i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES SUR MICRO-ORDINATEURS

EN DEUG SSM

Par C. LAURENT et P. JARRAUD

cahier de didactique des mathematiques

numéro 35

JANVIER 87

Introduction.

Une expérience de rénovation pédagogique est en cours depuis plusieurs années dans la section expérimentale de DEUG SSM 1^{e}Année de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). Les cours ont lieu devant des effectifs réduits (et non en amphi), la liaison cours-travaux dirigés est renforcée, des séquences coordonnées sont mises en place et les enseignements sont repensés pour essayer d'en améliorer le rendement pédagogique.

Cette année (1986-1987) voit l'introduction de travaux dirigés sur micro-ordinateurs. Les étudiants ayant en seconde année un cours d'informatique fait par les informaticiens de l'université, il ne s'agit pas de leur apprendre la programmation mais d'utiliser l'outil informatique pour une meilleure compréhension des mathématiques (et spécialement du programme actuel de DEUG SSM), en restant dans le cadre des six heures réglementaires de travaux dirigés.

Cette action de rénovation pédagogique entre dans le cadre d'une action de recherche interuniversitaire dirigée par M. le Professeur ROGALSKI et subventionnée par le Ministère de l'Education Nationale.

Nous envisageons quatre principaux roles pour un micro-ordinateur dans l'enseignement des mathématiques:

-être une supercalculette: les exemples sur les suites donnés ci-dessous sont réalisables sur une calculatrice de poche programmable mais avec un confort d'utilisation très inférieur et sans possibilité de trace écrite, l'utilisation du langage MU-MATH permet d'obtenir une calculette polynômiale et de calculer exactement sur des rationnels (cf exemple 4), le choix des énoncés d'exercices est élargi: des coefficients autres que ceux permettant des calculs "à la main" peuvent être choisis, les polynômes peuvent avoir d'autres racines que ±1, ±2 ou ±3...

-faire de nombreux calculs, éventuellement avec une "bonne" précision, ce qui permet d'aider l'étudiant à faire des conjectures qu'il essaiera de justifier rigoureusement par la suite.

-"vérifier" des résultats démontrés précédemment et les traduire concrètement: tracés des courbes intégrales après étude d'un champ de vecteurs, calculs effectifs de suites après des considérations de vitesse de convergence.

-illustrer (par des images ou des calculs) comme le font pour la notion de convergence des suites le programme cité en 1) ou pour la théorie de l'intégrale le programme cité ci-dessous en 2).

Il est prévu environ une séance d'une heure par semaine dans la salle des micro-ordinateurs (8 Goupil G4 et 5 IBM PC). La programmation effective dans un langage structuré type Pascal étant exclue, le principe de logiciels prêts à l'emploi a été retenu.

Exemples réalisés :

1) Un programme de C.Laurent sur les suites permet de mettre en évidence la notion de convergence et la relation entre le ϵ et le N tel que pour $n > N$: $|u_n - 1| < \epsilon$.

2) Un programme de P.Jarraud vise à illustrer le cours sur la théorie de l'intégrale de Riemann en montrant, sur des fonctions choisies par l'utilisateur, les différentes approximations possibles (sommes de Darboux, sommes de Riemann, approche aléatoire, etc..) et les valeurs numériques correspondantes.

3) Un autre exemple est fourni, pour l'étude numérique des suites, par l'utilisation d'un tableur (MULTIPLAN de MICROSOFT) pour obtenir facilement, et pratiquement sans programmation, des tableaux de valeurs pour les différents types de suites habituellement étudiés ($u_n=f(n)$, $f(n,u_{n-1})$ ou $f(n,u_{n-1},u_{n-2})$). On peut soit laisser l'étudiant tout faire soit l'aider en lui fournissant une "feuille" déjà prête lui permettant directement d'observer le comportement de la suite considérée (les modifications de paramètres, valeurs initiales, nombres d'itérations restant libres). Un cas particulier important est la recherche d'une approximation numérique des zéros d'une fonction par les différentes méthodes classiques.

4) Le langage MU-MATH de MICROSOFT permet entre autres possibilités, de transformer l'ordinateur en calculateur polynômial calculant exactement sur les rationnels. On l'utilise pour évaluer le nombre, dans un intervalle de $\mathbb{R}$, de zéros d'un polynôme à coefficients réels en utilisant l'algorithme de Sturm qui, sauf cas particuliers bien choisis est difficilement pratiquable "à la main".

<u>Exemples prévus non encore réalisés:</u>

5) Un logiciel interactif d'aide au calcul de primitives réalisé sous MU-MATH par l'IREM de Rouen sera utilisé.

6) Factorisation des polynômes par la méthode de Bairstow.

7) Résolution d'équations linéaires, diagonalisation de matrices.

8) Résolution numérique et graphique d'équations différen--tielles (utilisation d'un logiciel de l'IREM Paris-Sud).

9) Tracés de courbes et applications à l'illustration des développements limités.

Le contenu de 2) est disponible:

<u>P.Jarraud:</u> Basic, Riemann, Darboux....

Illustration de l'intégrale sur un micro-ordinateur.

Cahier de Didactique des Mathématiques n°27 IREM Paris-Sud (1985)

1) et 3) sont présentés en détail dans la suite: on trouvera pour chaque chapitre:

-une présentation avec des explications sur les buts recherchés et le déroulement des séances,

-les documents remis aux étudiants,

-des exemples sur papier des écrans obtenus,

Enfin une annexe décrit le contenu de la disquette jointe qui regoupe les programmes pour IBM-PC graphique ou compatible correspondants à 1), 2) et 3).

Un prochain fascicule décrira, nous l'espérons, la suite de l'expérience.

Nos remerciements les plus vifs vont à:

-nos collègues de la Section Expérimentale dont l'enthousiasme a permis de surmonter les difficultés de mise en place de ce nouveau type d'enseignement,

-à J.Vauthier, directeur de l'Institut de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université P. et M. Curie qui a mis à notre disposition la salle des micro-ordinateurs,

-à la Compagnie IBM-France qui a fourni gracieusement une partie du matériel et des logiciels.

-à l'IREM PARIS-SUD et spécialement à Aline Robert qui ont bien voulu éditer le présent cahier.

Christine LAURENT et Pierre JARRAUD
Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
Tour 45-46 5^e étage
2 Place Jussieu

75252 PARIS CEDEX 05

(mode d'emploi distribué aux étudiants)

DEUG SSM SECTION SP 43 1986-7

TD de MATHEMATIQUES sur MICRO-ORDINATEURS

Conseils généraux d'utilisation.

-Insérer la disquette dans le lecteur de GAUCHE.

-Allumer l'appareil en man uvrant l'interrupteur situé derrière (Goupil) ou à droite (IBM).

-Sur l'IBM à 2 écrans allumer aussi le deuxième écran si on veut faire des graphiques.

-Attendre....

-L'appareil est alors prêt à l'emploi.

Les touches SHIFT (⇑) permettent, en les pressant en même temps qu'une autre touche, d'obtenir les Majuscules et les Chiffres. La touche CAPSLOCK fait passer le clavier d'un mode à l'autre de façon permanente (sur Goupil un voyant s'allume pour signaler le passage en majuscules). Attention: dans tous les cas il faut utiliser SHIFT pour obtenir ? . / + .

Les caractères indiqués sur la tranche des touches s'obtiennent en pressant simultanément CTRL ALT et la touche désirée.

Le pavé de droite peut, en man uvrant la touche NUMLOCK (sur IBM) NUM (sur Goupil), être utilisé:

-soit en pavé numérique pour entrer des chiffres,

-soit pour se déplacer sur l'écran.

Sur Goupil un voyant indique l'état de NUMLOCK. Les touches Home , End , PgUp , PgDn sont repérées par des flèches (voir schémas en page suivante).

La touche ENTREE (↵) sert à valider les opérations que l'ordinateur doit effectuer.

La touche BACKSPACE (←) déplace le curseur d'une case vers la gauche en effaçant le contenu.

Si la situation est désespérée, presser simultanément les touches CTRL ALT (à gauche du clavier) DEL (à droite) (IBM)

CTRL ALT (à gauche) ANNUL (à droite)(Goupil)

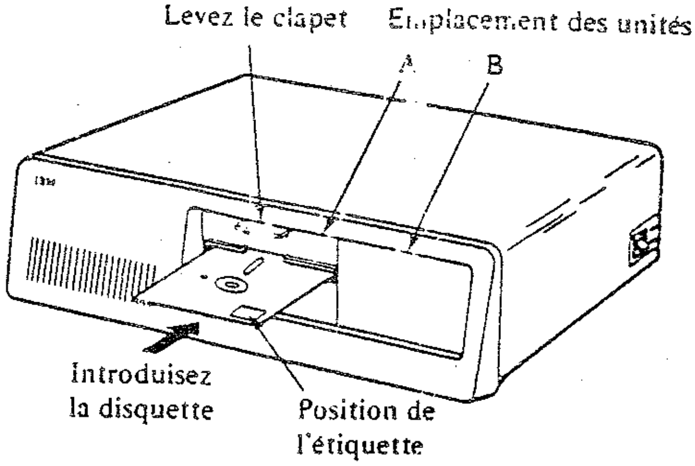
tout est effacé et l'appareil repart.

A la fin de la séance ne pas oublier:

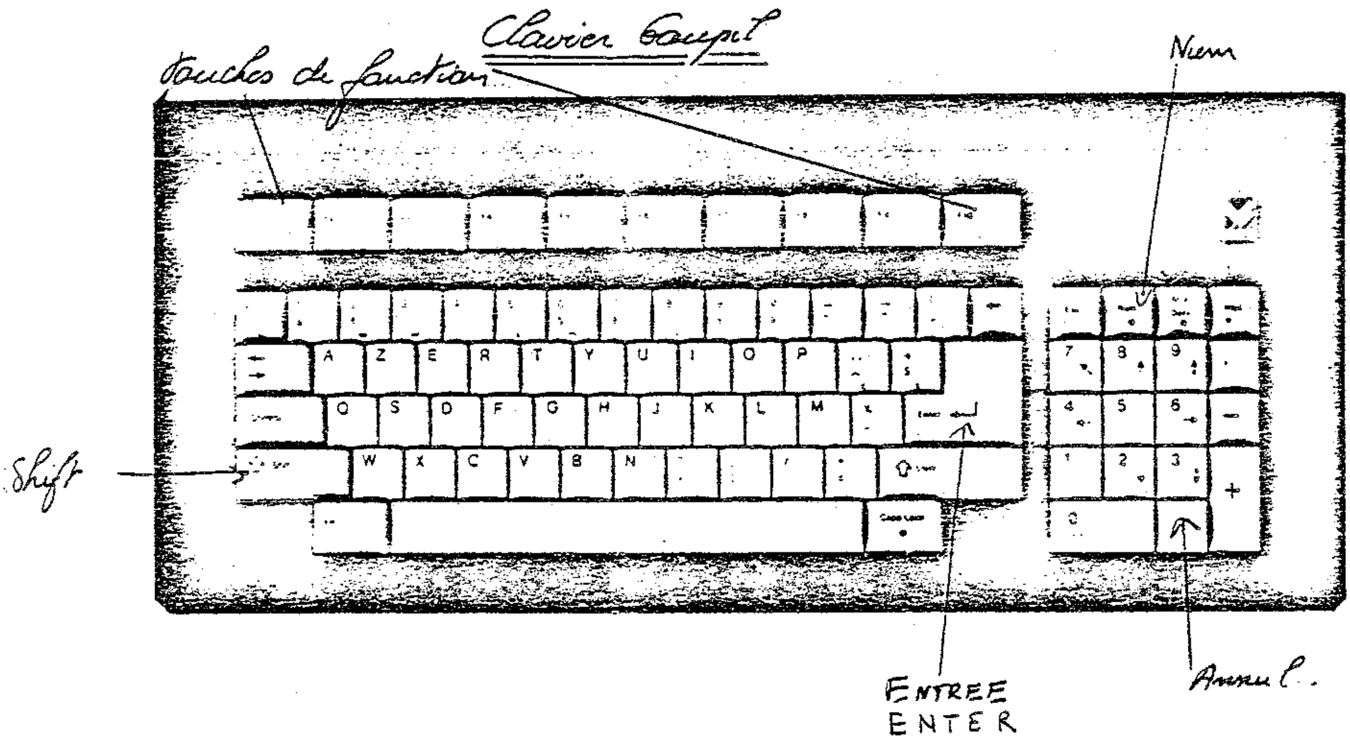
-de retirer (sans la tordre) la disquette en déverrouillant le lecteur, et de la remettre dans son étui,

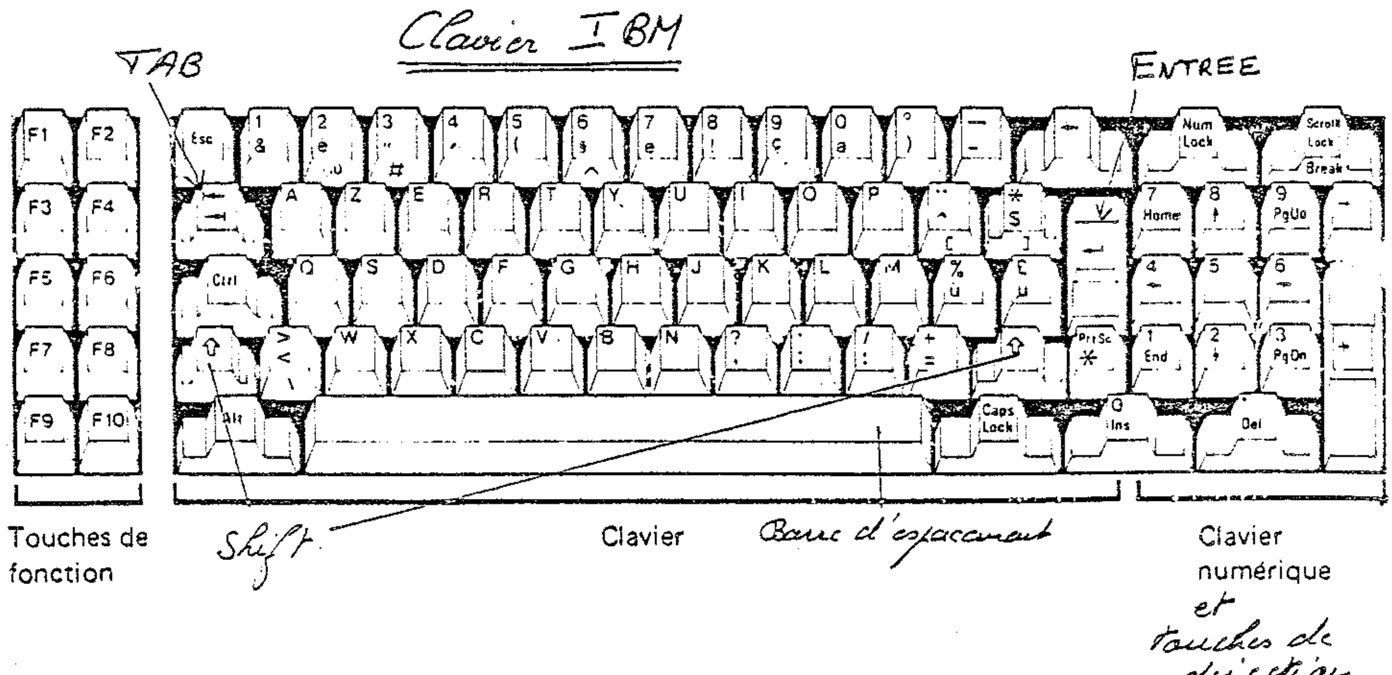
-d'éteindre la machine,

-de rendre la disquette.



2. Fermez le volet de l'unité de disquette.





LOGICIEL DE VISUALISATION DE LA LIMITE D'UNE SUITE

Il s'agit d'un logiciel écrit en GWBASIC utilisable sur micro-ordinateur PC-compatible avec carte graphique.

Le but de ce logiciel est de donner aux étudiants de DEUG 1ère année une image "plus concrète" de la notion de limite d'une suite de nombres réels.

I- PRESENTATION DU LOGICIEL.

Ce logiciel permet de représenter graphiquement les suites de réels dont le terme général est de la forme:

$$U(n) = f(n\ ,\ U(n-1)\ ,\ U(n-2))$$

La représentation est donnée par des petites croix aux points de coordonnées $(n\ , U(n))$ pour n variant entre 0 et T, T étant choisi par l'étudiant;

- si $T < 64$ tous les points sont représentés,
- si $T \geqslant 64$ seuls les points d'abscisses $n = \left[\frac{n}{\left[\frac{T}{64}+1\right]}\right]$ apparaissent sur l'écran.

L'échelle sur l'axe Oy des ordonnées est également choisie par l'étudiant ce qui permet d'obtenir soit un cadrage optimal du graphe de la suite, soit une bonne précision autour d'une valeur donnée (la limite par exemple).

De plus pour des valeurs L et Eps > 0 choisies (L représentant la valeur de la limite de la suite lorsque celle-ci converge) le logiciel trace les droites d'équations $y = L - Eps$ et $y = L + Eps$.

On voit alors apparaitre sur l'écran la valeur N pour laquelle $|u(n)-L| < EPS$ dès que $N < n \leqslant T$ ainsi que la droite $x = N$. On observe alors la figure suivante : toutes les croix à droite de la droite $x = N$ sont situées entre les droites $y = L - EPS$ et $y = L + EPS$.

II- DEROULEMENT DE LA SEANCE DE TP

On donne aux étudiants une liste de suites dont la définition entre dans le cadre du logiciel et choisies dans le cas ou elles convergent de telle sorte qu'un élève sortant de Terminale C puisse en calculer la limite.

1/ On demande de donner une représentation graphique des suites et de repérer à l'aide des graphes les suites qui semblent converger. Au cours de cette étape L et EPS seront nuls et par conséquent les droites y = L - EPS et y = L + EPS seront confondues avec l'axe Oy. Les résultats seront notés dans un tableau. On peut alors, à ce moment-là ou au cours d'une séance de TD ultérieure, justifier les résultats obtenus.

2/ On fait calculer la limite des suites convergentes repérées dans la première partie du TP puis lancer le programme pour chacune de ces suites en donnant à L la valeur de la limite calculée et à EPS successivement les valeurs 0.1 , 0.05 et 0.01,ce qui permet de déterminer pour chaque suite trois entiers N_1 ,N_2 ,N_3 . On demande alors aux étudiants d'analyser les résultats obtenus : formalisation de la notion de convergence d'une suite, étude de la vitesse de convergence etc...

Remarques:

-si un étudiant s'est trompé dans un calcul de limite ou dans la détermination des suites convergentes il doit s'apercevoir de son erreur car même pour T très grand il ne pourra obtenir les valeurs N_1 ,N_2 ,N_3 demandées.

-si EPS = 0.01 il faut souvent changer d'échelle sur Oy pour faire apparaitre la bande L - EPS < y < L + EPS et choisir T assez grand pour obtenir N.

-si T > 64 tous les points de la suite ne sont pas représentés sur l'écran ce qui peut donner une idée fausse de son allure; par exemple si $U(n)=(-1)^n$ et si l'on a choisi T compris entre 64 et 128 on ne verra que des croix d'ordonnée +1 car seulement un point sur deux apparait sur le graphe. On peut alors conseiller aux étudiants de choisir d'abord T < 64 pour avoir l'allure de la suite puis T plus grand pour étudier la convergence car le calcul de N tient compte de toutes les valeurs U(n) pour n inférieur à T.

3/ On peut terminer la séance en demandant aux étudiants ce qu'ils pensent de l'ordinateur comme outil pour étudier les suites. Il est intéressant d'insister sur les limites de capacité de calcul de l'ordinateur et sur l'éventualité de résultats aberrants dûs aux erreurs d'arrondi. En étudiant la suite $U(n) = n! / k$ pour des valeurs de k assez grandes on peut attirer l'attention des étudiants sur l'importance d'une démonstration dans le calcul des limites de suite et sur le risque d'un résultat erronné lorsque l'on utilise un ordinateur ou une calculatrice pour étudier la convergence d'une suite.

III- GRAPHES

Les pages qui suivent donnent des exemples de représentations graphiques que ce logiciel permet d'obtenir.

Nous avons choisi les suites suivantes:

1- $U(n) = \frac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$ La limite L vaut 1/2.

Nous avons choisi T = 50 pour les deux graphes que nous donnons; Eps = 0.05 et Y compris entre -0.5 et 0.7 sur l'axe des ordonnées pour le premier, Eps = 0.01 et Y compris entre -0.1 et 0.6 pour le second.

2- $U(n) = \cos(n\frac{\pi}{6})$

Nous avons pris T = 50 et Y compris entre -1.5 et 1.5.

3- $U(n) = \sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ La limite L vaut 0.

Pour le premier graphe T = 50 et Y est compris entre -1 et 1, ce qui donne l'allure de la suite; pour le deuxième nous avons choisi Eps = 0.01, T = 15000 et Y compris entre -0.05 et 0.1.

4- $U(n) = n! / k^n$ avec k = 20

Sur la première représentation T = 20, Eps = 0.005 et Y est compris entre -0.01 et 0.01. En observant ce graphe, la suite semble converger vers 0. En fait cette suite tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et une meilleure représentation de son allure est donnée par le second graphe pour lequel nous avons pris T = 50, l'échelle sur l'axe Oy restant inchangée.

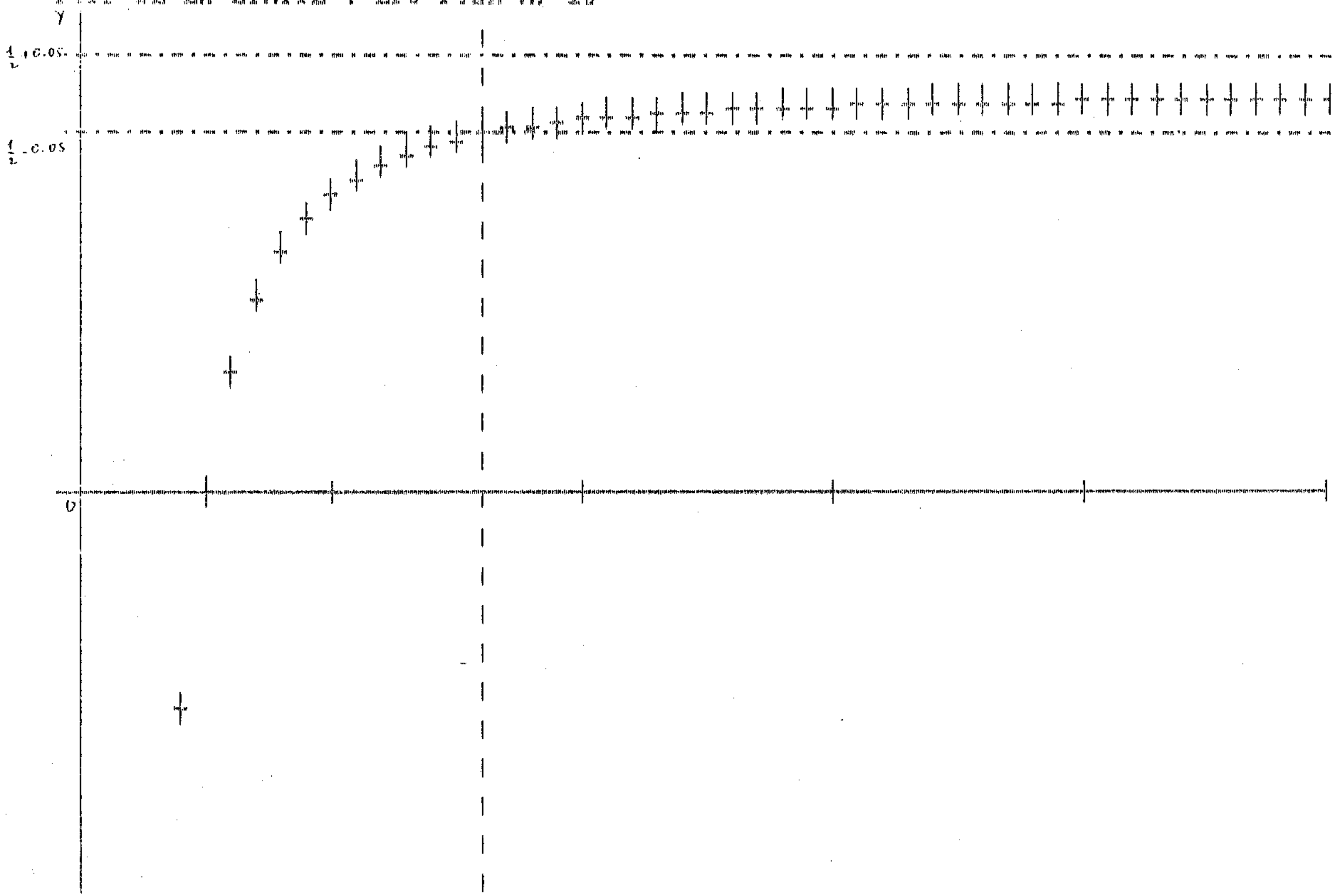
Si on augmente k le phénomène d'écrasement des valeurs de la suite s'accentue ainsi que le prouvent les valeurs numériques ci-dessous.

Un tel exemple donne la possibilité de montrer aux étudiants que le seul calcul des premiers termes d'une suite (même assez nombreux) ne permet pas d'en obtenir la nature.

SUITE $Un=n!/k^n$ pour k= 50

N= 10	Un= 3.7158912E-11
N= 20	Un= 2.551082656126E-16
N= 30	Un= 2.848130089516E-19
N= 40	Un= 8.971083412112E-21
N= 50	Un= 3.424322470251E-21
N= 60	Un= 9.593444981836E-21
N= 70	Un= 1.414180134173E-19
N= 80	Un= 8.652216451903E-18
N= 90	Un= 1.839227279437E-15
N= 100	Un= 1.183050330245E-12
N= 110	Un= 2.061660583958E-09
N= 120	Un= 8.891874550441E-06
N= 130	Un= .088022275696304
N= 140	Un= 1876.330688003
N= 150	Un= 8.154414069381E+07
N= 160	Un= 6.890576313565E+12
N= 170	Un= 1.086128619987E+18
N= 180	Un= 3.078723199574E+23
N= 190	Un= 1.519109256599E+29
N= 200	Un= 1.267324330973E+35

ECHELLE: 1 DIVISION = 10 POINTS
DIFF DE LA LIMITE < EPS POUR N> 16



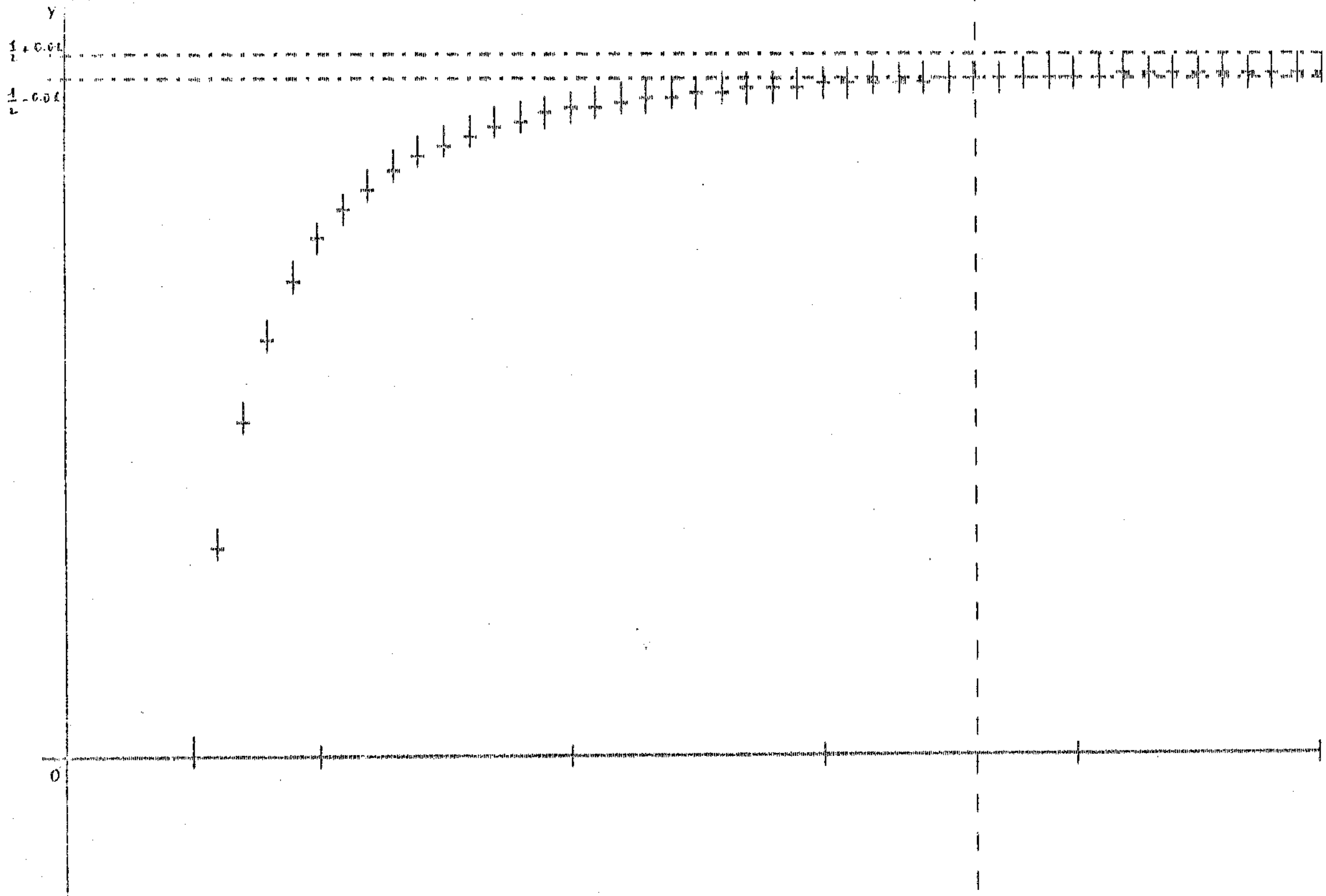
$$U(n) = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$$

$$u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1} \qquad L = \frac{1}{2}$$

$T = 50 \quad , \; -0{,}5 \leq Y \leq 0{,}7 \quad , \; \varepsilon = 0.05$

$$U(n) = \frac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$$

ECHELLE: 1 DIVISION = 10 POINTS
DIFF DE LA LIMITE (EPS POUR N) 36

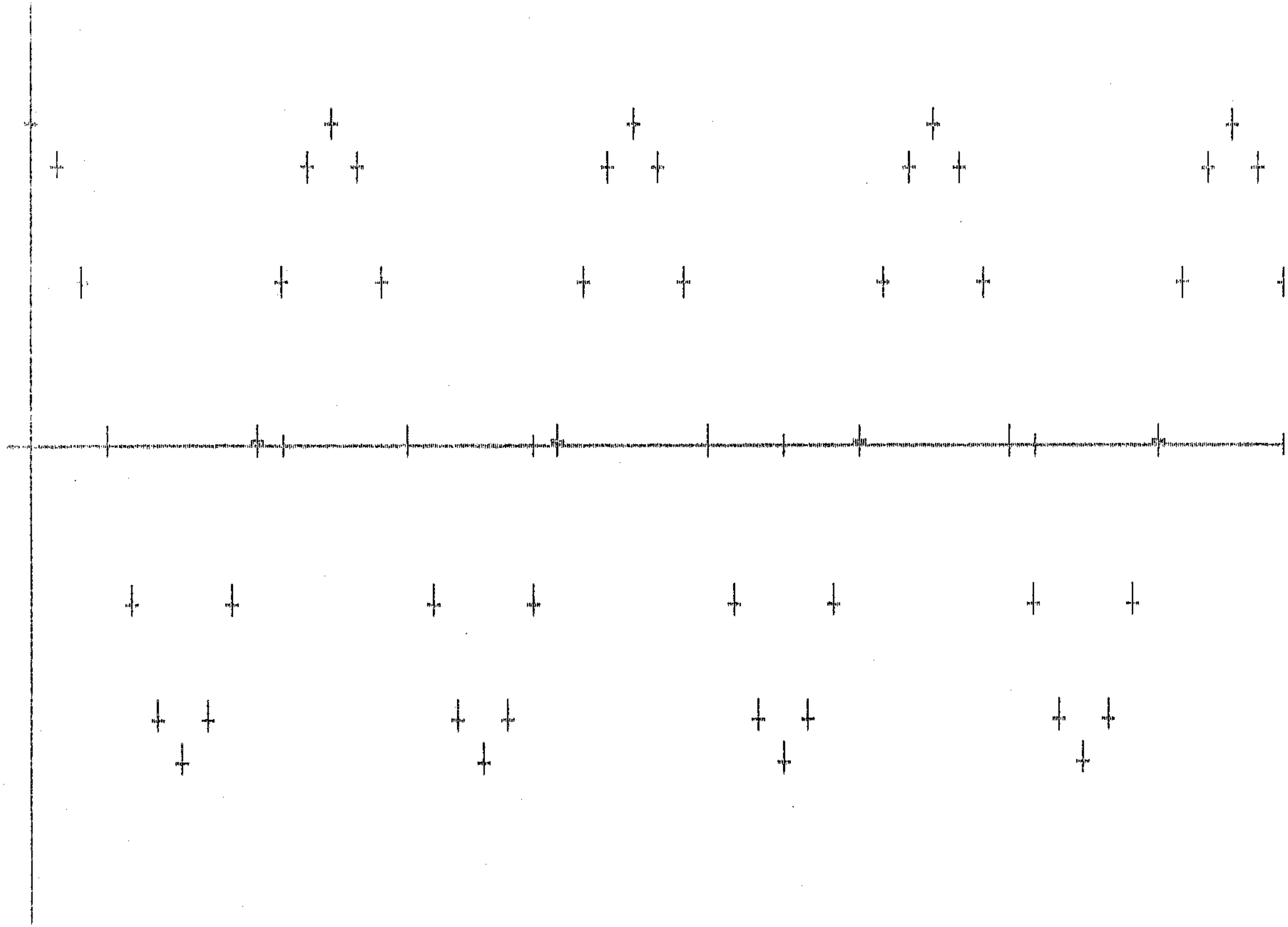


$u_n = \frac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$ $\qquad$ $L = \frac{1}{2}$

$T = 50$, $-0.1 \leq Y \leq 0.6$, $\varepsilon = 0.01$

$U(n) = \cos(n \frac{\pi}{6})$

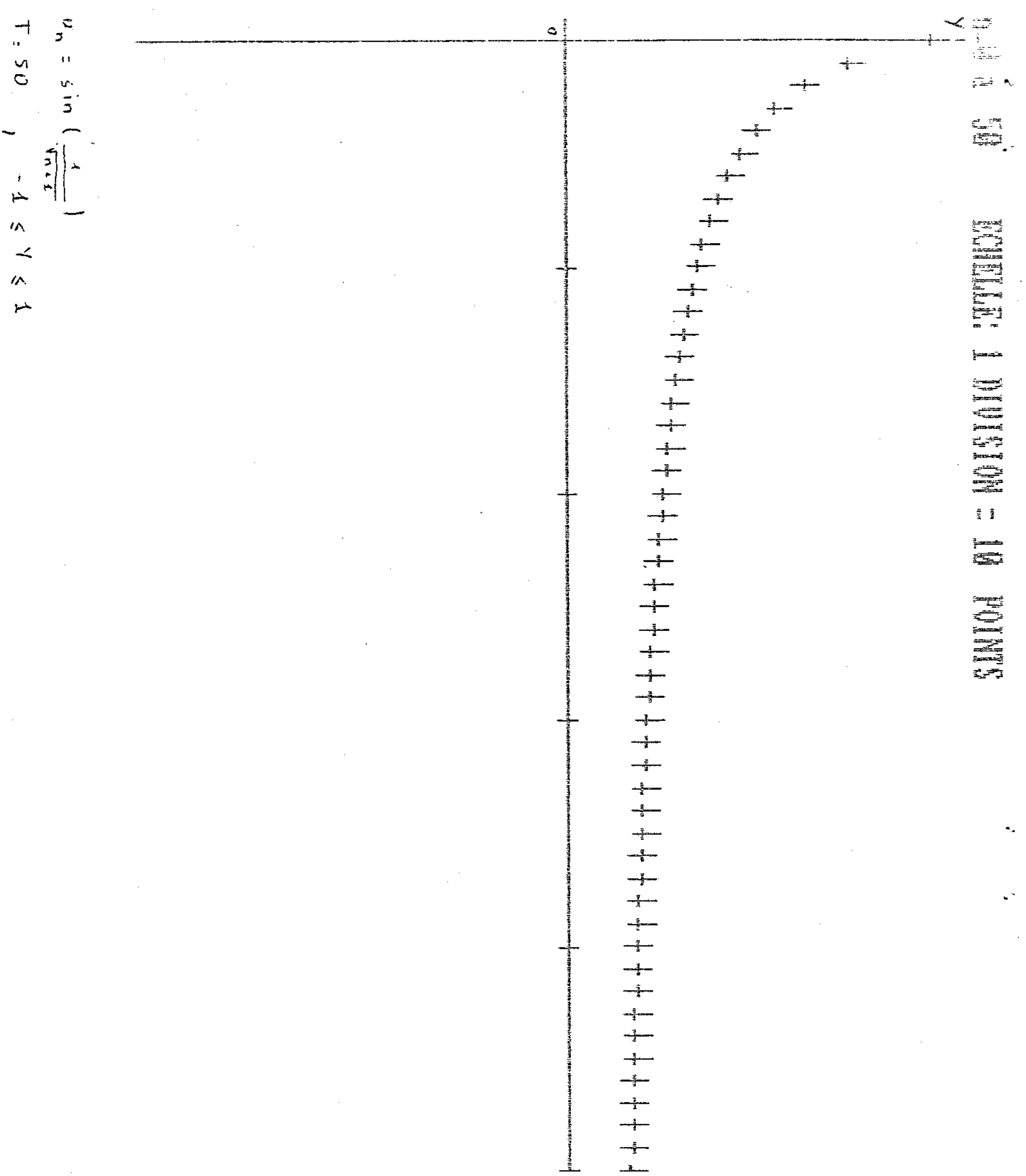
SCALE: 1 DIVISION = 10 POINTS

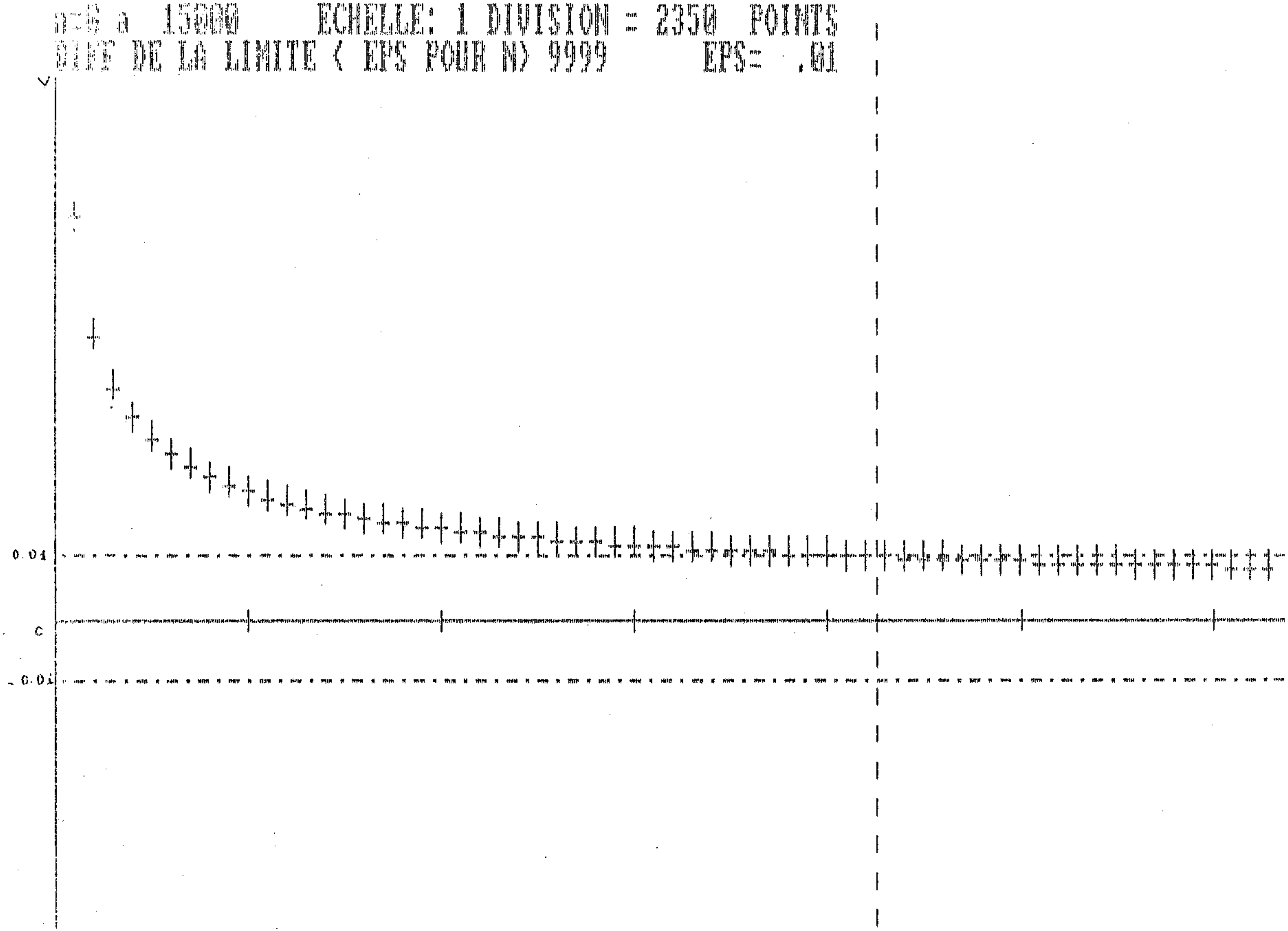


$u_n = \cos(n \frac{\pi}{6})$

$T = 50$, $-1.5 \leq Y \leq 1.5$

$$U(n) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$





$U(n) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

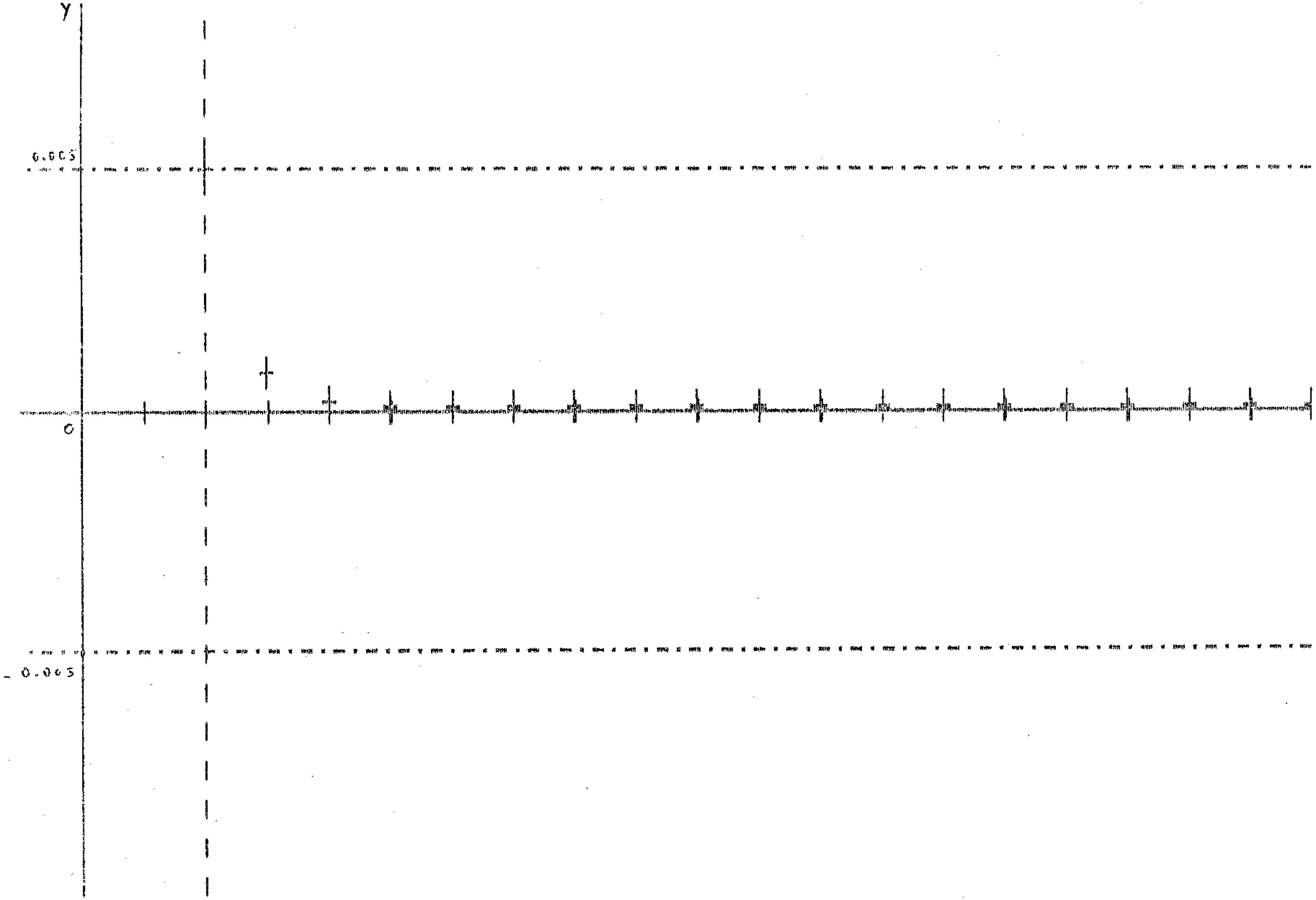
$u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ $L = 0$

$T = 15000$, $-0.05 \leq Y \leq 0.1$

$U(n) : \frac{n!}{k^n}$

N=0 A 20 ECHELLE: 1 DIVISION = 1 POINT

DIFF DE LA LIMITE < EPS POUR N> 2 EPS= .005

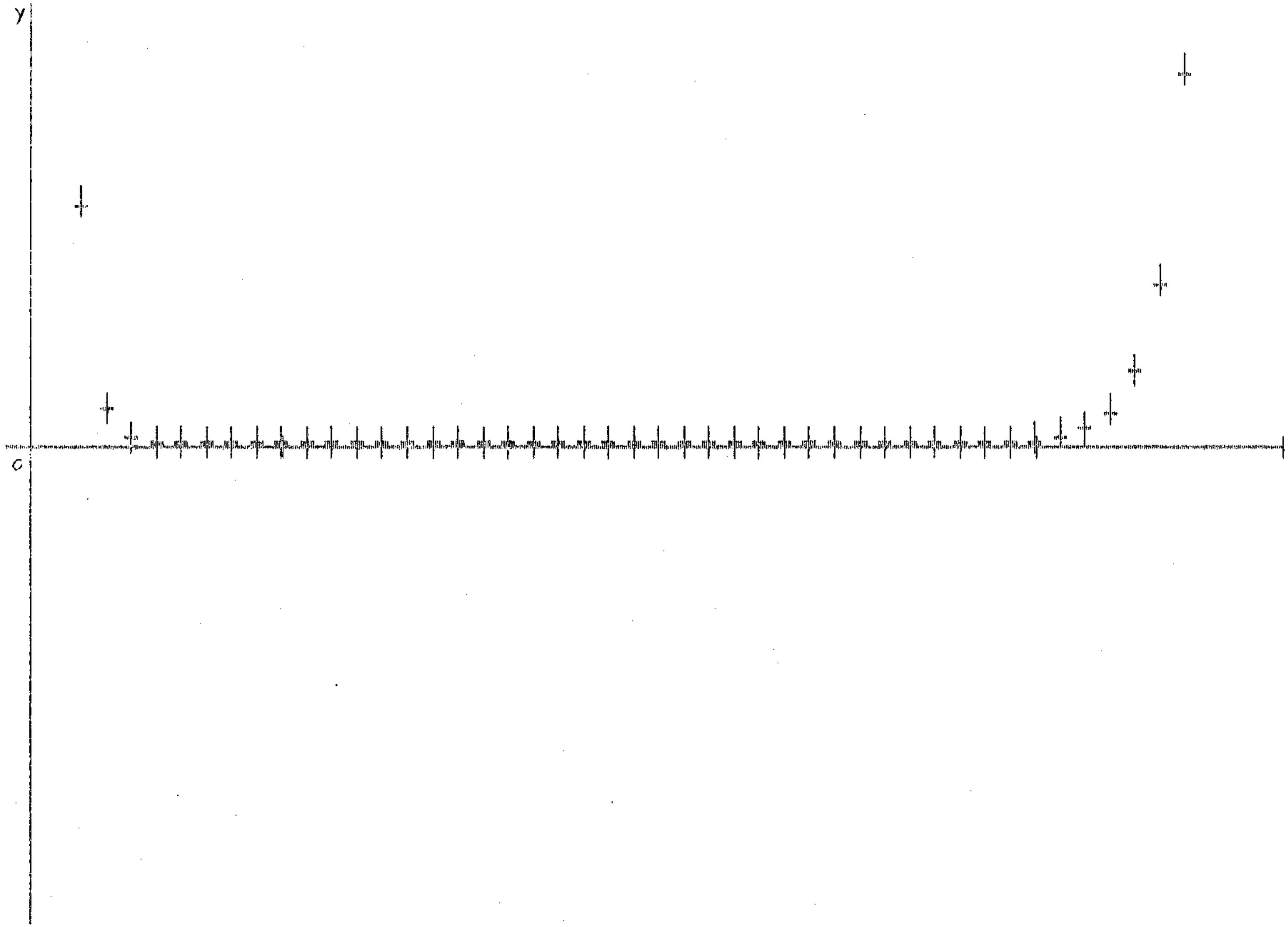


$u_n = \frac{n!}{k^n}$ $k = 20$

$T = 20$, $-0.01 \leq Y \leq 0.01$

$U(n) = \frac{n!}{k^n}$

n=0 a 50 ECHELLE: 1 DIVISION = 10 POINTS



$u_n = \frac{n!}{k^n}$ $k = 20$

$T = 50$, $-0.01 \leq Y \leq 0.01$

LISTE DU PROGRAMME

```
10 GOTO 110
20 Y=1234
30 RC=0
40 REM
50 RETURN
60 REM ETUDE DE SUITES
70 REM VERSION PC-COMPATIBLE
80 REM
90 REM "COPYRIGHT Y et C LAURENT"
100 REM
110 REM
120 KEY OFF
130 CLS:LOCATE 5,10
140 PRINT "  E T U D E   D E   S U I T E S  "
150 PRINT:PRINT:PRINT
160 GOSUB 20 :IF Y<>1234 THEN 290
170 REM PREMIERE SORTIE DE PROGRAMME
180 CLS:PRINT "DEFINISSEZ VOTRE SUITE SOUS LA FORME SUIVANTE :"
190 PRINT:PRINT TAB(8);"20 Y=F(N,XN,XM) "
200 PRINT:PRINT TAB(8);"  ou F sera une fonction des trois variables N,XN et
 XM  "
210 PRINT:PRINT TAB(8);"  Y represente U(n),N l'entier n,XN le terme U(n-1)
et XM le terme U(n-2)"
220 PRINT:PRINT TAB(8);"30 RC=0 , 1 OU 2"
230 PRINT:PRINT TAB(8);"  avec RC=0 s'il s'agit d'une suite de la forme U(n)
=F(n),"
240 PRINT:PRINT TAB(8);"     RC=1 s'il s'agit d'une suite recurrente U(n)=F(n
,U(n-1))"
250 PRINT:PRINT TAB(8);"     et RC=2 s'il s'agit d'une suite recurrente U(n)=
F(n,U(n-1),U(n-2))"
260 PRINT:PRINT:PRINT "ensuite frappez :     RUN"
270 KEY ON
280 END
290 REM PROGRAMME PRINCIPAL
300 L=640
310 H=200
320 REM CALCUL DE L'ECHELLE
330 IF RC=0 THEN ZZ$="Un=F(n)"
340 IF RC=1 THEN ZZ$="U(n)=F(n,U(n-1))"
350 IF RC=2 THEN ZZ$="U(n)=F(n,U(n-1),U(n-2))"
360 PRINT:PRINT TAB(8);"Etude de ";ZZ$;"pour n=0 a T"
370 PRINT "Valeur par défaut de T : " ;T
380 LINE INPUT "VALEUR DE T ? ",T$
390 IF T$="" GOTO 410
400 T=VAL(T$)
410 C%=T/64-.5+1
420 IF RC=0 THEN 450
430 IF RC=1 THEN GOSUB 1060
440 IF RC=2 THEN GOSUB 1120
450 PRINT:PRINT "CADRAGE DU GRAPHE :  Y1< Un <Y2"
460 PRINT "Valeur par défaut de Y1 : ";Y1
470 LINE INPUT "VALEUR DE Y1 ? ",Y1$
480 IF Y1$="" GOTO 500
490 Y1=VAL(Y1$)
500 PRINT "Valeur par défaut de Y2 : ";Y2
510 LINE INPUT "VALEUR DE Y2 ? ",Y2$
520 IF Y2$="" GOTO 540
530 Y2=VAL(Y2$)
540 IF Y1>Y2 THEN SWAP Y1,Y2
550 PRINT:PRINT "TRACE DE LA BANDE LIMITE"
560 PRINT "Valeur par défaut de la limite : ";LI
570 LINE INPUT "VALEUR DE LA LIMITE ? ",LI$
580 IF LI$="" GOTO 600
590 LI=VAL(LI$)
```

```
600 PRINT "Valeur par défaut de epsilon : ";EP
610 LINE INPUT "VALEUR DE EPSILON ? ",EP$
620 IF EP$="" GOTO 640
630 EP=VAL(EP$)
640 A=(L-1)/(T+1):B=A:C=(H-1)/(Y2-Y1):D=-C*Y1
650 SCREEN 2,0,1,1
660 CLS
670 REM TRACE DES AXES
680 XO=INT(L/(T+1))
690 YO=INT(H*Y2/(Y2-Y1))
700 LINE (XO,0)-(XO,H-1)
710 IF YO<0 OR YO>H-1 THEN 750
720 LINE (0,YO)-(L-1,YO)
730 IF T<30 THEN D%=1 ELSE D%=C%*10
740 FOR I%=1 TO T/D%:XX=A*I%*D%+B:LINE (XX,YO-2)-(XX,YO+2):NEXT I%
750 REM TRACE DE LA BANDE LIMITE
760 UL=H-1-C*(LI-EP)-D
770 VL=H-1-C*(LI+EP)-D
780 LINE (0,UL)-(L-1,UL),,,&HFC30
790 LINE (0,VL)-(L-1,VL),,,&HFC30
800 REM CALCUL DE LA COURBE
810 M=-1
820 FOR N=0 TO T
830 IF N=0 AND RC=1 THEN Y=XN:GOTO 870
840 IF N=0 AND RC=2 THEN Y=XM:GOTO 870
850 IF N=1 AND RC=2 THEN Y=XN:XN=XM:GOTO 870
860 XM=XN: XN=Y: GOSUB 20
870 IF ABS(Y-LI)>EP THEN M=N+1
880 IF N<>INT(N/C%)*C% THEN 940
890 XC=A*N+B
900 YC=H-1-C*Y-D
910 XD=INT(XC):YD=INT(YC)
920 XP=XD-3:XC=XD+3:YP=YC:LINE (XP,YP)-(XC,YC)
930 XP=XD:XC=XD:YP=YD-3:YC=YD+3:LINE (XP,YP)-(XC,YC)
940 NEXT N
950 PRINT "ECHELLE: 1 DIVISION =";D%;" POINT";:IF D%>1 THEN PRINT "S" ELSE P
RINT
960 IF EP=0 OR M=-1 THEN 1010
970 IF M>T THEN 1010
980 MM=A*M+B
990 LINE (MM,0)-(MM,H-1),,,&HF0F
1000 PRINT "DIFF DE LA LIMITE < EPS POUR N>";M
1010 R$=INPUT$(1):SCREEN 0,0,0,0
1020 LOCATE 5,20
1030 PRINT "Voulez-vous redefinir la suite ? (O/N) ":R$=INPUT$(1)
1040 IF R$="N" OR R$="n" THEN 130
1050 GOTO 170
1060 PRINT "Valeur par defaut de U(0):";U0
1070 LINE INPUT "VALEUR DE U(0)?",U0$
1080 IF U0$="" GOTO 1100
1090 U0=VAL(U0$)
1100 XN=U0
1110 RETURN
1120 PRINT "Valeur par defaut de U(0):";U0
1130 LINE INPUT "VALEUR DE U(0)?",U0$
1140 IF U0$="" GOTO 1160
1150 U0=VAL(U0$)
1160 XM=U0
1170 PRINT "Valeur par defaut de U(1):";U1
1180 LINE INPUT "VALEUR DE U(1)?",U1$
1190 IF U1$="" GOTO 1210
1200 U1=VAL(U1$)
1210 XN=U1
1220 RETURN
```

IV- ANNEXE

Nous avons distribué aux étudiants le matériel suivant:

1- Une feuille de conseils généraux pour l'utilisation du logiciel "SUITE".

2- La liste des suites à étudier et l'énoncé du travail à effectuer.

3- Un modèle de tableau pour noter les résultats.

TP DE MATHEMATIQUES SUR MICRO-ORDINATEUR

Utilisation du logiciel "SUITE"

-Mettre la disquette "Basic-suite" dans le lecteur de gauche, le verrouiller et allumer la machine.

-Attendre de voir apparaitre sur l'écran:

Ok

1 LIST 2 RUN 3 LOAD 4 SAVE ....

-Taper LOAD"SUITE ou bien F3 (ce qui fait apparaitre sur l'écran LOAD") suivi de SUITE. Presser ensuite sur la touche ENTER pour valider la commande.

-Taper RUN puis presser sur la touche ENTER ou frapper F2 (dans ce cas s'assurer que le curseur est sur une ligne vide).

Le logiciel est alors prêt à l'emploi.

QUELQUES REMARQUES SUR L'ECRITURE DES EXPRESSIONS MATHEMATIQUES.

Les règles de parenthésage et de priorité sont les règles habituelles.
Le signe * représente la multiplication et ne peut être omis dans les produits.
Les fonctions ont les abréviations suivantes:

sinus	SIN
cosinus	COS
racine carrée	SQR

Pour obtenir PI taper: 4*ATN(1)

" " $(-1)^N$ " (-1)^N (^ s'obtient en pressant simultanément les touches CONTROLE, ALT et 6).

Les nombres décimaux s'écrivent avec un point au lieu d'une virgule.

Les expressions de la forme $\sqrt{5}$, $\cos(\pi/8)$ ne sont pas acceptées comme valeurs des paramètres, il faut en donner une valeur décimale approchée.

Ce logiciel permet de représenter graphiquement des suites de terme général:

U(n)=F(n) ou U(n)=F(n,U(n-1)) ou U(n)=F(n,U(n-1),U(n-2)).

La représentation est donnée par de petites croix aux points de coordonnées (n,U(n)) pour n variant entre 0 et T, T étant une valeur que vous choisirez.

Vous pouvez travailler maintenant. Un texte présente la manière dont vous devez définir votre suite. Lisez attentivement.

EXEMPLE: $U(n)= \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$

Taper 10 Y=(N*N-25)/(2*N*N+1)

Presser ENTER

Taper 20 RC=0

Presser ENTER

Presser F2

L'ordinateur vous demande alors de choisir plusieurs paramètres. Vous répondrez en tapant la valeur numérique choisie suivie de ENTER lorsqu'on vous demande une seule valeur et vous taperez les différentes valeurs séparées par des virgules puis ENTER si l'on vous en demande plusieurs. Si vous ne voulez pas donner de valeur à un paramètre presser directement ENTER (ce sera le cas dans la première partie du TP pour la limite et epsilon qui prendront automatiquement la valeur 0).

Vous voyez alors apparaitre sur l'écran le graphe de la suite.

-Taper alors n'importe quelle touche pour revenir au logiciel.

L'ordinateur vous demande si vous voulez définir une nouvelle suite;

- si oui : taper O , vous revenez alors au début du logiciel,

  si non : taper N , vous pouvez alors modifier vos paramètres en gardant la même suite : changer le nombre de points étudiés, modifier le cadrage du graphe ou la largeur de la bande de visualisation de la limite. Si vous voulez conserver un des paramètres frapper directement ENTER lorsqu'on vous redemande sa valeur.

TP DE MATHEMATIQUES SUR MICRO-ORDINATEUR

Logiciel "SUITE"

I- Représenter graphiquement les suites suivantes:

1- $U(n)= \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1}$

2- $U(n)=(-1)^n$

3- $U(n)= \dfrac{\cos(n)}{n + 1}$

4- $U(n)=\cos(n)$

5- $U(n)= \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

6- $U(n)=\cos(n\frac{\pi}{6})$

7- $U(n)=\sin(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$

8- $U(n)=n^2 + 1$

9- $U(n)= \dfrac{n + (-1)^n}{n + 1}$

10- $U(n)= (-1)^n \dfrac{n^3 + 100}{100n^3 + 1}$

11- $U(n)= \dfrac{3n + 4}{2n + 1}$

12- $U(n)= \frac{n}{k} U(n-1)$, $U(0)=1$, $k=20$

13- $U(n)=U(n-2)+U(n-1)$, $U(0)=0$, $U(1)=1$

14- $U(n)=\sqrt{2+U(n-1)}$, $U(0)=1$

Repérer à l'aide des graphes qui apparaissent sur l'écran les suites qui semblent converger et noter les réponses sur la grille.

Pour cette question, on ne donnera pas de valeur pour la limite et epsilon; pour répondre aux questions

Valeur de la limite?

Valeur de epsilon?

presser directement la touche ENTER.

II- Pour chaque suite convergente, calculer sa limite l, puis refaire la représentation graphique sur ordinateur en donnant à la limite la valeur calculée et à epsilon successivement 0.1, 0.05, 0.01.

L'ordinateur vous donne alors la valeur de l'entier N pour lequel $|U(n)-l| < eps$ pour tout n tel que $N < n \leqslant T$.

Noter les résultats obtenus, conclure.

L'ordinateur vous parait-il être un bon outil pour étudier les suites? Quelles sont ses limites?

III- Formaliser puis donner une représentation graphique des assertions suivantes:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et l un nombre réel.

1- Tout intervalle I de R centré en l contient un élément de la suite.

2- Pour tout intervalle I de R centré en l, il existe un rang à partir duquel tous les éléments de la suite sont dans I.

3- Il existe un intervalle I de R centré en l et un rang n à partir duquel tous les éléments de la suite sont dans I.

Laquelle de ces assertions correspond à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l? Ecrire sa négation.

TABLEAU DE RESULTATS

Suite n°	conv.	limite	Démonstration	N: $\varepsilon = 0.1$	N: $\varepsilon = 0.05$	N: $\varepsilon = 0.0$
	oui	$\frac{1}{2}$	$u_{n+1} - u_n = \dfrac{102m + 51}{(2n^2+1)(2(n+1)^2+1)} > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante $u_n = \dfrac{n^2 - 25}{2n^2 + 1} < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente et $\lvert u_n - \frac{1}{2} \rvert \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$	12	16	36

Utilisation d'un tableur (Multiplan)

pour l'étude numérique de suites

PRESENTATION

Pourquoi un tableur?

Le but recherché était de trouver un procédé le plus simple possible à utiliser et ne demandant pas de connaissances préalables de programmation permettant une étude numérique des suites de nombres réels. Cela excluait de faire programmer les étudiants dans un langage habituel style BASIC ou PASCAL. Les délais de mise en place des travaux dirigés sur machine ne nous ont pas permis de réaliser un programme spécifique prêt à l'emploi par les étudiants.

Nous avons donc décidé d'utiliser un tableur, en l'occurence MULTIPLAN de MICROSOFT (dans la version 1 pour MS-DOS) qui était disponible dans notre salle de micro-ordinateurs.

L'utilisation d'un tableur (et de Multiplan en particulier) présente un certain nombre d'avantages:

-l'obtention de tableaux de nombres est très facile, il n'y a pas d'instructions de tabulation à mettre en oeuvre,

-la précision des calculs (14 chiffres) est bonne et il est facile de faire varier le nombre de chiffres affichés par simple modification de la largeur d'une colonne,

-il est aisé de modifier la valeur de paramètres ou de conditions initiales, et de plus on peut entrer (ce que ne tolèrent pas les langages comme Basic ou Pascal) des expressions calculées du type: "RACINE(2)",

-la structure de calcul se prête bien à l'étude numérique des suites sous la forme où on les rencontre le plus souvent ($u_n=f(n,u_{n-1},u_{n-2})$) et les notions de variables et de coordonnées relatives sont bien mises en valeur (voir les exemples).

-la possibilité de stocker des "feuilles" permet de conserver une trace des calculs effectués et aussi, en fournissant aux étudiants un "corrigé", de leur éviter un blocage sur des problèmes de mise en oeuvre ou de manque de temps (si l'on utilise une feuille déjà prête les modifications de paramètres restent libres).

Ce qu'on peut faire.

Le but est d'étudier numériquement des suites pour:

-faire découvrir ou deviner des propriétés que l'on justifiera ensuite sur une feuille de papier par les procédés mathématiques habituels,

-introduire des théories non directement liées aux suites: par exemple la recherche des zéros d'un polynôme par la méthode de Bernoulli ou la construction des nombres de Stirling est une introduction et une motivation pour l'algèbre linéaire,

-illustrer des exercices "théoriques" en montrant les applications pratiques,

-montrer les limites de l'utilisation des machines qui ne peuvent remplacer le raisonnement théorique.

-initier les étudiants à l'un des logiciels les plus répandus dans la vie professionnelle.

La mise en page cherche à mettre en valeur la dualité entre la recherche pratique, expérimentale en quelque sorte de propriétés et leur justification théorique ou, en sens inverse, la démonstration de propriétés et leur concrétisation sur la machine.

Les documents distribués aux étudiants consistaient essentiellement en les pages 34 à 54 . Les pages d'exemples sont des recopies sur papier des écrans correspondants aux exemples de la disquette.

Les limites.

Les possibilités d'un tableur pour des utilisations scientifiques sont quand même limitées, ce n'est pas vraiment un langage de programmation et ce n'est pas une ouverture sur l'algorithmique ou la programmation structurée. Certaines suites passent mal (par exemple la recherche des zéros d'une fonction par la méthode de balayage à pas variable).

Malgré la facilité de mise en oeuvre, un certain apprentissage est nécessaire avant d'obtenir des résultats ce qui, compte-tenu des horaires réduits et des perturbations liées aux grèves de l'hiver 86-87, ne nous a pas permis de réaliser tous les exemples qui suivent.

Mis à part l'étude des suites, nous voyons peu d'autres applications pédagogiques d'un tableur, la manipulation, tentante, des matrices est en fait malaisée. On peut toutefois citer une simulation disrète du problème de Poisson.

Références.

Les exercices proposés sont classiques, et nos principales sources d'inspiration sont:

J.L.Ovaert et J.L. Verley:

ANALYSE Volume 1 CEDIC éditeur

A.Meyer et C.Steyaert:

INFORMATIQUE MATHEMATIQUE

Publication de l'IREM PARIS-SUD (1985)

dont la majorité des exemples est réalisable sous Multiplan.

Nous tenons aussi à remercier Madame Claudine GERVAIS avec qui nous avons eu une enrichissante conversation.

Remarque.

On peut trés bien utiliser un autre tableur par exemple COLORCALC du nano-réseau qui équipe un certain nombre de lycées, comme le montre l'exemple suivant (communiqué par Jacqueline JARRAUD) de construction du triangle de Pascal sur Colorcalc.

Voila comment se présente l'écran (il est rempli à la fin de l'exercice):

	A	B	C	D	.	.	.		O
1	1	0	0	0					0
2	1	1	0	0					0
3	1	2	1	0					0
15	1	14	91					14	1

1^er^ temps: Afficher 1 dans la première colonne, pour cela:

1) entrer 1 dans A1,

2) sélectionner A1, la mettre dans le "tiroir" avec le pictogramme "appareil-photo",

3) sélectionner A2....A15 et recopier A1 avec le pictogramme "encrier".

2^e^temps. Mettre 0 dans la première ligne sauf A1 :

1) entrer 0 en B1 ,

2) sélectionner la case B1, la mettre dans le tiroir avec le pictogramme "appareil-photo",

3)sélectionner C1....O1 et recopier B1 avec le pictogramme "encrier".

3^e^temps: Formule dite du "revolver"

A1	B1
	B2

B2 = A1 + B1

1) la sélectionner, la mettre dans le tiroir,

2) sélectionner B1 à O15 extrémités de la diagonale,

3) recopier la formule du revolver avec le pictogramme "encrier".

Travaux Dirigés de MATHEMATIQUES

sur Micro-ordinateurs

Utilisation d'un tableur (MULTIPLAN)

Guide d'utilisation

-Mettre la disquette "Multiplan" dans le lecteur de gauche, le verrouiller et allumer la machine.

-Le tableur apparait, prêt à l'emploi. Il est divisé en 16384 cases (ou cellules) réparties sur 256 lignes et 64 colonnes.

-Une liste de commandes est affichée en bas de l'écran, la sélection d'une commande se fait soit en circulant dans le menu de commandes en pressant la barre d'espaces en bas du clavier soit en tapant l'initiale (en majuscule sur l'écran) de la commande puis en validant par la touche ENTREE (↵).

-A l'intérieur d'une commande on choisit entre les différentes options au moyen de la barre d'espacement ou en frappant l'initiale et on circule d'un sous-menu à un autre avec la touche TAB (⇆), on termine en validant avec ENTREE.

-A tout moment on peut sortir d'une commande sans l'exécuter en appuyant sur la touche ESC.

-Les menus d'aide s'obtiennent par:

G (Guide) quand le tableur attend une commande.

? à l'intérieur d'une commande

et on en sort par ESC.

-Dans chaque case du tableur on peut soit mettre du texte soit mettre des nombres ou des formules permettant d'en calculer. Chaque case est repérée par son numéro de ligne et son numéro de colonne. On peut aussi lui donner un nom grace à la commande Nom et on utilisera alors le nom comme une variable pour désigner cette case ou son contenu. On peut donner le même nom à plusieurs cases d'une même colonne ou d'une même ligne, quand le nom sera utilisé ultérieurement le tableur sélectionnera automatiquement la case située sur la même ligne (ou colonne) que la case d'appel.

-Les formules, les nombres se rentrent avec la commande C(alcul), le texte avec A(lpha) et l'on choisit la case active (illuminée sur l'écran) à l'aide des touches de direction.

-Pour la préparation de calculs il vaut mieux mettre l'option Recalcul automatique hors circuit en sélectionnant O(ption) puis N(on).

-Dans les formules on peut utiliser des nombres contenus dans d'autres cases qu'on peut repérer:

-par leur adresse relative i.e. exprimée par rapport à la case active (par exemple: L(-1)C(2) représente la case située la ligne au dessus et 2 colonnes à droite de la case active), cette possibilité est très utile pour les suites récurrentes. Le tableur peut se charger des calculs de coordonnées: il suffit d'envoyer ensuite le repère lumineux dans la bonne case à l'aide des touches de direction,

-par leur adresse absolue (L2C6 désigne la cellule située à l'intersection de la 2^{e} ligne et de la 6^{e}colonne) ou par leur nom.

-On peut recopier le contenu (texte, formule ou nombre) d'une case -ou d'un groupe de cases, voir l'annexe pour la syntaxe- grace à la commande R(ecopie) en spécifiant la direction, le nombre de copies et les cellules à recopier.

-ATTENTION: le logiciel est bien francisé et un nombre décimal doit être entré avec une virgule et non avec un point. Les règles de parenthésage et de priorité sont les règles habituelles, le signe * ne peut être omis dans les produits.

-Quand tout est prêt, déclencher le recalcul en pressant la touche F8 ou ! ou en sélectionnant l'option recalcul automatique et observer les résultats.

-Avant d'aborder un nouvel exercice effacer l'écran par Lit_ecrit Efface_feuille (en confirmant par Oui), l'exécution sera plus rapide.

-L'option Format Largeur permet de choisir la largeur de la colonne (qui conditionne le nombre de chiffres affichés dans la ou les colonnes spécifiées), les calculs sont faits avec une précision de 14 chiffres.

-La commande Lit_Ecrit Charge permet de charger à partir de la disquette des "feuilles" déja prêtes, le catalogue et le choix sont obtenus à l'aide des touches de direction (ne pas oublier de valider à la fin).

-La commande Format Option Expression: Oui permet d'afficher les expressions utilisées sur la feuille.

EXPRESSIONS

Les expressions peuvent contenir des constantes, des références à des cellules, et des fonctions.

Constantes numériques
Elles peuvent être écrites en notation standard (ex. 3,1416) ou en notation scientifique (ex. 1,5E6).

Texte
Doit être placé entre guillemets (ex. "F"), s'il apparaît dans une expression.

Références absolues

Ln ou *Cn*	Donne le numéro de ligne *n* (1 à 255) ou le numéro de colonne *n* (1 à 63).
Ln:m ou *Cn:m*	Domaine de lignes ou de colonnes.

Références relatives

L ou C	Ligne ou colonne active.
L[− *n*] ou L[+ *n*]	*n*. ième ligne au dessus ou en dessous de la ligne active. Le signe + peut être omis.
C[− *n*] ou C[+ *n*]	*n*. ième colonne à gauche ou à droite de la colonne active.

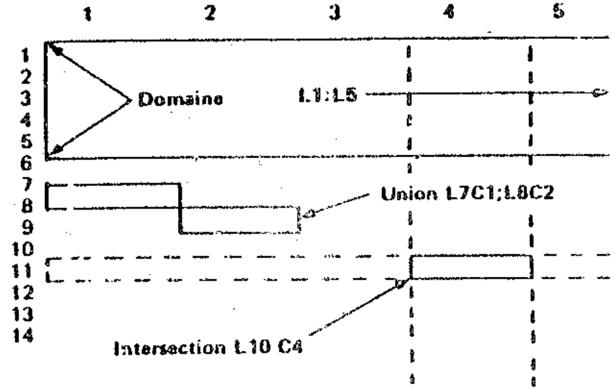
Un couple LC peut être utilisé pour désigner une intersection de références; par ex. *Ln Cn* est la référence absolue d'une cellule unique, LC[-1] est la cellule à gauche de la cellule active.

Noms
Ils doivent commencer par une lettre; et peuvent contenir des lettres, des chiffres, des points et des soulignés. Les noms de référence peuvent être définis pour n'importe quelle cellule ou groupe de cellules.

Opérations relatives aux Groupes de cellules

:	Définit un domaine: Le plus petit rectangle incluant deux opérandes (ex. L1:L5 signifie lignes 1 à 5).
;	Définit une union (ex. L7C1;L8C2 associe la cellule ligne 7, colonne 1 à la cellule ligne 8, colonne 2).
(espace)	Définit une intersection: la (ou les) cellule(s) appartenant aux deux opérandes (ex. L10 C4 est la cellule unique se trouvant à l'intersection de la ligne 10 et de la colonne 4).

Exemple:



UTILISATION DES TOUCHES

DEPLACEMENT DU POINTEUR DE CELLULE, DEFILEMENT

[↑] [↓] [←] [→] Déplacent le pointeur de cellule dans la direction indiquée.
Continuent à déplacer le pointeur pour faire défiler le contenu de la fenêtre.

[Ctrl] [PgUp] Déplacent le pointeur de cellule vers L1C1.

[Home] Déplace le pointeur de cellule vers le coin supérieur gauche de la fenêtre.

[End] Déplace le pointeur de cellule vers le coin inférieur droit de la feuille de travail.

[F1] (Zone Suivante) Déplace le pointeur de cellule vers la fenêtre suivante.

[F2] (Prochaine Cellule non Protégée) Déplace le pointeur de cellule vers la prochaine cellule occupée non protégée.

Guide ? au F10
Recalcul ! au F8
{ Caractère gauche F1
Caractère droite F2 }
(dans Calcul, Alpha ou Edit)

FONCTIONS

Opérations portant sur des valeurs numériques et sur du texte.

+	Addition
–	Soustraction
/	Division
*	Multiplication
^	Exponentiation (Cant + Alt * 6)
%	Pourcentage, identique à /100
&	Concaténation de chaînes de caractères

Fonctions relatives à des groupes de cellules

ECARTYPE(Liste)
: Ecart Type des valeurs de la liste.

ET(liste) — Vrai si (et seulement si) toutes les valeurs sont VRAI; sinon donne FAUX.

MAX(liste) — Plus grande des valeurs de la liste.

MIN(liste) — Plus petite des valeurs de la liste.

MOYENNE(liste)
: Moyenne des valeurs (=SOMME/NB).

NB(liste) — Nombre des valeurs données en argument ou par des références.

OU(liste) — Vrai si l'une des valeurs est vrai; sinon donne FAUX.

SOMME(liste) — Somme des valeurs.

VAN(d;liste) — Donne la Valeur Actuelle nette du Flux financier correspondant aux valeurs; d'est le taux d'intérêt.

FONCTIONS MATHEMATIQUES, LOGIQUES, ET TEXTE

ABS(*n*) — Valeur absolue du nombre *n*.

ARRONDI(*n;m*) — *n* arrondi à la *m*.ième décimale.

ATAN(*n*) — Arctangente de l'angle *n* exprimé en radians.

CHERCHE(nombre;zone)
: Si la zone (ensemble rectangulaire de cellules) est plus haute que large, Multiplan recherche la première ligne, dont le contenu en première colonne est inférieur ou égal à "nombre". Le résultat est égal au contenu de la dernière colonne de la ligne. Pour une zone plus large que haute, lignes et colonnes sont interchangées.

Colonnes formant une table

valeur entre 1000 et 1499 → nombre renvoyé

500	X	X	5
1000	X	X	7
1500	X	X	9
2000	X	X	13
2500	X	X	17
3000	X	X	22
3500	X	X	27
4000	X	X	33
4500	X	X	38

CNUM(*t*) — Conversion de texte en numérique d'un ensemble de caractères, représentant obligatoirement un nombre dans *t*.

COLONNE() — Donne le numéro de colonne actuelle.

COS(*n*) — Cosinus de l'angle *n* en radians.

CTXT(*n;m*) — Conversion du numérique *n* en caractères avec *m* décimales.

DELTA() — Donne la plus grande différence numérique entre les valeurs successives des cellules, d'une itération sur l'autre.

ENT(*n*) — La partie entière de *n* tronquée inférieurement.

ERREUR(*n*) — Donne VRAI si (et seulement si) *n* est un symbole d'erreur.

EXP(*n*) — e à la puissance *n*.

FAUX() — Valeur logique Faux.

FRANC(*n;m*) — Conversion du numérique *n* en caractères au format F, avec *m* décimales.

INDEX(zone; *n;m*)
: Donne la valeur de la cellule de la zone, définie par *n;m*.

LIGNE() — Donne le numéro de ligne actuelle.

LNA(*n*) — Donne VRAI si (et seulement si) *n* est un symbole #N/A.

LOG(*n*) — Logarithme de *n* en base e.

LOG10(*n*) — Logarithme de *n* en base 10.

MOD(diviseur,dividende)
: Reste de la division entière de dividende/diviseur.

NA() — Donne le symbole #N/A(non accessible).

NBCAR(*t*) — Nombre de caractères dans *t*.

NBITER() — Donne le nombre d'itérations pendant la phase correspondante, en commençant à 1. Donne #N/A pendant le calcul initial de la feuille de travail.

NON(logique) — Donne VRAI si logique est FAUX et inversement.

PI() — Valeur de pi (3,14159).

RACINE(*n*) — Racine carrée de *n*.

REPT(*t;n*) — Texte *t* répété *n* fois.

SI(Logique,Alors valeur1,Sinon valeur2)
: Si l'expression logique est VRAI, donne alors Valeur1, sinon donne Valeur2.

SIGNE(*n*) — Donne -1 si n<0, 0 si n=0, sinon 1.

SIN(*n*) — Sinus de l'angle *n* exprimé en radians.

STXT(*t;n;m*) — Extrait de *t* un sous-texte de *n* caractères à partir du *m*.ième.

TAN(*n*) — Tangente de l'angle *n* exprimé en radians.

VRAI() — Valeur logique VRAI.

SYMBOLES D'ERREUR

#N/A	Donnée non accessible.
#NOM?	Nom pas défini.
#NUM!	Dépassement de capacité ou usage illégal d'une fonction arithmétique.
#DIV/0!	Division par 0.
#REF!	Référence à une cellule inexistante.
#RIEN!	Impossibilité de créer un domaine.
#VALEUR!	Type de valeur utilisée invalide.

EXEMPLES

Les exemples qui suivent sont détaillés pour aider à comprendre le fonctionnement du tableur et ses possibilités, vous êtes invités à les réaliser vous-même pour acquérir une certaine habitude d'utilisation avant de passer aux exercices.

Exemple 1: $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$.

Première façon: On va mettre u_n dans la n^e ligne et la première colonne. On va d'abord en L1C1 (touche Home), on appuie sur C pour choisir la commande Calcul et on tape:

(ligne()*ligne()-25)/(2*ligne()*ligne()+1)

on valide par ENTREE, on Recopie Vers le bas 99 cellules si on veut les 100 premiers termes, on valide, on recalcule la feuille et on étudie les résultats (en parcourant la feuille avec les touches de direction ou PgUp ou PgDn).

Deuxième façon: Si on veut 20 valeurs sur l'écran, on Nomme n (par exemple) la colonne C1 entre les lignes L1 et L20 puis en L1C2 on entre la formule (n*n-25)/(2*n*n+1) que l'on Recopie vers le bas 19 fois. On entre alors dans la première colonne les valeurs de n que l'on désire (ou on les fait calculer par une formule) et on recalcule la feuille.

Exemple 2: $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ et $v_n = \left[\frac{2+\sqrt{9n^2+3}}{3n-1}\right]^n$

On Nom(me) n les cases L1C1:L20C1 (L20C1 s'obtient en faisant descendre le curseur lumineux avec la touche ↓), on entre (Calcul) la formule (1+1/n)^n en L1C2 et

((2+racine(9*n*n+3))/(3*n-1))^n en L1C3. On revient en L1C2 et on Recopie Vers_le_bas 19 cellules depuis (on appuie sur TAB pour se déplacer dans le menu) L1C2:L1C3. On entre alors dans la première colonne les valeurs de n que l'on désire. Par exemple on peut mettre 1 en L1C1 et (Calcul) L(-1)C+2 enL2C1 et Recopier 18 fois vers le bas; quand on recalcule on a la valeur de u_n et v_n sur les 20 premiers entiers impairs. Ou bien on entre les puissances de 10 (sous la forme 1Eh pour h = 1,2,..,20 ou en les faisant calculer: on met 1 en L1C1 puis en L2C1 la formule 10*L(-1)C1 que l'on recopie vers le bas). Après Recalcul (! ou F8) on constate alors que les deux suites ont une même limite (le nombre e que l'on retrouvera souvent), que v_n converge bien plus vite que u_n et que si n est supérieur à 10^{14} 1+1/n est arrondi à 1 ce qui corrobore l'affirmation sur la précision des calculs.

Un phénomène intéressant est obtenu en essayant des valeurs de n en progression arithmétique de raison $2*10^9$ à partir de 10^{10}, les deux suites prennent exactement les mêmes valeurs et oscillent: les erreurs d'arrondi sont très importantes et en fait on mesure la précision du passage au logarithme et à l'exponentielle.

Exemple 3: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $u_0 > -2$.

En L1C1 on entre: 1. En L2C1 on entre: racine(2+L(-1)C).

En restant en L2C1, on Recopie (Vers la) Droite 5 fois (par exemple) puis on Recopie Vers_le_bas le bloc L2C1:L2C6 30 fois par exemple. Il suffit alors d'entrer les différentes valeurs de u_0 désirées et de recalculer la feuille par ! pour observer le résultat.. et se convaincre que quelle que soit la valeur (>-2) de u_0 la suite converge vers 2.

Exemple 4: $u_n = n!/k^n$.

On Nomme k les 5 premières cellules de la première ligne, en L2C1, on entre 1/k, on Recopie Droite 4 cellules à partir de L2C1. En L3C1 on entre L(-1)C*(ligne()-1)/k, on Recopie Droite 4 cellules, on Recopie Vers le bas 50 cellules depuis L3C1:L3C5.

On introduit alors 5 valeurs de k (par exemple : 2 , 10 , 30 60 , 90) et on recalcule . Si on s'en tient aux premières impressions dans le cas k "grand", on a tendance à conclure que u_n tend vers 0 alors qu'en fait u_n tend vers l'infini pour tout k.

Exemple 5: $u_{n+1} = (3u_n - 4v_n)/5$, $v_{n+1} = (4u_n + 3v_n)/5$.

On entre en L2C1: (3*L(-1)C-4*L(-1)C(+1))/5 , en L2C2: (4*L(-1)C(-1)+3*L(-1)C)/5 , on revient en L2C1 et on Recopie Vers_le_bas 18 cellules depuis (TAB) L2C1:L2C2 , on entre les valeurs initiales , par exemple $u_0=1$, $v_0=0$,sur la première ligne et on recalcule (!). Les deux suites ne donnent pas l'impression de converger , même si on calcule 100 ou 200 termes en recopiant à nouveau la formule. Par contre si on calcule $u_n^2+v_n^2$ dans la troisième colonne on trouve toujours 1, ce qui suggère que le point du plan complexe $Z_n=u_n+iv_n$ reste sur le cercle unité , ce qu'on vérifie immédiatement ($Z_{n+1}=(3+4i)/5.Z_n$ et Z_n "tourne" sur le cercle unité quand n croit).

Exemple 6: Le Triangle de Pascal.

Les coefficients du binôme C_n^p vérifient les relations:

$$C_n^0 = 1 \text{ pour } n \geq 0 \qquad C_0^p = 0 \text{ pour } p \geq 1$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \quad \text{pour } p \geq 1 \text{ et } n \geq 1$$

et ces relations les caractérisent Nous allons les utiliser pour construire le triangle de Pascal sur le tableur.

En L1C1 nous introduisons 1, et nous recopions 19 fois vers le bas. En L1C2 nous introduisons 0. En restant dans cette case nous recopions 18 fois vers la droite la cellule L1C2. En L2C2 nous introduisons la formule L(-1)C(-1)+L(-1)C , que nous recopions 18 fois vers la droite. On recopie alors le bloc L2C2:L2C20 18 fois vers le bas. on recalcule par ! et on voit apparaitre le triangle (on peut le parcourir avec les flèches de direction du curseur) .

Ramenons le curseur en L1C1 et Insérons une colonne avant la première, en L1C1 rentrons somme(LC(+1):LC(+20)) et recopions 19 fois vers le bas, après recalcul nous voyons apparaitre la somme des coefficients du binôme qui vaut 2^n comme le prouve l'identité: $2^n = (1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 +\ldots+ C_n^n$.

Utilisation d'un tableur.

EXERCICES

Les exercices proposés possèdent deux parties:

-dans la colonne de gauche, une découverte expérimentale et numérique de certaines propriétés des suites proposées.

-dans la colonne de droite, des exercices classiques, à faire en TD, de démonstration de propriétés.

La disposition pratique des salles ne permettant pas que les deux activités aient lieu simultanément, il est important de PRENDRE NOTE DES RESUTATS EXPERIMENTAUX pour pouvoir les utiliser ensuite en TD.

EXERCICE 1: Approximation de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

A)Considérons les nombres $\theta = 1+\sqrt{2}$ et $\theta' = 1-\sqrt{2}$ et posons

$u_n = \sqrt{2}\,\theta^n - \sqrt{2}\,\theta'^n$ et $v_n = \theta^n + \theta'^n$.

1)Montrer que u_n et v_n sont des entiers pairs, que u_n et v_n tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini, et que $\left|\sqrt{2}-\frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{4}{v_n^2}$ En déduire que u_n/v_n est un rationnel qui approche très bien $\sqrt{2}$.

2)Trouver une équation du second degré dont θ et θ' sont racines et en déduire que u_n et v_n

vérifient les relations de récurrence:

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2\,u_{n+1} + u_n \\ v_{n+2} = 2\,v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Montrer que les premiers termes sont

$u_0 = 0$, $u_1 = 4$, $v_1 = v_0 = 2$.

A l'aide du tableur calculer les 40 premières valeurs de u_n, v_n, u_n/v_n *et en déduire un rationnel qui approche* $\sqrt{2}$ à 10^{-27} *près (on ne demande pas de le mettre sous la forme irréductible).*

B)Soit (x_n) la suite définie par la donnée de x_0 et de la relation de récurrence $x_{n+1}=\frac{1}{2}\,(x_n+\frac{2}{x_n})$ pour $n\geq0$.

1)Interpréter géométriquement la définition de la suite (x_n) en fonction du graphe de la courbe d'équation $y=x^2-2$ et en déduire la limite espérée.

2)Calculer $|x_{n+1}-\sqrt{2}|$ en fonction de $|x_n-\sqrt{2}|$ et en déduire que si x_0 est assez proche de $\sqrt{2}$ la suite converge vers $\sqrt{2}$, la convergence étant très rapide si x_0 est très proche de $\sqrt{2}$.

On définit les suites (p_n) et (q_n) par $p_0=1$, $q_0=1$ et les relations $p_{n+1}=p_n^2+2q_n^2$, $q_{n+1}=2p_nq_n$.

3)Montrer que la suite (p_n/q_n) converge vers $\sqrt{2}$ et que $|p_n/q_n-\sqrt{2}|<1/2q_n^2$ (utiliser la relation $p_n^2-2q_n^2=(-1)^n$).

4)*A l'aide du tableur calculer les 10 premières valeurs de* x_n *(pour différentes valeurs de* x_0*) et de* p_n *,* q_n *et* p_n/q_n*. Comparer avec les résultats du* A).

EXERCICE 2 : On considère la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1)*Calculer les* 50 *premières valeurs de* u_n *pour différentes valeurs de* u_0*. Que peut-on conjecturer sur la nature de la suite* (u_n)*? sur la valeur à* 10^{-10} *près de la limite?.La convergence est elle rapide?*

2)Montrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées puis que leurs limites sont égales et que donc (u_n) est convergente.

EXERCICE 3 :On considère la suite définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n - 1)^2$.

1)*Calculer les 40 premières valeurs de* u_n *pour différentes valeurs de* u_0 *(en particulier pour des valeurs négatives, des valeurs entre 0 et 2, des valeurs > 2 et aussi pour* $u_0 = (3 \pm \sqrt{5})/2$). *La suite est-elle convergente , a-t-elle toujours le même comportement?*

2)On prend $0 \leq u_0 \leq 1$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées. La suite (u_n) est-elle convergente?

3)Montrer qu'il existe a et b tels que si $u_0 < a$ ou $u_0 > b$ alors la suite u_n tend vers $+\infty$.

4)Quelle est la nature de la suite pour $u_0 = a$ ou b ?

5)En déduire la nature de la suite (u_n) suivant la valeur de u_0.

EXERCICE 4 : Soient a et b des nombres réels strictement positifs tels que a < b. On considère les suites (u_n) et (v_n) de nombres réels définies par les relations:

$$u_0 = a \qquad v_0 = b \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

1. *Utiliser le tableur pour calculer les 10 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) pour différentes valeurs de b. (augmenter la largeur des colonnes pour voir les valeurs avec une meilleure précision et prendre par exemple a = 1). Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des suites (u_n) et (v_n), sur leurs limites éventuelles, sur la rapidité de la convergence?*

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.

3. Rapidité de la convergence:

a) Montrer que

$$0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(v_n - u_n)^2.$$

b) Montrer qu'il existe des réels β positif et k dans)0,1(tels que $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \beta k^{2^n}$.

<u>Remarque</u> (voir à la fin): On peut utiliser ces suites pour calculer numériquement de façon trés efficace des intégrales elliptiques.

EXERCICE 5 : Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par:

$$u_0=a \qquad v_0=b$$

$$n\geq 0 \quad u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2} \qquad v_{n+1}=\sqrt{v_n u_{n+1}}$$

1. *Calculer les 20 premières valeurs de* u_n *et* v_n *pour différentes valeurs de* a *et* b. *Cas particulier: on prend* $a=1/4$ *et* $b=\sqrt{2}/4$ *quelle est la limite commune des suites* $1/u_n$ *et* $1/v_n$? *Utiliser le tableur pour la calculer avec une précision de* 10 *décimales. Cette méthode de calcul s'appelle la* méthode des isopérimètres, *elle consiste à approcher la longueur du cercle par le périmètre du polygone régulier à* 2^n *côtés.*

Soit α le réel de l'intervalle $]0\ \pi/2[$ vérifiant $\cos\alpha = a/b$.

2. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2 en fonction de b et α.

3. Montrere par récurrence que pour $n \geq 1$:

$$u_n = b\cos\alpha/2\ \cos\alpha/2^2 \ldots \cos\alpha/2^{n-1}\ \cos^2\alpha/2^n$$

$$v_n = b\cos\alpha/2\ \cos\alpha/2^2 \ldots \cos\alpha/2^{n-1}\ \cos\alpha/2^n$$

4. Utilisant la formule

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

simplifier $v_n \sin(\alpha/2^n)$ et en

déduire la limite de v_n et de u_n quand n tend vers l'infini et justifier le résultat du 1.

EXERCICE 6 : Suite récurrente sur deux termes.

On considère les suites de Fibonacci et de Lucas définies par les relations:

$$f_0 = 1 \ , \ f_1 = 1 \ , \ n \geq 0 \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

$$l_0 = 1 \ , \ l_1 = 3 \ , \ n \geq 0 \quad l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$$

Pour n = 1,..,40

1.*Calculer* f_n *et* l_n.

Montrer que l_n et f_n tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.

2.*Calculer* $f_n^2 - f_{n+1} * f_{n-1}$,

$l_n^2 - l_{n+1} * l_{n-1}$ *et* $l_n^2 - 5 * f_n^2$.

Quelles conjectures peut-on formuler?

Comment peut-on expliquer les résultats aberrants?

Démontrer les conjectures et en déduire que f_{n+1} et f_n sont premiers entre eux.

3.*Calculer* $a_n = 2 \sum_{m=1}^{n} \text{atan}(1/f_{2m})$

Trouver la limite de la suite (a_n).

4.*Calculer* $v_n = f_{n+1}/f_n$.

Montrer que

a) $3/2 \leq v_n \leq 2$

b) la suite (v_n) est de Cauchy

c) elle converge vers une limite l que l'on déterminera.

5. *On pose* $w_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$

calculer f_n/w_n

Justifier le résultat.

Soit (s_n) la suite définie par:

$$s_0 = 1 \ , \ s_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \ , \ s_{n+2} = s_{n+1} + s_n \text{ pour } n \geq 0$$

6. *Calculer les 80 premières valeurs de* s_n *et formuler une conjecture sur la nature de la suite* (s_n).

Montrer que $s_n = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$ et en déduire la limite de la suite quand n tend vers l'infini. Comparer avec la conjecture de gauche.

RECHERCHE DES ZÉROS D'UNE FONCTION

EXERCICE 7: Méthode de Bernoulli

Cette méthode s'applique aux polynômes dont une racine est strictement plus grande, en valeur absolue que les autres, elle généralise le calcul dans l'exercice précédent du nombre d'or racine de $X^2 + X + 1$.

Soit P(X) le polynôme $X^r - a_{r-1}X^{r-1} - \ldots - a_0$, on lui associe la suite récurrente définie par la donnée des r premiers termes $u_0, \ldots, u_{r-1}$, et la relation de récurrence:

$$(*) \qquad u_{n+r} = a_{r-1}u_{n+r-1} + \ldots + a_0 u_n \quad \text{pour } n \geq 0.$$

1)Montrer que l'ensemble des suites vérifiant (*) admet une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension r et que, si $\rho_1, \ldots \rho_r$ sont les r racines de P avec:

$$|\rho_1| > |\rho_2| \geq \ldots \geq |\rho_r|$$

une base en est donnée par les suites géométriques de raison ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_r$.

2)On considère la suite définie par (*) *et* $u_0 = 1$, $u_1 = \ldots = u_{r-1} = 0$. Quelle est la limite de la suite u_{n+1}/u_n?

3)*Application: Calculer les racines du polynôme:* $X^4 - 6X^3 + 5X^2 - 6X + 4$.

On trouvera plus de détails sur la méthode et en particulier le cas où $|\rho_1| = |\rho_2|$ dans J.L.Ovaert et J.L.Verley Analyse (op.cit).

EXERCICE 8: Méthode de dichotomie.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie, continue sur l'intervalle $\langle a,b \rangle$ et telle que $f(a)f(b) < 0$.

1)Montrer que f a un zéro dans l'intervalle (a,b).

On définit deux suites a_n et b_n par

$a_0 = a$, $b_0 = b$

$a_{n+1} = a_n$ si $f(a_n)f((a_n+b_n)/2)<0$, $(a_n+b_n)/2$ sinon.

$b_{n+1} = b_n$ si $f(b_n)f((a_n+b_n)/2)<0$, $(a_n+b_n)/2$ sinon.

2)Montrer que ou bien il existe i tel que $f(a_i) = 0$ ou $f(b_i) = 0$ ou bien les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers une même limite α et que $f(\alpha)=0$.

3)*Utiliser le tableur pour rechercher par cette méthode une valeur approchée à* 10^{-13} *de la racine réelle du polynôme*

$X^3 + 2X+ 1$.

et de la plus petite racine réelle du polynôme

$X^4 + 4 X^2 + 2 X - 4$

EXERCICE 9: Méthode de Newton.

Soit f une fonction continue et dérivable d'une variable réelle et soit x_0 un réel tel que $f'(x_0) \neq 0$, on définit une suite (x_n) par la relation:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1)Montrer que si la suite (x_n) est convergente, elle converge vers une racine α de l'équation $f(x) = 0$.

2)On prend $f(x) = \sin(x)$ et $x_0 = \mathrm{Arctg}(1/2\pi)$, quelle est la nature de la suite (x_n)?

3)Soit $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, calculer $g'(x)$. que vaut $g'(\alpha)$?

4)On suppose que $f'(\alpha) \neq 0$, utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que dans un voisinage de α, l'application g est contractante. En déduire que si x_0 est suffisamment près de α, la suite (x_n) converge vers α.

5)*Utiliser la méthode précédente pour calculer, à* 10^{-13} *près,* π *comme racine de* $\sin(x) = x$ et $\sqrt[5]{2}$ *comme racine de* $X^5 - 2$. *Trouver la racine non nulle de* $\sin(x) = x^2$ et *la racine positive du polynôme* $X^6 - X - 1$.

6)Dans les exemples précédents la convergence est très rapide, montrons-le. Appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 à $g(x)$, montrer qu'il existe k tel que, pour x proche de α:

$$|g(x)-g(\alpha)| < k\ |x-\alpha|^2$$

et donc, si x_0 est suffisamment voisin de α:

$$|x_{n+1}-\alpha| < k\ |x_n-\alpha|^2$$

la convergence est dite quadratique.

<u>Appendice:</u> Calcul numérique d'une intégrale elliptique.

Soient $0 < a \leq b$ des réels, on considère l'intégrale définie

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \quad .$$

Pour $a = b$ on a $I(a,a) = \pi/2a$. Si on fait le changement de variable: $u=\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ on obtient:

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2-u^2)(u^2-a^2)}}$$

Faisant le changement de variable $v = \dfrac{ab + u^2}{2u}$ on obtient: $I(a,b) = I(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ et, passant à la limite, notant α la moyenne arithmético-géométrique de a et b, on a:

$$I(a,b) = \pi/2\alpha$$

et l'exercice 4 fournit un procédé de calcul numérique de α trés performant.

Quelques exemples.

Approximation de racine(2) par des rationnels

n	Un	Vn	Un/Vn	4/Vn^2
1	0	2	0	1
2	4	2	2	1
3	8	6	1,333333333	0,111111
4	20	14	1,4285714286	0,0204082
5	48	34	1,4117647059	0,0034602
6	116	82	1,4146341463	0,0005949
7	280	198	1,4141414141	0,000102
8	676	478	1,4142259414	1,751E-05
9	1632	1154	1,4142114385	3,004E-06
10	3940	2786	1,4142139268	5,153E-07
11	9512	6726	1,4142134999	8,842E-08
12	22964	16238	1,4142135731	1,517E-08
13	55440	39202	1,4142135605	2,603E-09
14	133844	94642	1,4142135627	4,466E-10
15	323128	228486	1,4142135623	7,662E-11
16	780100	551614	1,4142135624	1,315E-11
17	1883328	1331714	1,4142135624	2,255E-12
18	4546756	3215042	1,4142135624	3,87E-13
19	10976840	7761798	1,4142135624	6,639E-14
20	26500436	18738638	1,4142135624	1,139E-14
21	63977712	45239074	1,4142135624	1,954E-15
22	154455860	109216786	1,4142135624	3,353E-16
23	372889432	263672646	1,4142135624	5,753E-17
24	900234724	636562078	1,4142135624	9,871E-18
25	2173358880	1536796802	1,4142135624	1,694E-18
26	5246952484	3710155682	1,4142135624	2,906E-19
27	12667263848	8957108166	1,4142135624	4,986E-20
28	30581480180	21624372014	1,4142135624	8,554E-21
29	73830224208	52205852194	1,4142135624	1,468E-21
30	178241928596	126036076402	1,4142135624	2,518E-22
31	430314081400	304278004998	1,4142135624	4,32E-23
32	1038870091396	734592086398	1,4142135624	7,413E-24
33	2508054264192	1773462177794	1,4142135624	1,272E-24
34	6054978619780	4281516441986	1,4142135624	2,182E-25
35	14618011503752	10336495061766	1,4142135624	3,744E-26
36	35291001627284	24954506565518	1,4142135624	6,423E-27
37	85200014758320	60245508192802	1,4142135624	1,102E-27
38	205691031143920	145445522951120	1,4142135624	1,891E-28
39	496582077046160	351136554095040	1,4142135624	3,244E-29
40	1,198855195E+15	847718631141200	1,4142135624	5,566E-30

Calcul de racine de 2 par la méthode de Newton

n	Xn	Xn	Pn	Qn	Pn/Qn
0	2	1	1	1	1
1	1,5	1,5	3	2	1,5
2	1,4166666667	1,4166667	17	12	1,4166666667
3	1,4142156863	1,4142157	577	408	1,4142156863
4	1,4142135624	1,4142136	665857	470832	1,4142135624
5	1,4142135624	1,4142136	8,867E+11	6,27E+11	1,4142135624
6	1,4142135624	1,4142136	1,573E+24	1,112E+24	1,4142135624
7	1,4142135624	1,4142136	4,946E+48	3,497E+48	1,4142135624
8	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
9	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
10	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
11	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
12	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
13	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
14	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!
15	1,4142135624	1,4142136	NUM!	NUM!	NUM!

Suites Un=(1+1/n)^n et Vn=((2+racine(9n2+3))/(3n-1))^n

n	Un	Vn
1	2	2,7320508075689
100	2,7048138294216	2,718281828598
1000	2,7169239322549	2,7182818284222
10000	2,7181459268134	2,7182818292353
100000	2,7182682360055	2,7182818272448
1000000	2,7182804681504	2,7182818272897
10000000	2,7182816913761	2,7182816913761
100000000	2,7182818136988	2,7182818136988
1E+09	2,718281825931	2,718281825931
1E+10	2,7182818271543	2,7182818271543
1E+11	2,7182818272766	2,7182818272766
1E+12	2,7182818272888	2,7182818272888
1E+13	2,71828182729	2,71828182729
1E+14	1	1
1E+15	1	1
1E+10	2,7182818271543	2,7182818271543
1,1E+10	2,7180100125749	2,7180100125749
1,2E+10	2,7171947318801	2,7171947318801
1,3E+10	2,7174664649483	2,7174664649483
1,4E+10	2,7171947318963	2,7171947318963
1,5E+10	2,7196413079545	2,7196413079545
1,6E+10	2,7182818272052	2,7182818272052
1,7E+10	2,7171947319135	2,7171947319135
1,8E+10	2,7204573227574	2,7204573227574
1,9E+10	2,716651347316	2,716651347316
2E+10	2,7182818272222	2,7182818272222

Suite U(n+1) = (Un - 1)^2

n	Un	Un	Un	Un
0	0,8	2,7	2,61803398875	0,38196602516
1	0,04	2,89	2,61803398875	0,38196599406
2	0,9216	3,5721	2,61803398875	0,3819660325
3	0,0061466	6,6156984	2,61803398875	0,38196598499
4	0,9877447	31,536069	2,61803398875	0,38196604371
5	0,0001502	932,45149	2,61803398875	0,38196597113
6	0,9996996	867601,87	2,61803398875	0,38196606085
7	9,022E-08	7,527E+11	2,61803398875	0,38196594995
8	0,9999998	5,666E+23	2,61803398875	0,38196608703
9	3,256E-14	3,21E+47	2,61803398875	0,38196591758
10	1	NUM!	2,61803398875	0,38196612703
11	3,6E-27	NUM!	2,61803398875	0,38196586814
12	1	NUM!	2,61803398875	0,38196618814
13	0	NUM!	2,61803398875	0,3819657926
14	1	NUM!	2,61803398875	0,38196628152
15	0	NUM!	2,61803398875	0,38196567718
16	1	NUM!	2,61803398875	0,38196642418
17	0	NUM!	2,61803398875	0,38196550084
18	1	NUM!	2,61803398875	0,38196664215
19	0	NUM!	2,61803398875	0,38196523141
20	1	NUM!	2,61803398875	0,38196697518
21	0	NUM!	2,61803398875	0,38196481977
22	1	NUM!	2,61803398875	0,38196748401
23	0	NUM!	2,61803398875	0,38196419082
24	1	NUM!	2,61803398875	0,38196826142
25	0	NUM!	2,61803398875	0,38196322959
26	1	NUM!	2,61803398875	0,38196944921
27	0	NUM!	2,61803398875	0,38196176171
28	1	NUM!	2,61803398875	0,38197126399
29	0	NUM!	2,61803398875	0,38195951853
30	1	NUM!	2,61803398875	0,38197403673
31	0	NUM!	2,61803398875	0,38195609127
32	1	NUM!	2,61803398875	0,38197827312
33	0	NUM!	2,61803398875	0,3819508549
34	1	NUM!	2,61803398875	0,38198474576
35	0	NUM!	2,61803398875	0,38194285447

40 lignes plus loin - - - -

2,61803398875	0,94307150719
2,61803398875	0,00324085329
2,61803398875	0,99352879654
2,61803398875	4,1876474E-05
2,61803398875	0,99991624881
2,61803398875	7,0142626E-09
2,61803398875	0,99999998597
2,61803398875	1,9679937E-16
2,61803398875	1
2,61803398875	0
2,61803398875	1
2,61803398875	0
2,61803398875	1

Suite arithmético-géométrique

n	Un	Vn	Un	Vn	Un	Vn
0	1	2	1	5	1	1,1
1	1,4142136	1,5	2,236068	3	1,0488088	1,05
2	1,4564753	1,4571068	2,5900201	2,618034	1,0494043	1,0494044
3	1,456791	1,456791	2,6039894	2,604027	1,0494043	1,0494043
4	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
5	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
6	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
7	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
8	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
9	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
10	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
11	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
12	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
13	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
14	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
15	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043
16	1,456791	1,456791	2,6040082	2,6040082	1,0494043	1,0494043

Suite double.Méthode des isopérimètres

n	Un	Vn	Un	Vn	1/Un	1/Vn
1	1	2	0,25	0,3535534	4	2,8284271
2	1.5	1,7320508	0,3017767	0,3266407	3,3137085	3,0614675
3	1,6160254	1,6730326	0,3142087	0,3203644	3,1825979	3,1214452
4	1,644529	1,6587196	0,3172866	0,3188218	3,1517249	3,1365485
5	1,6516243	1,6551681	0,3180542	0,3184378	3,1441184	3,1403312
6	1,6533962	1,6542819	0,318246	0,3183418	3,1422236	3,1412773
7	1,6538391	1,6540605	0,3182939	0,3183179	3,1417504	3,1415138
8	1,6539498	1,6540051	0,3183059	0,3183119	3,1416321	3,1415729
9	1,6539775	1,6539913	0,3183089	0,3183104	3,1416025	3,1415877
10	1,6539844	1,6539878	0,3183096	0,31831	3,1415951	3,1415914
11	1,6539861	1,653987	0,3183098	0,3183099	3,1415933	3,1415923
12	1,6539865	1,6539868	0,3183099	0,3183099	3,1415928	3,1415926
13	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415926
14	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415926
15	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927
16	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927
17	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927
18	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927
19	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927
20	1,6539867	1,6539867	0,3183099	0,3183099	3,1415927	3,1415927

n	Un	Un	Un	Un
0	0	0,2	1	8
1	1	0,9800666	0,5403023	-0,1455
2	0,5403023058681	0,5569673	0,8575532	0,9894335
3	0,8575532158464	0,8488622	0,6542898	0,5491634
4	0,6542897904978	0,6608376	0,7934804	0,8529615
5	0,7934803587425	0,7894784	0,7013688	0,6577553
6	0,7013687736228	0,7042157	0,7639597	0,7913665
7	0,7639596829006	0,7621196	0,7221024	0,702874
8	0,7221024250267	0,7233742	0,7504178	0,7629876
9	0,7504177617638	0,7495766	0,731404	0,7227746
10	0,7314040424225	0,7319774	0,7442374	0,7499733
11	0,7442373549006	0,7438543	0,7356047	0,7317071
12	0,7356047404363	0,7358642	0,7414251	0,7440349
13	0,7414250866101	0,741251	0,7375069	0,7357418
14	0,7375068905132	0,7376245	0,7401473	0,7413331
15	0,7401473355679	0,7400683	0,7383692	0,737569
16	0,7383692041223	0,7384225	0,7395672	0,7401056
17	0,7395672022123	0,7395313	0,7387603	0,7383974
18	0,7387603198742	0,7387845	0,7393039	0,7395482
19	0,7393038923969	0,7392876	0,7389378	0,7387731
20	0,7389377567153	0,7389487	0,7391844	0,7392953
21	0,7391843997715	0,739177	0,7390183	0,7389436
22	0,7390182624274	0,7390232	0,7391302	0,7391805
23	0,7391301765297	0,7391268	0,7390548	0,7390209
24	0,7390547907469	0,7390571	0,7391056	0,7391284
25	0,7391055719265	0,739104	0,7390714	0,739056
26	0,739071365299	0,7390724	0,7390944	0,7391048
27	0,7390944073791	0,7390937	0,7390789	0,7390719
28	0,739078885995	0,7390794	0,7390893	0,739094
29	0,7390893414034	0,739089	0,7390823	0,7390791
30	0,7390822985224	0,7390825	0,739087	0,7390892
31	0,7390870426953	0,7390869	0,7390838	0,7390824
32	0,739083846965	0,7390839	0,739086	0,739087
33	0,7390859996481	0,7390859	0,7390845	0,7390839
34	0,7390845495752	0,7390846	0,7390855	0,739086
35	0,7390855263619	0,7390855	0,7390849	0,7390846
36	0,7390848683867	0,7390849	0,7390853	0,7390855
37	0,7390853116068	0,7390853	0,739085	0,7390849
38	0,7390850130484	0,739085	0,7390852	0,7390853
39	0,7390852141609	0,7390852	0,7390851	0,739085
40	0,7390850786891	0,7390851	0,7390852	0,7390852
41	0,7390851699446	0,7390852	0,7390851	0,7390851
42	0,7390851084738	0,7390851	0,7390851	0,7390852
43	0,7390851498812	0,7390851	0,7390851	0,7390851
44	0,7390851219887	0,7390851	0,7390851	0,7390851
45	0,7390851407774	0,7390851	0,7390851	0,7390851
46	0,7390851281211	0,7390851	0,7390851	0,7390851
47	0,7390851366466	0,7390851	0,7390851	0,7390851
48	0,7390851309037	0,7390851	0,7390851	0,7390851
49	0,7390851347722	0,7390851	0,7390851	0,7390851
50	0,7390851321663	0,7390851	0,7390851	0,7390851
51	0,7390851339217	0,7390851	0,7390851	0,7390851
52	0,7390851327392	0,7390851	0,7390851	0,7390851
53	0,7390851335358	0,7390851	0,7390851	0,7390851
54	0,7390851329992	0,7390851	0,7390851	0,7390851
55	0,7390851333606	0,7390851	0,7390851	0,7390851
56	0,7390851331172	0,7390851	0,7390851	0,7390851
57	0,7390851332811	0,7390851	0,7390851	0,7390851
58	0,7390851331707	0,7390851	0,7390851	0,7390851
59	0,7390851332451	0,7390851	0,7390851	0,7390851
60	0,739085133195	0,7390851	0,7390851	0,7390851
61	0,7390851332287	0,7390851	0,7390851	0,7390851
62	0,739085133206	0,7390851	0,7390851	0,7390851
63	0,7390851332213	0,7390851	0,7390851	0,7390851
64	0,739085133211	0,7390851	0,7390851	0,7390851
65	0,739085133218	0,7390851	0,7390851	0,7390851
66	0,7390851332132	0,7390851	0,7390851	0,7390851
67	0,7390851332165	0,7390851	0,7390851	0,7390851
68	0,7390851332143	0,7390851	0,7390851	0,7390851
69	0,7390851332157	0,7390851	0,7390851	0,7390851
70	0,7390851332148	0,7390651	0,7390851	0,7390851
71	0,7390851332154	0,7390851	0,7390851	0,7390851
72	0,739085133215	0,7390851	0,7390851	0,7390851
73	0,7390851332153	0,7390851	0,7390851	0,7390851
74	0,7390851332151	0,7390851	0,7390851	0,7390851
75	0,7390851332152	0,7390851	0,7390851	0,7390851
76	0,7390851332151	0,7390851	0,7390851	0,7390851
77	0,7390851332152	0,7390851	0,7390851	0,7390851
78	0,7390851332151	0,7390851	0,7390851	0,7390851
79	0,7390851332152	0,7390851	0,7390851	0,7390851
80	0,7390851332151	0,7390851	0,7390851	0,7390851

Recherche des racines du polynôme de degré 4 *(Newton)*
X^4+pX^3+qX^2+rX+s

X0	1,5	2	-3
	1,20544554455	1,49019607843	-2,2446808511
p: 1	1,10247469695	1,20089970424	-1,6861389919
	1,09073610867	1,10160551756	-1,3239162482
	1,09059360749	1,0907161431	-1,1707026824
q: 2	1,0905935867	1,09059360207	-1,1474606482
	1,0905935867	1,0905935867	-1,1469947745
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
r: -1	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
s: -4	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592
	1,0905935867	1,0905935867	-1,146994592

Recherche des racines du polynôme de degré 3 *(Newton)*
X^3+p.X^2+q.X+r

X0	0	2	4
	-0,3333333333	1,88888888889	2,86666666667
p: 0	-0,3472222222	1,87945156695	2,22207170224
	-0,3472963532	1,87938524484	1,94224898502
	-0,3472963553	1,87938524157	1,88212397206
q: -3	-0,3472963553	1,87938524157	1,87939079158
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524159
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
r: -1	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157
	-0,3472963553	1,87938524157	1,87938524157

Recherche des zéros du polynôme X3+pX2+qX+r par dichotomie
****

Coefficients: p: -1 q: -2 r: 1

n	a	b	m=(a+b)/2	P(a)	P(b)
1	-2	-1	-1,5	-7	1
2	-1,5	-1	-1,25	-1,625	1
3	-1,25	-1	-1,125	-0,015625	1
4	-1,25	-1,125	-1,1875	-0,015625	0,56055
5	-1,25	-1,1875	-1,21875	-0,015625	0,29028
6	-1,25	-1,21875	-1,234375	-0,015625	0,14188
7	-1,25	-1,234375	-1,242188	-0,015625	0,06427
8	-1,25	-1,2421875	-1,246094	-0,015625	0,02461
9	-1,25	-1,24609375	-1,248047	-0,015625	0,00457
10	-1,248047	-1,24609375	-1,24707	-0,005511	0,00457
11	-1,24707	-1,24609375	-1,246582	-0,000468	0,00457
12	-1,24707	-1,24658203125	-1,246826	-0,000468	0,00205
13	-1,24707	-1,246826171875	-1,246948	-0,000468	0,00079
14	-1,24707	-1,246948242188	-1,247009	-0,000468	0,00016
15	-1,247009	-1,246948242188	-1,246979	-0,000153	0,00016
16	-1,247009	-1,246978759766	-1,246994	-0,000153	4,4E-06
17	-1,246994	-1,246978759766	-1,246986	-7,44E-05	4,4E-06
18	-1,246986	-1,246978759766	-1,246983	-3,5E-05	4,4E-06
19	-1,246983	-1,246978759766	-1,246981	-1,53E-05	4,4E-06
20	-1,246981	-1,246978759766	-1,24698	-5,49E-06	4,4E-06
21	-1,24698	-1,246978759766	-1,246979	-5,66E-07	4,4E-06
22	-1,24698	-1,246979236603	-1,246979	-5,66E-07	1,9E-06
23	-1,24698	-1,246979475022	-1,24698	-5,66E-07	6,6E-07
24	-1,24698	-1,246979594231	-1,24698	-5,66E-07	4,9E-08
25	-1,24698	-1,246979594231	-1,24698	-2,59E-07	4,9E-08
26	-1,24698	-1,246979594231	-1,24698	-1,05E-07	4,9E-08
27	-1,24698	-1,246979594231	-1,24698	-2,79E-08	4,9E-08
28	-1,24698	-1,246979601681	-1,24698	-2,79E-08	1,1E-08
29	-1,24698	-1,246979601681	-1,24698	-8,71E-09	1,1E-08
30	-1,24698	-1,246979603544	-1,24698	-8,71E-09	8,9E-10

Triangle de Pascal

1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
16	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
32	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
64	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
128	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
256	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
512	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
1024	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
2048	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
4096	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
8192	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715
16384	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002
32768	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005
65536	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440
131072	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310
262144	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620
524288	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378

Nombres de Stirling

1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0	0	0
1	7	6	1	0	0	0	0
1	15	25	10	1	0	0	0
1	31	90	65	15	1	0	0
1	63	301	350	140	21	1	0
1	127	966	1701	1050	266	28	1
1	255	3025	7770	6951	2646	462	36
1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750
1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880
1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396	159027
1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5715424	1899612
1	8191	788970	10391745	40075035	63436373	49329280	20912320
1	16383	2375101	42355950	210766920	420693273	408741333	216627840
1	32767	7141686	171798901	1096190550	2734926558	3281882604	2141764053
1	65535	21457825	694337290	5652751651	17505749898	25708104786	20415995028
1	131071	64439010	2798806985	28958095545	110687251039	197462483400	189036065010
1	262143	193448101	11259666950	147589284710	693081601779	1492924634839	1709751003480
1	524287	580606446	45232115901	749206090500	4306078895384	11143554045652	15170932662679

Suites de Fibonacci et de Lucas

n	Fn	Ln	FnFn-2 -Fn-1^2	5Fn^2 -Ln^2	Vn=F(n+1)/Fn	Wn	Fn/Wn	Sn	Sn(vraie)	An
0	1	1		4		1		1	1	1,5707960094349
1	1	3		-4	1	1,618034	0,618034	-0,618034	-0,618034	1,5707960094349
2	2	4	1	4	2	2,618034	0,763932	0,381966	0,381966	2,498091227437
3	3	7	-1	-4	1,5	4,236068	0,7082039	-0,236068	-0,236068	2,2142971481049
4	5	11	1	4	1,666666666667	6,854102	0,7294902	0,145898	0,145898	2,8928823227292
5	8	18	-1	-4	1,6	11,09017	0,7213595	-0,09017	-0,09017	2,4630071368241
6	13	29	1	4	1,625	17,944272	0,7244652	0,0557281	0,0557281	3,0464261052639
7	21	47	-1	-4	1,615384615385	29,034442	0,7232789	-0,034442	-0,034442	2,558173343378
8	34	76	1	4	1,619047619048	46,978714	0,723732	0,0212862	0,0212862	3,1052326816719
9	55	123	-1	-4	1,617647058824	76,013156	0,723559	-0,013156	-0,013156	2,594532973524
10	89	199	1	4	1,618181818182	122,99187	0,7236251	0,0081306	0,0081306	3,1277036461878
11	144	322	-1	-4	1,61797752809	199,00502	0,7235998	-0,005025	-0,005025	2,608421639154
12	233	521	1	4	1,618055555556	321,99689	0,7236095	0,0031056	0,0031056	3,1362872844718
13	377	843	-1	-4	1,618025751073	521,00192	0,7236058	-0,001919	-0,001919	2,6137266665
14	610	1364	1	4	1,618037135279	842,99881	0,7236072	0,0011862	0,0011862	3,1395659700593
15	987	2207	-1	-4	1,618032786885	1364,0007	0,7236066	-0,000733	-0,000733	2,6157530082585
16	1597	3571	1	4	1,618034447822	2206,9995	0,7236069	0,0004531	0,0004531	3,1408183180484
17	2584	5778	-1	-4	1,6180338134	3571,0003	0,7236068	-0,00028	-0,00028	2,6165270020279
18	4181	9349	1	4	1,618034055728	5777,9998	0,7236068	0,0001731	0,0001731	3,1412966724999
19	6765	15127	-1	-4	1,618033963167	9349,0001	0,7236068	-0,000107	-0,000107	2,6168226413458
20	10946	24476	1	4	1,618033998522	15127	0,7236068	6,611E-05	6,611E-05	3,1414793876465
21	17711	39603	-1	-4	1,618033985017	24476	0,7236068	-4,09E-05	-4,09E-05	2,6169355655171
22	28657	64079	1	4	1,618033990176	39603	0,7236068	2,525E-05	2,525E-05	3,1415491786225
23	46368	103682	-1	-4	1,618033988205	64079	0,7236068	-1,56E-05	-1,56E-05	2,6169786987124
24	75025	167761	1	4	1,618033988958	103682	0,7236068	9,645E-06	9,645E-06	3,1415758364032
25	121393	271443	-1	-4	1,61803398867	167761	0,7236068	-5,96E-06	-5,96E-06	2,616995174127
26	196418	439204	1	4	1,61803398878	271443	0,7236068	3,683E-06	3,684E-06	3,1415860187694
27	317811	710647	-1	-4	1,618033988738	439204	0,7236068	-2,28E-06	-2,28E-06	2,6170014671754
28	514229	1149851	1	4	1,618033988754	710647	0,7236068	1,406E-06	1,407E-06	3,1415899080872
29	832040	1860498	-1	-4	1,618033988748	1149851	0,7236068	-8,72E-07	-8,7E-07	2,617003870906
30	1346269	3010349	1	4	1,618033988751	1860498	0,7236068	5,332E-07	5,375E-07	3,1415913936744
31	2178309	4870847	-1	-4	1,61803398875	3010349	0,7236068	-3,39E-07	-3,32E-07	2,6170047890494
32	3524578	7881196	1	4	1,61803398875	4870847	0,7236068	1,941E-07	2,053E-07	3,1415919611182
33	5702887	12752043	-1	0	1,61803398875	7881196	0,7236068	-1,45E-07	-1,27E-07	2,617005139749
34	9227465	20633239	1	10	1,61803398875	12752043	0,7236068	4,904E-08	7,842E-08	3,1415921778625
35	14930352	33385282	-1	0	1,61803398875	20633239	0,7236068	-9,6E-08	-4,85E-08	2,6170052737043
36	24157817	54018521	10	100	1,61803398875	33385282	0,7236068	-4,7E-08	2,995E-08	3,1415922606514
37	39088169	87403803	0	200	1,61803398875	54018521	0,7236068	-1,43E-07	-1,85E-08	2,6170053248707
38	63245986	141422324	0	0	1,61803398875	87403803	0,7236068	-1,9E-07	1,144E-08	3,141592292274
39	102334155	228826127	0	0	1,61803398875	141422324	0,7236068	-3,33E-07	-7,07E-09	2,6170053444145
40	165580141	370248451	0	0	1,61803398875	228826127	0,7236068	-5,23E-07	4,37E-09	3,1415923043527
41	267914296	599074578	0	0	1,61803398875	370248451	0,7236068	-8,56E-07	-2,7E-09	2,6170053518796
42	433494437	969323029	0	20000	1,61803398875	599074578	0,7236068	-1,38E-06	1,669E-09	3,1415923089664
43	701408733	1568397607	0	1E+05	1,61803398875	969323029	0,7236068	-2,23E-06	-1,03E-09	2,617005354731
44	1134903170	2537720636	0	!!!!!!	1,61803398875	1,568E+09	0,7236068	-3,61E-06	6,376E-10	3,1415923107287
45	1836311903	4106118243	0	1E+06	1,61803398875	2,538E+09	0,7236068	-5,85E-06	-3,94E-10	2,6170053558201
46	2971215073	6643838879	0	0	1,61803398875	4,106E+09	0,7236068	-9,46E-06	2,435E-10	3,1415923114018
47	4807526976	10749957122	0	0	1,61803398875	6,644E+09	0,7236068	-1,53E-05	-1,51E-10	2,6170053562361
48	7778742049	17393796001	0	1E+07	1,61803398875	1,075E+10	0,7236068	-2,48E-05	9,302E-11	

UTILISATION DE LA DISQUETTE "TD DE MATHÉMATIQUES EN DEUG SSM"

La disquette est prévue pour être utilisée sur des micro-ordinateurs IBM-PC ou compatibles avec écran graphique type CGA sauf pour Multiplan où un écran texte suffit.

1) Le logiciel "SUITE" de C. Laurent est écrit sous GWBasic et pour l'utiliser il faut au préalable charger le GWBasic qui bien sûr n'est pas sur la disquette et, si on veut faire des recopies d'écran sur imprimante, l'utilitaire MS-DOS Graphics.Com.

2) Le programme "INTEGRALE", réalisé en Turbo-Pascal, est fourni sous la forme compilée Integral.Com et sous la forme fichier Integral.Pas. L'exécution de la première se fait directement sous DOS, la seconde nécessite la version 3.0 de Turbo-Pascal et l'interpréteur syntaxique de R. Rolland (voir l'appendice au Cahier 27 pour les détails).

3) La version utilisée de Multiplan est la version 1 mais les feuilles fonctionnent aussi sur la version 2 plus rapide et avec beaucoup plus de lignes.

Utilisation des feuilles prêtes à l'emploi sur la disquette

Dans le menu principal on sélectionne L(it_ecrit) C(harge), on indique le lecteur où se trouve la disquette (b: en général) et on affiche le contenu de la disquette en pressant ← ou → . On se déplace sur l'écran avec les touches de direction et on valide par ENTER .

Index des feuilles contenues dans la disquette d'accompagnement.

Exemple 2	e	
Exemple 3	rac(unpl	*sous-entendu: plus*2
Exemple 4	exemple4	
Exemple 6	tpascal	
Exercice 1	racine(2	pour le A)
	rac2newt	pour le B)
Exercice 2	cos(un)	
Exercice 3	(un-1)^2	
Exercice 4	arithgeo	
Exercice 5	isoperim	
Exercice 6	fibonacci	
Exercice 8	dicho3 et dicho4 pour les polynômes	