si l'élève n'arrive pas à la résoudre, peut améliorer sa note, alors que si l'élève ne le signale pas, il peut au contraire perdre des points. Cela suppose évidemment des problèmes appropriés.

4) En guise de conclusion, où décidément social et cognitif sont vraiment liés

Ce texte a été écrit récemment à la suite d'une recherche INRP par une équipe de professeurs du lycée dont nous faisons partie.

Bilan à propos de" l'expérimentation "(1982)

L'existence de cette recherche, pour laquelle nous n'avions pas été initialement pressentis (les collègues suggérés s'étant récusés), nous a permis de résister aux vents contraires de ces dernières années de la façon suivante:

1) nous avons pu nous réunir une fois par semaine (2 à 3 h. les deux premières années, 1h.30 à 2h. la dernière) avec une réelle régularité: être rémunéré, cela aide à la régularité.

2) notre équipe a intégré la première année une maitresse auxiliaire,les deux années suivantes deux nouveaux venus: là encore,une peréquation financière assure une solidarité plus durable dans le groupe qui finalement fonctionne autour de six personnes.

3) cela nous a permis de survivre à la déprime générale de notre lycée (lycée de périphérie parisienne) et de résister successivement ou simultanément à

a) "les élèves sont de plus en plus nuls"

b) "tu ne mériteras la géométrie que si tu réduits $1/b+1/\sqrt{a}+1/\ 7(a-\sqrt{b})$ correctement en moins d'une seconde"

c) les classes hétérogènes, un vrai casse tête suicidaire

d) l'idée que nous ne savons qu'officier, derrière nos bureaux, sclérosés et inaptes, nous croisant les bras, ne rêvant que de vacances, sans scrupule aucun.

e) à l'insidieux retour de pseudo-aphorismes tels que: "pas de mathématiques sans efforts, pas d'efforts sans souffrances, donc vivent les mathématiques dans et par la souffrance".

Nous avons même réussi à garder le goût de la liberté (pédagogique) dans le dédale des thèmes, sujets et autres rondelles mathématiques, tout cela pour aboutir à quelques banalités que nous nous sommes réappropriées comme des élèves sérieux et sages.

Il y a quatre ans, avec l'arrivée en seconde des programmes Haby, nous sommes partis de l'idée qu'il devait être difficile aux élèves de voir une certaine cohérence dans les nouveaux programmes; nous avons donc axé notre travail sur toutes les facettes, les lectures possibles de l'idée de relation, en particulier à travers l'algèbre et la géométrie (à cette époque, nous étions deux, l'équipe n'était pas constituée).

L'année suivante, nous avons repris cette idée, associée notamment à l'utilisation du pantographe. Nous avions beaucoup résisté à l'emploi de ce pantographe pour deux raisons: d'abord,nous voulions bien d'un outil, mais nous ne voulions pas faire ni de physique ni de technologie; ensuite les élèves n'étant pas du "matériel de laboratoire", il nous était nécessaire de clarifier la notion d'expérimentation.

Actuellement nous construisons le programme de l'année de seconde de la façon suivante: nous essayons que chaque sujet de travail permette (en partie au moins) une double interprétation algébrique et géométrique pour:

a) apprendre aux élèves un souci de cohérence entre les diverses approches possibles

b) permettre aux élèves de **s'auto-contrôler:** les élèves qui arrivent en seconde actuellement pensent qu'il n'y a de démonstration que par le calcul; or le résultat de ce calcul, seul l'enseignant peut leur dire s'il est exact ou non. Apprendre aux élèves à interpréter systématiquement une équation, une inéquation par une représentation graphique (vivent la calculette, le papier, les crayons de couleurs et .... les changements d'échelle), c'est le moyen de vérifier avec une bonne probabilité d'exactitude la justesse de leurs calculs, quand cela ne reste pas la seule méthode possible pour encadrer des solutions d'équations ou d'inéquations. A l'inverse, un problème de géométrie peut avoir été avantageusement remplacé par un calcul algébrique qui corrobore une conjecture difficile à expliciter, démontrer, en termes géométriques.

c) avoir une double approche systématique des propriétés **poctuelles et globales** (éventuellement locales) des applications: une application définie point par point conduit très rapidement à des méthodes algébriques, qui masquent le difficile problème de l'image d'un sous ensemble, évitent le problème de la caractérisation globale de l'application par opposition aux propriétés des couples du graphe: là, le pantographe s'est révélé un outil intéressant car il permet **une approche intuitive globale** de la notion de transformation: on peut transformer un sous ensemble du plan directement, pour aboutir à transformer une droite, un cercle, un nuage de points, etc.

Cela nous a imposé:

a) de revenir à une exploration systématique du plan repéré (régionnements par disques, équations, inéquations de toutes sortes dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$).

b) d'introduire des applications qui transforment par exemple une droite en une droite,un cercle, une courbe,un nuage de points:il n'y a pas que des bijections ni que des applications affines,ni que des applications continues.

c) de donner des doubles définitions des transformations: la définition algébrique, et une définition de construction exploitant les propriétés globales. Par exemple, pour l'homothétie, on peut prendre la définition classique; mais dans une configuration donnée, on peut construire par <u>intersections de droites</u> tous les points transformés par l'homothétie caractérisée par (A,B) ——> (A',B'), cela en évitant de calculer, préciser k .

d) d'introduire systématiquement la notion de barycentre et de pondération des points: les élèves exploitant cette notion par le biais du dessin, cela leur permet de conjecturer (en partie) sans toujours bien maîtriser le calcul vectoriel.

Un espoir de meilleur maîtrise, par les élèves, de ce calcul vectoriel et de ce que sont les fractions semble en partie avoir été réalisé. Mais nous n'avons aucun mode d'évaluation de ce progrès, si ce n'est que les élèves repèrent dans une configuration où il y a de l'homothétie,une valeur approchée de k satisfaisante, quelle que soit la valeur de k dans l'un des quatre intervalles clefs; de même 1/3, 1/n , ne sont plus seulementdes nombres décimaux, mais prennent par exemple des places correctes sur une droite graduée.

S'est bien sûr posé le problème de l'évaluation du niveau des élèves.

La seconde année, nous avons proposé des textes différenciés par niveau d'orientation souhaitée en fin d'année; cela ne nous satisfait pas tout à fait dans la mesure où il nous parait indispensable que tous les élèves pratiquent la géométrie, en raison de son approche globale; mais les élèves qui n'en feront plus par la suite ont en fin d'année des difficultés à accepter cette contrainte.

Cette année, nous essayons de mettre sur pied une grille un peu plus détaillée des exigences que nous mettons aux passages en classe de première, grille que nous essayons d'élaborer avec tous les collègues de maths....

Pour l'an prochain, nous voyons un gros travail de rédaction des problèmes de géométrie, permettant une double approche, utilisant la géométrie des transformations et non pas des formes très descriptives n'exploitant pratiquement pas ces transformations. Et puis, nous espérons trouver un peu d'autres sujets de réflexion mathématique , un peu plus gais et tout aussi pertinents !...

II Représentations et organisations de l'enseignement : un exemple, en classe de seconde indifférenciée

1) Un dernier texte, à propos des "nouveaux" programmes

Réflexions à propos du programme de mathématique des nouvelles secondes.

Avant la réforme Lichnérovitz, les élèves à qui l'on enseignait "les mathématiques anciennes" avaient par ailleurs une culture générale qui leur permettait de dégager eux-mêmes les concepts et structures sous-entendus.

Cette culture générale était donnée d'une part par leurs familles ,puisque seuls les enfants de la bourgeoisie avaient accès au lycée , d'autre part l'école utilisait implicitement ces structures et concepts dans toutes les disciplines enseignées.

Etant donnée l'évolution de la population scolaire, l'école doit maintenant enseigner explicitement des structures et pas des contenus.

Enseigner les mathématiques, c'est enseigner ce qui sert de soubassement mathématique à la modélisation des sciences contemporaines et c'est enseigner le passage de la réalité concrète aux mathématiques. C'est ,ensuite, constituer le réel mathématique de l'ensemble des démonstrations. C'est aussi enseigner à cristalliser le raisonnement mathématique à partir d'un tâtonnement et ensuite à l'écrire dans une forme mathématique; ce qui équivaut à en assurer la rigueur logique et la transmissibilité.

Aujourd'hui l'école est obligatoire jusqu'à seize ans, et nous tenons à faire des mathématiques avec tous . C'est pourquoi nous nous inquiétons du contenu des nouveaux programmes de seconde, après ceux mis en place par Haby, dans les classes de CES. Par exemple, dans le premier cycle on enseigne actuellement la règle de trois; or cette règle de trois n'est qu'une autre formulation d'une modélisation linéaire, avex deux inconvénients majeurs à l'énoncer sous cette forme: d'une part, cela ne met pas en évidence ce que les mathématiques vont conserver (la notion de linéarité), d'autre part cela ne précise pas quelles hypothèses, extérieures au traitement mathématique, sont formulées sur la réalité analysée.

Renoncer à dégager les structures, leur fonctionnement et leur élaboration, en regard de l'usage courant qui en fait par la communauté qui les utilise à d'autres fins ;(les utilisateurs doivent à chaque fois préciser les hypothèses leur permettant l'utilisation des mathématiques) , pour n'enseigner que ces utilisations, c'est renoncer à penser mathématiquement ces utilisations, pour y suppléer un stock d'évidences. C'est, par exemple, véritablement comdamner la plupart des enfants à des successions de recettes mécaniques face à des outils (calculatrices, ordinateurs) destinés, en principe , à simplifier les techniques de calcul. En seconde, on en revient à une géométrie où il est question de "fréquenter" les figures, où il n'est plus question de raisonner donc à plus fortes raisons de faire des mathématiques. En Algèbre on en vient à quelques techniques de calcul plus ou moins compliquées qu'on ne s'est pas donné la

.../...

peine d'introduire, masquant ainsi les questions qui les fondent, aussi bien historiquement que pédagogiquement (limites,continuité,les paramètres sont "indésirables"). Là encore le raisonnement est absent;où sont les mathématiques sans formalisation littérale ?

Il n'est pas question, pour nous, de revenir à un enseignement hyper-formalisé, ne faisant pas appel aux qualités d'imagination et d'intuition des élèves; mais nous pensons avoir besoin, pour enseigner en seconde,d'une liberté suffisante pour nous permettre de restructurer un programme qui nous semble être un collage sans unité.

Nous demandons donc une année transitoire pour penser ce programme et essayer de lui donner une cohérence et une rigueur sans lesquelles il n'y pas de mathématiques; afin de sortir de l'ornière d'une hyperformalisation qui ne respecte pas les processus de création, sans tomber dans un empirisme qui ne produit pas de mathématique.

Mesdames et Messieurs

Professeurs de Mathématiques au Lycée

2) Organisation de l'enseignement des mathématiques en 81/82

Nous avons considéré comme incontournables (cf. ci-dessus) les points suivants :

* les représentations graphiques, avec le passage de l'algébrique au graphique, l'exploitation du graphique et le passage du graphique à l'algébrique
* les transformations du plan et les applications d'une façon générale, avec leur langage spécifique
* le début des approximations
* et, de façon "transversale", R et l'infini (ce n'est pas nouveau et ce n'est pas fini)

Une première séance donne le ton, en introduisant un certain nombre de "grandes questions", présentées sous forme paradoxale (l'infini en particulier) et où l'on pose d'emblée le problème de la démonstration. Le premier cycle est fini, on aborde un enseignement plus spécialisé, délibérément scientifique.

Nous continuons par des activités sur la notion de relation, pour déboucher sur les applications et leur langage, avec les cas particuliers des fonctions numériques et des transformations du plan.

Les fiches 1, 2, 3 illustrent ce que nous avons donné aux élèves à ce sujet, pour bien introduire dès le début de l'année, et de façon *EXPLICITE*, les changements de registre.

Nous avons ensuite abordé la géométrie, avec des rappels de géométrie vectorielle, un problème sur les symétries centrales (fiche 4) et un autre pour préparer les homothéties (fiche 5).

Une mise au point sur les homothéties a été faite en cours puis un certain nombre de problèmes de géométrie ont été proposés aux élèves, problèmes de construction en particulier (fiches 6 et 7 à titre d'exemples).

Deux points de vue sur le même objet.

En mathématiques, on ne s'intéresse guère qu'aux propositions vraies.

Essayez par tous les moyens de trouver tous les couples (ou au moins le plus possibles) (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui rendent les phrases suivantes vraies, indépendamment les unes des autres.

Dans un premier temps, vous utiliserez simultanément tous les moyens que vous connaissez déjà : algèbre, représentation graphique etc..., puis <u>après</u> ce bricolage, alors seulement vous essayerez de rédiger.

1) $y = 3x + 5$
2) $4x + 5y + 2 = 5x - 3y + 1$
3) $xy + 12 = 0$
4) $y^2 + x + 3 = 0$
5) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

Si maintenant l'énoncé devient $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ ou $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ le problème devient-il plus facile ? ; plus difficile ? en quoi ?

<u>Conclusion</u> faites un bilan de ce travail : essayer d'énoncer ce que vous avez appris, les difficultés pratiques ou mathématiques que vous avez rencontrées

Travail n° 2.

1) Pour se donner une relation, il faut et il suffit de se donner l'ensemble source, l'ensemble but, le graphe (l'ensemble des couples du produit cartésien qui rendent une phrase mathématique vraie ou encore une partie du produit cartésien)

2) Une application est une relation qui a une propriété particulière, laquelle? Donner une traduction géométrique de cette propriété dans le cas où la source est une partie de $\mathbb{R}$ et le but aussi.

3) La relation f est l'ensemble des couples de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ rendant la phrase suivante vraie:

$$3x+4y = 3+7x-y.$$

Préciser l'ensemble des images de 2, de a; puis l'ensemble des antécédents de 2, de a avec:

a) x est dans la source et y dans le but

b) y est dans la source et x dans le but

Est ce une application?

Donner une interprétation géométrique de <u>tous</u> ces résultats.

Mêmes questions avec $xy-y+2x-6=0$

$$x^2+x+y=0$$

$$y^2-x=3x+y$$

Travail n° 3

Composées d'applications.

1) On suppose admises les propriétés suivantes.

Dans le plan, • il existe des droites incluses
• deux droites sont sécantes en un point ou sont parallèles : alors elles sont ou confondues ou disjointes
• par tout point du plan, il existe une parallèle et une seule à une droite donnée.
• par tout point du plan, il existe une perpendiculaire et une seule à une droite donnée.

a) Dans un plan P, on se donne une droite D et un point $S \notin D$.
A tout point M du plan, on fait correspondre m point d'intersection de la droite D et de la droite (S M)
• Représenter cette transformation par au moins trois points et leurs transformés
• Est ce une application?
• Est ce une injection?
• Est ce une surjection?
• Modifier l'énoncé pour que cela devienne une application surjective.
• Quels sont les points tels que $P_{(D,S)}(M) = m$ où $P_{(D,S)}$ designe la transformation précédente.
• Etude de $P_{(D',S')} \circ P_{(D,S)}$ (envisager tous les cas)

b) Soient D et Δ deux droites du plan ; à tout point M de D on fait correspondre M_1 de Δ tel que (MM_1) est orthogonale à Δ on appelle h cette transformation.
• Est ce une aplication? Une injection? Une surjection?
• Quels sont les points doubles?
• Etudier $P_{(D',S')} \circ h$

2) Soit h $\quad P \longrightarrow P$ $\quad M(x,y) \longmapsto M'(x',y') \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ $\qquad g$ $\quad P \longrightarrow P$ $\quad M(x,y) \longmapsto M'(x',y') \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

• Etude de h, g, h∘g, g∘h.
• Représentation. Le dessin vous suggère-t-il une réponse à la question : quelle est l'image d'une droite par h∘g ?

Travail n°. 4.

Symétries centrales

Soit S_O l'application de P dans P qui à M associe $S_O(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

① Est ce bien une application ? Est elle bijective ? Quel est l'ensemble des points doubles ?

② Quelle est l'image d'une droite ? L'antécédent d'une droite ?

③ a) Etant données deux droites D et D' donner l'ensemble de toutes les symétries centrales qui transforment D en D'

b) Donner toutes les symétries centrales qui laissent invariante la figure formée par les deux droites.

④ Soit S_O la symétrie de centre O ; soit $S_{O'}$ la symétrie de centre O' Caractériser l'application $S_O \circ S_{O'}$. Quel est l'ensemble des points doubles ?

mêmes questions avec $S_{O'} \circ S_O$.

On représentera 3 points A, B, C et leurs transformés par chacune des deux applications puis le transformé de la droite (A B).

⑤ Problèmes de distances.

a) montrer que la symétrie de centre O conserve les distances. Quel est le transformé d'un cercle de centre A et de rayon R ? discuter suivant la position de A.

b) Etant donnés deux cercles, donner toutes les symétries qui transforment l'un en l'autre.

donner les symétries qui laissent invariante la figure formée par les deux cercles.

travail n° 5.

(A) Dans un plan affine euclidien, on prend un point O.
Soient A et B deux points, C et D les images de A et B dans la symétrie de centre O. Quelle est la nature du quadrilatère (A,B,C,D) ?

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Soit P son transformé par S_O, où se trouve P? Soit N le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, Q son transformé par S_O; Où se trouve Q? Nature de (N,M,P,Q)? Soit A' l'intersection des droites (OA) et (MN); C' l'intersection de (PQ) et (OC); B' celle de (MQ) et (OB); D' celle de (OD) et (NP). Nature du quadrilatère (A'B'C'D') ?

(B) Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ calculer $\overrightarrow{AC}$

Calculer $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$

Utiliser Thalès pour calculer $\overrightarrow{NA'}$, $\overrightarrow{ND'}$

Calculer $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{D'C'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$

Soient $N' = (A'D') \cap (NO)$, $M' = (A'B') \cap (OM)$, $P' = (C'D') \cap (OP)$
$Q' = (B'C') \cap (QO)$

Calculer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\overrightarrow{M'N'}$, $\overrightarrow{M'Q'}$, $\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{N'P'}$

Que va-t-on appeler A", B", C", D"? Calcul de $\overrightarrow{A''B''}$, $\overrightarrow{B''C''}$, $\overrightarrow{C''D''}$, $\overrightarrow{D''A''}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Continuer le problème ...

(C) Si au lieu de $\frac{1}{3}$, on avait choisi $-\frac{1}{3}$ comme coefficient, quelles seraient les modifications apportées?

<u>Remarque</u>. la question A est à traiter seulement avec les symétries centrales et les propriétés de la symétrie: définition; image de $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$); $S = S^{-1}$, l'image d'une droite.

Devoir à faire sur feuille.

① Etant donnés deux points A et B, on désigne par I le milieu de (A,B). I étant donné, pouvez vous construire A et B ?

② Etant donnés 3 points A, B, C, on désigne par I, J, K les milieux respectifs de (A,B) ; (B,C) ; (C,A). I, J, K étant donnés, pouvez vous construire A, B, C ?

③ Etant donnés quatre points A, B, C, D, on désigne par I, J, K, L les milieux respectifs de (A,B) (B,C) (C,D) (D,A). I J K L étant donnés, pouvez vous construire A, B, C, D ?

<u>première méthode proposée</u> : (rappel $S_A \circ S_{A'} = t_{2\overrightarrow{A'A}}$)

• S'il existe une solution et si on se donne A, peut-on construire B ? puis C ? puis D ? quelle relation doit exister entre A et D ? quelle condition sur I, J, K, L en déduisez vous ? Si cette condition est vérifiée, pouvez vous répondre à la question.

<u>deuxième méthode</u> Supposez qu'une telle disposition existe. En utilisant ~~une~~ homothéties, trouver une condition nécessaire sur I, J, K, L ; puis démontrez que cette condition est suffisante. Chercher toutes les solutions dans ce cas.

① Démontrez en utilisant les propriétés démontrées en cours que la composée de deux homothéties est une homothétie (ou éventuellement une translation).

② $\mathcal{C}$ un cercle donné, de centre O, de rayon R
D une droite extérieure à ce cercle
Construire M et N appartenant respectivement à $\mathcal{C}$ et D tels que M soit le milieu de (O, N). Discutez l'existence des points en fonction de la distance de O à D et du rayon du cercle (la distance d'un point M à une droite D est la plus petite $d(M,N)$ où $N \in D$)

③ Soit O un point d'un plan P, $\mathcal{H}_O$ l'ensemble des homothéties de centre O, $\mathcal{H}_O^+$ l'ensemble des homothéties de centre O et de rapports strictement positifs.
On définit dans P les relations :

(1) $\mathcal{R}$ $\qquad M \mathcal{R} N \iff (\exists h \in \mathcal{H}_O)\,(N = h(M))$

(2) $\mathcal{S}$ $\qquad M \mathcal{S} N \iff (\exists h \in \mathcal{H}_O^+)\,(N = h(M))$

1 - Dans chaque cas, étudiez si la relation est une relation d'équivalence dans P.

2 - Déterminer dans chaque cas la classe de O, la classe d'un point $A \neq O$.

④ ① Une figure F est globalement invariante par S_O. Si elle contient un point $A \neq O$, que pouvez-vous en déduire ? Si elle contient deux points A et B, distincts, non symétriques par rapport à O, qu'en résulte-t-il ?
② Une figure F est globalement invariante par la translation t de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Si elle contient un point A que pouvez-vous en déduire ?
③ Même question si F est globalement invariante par deux symétries S_I et S_J, $(I \neq J)$ et F contient un point A non situé sur la droite (IJ)
④ F est invariante par une homothétie, puis deux homothéties

Nous avons continué par les rotations, les symétries axiales (cf. devoir du 31 Mars et fiches 9 et 10) pendant qu'en analyse étaient abordées les fonctions du premier et du second degré, avec les représentations graphiques correspondantes et leur utilisation pour résoudre équations et inéquations, puis d'autres fonctions réelles. L'année s'acheva avec les activités sur produit scalaire et géométrie analytique d'une part (cf. fiche 11) et fonctions trigonométriques d'autre part.

Devoir pour Mercredi 31 mars

1) Soit A un point du plan, D_1 et D_2 deux droites sécantes ne passant pas par A. Construire un triangle isocèle (A B,C) de sommet A tel que $B \in D_1$ et $C \in D_2$.
Combien peut-on en construire?

2) Soit A un point du plan D_1 et D_2 deux droites parallèles ne passant pas par A. Construire un triangle isocèle (A BC) de sommet A tel que $B \in D_1$ et $C \in D_2$
Combien peut-on en construire?

3) Soit A un point du plan; M un point quelconque d'une droite D.
Quel est l'ensemble des points N tels que AMN est un triangle isocèle rectangle en A?
même problème avec M sur un cercle $\mathcal{C}$.

4) Soit R une rotation et D une droite.
Trouver l'ensemble des points M tels que la droite (M M') est parallèle à D $[M' = R(M)]$.

Travail sur les symétries orthogonales

Soit un rectangle $(ABCD)$

E le symétrique de B par rapport à la diagonale (AC)

G le projeté orthogonal de E sur (DC)

F le projeté orthogonal de E sur (AD).

$\{H\} = (AC) \cap (EB)$

1) Quelle est l'image de la droite (BC) dans la symétrie de centre H ?

2) Soit H' le projeté orthogonal de H sur (DC) quelle est l'image de la droite (BC) par la symétrie orthogonale d'axe (HH') ? En déduire que G est le symétrique de C par rapport à (HH')

3) Quelle est l'image de la droite (AB) dans la symétrie de centre H ?

4) Soit H'' le projeté orthogonal de H sur (AD). Quelle est l'image de (AB) dans la symétrie d'axe (HH'') ? En déduire que F est le symétrique de A par rapport à (HH'')

5) montrer que la droite (HG) a pour image la droite (HF) par l'application $S_{(HH'')} \circ S_{(HH')}$. En déduire que H, F, G sont alignés

① Soient M_1, M_2, M_3 trois points non alignés. On sait que M_2 est l'image de M_1 par une rotation de centre O et d'angle α, que M_3 est l'image de M_2 par une rotation de centre O et d'angle β. Donner une construction géométrique du point O. Faire une figure et lire sur cette figure les mesures de α et β.

② Une rotation transforme un triangle (A,B,C) en un triangle (A',B',C'). Démontrer que le centre de gravité du triangle (A,B,C) se transforme en le centre de gravité du triangle (A',B',C').

③ Trouver toutes les rotations qui transforment un triangle équilatéral en lui même.

④ On donne une rotation r de centre O et d'angle α et deux lignes (droites ou cercles) L et L'. Construire un point M de L sachant que son image M' par r appartient à L' (Indication : établir que si M existe, M est nécessairement un point commun à L et à l'image de L' par la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$).

<u>Application</u> Construire les triangles équilatéraux dont un sommet est donné, et dont les autres sommets appartiennent à 2 droites parallèles données

Problèmes de distances

Soient A et B deux points du plan. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les cercles qui passent par A et B.

I a) Quel est l'ensemble des centres de ces cercles?

b) Quels sont les axes de symétries de la figure formée par $\mathcal{C}$.

II Soit un repère $(O\vec{i}\vec{j})$ orthonormé soit A le point de coordonnées $(0,1)$ et B le point de coordonnées $(0,-1)$

a) montrer que l'ensemble des cercles qui passent par A et B est l'axe Ox

b) Donner l'équation du cercle de $\mathcal{C}$ dont le centre est M, le point d'abscisse m.

c) Donner l'équation du cercle passant par A, B et C le point de coordonnées $(3,4)$.

III Soient A le point de coordonnées $(1,2)$ et B le point de coordonnées $(2,3)$.

a) trouver l'ensemble des centres des cercles qui passent par A et B.

b) même question qu'au II

c) même question qu'au II.

IV Soit l'ensemble C_m des cercles d'équations:

$$(1-m)x^2 + (1-m)y^2 + 6mx + 6my + 4 - m = 0 \text{ avec } m \neq 1$$

① donner l'équation de C_0 et de C_{-1}

② montrer que tous les cercles de la famille C_m passent par deux points fixes A et B indépendants de m.

③ Quel est l'ensemble des centres de ces cercles.

Voici pour terminer cette illustration quelques interrogations écrites (tout au long de l'année).

n° 1

Interrogation écrite (2h)

On donne la phrase (1) suivante : $xy+2y+x-4=0$.
où x et y sont éléments de $\mathbb{R}$.

1- point de vue algébrique.

1- Trouver les valeurs de y qui rendent vraie (1) si x prend les valeurs suivantes $4, -4, 2, -2$.

2- Trouver les valeurs de x qui rendent (1) vraie si y prend les valeurs $0, 1, -1, 2, -2$.

3- Résoudre (1) Considérée d'abord comme une équation en x, puis comme une équation en y

2- Interprétation géométrique.

Représenter cette relation (1) dans un repère orthonormé où (x, y) sont les coordonnées des points M.
Représenter les points d'abscisses $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$.
Que vous suggère le dessin ?
Interpréter tous les résultats du 1-

3- Point de vue relation

la relation représentée ci dessus où x est dans la source et y dans le but est elle une application ?
préciser les images de x si $x = 1$ ou 2 ou -2 ou $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ ou $-\pi$
préciser les antécédents de y si y vaut soit 3, soit 4, soit $\sqrt{3}$, soit a, soit $\square$.
Est ce une injection ?, Une surjection ?

Interrogation écrite

(1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = -3x^2 - 2x + \frac{8}{3}.$$

- f est elle une application ?
- factoriser $f(x)$
- résoudre $f(x) = 0$.
- En conclusion : f est elle injective ? surjective ?

(2) Dans le plan affine, on définit la transformation suivante :

$M \xmapsto{h} M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$ (O est un point donné)

- faire une figure représentant cette transformation en représentant plusieurs points et leurs images.
- Est ce une application ? une surjection ?
- Y a-t-il un ou des points doubles ?
- Démontrer que, pour tout point M, tout point N, on a :

$$\overrightarrow{M'N'} = -2\overrightarrow{MN} \qquad (M' = h(M)\ ;\ N' = h(N)).$$

- Utiliser ce résultat pour montrer que si 3 points sont alignés leurs images sont alignées - En conclure sur l'image d'une droite.
- Y a-t-il des droites invariantes ?

N'oubliez pas de bien distinguer ce qui est suggestion et ce qui est démonstration.

Interrogation écrite (2h)

(1) Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2-8}{x+3}$$

1) Domaine de définition de f. Montrer (si possible avec une division) que $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x+3}$.

2) Représenter f dans un repère : choisir au moins 10 points judicieusement répartis. Suggérer l'allure de la courbe. Quel est le tableau de variations probable de f ?

3) Quel est l'antécédent de -8 ?

4) Calculer le taux d'accroissement de f

5) montrer que f est croissante sur $[-2, +\infty[$

6) Trouver <u>une</u> valeur A de x telle que si $x > A$, alors $f(x) > 1000$.

---

(2) Dans un plan affine on se donne 3 points A, B, C non alignés. On appelle M, G, I les points qui, s'ils existent vérifient :

$$3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$
$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$
$$2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

1) M, G, I existent-ils ? Sont ils uniques ?
2) Faites une figure soignée. Que suggère cette figure ?
3) Démontrer que B, G, I sont alignés. Quel autre alignement pouvez vous démontrer ?
4) Soit une droite $\mathcal{D}$ et D un point quelconque de $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points H tels que :
$$3\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{0}$$
où D prend toutes les positions possibles sur $\mathcal{D}$.
<u>Précisez l'ensemble $\mathcal{E}$</u>

Interrogation écrite.

① Dans un plan euclidien repéré par $(O\vec{i}\vec{j})$ on appelle t la transformation qui à tout point $M(x,y)$ fait correspondre $M'(x'y')$ tel que :

$$\begin{array}{ccc} \text{plan} & \xrightarrow{t} & \text{plan} \\ M & \longmapsto & M' \\ (x,y) & & (x',y') \end{array} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} x' = -3x + 7 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$$

• Quelle est l'image A' de $A(1;-3)$? quelle est l'image B' de $B(2;5)$

• Y a-t-il un point double ?

• Démontrer que t est une homothétie

• Faites une figure et assurez vous que les résultats sont cohérents.

• Calculer $d(A;B)$. Calculer $d(A';B')$

• Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x-4y+7=0$. Donner l'équation de son image (n'oubliez pas de contrôler sur le dessin que les résultats sont cohérents)

• Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0,2)$ et de rayon 3. Quelle est l'équation de ce cercle ?

• Quel est le transformé $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par t ? (n'oubliez pas de le représenter)

• Quelle est l'équation de $\mathcal{C}'$?

2) Les années suivantes, évolution des choix sur l'enseignement des homothéties.

En 82/83, l'embrayage sur les fonctions d'une part et la géométrie d'autre part s'est fait en sens inverse et les barycentres ont été exploités différemment (cf. ci-dessous).

En 83/84, l'apprentissage des homothéties a de nouveau démarré vite après l'introduction des suites par des exemples paradoxaux, mais un certain nombre de changements ont été introduits par rapport aux deux années précédentes.

Pour mieux caractériser ces évolutions, nous avons précisé nos points de vue successifs en ce qui concerne l'enseignement des homothéties pendant ces trois années (et la suivante).

Nous avons joint pour illustrer cette analyse les fiches sur les homothéties proposées en 83 ainsi que quelques autres textes, dont un sur les changements de points de vue en mathématiques et quelques interrogations écrites.

En 81-82, nous avons commencé le travail sur les homothéties de façon très classique, à partir de la définition vectorielle après avoir revu et manipulé des symétries et des translations : il s'agissait d'explorer plus ou moins les propriétés d'une transformation ponctuelle du plan affine, définie vectoriellement. Nous avions une bonne classe, c'était la première génération d'élèves Haby.

En fait, les élèves ont eu surtout à redémontrer les propriétés dites essentielles, figurant habituellement dans un cours, avec un accent plus important mis sur la composition des applications ; les homothéties ne sont intervenues dans les problèmes que de façon quelque peu formelle, servant essentiellment à démontrer des égalités vectorielles et permettant d'éviter le théorème de Thalès (théorème repoussoir de tant d'élèves...), on pourrait dire qu'elles étaient utilisées dans des problèmes descriptifs. Les barycentres ont été traités ensuite de façon classique. En fin d'année, nous nous sommes aperçus que les élèves n'avaient pas appris à prendre beaucoup d'initiatives...

En 82-83, nous avions une seconde à trois langues, très hétérogène. Etant donné les difficultés des élèves de cette classe à utiliser un dessin, nous démarons les homothéties par une définition algébrique (les vecteurs n'ont pas été vus auparavant ; nous n'avons travaillé que les problèmes de représentation d'applications, avec ce que nous appelons les "changements de langage") : une transformation ponctuelle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par quelques points et leurs images et le tableau incomplet correspondant est donné à compléter et à formaliser. En particulier nous avons beaucoup tenu cette année-là à ce que les élèves suggèrent eux-mêmes une formule généralisant quelques cas particuliers (cf. suites). Puis, nous leur avons demandé d'interpréter cela dans un repère orthonormé, ainsi peuvent-ils se rendre compte que l'interprétation géométrique peut suggérer des propriétés tout à fait inattendues pour eux à la seule vue de l'écriture algébrique : alignement de points, image d'un segment (segment parallèle), alignement avec le point double. Ces propriétés globales n'ont pas posé de problème. Ensuite, la difficulté a été de réintroduire la définition vectorielle et voir qu'elle était équivalente à la précédente : et là, la jonction entre les deux approches s'est faite très difficilement. Cela peut être dû, nous semble-t-il, à plusieurs raisons :

* nous avons oscillé entre algèbre, géométrie vectorielle et géométrie affine : il n'y avait pas un point de vue stable qui serve de référence.

* les problèmes de rédaction sont donc devenus très difficiles : il n'était plus clair de séparer ce qui était suggestion (venant du dessin) de ce qui était à démontrer par l'algèbre, les vecteurs ou les propriétés géométriques des homothéties.

* les vecteurs n'avaient en fait qu'un statut vague et trop formel pour la plupart des élèves ; en particulier $\lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est souvent perçu comme une écriture sans aucun sens.

Pour résoudre cette difficulté, nous avons donc chercher à faire reconnaître l'existence d'homothéties sur des dessins, indépendamment de toute démonstration, puis à trouver le centre et le rapport toujours par le seul moyen du dessin. Dans l'ensemble, un certain nombre de notions et de théorèmes concernant l'homothétie ont été acquis, mais justifiés par le dessin dans la plupart des cas, les démonstrations utilisant les vecteurs restant souvent formelles (pour la moitié des élèves peut-être). Acquis signifie ici pouvant être réutilisé pour dessiner des images de points intersection de droites par exemple, ou pour trouver le centre et le rapport d'une homothétie à déterminer, ou pour résoudre quelques problèmes simples de lieu géométrique. Quelque élèves résolvent des problèmes de construction. Par contre quand ultérieurement nous revenons sor les homothéties (à l'occasion des barycentres ou des composées d'applications) nous nous apercevons que tout le pan de la géométrie vectorielle n'est effectivement pas acquis pour beaucoup d'élèves.

<u>83-84</u> : avec toujours un début d'année sans révision mais avec une exploration du plan cartésien, et des manipulations de fonctions, nous décidons de travailler la notion de "vecteur multiplié par un réel" à partir des homothéties. Pour éviter de poser une définition a priori, nous utilisons des pantographes (qui marchent mal, très mal) et nous demandons aux élèves de reproduire un certain travail réalisé avec l'appareil sans pantographe. Ensuite, nous reprenons le travail de reconnaissance de l'existence d'homothéties sur des figures avec deux difficultés nouvelles : d'abord le rôle, et l'existence du point double et d'autre part les homothéties négatives. En fait ces deux difficultés ne seront globalement résolues qu'après l'introduction de la définition classique (qui coule de source pour beaucoup d'élèves). Mais un certain nombre d'autres difficultés apparaissent au cours de cette présentation

* Par cette méthode qui consiste à donner une définition "globale" de l'homothétie (reconnaissance de figures homothétiques), puis à représenter les points images d'autres points, l'articulation ponctuel/global se fait bien tant qu'il ne s'agit pas du point double.

* Du fait du début du travail (avec la pantographe), les homothéties de rapport négatif sont restées des homothéties différentes des autres.

* En conséquence, la multiplication d'un vecteur par un nombre négatif n'est pas acquise : nous nous en apercevons toujours à prpopos du barycentre lorsque nous introduisons les dessins de barycentres de deux points avec l'idée de longueurs proportionnelles aux coefficients ; le résultat par le dessin direct est différent de celui obtenu à partir du calcul vectoriel.

Cela nous amène, l'année suivante, à reprendre le même schéma de travail mais

1° en réduisant au maximum la place et l'utilisation du pantographe

2° en introduisant de façon autoritaire le rapport $k \in R$ le plus vite possible de façon à énoncer $|k| > 1$ agrandissement,...

$k < 0$ centre entre A et A'

$k > 0$ centre extérieur à AA'

sans passer par l'énoncé vectoriel

3° l'outil vectoriel sert non pas à la recherche de description de situation ou de construction ou de lieu, mais aux démonstrations (à la rédaction donc).

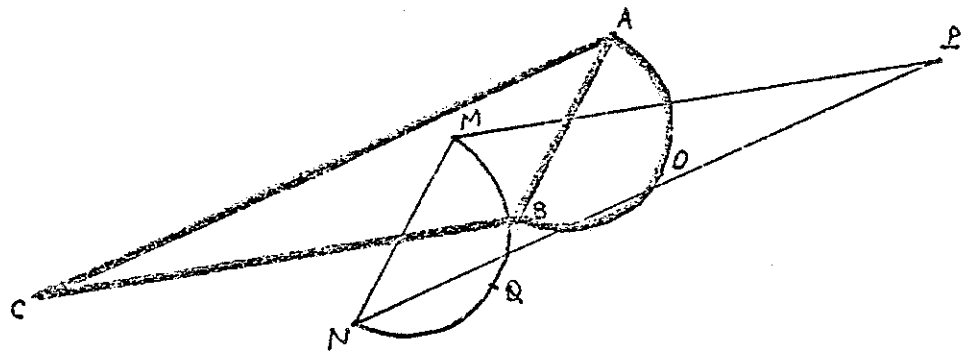
Et quand nous reprenons la notion de multiplication d'un vecteur par un scalaire avec la double approche dessin direct et dessin par l'intermédiaire du calcul vectoriel - au moment de l'étude des barycentres ou pour ceratins problèmes de lieux- il semble que la notion soit stabilisée au niveau souhaitable en seconde.

Plus précisément, il semble que la linéarité dans un espace vectoriel de dimension deux ait comme support stable le plan affine euclidien et que la liaison $\overrightarrow{AB}$, $d(A,B)$, $\|\lambda \overrightarrow{AB}\|$ soit renvoyée de façon tres concrète et assez rigoureuse aux propriétés de ce plan affine euclidien.

Annexe T_2

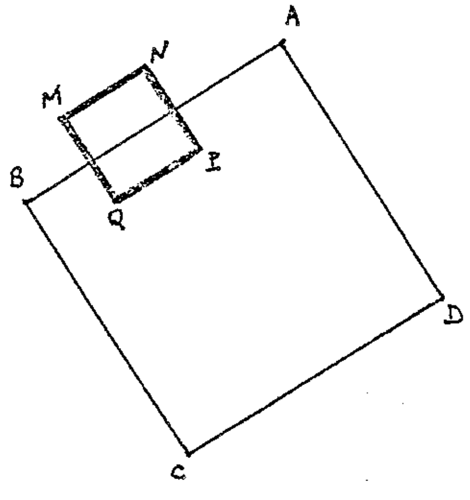
1) Sur chacune des figures suivantes F' (en rouge) représente t'elle une figure homothétique de F (en noir) ?
Si oui, représenter le ou les centre (s), indiquer le ou les rapport (s) et compléter le tableau. si non, donner les raisons de l'impossibilité de trouver une homothétie.

a)



A ⟶ ?
? ⟶ Q
B ⟶ ?

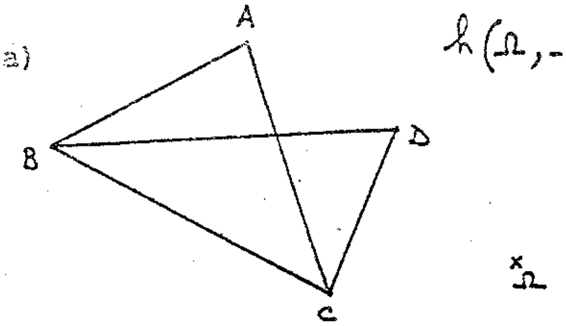
b)



M ⟶ ?
P ⟶ ?
? ⟶ D

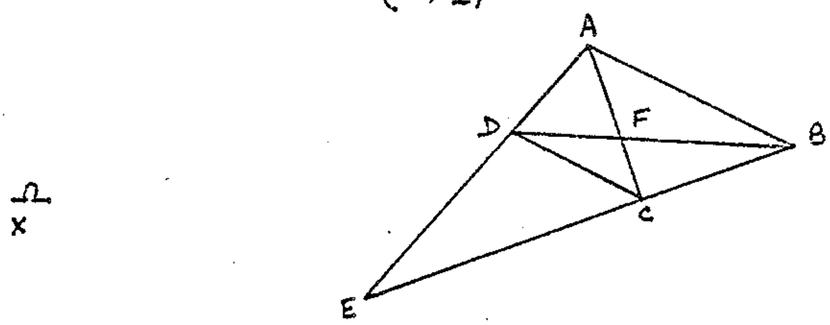
2 Dessiner les homothétiques des figures suivantes dans les homothéties précisées dans chacun des deux cas

a) $h(\Omega, -\frac{1}{3})$



Expliquer votre construction

b) $h(\Omega, \frac{3}{2})$



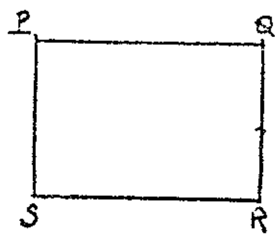
Donner 3 égalités vectorielles que vous pouvez déduire de la définition de l'homothétie (en utilisant le centre ou non)

(3) Soient trois points distincts A,B,C d'un plan P.
Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

a) Représenter A, B, C, G, H.
b) Démontrer que les droites (H,G) et (B,C) sont parallèles
c) Soit K le point de P tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Représenter K sur le schéma précédent. Démontrer que H,G,C,K est un parallèlogramme.

(4) Soit un rectangle PQRS
Construire un rectangle PQ'R'S' homothétique de PQRS dont l'aire soit quadruple

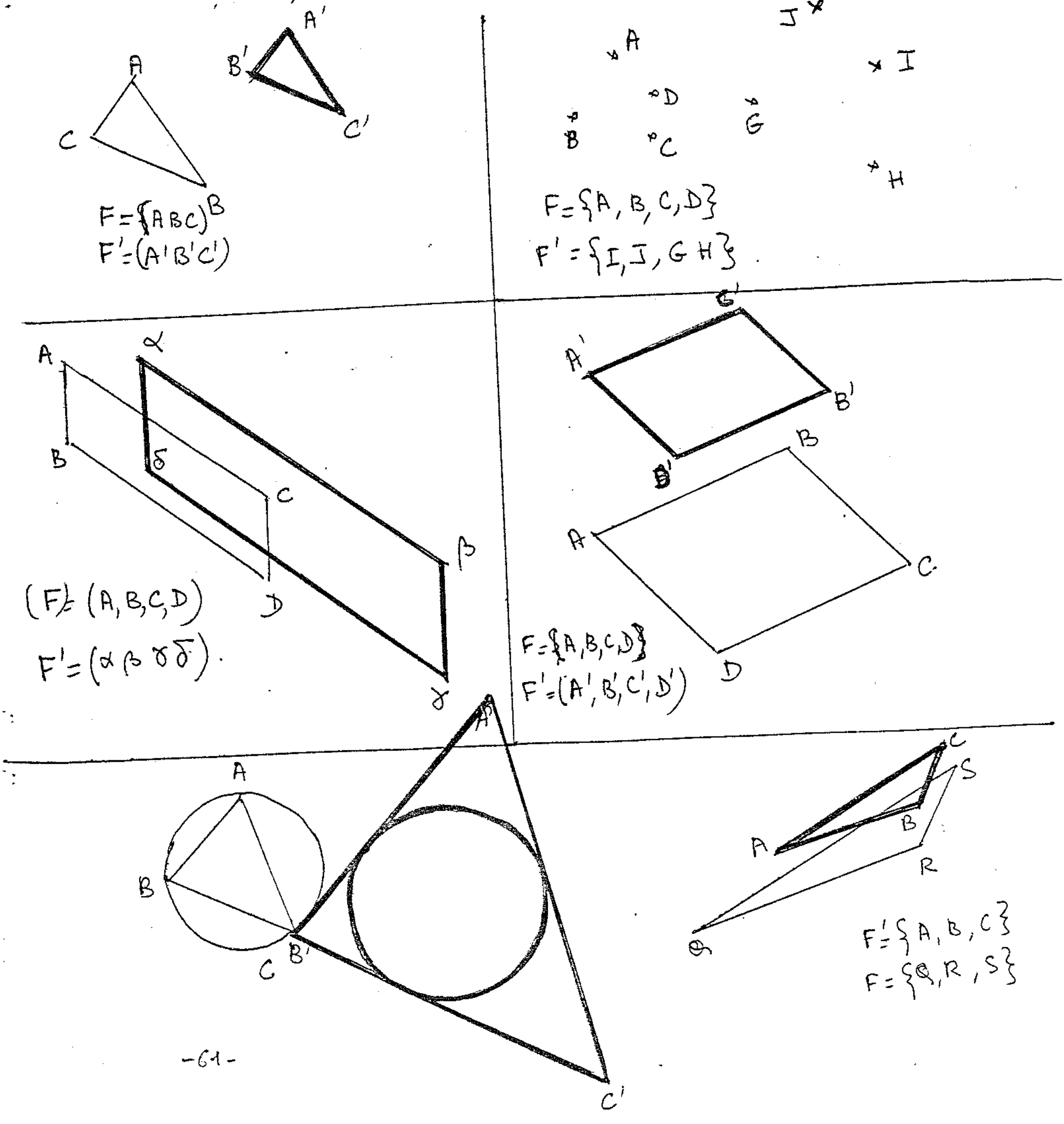


Test 1

1) Sur chacune des figures suivantes, (F') (en rouge) représente-t-elle une figure obtenue à partir de (F) (en bleu) à l'aide d'un pantographe ?

• Si oui, représenter la ou les positions du pied et indiquer le rapport que vous utiliseriez

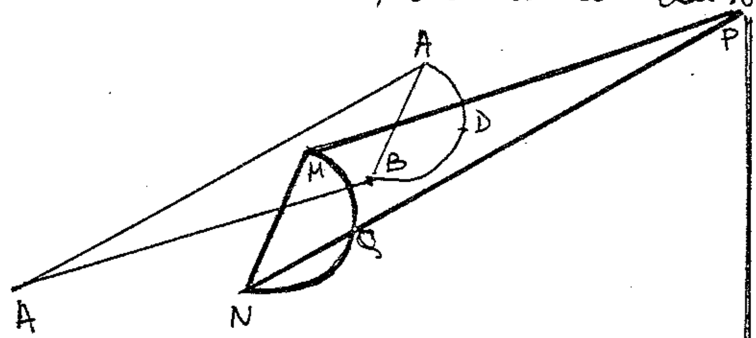
• Si non, donner les raisons de l'impossibilité.



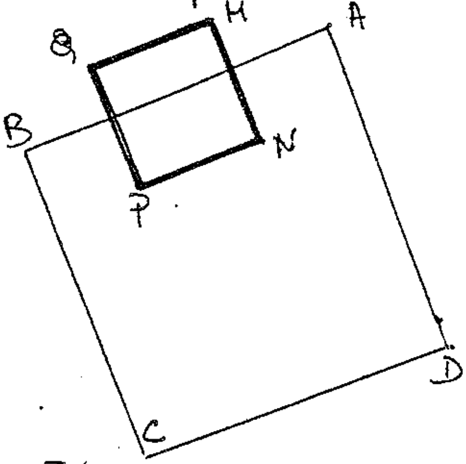
Test n° 2 · (après le cours)

1) Sur chacune des figures suivantes : F' (en rouge) représente-t-elle une figure obtenue à partir de F (en bleu) à l'aide d'un pantographe.

- si oui, représentez la ou les positions du pied et indiquez le rapport que vous utilisez
- si non, donnez les raisons de l'impossibilité

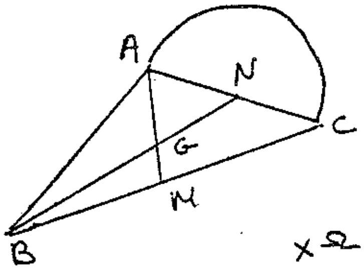


F={A B C D}   F'={M,N,P,Q)



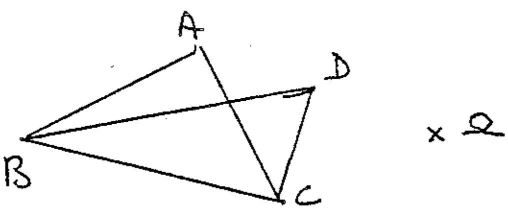
F=(A,B,C,D)   F'=(M,N,P,Q)

2) dessiner les homothétiques des figures suivantes dans les homothéties précisées dans chaque exemple.

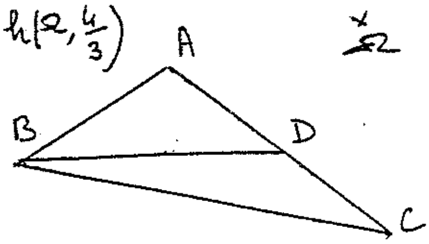


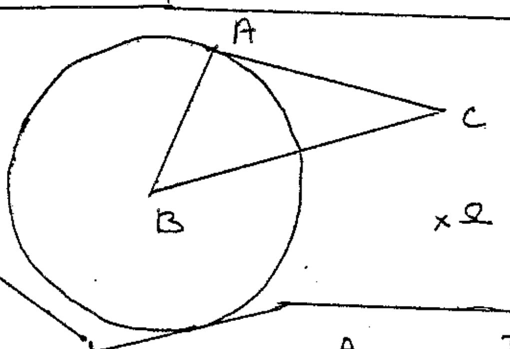
$h(\Omega, 3)$

$h(\Omega, -\frac{1}{3})$

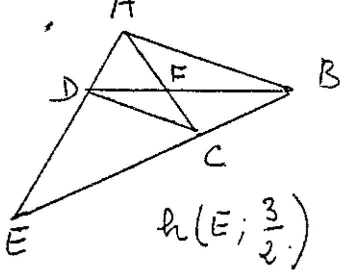


$h(\Omega, \frac{4}{3})$

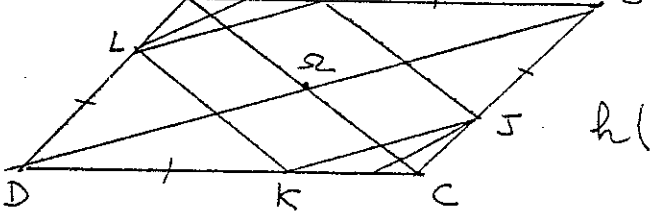




$h(\Omega, -\frac{4}{3})$

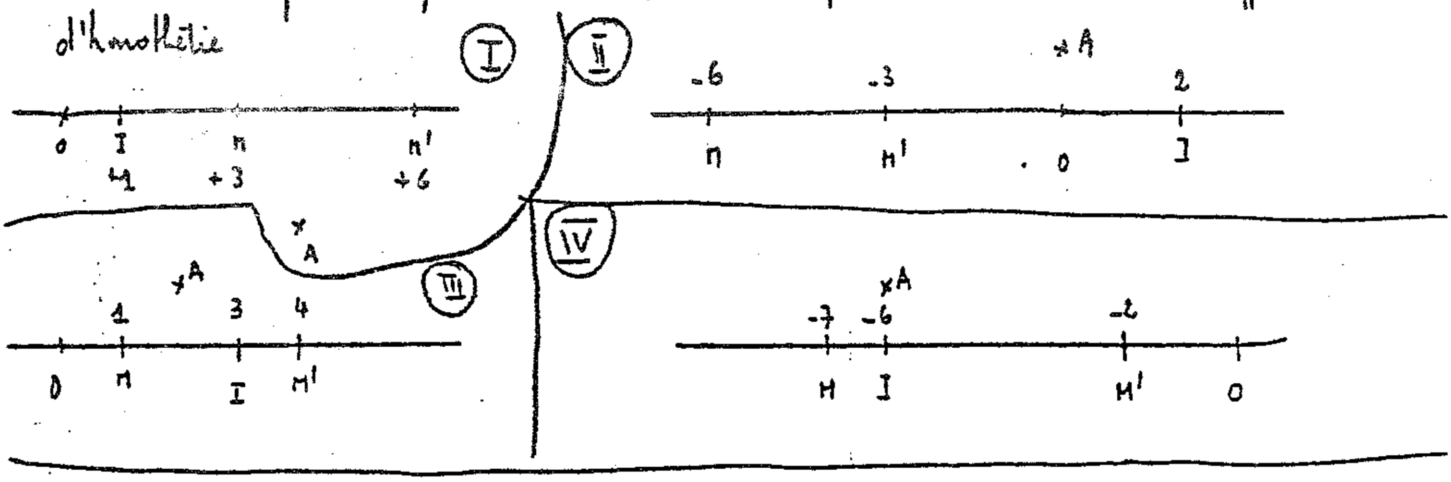


$h(E; \frac{3}{2})$



$h(\Omega\ \frac{2}{3})$

① Sur les diverses figures suivantes, dessiner l'image de A dans l'homothétie de centre I qui transforme M en M' - Puis préciser la valeur du rapport d'homothétie



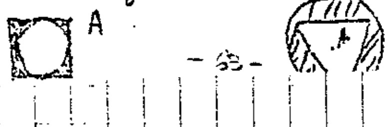
② ~~Dessiner~~ Soit ABCD un carré. Tracer l'image de ABCD par $h(\Omega; 3)$ on obtient une figure $A'B'C'D'$. Que pensez vous de $A'B'C'D'$? preuves ?
refaites le même travail avec $h(\Omega_1, -3)$; on obtient $A''B''C''D''$.
que pensez vous de $A''B''C''D''$? Comparez ces trois figures - Commentez les.
Comparez les mesures de leurs surfaces. Quelle règle vous suggère ce résultat
Pouvez vous le démontrer ?

③ on donne un triangle $A_0A_1B_0$ et un point 0 aligné avec A_0 et A_1 ; on suppose que $d(A_0, 0) = 2$ et $d(A_0, A_1) = 1$. Dessiner l'image du triangle $A_0A_1B_0$ dans l'homothétie de centre 0 qui transforme A_0 en A_1. On note $A_1A_2B_1$ ce nouveau triangle ; dessinez l'image de ce triangle dans l'homothétie de centre 0 qui transforme A_1 en A_2 : on note $A_2A_3B_2$ ce nouveau triangle - Continuer. Quelles remarques ? Quelles sont les distances $d(A_1, A_2)$ $d(A_2, A_3)$, $d(A_3, A_4)$? Pouvez vous donner sans trop de calculs la dist $A_{19}A_{20}$? $A_{199}A_{200}$? etc...

④ on donne deux triangles ABC et A'B'C' tels que $d(A,B) = 8$; $d(A,C) = 6$; $d(B,C) =$
$d(A',B') = 4$ $d'(A',C') = 3$ $d(B',C') = 2,49$. Existe-t-il une homothétie qui transforme A, B en ~~C~~ $A'_1 B', C'$.

⑤ on donne 3 points ABC distincts non alignés -
Construire B' et C' tels que : $B' = h(B)$ $C' = h(C)$ h : homothétie centre A, rapport 3
Construire B'' et C'' tels que $B'' = h'(B)$ $C'' = h(C)$ h' : homothétie centre rapport -2.
Comparez $\vec{BC}$ et $\vec{B'C'}$, $\vec{B'C'}$ et $\vec{B''C''}$, $\vec{BC}$ et $\vec{B''C''}$. Qu'en concluez vous ?

⑥ ~~tracer~~ Dessiner l'image de F hachuré par $h(A; -2,5)$



DEUX TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN.

I On considère la fonction f de P vers P qui transforme chaque point M en un point M_1 défini de la façon suivante:

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O choisi une fois pour toutes.
Pour un point M quelconque ("balladeur") on trace la demi-droite [OM)
elle coupe $\mathcal{C}$ en M' et M_1 est alors le milieu de [MM'].

1° Construisez les images de 5 points quelconques du plan P:
deux à l'intérieur de $\mathcal{C}$, deux à l'extérieur de $\mathcal{C}$, et un sur le cercle.

2° Quelles sont les images de M s'il est confondu avec le point O ?
Dans les autres cas: tout point M a-t'il une image et une seule par f ?
La relation f est-elle une application de P vers P ?

3° Quel est l'antécédent d'un point M du cercle $\mathcal{C}$?
Quel est (ou sont) l'antécédent du point O par f ?
Dans les autres cas:tout point M a-t'il un seul antécédent par f dans P ?

4° La fonction f est-elle une bijection de P vers P ? Eventuellement modifiez la source et le but pour que f soit bijective.

5° Choisissez 5 points alignés. Trouvez leurs images par f dans P.
Que vous suggère ce dessin ?

6° La phrase "l'image d'une droite par f est une droite" vous semble-t'elle vraie ? Pouvez-vous justifiez votre réponse ?

II On considère maintenant le plan sous deux aspects différents.
D'une part il un ensemble de points, on le note alors P.
D'autre part il est un ensemble de droites, on le lote alors Π .

Soit la fonction g de P vers Π qui transforme chaque point M en une droite D définie de la façon suivante:

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O shoisi une fois pour toutes.
Pour un point M quelconque, on trace la demi-droite [OM),elle
coupe $\mathcal{C}$ en M' et D est alors la médiatrice de [MM']

1) Construisez les images de 5 points distincts quelconques du plan P .

2) Quelles sont les images de M s'il est confondu avec le point O ?
Dans les autres cas: tout point M a-t'il une seule image par g dans Π ?
La fonction g est-elle une application de P vers Π ?

3) Quel est ou quels sont les antécédents d'une droite D qulconque du plan?

4) La fonction g est-elle bijective de $\dot{P}$ vers Π ? Eventuellement,modifiez la source et le but pour qu'elle le soit.

5) Choisissez 2 points distincts et tracez leurs images.
Trouvez une condition pour que ces images soient parallèles.
Trouvez une condition pous que ces images soient concourantes.

(1) Soient trois points distincts A, B, C d'un plan P.
Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Soit G le point du plan tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
a) représenter A, C, G, H.
b) démontrer que les droites (HG) et (BC) sont parallèles
c) Soit K le point de P tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Représenter K sur le schéma précédent. Démontrer que (H, G, C, K) est un parallélogramme.

(2) Soit A un point donné fixe ; soit D une droite donnée, fixe, ne passant pas par A. Soit M_0 un point de D, on appelle M'_0 son image par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{2}{3}$
1/ représenter A, D, M_0, M'_0
2/ Lorsque M parcourt D, quel est l'ensemble des points M' images des points M ? [Si cette question n'est pas claire, alors choisissez trois points M_1, M_2, M_3 de D ; trouvez leurs images M'_1, M'_2, M'_3 - que vous suggère le dessin ? Démontrez ce résultat.]
N. B. Il est rappelé que tout résultat doit être démontré

(3) Dans le plan repéré par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on définit les 6 droites suivantes :

$D_1 : (A\ \vec{V_1})$ $A(0,0)$ $\vec{V_1} = \vec{i} + 3\vec{j}$ $D_3\ (B, \vec{V_3})$ $\vec{V_3} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$. $B(6,0)$
$D_2 : (A, \vec{V_2})$ $\vec{V_2} = 3i + 5\vec{j}$ $D_4\ (B ; \vec{V_4})$ $\vec{V_4} = \vec{i} + \frac{5}{3}\vec{j}$

$D_5 : (C\ \vec{V_5})$ $\vec{V_5} = -3\vec{i} - 9\vec{j}$ $C(4,-9)$.

$D_6 : (C\ \vec{V_6})$ $\vec{V_6} = 2\vec{i} + \vec{j}$

a) faire la figure
b) Quelles sont les droites parallèles entre elles ? pourquoi ?
c) nommer les points d'intersection des droites deux à deux
trouver tous les triangles homothétiques deux à deux en précisant le centre d'homothétie et les images des points.

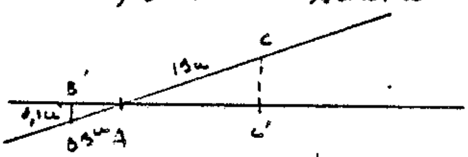
$D_1 \cap D_2 = \{A\}$	$D_5 \cap D_4 = \{a\}$	$D_1 \cap D_3 = \{F\}$	$D_5 \cap D_6 = \{\varphi\}$	$D_2 \cap D_3 = \{G\}$	$D_4 \cap D_3 = \{g\}$
$D_1 \cap D_4 = \{A'\}$	$D_5 \cap D_2 = \{\alpha\}$	$D_1 \cap D_6 = \{F'\}$	$D_3 \cap D_5 = \{\varphi\}$	$D_2 \cap D_6 = \{G'\}$	$D_4 \cap D_6 = \{\gamma\}$

6) Soient un cercle $\mathcal{C}(O; R')$ et un triangle ABC.
Construire un triangle $A'B'C'$ homothétique de ABC tel que A', B', C' soient sur le cercle $\mathcal{C}'$. Justifiez votre réponse.
Combien y a-t-il de solutions ?

7) Soit un rectangle A, B, C, D ; P, Q, R sont trois points "intérieurs" au rectangle. Faire une figure.
Construire un triangle $P'Q'R'$ homothétique de PQR tel que ses deux sommets P' et Q' sont sur les côtés du rectangle.
En déduire une construction du plus grand triangle $P''Q''R''$ homothétique de PQR et qui reste "intérieur" au rectangle $ABCD$.

8) On se donne un rectangle $PQRS$. Construire un rectangle $P'Q'R'S'$ homothétique de $PQRS$ tel que la mesure de son aire soit quadruple de celle de $PQRS$. Combien y a-t-il de solutions ?

9) Un dessinateur doit tracer une droite passant par A et B, deux points du plan. Malheureusement sa règle glisse et il trace (A, B') selon le schéma suivant :



u = unité longueur

le point C est alors représenté en C' ; donnez une mesure de l'erreur commise : pour cela évaluez CC'.

10) Soit D une droite du plan et A et B deux points distincts tels que $(AB) \not\parallel D$. Soit θ l'application du plan P vers le plan P, qui à tout point m associe le point M tel que M est l'homothétique de A dans l'homothétie de centre m qui transforme B en un point ∂ de D.

a) Déterminer l'image M du point m. Déduisez de cette construction que les points m qui n'ont pas d'image par θ sont sur la droite Δ qui passe par B et qui est parallèle à D.

b) Déterminer l'antécédent du point M. Quels sont ceux qui n'ont pas d'antécédent par θ ?

(1) a) Soient A, B, A' trois points d'un plan situés de cette façon : (A, A', B non alignés)

Dessiner l'ensemble de tous les points B' satisfaisant à

1) $\overrightarrow{A'B'} = 2\,\overrightarrow{AB}$

2) $d(A', B') = 2\,d(A, B)$

3) $(A'B') = (A$

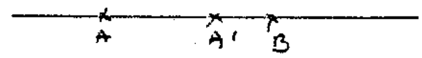
Bien indiquer le nombre de solutions dans chacun de ces cas

comparer les positions des droites $(A'B')$ et (AB) dans chacune des questions précédentes.

b) refaire le même travail avec 1) $\overrightarrow{A'B'} = -1{,}5\,\overrightarrow{AB}$

2) $d(A', B') = -1{,}5\,d(A, B)$

c) mêmes questions qu'en a) et en b) dans la situation suivante : A, A', B alignés :



(2) Soit ABC un triangle quelconque, G son centre de gravité, O le centre de son cercle circonscrit, H l'orthocentre de ce même triangle. Faire trois figures au moins. Que constatez-vous pour les points H, G, O ? Démonstration ? [une méthode : 1) notez AA', BB', CC' les médianes - elles se coupent en G. Voyez que le triangle $A'B'C'$ est homothétique du triangle ABC dans une homothétie que vous déterminerez ; 2) Voyez ce qu'est le point O pour le triangle $A'B'C'$. 3) Concluez]

(3) Dans un plan P, on se donne une droite D et B et C deux points n'appartenant pas à D. Soit M un point quelconque (variable) sur D ; on appelle B' le milieu de $[MB]$, C' le milieu de $[MC]$ et G le centre de gravité du triangle MBC.

Faire une figure. Prenez quatre, cinq, ... positions différentes pour le point M sur D et construisez à chaque fois B', C', G. Que constatez-vous ? Démonstration ? [Méthode : les points M et B' se correspondent dans une homothétie laquelle ? en déduire alors que l'ensemble des points B' est une droite. Puis faire le même travail pour C' et G]

Vers la notion de barycentre

① Dans un plan on se donne trois points A, B, C.

1) existe-t-il un ou des points G tels que

$3\vec{GA} - 4\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$.

Si oui les représenter sur un dessin.

2)- A tout point M du plan, on fait correspondre le point M' tel que $\vec{MM'} = 3\vec{MA} - 4\vec{MB} + 5\vec{MC}$ (on appelle t cette transformation)

Combien M a-t-il d'image par t? t est elle une application? Combien M' a-t-il d'antécédent par t? t est elle une bijection? (n'oubliez pas de rédiger ...)

a) choisir quatre points $M_1 M_2 M_3 M_4$ et dessiner leurs images par t (on les appellera $M'_1, M'_2 M'_3 M'_4$) - Choisir M'_5 et trouver M_5 tel que $M'_5 = t(M_5)$

3)- Une manière plus rapide de construire M' en fonction de M: • Calculer $\vec{MM'}$ en fonction de $\vec{MG}$ en déduire une construction plus simple de M'. Dessiner les images de M_6 et M_7, par t. puis les antécédents de deux autres points.

4- Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et passant par B quelle est l'image de $\mathcal{C}$ par t?

5- Soit $\mathcal{D}$ la droite (BC). Quelle est l'image de $\mathcal{D}$ par t? Quel est l'ensemble des antécédents de $\mathcal{D}$ par t?

II Faites le même travail avec G tel que: $\frac{2}{3}\vec{GA} - \frac{1}{3}\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$ et la transformation $f: M \mapsto M'$ tel que $\vec{MM'} = \frac{2}{3}\vec{MA} - \frac{1}{3}\vec{MB} - \vec{MC}$.

Attention Ce travail doit être bien rédigé

Rappels: relation de Chasles. quels que soient les points M, N, P, Q ..., on a l'égalité suivante. $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$.

- Théorème Si on se donne un vecteur $\vec{u}$ et un point A, il existe un point B et un seul tel que $\vec{AB} = \vec{u}$.

- Théorème 3 points A, B, C sont alignés si et seulement si on peut trouver un nombre k tel que $\vec{AC} = k.\vec{AB}$.

① Dans un plan affine euclidien, on se donne quatre points A, B, C, D affectés des coefficients 1, -2, 3, 1

a) Existe-t-il un barycentre de ces quatre points pondérés ? justifiez votre réponse. Faire une figure représentative. Soit G le nom du barycentre s'il existe.

b) Soit P le milieu de A et D. Montrer que P est barycentre de (A, 1) et (D, 1).

c) Soit Q le barycentre de (B, -2) ; (C, 3). Montrer qu'il existe. Le dessiner.

d) Montrer que P, Q, G sont alignés

e) Soit t la transformation qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
t est elle une application ? Donner une écriture plus simple de $\overrightarrow{MM'}$ en utilisant le point G. Utilisez ce résultat pour représenter les images de trois points M_1, M_2, M_3 choisis au hasard. t est elle une bijection ?

f) Quel est le transformé du triangle (ABC) dans la transformation t ?

g) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre G et de rayon R. Quelle est l'image de $\mathcal{C}$ par t

h) Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par A et D. Quel est l'antécédent de $\mathcal{D}'$ par t.

② Représenter graphiquement

si $x \in]-\infty, 1]$ $f(x) = 4$.

si $x \in]1, 2[$ $f(x) = 2x + 1$

si $x \in]2, +\infty[$ $f(x) = -x + 1$.

f est elle une application ?

Soit un plan $\mathcal{P}$ orthonormé

① Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ perpendiculaires en H et A un point sur $\mathcal{D}'$.
A tout point M de $\mathcal{D}$, on fait correspondre le point M' de $\mathcal{D}'$ tel que le triangle AMM' soit rectangle en M; on appelle t cette correspondance.

a) faire un dessin et représenter $M_1, M_2, M_3, \ldots$ et leurs correspondants $M'_1, M'_2, M'_3, \ldots$; t est elle une application ? Source de t ! But de t ?

b) tout élément de $\mathcal{D}$ a-t-il une image par t ? tout élément de $\mathcal{D}'$ a-t-il un antécédent par t ?

c) Nous allons maintenant représenter graphiquement cette transformation t, sans passer par une algébrisation - (calcul). Pour cela on choisit dans $\mathcal{P}$ un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé***. A chaque triangle AMM' on associe le point T de coordonnées $x = \overline{HM}$, $y = \overline{HM'}$.

*** : on suppose que $\mathcal{D}$ ~~et $\mathcal{D}'$~~ est repéré par $(H, \vec{i})$, $\mathcal{D}'$ est repéré par $(H, \vec{j})$

Sur 2 figures en parallèle, représenter 10 points $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots M_{10}$ et leurs images $M'_1, M'_2, \ldots M'_{10}$, puis les points associés $T_1, T_2, \ldots T_{10}$ -
Pour cela n'utilisez que crayon, équerre, règle non graduée.

- comment traduire sur la représentation graphique la question : 1) "t est elle une application"

2) N' étant un point de $\mathcal{D}'$, quel est l'antécédent de N' par t (ou éventuellement quels sont les antécédents de N')

" Changement de point de vue " : algébrique, géométrique, de relation

① Dans un plan affine euclidien, on se donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et une droite $\mathcal{D}$ passant par O. A tout point M de $\mathcal{D}$, on fait correspondre le point M' milieu de MM_1, avec $M_1 = [O, M) \cap \mathcal{C}$.

Ⓐ a) faire une figure. Modification par rapport à l'exercice de mercredi ?

b) la correspondance $\mathcal{T}$ est elle une application ? une bijection ? (réponses justifiées...

Ⓑ représentez $\overline{M_1M'}$ en fonction de $\overline{M_1M}$ avec la même méthode que dans les exercices précédents. Comment traduisez-vous sur la représentation graphique, les résultats de Ⓐ ? Quelles suggestions vous donne cette représentation graphique ?

Ⓒ algébrisation : algébrisez ce problème en appelant $x = \overline{OM}$ et $y = \overline{OM'}$; vous trouvez une relation $\mathcal{R}$ entre x et y ; représentez là ; retrouvez-vous les mêmes résultats que précédemment ?

× × ×

Refaire le même travail avec le problème suivant :

Dans un plan affine euclidien, on se donne deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O, et un point A. A tout point M de $\mathcal{D}$, on fait correspondre le point M' de $\mathcal{D}'$ tel que M, A, M' sont alignés. [on algébrisera le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires)

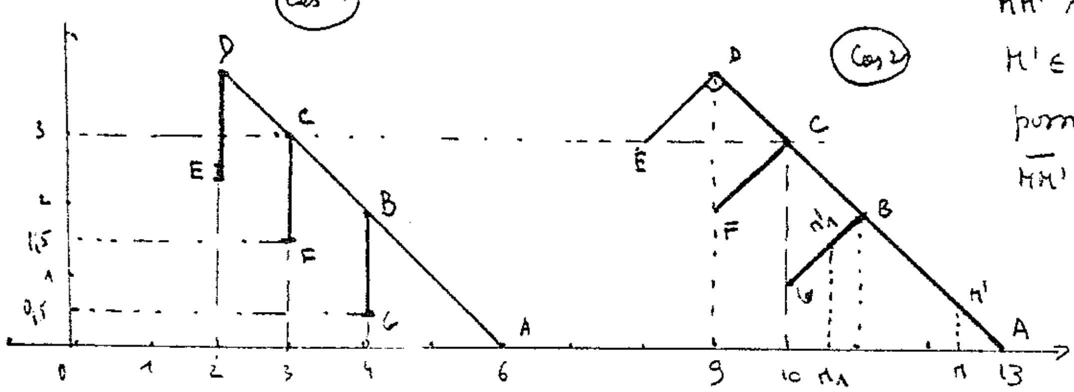
× × ×

Refaire le même travail avec :

on se donne deux points A et B affectés chacun du coefficient 1 et un point C extérieur à la droite (AB) - On appelle G le milieu de (AB). A tout nombre réel λ, on fait correspondre le point M barycentre de $(A;1)$; $(B,1)$; (C,λ). On représentera $\overline{GM}$ en fonction de λ

× × ×

Voici une figure (F) : A tout point M de Ox, on fait correspondre le point M' tel que



MM' soit perpendiculaire à Ox, M' ∈ F et M' le plus proche possible de M ; on représentera $\overline{MM'}$ en fonction de AM.

(on traitera séparément les cas (1) et (2))

1

Pour chacune des représentations suivantes d'application de $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

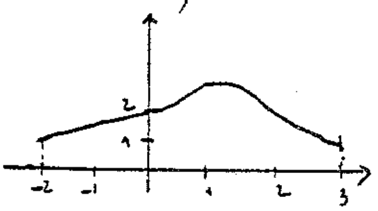
1) précisez le domaine de définition de f

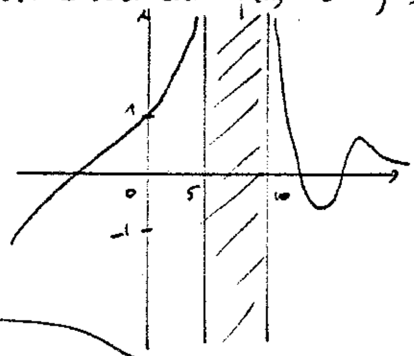
2) précisez une valeur approchée de 2, puis de $\sqrt{2}$

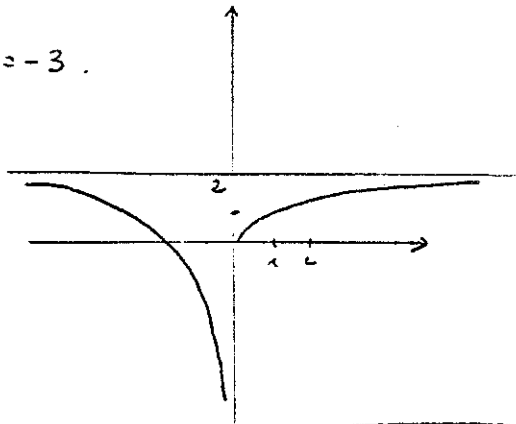
3) donnez le tableau de variation de f

4) donnez des valeurs approchées des antécédents de 2, 0, −2, α (α désigne un réel quelconque : discutez suivant la valeur de α)

5) résoudre approximativement $f(x) = 3$; $f(x) = -3$.







2 Pouvez vous représenter une fonction satisfaisant à :

① (simultanément)
- f est une application de $[-4;5]$ vers $\mathbb{R}$
- son tracé est continu
- $f(5) = 2$
- $f(-4) = 0$
- $f(0) = -3$
- $f(1) = 1,5$
-

x	-4		5
f	$0 \searrow$	$\nearrow \searrow$	2

②
- f est une application de $\mathbb{R} - \{1\}$ vers $\mathbb{R}$
- $f(2) = 4$; $f(-1) = 2$; $f(9,5) = -20$
- $f(1,2) = -20$; $f(7) = 12$; $f(-12) = 9,5$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow \searrow$	‖	$\nearrow$

③
- f est croissante sur $[-3; 4]$
- f est décroissante sur $[4; 6]$
- f est croissante sur $[6; 9]$
- $f(-2) = 1$; $f(4) = 6$; $f(5) = 3$
- le tracé de f est continu

④
- l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions
- " $f(x) = -1$ a une solution
- " $f(x) = 10$ a zéro solution
- f a un tracé continu
- $f(x) = -5$ a trois solutions

⑤
- "1" n'a pas d'image
- "2" n'a pas d'image
- tout autre point a une image et une seule
- "3" a deux antécédents
- "1" n'a pas d'antécédent
- "−1" n'a pas d'antécédent

⑥
- f est une application
- la source de f est $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $f(0) = 0$
- tout élément de $\mathbb{R}$ sauf 1 a un antécédent et un seul par f

(f est une bijection de $\mathbb{R} - \{-2\}$ vers $\mathbb{R} - \{-1\}$)

3 Pouvez vous dire lesquelles de ces fonctions ont une représentation graphique qui admet Oy comme axe de symétrie

$f: x \longmapsto 3x^2 - 1$; $g: x \longmapsto -2x^2 + 5$; $h: x \longmapsto x^4 + x^2 - 1$; $i: x \longmapsto x^3 - 1$

$j: x \longmapsto x^4 - x + 1$; $k: x \longmapsto x^2 - \frac{1}{x^2}$

4 Représentez les applications suivantes : $f: x \longmapsto -3x^2 + 6x$; $g: x \longmapsto 4x^2 - 2x + 3$.

- Y a-t-il un axe de symétrie ? Démontrez le.
- résoudre exactement $f(x) = 0$, puis $g(x) = 15$

Contrôlez la cohérence de vos résultats avec le dessin.

Interrogation écrite

Soit f l'application de $D \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout x fait correspondre $f(x) = -2x^2+4x-1$.

$$D \subset \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow -2x^2+4x-1$$

a) préciser D.

b) représenter f soigneusement

c) utiliser le dessin et la calculatrice pour résoudre approximativement :

1) $f(x) = 2$

2) $f(x) = 0$

3) $f(x) < -5$

4) Trouver un nombre A tel que <u>si</u> $x > A$ <u>alors</u> $f(x) < -5$

d) résoudre exactement $f(x) = -1$. Contrôlez que vos résultats sont cohérents avec votre dessin.

e) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \alpha$ où α désigne un réel donné. Discuter suivant les valeurs de α.

f) Reproduire rapidement la représentation graphique de f. Utiliser le dessin pour résoudre :

trouver tous les couples (x, y) tels que :

1. $\begin{cases} y > -2x^2+4x+1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ puis 2. $\begin{cases} x = 2 \\ y > -2x^2+4x+1 \end{cases}$.

g) La courbe C_f admet-elle un axe de symétrie ? Lequel ?

h) Soient α_1 et α_2 les deux antécédents de β par f (quand ils existent) on appelle M_1 et M_2 les points (α_1, β) et (α_2, β) faire une figure. Montrer que le milieu de $(M_1 M_2)$ a une abscisse indépendante de β et α. Qu'en concluez vous ?

~~[illegible]~~ écrite.

① Dans un plan affine euclidien, on se donne un point Ω et quatre points A, B, C, D tels que A, B, C sont alignés et D n'appartient pas à la droite des points A, B. On appelle A', B', C', D' les images de A, B, C, D dans l'homothétie $h\left(\Omega; -\frac{3}{2}\right)$

a) faire une figure

b) donner les écritures vectorielles que vous pouvez ~~[illegible]~~ déduire de la définit.

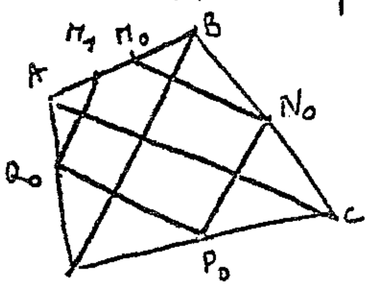
c) donner les écritures vectrielles que vous pouvez déduire des théorèmes vus en classe.

② A* Dans un plan, on se donne une droite $\mathcal{D}$ et un point $A \notin \mathcal{D}$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{D}$; soit M' le point tel que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. ~~[illegible]~~ représenter sur une même figure diverses positions du point M et les points M' correspondants. Que constatez vous ? Démontrez le.

B* Utilisez les résultats précédents pour résoudre l'exercice suivant : Soit un cercle de centre A et une droite $\mathcal{D}$ qui ne coupe pas $\mathcal{C}$. Construire un point M sur $\mathcal{D}$ et un point M' sur $\mathcal{C}$ tels que $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ $\boxed{\text{Discussion ?}}$

③ Soient A, B, I, J quatre points non alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{IJ}$. Montrer qu'il existe une homothétie h_1 qui transforme I en A et J en B. Déterminer son centre O et son rapport. Même travail avec une homothétie h_2 qui transforme I en B et J en A ; trouver son centre O' et son rapport. (Faire une figure).
(O, O') coupe (IJ) en E et (AB) en F. Vous allez démontrer que E et F sont milieu de $[I, J]$ et $[A, B]$. [par exemple, vous pouvez exprimer $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FB}$ en fonction de $\overrightarrow{IE}$, en utilisant la propriété caractéristique d'une homothétie par h_1 et

④ Soit A, B, C, D un quadrilatère quelconque. Soit M_0 le point tel que ~~[illegible]~~ $\overrightarrow{AM_0} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Soit M_1 le point tel que $(M_0N_0) \parallel (P_0Q_0) \parallel (AC)$ et $(N_0P_0) \parallel (M_1Q_0) \parallel (BD)$. En utilisant des homothéties successives, calculer $\overrightarrow{AM_1}$ en fonction de λ et de $\overrightarrow{AB}$. Qu'en concluez vous ?



DEVOIR DE MATHEMATIQUE n°3

Lycée François Villon
Seconde 6

I Soit une droite (D) du plan et deux points B et C distincts qui ne soient pas éléments de (D). L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble (E) des barycentres des points pondérés (A;1) (B;2) (C;2) lorsque le point A parcourt toute la droite (D).

Conseils: 1) Faire une figure avec 3 positions différentes A_1 A_2 A_3 du point A sur la droite (D).

2) Emettre alors une conjecture sur la nature de l'ensemble (E) du plan.

3) Chercher à démontrer cette conjecture. Il sera trés économique d'utiliser une homothétie dans cette démonstration.

II Soit une fonction f de R vers R définie par $f(x)= x^2+6x+2$

a) Chercher les antécédents; s'ilx existent de 2 par la fonction f. Pour ce faire, vous serez amené à résoudre une équation du second degré :vous chercherez alors à factoriser selon le procédé canonique; et vous traduirez les solutions éventuelles en antécédents.

b) Chercher l'antécédent, s'il existe , de -2 par f.
Vous emploierez la même méthode.

c) Chercher l'antécédent ,s'il existe de -7 par f.

d) Chercher l'antécédent , s'il existe, de -10 par f.

e) L'application f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

g) Généralisation: chercher l'antécédent d'un élément y quelconque par f. Vous serez amené à résoudre une équation du $2^{\text{ième}}$ degré et à discuter pour la résoudre, selon les valeurs de y dans R.

III Traduire géométriquement dans le plan, les ensembles suivants:

$A = \{(x,y) \in R^2$ tels que $y \geqslant -2$ et $y \leqslant 3$ et $y=x \}$

$B = \{(x,y) \in R^2$ tels que $y \leqslant -2$ ou $y \geqslant 3$ et $y=x \}$

$C = \{(x,y) \in R^2$ tels que $y \leqslant x$ et $x \in Z$ et $-2 \leqslant x \leqslant 3 \}$

$D = \{(x,y) \in R^2$ tels que $x \in Z$ et $y \leqslant x \}$

$E = \{(x,y) \in R^2$ tels que $x \in Z$ et $-3 \leqslant x \leqslant 3$ et $y \leqslant x^2 \}$

$F = \{(x,y) \in R^2$ tels que $-3 \leqslant x \leqslant 3$ et $y \leqslant x \}$

Une figure par ensemble sera nécessaire.

Conclusion

Il nous semble qu'il apparaît dans tous ces documents deux lignes de force : le poids de la conjoncture sociale (sélection par les mathématiques, mauvaises conditions de travail, crise même...) dans le discours métacognitif de l'enseignant de mathématiques et l'absolue nécessité pour le professeur de garder une marge de manoeuvre réelle dans la classe (qui peut être la liberté de réorganisation des programmes par exemple) pour préserver, malgré les difficultés et les pressions diverses, la qualité de l'enseignement dispensé à tous.
Au fond, c'est le problème de la survie d'un enseignement de qualité qui transparaît dans ces lignes. Comment concilier tous les inconciliables ? Il faut se renouveler, en répétant chaque année ou presque la même chose (en substance), il faut faire preuve de dynamisme alors que la situation sociale est complétement bloquée. Il faut bien réaliser à quel point le lycée refléte, mais de façon souterraine, les problèmes sociaux. De la crise par exemple, le professeur subit, outre la dévalorisation de sa profession, y compris matérielle, la tension accrue de certains parents pour "caser" leurs enfants, le désespoir d'autres qui sont chômeurs, le laisser-aller d'élèves qui n'ont pas de perpspectives (ou croient ne pas en avoir), la rivalité des autres ... Dans ces conditions, il est clair que ce ne sont pas les seules connaissances en mathématiques qui vont l'aider à "tenir le coup", ce sont aussi des connaissances sur ce qui peut maintenir son efficacité pédagogique au fil des générations différentes sans aliéner la qualité de son enseignement ni sa propre personne, c'est à dire en lui garantissant une marge de liberté personnelle et des possibilités de renouvellement.

Dans ce travail, nous avons commencé à montrer sur un exemple l'imbrication des représentations sociales et cognitives de l'enseignement des mathématiques. Nous pensons que cette analyse a l'avantage de pointer un lieu où un travail est possible, travail d'explicitation de représentations, de mise en relation de représentations et de choix pédagogiques et travail de réflexion didactique sur les marges de manoeuvre des professeurs compte-tenu des contraintes, y compris idéologiques.