IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 2

Marquis de Condorcet

Élémens du calcul des probabilités

UNIVERSITE - PARIS VII

Reproduction de textes anciens
nouvelle série n° 2

Marquis de Condorcet

Élémens du calcul des probabilités

CONDORCET (Marie Jean Antoine Nicolas CARITAT marquis de) 1743-1794

Par la diversité de ses recherches – mathématiques, économiques, philosophiques –, qui toutes portent la marque des orientations intellectuelles de l'époque des Lumières, le marquis de Condorcet occupe dans l'histoire des idées une place assez exceptionnelle. L'assimilation sommaire de son apport à une illustration optimiste de la théorie du progrès a, cependant, fait trop souvent de lui un simple précurseur d'Auguste Comte. Le projet d'une science du probable fondée sur la doctrine du « motif de croire » contredit cette filiation et rattache son auteur au courant de pensée qui unit Pascal à Cournot, les premières esquisses de la géométrie du hasard à *L'Exposition de la théorie des chances*.

Le dernier des Encyclopédistes

Au XIXe siècle, François Arago, à qui l'on doit une édition collective mais incomplète des *Œuvres* de Condorcet (1847-1849, 12 vol., soit Ar. I-XII) regrettait, dans la *Biographie* lue le 28 décembre 1841 à l'Académie des sciences, que celui qui avait été élu membre de cette société dès 1769, après avoir publié à vingt-deux ans un *Essai sur le calcul intégral* puis des *Essais d'analyse* (1768), n'eût pas encore pris « son véritable rang parmi les géomètres ». Il est vrai que le génie mathématique de Condorcet a été salué par les plus grands savants de son temps : Lagrange, Fontaine, Bossut, Clairaut. Mais la filiation des méthodes échappe souvent en ce domaine. De toute façon, le sentiment était alors répandu que les mathématiques avaient atteint leur point de perfection : dans les salons que lui avait ouverts l'amitié de d'Alembert, chez Mlle de Lespinasse, chez d'Holbach, chez Helvétius, où il avait connu et fréquenté Quesnay, Dupont de Nemours, Gournay, Turgot et plus tard Adam Smith, la mode était à méditer les moyens qui permettaient d'assurer le bonheur de l'humanité. On voit ainsi Condorcet se soucier très tôt d'applications et considérer que l'économie sociale, intéressée aux progrès de l'espèce humaine, est par là supérieure aux exercices de mathématiques pures. Sa nomination, par son ami Turgot, au poste d'inspecteur général des Monnaies, en 1774, acheva de lui donner le goût de l'action.

Plus que l'auteur de mémoires mathématiques et d'articles d'analyse du Supplément de l'*Encyclopédie*, c'est donc le philosophe engagé dans la lutte pour l'octroi des libertés religieuses, économiques, politiques qui a surtout été étudié. Les *Lettres d'un théologien...* (1774), comme les *Lettres d'un laboureur de Picardie à Monsieur Necker, Prohibitif* (1775) ou les *Réflexions sur l'esclavage des nègres* (1781), sont, entre beaucoup d'autres, autant de témoignages du combat, qui ont fait voir en celui qui le mena un des « Pères » de la Révolution française. Sans doute est-ce le rôle que Condorcet a joué pendant cette dernière période qui a été le mieux mis en lumière. On connaît bien le rédacteur des Cahiers de la noblesse du bailliage de Mantes (et cependant candidat malheureux à la députation aux états généraux) ; l'auteur d'un remarquable plan d'organisation de l'Instruction publique, présenté à la Législative où il siégea parmi les élus parisiens ; le conventionnel député de l'Aisne, qui ne vota pas la mort du roi et dont le projet de constitution fut finalement repoussé. Ce républicain convaincu, devenu suspect en 1793, décrété d'arrestation et reclus volontaire, a donc vécu jusqu'à la fin les vicissitudes de son siècle. Il a participé à tous ses conflits idéologiques. Héritier des idées de Locke et de Condillac, il s'est rangé aux côtés des Encyclopédistes contre Buffon, Bailly, d'Arcy ; aux côtés, aussi, des physiocrates. Ainsi que l'attestent ses *Remarques sur Pascal* (1776, Ar. III), il s'est heurté, comme Voltaire, à l'auteur des *Pensées*, le seul grand adversaire des philosophes du XVIIIe siècle. Disciple de Rousseau, il a critiqué dans ses *Observations sur le vingt-neuvième livre de l'Esprit des Lois* (1780, Ar. I) le système de Montesquieu, auquel il reproche d'avoir négligé la « justice ». On peut toutefois se demander si son ultime et grande œuvre qui semble être le testament du siècle des Lumières, l'*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* (1795), par l'intérêt passionné qu'elle a suscité depuis sa publication posthume, n'a pas contribué à réduire l'apport de Condorcet à un bilan optimiste de l'histoire de l'humanité.

La science sociale mathématique

Dans la dernière partie de l'*Esquisse* (neuvième et dixième époques), Condorcet est cependant revenu avec insistance sur ce qui lui paraissait être essentiel : l'application du « calcul des combinaisons et des probabilités » aux sciences politiques et, d'une façon plus générale, l'union des sciences physiques et des sciences morales, qui avait été le thème de son *Discours de réception à l'Académie française* en 1782 (Ar.I). À cet égard, il était parfaitement conscient d'avoir ouvert « la route entièrement nouvelle » évoquée par Arago, en découvrant, dans l'organisation judiciaire et politique des sociétés modernes, des « anomalies » qu'on n'avait pas encore soupçonnées. Mais celui qui lui rendait ainsi hommage n'a pas cru devoir recueillir le génial *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (1785), dont le « Discours préliminaire » contient l'exposé du fameux paradoxe, appelé depuis « effet Condorcet », qui consiste en la formation d'une réponse collective contradictoire à partir de réponses individuelles cohérentes.

La voie n'était pas « entièrement » neuve : l'exploitation des statistiques démographiques relayant les spéculations sur les jeux, l'*Essai sur les probabilités de la vie humaine* (1746) de Deparcieux avait consacré l'introduction de la mesure et du calcul dans les sciences morales et politiques. Dans plusieurs des articles qu'il rédigea en 1784 pour l'*Encyclopédie méthodique* (« Probabilités », « Arithmétique politique », « Absent »), Condorcet a d'ailleurs rappelé les premières tentatives d'application à l'étude des phénomènes sociaux de la notion pascalienne d'espérance mathématique (Witt, Halley, Graunt, Petty) et fortement souligné l'importance de l'*Ars conjectandi* de J. Bernoulli, publié en 1713. Même si l'on tient compte de ce que doivent l'*Essai* de 1785 et les six études sur le calcul des probabilités qui le précèdent (1781-1784) aux *Mémoires* de Bayes (1764), de Laplace (1774), de Borda

(1781), l'originalité du probabilisme de Condorcet, méconnue par Todhunter, n'en est pas moins évidente. Elle est à rapporter à celle de son rationalisme, qui postule l'extension systématique à la connaissance de l'homme de la méthode scientifique, ici fondée sur la distinction de différents types de vérités (mathématiques, physiques, hypothétiques), la liaison d'une philosophie de la pensée analytique à une théorie du langage et des procédures techniques. Elle est à rapporter aussi à une conciliation remarquable de l'idéal newtonien de la science et de la conception baconienne du savoir. Elle se manifeste très précisément dans la solution « approchée » que Condorcet a donnée au problème dit de Saint-Pétersbourg énoncé par D. Bernoulli en 1730, solution plus « métaphysique que mathématique » dans la mesure où s'y indiquent explicitement le sens et la portée des calculs appliqués aux données de l'expérience.

Dans son étude des jugements collectifs, Condorcet a ainsi opéré – à partir de postulats de l'aléatoire dont il a contribué à fixer le double sens (mathématique-psychologique) et de modèles conçus comme montages de relations mathématiques simples – cette substitution du raisonnement au calcul qui définit l'esprit d'analyse. Sans doute, en se penchant à plusieurs reprises sur le problème des élections, notamment dans son *Essai sur la constitution et les fonctions des Assemblées provinciales* (1788, Ar. VIII), traitait-il d'un problème fort commun au XVIIIe siècle. Mais il lui revient d'avoir amorcé, à propos des scrutins considérés comme quêtes collectives de la vérité, une « recherche opérationnelle » qui, poursuivie au XIXe siècle sur d'autres registres par S. D. Poisson et A. A. Cournot, a trouvé son point d'aboutissement dans le théorème général d'existence des fonctions de bien-être collectif de K. J. Arrow (1951), puis dans les travaux de G. T. Guilbaud (1952) et de G. G. Granger (1956).

À ce titre, et pour avoir parallèlement exposé, dans un texte capital pour l'histoire des idées, le *Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales* (1795, Ar. I), les principes théoriques ainsi que les principaux objectifs de cette « mathématique sociale », Condorcet peut être légitimement regardé comme l'un des fondateurs des sciences de l'homme.

BERNARD VALADE

Bibliographie

Œuvres de Condorcet, 12 vol., (publiées par A. Condorcet, O'Connor et F. Arago), Firmin Didot, Paris, 1847-1849.

Études
F. ALENGRY, *Condorcet, guide de la Révolution française, théoricien du droit constitutionnel et précurseur de la science sociale*, Giard et Brière, Paris, 1904 / H. ARCHAMBAULT DE MONTFORT, *Les Idées de Condorcet sur le suffrage*, Soc. franç. d'imprimerie et de librairie, Paris, rééd. Genève, 1970 / K. J. ARROW, « Le principe de rationalité dans les décisions collectives », in *Économie appliquée*, pp. 469-484, 1952; *Social Choice and Individual Values*, Yale, 1951 (*Choix collectifs et préférences individuelles*), Calmann-Lévy, Paris, 1974 / K. M. BAKER, *Condorcet – From Natural Philosophy to Social Mathematics*, Univ. of Chicago Press, Chicago - Londres, 1975 / M. BARBUT, « Quelques aspects mathématiques de la décision rationnelle », in *Les Temps modernes*, nº 164, pp. 725-745, 1959 / L. CAHEN, *Condorcet et la Révolution française*, Alcan, Paris, 1904 / E. COUMET, *La Théorie du hasard est-elle née par hasard ?*, in *Annales E.S.C.*, pp. 574-598, 1970 / H. DELSAUX, *Condorcet journaliste*, H. Champion, Paris, 1931 / G. G. GRANGER, *La Mathématique sociale du marquis de Condorcet*, P.U.F., Paris, 1956 / G.-T. GUILBAUD, « Les Problèmes de partage », in *Économie appliquée*, pp. 93-137, 1952; « Les Théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », in *Économie appliquée*, pp. 501-551, 1952, repris in *Éléments de la théorie mathématique des jeux*, Dunod, Paris, 1968 / P. HAZARD, *La Pensée européenne au XVIIIe siècle de Montesquieu à Lessing*, Boivin, Paris, 1946 / A. KOYRÉ, « Condorcet », in *Rev. de métaphys. et de morale*, 1948, repris in *Études d'histoire de la pensée philosophique*, Gallimard, Paris, 1971 / R. RASHED, *Condorcet. Mathématique et société*, Hermann, Paris, 1974.

CONDORCET (Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat, marquis de), né en 1743 à Ribemont, près de St.-Quentin en Picardie, était neveu de l'évêque de Lizieux, sujet de l'article précédent. Son oncle prit soin de son éducation, et l'envoya au collége de Navarre, où il soutint, à l'âge de seize ans, une thèse de mathématiques en présence de Clairaut, d'Alembert et Fontaine, dont les applaudissements l'engagèrent à se livrer tout entier à cette étude. Il vint se fixer à Paris en 1762, sans fortune, mais avec la protection du duc de la Rochefoucauld, qui lui fit obtenir des pensions, et l'introduisit dans plusieurs maisons distinguées. Il se lia particulièrement avec Fontaine, célèbre géomètre, dont il se proposa d'étendre les vues dans son *Essai sur le calcul intégral*, qu'il publia en 1765. Ce mémoire, présenté à l'académie dès l'année précédente, fut jugé digne d'entrer dans la collection des travaux des savants étrangers, ainsi que celui qu'il donna en 1767 sur le *Problème des trois corps*, et ces premiers essais lui ouvrirent l'entrée de cette société, où il fut reçu en 1769. Il justifia ce choix en publiant sur le calcul analytique de nouveaux mémoires, qui, de même que les précédents, prouvaient un génie pénétrant, mais auxquels il négligea toujours de donner des applications utiles, se contentant de présenter de belles formules, sans s'arrêter à les particulariser pour les rendre accessibles aux méthodes d'aproximation. Il semblait craindre de faciliter aux autres, selon son expression, des routes qu'il n'avait pas le courage de suivre lui-même. Ces premiers travaux avaient été réunis sous le titre d'*Essai d'analyse* (1768, in-4°.). Il reprit ce travail long-temps après, et le refondit dans un nouveau traité qui embrassait dans leur ensemble les calculs différentiel et intégral, et substituait des considérations d'un genre absolument neuf à l'hypothèse des infiniments petits. L'impression de cet ouvrage, commencée en 1786, fut arrêtée à la seizième feuille, et n'a jamais été reprise. On trouve dans les Mémoires des académies de Paris, de Berlin, de Pétersbourg, de Turin et de l'institut de Bologne ses autres travaux du même genre, parmi lesquels on remarque surtout ceux qui concernent l'application des séries à la résolution de toutes les espèces d'équations différentielles, et l'intégration des équations aux différences mêlées, que personne n'avait considérées avant lui. Aspirant à la place de secrétaire de l'académie des sciences, il voulut s'essayer au genre des éloges, dont Grandjean de Fouchy s'acquittait depuis long-temps de manière à faire regretter ceux de Fontenelle. Pour donner une preuve de sa capacité en ce genre, Condorcet publia, en 1773, les *Eloges des académiciens morts avant 1699*. On trouva que son style manquait souvent d'intérêt, et qu'il n'atteignait pas encore son modèle. Cependant il fut nommé secrétaire perpétuel, et ses éloges furent trouvés fort au-dessus de ceux de son prédécesseur. Chargé en 1777 de faire celui du duc de la Vrillière, académicien honoraire, et Maurepas lui reprochant qu'il tardait trop à le prononcer, il répondit que jamais il ne louerait un pareil ministre, odieux dispensateur des lettres de cachet sous le règne de Louis XV. Cette liberté piqua Maurepas, qui l'empêcha, tant qu'il vécut, d'être de l'académie française, dont les portes ne lui furent ouvertes qu'en 1782. Il prit pour sujet de son discours de réception, *les avantages que la société peut retirer de la réunion des sciences physiques aux sciences morales*. Dans le nombre des éloges que Condorcet lut à l'académie des sciences, on distingue ceux de d'Alembert, Bergmann, Buffon, Euler, Franklin, Linné, Vaucanson. On sent que de pareils noms l'obligèrent à rendre compte des plus grandes découvertes du siècle, et firent voir toute la flexibilité de son talent pour les développer. Cette variété de travaux ne l'empêcha pas de continuer à s'occuper des mathématiques. Il remporta en 1777 un prix de l'académie de Berlin, sur la théorie des comètes. Il calcula aussi les formules pour la résistance des fluides d'après les expériences qu'il fit en commun avec d'Alembert et M. Bossut; mais son esprit se portait avec prédilection aux recherches philosophiques. Ami de Turgot, il sonda la profondeur de tous les systèmes des économistes; ami intime de d'Alembert, qui le nomma l'un de ses exécuteurs testamentaires, il fournit de nombreux articles à l'*Encyclopédie*, et fut lié avec la plupart des auteurs de ce grand ouvrage. Il fut surtout un des plus zélés admirateurs de Voltaire. Pendant la guerre d'Amérique, il écrivit en faveur de l'indépendance de ses habitants, défendit la liberté des nègres, développa les abus du despotisme, et sema dans tous ses ouvrages le germe de ses principes républicains. Sous un extérieur froid, il cachait une énergie peu commune; aussi d'Alembert disait que c'était un *volcan couvert de neige*. On disait encore de lui qu'il était un *mouton enragé*. Dès 1788, il publia son ouvrage sur les assemblées provinciales, dans le but de préparer les réformes dont l'administration de l'état lui paraissait susceptible. Au commencement de la révolution, il embrassa avec ardeur le parti populaire, et rédigea la *Feuille villageoise*, de concert avec Cérutti. En 1791, il fut nommé commissaire de la trésorerie. Député de Paris à l'assemblée législative, dont il fut élu secrétaire le 3 octobre, il y parla sur l'émigration, distingua les émigrés en deux classes, et ne demanda la peine de mort que contre ceux qui seraient pris les armes à la main. Il présida l'assemblée en février 1792, et, après le 10 août, il rédigea l'adresse aux Français et à l'Europe, pour rendre compte des motifs qui avaient engagé à prononcer la suspension du roi. Nommé par le département de l'Aisne à la convention nationale, il y vota le plus souvent avec les membres désignés sous le nom de *Girondins*. Dans un discours prononcé au mois de novembre, il avait engagé l'assemblée à faire juger Louis XVI par les députations des départements, et à se réserver le droit d'adoucir la sentence. Il vota « pour la » peine la plus grave qui ne soit pas » celle de la mort » (ce furent ses expressions), et ensuite il proposa de supprimer à l'avenir la peine de mort, excepté pour les délits contre l'état. C'est alors que la czarine et le roi de Prusse le firent rayer du tableau des académies de St.-Pétersbourg et de Berlin. Membre du premier comité de salut public, et ensuite du comité de constitution, il avait rédigé un plan qui allait être adopté quand arriva la révolution du 31 mai. Il ne fut pas d'abord du nombre des députés proscrits; mais s'étant expliqué sans ménagement contre la constitution de 1793, il fut dénoncé le 8 juillet par Chabot, mandé à la barre, et mis en accusation le 3 octobre, comme complice de Brissot. Obligé de se cacher, et bientôt mis hors de la loi, il trouva pendant huit mois un asyle chez une amie généreuse, qui poussait l'attention jusqu'à lui adresser quelquefois des couplets pour l'égayer. « Je n'ai » jamais fait de vers, lui dit-il un » jour, mais vous m'en ferez faire. » C'est en effet dans cette retraite que, sous le voile d'un polonais exilé en Sibérie, il composa une épître dans laquelle il parle à sa femme de ses sentiments et de ses distractions. On y remarque ces vers :

Ils m'ont dit : Choisis d'être oppresseur ou victime ;
J'embrassai le malheur, et leur laissai le crime.

Un nouveau décret, qui frappait de mort ceux qui donneraient asyle aux personnes mises hors la loi, l'obligea de changer de retraite, ne voulant pas exposer davantage sa généreuse bienfaitrice, qui voulait le retenir en lui disant : « Si vous êtes hors de la loi, » nous ne sommes pas hors de l'humanité. » Il sortit de Paris vers le milieu de mars 1794, sans passeport, vêtu d'une simple veste, et la tête couverte d'un bonnet. Son intention était de chercher, pendant quelques jours, un asyle dans la maison de campagne d'un ancien ami : ne l'ayant pas trouvé, et craignant d'être reconnu, il fut forcé de se cacher, pendant plusieurs nuits, dans des carrières abandonnées. Pressé par la faim, il entra dans un cabaret de Clamart, où il demanda une omelette de six œufs, se donnant pour un domestique dont le maître venait de mourir. Son air inquiet, sa longue barbe et son misérable équipage, donnèrent à l'hôtesse des inquiétudes sur le paiement : pour les dissiper, il sortit son porte-feuille, dont l'élégance contrastait si fort avec son extérieur, qu'un membre du comité révolutionnaire du lieu le fit arrêter et conduire au Bourg-la-Reine. Blessé au pied et exténué de besoin, il tombait en défaillance sur la route, et on fut obligé de lui donner le cheval d'un vigneron. Arrivé au Bourg-la-Reine, on le jeta dans un cachot; et, quand on vint le lendemain pour l'interroger, on le trouva mort, le 28 mars 1794 : il avait fait usage du poison qu'il portait depuis long-temps sur lui pour se dérober au supplice. Ainsi périt Condorcet, à l'âge de cinquante ans. « La bonté brillait dans ses yeux, dit Grimm, et » il aurait eu plus de tort qu'un autre de n'être pas honnête homme, » parce qu'il aurait trompé davantage » par sa physionomie, qui annonçait » les qualités les plus paisibles et les » plus douces. » Son caractère, quoique non exempt d'orgueil, se montra presque toujours paisible et obligeant. On le voyait timide et même embarrassé dans un cercle nombreux; mais, avec ses amis, il était d'une gaîté douce et spirituelle, ne se prévalant jamais de la supériorité que lui donnait l'étendue de ses connaissances. Il avait beaucoup lu, et sa mémoire était prodigieuse. S'il ne fut pas un géomètre du premier ordre, on en a peu vu qui aient annoncé plus tôt des talents aussi distingués. Il y a eu des philosophes qui ont mieux éclairé la métaphysique, l'économie politique, la législation ou la morale; mais peu ont discuté autant d'opinions importantes. Sa philosophie, dont la base était le scepticisme, eut toujours pour but le perfectionnement indéfini de l'espèce humaine, et il y rapportait tout. A la fin de sa vie, cette passion du bonheur de l'humanité semblait occuper exclusivement son cœur; mais il ne songeait jamais à sa femme (née Grouchy) et à sa fille sans répandre des larmes. Il était à la fois ferme et indulgent. Il a poursuivi sans relâche les parlements, le sacerdoce, la noblesse, la royauté; mais c'était les institutions qu'il haïssait, et non les hommes : il savait excuser les défauts et pardonner les vices. On a vu avec quelle liberté il parlait à Maurepas; quand il fit son éloge, il ne parla guère que des voyages que ce ministre avait fait faire à Maupertuis et à La Condamine. Pour n'avoir aucune relation avec Necker, il donna sa démission d'inspecteur des monnaies, et il montra la même fermeté à Voltaire, en refusant de faire insérer dans le *Mercure* une lettre où ce dernier mettait Montesquieu au-dessous de d'Aguesseau. Voltaire retira la lettre en le remerciant. On a reproché à ses écrits de l'obscurité, un style entortillé et de fréquentes négligences : ils sont en si grand nombre, qu'il était difficile qu'ils fussent bien soignés. Ses œuvres complètes, imprimées à Paris en 1804, forment 21 volumes in-8°. On peut voir le détail de ses ouvrages dans la *France littéraire* de M. Ersch; nous citerons seulement : I. *Essai d'analyse*, Paris, 1768, in-4°. Ce recueil comprend le traité *du Calcul intégral* et celui *du Problème des trois corps*, qui avaient déjà paru séparément. II. *Lettres d'un théologien à l'auteur du Dictionnaire des trois Siècles*, Berlin, 1774, in-8°. Cette critique de Sabatier de Castres fut quelque temps attribuée à Voltaire. III. *Eloge des académiciens de l'académie royale des Sciences, morts depuis 1666 jusqu'en 1699*, Paris, 1773, in-12. On y trouve onze éloges et une courte notice alphabétique de vingt autres académiciens sur lesquels on n'a eu que peu de détails. IV. *Eloge et Pensées de Pascal*, Londres, 1776, in-8.°, réimprimé en 1778, avec des notes de Voltaire. On sait qu'après la mort de Pascal, ses *Pensées* avaient été trouvées écrites sans ordre sur des morceaux de papier séparés. L'ordre dans lequel ses héritiers les publièrent ayant paru à Condorcet tout-à-fait arbitraire et trop conforme au sentiment des théologiens, il leur donna un autre arrangement, et les accompagna de notes, pour relever l'homme que Pascal avait voulu abaisser, et pour montrer que ses crimes, ses vices, sa faiblesse sont le résultat des institutions sociales, et non une preuve de l'existence de Dieu et de la vérité du christianisme. V. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785, in-4°., refondu avec de nombreuses additions, sous ce titre : *Élémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie et au jugement des hommes, avec un Discours sur les avantages des mathématiques sociales, et une Notice sur M. de Condorcet*, 1804, in-8°. VI. *Vie de M. Turgot*, Londres, 1786, in-8°. Elle a été traduite en allemand, Géra, 1787, in-8°., et en anglais, 1788, in-[illegible] VII. *Vie de Voltaire*, Genève, 1787, Londres, 1790, 2 vol. in-18. Elle a été traduite en anglais et en allemand; on l'a insérée dans l'édition de Kehl des œuvres de Voltaire. VIII. *Rapport sur l'Instruction publique, présenté à la Convention nationale*, Paris, 1792, in-8°. IX. *Bibliothèque de l'homme public*, ou *Analyse raisonnée des principaux ouvrages françois et étrangers sur la politique en général, la législation, les finances*, etc., Paris, 1790-1792. Cette volumineuse compilation, à laquelle Chapelier, Peyssonel et autres ont travaillé, forme 28 volumes in-8°. Condorcet n'y a fourni qu'un petit nombre de pièces. X. *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain, ouvrage posthume*, 1795, in-8°., traduit en anglais, 1795; et en allemand, par E. L. Posselt, Tubingen, 1796, in-8°. Cet ouvrage, ainsi que le suivant, ayant été composé dans la retraite où il se tint caché huit mois, et privé de tous ses livres, il n'est pas étonnant qu'on y trouve quelques faits peu exacts. C'est là surtout qu'il développe ses idées sur le perfectionnement indéfini de l'espèce humaine; il ne désespère pas que l'homme ne vienne à bout de prolonger sa vie de plusieurs siècles. XI. *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, Paris, an VII (1799), in-12; ouvrage neuf, profond et d'une excellente logique. L'auteur, voyant combien une nomenclature méthodique avait facilité les progrès de la chimie moderne, voulut procurer le même avantage à l'arithmétique; mais ses innovations n'ont pas fait fortune, et l'on a continué d'employer les mots *vingt* et *quatre-vingts*, au lieu de *duante* et d'*octante* qu'il voulait y substituer. XII. Enfin Condorcet a ajouté un volume de notes aux *Recherches sur la nature et les causes de la richesse des nations*, traduites de l'anglais de Smith, par Roucher. Il a donné, avec M. Lacroix, une nouvelle édition des *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, par Euler. Il a travaillé au *Journal encyclopédique*, à la *Chronique du Mois*, au *Républicain*, au *Journal d'Instruction publique*, etc. M. Fayolle a inséré de lui quelques fragments inédits dans le *Magasin encyclopédique*. Son éloge a été publié par A. Diannyère, sous ce titre : *Notice sur la vie et les ouvrages de Condorcet*, 1796, in-8°.; 2e. édition, an 7 (1799). Z.

Extrait de la Biographie universelle, ancienne et moderne, publiée par Michaud, Tome 9, Paris 1813.

ÉLÉMENS
DU CALCUL DES PROBABILITÉS,

ET SON APPLICATION AUX JEUX DE HASARD, A LA LOTERIE, ET AUX JUGEMENS DES HOMMES;

PAR FEU M. DE CONDORCET.

AVEC UN DISCOURS SUR LES AVANTAGES DES MATHÉMATIQUES SOCIALES

ET UNE NOTICE SUR M. DE CONDORCET.

Ouvrage dont la publication a été retardée par la mort de l'Auteur, et diverses circonstances, et qui devoit paroître à la suite des LETTRES *d'Euler, sur la* PHYSIQUE ET LA PHILOSOPHIE, si connues sous le nom de LETTRES A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE, dont il publia la dernière édition avec M. *de Lacroix*, Professeur à l'École Polytechnique, en y ajoutant quelques notes, etc.

Prix, 3 fr., et 4 fr. franc de port.

A PARIS,

CHEZ ROYEZ, LIBRAIRE, RUE DE THIONVILLE, AU COIN DE LA RUE DE LODI.

AN XIII — 1805.

SUR CONDORCET.

Quandò ullum invenient parem ! HORAT.

On a écrit plusieurs notices sur la vie et les ouvrages de Condorcet ; mais on n'a point assez considéré en lui l'écrivain géomètre et philosophe, détruisant tour à tour de vieux préjugés nuisibles à la société, par l'application du calcul aux sciences morales et politiques, ou hâtant les progrès de la raison et des lumières, par ces beaux éloges, qui, avec ceux de Fontenelle, forment la partie la plus brillante de l'histoire de l'Académie des Sciences. C'est à ces deux traits principaux du caractère de son esprit, que je vais m'attacher dans cette courte notice.

Depuis 1781, Condorcet s'occupa sans relâche du *Calcul des Probabilités ;* et, à l'exemple de Daniel Bernouilli, il l'appliqua à des objets d'une utilité plus immédiate que les combinaisons sur les jeux de hasard. Toutefois il saisit le côté philosophique de ces combinaisons, pour démontrer combien elles offrent à la cupidité des espérances ruineuses.

Daniel Bernouilli est le premier qui,

dans son *Art de conjecturer*, ait appliqué le calcul à des questions de jurisprudence. Il y fait voir dans quelles erreurs grossières sont tombés les jurisconsultes, en voulant résoudre ces mêmes questions, sans y employer le calcul.

Nous avons encore, dit Condorcet, des jurisconsultes assez dignes des temps antiques, pour savoir mauvais gré à quelques philosophes, de regarder la raison et l'expérience, comme des guides plus sûrs que les légistes du Bas-Empire, et leurs obscurs commentateurs.

Un philosophe qui fut trop peu de temps contrôleur-général, et qui n'avoit pas besoin d'un successeur tel que Necker pour être regretté, Turgot, désiroit qu'on prouvât, par le calcul, la certitude des sciences morales et politiques. C'est pour remplir les vues de ce grand homme d'État, que son ami Condorcet fit tant de recherches analytiques sur les probabilités, parmi lesquelles il faut distinguer son *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.*

On a justement reproché à tous les ouvrages mathématiques de Condorcet,

d'ailleurs remplis de découvertes profondes dans l'analyse, d'être pénibles à lire et difficiles à entendre. Souvent même les méthodes qu'il emploie sont tellement généralisées, qu'elles échappent aux cas particuliers. Qu'il est loin de la clarté transparente de l'analyse d'Euler, ou de la simplicité élégante de celle de la Grange !

Il s'étoit associé un de ses plus dignes élèves (1) pour publier, avec quelques notes, la dernière édition *des Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne ;* vrai modèle des ouvrages de ce genre, où les femmes apprennent la physique avec la même facilité qu'elles lisent des romans. Mais Condorcet ne pouvoit cesser d'écrire en même temps pour les géomètres ; et il voulut non seulement enrichir sa traduction de notes sur les découvertes récentes, mais encore y ajouter un *Traité élémentaire du Calcul des Probabilités.* C'est ce Traité, destiné à former le quatrième volume des *Lettres à une princesse d'Allemagne*, que l'on publie aujourd'hui pour la première fois.

(1) M. Lacroix, aujourd'hui membre de l'Institut, et l'un de nos plus savans Professeurs de mathématiques.

Dans une introduction, l'auteur fait un tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences morales et politiques, science qu'il désigne sous le nom de *Mathématique sociale.* Il détaille ensuite les objets de la mathématique sociale dont l'*homme* et les *choses* forment les deux principales divisions. Il termine ce discours, éminemment philosophique, par cette réflexion sur l'économie politique.

« Il n'est peut-être aucune portion des sciences politiques sur laquelle il reste plus de préjugés à détruire, et où ces préjugés puissent avoir des conséquences plus funestes. Ils ont résisté jusqu'ici à la raison ; abattus plus d'une fois, on les a vus se relever avec plus de force : disparoissent-ils d'un pays ? on les voit se rencontrer dans un autre.

» Osons espérer qu'attaqués par la raison et par le calcul, nous n'aurons plus à redouter ces résurrections inattendues, ces oscillations entre la vérité et l'erreur. »

Le but de Condorcet, en composant *les Elémens du Calcul des Probabilités*, étoit de rendre enfin ces connoissances populaires, parce qu'il n'en est point

de plus propres à détruire les erreurs spéculatives ou pratiques qui arrêtent les progrès, et s'opposent au bonheur de l'espèce humaine.

Il y traite d'abord de l'intérêt de l'argent, et en tire des conséquences importantes pour les emprunts de l'Etat.

Il discute ensuite les principes fondamentaux *du Calcul des Probabilités :* quelle est la nature des vérités auxquelles peut conduire ce calcul ; quels sont les motifs de croire, en calculant la valeur des opinions reçues ; comment on peut trouver une valeur moyenne des évènemens qui ne sont pas également probables ; et à cette occasion, il dissipe les doutes qu'avoit fait naître sur la règle généralement adoptée, un problème célèbre, connu sous le nom de *Problème de Pétersbourg.*

On est vivement frappé du projet de Condorcet pour un nouveau genre de dictionnaire. Au lieu de ranger les noms des objets par ordre alphabétique, il propose d'y classer leurs qualités et leurs propriétés, à l'aide de tables où, avec dix modifications, on pourroit désigner dix milliards d'objets. Voilà une de ces idées mères, à qui l'on doit une longue génération d'applications utiles.

A chaque ligne des ouvrages de l'auteur, on voit que son génie le portoit aux sciences exactes, et que son ame le ramenoit à celles dont dépend la félicité des peuples. Cette vérité est encore plus sensible dans ses Eloges philosophiques.

La Harpe a remarqué que dans les Eloges de Fontenelle, c'est la grace qui domine, et dans ceux de d'Alembert, que c'est l'humeur. Ce qui brille éminemment dans les Eloges de Condorcet, c'est le caractère philosophique à l'égard des personnes, comme à l'égard des ouvrages. On sait qu'il a fait la vie de Voltaire qu'il aimoit, et l'éloge de Buffon qu'il n'aimoit pas. Il a donné un plus grand exemple d'impartialité dans l'éloge de Guettard, où il raconte ingénument un trait de Guettard contre lui. Jamais philosophe n'a montré un plus beau caractère. Il réalise ici l'idée que lui fait naître la conduite de Francklin. *Les sciences*, dit-il, *toujours libres au milieu de toutes les servitudes* (même de celle des passions), *communiquent à ceux qui les cultivent quelque chose de leur noble indépendance.*

Condorcet a su donner aussi, quand il le falloit, des exemples d'une noble

fierté. Il refusa de souiller sa plume par l'éloge de Lavrillière. Fontenelle avoit de même refusé de faire l'éloge du cardinal Dubois, cet indigne prêtre, que Massillon avoit eu le honteux honneur de sacrer.

Dans ses Éloges, Condorcet a cette chaleur qui naît du fond du sujet, et qui s'étend du centre à la circonférence. Ce n'est pas une page, un morceau qui vous émeut ou vous échauffe ; mais le discours entier vous laisse une impression profonde.

Jamais il ne manque l'occasion de parler de Fontenelle et de Voltaire. Tous deux se retrouvent naturellement sous sa plume dans presque tous ses éloges ; et c'est l'hommage du cœur encore plus que de l'esprit.

L'historien de l'Académie des Sciences offre toujours le style et le ton qui conviennent aux personnages qu'il célèbre. Dans l'éloge de Tronchin, son style est enjoué ; il avoit à peindre un médecin, homme du monde et recherché des femmes. L'éloge de Daniel Bernouilli brille par la finesse de l'esprit, et celui de d'Alembert par le piquant de l'esprit et du caractère ; ce qui rend la double physionomie de ces deux géomètres. L'éloge d'Euler est simple et grave comme ce grand analyste. En lisant l'éloge de Francklin, on croit lire la vie de ce philosophe écrite par lui-même. Enfin l'éloge de Buffon réunit l'éclat et la majesté; et le beau parallèle d'Aristote, de Pline et de Buffon qui le termine, n'a été égalé que par la plume brillante de Vicq-d'Azyr.

Si l'on examine maintenant l'ensemble de tous ces Eloges, où l'auteur trace l'histoire philosophique des sciences et des arts, pendant l'espace de vingt années, on y reconnoît par-tout cette mesure juste, caractère de l'écrivain privilégié, qui n'est jamais *au dessus ni au dessous de son sujet.*

ÉLÉMENS DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Comme nous nous proposons de donner avec quelque étendue les principes élémentaires, et plusieurs applications du calcul des probabilités, nous avons cru devoir traiter d'abord deux questions dont la solution est absolument nécessaire pour plusieurs de ces applications; mais qui exigent des détails auxquels nous n'aurions pu nous livrer sans interrompre trop long-tems le fil des raisonnemens.

Nous allons donc exposer d'abord le calcul de l'intérêt de l'argent, et une méthode pour former, d'après les observations, des tables dont on puisse tirer facilement les résultats qui doivent servir d'élémens dans les applications du calcul des probabilités.

Ces deux questions peuvent d'ailleurs inspirer en elles-mêmes quelque intérêt, et avoir quelque utilité.

ARTICLE PREMIER.

De l'intérêt de l'argent.

I. Si une somme d'argent dont j'ai, pendant une année, la libre jouissance, me procure, pendant cet intervalle de tems, des avantages évaluables aussi en argent, et qu'elle me reste toute entière au bout de l'année, j'appelle intérêt de cette somme la valeur en argent des avantages qu'elle m'a procurés.

Si, au lieu de retrouver au bout de l'année ma somme entière, j'ai, à la place, la certitude d'obtenir, l'année suivante, un avantage égal, et ainsi de suite, je peux regarder ces deux états comme égaux, surtout si j'ai l'espérance de pouvoir à volonté échanger cette certitude de retrouver annuellement le même avantage contre la somme employée à me le procurer. Ainsi, par exemple, si j'ai employé une somme à l'acquisition d'une terre, le revenu de cette terre peut être regardé comme l'intérêt du prix qu'elle m'a coûté.

Si, au lieu de retirer par moi-même quelque avantage de cette somme d'argent, je le prête à un autre, à condition qu'il me le rendra au bout de l'année, plus une autre somme, cette autre somme représentera pour moi l'intérêt de la première, tandis que la valeur en

argent des avantages que l'emprunteur a retirés de cette somme en est l'intérêt pour lui.

Il n'a pu exister dans un même pays un grand nombre d'hommes ayant des sommes d'argent plus ou moins fortes, et dont ils pouvoient tirer des avantages de différentes manières, en conservant toujours la propriété de ces sommes, sans qu'il se formât une valeur moyenne de l'intérêt, et sans que cette valeur fût proportionnelle aux sommes qui l'ont produite.

Cette valeur moyenne n'est pas la même pour les différentes manières de tirer des avantages de son argent, ce qu'on appelle le placer; mais elle est sensiblement égale pour chaque genre de placement. L'assurance de ne pas perdre ses fonds, la facilité de les retirer sans diminution ou sans frais, le plus ou le moins de soins qu'exigent ces différentes manières d'en tirer un intérêt, doivent en faire varier la valeur moyenne. Le rapport de la valeur de l'intérêt à la somme placée s'appelle le taux de l'intérêt. Si 1000 l. me rapportent 50 l. par an, le taux de l'intérêt sera $\frac{50}{1000} = \frac{5}{100}$ ou cinq pour cent, ce qui s'écrit 5 p. %. Le denier de l'intérêt est au contraire le rapport de la somme à la valeur de l'intérêt. Ainsi dans le même exemple, le denier de l'intérêt est $\frac{1000}{50} = 20$. Placer à cinq pour cent, ou placer au denier vingt, signifie la même chose.

Comme il n'est pas indifférent d'avoir cette valeur de 50 l. soit au commencement de l'année, soit à plusieurs époques prises dans le cours de cette même année, soit à la fin, puisque la facilité d'en faire usage ou d'en tirer avantage, dépend du tems où on la reçoit; il a fallu, pour comparer les intérêts et avoir la valeur moyenne de chacun, les rapporter tous à la même époque: on est convenu de prendre le terme de l'année révolue pour cette époque. Ainsi, qu'une somme de 1000 l. me rapporte 50 l. ou 5 pour $\frac{0}{0}$ d'intérêt, cela signifie, ou qu'au bout de l'année je reçois 1050 l., c'est-à-dire, 50 l. d'intérêts, ou que la somme qui représente les intérêts m'a valu, pendant l'année, des avantages équivalens à 50 l. qui me seroient payées à la fin de cette année.

II. Puisque l'intérêt est toujours proportionnel à la somme, nous pourrons représenter une somme quelconque par l'unité, et appelant t le taux quelconque de l'intérêt, nous aurons $1+t$, pour la valeur de la somme 1, au bout d'un an; et si s exprime le rapport d'une certaine somme à celle qui a été prise pour l'unité, nous aurons par conséquent $s.\overline{1+t}$ pour celle d'une somme s, aussi au bout d'une année.

Mais puisque la valeur de la somme s, au bout d'une année, est $s.\overline{1+t}$, la valeur d'une somme $1+t$, au bout d'une année, sera $\overline{1+t}.\overline{1+t}=\overline{1+t}^2$: par conséquent $\overline{1+t}^2$ sera la valeur de la somme 1, au bout de deux ans, et $s.\overline{1+t}^2$ celle de la somme s, au bout du même terme; et en continuant le même

raisonnement, on trouvera que la valeur d'une somme 1, au bout de n années, sera $\overline{1+t}^n$, et $s.\overline{1+t}^n$, celle d'une somme s, somme que nous exprimerons ici par s'. Nous aurons donc l'équation fondamentale $s'=s.\overline{1+t}^n$.

Nous l'appelons équation fondamentale, parce que cette équation une fois connue, tous les problèmes sur l'intérêt de l'argent se réduisent à des questions de pur calcul. Cette équation étant donnée nous allons en tirer quelques conséquences.

III. Puisque $s'=s.\overline{1+t}^n$, il est clair d'abord que connoissant la somme placée s, t le taux de l'intérêt, n le nombre d'années pendant lesquelles on suppose que l'on continue de placer cette même somme accrue de ses intérêts, on aura s', ou la valeur produite par cette somme s. Supposons, par exemple, que le taux de l'intérêt soit $\frac{5}{100}$ ou 5 pour $\frac{0}{0}$, ou aura $1+t=\frac{105}{100}$. Si le placement a été continué pendant 100 ans, l'équation ci-dessus devient $s'=s.\overline{\frac{105}{100}}^{100}$ ou $s'=131.s$ et quelque chose de plus. En général nous exprimerons dans ces élémens les valeurs numériques en nombres ronds, mais avec l'attention de les faire plus grandes que la valeur absolue, lorsque notre conclusion sera d'autant plus vraie, qu'elles sont plus petites, et réciproquement. Si le taux de l'intérêt est à 4 pour $\frac{0}{0}$ seulement, on aura $s'=s.\overline{\frac{104}{100}}^{100}=s.50$. Si on supposoit 1000 ans

au lieu de 100 ans, on auroit pour la première supposition, celle de l'intérêt à cinq pour cent, $s'=s.$ 1,546,300,000,000,000,000,000 et au-delà, c'est-à-dire, plus de 1546 milliards de milliards de fois la première somme; et si le taux est de quatre pour cent, $s'=s.$ 107,970,000,000,000,000, c'est-à-dire, au-delà de 107 millions de milliards de fois la première somme.

L'augmentation presque incroyable de ces sommes, la différence prodigieuse du produit des deux taux d'intérêt peuvent servir à montrer quelles étonnantes ressources les familles particulières peuvent trouver dans l'ordre et l'économie, et à expliquer les fortunes considérables que produit le commerce même lorsqu'on y emploie des fonds dont on est obligé de payer un intérêt plus foible que celui qu'on en retire.

IV. Puisque nous avons $s'=s.\overline{1+t}^n$, nous aurons $s=\frac{s'}{\overline{1+t}^n}$ et par conséquent connoissant s', n et t, nous aurons s. Ainsi, par exemple, si je veux savoir quelle somme je dois placer à 4 pour $\frac{0}{0}$ pour me procurer, au bout de 30 ans, un capital de 100000 l., j'aurai l'équation $s=\frac{100000}{\overline{\frac{104}{100}}^{30}}=30830$ ou environ.

Pour 5 p. $\frac{0}{0}$ j'aurai $s=\frac{100000}{\overline{\frac{105}{100}}^{30}}=23140$ à peu près.

Ainsi un père qui pourroit suivre ce pla-

cement à cinq pour cent, et qui, à la naissance d'un enfant, renonceroit à moins de 1200 l. de rente, assureroit à cet enfant 100000 l. lorsqu'il seroit parvenu à l'âge de trente ans, en ne lui abandonnant cependant que 23140 l. de ses fonds.

Supposons maintenant qu'un père ait quatre enfans et qu'il veuille, en faisant un sacrifice de son revenu à la naissance de chacun, leur procurer à trente ans une somme telle qu'étant accrue de l'héritage futur de leurs parens, chacun deux ait une fortune égale à celle que les parens avoient reçue. Dans ce cas, soit s'' la valeur de la fortune totale, celle qui reste aux parens sera $s''-4s$; celle de chaque enfant sera s', qui augmentée de $\frac{s''-4s}{4}$ ou de la part qui lui revient de l'héritage, doit être égale à $\frac{s''}{2}$ ou à ce que chacun de ses parens avoit reçu. Nous aurons donc l'équation $s'+\frac{s''-4s}{4}=\frac{s''}{2}$ ou $s'=\frac{s''+4s}{4}$. D'où, à cause de l'équation fondamentale, qui nous donne ici $s'=s.\overline{\frac{105}{100}}^{30}$, $s.\overline{\frac{105}{100}}^{30}=\frac{s''+4s}{4}$ ou $s=\frac{s''}{4.\left(\overline{\frac{105}{100}}^{30}-1\right)}$; et $4s$, ou ce qu'il faut pour les quatre enfans sera égal à $\frac{s''}{\left(\frac{105}{100}\right)^{30} - 1} = \frac{301 s''}{1000}$ à peu près, ou environ les trois dixièmes de sa fortune seulement. La valeur de s' sera, dans ce même cas, égale à $\frac{s'' \left(\frac{105}{100}\right)^{30}}{4\left(\left(\frac{105}{100}\right)^{30} - 1\right)}$ et par conséquent au dessus de $\frac{3}{10}$ de s''. D'où il résulte que quoique le nombre des enfans soit double, puisque nous l'avons supposé de quatre, ils auront après l'héritage de leurs parens, une fortune égale à la leur, et dès l'âge de trente ans, une fortune au dessus de celle qu'ils auroient eue en partageant également la fortune de leurs parens.

Pour six enfans, il faudroit sacrifier le double, c'est-à-dire, se priver pour chacun d'environ un dixième de revenu, ou en d'autres termes, pouvoir vivre et élever sa famille avec les $\frac{4}{5}$ de son revenu. Si l'intérêt est plus haut, les sacrifices seront moindres. Supposons-le, par exemple, de 7 pour cent, nous aurons dans le premier cas :

$$4s = \frac{s''}{\left(\frac{107}{100}\right)^{30} - 1} = \frac{150\, s''}{1000}$$

et dans le second cas :

$$6s = \frac{301\, s''}{1000};$$

c'est-à-dire, qu'il suffiroit pour six enfans de

se priver des 3 dixièmes, ou de pouvoir subsister avec 7 dixièmes de son revenu.

Ces exemples sont très-propres à prouver combien l'ordre et l'économie peuvent contribuer à la prospérité des familles, et à expliquer pourquoi dans les conditions d'agriculteur, de manufacturier, de commerçant, où l'on tire un intérêt plus haut de ses capitaux, on est moins embarrassé d'une nombreuse famille que dans les classes supérieures, où les capitaux sont plus considérables, mais où l'on en tire un moindre intérêt.

V. Puisque nous avons $s' = s \cdot \overline{1+t}^{\,n}$ nous aurons $\overline{1+t}^{\,n} = \frac{s'}{s}$ et en prenant le logarithme de ces deux quantités, $nL.\,\overline{1+t} = L.s' - L.s$, ou $n = \frac{L.s' - L.s}{L.\,\overline{1+t}}$. Ainsi, connoissant le taux de l'intérêt, la somme que l'on veut placer, on aura le nombre d'années pendant lesquelles on doit continuer le placement. Supposons, par exemple, que le taux de l'intérêt soit 5 pour $\frac{0}{0}$, et qu'on veuille doubler sa somme, on aura :

$$n = \frac{L.2}{L.105 - L.100} = \frac{3010300}{211893}$$

ou $n = 15$. c'est-à-dire, qu'à ce taux d'intérêt il faut un peu moins de quinze ans pour doubler son capital, ou qu'on fait un peu plus que le doubler en quinze ans.

Enfin on tirera de la même équation :

$1 + t = \left(\frac{s'}{s}\right)^{\frac{1}{n}}$, et par conséquent, si l'on connoît la somme qu'on a donnée, celle qu'on doit recevoir après n années et la valeur de n, on connoîtra le taux de l'intérêt.

Par exemple, si on me propose de donner une somme, à condition que dans vingt ans je recevrai le triple de cette somme, j'aurai :

$1 + t = 3^{\frac{1}{20}}$ ou $t > \frac{56}{1000} < \frac{57}{1000}$, c'est-à-dire, $5\frac{13}{20}$ p. $\frac{0}{0}$.

VI. Nous avons dit que le taux de l'intérêt étoit la valeur en argent des avantages produits par la jouissance d'une somme donnée, pendant une année, cette valeur étant supposée payée au bout de l'année. Supposons maintenant que le taux étant donné pour une année, on cherche quelle est la valeur de l'intérêt au même taux pour une fraction d'année, un mois par exemple, on fera le raisonnement suivant : Soit t' le taux cherché, la somme 1 devient $1 + t'$ au bout d'un mois, et par conséquent $\overline{1+t'}^{\,2}$ au bout de deux mois ; $\overline{1+t'}^{\,3}$ au bout de trois ; $\overline{1+t'}^{\,12}$ au bout de l'année. Donc on doit avoir $\overline{1+t'}^{\,12} = 1 + t$, ou $1 + t' = \overline{1+t}^{\,\frac{1}{12}}$ Si nous réduisons en série pour avoir une valeur approchée de t', quel que

soit t, nous aurons $t' = \frac{1}{12} t - \frac{11}{12^2 \cdot 2} t^2 + \frac{11 \cdot 23}{12^3 \cdot 2 \cdot 3} t^3 - \frac{11 \cdot 23 \cdot 35}{12^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} t^4 \ldots\ldots$ série qui donne une valeur de t' d'autant plus approchée qu'on prend plus de termes, et dont la valeur est alternativement au dessus et au dessous de t'

Si au lieu d'un mois on suppose une m. partie quelconque de l'année, alors il est aisé de voir que l'on aura :

$$\overline{1+t'}^{\,m} = 1 + t;\ 1 + t' = \overline{1+t}^{\,\frac{1}{m}},\ \text{et}$$

$$t' = \frac{t}{m} - \frac{m-1}{2\, m^2} t^2 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{2m-1}}{2 \cdot 3 \cdot m^3} t^3 - \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{2m-1} \cdot \overline{3m-2}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m^4} t^4;$$

série de la même nature que la précédente. D'où l'on voit que l'intérêt par mois sera moindre que $\frac{1}{12}$ de l'intérêt pour l'année, et en général l'intérêt pour une m^e. partie d'année moindre que la m^e. partie de l'intérêt pour l'année entière.

Nous observerons enfin que si $1 + t'$ représente la valeur d'une somme 1 au bout d'un m^e. d'année, la valeur de cette somme au bout de n années plus n' m^{es}. d'années sera : $\overline{1+t'}^{\,nm+n'}$ mais $1+t'=\overline{1+t}^{\,\frac{1}{m}}$; donc cette valeur sera $\overline{1+t}^{\,n+\frac{n'}{m}}$; c'est-à-dire, $1+t$ élevé à la puissance qui désigne le nombre entier ou fractionnaire d'années écoulées.

Puisque $s'=s.\overline{1+t}^{\,n}$, on a, comme nous l'avons dit : $s=\frac{s'.}{\overline{1+t}^{\,n}}$ ou $s=s'\,\overline{1+t}^{\,-n}$. On auroit de même pour le cas précédent

$$s=s'\,\overline{1+t}^{\,-\frac{n'}{m}-n}.$$

L'on peut, dans ces derniers cas, considérer la valeur s' comme celle qu'on possède actuellement, et s comme celle qui a produit s' au bout de $-n$, $-n-\frac{n'}{m}$, ou ce qui revient au même, valeur de s' rapportée à ce tems antérieu.

On pourra donc représenter la valeur de s rapportée à un espace de tems éloigné de n années, par $s\,\overline{1+t}^{\,n}$, n pouvant être entier ou fractionnaire, et devenant négatif, si l'on suppose la valeur rapportée à un tems antérieur.

Il suit de ce que nous avons dit ci-dessus, que l'intérêt pour un mois n'est point égal au douzième de l'intérêt pour l'année, ni l'intérêt pour la demi-année, égal à la moitié de l'intérêt total. Cette conclusion est la suite

nécessaire de l'idée que nous avons donnée de l'intérêt. Cependant il est d'usage dans un grand nombre de circonstances, de donner pour le mois la douzième partie, la demi-année pour six mois, etc.

Il est facile d'expliquer la cause de cette différence. Dans le premier cas, l'intérêt annuel est regardé comme un nouveau capital destiné à s'accroître comme le premier, par des placemens. Dans le second au contraire, le capital est regardé comme fixe, et l'intérêt comme destiné à la dépense du propriétaire. Or, dans le premier cas, il est clair que celui qui touche au bout d'un mois $s.\,1+t'$, le plaçant pour 11 mois, aura au bout de 11 mois $s.\,\overline{1+t'}^{\,12}$ et qu'ainsi il faut lui donner au bout du premier mois $s\,\overline{1+t}^{\,\frac{1}{12}}$ et non $s.\,\overline{1+\frac{1}{12}\,t}$ qui au bout de l'année deviendroit par le même principe :

$$s\left(1+t+\frac{11}{12.2}t^{2}+\frac{11.10}{12.12.2.3}t^{3}\ldots\right)>1+t$$

Mais si celui qui touche $s\,\overline{1+t'}$ au bout du mois est censé ne replacer que s, au bout du second mois il n'aura que $s.\,\overline{1+t'}$; il faut donc lui donner $s\,\overline{1+\frac{1}{12}t}$, par mois, parce qu'en suivant le même principe, il aura $s\,\overline{1+\frac{11}{12}t}$ pour onze mois, et en tout $s\,\overline{1+t}$ pour l'année. Cette observation suffit pour faire voir dans quels cas les intérêts pour les fractions

d'années doivent être calculés suivant l'une ou l'autre de ces méthodes. Dans la première, on calcule l'*intérêt simple* ; dans la seconde, l'*intérêt composé*,

Le même principe s'applique à tous les cas où il s'agit de calculer l'intérêt, et il revient à cette proposition qui paroît évidente par elle-même, que l'on ne doit faire entrer dans le calcul que l'intérêt des sommes qui en ont produit, ou qui sont supposées en devoir produire. On doit observer encore que le calcul de l'intérêt composé suppose que le nouveau placement se fait rigoureusement à l'échéance, et qu'ainsi il y a des cas où l'on seroit obligé de tenir compte de la valeur moyenne du retard. Mais il est inutile d'entrer ici dans de plus grands détails ; ils peuvent être facilement suppléés par ceux qui auront bien entendu les formules précédentes.

VIII. Nous supposerons maintenant qu'au lieu de placer simplement une somme s pour n années, on place d'abord cette somme pour n années, puis l'année suivante une somme égale s pour $n-1$ années, la troisième année une somme s pour $n-2$ années, jusqu'à la fin de la n^{e}. année où l'on donnera seulement la somme s. Il est aisé de voir que s au bout de n années deviendra $s.\,\overline{1+t}^{\,n}$ (*Voyez ci-dessus*) ; qu'au bout de $n-1$ années s deviendra par la même raison $s.\,\overline{1+t}^{\,n-1}$ et ainsi de

suite. La totalité de la somme produite par les sommes s, épargnées et placées pendant n années, sera donc égale à

$$s.\left(\overline{1+t}^{\,n}+\overline{1+t}^{\,n-1}\quad+\overline{1+t}+1.\right)$$

Ou sommant cette série qui est une suite géométrique très-simple, la valeur cherchée sera $\frac{s.\,\overline{1+t}^{\,n+1}-1}{t}$, d'où $s'=\frac{s.\,\overline{1+t}^{\,n+1}-1.}{t}$

Supposons l'intérêt d'abord à quatre et ensuite à cinq pour cent, et que ce placement dure 25 années, nous aurons dans le premier cas :

$$s'=s.\,25.\left(\frac{104}{100}^{26}-1\right)=s.\frac{4437}{100},$$

et dans le second :

$$s'=s.\,20.\left(\frac{105}{100}^{26}-1\right)=s.\frac{5111}{100}$$

Ainsi, par exemple, un homme qui placeroit chaque année cent pistoles pour un de ses enfans à quatre pour cent, lui assureroit à la fin de sa vingt-cinquième année, une somme de 44000 l. et une de 51000 l. s'il plaçoit à cinq pour cent.

Il en seroit de même d'un homme qui placeroit chaque année une même somme sur le produit d'une profession lucrative, afin de s'assurer de quoi vivre indépendamment de sa profession. Par exemple, si son emploi ou l'exercice de sa profession lui rapporte trois mille cinq cents livres, et qu'il borne sa dépense à 2500 l. il aura au bout de 26 ans, s'il place ses épargnes à cinq pour cent, un revenu perpétuel égal à ces 2500 l. et il ne lui faudra sacrifier que les $\frac{2}{7}$ de son gain annuel; à quatre pour cent, il lui en faudra sacrifier les $\frac{10}{32}$, et toujours moins du tiers. Nous mettons ici 26 années, parce que dans ce cas, le placement n'est censé commencer qu'à la fin de la première.

Si au lieu de 25 années, nous en mettons cent, nous aurons:

$$s' = s.25.\left(\overline{\tfrac{104}{100}}^{101} - 1\right) \text{ à 4 p. 100.}$$

$$\text{ou } s' = s.\,20\left(\overline{\tfrac{105}{100}}^{101} - 1\right) \text{ à 5 p. 100.}$$

ou $s' = s.\,1288.$

$s' = s.\,2741.$

Ainsi, par exemple, une famille, une société quelconque qui conviendroit d'épargner chaque année 1000 l. seulement sur le revenu de ses différens membres, auroit au bout d'un siècle un fonds de 1288000 ou de 2741000; et si c'étoit dix-mille livres, le fonds deviendroit de 12880000 ou de 27410000.

Supposons que l'on ait placé à 2 pour $\frac{o}{o}$ seulement, on auroit:

$$s' = s.\,50\left(\overline{\tfrac{102}{100}}^{101} - 1\right) = 3319.\,s;$$

et

et si $s' = 10000$, $s = 3.137.000$. Ainsi en supposant que le placement ait été fait à ce denier en fonds de terre, cette famille ou société auroit en fonds de terre 3.137.000 au bout du siècle. On pourroit supposer encore que l'on place à quatre pour cent pendant dix ans, et ensuite en terres à 2 pour cent chaque dixième année, et l'on auroit $s' = s.\,5255000$.

On voit par ces exemples quelles richesses et par la suite quel degré de puissance une famille peut acquérir, même sans obtenir aucune faveur, et en conservant seulement assez d'union pour que ses membres consentent à faire à sa grandeur des sacrifices légers en eux-mêmes.

Nous nous sommes permis de multiplier ici ces exemples des effets quelquefois presque merveilleux d'une économie long-tems prolongée, parce qu'en réfléchissant sur ces exemples, on verra facilement les conséquences morales et politiques qu'on en peut tirer.

N'est-il pas aisé de voir en effet qu'une famille peut par de simples arrangemens économiques, acquérir sûrement une fortune souvent très-supérieure aux avantages très-incertains qu'elle pourroit espérer de la bassesse et de l'intrigue.

Ne voit-on pas aussi combien, même en supposant que l'existence continuée des grandes fortunes puisse être utile, il est superflu d'assurer cette existence par des lois, puisque

sans le secours de ces lois, ceux qui desireront conserver ces grandes fortunes sans les diviser, en trouveront dans leur économie un moyen sûr et facile.

Ne voit-on pas encore combien il seroit nécessaire de favoriser par les lois la division des fortunes, de chercher à détruire la vanité des familles, l'esprit d'association particulière, puisque si cet esprit pouvoit agir longtems de suite, il n'y auroit pas de moyens légitimes d'empêcher les familles, les sociétés animées de cet esprit, d'acquérir des richesses et avec ce richesses une puissance dangereuse?

On peut ici de même que ci-dessus, de l'équation $s' = s.\left(\dfrac{\overline{1+t}^{\,n+1} - 1}{t}\right)$

tirer l'équation $s = \dfrac{s't}{\overline{1+t}^{\,n+1} - 1}.$

Ainsi si on demande quelle somme il faut placer annuellement à 5 p. $\frac{o}{o}$, pour qu'au bout de trente ans elle produise une somme de 100000 l., on aura:

$$s = \frac{100000}{20.\left(\overline{\tfrac{105}{100}}^{31} - 1\right)} = 1420.$$

Et ainsi pour assurer à soi-même ou à un

autre un fonds de 100000 l., il suffit d'épargner et de placer 1420 l. pendant 30 ans.

On tirera de la même équation:

$$n + 1 = \frac{L(s't + s) - Ls}{L(1+t)}$$

et par conséquent connoissant s', s et t, c'est-à-dire, la somme à placer annuellement, celle qu'on veut retirer et le taux de l'intérêt, on aura le nombre d'années pendant lequel il faudra continuer l'opération pour remplir cet objet. Si, par exemple, on demande pendant combien d'années il faut épargner 1000 l. sur son revenu pour avoir un fonds de 100000 l., l'intérêt étant à 5 p. $\frac{o}{o}$, on trouvera $n + 1 = 36$ en nombres entiers, c'est-à-dire, qu'il faut faire cette épargne pendant trente-six ans, en supposant que la première épargne soit placée pendant trente-cinq ans, et les suivantes pendant trente-quatre, trente-trois.... jusqu'à la dernière qui est supposée n'avoir produit aucun intérêt.

Mais si on connoît s, s' et n, et qu'on cherche $\overline{1+t}$ ou t, la solution devient plus compliquée; alors on a l'équation:

$$s.\,\overline{1+t}^{\,n+1} - s't - s = 0$$

qui ne peut pas se résoudre rigoureusement par les méthodes connues, si n est égal à quatre ou au dessus.

Mais nous observerons, 1°. que plus $1+t$

ou t est grand, plus s' doit être grand. Donc puisque dans cette équation s' est sous un signe négatif, si on fait $1+t$ trop grand, la formule, au lieu d'être égale à zéro, sera négative, et elle sera positive, si on fait $1+t$ trop petit.

2°. Qu'il se présente ici deux cas différens: ou l'on connoît une valeur approchée de $1+t$ ou du taux de l'intérêt, ou on ne la connoît pas. Par exemple, supposons qu'il soit question de calculer un emprunt public: on sait, d'après l'état des affaires du pays qui emprunte, le taux commun de l'intérêt dans ce pays pour les placemens de différentes espèces, celui des emprunts précédens, quelle est la valeur de ce taux à peu près. Cela posé, soit t' cette valeur approchée, on la mettra au lieu de t dans la formule précédente; et la formule, au lieu de devenir o, deviendra T' ou $-T'$. Dans le premier cas, on saura déja que le taux réel est au dessous du taux proposé; dans le second, on saura qu'il est au dessus. On formera ensuite l'équation:

$$s.\overline{n+1}.\overline{1+t'}^{\,n}.z-s'z\pm T'=0\text{; d'où,}$$

$$z=\frac{\mp T'}{s.\overline{n+1}.\overline{1+t'}^{\,n}-s'}$$

z étant ce qu'il faut ajouter à t' pour avoir une valeur plus approchée de t.

Connoissant z, on fera $t'+z=t''$; on

mettra t'' au lieu de t' dans la première formule qui deviendra $\mp T''$, et on prendra:

$$z'=\frac{\pm T''}{s.\overline{n+1}.\overline{1+t''}^{\,n}-s'}.$$

z' étant ce qu'il faut ajouter à t'' pour avoir une valeur plus approchée de t; et on continuera cette opération jusqu'à ce que l'on ait une valeur suffisamment approchée, c'est-à-dire, lorsque ayant trouvé, par cette méthode, une valeur de t plus grande et une valeur plus petite que la valeur réelle, on pourra regarder comme n'ayant aucune importance la différence entre ces deux valeurs.

3°. Si on ne connoît pas de valeur approchée de t, on fera $t=t'$, t' étant ici une valeur hypothétique de t, qu'on saura par conjecture ne pas s'éloigner beaucoup de la vraie valeur, et on aura T'. Cela fait, si T' est positif, ou t' trop grand, on mettra à la place de t successivement $t'-z$, $t'-2z$, $t'-3z$, z étant une petite quantité jusqu'à ce qu'on ait T' négatif. Si c'est $t'-mz$ qui est cette quantité, on saura que t' est plus petit que $t'-(m-1)z$, et plus grand que $t'-mz$, et par conséquent l'on aura une valeur approchée de t. Si au contraire T' est négatif, ce qui prouve que t est plus petit que la vraie valeur de T', on mettra $t+z$, $t+2z$ au lieu de t, jusqu'à ce que T' devienne positif, et si cela arrive en faisant $t=t'+mz$, on saura que t' est plus

grand que $t'+(m-1)z$, et plus petit que $t'+mz$, ce qui en donne encore une valeur approchée.

Il ne sera pas nécessaire même de pousser si loin le calcul dans un grand nombre d'occasions, et il suffira d'arriver à une quantité $t'+mz$ pour laquelle T' de quelque signe qu'il soit, soit une très-petite quantité par rapport à $s'.\overline{t'+mz}$.

On emprunte quelquefois une somme s', à la condition de payer pendant n années une somme s, à commencer à la fin de la première. Les sommes s s'appellent annuités.

On a vu par tout ce qui précède que pour former une comparaison entre des sommes payables à différentes époques, il falloit prendre l'une de ces époques, et donner à chaque somme la valeur qu'elle auroit à cette époque supposée comme fixe. Cela posé, nous avons vu ci-dessus que la valeur de ces sommes s payées un nombre n d'années devient

$$s.\left(\frac{\overline{1+t}^{\,n+1}-1}{t}\right),$$

et la valeur de la somme s' étant rapportée à la même époque, c'est-à-dire à $n+1$ années après avoir été payée, devient $s'.\overline{1+t}^{\,n+1}$.

Nous aurons donc:

$$1°.\ s'=s.\frac{\overline{1+t}^{\,n+1}-1}{t.\overline{1+t}^{\,n+1}};$$

$$2°.\ s=\frac{s'.t.\overline{1+t}^{\,n+1}}{\overline{1+t}^{\,n+1}-1}$$

$$3°.\ n+1=\frac{Ls-L\,\overline{s-s't}}{L\,\overline{1+t}}$$

ce qui donne; 1°. la somme qu'il faut payer pour avoir une annuité donnée, le taux de l'intérêt et le tems que doit durer l'annuité étant aussi donnés.

2°. L'annuité qu'on doit recevoir pour une somme connue s', si le taux et le nombre d'années sont aussi connus.

Si on suppose n infini, la première équation devient $s'=\frac{s}{t}$, et la seconde $s=s't$, c'est-à-dire, que la somme qu'il faut payer pour avoir une rente perpétuelle s est égale à cette rente multipliée par le denier de l'intérêt, et que la rente perpétuelle qu'on doit avoir pour une somme donnée, est égale à cette somme multipliée par le taux de l'intérêt ou divisée par le denier.

Ainsi, par exemple, si le taux de l'intérêt est 5 p. $\frac{o}{o}$, il faut donner 2000 l. pour avoir une rente de 100 l. et pour une somme de

100 l. on doit avoir une rente de 5 l. Ce qui nous montre que la règle établie pour les rentes perpétuelles est un cas particulier de la formule des annuités.

3°. Le nombre d'années que doit durer une annuité donnée pour représenter une somme aussi donnée, lorsque le taux de l'intérêt est connu.

Quant à la quatrième question, on aura l'équation :

$$s.\overline{1+t}^{\,n+1} - s'.t.\overline{1+t}^{\,n+1} - s = 0$$

avec laquelle on formera les valeurs successives de $\pm T'$ comme dans l'article précédent; et l'on aura pour déterminer les quantités z, l'équation :

$$z = \frac{\mp T'}{(n+1)(1+t')^{n}s - \overline{(n+1)t'+1+t'}\,(1+t')^{n}s'}.$$

Nous ne donnerons ici qu'un seul exemple. Supposons $s' = 100000$, $s = 5500$, $1+t = \frac{101}{100}$ ou le taux de l'intérêt à cinq pour cent, et qu'on cherche la valeur de n, on aura :

$$n+1 = \frac{l\,5500 - l\,500}{l\,105 - l\,100}$$

ou $n+1 = 50$. D'où il résulte que le taux étant 5 p. $\frac{0}{0}$, il suffit de payer 5 $\frac{1}{2}$ pendant 49 ans pour rembourser l'intérêt et le capital. On voit par-là combien cette forme

d'emprunt peut être avantageuse pour les états où une confiance très-grande permet de l'employer.

Nous allons maintenant passer à une expression plus générale. Soient S_{I} S_{II} S_{III} S_{IV} les sommes à fournir par le prêteur, S^{I} S^{II} S^{III} S^{IV} celles qu'on doit lui rembourser, n le nombre d'années qui s'écoulent entre la première somme prêtée S_{I} et la dernière somme S^{II*} qui doit être rendue, n_{I} n_{II} n_{III} n_{IV} les distances des sommes à fournir par le prêteur, n^{I} n^{II} n^{III} n^{IV} les distances des sommes qu'il doit recevoir à la même époque; on aura l'équation générale :

$$S_{I}\overline{1+t}^{\,n_{I}} + S_{II}\overline{1+t}^{\,n_{II}} + S_{III}\overline{1+t}^{\,n_{III}} + S_{IV}\overline{1+t}^{\,n_{IV}}, + \text{etc.}$$
$$- S^{I}\overline{1+t}^{\,n^{I}} - S^{II}\overline{1+t}^{\,n^{II}} - S^{III}\overline{1+t}^{\,n^{III}} - S^{IV}\overline{1+t}^{\,n^{IV}} - \text{etc.} - S^{IIn} = 0.$$

Et si on cherche la valeur de t, on formera $\pm T'$ à l'aide de cette équation, comme on

l'a enseigné ci-dessus; et pour déterminer les valeurs de z, on aura l'équation :

$$= \frac{\mp T'}{n_{I}S_{I}\overline{1+t}^{\,n_{I}-1} + n_{II}S_{II}\overline{1+t}^{\,n_{II}-1} - n^{I}S^{I}\overline{1+t}^{\,n^{I}-1} - n^{II}S^{II}\overline{1+t}^{\,n^{II}-1}}$$

D'où l'on voit comment, connoissant la formation de cette équation génerale, et sachant ensuite y substituer des nombres, on peut parvenir d'une manière très-simple à résoudre les questions les plus compliquées sur les emprunts à terme fixe. Cette méthode n'exige pas même de très-longs calculs lorsque l'on emploie les logarithmes; mais il faut alors seulement faire quelque attention à la manière dont on néglige dans le calcul les petites quantités.

Nous terminerons cet article par l'examen d'une question qui peut souvent se présenter, et que cependant on a négligé de traiter dans les ouvrages sur les calculs d'intérêt.

Quelle est la manière d'évaluer les avantages de placemens ou d'emprunts de sommes égales à des taux d'intérêt différens?

La réponse à cette question nous paroît simple. Il faut, en se reportant au tems où se fait l'opération dont on veut évaluer le profit ou la perte, voir quelle somme auroit dû donner ou recevoir celui qui fait l'opération, pour que son état ne changeât point.

Nous allons appliquer cette règle à plusieurs exemples; c'est le moyen le plus simple pour la bien faire entendre. Supposons qu'un homme emprunte à six pour cent une somme de 100000 l. qu'il place à huit pour cent dans le commerce, et qu'il fasse cet emprunt pour deux ans. Il est clair qu'au bout de la première année, il paie 6000 l. et en a reçu 8000; qu'au bout de la seconde il paie 106000 l. et a reçu 108000 l. Il gagne donc 2000 l. au bout de la première année, et 2000 l. au bout de la seconde; ou ces deux valeurs, rapportées au commencement de la première année, l'intérêt étant à 8 p. $\frac{0}{0}$, sont 3566 l. 12 s.

En effet, si on supposoit qu'il eût donné cette somme au commencement de la première année, et tiré 8 pour $\frac{0}{0}$ du reste des 100000 l. on trouve qu'il se seroit acquitté exactement au bout des deux années.

Supposons qu'un homme doit 100000 l. payables dans dix ans, l'intérêt étant à 6 p. $\frac{0}{0}$, et qu'il rembourse actuellement en empruntant, à 5 p. $\frac{0}{0}$, aussi payables dans dix ans. Il est clair que ce sont 1000 l. pendant dix ans qu'il paie de moins; et prenant la valeur actuelle à 6 p. $\frac{0}{0}$ d'une somme de 1000 liv. payable pendant dix ans, on aura la valeur actuelle du profit. En effet, en donnant cette somme à son créancier dans le moment actuel, et convenant de lui payer, pendant dix ans, 5000 l. et 100000 l. après les dix années, son état seroit resté le même qu'auparavant. Cette somme exprime donc la différence entre ces deux états.

Supposons ensuite qu'un homme emprunte 100000 l. pour dix ans, à 6 p. $^0/_0$, au lieu d'emprunter à 5, il paiera pendant dix ans 1000 l. de plus, et il perdra une somme égale à celle de 1000 l. payée pendant dix années, et rapportée au commencement de la première, l'intérêt étant à 6 p. $^0/_0$. En effet, en donnant cette somme au moment de l'emprunt, il devroit 5000 liv. pendant dix années, et 100000 l. de plus à la fin de la dixième, comme s'il avoit emprunté à 5 p. $^0/_0$.

On ne trouvera aucune difficulté tant que les époques des paiemens seront fixées.

Mais dans le cas où le remboursement seroit volontaire, il s'en présente une que nous allons essayer de résoudre.

Supposons que l'on emprunte 100000 l. à 5 p. $^0/_0$, et qu'on rembourse une somme pareille, dont on payoit l'intérêt à 6 p. $^0/_0$, il est aisé de voir que le profit sera une somme de 1000 l. par an, payable pour tout le tems où l'on n'auroit pas effectué le remboursement. Mais comment, dans ce cas, déterminera-t-on le nombre d'années? On ne peut supposer le profit perpétuel. En effet, si on le suppose tel, la somme actuelle qui le représente auroit éteint 1000 l. d'intérêts, et on aura dû seulement ensuite 5000 l. d'intérêts

remboursables par une somme de $100000 - \frac{100000}{6}$ partie du capital déja remboursé; au lieu que, par l'emprunt fait à 5 p. $^0/_0$, on doit 5000 l. remboursables pour 100000 l. Or, quoique ce remboursement soit libre, et qu'on puisse le différer autant qu'on le voudra, ces deux états ne doivent pas être confondus, et il est évident qu'à l'époque où celui qui doit la rente de 5000 l. et l'un des deux capitaux, viendroit à recevoir 100000 l. par une cause quelconque, cette somme ne lui serviroit qu'à éteindre la rente de 5000 l. tandis que dans l'autre, il lui resteroit de plus $\frac{100000}{6}$, ou un sixième de cette somme.

Je ferai donc le raisonnement suivant: Je ne paie plus que 5000 l. par an; donc supposons que je continue d'en employer 6000 au paiement de cette dette, j'aurai, au bout d'un certain nombre n d'années, remboursé le capital. J'aurai (voyez ci-dessus), pour déterminer ce nombre n d'années, l'équation

$$1000.\frac{\left(\left(\frac{105}{100}\right)^n - 1\right)}{\frac{105}{100} - 1} = 100000;$$

d'où on tirera $\left(\frac{105}{100}\right)^n = 4$,

ou $n = \frac{L.4}{L.105 - L.100}$

Je cherche maintenant la somme x, qui, donnée dans le moment présent, en continuant de payer 6000 l. d'intérêt, et le taux d'intérêt restant à 6 p. $^0/_0$, opéreroit la même liquidation en n années; et j'ai, pour déterminer x, l'équation $x\left(\frac{106}{100}\right)^n = 100000$,

ou $x = 100000\left(\frac{100}{106}\right)^n$

S'il s'agit d'un emprunt fait à 6 p. $^0/_0$, au lieu de 5, la perte sera 1000 liv. également à payer pendant un nombre d'années qu'il s'agit de déterminer. Ce ne peut être à perpétuité; car, supposant que celui qui emprunte eût une somme équivalente à cette rente perpétuelle, le taux de l'intérêt étant à 6 p. $^0/_0$, il ne lui resteroit à payer que 5000 l. par an, remboursables par $100000 - \frac{100000}{6}$, au lieu qu'en empruntant à 5 p. $^0/_0$, il auroit eu à payer 5000 livres remboursables par 100000 l. Ainsi, par la même raison, ces deux états ne peuvent être regardés comme égaux.

Je ferai donc un raisonnement semblable à celui que j'ai fait pour l'exemple précé-

dent, et je trouverai de même:

$$x = \left(\frac{100}{106}\right)^n 100000,$$

n ayant la même valeur que ci-dessus.

Ces exemples suffisent pour déterminer dans tous les cas la différence de placemens ou d'emprunts de capitaux égaux, mais à des taux d'intérêts différens.

On sent que cette théorie peut être utile pour calculer avec exactitude les avantages ou les désavantages de différentes opérations de commerce ou de finance.

Par exemple, on trouvera combien, dans les emprunts faits en tems de guerre et à un taux onéreux, on peut gagner en prenant des termes fixes de remboursement très-prochains, ou en conservant la faculté de faire les remboursemens à volonté, afin de pouvoir se libérer par des emprunts faits dans la suite à un taux moindre, et dont les remboursemens soient à des époques plus eloignées.

ARTICLE II.

Sur une méthode de former des tables.

L'idée de faire des dictionnaires, c'est-à-dire, de placer les mots suivant leur ordre alphabétique, a dû se présenter naturellement aux hommes dès qu'ils ont eu le desir d'apprendre une langue étrangère, et qu'ils ont pu rassembler un nombre assez grand de faits, d'observations et de connoissances isolés.

Il étoit naturel de s'appercevoir qu'avec cette forme, il suffisoit d'avoir l'ordre des lettres invariablement fixé dans la tête, pour trouver le mot qu'on cherchoit, et, au dessous de ce mot, ou son explication dans une autre langue, ou ce que l'on connoissoit alors sur la personne, sur la chose désignée par ce mot.

Les méthodes ou systêmes d'histoire naturelle sont devenus, sur-tout dans ce siècle, une autre espèce de dictionnaire non de mots rangés alphabétiquement, mais de choses placées suivant un ordre convenu.

Il en est résulté l'avantage de pouvoir trouver dans des livres où ces méthodes sont exposées, le nom d'un objet qui se présente à vous, et par conséquent, soit par ces livres mêmes, soit par un dictionnaire ordinaire, le résultat des recherches faites sur cet objet.

Mais ces sortes de dictionnaires ont un grand défaut, c'est de devenir presque inutiles, si les propriétés de l'objet qui ont fourni les premiers caractères de la méthode, ne vous sont pas connues.

Ainsi, par exemple, on trouvera facilement dans le systême de Linné, le nom d'une plante, si on connoît le nombre, la disposition de ses étamines, de ses pistils.

Mais

Mais si ces caractères vous manquent, vous retrouverez très-difficilement, à l'aide de ce livre, le nom de la plante, et par conséquent celles de ses propriétés que vous n'avez pu observer.

On peut dire la même chose des systêmes de minéralogie : si les objets sont rangés dans une méthode d'après leurs propriétés chimiques, elle ne pourra me servir à reconnoître ceux dont je ne connois que la forme extérieure ; s'ils sont rangés d'après les formes extérieures, je ne pourrai reconnoître ceux dans lesquels ces formes sont altérées, quand même j'en aurois fait une analyse.

A la vérité, on remédie en grande partie à ce défaut en choisissant pour premiers caractères d'une méthode ceux qui sont les plus constans, les moins susceptibles de s'effacer, les plus faciles à observer ; ceux enfin qui, liés en quelque sorte avec la nature intime de l'objet, ont moins besoin d'être multipliés pour le faire reconnoître. Ainsi l'on ne doit pas être étonné que des savans, des hommes doués d'un esprit philosophique, aient attaché de l'importance et trouvé un mérite réel à ces méthodes artificielles ; qu'ils ne les aient pas regardées comme de simples nomenclatures qu'on peut former arbitrairement et à volonté.

Mais le défaut que nous avons observé n'en est pas moins réel, n'en est pas moins un obstacle au progrès des sciences, par la

perte de temps qu'il entraîne nécessairement.

Indépendamment de ces méthodes, on a été obligé de réduire en tables des observations de différens genres, et l'on y trouve le même inconvénient. Prenons pour exemple les observations météorologiques. Si dans ces tables elles ont été rangées suivant l'ordre des jours, je pourrai trouver facilement celles d'un jour donné, et par conséquent réunir entr'elles, et comparer ou les observations d'un même jour dans différentes années, ou celles qui répondent à certains points des révolutions du soleil et de la lune, parce que ces points sont faciles à trouver par le calendrier ; mais si je veux au contraire chercher les jours où le baromètre est monté à une certaine hauteur, où le thermomètre a marqué un certain degré ; ou bien chercher les jours de pluie ; en un mot, si je veux me procurer des résultats indépendans de l'ordre des jours, mes tables ne peuvent plus me servir, à moins de faire un travail très-étendu. Les observateurs, à la vérité, auront tiré des tables différens résultats, suivant les idées qu'ils ont eues, le but qu'ils se sont proposé ; mais je reste presque sans secours pour les combinaisons nouvelles que je voudrois former.

Ce que je viens de dire sur les tables d'observations météorologiques, s'applique également aux tables de mortalité, à celles qui, en général, renferment des observations sur

les évènemens fortuits de la vie humaine. On ne les publie même pas en entier, et l'on se borne aux résultats qu'on a cru devoir être les plus intéressans. Ainsi quelques-unes donnent, par exemple, le nombre des morts pour chaque espace de temps ; d'autres y ajoutent le sexe, l'âge, le genre des maladies. Mais qu'arrive-t-il ? C'est que si on suit les formes adoptées en général pour les tables, et qu'on ait rangé un élément suivant l'ordre perpendiculaire, et un autre suivant l'ordre horizontal, tout résultat qui dépend ou d'autres élémens ou de la combinaison de plus de deux élémens, devient très-pénible à découvrir.

Il seroit aisé de multiplier les exemples des recherches où ces mêmes inconvéniens se font sentir. Une construction de tables qui les éviteroit, seroit donc beaucoup plus utile qu'elle ne le paroît au premier coup-d'œil. Celle que nous allons présenter est assez simple, et en même temps l'exécution en seroit peu dispendieuse, avantage très-grand pour tout ce qui doit devenir usuel.

Pour en donner une idée, je commence par considérer un cas très simple ; celui, par exemple, où chaque objet est déterminé par dix qualités de diverses natures, susceptibles chacune de dix modifications différentes.

J'entends par *qualité* une propriété générale qui convient à tous les individus, mais qui, dans chacun peut être différemment modifiée. Ainsi, par exemple, avoir un âge quelconque est pour les hommes une *qualité* commune à tous. Mais je puis diviser les hommes de différens âges en dix classes : de la naissance à 10 ans, de 10 à 20, de 90 à 100 et au dessus ; et alors la propriété d'être entre 10 et 20 ans, est une *modification* de la qualité générale d'avoir un âge quelconque.

Cela posé, j'aurai un nombre de combinaisons possibles de ces dix qualités susceptibles de dix modifications, exprimé par l'unité suivie de dix zéros ; ce qui peut servir à désigner dix milliards d'objets.

Je suppose que chacune de ces classes de qualités soit désignée par les lettres A marquées $\overset{\text{I}}{A}$. $\overset{\text{II}}{A}$. $\overset{\text{III}}{A}$ .... Ces nombres expriment l'ordre des classes de qualités, ordre qui, par hypothèse, est absolument arbitraire. Je suppose ensuite que les modifications différentes de chaque qualité soient marquées ainsi : $\underset{\text{I}}{A}$. $\underset{\text{II}}{A}$. $\underset{\text{III}}{A}$..... Ces nombres I, II, III, expriment l'ordre, aussi arbitraire, des modifications de la qualité correspondante. Ainsi, par exemple, $\overset{\text{I}}{\underset{\text{II}}{A}}$ exprimera que c'est, pour la première classe de qualités, la seconde modification qui appartient à l'objet ; $\overset{\text{V}}{\underset{\text{IV}}{A}}$, que, pour

la cinquième classe de qualités, c'est la quatrième modification qui appartient à l'objet, et ainsi de suite.

On voit par là que chaque objet sera désigné par dix de ces lettres ; la première étant de la classe des $\overset{\text{I}}{A}$, la seconde de celle des $\overset{\text{II}}{A}$, la troisième de celle des $\overset{\text{III}}{A}$, la dixième de celle des $\overset{\text{X}}{A}$; et je suppose les objets rangés par ordre, de manière que tous ceux à qui appartient $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, et qui peuvent être au nombre d'un milliard, passent avant ceux à qui $\overset{\text{I}}{\underset{\text{II}}{A}}$ appartient ; ceux-ci, qui sont en nombre égal, avant ceux auxquels $\overset{\text{I}}{\underset{\text{III}}{A}}$ appartient, et ainsi de suite ; qu'il en est de même des autres caractères, de manière que dans le milliard d'objets qui peuvent avoir la lettre $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, les cent millions qui auront ensemble les deux lettres $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{II}}{\underset{\text{I}}{A}}$, passeront avant les cent millions de ceux qui auroient les lettres $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{II}}{\underset{\text{II}}{A}}$, et ainsi de suite.

Il est clair qu'en suivant cet ordre, un des nombres pris entre un et dix milliards, appartiendra à un objet déterminé, et que cet objet sera désigné aussi exactement par ce

nombre que par les dix lettres employées à le caractériser.

Cela fait, si je connois les modifications propres à un objet pour chacun de ses dix caractères ou qualités, que je cherche cet objet dans mon dictionnaire, dans ma table, je le trouverai aussi facilement, soit que je les aie rangés suivant l'ordre des lettres, soit que j'aie adopté l'ordre équivalent des nombres. Par exemple, si j'ai le nombre 161254 pour désigner un objet, il est clair, 1°. que, puisque les nombres depuis 1 jusqu'à un milliard inclusivement, répondent à la lettre $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, cette lettre doit servir à désigner l'objet ; 2°. que tous les nombres depuis 1 jusqu'à cent millions de ce premier milliard répondant à la lettre $\overset{\text{II}}{\underset{\text{I}}{A}}$, cette lettre doit désigner aussi l'objet ; 3°, on trouvera aussi de même que $\overset{\text{III}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{IV}}{\underset{\text{I}}{A}}$, répondant à la première dizaine de millions, au premier million, doivent encore servir à désigner l'objet. Ainsi nous aurons déja les lettres $\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{II}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{III}}{\underset{\text{I}}{A}}$, $\overset{\text{IV}}{\underset{\text{I}}{A}}$; 4°. dans le premier million où se trouve ce nombre donné, $\overset{\text{V}}{\underset{\text{I}}{A}}$ répond aux cent mille premiers nombres, $\overset{\text{V}}{\underset{\text{II}}{A}}$ aux nombres depuis 100001 jusqu'à

200000 ; la lettre $\overset{\text{V}}{\underset{\text{II}}{A}}$, désignera donc l'objet ; 5°. dans ces cent mille nombres $\overset{\text{VI}}{\underset{\text{I}}{A}}$ répondra aux dix mille premiers, $\overset{\text{VI}}{\underset{\text{II}}{A}}$ aux dix mille suivans, $\overset{\text{VI}}{\underset{\text{VII}}{A}}$ aux nombres entre 60001 et 70000, et par conséquent à l'objet désigné ; et en continuant le même raisonnement, on trouvera que les lettres $\overset{\text{VII}}{\underset{\text{II}}{A}}$, $\overset{\text{VIII}}{\underset{\text{III}}{A}}$, $\overset{\text{IX}}{\underset{\text{VI}}{A}}$, lui conviennent aussi. Enfin, comme les $\overset{\text{X}}{A}$ répondent ici aux dix nombres depuis 161251 jusqu'à 161260, $\overset{\text{X}}{\underset{\text{IV}}{A}}$ répond au chiffre et au nombre proposé. Il sera donc désigné par les lettres

$$\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{II}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{III}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{IV}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{V}}{\underset{\text{II}}{A}},\ \overset{\text{VI}}{\underset{\text{VII}}{A}},\ \overset{\text{VII}}{\underset{\text{II}}{A}},\ \overset{\text{VIII}}{\underset{\text{III}}{A}},\ \overset{\text{IX}}{\underset{\text{VI}}{A}},\ \overset{\text{X}}{\underset{\text{IV}}{A}}.$$

On voit en général que pour un nombre quelconque, 3456783, le diminuant d'abord d'une unité, plaçant des zéros à la place des nombres qui manquent, et l'écrivant ainsi 0003456782, on aura la suite des lettres ; en marquant chaque A inférieurement d'un nombre plus grand d'une unité que le nombre correspondant du chiffre, ce qui donne pour ce nombre :

$$\overset{\text{I}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{II}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{III}}{\underset{\text{I}}{A}},\ \overset{\text{IV}}{\underset{\text{IV}}{A}},\ \overset{\text{V}}{\underset{\text{V}}{A}},\ \overset{\text{VI}}{\underset{\text{VI}}{A}},\ \overset{\text{VII}}{\underset{\text{VII}}{A}},\ \overset{\text{VIII}}{\underset{\text{VIII}}{A}},\ \overset{\text{IX}}{\underset{\text{IX}}{A}},\ \overset{\text{X}}{\underset{\text{III}}{A}}.$$

On voit aussi avec quelle facilité on peut, de la désignation par des lettres, conclure le nombre qui y répond, puisqu'il ne s'agit que de diminuer d'une unité le chiffre inférieur des A, et ajouter une unité.

Si, par exemple, j'ai :

$$\overset{\text{i}}{\underset{\text{ii}}{A}},\ \overset{\text{ii}}{\underset{\text{iii}}{A}},\ \overset{\text{iii}}{\underset{\text{i}}{A}},\ \overset{\text{iv}}{\underset{\text{v}}{A}},\ \overset{\text{v}}{\underset{\text{ii}}{A}},\ \overset{\text{vi}}{\underset{\text{iv}}{A}},\ \overset{\text{vii}}{\underset{\text{vi}}{A}},\ \overset{\text{viii}}{\underset{\text{i}}{A}},\ \overset{\text{ix}}{\underset{\text{i}}{A}},\ \overset{\text{x}}{\underset{\text{x}}{A}},$$

j'écrirai : 1204135009; et ajoutant 1, j'aurai : 1204135010.

Si je connois les quatre, les cinq premiers caractères, et que je veuille chercher l'objet ou les objets auxquels ils appartiennent, je les trouverai réunis et placés de suite également dans l'ordre ordinaire et dans celui que je propose.

Mais si, au lieu de connoître les premiers caractères, je ne connois que quelques-uns des caractères suivans, la recherche devient pénible, presque impossible même dans la première méthode, et elle peut être encore très-facile dans la seconde.

Supposons en effet que je ne connoisse rien d'un objet, sinon que les caractères $\overset{\text{iii}}{\underset{\text{iv}}{A}}$, $\overset{\text{vi}}{\underset{\text{ii}}{A}}$, $\overset{\text{vii}}{\underset{\text{iii}}{A}}$, lui appartiennent, je raisonnerai ainsi :

1°. Les cent combinaisons des deux premiers caractères $\overset{\text{i}}{A}$ et $\overset{\text{ii}}{A}$ lui appartiennent également. Il peut donc se trouver dans les cent classes de nombres, depuis 1 jusqu'à

100000000 ; 100000001 jusqu'à 200000000, et ainsi de suite.

2°. Puisqu'il est désigné par $\overset{\text{iii}}{\underset{\text{iv}}{A}}$, il est clair que, dans chacune de ces classes, il ne peut appartenir aux 30000000 de premiers nombres, et qu'il ne peut se trouver dans chacune, que depuis le nombre 30000001 de cette classe jusqu'au nombre 40000000 de cette classe; c'est-à-dire, entre les nombres 30000001 et 40000000, 130000001 et 140000000, et ainsi de suite.

3°. Nous connoissons déja la place des classes de 10000000 de nombres qui peuvent lui convenir; mais puisque tous les $\overset{\text{iii}}{A}$ et $\overset{\text{iv}}{A}$ lui conviennent également, il en sera de même de leurs cent combinaisons; ainsi, dans chaque classe ci-dessus, il pourra être dans les cent classes de 100000 nombres chacune, dont elles seront formées.

4°. Puisqu'il est désigné par $\overset{\text{vi}}{\underset{\text{ii}}{A}}$ les 10000 objets qui appartiennent à $\overset{\text{vi}}{\underset{\text{i}}{A}}$, doivent le précéder; et il se trouve entre les nombres 10001 et 20000 appartenans à chaque division. Ainsi dans la classe de 30000001 et 40000000, il ne pourra se trouver que depuis 30010001 jusqu'à 30020000, 30110001, 30120000, 30210001, 30220000, etc. et ainsi pour les autres classes.

Nous avons donc maintenant toutes les

classes de 10000 nombres chacune où il peut se trouver, puisque tous les $\overset{\text{vii}}{A}$ lui conviennent également, il peut appartenir dans chaque classe à chaque division de mille nombres; mais dans chaque mille, puisqu'il est marqué $\overset{\text{viii}}{\underset{\text{iii}}{A}}$, il ne peut appartenir aux deux premières centaines, et doit se trouver, pour chaque mille, entre 201 et 300. Enfin, puisqu'il n'a plus d'autre condition, il peut appartenir à la totalité de cent nombres.

D'où résumant dans la classe de 30010001 à 30020000, il n'appartient qu'aux nombres :

30010201. 300

30011201. 300

30012201. 300

. . . .

30019201. 300

Arrivé à ce terme, on franchira un espace de 100000, à compter du premier; on cherchera les dix nombres suivans, distans de mille; puis on franchira encore un espace de 100000, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'étant arrivé à 39919201. . . . . 300, on franchisse un espace de 100000000, à compter de 30010201, pour recommencer la même opération.

Cette méthode peut paroître, au premier coup-d'œil, encore trop compliquée; mais il

faut observer qu'ici le nombre des objets auxquels appartiennent ces caractères, peut être de dix millions. Il y en a cent qui se suivent; ce qui réduit à cent mille la somme des nombres à chercher. De ces cent mille, il en reste mille à chercher dans une classe de dix millions, déterminée dans chaque classe de cent millions; ensuite dans chaque classe déja donnée de ces dix millions, on aura dix des nombres cherchés dans une classe déterminée de cent mille, prise dans chacune des cent classes de cent mille qui forment chaque classe déterminée de dix millions; et un de ces dix nombres appartient à chacun des mille qui composent cette classe. Si, par conséquent, l'on songe que le nombre des objets est dix millions, on trouvera que cette manière d'en simplifier la recherche par des décompositions successives, la faciliteroit beaucoup.

On peut encore rendre l'usage de la méthode plus facile. En effet, dans l'exemple proposé, il est clair d'abord que le premier nombre qui puisse convenir à l'objet désigné, sera 0030010201, et que les 99 suivans lui conviendront également. Le 0 qui est au quatrième chiffre montre qu'on trouvera de mille en mille dix suites semblables de cent nombres, qui conviendront à l'objet proposé, ce qui fait mille numéros apppartenans à l'objet; les deux zéros qui sont aux sixième et septième chiffres, prouveront que de cent mille en partant du premier nombre, on trouvera cent suites semblables de mille numéros, ce qui fait en tout cent mille numéros. Enfin, les deux derniers zéros montrent que de cent millions en cent millions, depuis le premier chiffre, on aura cent suites de cent mille numéros à trouver comme la première.

Les seuls cas où l'on pourroit éprouver quelque embarras, sont ceux où l'on a $\overset{x}{\underset{x}{A}}$, et ceux où l'on a des $\underset{I}{A}$. Supposons donc que nous ayons $\overset{II}{\underset{I}{A}}$, $\overset{IV}{\underset{II}{A}}$, $\overset{VII}{\underset{III}{A}}$, $\overset{IX}{\underset{VI}{A}}$, $\overset{X}{\underset{X}{A}}$, les autres termes étant indéterminés.

J'écrirai, pour ce premier nombre, $\dot{0}00100\dot{2}060$. Ce nombre étant trouvé, à cause du zéro au troisième chiffre, les neuf nombres que je trouverai en allant de cent en cent, pourront appartenir à l'objet. Ensuite, à cause du zéro aux cinquième et sixième chiffres, allant de dix mille en dix mille, à partir du premier chiffre, je trouverai quatre-vingt-dix-neuf autres suites semblables de dix nombres qui conviendront encore à l'objet. A cause du zéro qui est au huitième chiffre, prenant dix millions de nombres, à partir du premier, et ainsi de suite, j'aurai neuf autres suites de mille nombres qui conviennent encore à l'objet. Enfin, à cause du zéro qui est au dixième chiffre, en prenant neuf fois de suite un million au-delà du premier nombre,

on aura neuf autres suites semblables de dix mille nombres qui conviennent à l'objet désigné.

On voit que cette opération technique est très-simple, et qu'il suffit, à cause du zéro qui appartient aux $\underset{I}{A}$, de le marquer d'un point, par exemple, ou de le regarder comme un nombre déterminé. De même, si l'on avoit :

$\overset{VII}{\underset{II}{A}}$, $\overset{IX}{\underset{X}{A}}$, $\overset{X}{\underset{X}{A}}$, il faudroit écrire, $11\dot{0}\dot{0}$, et regarder alors les deux zéros comme déterminés, et la troisième unité que nous avons marquée par $\dot{1}$, comme un chiffre indéterminé, ensorte qu'après le premier nombre 1100, on en auroit neuf autres, en allant de cent en cent; c'est-à-dire, que l'on auroit:

1200, 1300. . . . . 2000.

Ainsi, dès que l'on auroit pris l'habitude de cette opération technique, on n'auroit aucun besoin d'attention pour trouver tous les nombres qui conviennent à un objet, lorsque l'on connoît une partie des qualités qui le constituent.

Si on avoit vingt qualités ou caractères susceptibles de dix modifications, le nombre des combinaisons seroit 10^{20}, c'est-à-dire, exprimé par l'unité suivie de vingt chiffres, ou égal à cent milliards de milliards, et l'on y emploieroit également la même méthode.

On voit combien, dans cette méthode, lorsqu'il manque un grand nombre des combinaisons possibles, la recherche est facile, en même-tems qu'elle devient plus abrégée.

De même, si l'on veut borner son travail aux seuls objets auxquels appartient une certaine qualité, par exemple, celle qui est désignée par $\overset{VI}{\underset{III}{A}}$, on trouvera facilement tous les objets auxquels cette qualité appartient. On écrira le nombre 0000020001, et on verra que tous les nombres depuis 20001 jusqu'à 30000 appartiennent à ces objets, ainsi que tous les nombres de 20001 à 30000 dans les cent mille classes de cent mille nombres chacune, que donnent les dix milliards de combinaisons.

On peut enfin, par le même moyen, vérifier si certaines combinaisons de qualités n'existent pas dans la nature, et si quelques-unes y existent constamment, de manière que toutes les autres soient exclues.

La nécessité où l'on est, dans cette méthode, de n'avoir que des modifications du même caractère, ni plus ni moins, n'est pas un inconvénient aussi réel qu'il le paroît. Supposons, en effet, que le caractère $\overset{VI}{A}$, ne soit susceptible que de trois modifications, au lieu de dix, je n'aurai que les lettres $\overset{VI}{\underset{I}{A}}$, $\overset{VI}{\underset{II}{A}}$, $\overset{VI}{\underset{III}{A}}$, à combiner; il en résultera une moins grande quantité de nombres, des lacunes plus gran-

des, de 70000, par exemple, dans le cas particulier que nous avons cité; mais la méthode de chercher sera la même. Si les caractères d'une classe de qualités sont susceptibles de trente modifications, par exemple, je classe ces modifications de manière à en former deux caractères ayant chacun dix modifications; ce qui fait cent combinaisons dont soixante-dix n'existent pas: et si ces deux caractères sont de nature à être toujours connus en même tems, il n'en résulte pour la recherche aucun embarras de plus.

Si cependant on attachoit quelque prix à se servir de caractères susceptibles de plus de dix modifications, ou en général d'un nombre quelconque, il n'y auroit de difficulté que par la raison que l'on passeroit plus difficilement d'un nombre à un autre de la suite cherchée; mais une machine arithmétique qui feroit les additions et les multiplications, donneroit un moyen très-praticable de lever cette difficulté; celle qui feroit seulement les additions, suffiroit même en se donnant la peine de faire quelques calculs préparatoires.

Observons enfin que cette méthode a encore l'avantage précieux d'offrir les objets qui ont les caractères déterminés, rangés relativement aux autres caractères dans un ordre méthodique.

Nous aurions desiré pouvoir donner ici un exemple de ces tables; mais il ne nous a pas été possible d'en trouver aucun qui n'exigeât des détails trop étendus, ou qui ne nous éloignât trop de l'objet que nous considérons ici.

Nous nous bornerons donc, pour donner une idée, non de la partie technique, soit de la construction, soit de l'usage de ces tables, mais de la manière de les former et de leur utilité, à exposer le plan de celle qui renfermeroit pour tous les individus de l'espèce humaine qu'on auroit pu observer, l'histoire de leur vie considérée comme un objet de recherches ou de connoissances physiques.

Pour faire cette table, on commenceroit par déterminer quels sont les événemens, les qualités propres à tous les individus, et différens dans chacun, que l'on veut faire entrer dans cette histoire.

Ainsi, par exemple, l'histoire d'un individu pourroit être :

I. Il est né dans une telle saison : II. d'un père de tel âge ayant eu tant d'enfans, d'une mère de tel âge, ayant fait tant de couches heureuses ou malheureuses; ses parens étoient de telle profession, ont éprouvé telle maladie, sont morts à tel âge, de telle maladie : III. il étoit de telle stature; sa conformation étoit régulière ou vicieuse : IV. il a, pendant sa vie, éprouvé tels accidens : V. il a exercé tel genre de professions : VI. il a vécu dans un pays dont la constitution physique étoit de telle nature : VII. il étoit de tel sexe; et si c'est une femme, elle s'est mariée, elle a eu des

des enfans en petit ou en grand nombre ; VIII. il est mort de telle maladie ; IX. à tel âge ; X. et dans telle saison de l'année.

Une telle histoire de chaque individu nous semble assez complète, et paroît suffisante pour donner les matériaux nécessaires à une véritable histoire naturelle de l'homme.

Supposons maintenant que l'on ait formé des tables de mortalité ordinaires, mais où, pour chaque mort, on soit entré dans tous ces détails autant qu'il a été possible.

Nous observerons d'abord qu'avant de former cette nouvelle table, il n'est pas indifférent de choisir un ordre plutôt qu'un autre. En effet, comme toutes les circonstances que l'on examine ici, ne sont pas de la même importance il faut les ranger de manière que celles qui sont le plus indifférentes, ou qui doivent devenir plus tard l'objet de nos recherches, soient placées les dernières. C'est un moyen de rendre ces recherches bien plus simples, puisque alors tous les individus qui ne diffèrent que par ces qualités négligées presque toujours, se trouvent placés à côté les uns des autres.

Nous préférerons donc ici l'ordre suivant : 1°. la durée de la vie; 2°. la maladie qui a causé la mort; 3°. la saison de la mort; 4°. la constitution physique du pays où l'individu a vécu ; 5°. le sexe et l'état; 6°. la profession ; 7°. les accidens particuliers qu'il a éprouvés pendant sa vie; 8°. la conformation; 9°. l'époque de la

naissance; 10°. les détails relatifs aux parens.

Cet ordre une fois établi, il faut voir combien, pour chacune de ces circonstances, nous devons établir de qualités, de modifications, en un mot de caractères. Pour cela nous considérerons en particulier chacun des évènemens précédens.

1. L'âge auquel l'individu est mort. Il suffira de deux caractères, $\overset{\text{i}}{A}$, $\overset{\text{ii}}{A}$, pour cet objet; chacun étant susceptible de dix modifications. Cette distribution seroit fort simple, si on vouloit supposer que les $\overset{\text{i}}{\underset{\text{i}}{A}}, \overset{\text{ii}}{\underset{\text{i}}{A}} \ldots \overset{\text{x}}{\underset{\text{i}}{A}}$ représentassent la première année de la première, de la seconde, de la dixième dixaine d'années; les $\overset{\text{i}}{\underset{\text{ii}}{A}}, \overset{\text{ii}}{\underset{\text{ii}}{A}} \ldots \overset{\text{x}}{\underset{\text{ii}}{A}}$, les secondes années des mêmes dixaines, etc. $\overset{\text{x}}{\underset{\text{ix}}{A}}$, au lieu d'exprimer la centième année, exprimeroit la quatre-vingt-dix-neuvième année et au-delà; on réserveroit $\overset{\text{x}}{\underset{\text{x}}{A}}$ pour ceux dont l'âge seroit absolument incertain ou auroit été oublié. On sent qu'il faut toujours réserver une pareille classe pour chacune des divisions. Le nombre des centenaires est trop petit pour qu'il naisse un grand inconvénient de cette réunion. En effet, connoissant le petit nombre des centénaires

qui remplissent les conditions cherchées, on trouvera facilement dans l'explication les détails dont on auroit besoin, si l'on vouloit avoir leur âge avec plus d'exactitude.

Mais il nous paroît plus commode de partager l'âge en dix dixaines; la première, de la naissance à cinq ans, les intervalles n'étant alors que de six mois; une seconde, de cinq à dix avec le même intervalle; puis deux classes, de dix à vingt-cinq, de vingt-cinq à quarante, les différences étant de dix-huit mois; cinq classes de quarante à quatre-vingt-dix, les différences étant d'un an ; une classe enfin pour le reste, la différence étant de deux années, et la neuvième division de cette classe renfermant tout ce qui est au dessus de 106 ans, et la dernière ceux dont l'âge est incertain. Les raisons de cette division sont très-simples : les différences sont très-rapprochées dans le bas âge, où elles sont plus sensibles, plus importantes, où elles ont un rapport plus grand avec l'âge total; elles deviennent plus grandes dans l'âge où elles sont le moins importantes, et finissent par être de deux ans dans celui où il y a un très-petit nombre d'individus.

2. Pour le second évènement; la maladie qui a causé la mort, on pourroit se contenter de cent divisions; et dès lors il suffiroit d'employer deux caractères. On sent que ces divisions ne pourroient pas être très-rigoureuses, qu'elles devroient être telles que la déclaration

que feroit un homme peu instruit, n'exposât que rarement à des erreurs. Il faudroit attacher à chaque classe de maladies des noms qui fussent entendus dans les différens pays; et après avoir formé sa nomenclature d'après l'expérience et l'observation des grands maîtres, la traduire soigneusement en langue vulgaire, d'après l'idiome médical de chaque pays.

3. Le troisième évènement, la saison de la mort, ne demande que huit divisions. Comme les jours de la mort sont marqués pour chaque individu, celui qui voudra les classer, aura soin d'observer que ces divisions égales entre elles, doivent être prises de l'équinoxe du printemps à la moitié de l'intervalle qui le sépare du solstice d'été; ensuite de ce point au solstice d'été, et ainsi de suite. Ou bien, ce qui vaudroit mieux encore, placer ces huit points principaux au milieu de chaque époque. Ces divisions qui sont réelles, nous paroissent devoir être préférées à celles qui seroient prises de l'année civile. Si on vouloit faire entrer dans ces tables l'état de l'atmosphère, l'heure de la journée, les phases mêmes de la lune, on le pourroit facilement; mais ces objets, comme moins importans en eux-mêmes, pourroient être placés aux derniers rangs.

4. Le quatrième évènement, la constitution physique du pays où l'individu a vécu, n'exigeroit que cent divisions.

5. Le sexe et l'état. Cette circonstance n'exige que dix divisions. Deux pour les hommes, celles des célibataires et de ceux qui ont vécu dans l'état de mariage; et quoique cette distinction ne puisse servir à prouver ni les avantages ni les désavantages de la continence, ni ceux d'une vie réglée, relativement à la durée de la vie ou à la nature des maladies, on en pourroit tirer cependant des résultats intéressans. Il resteroit huit divisions pour les femmes, et cela suffiroit pour distinguer les femmes qui ont vécu dans le célibat, celles qui se sont mariées, celles qui n'ont eu que peu d'enfans, celles qui en ont eu beaucoup. On se contenteroit de laisser ici une division pour les femmes dont on n'auroit pas exprimé l'état avec assez de précision. La distinction d'état pour les hommes est facile à faire, et ceux dont l'état seroit incertain, peuvent être placés au nombre des célibataires, puisque cette incertitude ne peut arriver en général que pour ceux qui ne vivent pas au milieu de leur famille.

6. Les professions. Cent divisions suffiroient pour cet article, tant pour les hommes que pour les femmes.

7 et 8. Les accidens particuliers éprouvés pendant la vie, et la conformation. Ces deux articles fourniroient chacun dix divisions.

9. La saison de la naissance. Cet article est de la même nature que l'article 3.

10. Enfin les détails relatifs aux parens. Il

est, en effet, assez intéressant de savoir si l'âge des parens à l'époque de la naissance, la durée de leur vie, le plus grand ou le moindre nombre d'enfans nés auparavant de la même mère, la nature de leur profession, etc. influent sur la constitution et sur la vie des enfans; s'il arrive fréquemment qu'ils meurent de maladies semblables; quelles sont ces maladies; etc. On peut ici, suivant que l'on voudra obtenir des résultats plus précis, former un nombre de divisions plus ou moins grand, et dix mille seroient plus que suffisantes.

On pourroit placer ensuite les observations que nous avons indiquées n°. 3, ou bien les insérer entre le 8e et le 9e articles, et mille divisions seroient suffisantes.

En résumant ce tableau, nous trouverons en tout vingt caractères susceptibles chacun de dix modifications; ce qui fait un nombre de combinaisons exprimées par l'unité suivie de vingt chiffres.

Ces classifications étant bien établies, on détermineroit pour chaque individu dont on auroit l'histoire, le numéro qui lui conviendroit. On dresseroit une table de ces numéros, suivant l'ordre des nombres, et à côté de chaque numéro le nombre des individus auquel il appartient.

Comme il ne s'agit ici, ni de trouver le nom des individus, ni des connoissances particulières sur ce qui les concerne, mais

de chercher des résultats d'après les différentes questions qu'on peut se proposer d'examiner, les tables suffiront pour trouver ces résultats. Mais en même temps on pourroit conserver dans un registre et dans le même ordre les noms, et l'histoire particulière de chaque individu, pour ceux qui pourroient avoir quelque intérêt de connoître l'un ou l'autre.

Il est aisé de voir combien de faits curieux relatifs à l'espèce humaine, pourroient être découverts par l'usage des tables dont nous venons de tracer une esquisse très-imparfaite. Chaque année fourniroit une nouvelle table, et il seroit facile de les réunir au bout d'un certain espace de temps.

On sent que ces tables elles-mêmes deviendroient susceptibles de se perfectionner; qu'à mesure qu'on auroit acquis des connoissances, on verroit qu'il reste à faire des recherches dont l'idée ne s'étoit pas encore présentée, et il arriveroit à ces tables la même chose qu'aux tables astronomiques, qui changent à mesure que le perfectionnement de la théorie et celui de l'art d'observer permettent d'aspirer à une exactitude plus grande.

Il faut remarquer enfin que dans le genre de tables que nous avons choisi pour exemple, le travail des recherches est absolument technique, ensorte qu'il suffiroit de bien établir quelle question on veut résoudre, quel fait on veut connoître avec précision, et qu'ensuite il n'y a personne qui, avec un peu d'habitude, ne soit en état d'exécuter le reste du travail.

ARTICLE III.

Des principes fondamentaux du calcul des probabilités.

Le calcul des probabilités a pour objet les faits dont la réalité est inconnue.

On cherche d'abord à déterminer le nombre de tous les évènemens également possibles, et il est absolument nécessaire de remonter à ceux auxquels il est permis de supposer cette égale possibilité, sans quoi le calcul deviendroit absolument hypothétique. On cherche ensuite, dans ce nombre d'évènemens également possibles, quel est le nombre de ceux qui remplissent une certaine condition, et on dit que la probabilité d'avoir un évènement qui remplisse cette condition, est exprimé par le second de ces nombres divisé par le premier.

Supposons, par exemple, un jeu composé de trente-deux cartes, comme le jeu de piquet. Je peux supposer qu'en tirant une carte de ce jeu, il est aussi possible d'amener l'une que l'autre. J'aurai donc 32 évènemens également possibles. Si je cherche la probabilité d'amener une figure, j'observerai que de ces 32 évènemens possibles, il y en a 12 qui

satisfont à cette condition; la probabilité d'amener une figure sera donc $\frac{12}{32}$.

On voit que s'il y avoit eu 64 cartes et 24 figures, on auroit trouvé, pour la probabilité, $\frac{24}{64}=\frac{12}{32}$.

Il n'est donc pas nécessaire, pour avoir la probabilité, de connoître le nombre total des évènemens, mais seulement le rapport du nombre de ceux que l'on veut considérer avec ce nombre total.

Si l'on considère les évènemens également possibles, sous ce point de vue que les uns, désignés par A, remplissent une certaine condition, et que les autres, désignés par N, ne la remplissent pas; que n soit le nombre des premiers, m celui des seconds, $\frac{n}{m+n}$ exprimera la probabilité de A, et $\frac{m}{n+m}$ celle de N. Si $m=0$, c'est-à-dire si tous les évènemens possibles remplissent la condition proposée, la probabilité de A devient $\frac{n}{n}=1$. Or, dans ce cas, l'évènement A a lieu nécessairement, et on est sûr d'avoir l'évènement A. Mais tant que m n'est pas 0, $\frac{n}{m+n}$ est une fraction plus petite que l'unité. C'est dans ce sens que l'on dit que la probabilité est toujours exprimée par une fraction, et la certitude par l'unité. La certitude ou l'unité sont donc la limite de laquelle la probabilité ou

la fraction qui la représente, peuvent s'approcher indéfiniment, mais sans jamais y atteindre, puisque tant que m n'est pas rigoureusement 0, la possibilité d'avoir l'évènement N subsiste toujours réellement.

On peut, dans la somme des évènemens également possibles, en considérer plusieurs classes distinguées par des conditions différentes, et on trouvera de même, pour un évènement pris dans une de ces classes, que sa probabilité est égale au nombre des évènemens qui remplissent la condition exigée, divisé par le nombre total. Prenons, par exemple, trois classes d'évènemens, A, A' et N, où A et A' désignent ceux qui remplissent chacun une condition différente, et N ceux qui n'en remplissent aucune des deux. Soit n' le nombre des premiers, n'' celui des seconds, m celui des troisièmes,

$$\frac{n'}{n'+n''+m},\ \frac{n''}{n'+n''+m},\ \frac{m}{n'+n''+m}$$

seront les probabilités des évènemens A, A' et N. Si l'on demandoit la probabilité d'avoir A ou A', on trouveroit que le nombre des évènemens qui remplissent une des deux contions, étant $n'+n''$, et $n'+n''+m$ le nombre total, cette probabilité sera $\frac{n'+n''}{n'+n''+m}$, et par conséquent cette probabilité sera égale à

$$\frac{n'}{n'+n''+m}+\frac{n''}{n'+n''+m},$$

ou à la somme de la probabilité d'avoir A, et de celle d'avoir A'; d'où l'on peut tirer cette conclusion: Que la probabilité d'avoir l'un ou l'autre des évènemens qui remplissent des conditions différentes, est égale à la somme des probabilités qu'on a pour les évènemens qui remplissent chacune de ces conditions.

Ainsi, dans l'exemple précédent, où nous avons trouvé $\frac{12}{32}$, pour la probabilité d'avoir une figure, nous aurions $\frac{4}{32}$ pour la probabilité d'avoir un roi, $\frac{4}{32}$ pour celle d'avoir une dame, $\frac{4}{32}$ pour celle d'avoir un valet, et la somme de ces probabilités, qui est $\frac{12}{32}$, exprime celle d'avoir une figure.

La probabilité d'avoir A plutôt que A' sera exprimée par $\frac{n'}{n'+n''}$; en effet, le nombre des évènemens A est n', celui des évènemens A' est n'', le nombre des cas dans lesquels l'un ou l'autre de ces évèmens a lieu, est donc $n'+n''$; ainsi la probabilité d'avoir A plutôt que A', est égale à $\frac{n'}{n'+n''}$, ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\frac{n'}{n'+n''+m}}{\frac{n'}{n'+n''+m}+\frac{n''}{n'+n''+m}}$$

c'est-à-dire, à la probabilité d'avoir A', divisée par la somme de celles d'avoir A ou A'.

La raison en est simple ; c'est que n'ayant égard ici qu'à la probabilité d'avoir A plutôt que A', ces deux seuls évènemens doivent être regardés comme possibles ; et qu'ainsi, c'est au seul nombre de ces évènemens qu'on doit avoir égard ; et c'est la probabilité d'avoir l'un ou l'autre que l'on doit regarder comme la certitude.

Considérons maintenant deux évènemens consécutifs, et qu'on demande la probabilité d'avoir deux fois de suite celui qui remplit une certaine condition, ou de ne l'avoir qu'une fois, ou de ne l'avoir point du tout. Si je nomme A l'évènement qui remplit la condition, et N celui qui ne la remplit pas, n le nombre des évènemens également possibles désignés par A, m celui des évènemens également possibles désignés par N, il est clair que le nombre total des combinaisons successives également possibles des deux évènemens sera exprimé par $\overline{n+m}^2$, puisque $n+m$ exprime le nombre des évènemens possibles au premier coup, et qu'il répond à chacun d'eux $n+m$ évènemens pour le second. Il est clair encore que le nombre des combinaisons qui amèneront deux fois A, sera exprimé par n^2, puisque ce nombre est n pour le premier coup, à chacun desquels répondent n autres évènemens dans le second. On trouvera de même que le nombre des combinaisons où l'on a d'abord A et ensuite N, est égal à nm ;

que celui des combinaisons où l'on a N et ensuite A, est égal encore à mn ; enfin que le nombre des combinaisons où l'on peut avoir deux fois N, est égal à m^2. Les probabilités d'avoir deux fois A, une fois A et ensuite N ; une fois N et ensuite A, enfin deux fois N, seront donc :

$$\frac{n^2}{\overline{n+m}^2},\quad \frac{mn}{\overline{n+m}^2},\quad \frac{mn}{\overline{n+m}^2} \text{ et } \frac{m^2}{\overline{n+m}^2};$$

enfin celle d'avoir une fois A et une fois N, dans quelque ordre que ces évènemens se succèdent, sera, $\frac{2mn}{\overline{n+m}^2}$.

Il est aisé de voir que si l'on suppose toujours le même nombre d'évènemens A et d'évènemens N, et qu'on cherche en général les probabilités pour une suite d'évènemens au nombre de p, il suffira de prendre la formule connue du binome :

$$\overline{n+m}^p = n^p + p n^{p-1} m + \frac{p.\overline{p-1}}{1.2} n^{p-2} m^2 + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1.2.3} n^{p-3} m^3 \ldots + \frac{p.\overline{p-1}.\overline{p-2}\ldots\overline{p-q+1}}{1.2.3\ldots q} n^{p-q} m^q \ldots + m^p.$$

Cela posé, la possibilité d'avoir p fois A, sera : $\frac{n^p}{(m+n)^p}$; et celle d'avoir $p-1$ de fois A et une fois N, sera : $\frac{p.n^{p-1}m}{(m+n)^p}$, si on suppose indéterminé ou indifférent l'ordre dans lequel N se trouve dans cette suite d'évènemens; et $\frac{n^{p-1}m}{\overline{n+m}^p}$, si on suppose cet ordre déterminé.

$$\frac{p.p-p.\ldots\ldots p-q+1}{1.2\ldots\ldots q}\cdot\frac{n^{p-q}m^q}{(n+m)^p}$$

exprimera la probabilité d'avoir $p-q$ de fois A, et q de fois N, si l'ordre dans lequel ils se trouvent est regardé comme indifférent; et $\frac{n^{p-q}m^q}{(n+m)}$, exprimera la même probabilité si cet ordre est déterminé.

Si les probabilités de A et de N ne sont pas les mêmes pour les évènemens qui se suivent; que, par exemple, il y ait m, A et m, N pour le premier évènement qui doit arriver, et n', A et m', N pour le second, il est

clair que nous aurons d'abord $\overline{n+m}.\overline{n'+m'}$ pour le nombre total des évènemens, puisqu'à chacun des $n+m$ premiers répondent $n'+m'$ des seconds. De même, puisqu'à chacun des n évènemens A qui peuvent arriver d'abord, répondent n' autres évènemens A, le nombre des combinaisons où A arrive deux fois, sera nn'. De la même manière on trouvera pour le nombre des combinaisons où l'on a d'abord A et ensuite N, nm' ; mn' pour celui des combinaisons où l'on a d'abord N et ensuite A; enfin mm' pour celui des combinaisons où l'on a deux fois N; ensorte que les probabilités de ces quatre combinaisons seront :

$$\frac{nn'}{\overline{g+m}.\overline{n'+m'}}\quad \frac{nm'}{\overline{n+m}.\overline{n'+m'}}$$
$$\frac{mn'}{\overline{n+m}.\overline{n'+m'}}\quad \frac{mm'}{\overline{n+m}.\overline{n'+m'}}.$$

Ces détails suffisent pour montrer comment, dans tous les cas, on doit s'y prendre pour déterminer la probabilité de chaque évènement et celle d'une combinaison successive quelconque de ces évènemens.

Si on demande ensuite, dans la première hypothèse, c'est-à-dire, dans celle où la probabilité reste la même dans toute la suite des évènemens, quelle est la probabilité d'avoir deux fois A de suite, plutôt que deux fois N, ou réciproquement ; il suit de ce que nous avons déja exposé que la première probabilité sera $\frac{n^2}{n^2+m^2}$ et la seconde $\frac{m^2}{n^2+m^2}$, puisque, dans ce cas, faisant abstraction des autres combinaisons possibles, le nombre total de celles qui restent, est réellement n^2+m^2. Cet exemple suffit pour montrer ce qu'on doit faire en général, lorsqu'au lieu de considérer la somme de tous les évènemens ou de toutes les combinaisons, on n'en considère qu'une partie pour laquelle seule on cherche à déterminer les probabilités.

On voit enfin que si, au lieu d'appeler n et m le nombre des évènemens, on fait:

$$\frac{n}{n+m}=u,\ \frac{m}{n+m}=e,$$

et qu'on substitue ces valeurs dans les formules précédentes, on aura la valeur des probabilités de chaque combinaison d'évènemens, exprimée par des fonctions de la probabilité des évènemens simples; on verra encore qu'à cause de $\frac{n}{n+m}+\frac{m}{n+m}=1$, on aura $u+e=1$, ou $e=1-u$ et par conséquent la valeur des probabilités de toutes les combinaisons dépendantes de celle d'un des évènemens simples, exprimée en fractions de u. S'il y avoit plus de deux évènemens, on auroit des résultats semblables, en substituant

tituant à la formule du binome celle du trinome, s'il y a trois évènemens; et, en général, du polynome d'un nombre de termes égal à celui des conditions qu'on examine dans les évènemens. On pourra substituer également dans ces formules le nombre des probabilités simples de chaque évènement à celui des évènemens divisé par le nombre total; et comme on sait que la somme de leurs probabilités réunies est égale à l'unité, on pourra toujours supposer une de ces probabilités égale à l'unité moins la somme des autres. Ainsi la probabilité de toutes les combinaisons possibles de ces évènemens sera exprimée par une fraction de la probabilité de chacun de ces évènemens, un seul excepté, parce que cette dernière probabilité est nécessairement déterminée par celle des autres.

Je passe maintenant à un cas plus compliqué, et je suppose qu'il y ait dans une urne un nombre déterminé de boules blanches ou noires, quatre, par exemple; que je tire une de ces boules, que je rejette ensuite; puis que j'en tire une seconde, que je rejette de nouveau, et ainsi de suite, en marquant à chaque fois la couleur de la boule que j'ai tirée.

Cela posé, imaginons que j'aie tiré trois boules blanches et une noire. On peut me demander la probabilité qu'il y ait dans l'urne ou quatre boules blanches, ou trois blanches et une noire, ou deux blanches et deux

noires, ou trois noires et une blanche, ou quatre noires.

Je fais alors le raisonnement suivant: S'il y avoit eu quatre boules blanches, la probabilité d'avoir trois blanches et une noire seroit o; si trois blanches et une noire, elle seroit $\frac{4\cdot 3^3\cdot 1}{4^4}=\frac{108}{256}$; si deux blanches et deux noires, $\frac{4\cdot 2^3\cdot 2}{4^4}=\frac{64}{256}$; si une blanche et trois noires $\frac{4\cdot 1^3\cdot 3}{4^4}=\frac{12}{256}$; et o, s'il y en avoit eu quatre noires. On trouve, en ajoutant les numérateurs de ces fractions, 184 combinaisons également possibles qui donnent l'évènement arrivé dans les différentes hypothèses, toutes également probables par la nature de la question. Donc, $\frac{1}{5}\cdot\frac{184}{256}$ exprimera le rapport que le nombre des combinaisons qui répondent au cas où l'on doit tirer trois boules blanches et une noire, a au nombre total. Et o, $\frac{1}{5}\cdot\frac{108}{256}$, $\frac{1}{5}\cdot\frac{64}{256}$, $\frac{1}{5}\cdot\frac{12}{256}$, o représenteront le même rapport pour les combinaisons qui appartiennent à chaque hypothèse sur le nombre des boules. Donc, puisque l'on a tiré trois boules blanches et une noire, les combinaisons qui répondent à cet évènement sont les seules possibles, et 184 représentant le nombre

total de ces combinaisons possibles, il y en aura 108 qui répondront à l'hypothèse de trois boules blanches et une noire; 64 à celle de deux noires et deux blanches; 12 à celle de trois noires et une blanche, et aucune aux deux autres hypothèses. La probabilité de la première hypothèse sera donc $\frac{108}{184}$; celle de la seconde $\frac{64}{184}$; celle de la troisième $\frac{12}{184}$. Elle doit être en effet comme le nombre des combinaisons qui appartiennent à cette hypothèse, et qui donnent le tirage arrivé, est au nombre total des combinaisons qui donnent ce tirage. Ces nombres sont réellement ceux des combinaisons qui appartiennent aux trois hypothèses relatives, l'une au rapport entre les boules qui sont dans l'urne, l'autre au rapport entre les boules tirées de l'urne, et ils expriment par conséquent la probabilité de l'un ou de l'autre de ces faits, suivant qu'on les suppose donnés ou incertains.

Si maintenant je demande la probabilité d'amener une boule blanche, en tirant une fois de plus, je dirai, dans la première hypothèse, cette probabilité seroit $\frac{3}{4}$: Dans la seconde elle seroit $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{4}$ dans la troisième. Mais la probabilité de la première est $\frac{108}{184}$, celle de la seconde $\frac{64}{184}$, celle de la troisième $\frac{12}{184}$. La probabilité d'avoir une boule blanche sera donc. $\frac{108}{184}\cdot\frac{3}{4}+\frac{64}{184}\cdot\frac{1}{2}+\frac{12}{184}\cdot\frac{1}{4}$ ou $\frac{116}{184}$; celle d'avoir une boule noire se trouveroit de même égale à $\frac{108}{184}\cdot\frac{1}{4}+\frac{64}{184}\cdot\frac{1}{2}+\frac{12}{184}\cdot\frac{3}{4}=\frac{68}{184}$, comme cela doit être, puisqu'on ne peut tirer qu'une boule blanche ou une boule noire, et qu'ainsi la somme de ces deux probabilités doit être égale à l'unité.

On voit comment, par le moyen des méthodes ci-dessus, on pourroit déterminer de même la probabilité de tirer dans la même hypothèse, sur un nombre donné de boules, tel nombre de blanches et de noires. Il n'y a ici aucune supposition, excepté celle de regarder comme constant le rapport des boules blanches et noires qui sont déposées dans l'urne.

On peut imaginer à présent que, conservant cette même supposition, on ignore de plus le nombre des boules contenues dans l'urne, de manière que le rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules, puisse être également exprimé par tous les nombres, depuis zéro jusqu'à l'unité.

Cette supposition qui consiste à regarder comme *également possibles* les différens rapports entre ces deux nombres, est ici légitime, puisque, d'après la nature de la question, je suis dans une ignorance absolue sur ce rapport; et la seule donnée que j'aie pour évaluer la probabilité qu'il soit plutôt exprimé par un nombre que par un autre, dépend de l'observation des tirages successifs.

Cela posé, imaginons toujours que l'on ait tiré trois boules blanches et une noire; que x soit en général le rapport supposé entre le nombre des boules blanches et le nombre

total, ou la probabilité d'avoir une boule blanche; $1-x$ sera le rapport du nombre des boules noires au nombre total, ou la probabilité d'avoir une boule noire; la probabilité d'avoir trois boules blanches et une noire; ou, ce qui revient au même, celle que le rapport est x, sera exprimée par $4x^3 . \overline{1-x}$; et celle de tirer une boule blanche de plus sera $4x^4 . \overline{1-x}$, comme celle de tirer une boule noire de plus sera $4x^3 . \overline{1-x}^{\,2}$. Maintenant puisque l'on a tiré trois blanches et une noire, le nombre de toutes les combinaisons possibles qui amènent cet évènement, sera exprimé par la somme de toutes les quantités $4x^3 . \overline{1-x}$, en supposant que l'on ait donné successivement à x toutes les valeurs, depuis zéro jusqu'à l'unité, ainsi qu'on peut le voir en généralisant le procédé que nous avons donné pour le cas où le nombre des hypothèses possibles est fini.

Il reste donc à trouver la valeur de la somme des quantités $4x^3 . \overline{1-x}$, $4x^4 . \overline{1-x}$, $4x^3 . \overline{1-x}^{\,2}$, pour toutes les valeurs de x, depuis 0 jusqu'à 1.

Pour parvenir à ces formules, nous chercherons en général la valeur moyenne de $x^m . \overline{1-x}^{\,n}$, x ayant toutes les valeurs pos-

sibles depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Pour cela, supposons qu'il n'y ait qu'un nombre p de valeurs de x qui soient a, $2a$, $3a \ldots\ldots pa$. On aura la valeur moyenne en prenant la somme de toutes ces valeurs de $x^m . \overline{1-x}^{\,n}$, et la divisant par p, ou, ce qui revient au même, en prenant la somme de toutes les valeurs de $ax^m . \overline{1-x}^{\,n}$, et la divisant par pa.

Supposons que

$$Ax^{m+1}\,\overline{1-x}^{\,n} + Bx^{m+2}\,\overline{1-x}^{\,n-1} + Cx^{m+3}\,\overline{1-x}^{\,n-2} \ldots\ldots$$

soit cette somme, pour une valeur quelconque de x; il est clair que, pour une valeur $x+a$, elle sera égale à la même formule dans laquelle on auroit mis $x+a$, au lieu de x; mais on auroit eu également cette valeur en ajoutant à la somme précédente le terme

$ax^m . \overline{1-x}^{\,n}$.

Nous aurons donc ;

$$A\,\overline{x+a}^{\,m+1} . \overline{1-x-a}^{\,n} + B\,\overline{x+a}^{\,m+2} . \overline{1-x-a}^{\,n-1} + C\,\overline{x+a}^{\,m+3} . \overline{1-x-a}^{\,n-2} \ldots\ldots$$

$$-Ax^{m+1} . \overline{1-x}^{\,n} + Bx^{m+2} . \overline{1-x}^{\,n-1} + Cx^{m+3} . \overline{1-x}^{\,n-2} \ldots\ldots = ax^m . \overline{1-x}^{\,n}.$$

Or, il est aisé de voir, en développant les produits indiqués, et se bornant aux termes qui multiplient a, que la première formule devient :

$$A\left(\overline{m+1}\,x^m\,\overline{1-x}^{\,n} - n . x^{m+1} . \overline{1-x}^{\,n-1}\right)a + A'a^2 + A''a^3 \ldots$$

$$+B\left(\overline{m+2}\,x^{m+1}\,\overline{1-x}^{\,n-1} - \overline{n-1} . x^{m+2} . \overline{1-x}^{\,n-2}\right)a + B'a^2 + B''a^3 \ldots$$

$$+C\left(\overline{m+3} . x^{m+2} . \overline{1-x}^{\,n-2} - \overline{n-2}\,x^{m+3} . \overline{1-x}^{\,n-3}\right)a + C'a^2 + C''a^3 \ldots$$

les A', A'', B', B'', C', C'', étant des fonctions de x, et ainsi de suite.

Egalant cette formule à $ax^m . \overline{1+x}^{\,n}$, et divisant par a, on a :

$$x^m\,\overline{1-x}^{\,n} = A . \overline{m+1}\,x^m\,\overline{1-x}^{\,n} + \left(B . \overline{m+2} - nA\right)$$

$$x^{m+1}.\overline{1-x}^{\,n-1}+\left(C.\overline{m+3}-B.\overline{n-1}\right)x^{m+3}$$

$$.\overline{1-x}^{\,n-2}\ldots+\left(A'+B'+C'\ldots\right)a$$

$$+\left(A''+B''+C''\ldots\ldots\right)a^2\ldots$$

Supposant donc que a soit plus petit qu'aucune quantité donnée, ou égal à zéro, il est clair que cette dernière partie de la formule disparoîtra, et qu'en faisant

$$A=\frac{1}{m+1},\ B=\frac{nA}{m+2}=\frac{n}{\overline{m+1}.\overline{m+2}},$$

$$C=\frac{n-1}{B.\overline{m+3}}=\frac{n.\overline{n-1}}{\overline{m+1}\,\overline{m+2}.\overline{m+3}},\text{ etc.},$$

toute la formule se réduira à $x^m.\overline{1-x}^{\,n}$.
Donc, la valeur cherchée se réduira à

$$\frac{x^{m+1}.\overline{1-x}^{\,n}}{m+1}+\frac{n\,x^{m+2}.\overline{1-x}^{\,n-1}}{\overline{m+1}.\overline{m+2}}$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}}{\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}}x^{m+3}.\overline{1-x}^{\,n-2}\ldots\ldots$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\ldots.1}{\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots.\overline{m+n+1}}x^{m+n+1}$$

quantité qu'il faut diviser par pa ou par la dernière valeur de x.

Soit donc 1 cette dernière valeur; toute la formule précédente se réduit à:

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\ldots.1}{\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots.\overline{m+n+1}}$$

Nous avons supposé la forme précédente à la valeur de la somme des $ax^n.\overline{1-x}^{\,m}$; on auroit pu encore lui en donner une autre, telle que celle-ci:

$$Ax^{m+1}+Bx^{m+2}+Cx^{m+3}\text{ etc.}$$

Mais nous avons préféré la première comme plus commode pour l'usage que nous nous proposons d'en faire. Au reste, on s'assureroit aisément qu'il n'y a que ces deux formes qu'on puisse prendre pour la valeur cherchée, parce qu'il n'y a que dans celles-là qu'on peut obtenir la valeur des coefficiens A, B, etc. indépendamment de celle de x.

Si on substitue, dans la formule précédente, 1 à la place de n, et 3 au lieu de m, elle deviendra $\frac{1}{4.5}$ pour la somme des quantités $x^3\overline{1-x}$, et $4.\frac{1}{4.5}$ pour $4x^3.\overline{1-x}$. Par la même raison, la somme des quantités $4x^4\overline{1-x}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, de-

viendra $4.\frac{1}{5.6}$. La probabilité d'avoir une boule blanche de plus se trouvera en divisant ce dernier nombre par le nombre total de combinaisons $4.\frac{1}{4.5}$, et on aura $\frac{4}{6}$ pour la probabilité cherchée. Si on avoit demandé la probabilité de tirer une boule noire de plus, il auroit fallu trouver la somme des quantités $4x^3\overline{1-x}^{\,2}$ qui est $4.\frac{2}{4.5.6}$, et la diviser par le nombre total des combinaisons $4\frac{1}{4.5}$; on auroit donc $\frac{2}{6}$. On remarquera que la somme des probabilités de ces deux évènemens seuls possibles, est égale à l'unité, ainsi que cela doit être.

On peut être étonné de trouver ici le nombre des combinaisons exprimé par une fraction; mais il est facile de voir que, dans le cas actuel, ce nombre est précisément celui des combinaisons qui répondent à l'évènement du tirage, et que le nombre total des combinaisons est supposé égal à l'unité, puisque x, au lieu de désigner le nombre des boules, désigne le rapport de ce nombre au nombre total.

On pourroit demander ici quelle est la probabilité que x ait une certaine valeur

déterminée $\frac{1}{2}$, par exemple; mais il faut observer que le rapport du nombre de combinaisons pouvant être exprimé par toutes les valeurs, depuis 1 jusqu'à 0, le nombre de ces valeurs est plus grand qu'aucun nombre donné, et qu'ainsi la valeur de $x^3.\overline{1-x}$, par exemple, quand x est $\frac{1}{2}$, n'est pas $\frac{1}{2^4}$; mais $\frac{1}{2^4}$ divisé par ce nombre plus grand qu'aucun nombre donné. La probabilité que ce rapport a une valeur déterminée, est donc nécessairement nulle par rapport à la somme totale de ces probabilités. Mais si on cherche la probabilité qu'il soit plutôt l'un que l'autre, $\frac{2}{3}$ plutôt que $\frac{1}{2}$, par exemple, on trouvera, en suivant les principes exposés ci-dessus, que ces deux probabilités sont entre elles comme $\frac{2^3}{3^4}$ à $\frac{1}{2^4}$, et qu'ainsi la probabilité que x est plutôt $\frac{2}{3}$ que $\frac{1}{2}$, sera $\frac{128}{209}$.

Si on veut savoir s'il est plus probable que x est au dessus de $\frac{1}{2}$ qu'au dessous, il faudra prendre les valeurs de $x^3.\overline{1-x}$, d'abord depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, et ensuite depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0; on aura cette seconde valeur, en mettant dans l'expression de la somme des quantités $x^m \overline{1-x}^n$, trouvée plus haut, 3 au lieu de m, 1 au lieu de n, et $\frac{1}{2}$ au lieu de x, et la première en retranchant la seconde de la valeur trouvée ci-dessus. Ainsi le premier nombre sera $\frac{2}{4 \cdot 5}\left(1-\frac{1}{5}\right)$,

et le second, $\frac{2}{4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5}$; les deux probabilités seront donc exprimées par $\frac{31}{32}$ et $\frac{1}{32}$.

Sortons maintenant de cet exemple particulier; il est clair que les mêmes raisonnemens s'appliqueront à tous ceux qu'on voudroit choisir. Supposons donc que l'on ait tiré n boules blanches et m noires; le nombre total des combinaisons qui donnent cet évènement, sera, d'après les formules précédentes :

$$\left(\frac{\overline{m+n} \cdot \overline{m+n-1} \ldots \overline{m-n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \ldots 1}{\overline{m+1} \cdot \overline{m+2} \cdot \overline{m+3} \ldots \overline{m+n+1}},\right)$$

et le nombre de combinaisons qui amènent une boule blanche de plus :

$$\left(\frac{\overline{m+n} \cdot \overline{m+n-1} \ldots \overline{m-n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.\right)$$
$$\left(\frac{\overline{n+1} \cdot n \cdot \overline{n-1} \ldots 1}{\overline{m+1} \cdot \overline{m+2} \ldots \overline{m+n+2}}\right)$$

on aura donc la probabilité de tirer une boule blanche de plus, exprimée par $\frac{n+1}{m+n+2}$. On trouvera de même celle d'avoir une boule noire de plus, exprimée par $\frac{m+1}{m+n+2}$.

Si on demandoit la probabilité d'avoir p boules blanches et q de noires dans $p+q$ tirages, il faudroit chercher la somme des quantités,

$$\frac{\overline{p+q} \cdot \overline{p+q-1} \ldots \overline{p+1}\, x^{n+p} (1-x)^{m+q}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q \cdot x^n \cdot \overline{1-x}^m}$$

et on trouveroit celle de $x^{n+p}(1-x)^{m+q}$ en mettant $n+p$ à la place de m, et $m+q$ à la place de n, divisant par celle de $x^n \cdot \overline{1-x}^m$, et multipliant par le coefficient

$$\frac{\overline{p+q} \cdot \overline{p+q-1} \text{ etc.}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ etc.}},$$

on aura pour la probabilité cherchée :

$$\left(\frac{\overline{p+q} \cdot \overline{p+q-1} \ldots \overline{p+1}}{1 \cdot 2 \ldots q}\right)$$
$$\left(\frac{\overline{m+1} \cdot \overline{m+2} \ldots \overline{m+p} \cdot \overline{n+1} \cdot \overline{n+2} \ldots \overline{n+q}}{\overline{m+n+2} \ldots \overline{m+n+p+q+1}}\right)$$

Nous observerons ici deux choses :

1°. Que nous n'avons rien ajouté jusqu'ici au sens du mot de probabilité, puisque nous avons toujours désigné par ce nom le rap-

port du nombre des évènemens qui remplissent une certaine condition, au nombre total des évènemens également possibles dans l'hypothèse particulière que l'on considère. Ainsi dans ce cas, où nous ignorons le nombre des boules et le rapport des nombres de celles de chaque couleur, la probabilité est une espèce de probabilité moyenne dont la valeur est prise entre celle des probabilités qui conviennent à chaque hypothèse de rapport entre ces nombres, et cette valeur moyenne n'est pas prise arbitrairement ou d'une manière hypothétique, mais seulement d'après la définition primitive de la probabilité.

2°. Que la théorie que nous venons d'exposer peut déja nous servir à rectifier une expression de l'usage commun. On dit également : Il y a cinq à parier contre un que telle chose arrivera, soit que l'on parle d'un évènement dont la probabilité est $\frac{1}{6}$, comme lorsque jetant un dé de six faces, cet évènement est de ne pas amener un tel nombre de points déterminé, ou bien de ne pas amener un doublet au trictrac; soit que l'on parle d'un évènement que l'on sait être arrivé cinq fois contre une dans r évènemens, comme lorsqu'on dit qu'il y a cinq à parier contre un qu'un homme de 47 ans vivra au-delà de 54. Cependant cette dernière expression signifie seulement que l'on a observé qu'il mouroit un sixième des hommes de 47 ans, avant d'en avoir atteint 54.

Or, il est aisé de voir que l'on désigne par la même expression deux choses non-seulement différentes par leur nature, mais inégales entre elles, puisque, dans le premier cas, la probabilité est réellement $\frac{5}{6}$, et qu'il s'agit d'une probabilité absolue, tandis que dans le second c'est une probabilité moyenne que l'on obtient, et elle est exprimée par $\frac{5r+1}{6r+2}$, quantité plus petite que $\frac{5}{6}$.

Cette expression ne peut être admise dans le langage que dans le cas où r étant très-grand, les deux probabilités sont sensiblement égales, et elle ne s'y est introduite que par la raison qu'avant de savoir calculer les probabilités de cette dernière espèce, on supposoit, lorsqu'on vouloit calculer d'après les évènemens passés la probabilité des évènemens futurs, qu'ils observeroient entre eux le même ordre, ou du moins auroient entre eux le même rapport, quant aux nombres.

ARTICLE IV.

De la nature des vérités auxquelles peut conduire le calcul des probabilités.

Jusqu'ici nous n'avons considéré dans la probabilité qu'une notion absolument abstraite : elle n'est pour nous que le rapport du nombre des évènemens qui remplissent une certaine condition, au nombre total de ceux qui ont été supposés également possibles; et tout ce que nous avons dit s'est réduit à donner la méthode de trouver ce rapport dans différentes hypothèses. L'égale possibilité des évènemens n'a été pour nous que l'ignorance absolue des causes qui peuvent déterminer un évènement plutôt qu'un autre. Enfin cette définition a supposé encore l'ignorance de l'évènement que l'on considère, soit que cette ignorance naisse de l'impossibilité où nous sommes de connoitre les évènemens futurs, soit que l'évènement étant actuel ou passé nous soit inconnu par d'autres causes.

La première considération qui se présente en examinant cette définition, c'est qu'il n'y a aucun rapport direct et nécessaire entre la probabilité d'un evèment et sa réalité. Il y a dans une urne 10000 billets blancs et un noir; j'ai tiré un de ces billets, mais je l'ai pas ouvert. La probabilité que le billet est noir sera $\frac{1}{10001}$; celle que le billet est blanc, sera $\frac{10000}{10001}$. Cependant il est déja certain qu'il est blanc, ou certain qu'il est noir. Un homme qui l'auroit ouvert, seroit assuré qu'il est blanc, ou le seroit qu'il est noir. Un évènement réel, un évènement dont un autre homme est assuré, peut donc être pour moi un évènement dont la probabilité est très-petite.

Cependant

Cependant lorsque l'on dit, dans le langage ordinaire, qu'un évènement est plus probable qu'un autre, ou qu'il est seulement probable, (ce qui signifie alors que sa probabilité est considérablement plus grande que celle de la non-existence de cet évènement); on entend autre chose que ces simples propositions : le rapport du nombre des cas où cet évènement arrive, au nombre total des cas possibles, est plus grand que le rapport du nombre des cas où il n'arrive pas, à ce même nombre total, ou bien ce premier rapport est exprimé par une fraction beaucoup plus grande qu'un demi. En essayant de donner un sens précis à cette expression, qui, dans l'usage commun, n'a qu'un sens très-vague, en analysant les idées confuses qui se présentent à nous, lorque nous prononçons ces propositions, nous trouverons que nous y renfermons les trois opinions suivantes :

1°. Que si la probabilité d'un évènement *A* est plus grande que celle de l'évènement contradictoire *N*, nous avons un motif de croire que l'évènement *A* arrivera, plutôt que de croire qu'il n'arrivera pas.

2°. Que plus cette probabilité de *A* l'emporte sur celle de *N*, plus ce motif doit être puissant.

3°. Qu'il croît proportionnellement à cette probabilité.

Or, la vérité de la troisième proposition dépend de celle de la première. En effet, soit

le nombre total des combinaisons possibles exprimé par $n+m$; que n combinaisons produisent l'évènement *A*, et m combinaisons l'évènement *N*, la probabilité de *A* sera $\frac{n}{n+m}$, et celle de $N\ \frac{m}{n+m}$, n étant plus grand que m. Supposons ensuite que je répète un certain nombre de fois ce jugement : *l'évènement aura lieu*, je dis que je puis avoir une probabilité aussi grande qu'on voudra, qu'en multipliant le nombre de ces jugemens, le rapport de celui des jugemens vrais à celui du nombre total des jugemens sera entre $\frac{n+a}{n+m}$, et $\frac{n-a}{n+m}$, la quantité a étant une aussi petite quantité qu'on voudra. Si donc une probabilité très-grande me donne un motif suffisant de croire que l'évènement qui a cette probabilité arrivera, j'aurai un motif de croire que, dans un nombre très-grand de jugemens, le nombre de ceux où j'aurai rencontré la vérité, en jugeant que *A* doit arriver, sera au nombre de ceux où je me serai trompé, à peu près dans le même rapport que celui de $\frac{n}{n+m}$ à $\frac{m}{n+m}$. Je pourrai donc regarder le motif de juger que *A* aura lieu, plutôt que de juger qu'il n'aura pas lieu, comme proportionnel à $\frac{n}{m+n}$.

Maintenant, pour prouver qu'il existe une probabilité toujours croissante que le nombre

des évènemens *A* sera au nombre total des évènemens dans un rapport plus petit que $\frac{n+a}{n+m}$ et plus grand que $\frac{n-a}{n+m}$, il suffira de développer la quantité $(n+m)^{pq.(n+m)}$ suivant la formule du binome, et on trouvera:

1°. que le terme moyen répondant à $n^{pqn}\ m^{pqm}$, est le plus grand de toute la série; 2°. que q étant un nombre aussi petit qu'on voudra, on pourra prendre p assez grand pour que la somme de $q\ (m+n)$, termes pris dans le milieu de la série, depuis $n^{pqn+qn}\ m^{pqm-qn}$ jusqu'à $n^{pqn-qm}\ m^{pqm+qm}$, soit à la somme du reste des termes dans un rapport aussi grand qu'on voudra; ce qui se voit en supposant que le reste est divisé en $q\ (m+n)$ séries de $p-1$ termes, et en comparant chacune de ces séries avec un terme pris dans celle des $q\ (n+m)$, termes moyens.

La vérité de la seconde supposition est encore une suite de la première. En effet, supposons que $m+n$ restant le même, les probabilités de l'évènement *A* soient $\frac{n}{n+m}$, $\frac{n'}{n+m}$, $n'>n$; il est clair que si je répète un certain nombre de fois le jugement : *A arrivera*, j'aurai une très-grande probabilité de ne me tromper, par exemple, qu'une fois sur dix, pour la première valeur $\frac{n}{n+m}$ de la probabilité, et pour la seconde valeur, une probabilité égale de ne me tromper qu'une fois sur onze, par exemple, pour la seconde valeur, $\frac{n'}{n+m}$ de la probabilité. J'aurai donc un motif de croire que je me tromperai moins souvent dans le second cas que dans le premier, et par conséquent un motif plus fort dans le second de juger que A doit arriver.

Enfin, on prouvera de même que, dès que $n>m$, j'aurai une probabilité toujours croissante que A arrivera plus souvent que N sur un certain nombre d'évènemens. Donc, si cette probabilité est un motif de croire que A arrivera plus souvent, j'aurai un même motif de croire que je me tromperai moins souvent en jugeant que A doit arriver, et par conséquent un motif de juger que A doit arriver.

Ce que nous avons dit ici pour le cas où le nombre des combinaisons possibles et celui des combinaisons qui amènent l'évènement, sont donnés, *à priori*, peut également s'appliquer à l'hypothèse où l'on n'a qu'une probabilité moyenne déduite de l'observation des évènemens passés; mais alors les conclusions ci-dessus ne sont vraies dans toute leur rigueur, qu'en supposant que l'on puisse avoir un nombre de ces observations aussi grand

qu'on voudra; mais cette supposition n'altère point la vérité de ces conclusions prises dans un sens général.

Il ne nous reste donc qu'à chercher si nous avons un motif de croire à la réalité d'un évènement dont la probabilité est très-grande, et ne diffère de l'unité que d'une quantité aussi petite qu'on voudra.

Pour cela, supposons que d'un sac qui peut contenir des boules blanches et des boules noires, on ait tiré de suite un milliard de boules blanches, en remettant à chaque fois celle qu'on a tirée, pour que le rapport des boules blanches aux boules noires soit constant, et qu'on demande la probabilité de tirer un boule blanche de plus; cette probabilité sera exprimée par $\frac{1{,}000{,}000{,}001}{1{,}000{,}000{,}002}$. Or, il est aisé de voir que le motif de croire dans ce cas qu'on tirera encore une boule banche, est précisément le même que celui qui nous porte à croire qu'un phénomène constamment observé se reproduira dans des circonstances semblables. Ce motif de croire qu'un évènement très-probable arrivera est donc le même que celui qui nous fait croire à la constance des lois de la nature.

On peut observer de plus qu'il est assez habituel, assez puissant sur nous pour se confondre quelquefois avec nos sensations. En effet, lorsqu'appercevant deux hommes, l'un à six pieds de moi, l'autre à trois, je les vois d'une

égale grandeur; lorsqu'en roulant une boule entre deux doigts croisés, je sens deux boules bien distinctes; lorsqu'appercevant deux images d'un objet placées l'une sur l'autre, je vois l'image supérieure comme plus reculée; lorsque regardant la lune à travers des nuages légers, elle me paroît se mouvoir, ces sensations sont-elles autre chose que les jugemens suivans? Toutes les fois que deux hommes placés à des distances inégales ont excité en moi la même sensation que j'éprouve, ils étoient sensiblement égaux en grandeur (*a*); toutes les fois que j'ai éprouvé deux sensations simultanées aux deux côtés extérieurs de deux doigts voisins, elles étoient causées par deux corps différens; de deux corps séparés qui paroissent au-dessus l'un de l'autre, le plus élevé est constamment le plus éloigné; et pour la dernière sensation, le corps le plus éclairé est le plus voisin de moi, et le plus petit est naturellement celui qui doit se mouvoir.

On voit ici que ces sensations, dans le premier cas, renferment un jugement vrai,

(*a*) C'est par la même raison que nous voyons un bœuf plus grand qu'un mouton, quoique placés à des distances telles que l'image du mouton dans l'œil est plus grande que celle du bœuf. Cette habitude de voir comme grands les objets éloignés, lorsque par leur forme on juge qu'ils doivent être grands, ne se forme qu'au bout d'un certain temps. L'auteur de cette addition se souvient parfaitement d'un temps où il n'avoit pas encore pris cette habitude, et où un bœuf, d'un peu loin, lui paroissoit un objet très-petit.

fondé sur les expériences passées, et que, dans les autres cas, elles nous trompent. Alors un jugement déduit d'observations plus exactes, et qui est également fondé sur la constance des lois de la nature, corrige celui qui s'étoit mêlé avec la sensation; nous lui donnons la préférence; mais comme nous avons plus rarement occasion d'en former de cette espèce, ce motif de croire n'exerce point sur nous cette force, pour ainsi dire, machinale, en vertu de laquelle ces jugemens, dont nous n'avons pas une conscience distincte, se confondent avec nos sensations.

La persuasion si forte que nous avons de l'existence des corps, n'est elle-même fondée que sur un motif du même genre. Car la permanence constante des corps, c'est-à-dire, la constance, la régularité des phénomènes qu'ils nous présentent, est véritablement le motif qui nous porte à croire leur réalité, c'est-à-dire, à croire à cette permanence, même dans le temps où nous ne pouvons pas l'observer.

Il y a plus encore; si je suis une démonstration un peu compliquée, il est clair qu'à l'exception de la proposition de l'identité de laquelle avec une autre proposition précédente j'ai la conscience immédiate, je ne puis croire la liaison de cette première proposition avec les précédentes, ni par conséquent la vérité de la conclusion, que parce que je me rappelle que j'ai eu la conscience intime de cette liaison. Je ne crois donc à cette vérité que parce que je me souviens d'avoir eu cette conscience. Or, quel motif ai-je de croire que ce souvenir ne me trompe point, sinon parce que j'ai éprouvé que si, me souvenant d'avoir successivement eu la conscience intime de la vérité des différentes propositions qui forment une démonstration, et de leur liaison, je voulois suivre de nouveau cette démonstration, j'avois de nouveau la conscience intime de la vérité de toutes ces propositions et de leur liaison.

Il résulte donc de cette analyse de nos jugemens, que le motif de croire aux faits dont nous connoissons seulement la probabilité, est le même qui nous porte à croire les vérités d'après lesquelles nous agissons, nous réglons notre conduite, nous raisonnons dans les sciences, dans les mathématiques mêmes, si on en excepte les vérités dont nous avons actuellement la conscience.

Mais il faut faire ici une distinction. Dans le premier cas, lorsque nous employons les motifs de certitude mathématique ou physique, la probabilité n'a pas été calculée; nous savons seulement qu'elle ne diffère de la certitude que d'une quantité inappréciable, et nous obéissons à la force irrésistible qui nous porte à croire, sans songer à la nature de ce motif. Dans les cas au contraire où l'on

emploie le calcul des probabilités, cette probabilité est déterminée; on sait à quel motif on cède en jugeant d'après elle; le motif agit avec une force moins sensible, parce qu'on y cède volontairement et par réflexion, et l'on éprouve entre ces deux états une différence analogue à celle que nous éprouvons entre celui où l'on obéit à son premier mouvement, et celui où l'on suit volontairement le choix de la raison, entre un desir non réfléchi, et celui que nous éprouvons pour un objet dont nous examinons l'importance pour notre bonheur.

Si on cherche à pénétrer plus avant pour connoître quel est précisément ce motif qui nous porte à croire, il paroît qu'on doit le regarder comme un sentiment naturel, comme une suite nécessaire de la constitution d'un être sensible. Ce qui semble le prouver en quelque sorte, c'est que la force de ce motif dépend non-seulement de la constance, et par conséquent de la répétition plus fréquente des mêmes impressions, d'où résulte une plus grande probabilité, mais aussi de l'intensité de ces impressions, quoiqu'elle n'influe pas sur la probabilité. La raison et l'experience paroissent nécessaires pour nous instruire à nous défendre contre cette force, lorsqu'elle tient à l'intensité des impressions; de même que la raison et l'expérience nous apprennent à ne pas juger, à ne pas nous conduire d'après des sensations trompeuses.

Nous permettra-t-on d'observer ici que cette théorie métaphysique, qui ne pouvoit être connue avant la découverte du calcul des probabilités, offre la seule réponse solide que l'on puisse faire aux subtilités du pyrrhonisme.

En effet, elle prouve que la difficulté de démontrer l'impossibilité rigoureuse de se tromper dans ses jugemens, ne doit pas détruire nos motifs de croire; et que de plus, ces motifs, loin d'être tout-à-fait incertains, lorsque nous ne pouvons atteindre à la certitude absolue, sont susceptibles d'être soumis à une mesure précise et calculée.

Revenons maintenant au calcul des probabilités. Nous voyons qu'il nous offre deux ordres de vérités bien distinctes. Les premières sont des vérités purement mathématiques. Telles sont celles-ci : la probabilité réelle de tel évènement est égale à telle fraction de l'unité; la probabilité moyenne de tel évènement, déduite de l'observation d'évènemens du même genre, est exprimée par telle formule. Les secondes sont des vérités réelles et physiques, telles que celle-ci: l'évènement *A* ayant une probabilité plus grande que l'évènement *N*, je dois juger que le premier arrivera plutôt que l'autre, je dois me conduire plutôt en supposant qu'il doit arriver, qu'en supposant que l'évènement contraire aura lieu; ou bien celle-ci: la probabilité que cet évènement est arrivé ou

arrivera est très-grande, et je crois en conséquence qu'il est arrivé ou qu'il arrivera.

Ainsi l'on voit qu'il se présente encore ici deux espèces de vérités. Les premières consistent seulement à déterminer ce qui doit arriver le plus probablement, pour déduire des différens degrés de probabilité les règles de nos jugemens et de notre conduite : les secondes consistent à déterminer, d'après certains degrés de probabilité, regardés comme suffisans, les propositions que nous devons regarder comme vraies. Par exemple, dans une partie de trictrac, la position du jeu une fois donnée, le calcul des probabilités prescrit les règles qu'on doit suivre pour avoir une espérance plus fondée de gagner, et une moindre crainte de perdre; c'est une des vérités de la première espèce; et l'on voit qu'il n'en résulte pas cette vérité absolue, *je gagnerai*; et la probabilité de gagner peut, dans ce cas, n'être pas très-supérieure à celle de perdre, sans rien changer à la conséquence pratique qu'on en déduit. Mais si je fais une telle action qui n'est accompagnée d'aucun danger, c'est-à-dire, qu'un très-grand nombre d'hommes ont faite sans éprouver d'accident, cette proposition, *il ne m'en arrivera de même aucun accident*, est regardée comme vraie, parce qu'elle a une très-grande probabilité; elle cesse d'être regardée comme telle, si cette probabilité n'est pas très-grande.

Il y a de plus une classe intermédiaire de propositions dont les limites sont très-vagues; ce sont celles que, dans le langage ordinaire, on est convenu d'appeler probables.

Ces distinctions sont nécessaires, et on ne doit point prendre indifféremment pour base de sa conduite l'une ou l'autre de ces vérités.

Ainsi, par exemple, si je suis engagé dans une partie de jeu, je dois prendre la manière de jouer de laquelle il resulte pour moi une plus grande probabilité de gagner la partie. Si de deux chemins d'une égale longueur, l'un est exposé à un peu plus de danger que l'autre, je dois éviter de le prendre. Dans ces circonstances et dans tous les cas semblables, une très-petite probabilité doit me déterminer.

Il y a d'autres circonstances de la vie, où nous ne nous décidons à prendre un parti que dans le cas où le succès est probable, dans le cas où nous avons une probabilité assez forte de ne pas nous tromper; et ce sont ceux où le défaut de réussite où l'erreur nous exposeroit à des accidens assez graves, mais cependant n'entraîneroit ni notre ruine, ni la perte de la vie, ni une action injuste. C'est ce qui arrive à la plupart des hommmes dans les actions communes qui n'ont pas une très-grande importance. Tels sont encore la plupart de nos jugemens sur les choses livrées à l'opinion.

Enfin, il y a des circonstances où nous ne pouvons suivre un parti que lorsque la pro-

position, dont la croyance est pour nous un motif d'agir, a ce degré de probabilité qui nous fait prononcer que nous sommes sûrs. Par exemple, nous ne nous exposons pas à perdre la vie pour un léger intérêt, à moins que la probabilité du danger ne soit si petite, qu'on puisse la regarder comme nulle, et que nous ne soyons assurés d'y échapper. Il en est de même, si de notre opinion sur la vérité d'un fait, peuvent résulter ou la mort ou la ruine d'un autre homme, si notre erreur nous expose à commettre une véritable injustice.

C'est encore cette espèce de probabilité qu'on a droit d'exiger pour regarder comme vraie une théorie scientifique, pour croire aux résultats d'une expérience et à la vérité d'une observation.

Nous pouvons remarquer de plus qu'il y a certaines circonstances où l'on prend le parti le moins probable; ce qui ne signifie pas qu'on le regarde comme plus probable, mais qu'on croit devoir se conduire de manière à trouver son avantage dans le cas où l'évènement le moins probable arrive. C'est ce qui a lieu seulement lorsque l'évènement le plus probable, celui que raisonnablement on doit attendre plutôt que l'autre, ne nous fera éprouver qu'une perte, ou un mal très-foible, tandis que, dans le cas où l'évènement le moins probable arriveroit, nous en tirerions un grand avantage. C'est ainsi qu'on

met une petite somme à une loterie formée d'un grand nombre de billets, dans l'espérance d'avoir un lot considérable; qu'au jeu on s'expose à des risques, dans l'espérance d'un gain très-grand, lorsque ce risque ne peut entraîner qu'une perte légère; et l'on sent qu'il peut très-bien arriver que cette conduite ne doive pas être regardée comme imprudente.

Maintenant on peut remarquer ici que la manière dont nous devons régler notre conduite, d'après les résultats du calcul des probabilités, ne dépend pas uniquement du degré de probabilité des évènemens, mais aussi de leur nature et de leur importance par rapport à nous.

On voit donc qu'il peut être nécessaire de comparer entre eux des évènemens de probabilités différentes et de différente importance; qu'une même détermination de notre part peut entraîner un grand nombre de ces évènemens, et qu'ainsi pour connoître les avantages ou les désavantages de cette détermination, et les comparer à ceux de la détermination contradictoire, il faut en chercher des valeurs moyennes et susceptibles d'être comparées avec ces évènemens inégaux, et inégalement probables.

Cette discussion doit encore précéder ici l'application du calcul des probabilités.

Les principes exposés ici nous deviendront nécessaires dans plusieurs applications utiles

du calcul des probabilités. Ainsi nous nous bornerons maintenant à montrer comment on peut les employer à l'examen d'un grand nombre d'opinions souvent discutées, sur lesquelles le pour et le contre ont été soutenus avec une égale force, mais qui cependant doivent rester incertaines jusqu'à ce que la théorie du calcul des probabilités ait montré si le doute est le seul parti raisonnable, ou laquelle des deux opinions contradictoires a pour elle des motifs suffisans de crédibilité.

Par exemple, on a disputé souvent pour savoir si une telle nation étoit plus propre qu'une autre à former des artistes, des poètes, des savans, des hommes de génie; si la pauvreté, la médiocrité, la supériorité de la fortune et du rang, sont favorables ou contraires au développement des talens; jusqu'à quel point on doit regarder les succès dans les premières études comme un signe d'une véritable supériorité.

On voit que pour résoudre de telles questions, il faut consulter l'expérience, et que pour en tirer des conséquences, il faut avoir recours au calcul des probabilités.

Les principes de ce calcul nous apprendront; 1°. que ce n'est pas d'après le nombre absolu des hommes, qui, dans chaque classe, remplissent le but proposé, mais d'après le rapport de ce nombre au nombre total de ceux qui forment chaque classe, qu'on peut apprécier les avantages ou les désavantages de chacune d'elles ; 2°. que si, au lieu de considérer les questions de ce genre dans leur généralité, on veut examiner séparément les effets de chaque cause dont on regarde l'influence comme possible, il faut prendre, au lieu du nombre total de chaque classe, celui des hommes de chacune d'elles sur lesquels les autres causes agissent également, et qui ne diffèrent que relativement à celle dont on veut examiner les effets ; 3°. que si ces rapports approchent de l'égalité, la probabilité qui résulte de l'observation est trop foible pour fonder une opinion, mais que, toutes choses égales d'ailleurs, on aura un motif d'autant plus grand d'en avoir une, que ces rapports seront plus éloignés l'un de l'autre ; 4°. qu'il est même possible que ces rapports approchent tellement de l'égalité, qu'il devienne très-probable que le désavantage ou l'avantage seront très-petits, et qu'alors on aura un motif suffisant de croire qu'il peut seulement exister entre les classes d'hommes que l'on compare, de très-petites différences, et qu'on doit en conséquence regarder comme nuls ou presque nuls, les effets des causes dont on cherchoit à déterminer l'influence.

Maintenant, pour déterminer ces probabilités par le calcul, on prendra la méthode suivante.

Soient les deux classes d'hommes à comparer désignées par A et B ; que dans la classe

A de $\overline{n+m}$ hommes, n remplissent la condition proposée ; que dans la classe B de $n'+m'$ hommes, n' remplissent cette condition, et que $\frac{n}{n+m} > \frac{n'}{n'+m'}$; la probabilité que dans un avenir indéfini le rapport du nombre des hommes de la classe B à leur nombre total sera entre z et o, sera exprimée (*art. III*) par la somme de $x^{n'} . \overline{1-x}^{m'}$ prise depuis $x = z$ jusqu'à $x = 0$, divisée par la même somme prise depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$: soit Z cette valeur ; Maisntenant si dans un avenir indéfini le rapport des hommes de la classe A, qui remplissent la condition à leur nombre total est z, il est clair que la formule précédente exprimera, pour ce cas, la probabilité de l'avantage de la classe A. La somme de $z^n . \overline{1-z}^m Z$, prise depuis $z = 1$ jusqu'à $z = 0$, et divisée par la somme de $z^n . \overline{1-z}^m$, prise de même depuis $z = 1$ jusqu'à $z = 0$, exprimera donc la probabilité que, dans un temps indéfini, la classe A produiroit, à proportion, plus d'hommes qui rempliroient la condition exigée, que la classe B, ou, ce qui revient au même, la probabilité de l'avantage de la classe A. (On trouvera facilement ces valeurs d'après les formules de l'article II.) Supposons que cette probabilité

soit $\frac{999}{1000}$, par exemple ; alors on diroit : il y a 999 à parier contre un, que, si les mêmes causes continuoient pendant un temps indéfini d'agir de la même manière, on auroit, à proportion, plus d'hommes remplissant la condition exigée dans la classe A que dans la classe B, et un motif suffisant de croire que cette classe a quelque avantage, à cet égard. Mais si cette probabilité étoit $\frac{11}{100}$, par exemple, alors l'avantage de A seroit trop peu probable pour donner un motif suffisant de le croire réel. On observeroit alors que ce n'est pas la même chose de n'avoir aucune raison suffisante de croire ni que A ait quelque avantage sur B, ni que B en ait sur A, ou d'avoir une raison de croire qu'il existe entre ces deux classes une égalité sensible. Pour savoir donc si cette dernière opinion est fondée, on déterminera d'abord ce qu'on doit entendre par une égalité sensible, par exemple, qu'on doit la regarder comme telle, pourvu que, si z est le rapport du nombre des hommes qui remplissent la condition dans la classe A au nombre total, ce rapport, pour la classe B soit entre $\frac{99}{100} z$ et $\frac{101}{101} z$. Pour déterminer cette probabilité, on chercheroit celle que, dans la classe B, ce rapport est entre $\frac{99}{100} z$ et $\frac{101}{100} z$, ce qu'on trouveroit en prenant (*art. III*) la somme de $x^{n'} . \overline{1-x}^{m'}$, depuis $x = \frac{9}{100} z$ jusqu'à $x = \frac{101}{100} z$, et la divisant par la somme de la même fonc-

tion, depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 0$. On appelleroit cette somme Z', et la somme de $z^n . \overline{1-z}^m Z'$ divisée par celle de $z^n . \overline{1-z}^m$, prises toutes deux, depuis $z = 1$ jusqu'à $z = 0$, donnera la probabilité cherchée, celle qu'une égalité sensible, telle qu'elle a été déterminée ici, existe entre les classes A et B.

Enfin, après avoir trouvé, par exemple, qu'il est très-probable que la classe A ait de l'avantage sur la classe B, si l'on a lieu de soupçonner que cet avantage est dû à une certaine cause, alors on choisira, dans la classe A et dans la classe B, ceux sur lesquels cette cause agit d'une manière semblable ou à peu près semblable ; on verra si la probabilité de l'avantage de A se réduit presque à rien, et alors on en pourra conclure que c'est à cette cause qu'il faut attribuer l'avantage observé. C'est ainsi, par exemple, qu'après avoir prouvé, d'après l'observation, qu'il est très-probable que, relativement au talent, les hommes ont de l'avantage sur les femmes, si l'on a considéré la somme totale des hommes et des femmes qui existent dans un pays ; on trouveroit que cette probabilité devient presque nulle, si on compare ou les hommes qui reçoivent une éducation suivie, avec le petit nombre de femmes qui ont reçu une éducation semblable, ou bien sur la masse totale les hommes et les femmes qui se sont illustrés sans le concours de l'éducation ; et alors il faudroit en conclure que cet avantage ne vient pas de la nature, mais de nos institutions.

On voit à combien de questions plus ou moins importantes la méthode précédente peut s'appliquer, et combien, par ce moyen, on termineroit de disputes dans lesquelles on a employé et l'on emploiera encore en pure perte beaucoup d'esprit et d'éloquence.

ARTICLE V.

Sur la manière de comparer entre eux des évènemens de probabilités différentes, et de trouver une valeur moyenne qui puisse représenter les valeurs différentes entre elles d'évènemens inégalement probables.

Les premières applications du calcul des probabilités eurent pour objet les jeux de hasard. Cette application n'étoit ni la plus importante ni la plus utile, mais elle étoit la plus simple; elle se présentoit la première. Pascal et Fermat furent les inventeurs de ce calcul; ainsi on le doit à des François. Cette remarque n'est pas inutile; elle peut servir à réfuter ceux qui se plaisent à répéter que la nature a refusé le don de l'invention, et n'accorde que celui de perfectionner aux hommes qui naissent entre Perpignan et Dunkerque.

Les premières questions que se proposèrent ces deux illustres géomètres, furent celles d'estimer le sort de deux joueurs qui avoient

une probabilité égale de gagner une somme donnée, et de partager une mise entre des joueurs qui ayant une espérance inégale de la gagner, dans l'état actuel du jeu, conviendroient ensemble de le quitter.

Ils trouvèrent que le sort des joueurs, la partie de la mise qui représente ce sort, et ce qu'on doit donner à chacun, s'ils conviennent de cesser de jouer, doivent être en raison de la probabilité de gagner la mise totale.

Supposons, par exemple, que deux joueurs A et B jouent en sept parties liées, de manière que la mise appartienne à celui des deux qui aura plus tôt gagné quatre parties; qu'ils en ayent déja joué trois; que A ait gagné deux parties, et B une seule. La probabilité de gagner ou de perdre une partie étant égale pour les deux joueurs, ces probabilités seront exprimées par $\frac{1}{2}$. Cela posé, supposons qu'on ait joué deux parties de plus, il y a une probabilité $\frac{1}{4}$ que A les gagneroit toutes deux, $\frac{1}{2}$ que A et B en gagneroient une chacun, $\frac{1}{4}$ que B les gagneroit toutes deux. Voilà donc une probabilité $\frac{1}{4}$ que A gagnera, une probabilité $\frac{1}{2}$ qu'il aura trois parties, et que B en aura deux, et une probabilité $\frac{1}{4}$ que A en aura deux, et que B en aura trois. Supposons que A ait eu trois parties, et B deux seulement, et qu'on en joue une de plus, on aura $\frac{1}{2}$ pour que A ait quatre parties, et $\frac{1}{2}$ pour qu'ils en ayent chacun trois; et comme la probabilité de

cette hypothèse est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ exprimeront donc les probabilités de ces évènemens; ce qui nous donne $\frac{1}{4}$ pour la probabilité que A gagnera, et $\frac{1}{4}$ pour celle qu'après la sixième partie, ils en auront chacun un nombre égal.

Supposons que A ait eu deux parties, et que B en ait eu trois, nous aurons encore, dans ce cas, une probabilité $\frac{1}{2}$ que A aura un nombre de parties égal à celui de B, et une probabilité $\frac{1}{2}$ que B gagnera. Mais la probabilité de cette hypothèse est $\frac{1}{4}$; donc les deux probabilités seront $\frac{1}{8}$; nous aurons donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ pour la probabilité que A auroit gagné après la sixième partie; $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ pour celle que les deux joueurs auroient été égaux $\frac{1}{8}$ pour celle que B auroit gagné. Mais si A et B ont chacun trois parties, leur probabilité de gagner est $\frac{1}{2}$ pour chacun. Celle de gagner la septième partie sera donc pour chacun $\frac{3}{8}.\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{16}$; et les probabilités, en faveur de A et de B, seront $\frac{11}{16}$ et $\frac{5}{16}$.

Si donc le fonds du jeu est 16 écus, par exemple, A doit alors en prendre 11, et B 5 seulement.

De cette première proposition il étoit aisé de conclure que, si deux hommes convenoient de jouer à un jeu inégal, leurs mises devoient être aussi en raison de la probabilité de gagner; puisque, s'ils rompoient la convention avant de jouer, ils auroient droit à des parties de la mise totale proportionnelles à cette probabilité.

Si on suppose que A ait une probabilité $\frac{5}{6}$ de gagner, et B une probabilité seulement $\frac{1}{6}$, la mise de A sera donc 5, et celle de B 1; mais si on joue, et que A gagne, son profit ne sera que 1, et si B gagne, son profit sera 5. Donc, a-t-on dit, pour jouer à jeu égal, il faut que les gains soient en raison inverse des probabilités. De même A ayant une probabilité $\frac{5}{6}$ de gagner 1, et une probabilité $\frac{1}{6}$ de perdre 5, $\frac{5}{6}-\frac{5}{6}$ ou 0 exprime le sort de A; il en est de même de celui de B; et ils n'ont donc ni l'un ni l'autre aucun avantage à jouer.

Supposons d'après cela qu'on veuille évaluer le sort d'un homme qui a un certain nombre de probabilités différentes d'obtenir des évènemens de valeurs différentes, il faudra multiplier la valeur de chaque évènement par sa probabilité; et en prenant la somme de ces produits, si quelques-uns de ces évènemens sont un avantage, et que les autres produisent un désavantage, les valeurs des uns seront positives, celles des autres seront négatives; et alors, si la somme est positive, elle exprime la valeur moyenne de l'avantage qui résulte de l'hypothèse; si elle est négative, elle exprime la valeur moyenne du désavantage qui résulte de la même hypothèse.

Cette méthode de prendre la valeur moyenne, fut d'abord généralement adoptée, parce que, dans les différentes applications qui en furent faites, elle ne conduisoit qu'à des résultats conformes à la raison commune. Mais un problème célèbre connu sous le nom de problème de Pétersbourg, fit naître sur la généralité de cette loi, des doutes qui, jusqu'ici, n'ont peut-être pas été absolument dissipés.

On suppose que A joue contre B *à croix ou pile*, à cette condition que, s'il amène pile au premier coup, il donnera une pièce à B; deux, s'il l'amène, au second coup; quatre, s'il l'amène au troisième; huit, s'il l'amène au quatrième, et ainsi de suite; et on demande quelle somme B doit donner à A avant le jeu, pour que leur sort soit égal. Si x est cette somme, il est clair qu'elle doit être égale à la valeur moyenne de ce que B peut gagner, en vertu de la convention. Or, il a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner 1, $\frac{1}{4}$ de gagner 2, $\frac{1}{8}$ de gagner 4, $\frac{1}{16}$ de gagner 8, et ainsi de suite. Le sort qui résulte de cette convention, sera donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ldots$. c'est-à-dire, un nombre de pièces plus grand qu'aucun nombre donné. Or, cette conclusion paroît absurde en elle-même. Supposons, en effet, que le nombre des coups possibles soit limité et exprimé par n, alors il est clair que cette somme est exprimée par $\frac{n}{2}$, en supposant que si pile n'est pas arivé au n^e. coup, B ne reçoive rien, et que si pile arrive à un coup m seulement B recevra

2^{m-1} pièces; il faut donc, pour que B commence à gagner, que $2^{m-1} > \frac{n}{2}$. Supposons en conséquence que $\frac{n}{2}$ soit 2^{10} · on auroit eu $m=11$, et pour B une probabilité seulement $\frac{1}{2^{11}}$ ou $\frac{1}{2^{n}}$ de ne pas perdre; si $\frac{n}{2}=2^{100}$ la probabilité de ne pas perdre seroit pour B $\frac{1}{2^{2^{100}}}$, et ainsi de suite, en sorte que si on suppose n plus grand qu'aucun nombre donné, il en résulte que B auroit donné une somme plus grande qu'une quantité donnée quelconque, pour acquérir une probabilité de gagner plus petite qu'aucune quantité donnée.

Enfin m est plus grand aussi, dans la même hypothèse, qu'aucune quantité donnée, puisque, quelque valeur déterminée qu'on suppose à m, dès que $\frac{n}{2}=2^{m-1}$, il s'ensuivroit que $\frac{n}{2}$ ne seroit pas alors plus grand qu'aucune quantité donnée, ce qui est contre l'hypothèse, et il en résulte que B ne pourroit

gagner qu'après un nombre de coups plus grand qu'aucun nombre donné, au bout d'un temps plus grand qu'aucun temps donné.

On se tromperoit, si l'on croyoit que cette idée d'une quantité plus grande qu'aucune quantité donnée est la seule cause de la difficulté que présente l'application de la règle à ce problême, et qu'ainsi on peut regarder cette difficulté comme une de ces conclusions paradoxales qui semblent appartenir à la métaphysique, et dont plusieurs parties de la géométrie donnent des exemples.

Prenons donc un cas qui puisse être réel. Supposons que la pièce prise ici pour l'unité soit un denier; que le nombre de coups soit borné à 36, de manière que B donne dixhuit deniers ou six liards. Pour pouvoir remplir toutes les conditions du jeu, il faudroit que A pût payer, quand même pile n'arriveroit qu'au trente-sixième coup; alors il devroit 2^{35} deniers qui font une somme de plus de 14316000 l.. Or, il est évident qu'aucun homme jouissant de cette fortune, qui auroit sa raison, ne consentiroit à jouer à un jeu où il ne peut gagner que 18 deniers, et où il s'expose à un danger, très-petit, à la vérité, mais à un danger réel de perdre sa fortune ou une partie considérable de sa fortune.

Nous allons donc chercher à examiner si l'on doit substituer une autre loi à celle qui a été adoptée jusqu'ici, ou la conserver, en distinguant les cas auxquels on doit l'appliquer.

J'observerai d'abord que cette loi est une conséquence du principe d'après lequel on prend une valeur moyenne. En effet, soient deux évènemens dont la probabilité est a et b, et la valeur A et B; la règle donne $aA+bB$ pour leur valeur moyenne. Supposons que a soit exprimé par $\frac{n}{n+m}$, et b par $\frac{m}{n+m}$, n et m étant des nombres entiers, nous aurons donc n évènemens également possibles dont la valeur est A, m évènemens également possibles dont la valeur est B, et par conséquent $aA+bB=\frac{nA+mB}{n+m}$ est la même chose que la somme des valeurs de tous les évènemens, divisée par leur nombre.

La règle ordinaire nous donne donc la véritable valeur moyenne d'évènemens de valeurs différentes et inégalement probables.

On peut distinguer deux espèces de valeurs moyennes; les premières destinées à représenter une valeur déterminée qui est inconnue, et dont il s'agit d'avoir une valeur aussi approchée qu'il est possible, pour l'employer à la place de la valeur vraie qu'on ignore, et qu'on est censé ignorer toujours; et, dans ce cas, la vraie valeur n'est pas nécessairement une des valeurs données par l'observation, et entre lesquelles on choisit une valeur moyenne. Supposons, par exemple, que j'emploie la méthode des hauteurs correspondantes pour déterminer l'heure que marque une pendule donnée au midi vrai. Une des observations me donnera, par exemple, midi plus deux minutes et vingt secondes; une autre, midi plus deux minutes et trente secondes; une troisième, midi plus deux minutes et quinze secondes; une quatrième, midi plus deux minutes et 27 secondes. Je prends la somme de ces valeurs, je la divise par 4, et j'ai, pour valeur moyenne, midi deux minutes plus vingt-trois secondes.

On peut supposer aussi qu'il y ait plusieurs valeurs déterminées possibles et différentes entre elles, et que la valeur moyenne cherchée ne soit pas regardée comme une valeur approchée, mais seulement comme une valeur équivalente dans certaines circonstances, quand même on seroit sûr qu'elle ne peut être égale à la vraie valeur, ni même en approcher; et dans ce cas, la vraie valeur est une de celles entre lesquelles on prend la valeur moyenne.

Par exemple, si on prend la valeur moyenne de la durée de la vie d'un homme d'un âge donné, en prenant la somme de la durée réelle des vies d'un grand nombre d'hommes de cet âge, et divisant cette somme par leur nombre, on n'a qu'une très-petite pro-

babilité que cette valeur moyenne exprime la durée réelle d'un indidu donné.

Si j'ai, dans un jeu quelconque, une probabilité $\frac{99}{100}$ de gagner 1, et une probabilité $\frac{1}{100}$ de perdre 99, la valeur moyenne de la perte et du gain est 0, et cependant l'évènement qui donneroit une valeur réelle égale à zéro, est impossible.

Il ne s'agit donc pas de prouver que la méthode de trouver ces valeurs moyennes, en prenant les sommes des valeurs également possibles, et la divisant par leur nombre, ou, ce qui revient au même, en prenant la somme des valeurs multipliées par leur probabilité, donne ou certainement ou très-probablement la vraie valeur, soit rigoureusement, soit d'une manière très-approchée, mais seulement on doit montrer que la valeur moyenne ainsi trouvée, est la seule qui puisse être substituée à la vraie valeur inconnue, toutes les fois que, par la nature des questions proposées, cette substitution peut avoir lieu.

La valeur moyenne qu'on déduit de la méthode que nous venons d'exposer, possède exclusivement les propriétés suivantes:

1°. Que la somme des différences positives et négatives entre elle et les valeurs données par l'observation, ou bien la somme des différences entre cette valeur et les vraies valeurs également possibles, est égale à zéro.

2°. Que la différence entre la vraie valeur

inconnue, ou une vraie valeur possible quelconque, et la valeur moyenne, est égale à la somme des différences entre chacune de ces valeurs vraies et les autres valeurs observées, ou les valeurs possibles, divisée par leur nombre.

3°. Qu'en prenant, dans des circonstances semblables, cette valeur moyenne pour une vraie valeur, l'évènement le plus probable sera celui où les différences en plus ou en moins entre la réalité et l'hypothèse, se compenseront; qu'on aura une probabilité toujours croissante que leur somme n'excèdera pas une partie aussi petite qu'on voudra de la plus grande somme possible de ces différences, tandis qu'en même temps il n'existe aucune loi qui puisse donner une probabilité aussi toujours croissante de ne s'en écarter que d'une quantité toujours constante. Enfin, on aura une probabilité toujours approchante de $\frac{1}{2}$, ou toujours tendante à l'égalité que cette somme sera positive plutôt que négative, ou réciproquement.

On voit donc que, dans tous les cas où l'on peut substituer une valeur moyenne à la vraie valeur, celle que donne la méthode ordinaire, est la seule que l'on doive choisir. Autrement, on s'exposeroit à se tromper d'une quantité plus grande en plus qu'en moins, à tomber dans des erreurs d'autant plus grandes que l'on emploieroit un plus grand nombre de fois les valeurs moyennes, à avoir une probabilité toujours

croissante de se tromper en plus ou en moins; enfin, on ne choisiroit pas la valeur pour laquelle il est le plus probable que les erreurs se compenseront.

Il faut donc employer cette valeur moyenne, mais seulement examiner avant, pour chaque cas, s'il est un de ceux dans lesquels la substitution d'une valeur moyenne à la valeur vraie, peut avoir lieu.

Ainsi lorsqu'on se propose de substituer, soit à la valeur vraie mais incertaine et inconnue de l'évènement d'un jeu, d'une entreprise de commerce, la valeur moyenne de cet évènement, soit la valeur moyenne de la durée de la vie humaine, ou d'avantages annuels dépendans de la durée de la vie, à leur valeur réelle et inconnue, soit une valeur moyenne de valeurs données par différentes observations, à la valeur vraie dont on suppose qu'elle donne une valeur approchée, il faut examiner jusqu'à quel point cette substitution est légitime.

Examinons d'abord l'usage de cette valeur moyenne dans les différens jeux. Nous parlerons, dans un article séparé, de la manière de trouver une valeur moyenne approchée, d'après les observations.

Nous distinguerons d'abord deux cas; celui où le jeu est déja entrepris, et celui où il n'est pas commencé; celui où les joueurs auroient à partager une somme donnée, et celui où l'on doit déterminer leur mise.

Dans le premier cas, il est évident que l'on doit partager la somme en donnant à chaque joueur la valeur moyenne de son espérance. En effet, on ne peut, si la probabilité de gagner ou de perdre sont inégales, le placer dans un état où il ait une probabilité égale de gagner ou de perdre des sommes égales; et on voit de plus que, si on établissoit une autre loi, quelle qu'elle fût, et qu'on l'employât un grand nombre de fois, la masse des joueurs qui auroient le même sort que ce premier, auroit une probabilité toujours croissante, soit d'avoir plus, soit d'avoir moins qu'ils n'auroient eu par le sort; au lieu qu'en suivant la loi ordinaire, les probabilités d'avoir plus ou d'avoir moins, approchent toujours de l'égalité; que d'ailleurs ils ont une probabilité toujours croissante que ce que leur donne la loi, ne s'écartera pas au-delà de certaines limites de ce que le sort leur auroit donné.

S'il s'agit de déterminer la mise, on trouve de même que toute autre loi conduiroit, en jouant un très-grand nombre de coups, à donner à un des joueurs une très-grande probabilité de gagner ou une très-grande probabilité de perdre; au lieu qu'en faisant la mise égale à la valeur moyenne des évènemens que le jeu peut amener, la probabilité de gagner ou de perdre se rapprochera toujours de l'égalité pour chaque joueur, et que chacun d'eux aura une probabilité toujours croissante

croissante de ne pas perdre au-delà d'une certaine partie de la mise totale.

Mais en même temps on voit que c'est à cela que se borne la plus grande égalité possible entre le sort de deux joueurs, qui n'ont pas des conditions absolument égales, entre le sort d'un joueur qui s'est décidé à jouer, et celui qu'il avoit avant le jeu.

Avant donc de s'engager au jeu, chacun devra examiner si cette égalité, la plus grande possible qui puisse exister entre l'état d'un joueur, avant de s'engager au jeu, et celui qui résultera du jeu, suffit pour le déterminer à changer d'état. Or, il est aisé de voir que, dans tous les cas où les probablités de gagner ou de perdre sont très-différentes entre elles, il faut supposer un grand nombre de coups pour que cette égalité ait lieu sensiblement. On ne se déterminera donc à jouer qu'autant que cette hypothèse sera jugée admissible.

Ainsi, dans l'exemple tiré du jeu de *croix ou pile*, que nous avons exposé ci-dessus, on voit que celui qui donne une mise $\frac{n}{2}$, et qui qui a probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner 2^{n-1} au n^e coup, ne doit se déterminer à jouer, qu'autant qu'il pourra répéter le jeu assez souvent pour avoir une probabilité presque égale de

gagner ou de perdre. De même celui qui, au contraire, peut être obligé de donner 2^{n-1} après n'avoir reçu que $\frac{n}{2}$, ne doit jouer, malgré la grande probabilité qu'il a de gagner, que lorsqu'il peut regarder $\frac{n}{2}$, ou plutôt les sommes moindres qu'il a une espérance fondée de gagner, comme un dédommagement du risque très-petit de perdre la somme beaucoup plus grande 2^{n-1}, ce qui oblige à faire n très-petit. Alors les joueurs pourront se déterminer à jouer le jeu, et le paradoxe disparoît.

Nous allons donner quelques autres exemples propres à montrer les différentes applications de cette règle.

Il existe plusieurs espèces de jeux où l'un des joueurs joue à-la-fois contre tous les autres, qui d'ailleurs ont une espérance plus ou moins grande de gagner plusieurs fois leur mise. Ce joueur s'appelle banquier, et les autres pontes.

Il résulte de cette convention que le banquier est exposé au risque de perdre des sommes beaucoup plus considérables qu'aucun des joueurs en particulier: de manière que si on suppose le jeu égal, d'après le principe exposé ci-dessus, il reste exposé au danger d'une perte très-considérable, et que,

pour que cette perte n'excède pas une partie très-petite de sa mise totale, il faudroit continuer le jeu long-temps, et supposer cette mise très-forte. Il seroit donc imprudent de faire ce métier en jouant à jeu égal; il a donc fallu que les pontes, qui trouvoient du plaisir à jouer ce jeu, ou qui étoient tentés par l'espérance de faire un gros gain, consentissent à faire un sacrifice en faveur du banquier; et alors il en résulte, 1°. qu'il a une probabilité toujours croissante de gagner; 2°. qu'une probabilité donnée de ne perdre qu'une partie donnée de sa mise, a lieu au bout d'un temps beaucoup moindre.

Supposons maintenant que l'on propose une loterie de 100000 billets à vingt sols le billet; pour jouer à jeu égal, il faut, d'après la règle générale, que la somme des lots égale 100000 l. Cependant on trouveroit à placer les billets, quand bien même on ne donneroit de lots que pour une somme beaucoup moindre. Dans ce cas, il est clair d'abord que ceux qui mettent à cette loterie, ne peuvent avoir en vue cette égalité qu'il pourroit y avoir entre la probabilité de gagner ou celle de perdre, après un grand nombre de tirages, ni cette autre probabilité toujours croissante de ne perdre, après un très-grand nombre de tirages, qu'une partie donnée de leur mise totale. En effet, dans les loteries qui ont le plus de succès, dans celles où les premiers lots sont considérables, il faudroit considérer une suite de tirages continués pendant plusieurs siècles pour approcher de cette égalité, et pour que la probabilité de ne pas perdre ou de ne pas gagner au-delà d'une très-petite partie de la mise totale, fût très-grande.

Le seul motif qui les détermine à jouer, est donc le peu d'importance de la mise qu'ils risquent, et le grand avantage qu'ils espèrent, dans le cas où le sort les favoriseroit. D'où il résulte que plus la somme que l'on risque est petite, plus la disproportion peut être grande.

Si au contraire on proposoit une loterie de 100000 billets, chacun de cent louis, avec l'espérance d'un seul lot de 2400000 l. suivant la règle ordinaire, le jeu seroit égal; cependant il seroit douteux qu'une pareille loterie fût remplie; elle ne le seroit même pas, quand le lot seroit de 3000000 l., quoiqu'il y eût alors de l'avantage. En effet, il faudroit supposer le jeu répété trop de fois, et par conséquent la mise trop considérable, pour parvenir, malgré un avantage réel, à cette probabilité à peu près égale de gagner ou de perdre, à cette probabilité très-grande de ne perdre qu'une petite partie de la mise qui constitue l'égalité; et dans le cas que l'on examine ici, la perte à laquelle on s'expose en jouant ce jeu, est trop considérable pour être regardée comme peu importante.

Dans les circonstances où un négociant fait une spéculation accompagnée d'un risque sensible, on voit qu'il ne suffiroit point que son profit fût tel que la valeur moyenne de ses espérances fût égale à sa mise, augmentée de l'intérêt qu'un commerce sans risque lui auroit procuré. Il faut encore qu'il ait, en continuant ce genre de commerce, une très-grande probabilité qu'il n'essuiera à la longue aucune perte.

Il faudroit donc, pour soumettre au calcul les spéculations de ce genre, déterminer, d'après les fonds que chaque commerçant peut avoir à employer successivement dans ce commerce périlleux, quel excès de profit il faut qu'il trouve pour avoir une probabilité suffisante de ne point perdre la totalité de ses fonds, de ne les perdre qu'en partie, de les conserver seulement, de les conserver, plus un certain intérêt; probabilités qu'il faudroit déterminer aussi par des principes particuliers que nous exposerons dans la suite.

Il ne nous reste plus pour terminer cet article, qu'à examiner une question. Nous avons supposé ici que la seule espèce d'égalité qui puisse exister entre des avantages inégaux et des probabilités inégales, en faisant, suivant la règle générale, ces avantages en raison inverse de la probabilité, s'établissoit par l'hypothèse d'une continuation plus ou moins répétée du même

jeu, du même hasard en général. Cette hypothèse n'entraîne aucune difficulté, si on suppose les différens coups liés entre eux; par exemple, si on se propose de parier qu'on amènera une rafle avec trois dés; que l'enjeu de celui qui parie, soit 1, celui de l'adversaire 35; qu'enfin l'on convienne de jouer cent mille coups, on verra que cette égalité s'établira entre les joueurs. Mais si l'on ne suppose pas les parties liées, alors il se présente une objection. Supposons, en effet, que, dans l'exemple proposé, celui qui parie qu'il amènera une rafle, l'ait amenée deux fois, il aura gagné 70. Si son adversaire veut continuer le jeu, comme les évènemens précédens n'influent pas sur la probabilité des autres, il faut recommencer le calcul, et ce ne sont plus les probabilités de perdre et de gagner, ce sont les probabilités de perdre ou de ne point perdre au dessus de 70, qui approchent de plus en plus d'être égales. De même le joueur qui auroit perdu la moitié de la mise totale qu'il peut risquer, n'a plus, à ce moment du jeu, la probabilité de ne perdre qu'une certaine partie de sa mise totale, telle qu'il l'avoit au commencement.

Il en résultera donc qu'un jeu égal au commencement, d'après la règle établie, auquel on pouvoit se livrer, même avec prudence, pourra cesser de l'être à une certaine époque du jeu.

Pour remédier à cet inconvénient, il faudroit: 1°. déterminer, dans chaque circonsconstance, la mise totale qui peut être employée au jeu successivement.

2°. Diviser cette mise en un certain nombre de parties, en dix, par exemple.

3°. Combiner le jeu de manière à avoir une certaine probabilité que, dans un grand nombre de coups, il n'y aura aucun moment où la perte excède cette dixième partie.

4°. Dans le cas où elle excède, alors ne continuer le jeu qu'en diminuant proportionnellement la mise, afin de pouvoir ainsi, dans tous les cas, se trouver dans un état, non le même, mais semblable à celui dans lequel on a commencé le jeu.

Nous proposons ici cette division, qui est arbitraire, parce que, dans la rigueur, il faudroit à chaque perte, baisser la valeur de la mise de chaque coup proportionnellement à cette mise totale; mais on sent que cette méthode seroit incommode dans la pratique.

Dans plusieurs jeux, il arrive au contraire qu'un joueur augmente continuellement sa mise, de manière à ce qu'un coup favorable le dédommage de tout ce qu'il auroit pu perdre dans les coups précédens; ce qui s'appelle *faire la martingale*. Si on suit le jeu de cette manière, même en jouant contre un banquier qui a quelque avantage, et que la mise ou le nombre des coups ne soit pas borné, on arrive à un résultat du même genre que celui de la question de Pétersbourg. Mais si le jeu est renfermé dans une certaine limite, on trouve seulement qu'en supposant les parties liées, le joueur qui augmente ainsi sa mise, change la nature du jeu, c'est-à-dire, qu'au lieu d'un jeu où avec une mise médiocre il avoit une probabilité assez petite de gagner beaucoup, il a au contraire une probabilité très-grande de gagner peu en exposant une grande mise.

Si on ne joue pas en parties liées, il arrivera au contraire que, chaque fois que l'on recommence avec cette condition, les deux joueurs se trouvent dans le même cas qu'au commencement du jeu, en supposant seulement que celui qui a gagné, continue de jouer petit jeu, et celui qui a perdu, plus gros jeu qu'au commencement; mais celui-ci n'a jamais une très-grande probabilité de gagner.

Il résulte de ces réflexions que toutes les fois qu'il s'agit de mises trop grandes pour en regarder la perte comme presque nulle, il n'est prudent de jouer qu'avec une très-grande probabilité de ne point perdre au-delà d'une limite où l'on ne puisse plus continuer le jeu assez long-temps pour avoir une probabilité égale à la première. D'où l'on voit que, dans aucun cas, ni le gros jeu, ni des entreprises considérables exposées à des risques, ne peuvent être suivis avec prudence, non-seulement si le sort est égal, d'après la règle générale, mais même quand il y auroit quelque avantage.

ARTICLE VI.

Application du calcul des probabilités aux questions où la probabilité est déterminée.

Nous avons vu ci-dessus que l'on pouvoit appliquer le calcul, soit aux évènemens dont la probabilité est fixe et déterminée, comme lorsque ces évènemens dépendent du jet de dés qu'on suppose semblables, du tirage de cartes ou de billets; soit aux évènemens qui ne sont susceptibles que d'une probabilité moyenne, comme lorsque la probabilité réelle étant inconnue, on cherche à en trouver une valeur moyenne d'après l'observation des évènemens passés du même genre, qu'on suppose avoir constamment une même probabilité (*Voyez article III. p. 76*).

Nous allons donner successivement des exemples de ces deux espèces d'applications, et nous choisirons, pour celle de la première espèce, le Biribi et la Loterie royale de France.

I. On joue le Biribi avec 70 numéros, chaque ponte met une certaine somme sur le numéro qu'il choisit; le banquier tire ensuite un numéro, paie à ceux qui ont choisi le numéro sortant, 63 fois leur mise, et toute celle des pontes lui appartient.

Supposons donc qu'un ponte ait mis une

pièce sur un numéro donné; puisqu'il y a 70 numéros, la probabilité que ce numéro arrivera est $\frac{1}{70}$; celle qu'il n'arrivera pas est $\frac{69}{70}$. Dans le premier cas, le ponte recevra 63 pièces, et en ayant donné une, gagnera 62: dans le second, il perdra la pièce qu'il a donnée. Son espérance sera donc (*article V.*) $\frac{1}{70} \times 62 - \frac{69}{70} \times 1$, ou $-\frac{7}{70}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{10}$. L'espérance du banquier sera au contraire $\frac{69}{70}\,1 - \frac{1}{70}\,62 = \frac{1}{10}$. Si on suppose que les pontes étant en nombre quelconque, ils aient pu, à chaque coup, mettre indifféremment sur tels numéros qu'ils ont voulu, une somme quelconque, mais renfermée dans de certaines limites, l'espérance du banquier sera égale à $\frac{1}{10}$ de la valeur moyenne de ce que les pontes auront pu risquer, et par conséquent $\frac{1}{630}$ de toute la somme que le banquier peut perdre.

Mais il suit également des principes établis dans l'article precédent, que la probabilité pour le banquier d'avoir un gain qui approche de la valeur de cette espérance moyenne, ne peut commencer à être grande qu'en supposant qu'il joue un assez grand nombre de coups. Il faut donc, pour calculer avec exactitude le sort du banquier, lorsqu'il se détermine à jouer ce jeu, évaluer d'abord le nombre de coups qu'il doit naturellement jouer, voir ensuite quelle somme il doit posséder pour avoir une très-grande probabilité qu'il ne sera pas forcé de quitter le jeu, qu'il

ne sera pas débanqué; regarder alors cette somme comme un fonds qu'il expose dans un commerce accompagné de risques, et chercher la probabilité qu'il ne perdra point une partie considérable de son fonds, qu'il le conservera en entier, qu'il gagnera une somme qui ait un tel rapport avec cette somme totale.

Si l'on peut supposer que le banquier a des fonds plus considérables, et qu'il se propose de faire ce métier un nombre à peu près connu de fois, pendant une année, il faut pour connoître son avantage, voir (les fonds qu'il doit avoir faits étant aussi donnés) quelle probabilité il aura de ne pas entamer ses fonds, et d'en tirer au contraire un certain taux d'intérêt. On verra par ce moyen quels sont les vrais avantages et les risques de ce commerce, comparés avec ceux des autres espèces de commerce; et on jugera si cet avantage de $\frac{1}{10}$ à chaque coup est au dessus ou au dessous de celui qu'il étoit raisonnable de lui accorder.

A cette première observation il en faut joindre une autre. Dans les jeux de ce genre la conduite des pontes a sur les avantages du banquier et sur leurs propres risques, une influence qu'il est nécessaire d'évaluer.

Supposons, en effet, que chaque ponte puisse mettre à volonté sur un numéro depuis une pièce jusqu'à trente-deux, et qu'il prenne la résolution d'augmenter sa mise successivement, de manière que, dès qu'il lui sort un numéro, il y ait du profit pour lui, ou du moins qu'il n'éprouve aucune perte. Cette combinaison change beaucoup l'état du jeu.

Il est clair, en effet, 1°. qu'elle embrasse 254 coups; 2°. que le ponte, au lieu d'une probabilité plus grande de perdre, aura au contraire une probabilité de gagner plus grande que $\frac{17}{18}$; 3°. que le banquier, au lieu d'une grande probabilité de gagner et un petit risque de perdre beaucoup, aura une très-petite probabilité de gagner beaucoup, et une grande probabilité de perdre peu; 4°. que la valeur moyenne du gain du banquier ou de la perte du ponte sera, non la dixième partie de ce que le ponte a pu risquer, mais une somme beaucoup plus foible, tandis qu'au contraire, au lieu d'être la $\frac{1}{620}$ partie de ce que le banquier a risqué, elle sera beaucoup plus forte; mais aussi la mise du ponte sera beaucoup plus grande, et la somme risquée par le banquier beaucoup plus petite.

On voit ici qu'il est nécessaire de fixer une limite dans les mises. En effet, dans l'exemple que nous choisissons ici, et où elle est depuis 1 jusqu'à 32, la probabilité de gagner qu'a le banquier, n'est que $\frac{1}{18}$, pour chacune de ces combinaisons de coups, qu'on peut regarder comme un seul. Si on avoit supposé une latitude plus grande dans les mises, elle auroit été beaucoup plus petite. Par exemple, pour

une latitude depuis 1 jusqu'à 127, le banquier n'auroit plus qu'une probabilité de gagner d'environ $\frac{1}{133}$; il est vrai qu'il ne pourroit perdre au-delà de 62, et que le ponte, au bout des 340 coups, que renferme cette combinaison, pourroit perdre jusqu'à 7989 fois sa mise. D'un autre côté le gain du banquier ne peut arriver qu'après 340 coups.

Mais tous les pontes ne suivent pas cette méthode; au contraire, la plupart jouent au hasard, preque toujours d'après des idées superstitieuses qu'ils attachent à certains numéros. Les uns diminuent leur jeu, lorsqu'ils perdent, parce qu'ils se croient en malheur; d'autres l'augmentent pour se racquitter plus tôt.

Il faut donc, en calculant l'avantage du banquier, avoir égard à la conduite des joueurs, et voir si, même en supposant qu'ils suivissent la combinaison particulière que nous venons d'exposer, le banquier auroit assez d'avantage. Or, il est aisé de sentir que cela ne peut arriver, à moins que les limites des mises ne soient telles que le banquier ait, dans l'espace de quelques séances, une probabilité assez grande de gagner, même contre ceux qui suivroient cette manière de jouer.

Cet exemple, pris du jeu le plus simple parmi les jeux de ce genre, où le banquier a un avantage, prouve qu'il ne suffit point, pour les calculer, de prendre la valeur moyenne

de l'espérance, telle qu'une considération abstraite du jeu pourroit la donner

Nous terminerons ce premier exemple par la discussion de deux questions.

1°. Un ponte trouve-t-il un avantage réel à choisir la combinaison que nous avons exsée, et qui lui procure une grande probabilité de gagner?

Je crois que l'on doit répondre négativement. En effet, il n'acquiert cette probabilité que pour le gain d'une petite somme, et il risque de perdre une somme très-considérable à un jeu désavantageux en lui-même. Aussi les pontes ne doivent-ils considérer le jeu que comme un divertissement qu'ils paient; et la manière de calculer leur état consisteroit à examiner si, sans être exposés à faire une perte ruineuse, ils ont dans les jeux de cette spècee, une probabilité suffisante de ne pas payer trop cher le plaisir que le jeu leur procure. La seule conduite prudente pour eux est de fixer, suivant leur fortune, une somme au dessus de laquelle ils se détermineroient à ne jamais perdre dans une séance, et de se réserver, lorsque le hasard les favorise, une partie du gain qu'ils ont fait.

Par ce moyen, ils auront une valeur moyenne de leur espérance, toujours négative, à la vérité, mais fort au dessous de la dixième partie de leur mise totale, et pourront se conserver, pour un long espace de temps, une probabilité de gagner plus grande

que celle de perdre, comme ils l'ont au biribi, depuis le 48e. coup jusqu'au 63e.

On peut demander 2°. si, dans le cas où l'on fait la combinaison que nous avons exposée, ce qui s'appelle *faire la martingale*, on doit continuer de mettre sur le même numéro, jusqu'à ce qu'il sorte, ou mettre au hasard à chaque coup, sur un numéro quelconque, même sur celui qui vient de sortir? Le calcul, contraire en ceci à l'opinion commune et même au sentiment naturel, répond que rien n'est plus indifférent. Quels que soient en effet les évènemens précédens, le calcul donnera toujours ici $\frac{1}{70}$ pour la probabilité de chaque numéro. L'opinion commune ne paroît fondée que sur le sentiment naturel, et ce sentiment n'a qu'une seule cause, c'est qu'on est plus frappé de voir au biribi, par exemple, sortir deux fois de suite le numéro 3, que de voir sortir l'un après l'autre les numéros 2 et 10. L'un de ces évènemens nous frappe comme remarquable; l'autre n'est pas apperçu. Or, ces évènemens que l'on remarque, sont moins nombreux que les autres; on est donc porté à les regarder comme extraordinaires. On ne fait pas réflexion que, si, dans les 70 . 70 ou 4900 combinaisons possibles de deux coups de biribi, il n'y a que 70 combinaisons qui donnent le même nombre répété deux fois et 4830 qui donnent deux nombres différens, la combinaison 3 et 3 est unique parmi les 70 combinaisons de la première classe, et la combinaison 3 et 10 parmi les 4830 de la seconde, ensorte que, si les probabilités d'avoir une combinaison de la seconde classe, ou une de la première, sont $\frac{4830}{4900}$ $\frac{70}{4900}$ ou $\frac{69}{70}$ et $\frac{1}{70}$; celle d'avoir ensuite un évènement déterminé de la seconde, étant $\frac{1}{4830}$ et un évènement déterminé de la première $\frac{1}{70}$, la probabilité réelle d'un évènement déterminé sera donc, pour une des classes, $\frac{4830}{4900}$ $\frac{1}{4830}$ ou $\frac{1}{4900}$ et pour l'autre, $\frac{1}{70}$ $\frac{1}{70} = \frac{1}{4900}$: ces deux probabilités sont donc égales.

Si cette manière de jouer donne une probabilité de gagner au bout d'un certain nombre de coups, ce n'est pas qu'après avoir perdu 253 fois, par exemple, on ait une probabilité plus grande que $\frac{1}{70}$ de gagner la 254; elle reste toujours la même à chaque coup, et la probabilité $\frac{27}{38}$ de ne pas perdre, n'a lieu que pour celui qui se détermine à suivre cette combinaison au commencement du jeu, et avant d'avoir connoissance des évènemens qui précèdent ce dernier coup; car du moment où les évènemens sont connus, par exemple, s'il a perdu

perdu 253 coups de suite, il a pour le 254^e. une probabilité $\frac{1}{70}$ de gagner 18 fois la première mise, et une probabilité $\frac{69}{70}$ de perdre 1998 fois cette même mise.

Mais il seroit inutile de donner plus d'étendue à cet exemple. Nous en avons dit assez pour ceux qui, sans avoir la fureur du jeu, pourroient être tentés de s'y livrer sur la foi de quelques fausses combinaisons; et ce que nous ajouterions ne guériroit pas ceux qui sont animés de cette passion. La seule manière de jouer qui puisse n'être pas imprudente, consiste à ne jamais s'exposer à des risques considérables, et par conséquent on auroit tort d'espérer qu'ils pussent l'adopter.

La Loterie royale de France est formée de 90 numéros; il en sort cinq à chaque tirage. On peut y mettre de 7 manières différentes.

1°. Sur un seul numéro par extrait; s'il sort, on a quinze fois sa mise.

2°. Sur un seul numéro par extrait déterminé, c'est-à-dire, en déterminant qu'il sortira le premier, le second du tirage; et s'il sort au rang indiqué, on a soixante-dix fois sa mise.

3°. Par ambe, sur deux numéros; si les deux numéros choisis sont du nombre des cinq sortis, on reçoit deux cents soixante-dix fois sa mise.

4°. Par ambe déterminé; il faut que les

deux numéros sortent dans le tirage au rang indiqué, comme l'un le premier, et l'autre le troisième, mais sans réciprocité : on obtient 5100 fois sa mise.

6°. Par terne, sur trois numéros; il faut qu'ils sortent tous trois dans le tirage : on obtient 5500 fois sa mise.

6°. Par quaterne, sur quatre numéros; tous quatre doivent sortir dans le tirage, et l'on obtient 75000 fois sa mise.

Enfin par quine, sur cinq numéros, et l'on obtient 1000000 de fois sa mise.

Cela posé, il faut, pour chaque manière de mettre à la loterie, évaluer l'espérance du joueur ou celle de la banque.

1°. Par extrait. Puisqu'il y a 90 numéros, et qu'il en sort 5, la probabilité qu'un numéro donné sortira, est $\frac{5}{90}$, puisque 90 est ici le nombre total des numéros, et 5 celui des numéros qui peuvent sortir. Cette probabilité est donc $\frac{1}{18}$; celle qu'il ne sortira pas est par conséquent $\frac{17}{18}$: mais si le billet sort, le joueur gagne 14 fois sa mise, puisqu'on lui donne 15; si le billet ne sort pas, il perd sa mise. Son espérance est donc $\frac{1}{18}\,14 - \frac{17}{18}\,1$ ou $-\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$. Le sort du joueur est donc égal à la perte

d'un sixième de sa mise, celui de la banque au gain d'un sixième de la mise du joueur.

2°. Par extrait déterminé. Puisqu'ici le rang où doit sortir un billet est déterminé, il n'a qu'une combinaison pour sortir; la probabilité en sa faveur est donc $\frac{1}{90}$, la probabilité contre $\frac{89}{90}$; et comme il obtient 69 fois sa mise, quand le billet sort, sa chance sera exprimée par $\frac{1}{90}\,69 - \frac{89}{90}\,1 = -\frac{20}{90}$ ou $-\frac{2}{9}$ de sa mise.

3°. Par ambe. Le nombre des combinaisons deux à deux de 90 numéros est exprimé par $\frac{90.89}{1.2} = 4005$. Celui des combinaisons deux à deux des cinq numéros sortans est $\frac{5.4}{1.2} = 10$. La probabilité de la sortie d'un ambe sera donc $\frac{10}{4005}$, celle qu'il ne sortira point $\frac{3995}{4005}$. Le joueur gagneroit, dans le premier cas, 269 fois sa mise; son sort sera donc exprimé par $\frac{2690}{4005} - \frac{3995}{4005}$ ou $-\frac{1305}{4005} = -\frac{29}{89}$ de sa mise.

4°. Par ambe déterminé. Ici le nombre total des combinaisons deux à deux est double, puisque chacun des deux, placé le premier ou le second, forme une combinaison particulière. Celui des ambes déterminés des 90 numéros sera donc $90.89 = 8010$; et puisque le rang du tirage où chaque numéro doit sortir est déterminé, il n'y a qu'une de ces 8010 combinaisons qui donne l'ambe choisi, nous aurons donc la probabilité qu'il sortira égale à $\frac{1}{8010}$, celle qu'il ne sortira pas égale à $\frac{8009}{8010}$; et comme l'on reçoit alors 5100 fois sa mise, le sort du joueur sera exprimé par $\frac{1}{8010}\,5099 - \frac{8009}{8010} = -\frac{291}{801}$.

5°. Par terne. Le nombre des combinaisons trois à trois de 90 numéros est exprimé par $\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$, celui des combinaisons trois à trois de 5 numéros est $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$. La probabilité qu'un terne donné sortira, est donc $\frac{1}{11748}$, et celle qu'il ne sortira pas $\frac{11747}{11748}$; on donne pour un terne 5500 fois la mise. Le sort du joueur sera donc :

$$\frac{5499}{11748} - \frac{11747}{11748} = -\frac{6248}{11748} = -\frac{142}{267}$$

6°. Pour les quaternes. Le nombre des combinaisons quatre à quatre de 90 numéros est $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$. Celui des combinaisons quatre à quatre de cinq numéros $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$; la probabilité que le quaterne sortira, sera donc $\frac{1}{511038}$; celle qu'il ne sortira

pas $\frac{511037}{511038}$; et comme on donne 75000 fois la mise, le sort du joueur sera :

$$\frac{74999}{511038} - \frac{511037}{511038} = -\frac{436038}{511038} = -\frac{218019}{255519}.$$

7°. Enfin pour le quine. Le nombre des combinaisons cinq à cinq de 90 numéros est $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43949268$. Le nombre des combinaisons de cinq numéros cinq à cinq est l'unité. La probabilité que le quine sortira est donc $\frac{1}{43949268}$; celle qu'il ne sortira pas est $\frac{43949267}{43949268}$. Le sort du joueur sera donc (puisque le quine est payé un million de fois la mise) égal à

$$\frac{999999}{43949268} - \frac{43949267}{43949268} = -\frac{42949268}{43949268},$$

quantité plus grande que $\frac{42}{43}$.

Pour donner une idée de ces dernières probabilités de gagner à ceux qui ne sont pas accoutumés à ce genre de calcul, nous observerons que l'espérance de gagner un quaterne est moindre que le risque qu'a un

homme de cinquante ans de mourir d'apoplexie dans une heure.

Celle de gagner un quine, est moindre que le risque de voir deux personnes de cinquante ans, sur huit, être frappées d'apoplexie dans la journée; ou, si l'on veut, le risque que deux personnes de cet âge soient toutes deux frappées d'apoplexie dans trois jours.

Celui qui prendroit un quaterne à chaque tirage, n'auroit une probabilité égale pour la sortie ou la non-sortie de son billet qu'après 376288 tirages ou plus de 15678 ans.

Celui qui prendroit un quine n'auroit une espérance égale de sortie ou de non-sortie qu'après 30103000 ou 1254292 ou plus d'un million deux cent cinquante mille ans.

Si on suppose la loterie créée il y a six mille ans en même temps que le monde, il y auroit encore plus de 99668 à parier contre 362, ou 300 contre 1 qu'un quine ne seroit pas encore sorti.

Si on observe enfin que plus la probabilité d'un évènement heureux diminue, plus le profit qu'on peut retirer d'une mise augmente, mais beaucoup moins que la probabilité ne diminue, et d'autant moins que cette probabilité est plus foible; il est aisé de voir qu'il n'y a aucune combinaison possible qui donne au joueur une espérance fondée de gagner; qu'ainsi on ne doit y risquer que des sommes dont on puisse regarder la perte comme presque nulle, et dont, en en faisant un autre

emploi, on ne peut espérer ni beaucoup d'utilité ni beaucoup de plaisir.

Par exemple, un homme qui, jouissant d'une fortune honnête, trouve quelque plaisir à s'entretenir d'espérances chimériques, et qui a la sagesse de ne pas trop s'y livrer, pourroit très-bien sacrifier un écu en quaternes et en quines à chaque tirage. Ce seroit un moyen d'avoir toujours du moins la possibilité de faire un gain considérable, de s'amuser de projets en l'air, sans que ces projets dérangeassent sa fortune.

Si maintenant on cherche le sort de la banque, on trouvera que son espérance moyenne est de gagner :

1°. $\frac{1}{6}$ ou $\frac{166666}{1000000}$ de tout ce qui est mis par extrait.

2°. $\frac{2}{9}$ ou $\frac{222222}{1000000}$ de tout ce qui est mis par extrait déterminé.

3°. $\frac{29}{89}$ ou $\frac{325842}{1000000}$ de tout ce qui est mis par ambe.

4°. $\frac{291}{801}$ ou $\frac{363259}{1000000}$ de tout ce qui est mis par ambe déterminé.

5°. $\frac{142}{267}$ ou $\frac{422416}{1000000}$ de tout ce qui est mis par terne.

6°. $\frac{218019}{255519}$ ou $\frac{853240}{1000000}$ de tout ce qui est mis par quaterne.

7°. enfin $\frac{42949268}{43949268}$ ou $\frac{977248}{1000000}$ de tout ce qui est mis par quine.

Et vu le grand nombre des joueurs, on doit avoir une très-grande probabilité qu'après un petit nombre de tirages le profit ne s'éloignera pas beaucoup de cette proportion, surtout pour les cinq premières manières de mettre à cette loterie, qui sont aussi celles où les mises sont de beaucoup les plus fortes.

On a soin dans les loteries, 1°. de se réserver un avantage plus grand sur les combinaisons les moins probables, pour ne pas exposer la banque à être ruinée. Si on se contentoit d'un avantage de $\frac{1}{3}$, le quine de 2 liv. 10 s. seroit payé plus de cinquante millions.

2°. De fixer aux mises sur chaque numéro ou sur chaque combinaison, une valeur renfermée entre certaines limites, par cette même raison, et ensuite pour avoir une probabilité des plus grandes d'obtenir à la longue un profit qui se rapproche de la valeur moyenne de l'avantage. En effet, on en seroit sûr, si les sommes étoient exactement distribuées sur toutes les combinaisons; et plus on resserrera les mises entre des limites étroites

plus on sera sûr d'approcher de cette égale distribution.

3°. Pour s'assurer encore de cette distribution plus égale, on trouve dans plusieurs loteries, et particulièrement dans celle de France, des combinaisons toutes imprimées, et que les joueurs achètent, au lieu de leur laisser le soin de former eux-mêmes ces combinaisons. Alors on a soin de les arranger de manière que presque tous les numéros y soient également distribués.

4°. Comme les limites des mises sur les différentes espèces de combinaisons ne peuvent être fixes, puisqu'on les répète dans plusieurs bureaux, il arrive quelquefois de fermer certains numéros sur lesquels on a lieu de croire qu'on porteroit des sommes plus fortes. Il ne résulte de cette violation de la convention primitive aucun tort réel pour les joueurs, mais seulement une plus grande probabilité d'une répartition moins inégale des chances sur les numéros.

On pourroit appliquer ici, à quelques égards, ce que nous avons dit du biribi, et trouver, au lieu d'un moyen d'avoir une grande espérance de gagner une petite somme, ou plutôt de ne pas perdre, en s'exposant à un petit risque, de perdre beaucoup, avoir à la fois, mais à la même condition, une très-grande espérance de ne pas perdre, et une très-foible espérance de faire un gain considérable.

Supposons, en effet, que 10 sols représentent ici l'unité, que 3 liv. ou six fois dix sols, par conséquent, représentent une somme fixe que l'on place à chaque tirage sur des quaternes ou des quines, pour avoir cette foible espérance de la possibilité d'un gros gain, et qu'on dispose ses mises sur cinq numéros à chaque tirage, de manière que la sortie d'un seul numéro nous fasse rentrer la totalité de la mise.

Si a exprime le nombre d'unités ou de fois 10 sols qu'il faut mettre sur un numéro à un tirage n, r le profit du joueur, s'il étoit sorti un numéro à ce tirage, et b la somme qu'il faut mettre sur chaque numéro au $\overline{n+1}^{e}$ tirage, pour retirer la totalité de sa mise, on aura $b=\frac{5a+6-r}{10}$. Si, pour éviter les fractions, au lieu de prendre b exactement, on prend b' ou le nombre entier plus grand que b qui en diffère le moins, on aura pour reste, après le $\overline{n+1}^{e}$ tirage, ou pour le profit du joueur, s'il sort un numéro à ce tirage, $r'=10b'-15a-6+r$, et la mise totale, après le $\overline{n+1}^{e}$ coup, sera $5b'+15a+6-r$.

Cela posé, si l'on fait $a=1$ au premier coup, on aura pour les tirages, les mises et les restes:

Coups.	Mises.	Restes.
1	1	4
2	2	3
3	4	7
4	6	1
5	10	5
6	16	9
7	24	3
8	37	7
9	56	6
10	84	0
11	127	4
12	191	3
13	287	2
14	431	1
15	648	0
16	973	4

La colonne des restes marque en multiples de 10 sols ce que gagneroit le joueur, s'il sortoit un seul billet à ce tirage; celle des mises, ce qu'il faut mettre pour chaque tirage sur un billet.

La mise totale seroit ici 14581, ou 7290 l. 10 sols.

Maintenant puisque $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$ exprime toutes les combinaisons cinq à cinq des 90 numéros, et que, par la même raison, $\frac{85.84.83.82.81}{1.2.3.4.5}$ exprime toutes les combinaisons des 85 numéros que le joueur n'a pas pris, le second de ces nombres divisé par le premier, exprimera la probabilité qu'aucun de ces cinq numéros ne sortira, et elle sera $\frac{85.84.83.82.81}{90.89.88.87.86}$ ou $\frac{746347}{10000000}$. Cette même fraction élevée à la seizième puissance ou $\frac{129}{10000}$ exprimera la probabilité qu'il ne sera sorti aucun des 5 billets dans 16 tirages. Il y aura donc 9871 à parier contre 129, ou plus que 76 à parier contre 1, qu'il en sortira au moins un; et le joueur aura cette probabilité de ne pas perdre sa mise et de gagner au contraire au moins une des petites sommes qui expriment les restes.

Nous avons supposé que le joueur plaçoit à chaque tirage une somme de 6 ou de 3 liv. en quines ou quaternes, ce qui lui offroit la très-petite probabilité ou, pour mieux dire, la possibilité de gagner une somme considérable.

Mais il a un autre avantage, celui de la sortie de deux, trois, quatre, cinq numéros dans un seul tirage, cas dans lesquels il gagne de plus une, deux, trois ou quatre fois sa mise totale, plus le reste. Examinons seulement

ment ici la probabilité qu'il la gagne au moins une fois, c'est-à-dire, qu'il sorte au moins deux de ses cinq billets dans un tirage. La probabilité des autres évènemens doit être mise au nombre des hasards extraordinaires.

Pour déterminer cette probabilité, nous considérerons la formule suivante, dont les termes successifs donnent la probabilité que le nombre total des numéros étant p, celui des numéros qui sortent à un tirage étant q, et s celui des numéros qu'un joueur a retenus, il ne sortira aucun de ces billets, il n'en sortira qu'un, il n'en sortira que deux, trois, etc. Nous plaçons ici cette formule, parce qu'elle est commode pour ceux qui veulent s'amuser à calculer les probabilités de cette espèce.

Dans cette formule un terme $\left(\frac{a}{b}\right)$ exprime en général le coëfficient du $\overline{b+1}$ terme de la formule du binome pour la puissance a. Cette formule sera donc :

$$\frac{\left(\frac{p-s}{q}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{s}{1}\right)\left(\frac{p-s}{q-1}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{p-s}{q-2}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)} \ldots$$

$$+ \frac{\left(\frac{s}{s-1}\right)\left(\frac{p-s}{q-s+1}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)} + \frac{\left(\frac{p-s}{q-s}\right)}{\left(\frac{p}{q}\right)}$$

Dans le cas que nous considérons ici $p=90$, $q=5$. $s=5$, et les deux premiers termes qui représentent la probabilité qu'il sortira moins de deux numéros choisis, seront :

$$\frac{\frac{85.84.83.82.81}{1.2.3.4.5} + 5.\ \frac{85.84.83.82}{1.2.3.4}}{\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}}$$

ou $\frac{976701}{1000000}$, et pour 16 tirages, la seizième puissance de ce nombre, ou $\frac{670873}{1000000}$. Il y aura donc 670173 à parier contre 329827, ou à-peu-près 67 contre 33, ou un peu plus de 2 contre 1, que dans les 16 tirages liés ensemble, on n'obtiendra pas l'avantage de doubler ou moins sa mise totale; et à chaque tirage l'on aura une probabilité $\frac{253653}{1000000}$ de retirer sa mise, et une probabilité $\frac{23299}{1000000}$ seulement de la doubler; l'un étant un peu plus d'un quart, et l'autre moindre qu'un quarantième.

Ainsi, à chaque jeu lié de 16 tirages, la probabilité de perdre la mise totale, celle de

retirer la mise avancée, et celle de la doubler pourront être exprimées par :

$$\frac{129}{10000} \quad \frac{6573}{10000} \quad \frac{3298}{10000} \quad \frac{9871}{10000}$$

somme des deux dernières; mais cette probabilité n'est que celle de doubler la mise avancée, et non la valeur de la mise totale qu'on risque dans cette combinaison. Aussi arriveroit-il, si l'on se proposoit de continuer cette manière de jouer, que l'on s'exposeroit à perdre cette mise totale après un certain nombre de coups, et qu'il n'y auroit qu'une très-petite probabilité d'avoir été dédommagé de cette perte par les précédens.

Le joueur auroit une probabilité $\frac{1}{2}$ de la perdre dans 51 combinaisons successives de la même nature. La valeur moyenne du nombre des tirages qui y répondent, est 105 environ, ce qui demande quatre ans quatre mois et demi. Ainsi celui qui joueroit ce jeu, auroit une espérance $\frac{1}{2}$ de pouvoir continuer ce jeu pendant une durée moyenne de quatre ans quatre mois et demi sans perdre sa mise.

Mais nous pouvons faire ici la même réflexion que sur le jeu de biribi; c'est que si on se borne à ce qui n'est pas évènement extraordinaire, à ce qui n'exige pas des milliers d'années pour parvenir à une espérance probable, on auroit, en jouant ce jeu, l'inconvénient d'exposer de fortes mises avec l'espérance d'un très-petit profit : on ne pourroit donc encore le regarder que comme une manière de s'amuser, où la perte est moins probable, mais où les sommes exposées sont aussi beaucoup plus fortes que si l'on se bornoit à ne risquer que de très-petites mises à chaque tirage.

Elle conviendroit donc encore moins à un homme raisonnable. Ce que nous avons dit, en parlant du jeu de biribi, sur l'illusion qui fait préférer des numéros aux autres, ceux qui ne sont point sortis depuis long-temps à ceux qui viennent de sortir, peut s'appliquer également aux loteries. Il n'existe, il ne peut exister aucun moyen réel de jouer avec avantage à aucun de ces jeux qui sont désavantageux par eux-mêmes; et, si l'on en excepte, pour les uns, le plaisir de jouer, pour les autres celui de s'entretenir dans l'espérance illusoire d'une fortune très-peu probable, il n'existe aucun motif de s'y livrer; et par conséquent un homme sage ne peut y risquer que des sommes non-seulement très-petites pour sa fortune, mais aussi trop petites pour qu'un autre emploi de ces sommes puisse lui procurer un avantage réel.

Ce sont uniquement l'avidité de gagner portée à un point qui ne laisse plus l'usage paisible de la raison, le préjugé vulgaire sur la sortie plus probable des numéros qui ne sont pas sortis depuis long-temps, ou enfin des idées superstitieuses beaucoup plus communes

qu'elles ne devroient l'être dans un siècle éclairé ; ce sont ces motifs seuls qui engagent à se livrer, avec une sorte de fureur, à ces jeux curieux. Le secret le plus sûr pour en dégoûter seroit de répandre autant qu'il est possible les connoissances de calcul des probabilités. Il n'en est point de plus propres à détruire les erreurs spéculatives ou pratiques qui arrêtent les progrès et s'opposent au bonheur de l'espèce humaine, et l'on ne doit négliger aucun moyen de rendre enfin ces connoissances populaires.

Article VI.

De la manière d'établir des termes de comparaison entre les différens risques auxquels on peut se livrer avec prudence, dans l'espoir d'obtenir des avantages d'une valeur donnée.

Les résultats du calcul des probabilités pouvant servir de règle pour notre conduite dans les spéculations qui intéressent notre vie et notre fortune, il est de la plus grande importance de les comparer à des objets qui fassent sur nous une impression appréciable, et sur laquelle nous puissions asseoir notre jugement. En effet, après avoir déterminé la probabilité mathématique qu'un évènement qui nous intéresse arrivera ou n'arrivera pas,

il faut avoir des moyens de connoître si elle est suffisante pour nous déterminer à courir les risques auxquels nous serons exposés dans ces entreprises. On ne peut arriver à ce but qu'en comparant ces risques avec ceux que nous éprouvons tous les jours, et auxquels nous attachons une importance plus ou moins grande, mais déterminée relativement à notre conduite.

Si nous nous arrêtons d'abord aux spéculations de commerce, on verra que la manière la plus naturelle d'évaluer les risques auxquels un homme prudent peut s'exposer pour avoir l'espérance d'un certain profit, est de les comparer à ceux qu'on néglige tous les jours ou auxquels on attache peu d'importance. Cette méthode suppose que l'on ait observé avec soin les accidens rares et imprévus qui sont l'objet de ces petits risques. Il faut encore prendre garde qu'en parlant du risque à courir dans des spéculations de commerce, nous n'entendons pas le risque absolu qui peut quelquefois être assez grand dans une circonstance isolée, mais celui qui résulte réellement de l'ensemble des entreprises du même genre, formées par le même négociant. Cette considération est d'autant plus nécessaire qu'il est aisé de voir que lorsque la probabilité d'un évènement est au dessous de $\frac{1}{2}$, le risque qui en résulte diminue à mesure qu'on embrasse plus d'évène-

mens, et l'on peut arriver dans ce cas à une très-grande probabilité de ne pas perdre au delà d'une somme donnée.

C'est donc pour apprécier cette dernière que l'on doit chercher un terme de comparaison capable de faire sur nous une impression connue.

Mais au défaut de ces évènemens rares et imprévus, dont l'observation n'a pas été suivie jusqu'à présent, au point de pouvoir en construire des tables, celles de mortalité peuvent remplir assez commodément l'objet que nous nous proposons. Les divers risques dont elles donnent la valeur sont assez rares pour être susceptibles d'une application générale, et frappent d'ailleurs à peu près de la même manière le commun des hommes. Les risques de mourir dans un intervalle de temps donné relativement à chaque âge, et les différences de ces risques entr'eux, fournissent des degrés de probabilité qu'on pourra employer à des déterminations plus ou moins importantes.

Venons à une application ; soit pris dans des tables de mortalité quelconque, celles de Déparcieux, par exemple, le risque de mourir dans l'année, pour un jeune homme de vingt ans, on trouvera que sur 814 personnes de cet âge, il en meurt 8 dans l'année, et par conséquent que le risque cherché est $\frac{1}{814}$, ou environ $\frac{1}{102}$; pour l'âge de 50 ans, ce même risque est $\frac{10}{581}$, ou $\frac{1}{58}$ à peu près. La différence de ces deux fractions, $\frac{44}{5916}$ ou $\frac{1}{134}$, sera l'augmentation du risque, relative à l'accroissement de l'âge. En la divisant par 52, on aura celle du danger de mourir dans une semaine, dans les mêmes circonstances, $\frac{1}{6968}$. Or, un homme de 50 ans, bien portant, et d'une classe choisie, comme l'étoit celle des tontiniers de France, sur laquelle Déparcieux a calculé ses tables, ne craint guères plus de mourir dans la semaine qu'un jeune homme de 20 ans.

En prenant pour second terme de comparaison un individu de l'âge de 65 ans, le danger de mourir dans l'année est alors $\frac{15}{395}$ ou $\frac{3}{79}$. La différence entre cette valeur et celle qui convient à l'âge de 20 ans, est $\frac{227}{8058}$, à peu près $\frac{1}{35}$; celle des risques de mourir dans la semaine à chacun de ces deux âges, sera $\frac{1}{1820}$. Cette quantité est assez petite pour servir de base à des spéculations de commerce, sur-tout lorsqu'on peut le continuer assez long-temps pour obtenir une probabilité beaucoup plus grande, non seulement de ne pas entamer ses fonds, mais encore de se trouver en gain par la suite.

Si l'on avoit eu égard, dans la construction des tables de mortalité, à la constitution physique des individus, à leur sexe, et en géné-

ral à toutes les distinctions qui peuvent entraîner avec elles quelques différences dans l'ordre de mortalité, on seroit à même de choisir des points de comparaison plus exacts et plus variés. Ainsi, si l'on avoit une table à part des individus de chaque âge, bien portans, et de ceux qui sur ce nombre sont morts de maladies instantanées, il seroit facile d'en déduire le risque de ce genre de mort pour un âge et un intervalle de temps donnés; risque qui est presque toujours regardé comme nul, ou de peu d'importance, et par-là très-propre à servir de terme de comparaison pour ceux auxquels on s'expose volontairement dans l'espoir d'un gain.

Il paroît que les morts causées par des maladies aiguës et de peu de durée, composent à peu près la dixième partie du nombre total des morts; le risque de mourir d'une maladie de ce genre dans le courant de l'année, sera pour un homme de l'âge de 20 ans $\frac{1}{1020}$, et $\frac{1}{53040}$ seulement pour une semaine.

Il est des cas, ceux où la vie d'un citoyen est compromise, qui demandent qu'on connoisse le *maximum* du risque qu'on peut négliger, et cette détermination est indispensable pour régler la formation des tribunaux qui doivent juger définitivement à mort. La probabilité pour l'accusé de ne pas être condamné à mort injustement doit être telle qu'un homme qui auroit cette même probabilité de ne pas périr, ne se croiroit exposé à aucun danger.

Il ne faudroit employer à cette détermination que des accidens rares, des risques très-légers et auxquels on s'expose volontiers pour le plus petit intérêt, tels que celui de périr avec le paquebot dans le cours trajet de Calais à Douvres, et réciproquement, et partant dans un temps regardé comme bon et sûr, celui de périr en allant d'Europe en Amérique sur un vaisseau bien équipé, qui a mis à la voile dans une saison favorable, ou d'autres de ce genre. Malheureusement on n'a aucune donnée sur ces objets; mais on peut les remplacer par des combinaisons des élémens, tirées de tables de mortalité, comme on l'a vu précédemment. Il faut alors rapprocher les époques de la vie qu'on veut comparer entr'elles, en sorte qu'il n'y ait presque pas de différence sensible dans l'impression que fait le danger de mourir dans un intervalle de temps très-court, à l'une ou à l'autre de ces époques. Nous aurons occasion de revenir sur ces objets, en parlant de l'application du calcul des probabilités aux décisions rendues à la pluralité des voix.

ARTICLE VII.

De l'application du calcul des probabilités aux jeux de hasard.

Ce qui a été dit dans les articles précédens renferme les principes généraux du calcul

des probabilités, et l'application aux diverses questions qui pourront se présenter n'aura d'autres difficultés que celles qui pourront naître de la recherche du nombre de combinaisons également possibles dans les cas proposés.

Il n'entre pas dans notre plan de donner des détails sur les divers jeux de hasard, et l'on ne doit s'attendre à trouver ici que quelques exemples propres à faire voir l'application des principes posés précédemment.

1°. *Quelqu'un ayant un nombre* m *de jetons dans l'une de ses mains, en met une partie dans l'autre, et propose de deviner si cette dernière en renferme un nombre pair, ou impair; on demande la probabilité de chacun de ces évènemens.*

Il est évident que les nombres pairs seront les résultats de toutes les combinaisons 2 à 2, 4 à 4, 6 à 6, etc. des jetons, et que les nombres impairs ne pourront venir que des combinaisons 1 à 1, 3 à 3, 5 à 5, etc. Tous ces nombres sont exprimés par chacun des coefficiens de la puissance m, du binôme $(a+b,)$ les premiers par ceux d'un rang impair, à partir du premier terme, et les autres par ceux de rang pair : il résulte de là qu'on aura pour le nombre d'évènemens du premier genre

$$\frac{m.m-1}{1.2} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6} \text{ etc.}$$

et pour ceux du second,

$$\frac{m}{1} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Soit A la première somme, et B la seconde; et, les ajoutant ensemble, on aura

$$A + B = \frac{m}{1} + \frac{m.m-1}{1.2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

expression qui n'est autre chose que le développement de $(1 + 1)^m - 1$, et par conséquent égale à $2^m - 1$. Maintenant, si l'on retranche B de A, on aura

$$A - B = -\frac{m}{1} + \frac{m.m-1}{1.2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

ce qui est le développement $(1 - 1)^m - 1$, et par conséquent égal à -1: on a donc, pour résoudre la question proposée, les deux équations que voici:

$$A + B = 2^m - 1$$
$$A - B = -1$$

d'où l'on tire $A = 2^{(m-1)} - 1$ et $B = 2^{m-1}$. Le nombre total des combinaisons, ou $A + B$, étant $2^m - 1$, la probabilité du

nombre pair sera $\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}$; et celle de l'impair $\frac{2^{m-1}}{2^m-1}$, plus grande que la première. Il y a donc plus à parier pour le second évènement que pour le premier; et, dans le cas d'un semblable jeu, la mise de celui qui tiendroit pour pair doit être, à celle de son adversaire, dans le rapport de 2^{m-1} à $2^{m-1} - 1$. Si $m = 4$, on aura, pour les probabilités respectives de pair et d'impair, $\frac{7}{15}$ et $\frac{8}{15}$. (a)

2°. *On demande le sort de deux joueurs dont l'un parie d'amener un point donné,* p + 1, *avec un nombre* n *de dés.*

Ce problême a déjà été traité par M. Monmort; mais, comme il n'en a donné que des solutions arithmétiques, nous placerons ici une formule de M. Moivre, qui mérite d'être connue.

Si l'on suppose que chacun des dés ait une face marquée de l'unité, un nombre k marqué de 2 unités, un nombre k^2 marqué de 3 unités, etc., et ainsi de suite jusqu'à K^{f-1}, f désignant le nombre de points marqués sur les faces qui en ont le plus, la somme

(1) La solution de cette question est tirée d'un Mémoire présenté à l'Académie par M. Bertrand, professeur à Genève.

de toutes les chances possibles, avec un seul dé, sera exprimée par la progression géométrique suivane:

$$1 + k + k^2 + k^3 + k^4 + k^5 + k^{f-1};$$

et si on l'élève à la puissance n, chacun de ces termes, depuis l'unité, marquera le nombre des manières dont on peut obtenir les points $n, n + 1, n + 2, n + 3 \ldots\ldots n + h$, avec un nombre n de dés. Il ne s'agit donc plus, pour arriver à la solution du problême, que de connoître le terme dans lequel on a $n + h = p + 1$; or il est aisé de voir que ce terme doit avoir avant lui $p + 1 - n$ de termes, parce que la puissance la moins élevée de k, qui se trouvera dans la formule précédente, sera la puissance n. Cela posé, la progression géométrique $1 + k + k^2 + k^3 + \text{etc.} \ldots K^f$, a pour somme

$$\frac{1-K^f}{1-K} = (1-K)^{-1} \times (1-K)^f;$$

donc

$$\{1 + K + K^2 + K^3 + \text{etc.} \ldots K^f\}^n = (1-K)^{-n} \times (1-K^f)^n;$$

mais

$$(1-K)^{-n} = 1 + nK + \frac{n.n+1}{1.2}K^2 + \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}K^3 + \text{etc.}$$

et

$$(1-K^f)^n = 1 - nK^f + \frac{n.n-1}{1.2}K^{2f} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}K^{3f} + \text{etc.}$$

Si l'on multiplie ces deux suites l'une par l'autre, les termes du produit qui auront pour exposant $p + 1 - n$ appartiendront à la quantité cherchée. Faisons, pour abréger, $p + 1 - n = l$; soit EK^f le terme de la première série, où l'exposant est l; et représentons par DK^{l-f}, CK^{l-2f}, et ainsi de suite, ceux qui le précèdent dans la progression $-f$, $-2f$, $-3f$, $-4f$, etc., il est clair que, si on écrit au dessous de cette quantité $EK^l + DK^{l-f} + CK^{l-2f}$, etc. la quantité $1 - nK^f + \frac{n.n-1}{1.2}K^{2f}$, etc., et que l'on multiplie les termes qui se correspondent, on aura tous les termes du produit des deux séries primitives, dans lesquels l'exposant est l, et ils seront..... $EK^l - nDK^l + \frac{n.n-1}{1.2}CK^l$, etc.

Mais on voit, par la formule du binôme, que le coefficient E est $\frac{n.n+1.n+2.n+3 \ldots n+l-1}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots l}$, et peut se changer en cet autre.......... $\frac{n+l-1.n+l-2 \ldots\ldots\ldots l+1}{1.2.3.4 \ldots\ldots n-1}$. En écrivant les facteurs du numérateur dans un ordre inverse, et en y effaçant, ainsi qu'au dénominateur, tous ceux qui sont compris entre

n et l inclusivement, comme étant communs aux deux termes de la fraction, on aura donc

$$EK^l = \frac{n+l-1 \cdot n+l-2 \ldots\ldots l+1\, K^l}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n-1};$$

mais, à cause de $p + 1 - n = l$, on a $p = n + l - 1$, et par conséquent

$$EK^l = \left\{\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot \text{etc.} \ldots\ldots p+2-n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n-1}\right\} K^l.$$

On trouvera de même que

$$-nDK^l = -\left\{\frac{p-f}{1} \cdot \frac{p-f-1}{2} \cdot \frac{p-f-2}{3} \,\text{etc.} \ldots\ldots \frac{p-f+2}{n-1}\right\} nK^l$$

$$\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} cK^l = \left\{\frac{p-2f}{1} \cdot \frac{p-2f-1}{2} \cdot \frac{p-2f-2}{3} \,\text{etc.} \ldots \frac{p-2l+2-n}{n-1}\right\} \cdot \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} K^l,$$

et ainsi de suite. Si donc on fait $K = 1$, $p - f = q$, $q - f = r$, $r - f = s$ on aura pour le nombre des manières dont on peut amener le point $p + 1$, avec n de dés,

$$+ \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \text{etc.} \ldots\ldots \frac{p+2-n}{n-1}$$

$$-\left\{\frac{q}{1} \cdot \frac{q-1}{2} \cdot \frac{q-2}{3} \cdot \text{etc.} \ldots\ldots \frac{q-2-n}{n-n}\right\} \frac{n}{1}$$

$$+\left\{\frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \text{etc.} \ldots\ldots \frac{r+2-n}{n-1}\right\} \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$$

$$-\left\{\frac{s}{1} \cdot \frac{s-1}{2} \cdot \frac{s-2}{3} \cdot \text{etc.} \ldots\ldots \frac{s+2-n}{n-1}\right\} \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

Prenons pour exemple le nombre de ma-

nières d'amener le point 8 avec 4 dés. La formule ci-jointe devient, dans ce cas, $7 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$. Il n'est pas besoin d'avertir qu'il faut s'arrêter lorsque l'on rencontre des facteurs nuls ou négatifs.

En calculant pour trois dés le nombre des manières d'amener les points 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, on trouvera pour leur somme 108, c'est-à-dire, la moitié du nombre total des combinaisons possibles avec trois dés, qui est 216; d'où l'on voit que de passer 10 avec ce nombre de dés, ou de ne le pas faire, sont deux évènemens d'une égale probabilité.

L'évaluation du nombre des coups possibles dans la plupart des jeux de cartes, demande qu'on puisse connoître le nombre de manières de partager en plusieurs parties égales ou inégales la quantité de cartes qui composent un jeu. En prenant pour exemple le piquet, on peut se proposer de trouver en combien de manières les 32 cartes qui composent ce jeu peuvent être partagées entre les deux joueurs et le talon.

De même que les coefficiens des termes de la puissance m du binôme font connoître le nombre des combinaisons différentes que l'on peut faire de m, choses prises en nombre donné, ou le nombre de manières dont on peut partager m, choses en deux parties, l'une d'elles en renfermant n et l'autre $m - n$; de

même aussi les coefficiens des termes du trinôme, du quadrinôme, ou en général du polynôme, élevé à une puissance m, sont les expressions du nombre de manières dont on peut distribuer m, choses en trois, quatre, ou un plus grand nombre de parties, composées de n, p, q, r, de ces choses, mais dont la somme est égale au nombre total des quantités, ou à l'exposant de la puissance du polynôme.

En effet, soit le trinôme $(x + x' + x'')^m$, nous ferons $x + x' = p$, et on aura le binôme $(p + x'')^m$, qui a pour développement

$$p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} x'' + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} p^{m-2} x''^2 \text{ etc.} \ldots$$
$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots\ldots m-n+1\, p^{m-n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n} x''^n$$

Mais si on développe le facteur p^{m-n} du terme général de cette formule, qui est lui-même un binôme $(x + x')^{m-n}$, on aura

$$p^{m-n} = x^{m-n} + \frac{(m-n-1)}{1} x^{m-n-1} x' \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(m-n)(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-n-2} x'^2 \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots\ldots m-n-q+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q} x^{m-n-q} x'^q$$

On voit donc que chaque terme de la première suite fournira, par la substitution de

la seconde, une suite de termes, et le résultat aura pour terme général

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots\ldots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$
$$\cdot \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots\ldots (m-n-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots q} x^{m-n} x'^q x''^{n-q}$$

Le coefficient de ce terme exprime en combien de manières on peut partager un nombre de choses en trois parties, dont l'une en renferme n, l'autre q, et la dernière $m - n - q$; cela est évident par la théorie de la multiplication des facteurs semblables; mais on peut encore s'en rendre raison de cette manière : m quantités combinées n à n donnent, comme l'on sait, $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots\ldots m-n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$ combinaisons, à chacune de celles-ci, peut répondre l'une quelconque des

$$\frac{(m-n)(m-n+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (m-n-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q}$$

combinaisons des $m - n$, choses restantes prises q à q, dont le nombre total des partages de m quantités en deux parties, l'une de m, et l'autre de q, sera exprimé par le produit des quantités que nous venons de trouver, et la dernière partie qui renferme un nombre $m - n - q$ de choses, est une conséquence nécessaire des deux autres. Si l'on vouloit tenir compte des divers arrangemens ou ordres que peut présenter chaque combinaison, il faudroit supprimer les diviseurs.

L'analogie nous conduit au terme général du quadrinôme, c'est-à-dire, à celui du développement de $(x + x' + x'' + x''')^m$, et qui est

$$\frac{m.m-1\ldots\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{(m.m-n).(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots q}$$
$$\cdot\frac{(m-n-q).(m-n-q-1)\ldots(m-n-q-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r}x^{m-n-q-r}x'^{n}x''^{q}x'''^{r}$$

Cette formule peut être mise sous une forme plus simple, en faisant $m-n-q-r=p$, et en multipliant le coefficient par la quantité $\frac{(m-n-q-r).(m-n-q-r-1)\ldots\ldots 1}{(m-n-q-r).(m-n-q-r-1)\ldots\ldots 1}$, qui est évidemment égale à l'unité, on aura alors

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{(1.2.3\ldots p).(1.2.3\ldots n).(1.2.3\ldots q).(1.2.3\ldots r)}x^{p}x'^{n}x''^{q}x'''^{r}$$

en observant d'ailleurs que $p+n+q+r=m$.

Le coefficient de $x^p x'^n x''^q x'''^r$ marque en combien de manières on peut partager un nombre m de choses en quatre parties; la première de n, la seconde de q, la troisième de r, et la quatrième de p.

En appliquant ces formules au cas du piquet proposé ci-dessus, il est clair que le coefficient général du binôme nous donnera la solution cherchée, et qu'alors $m = 32$, $n = 12$,

$n=12$, $q=8$, on aura donc pour le nombre cherché

$$\cdot\frac{32.31\ldots\ldots 21}{1.2.3\ldots\ldots 12}\cdot\frac{20.21\ldots\ldots 13}{1.2.3\ldots\ldots 8};$$

et, si l'on ajoute au numérateur et au dénominateur du dernier produit les facteurs 9, 10, 11 et 12, on aura

$$\frac{32.31\ldots\ldots 9}{\{1.2.3\ldots\ldots 12\}^2};$$

et, en développant ces produits, on trouvera 28,443, 124,054,800 pour le nombre qui marque en combien de manières le jeu peut être partagé entre les joueurs et le talon.

On a vu (*page 26*) que dans le cas de plusieurs épreuves de deux évènemens contradictoires, le terme $\frac{p.(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q}\cdot\frac{n^{p-q}m^q}{(n+m)^p}$ exprimoit la probabilité d'amener q de fois l'évènement dont la probabilité est $\frac{m}{m+n}$, et $p-q$ l'évènement contradictoire dont la probabilité est $\frac{n}{m+n}$ dans un nombre p d'épreuves.

Si l'on a trois évènemens dont les probabilités soient $\frac{x}{x+x'+x''}$, $\frac{x'}{x+x'+x''}$, $\frac{x''}{x+x'+x''}$, le terme général de la formule du binôme

trouvé plus haut, étant divisé par..... $(x + x' + x'')^m$, exprimera la probabilité d'amener dans un nombre m d'épreuves $m-n$ fois l'évènement dont la probabilité est $\frac{x}{x+x'+x''}$, en même temps q fois l'évènement dont la probabilité est $\frac{x'}{x+x'+x''}$, et en même temps $n-q$ fois celui dont la probabilité est $\frac{x''}{x+x'+x''}$, on étendra aisément ces remarques, au cas de quatre ou un plus grand nombre d'évènemens, à l'aide de la formule du quadrinôme ou de celle du polynôme.

Pour donner une application très-simple de ces formules, nous nous proposerons cette question : *Dans une loterie composée de* i *numéros, dont il en sort à chaque tirage, on demande la probabilité que tous seront sortis après un nombre* m *de tirages.* Il est clair que, si l'on désigne pour un moment par x, x', x'', x''' le nombre de manières d'amener chaque numéro, on aura un polynôme dont le nombre des termes sera i, à élever à la puissance m; et, d'après ce qu'on vient de voir, les termes où toutes les lettres x, x', x'', x''' entreront à la fois, seront ceux auxquels il faut avoir égard, puisque ce sont les seuls qui désignent que tous les évènemens ont eu successivement ou alternativement lieu, un nombre de fois plus ou moins grand. La somme de tous les termes

divisés par $(x + x' + x'' + x'''$ etc.$)^m$ sera la probabilité cherchée; mais on observera qu'il faudra faire dans ces termes..... x, x', x'', x''' etc., chacun égal à l'unité, et que le diviseur deviendra ainsi i^m.

Supposons qu'on demande la probabilité qu'après sept jets on aura amené les différens points d'un dé, cette question est, pour le fond, la même que la précédente : le nombre des numéros est ici 6, et celui des épreuves ou tirages 7; il faudra donc élever $(x + x' + x'' + x''' + x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{v}})^7$: mais on voit que les termes de cette puissance, qui renferme toutes les lettres, ne peuvent être que les suivans :

$$\left.\begin{array}{l}
x^2.x'.x''.x'''.x^{\mathrm{iv}}.x^{\mathrm{v}}\\
x.x'^2.x''.x'''.x^{\mathrm{iv}}.x^{\mathrm{v}}\\
x.x'.x''^2.x'''.x^{\mathrm{iv}}.x^{\mathrm{v}}\\
x.x'.x''.x'''^2.x^{\mathrm{iv}}.x^{\mathrm{v}}\\
x.x'.x''.x'''.x^{\mathrm{iv}2}.x^{\mathrm{v}}\\
x.x'.x''.x'''.x^{\mathrm{iv}}.x^{\mathrm{v}2}
\end{array}\right\}$$

puisque leurs exposans sont formés des seules manières dont on puisse faire 7 avec six nombres. Leurs coefficiens se trouveront, par la formule suivante, tirée par l'induction de celles que nous avons données plus haut:

$$\frac{1.2\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots p\times1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots r\times1.2.3\ldots s\times1.2.3\ldots f}$$

On voit qu'ils doivent tous être les mêmes, puisqu'à chacun d'eux, on ne fait que changer successivement p en n, en q, en r, en s, en t : on a donc, pour l'un d'eux,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots 7}{1.2} = 3.4.5.6.7,$$

et pour leur somme,

$$6.3.4.5.6.7;$$

enfin, pour la probabilité de l'évènement cherché,

$$\frac{6.3.4.5.6.7}{6^7} = \frac{3.4.5.7}{6^5} = \frac{420}{7776} \text{ ou } \frac{1}{18} \text{ environ.}$$

On a dit ci-dessus (*page* 83) que le plus grand terme de la quantité $(n+m)^{pq(n+m)}$ étoit celui où se trouvoit le facteur $n^{pqn}.m^{pqm}$; nous allons démontrer cela *à priori*, et donner en même temps le moyen d'avoir le plus grand terme du binôme, du quadrinôme, etc.

Le terme général de la puissance du binôme $m+n$, élevé à la puissance r, est, comme l'on sait,

$$\frac{r.r-1\ldots\ldots\ldots r-h+1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots h}\, m^{r-h}\, n^h.$$

Celui qui le précède, et celui qui le suit, sont :

$$\frac{r.r-1\ldots\ldots\ldots r-h+2}{1.2.3\ldots\ldots\ldots h-1}\, m^{r-h+1}\, n^{h-1}$$

$$\text{et } \frac{r.r-1\ldots\ldots\ldots r-h}{1.2.3\ldots\ldots\ldots h+1}\, m^{r-h-1}\, n^{h+1}.$$

Si le nombre h est supposé répondre au plus grand terme de la série, ces deux-ci doivent être plus petits; et, en désignant le plus grand par M, ils deviennent

$$\left.\begin{array}{l} \frac{hM}{r-h+1}\cdot\frac{m}{n} \\ \frac{(r-h)M}{h+1}\cdot\frac{n}{m} \end{array}\right\}$$

et on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} M > \frac{h}{r-h+1}\, M\frac{m}{n} \\ M > \frac{(r-h)}{h+1}\, M\frac{n}{m} \end{array}\right\}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left.\begin{array}{l} 1 > \frac{h}{r-h+1}\cdot\frac{m}{n} \\ 1 > \frac{(r-h)}{h+1}\cdot\frac{n}{m} \end{array}\right\}$$

d'où il suit,

$$\left.\begin{array}{l} nr - nh + n > mh \\ m + mh > nr - nh \end{array}\right\}$$

et enfin

$$\left.\begin{array}{l} h < \frac{nr+n}{m+n} \\ h > \frac{nr-m}{m+n} \end{array}\right\}$$

Le nombre entier qui tombera entre ces deux limites sera le nombre cherché ; ou bien, si ces deux quantités sont entières, il y aura deux termes consécutifs égaux, et les plus grands de toute la formule. Ce cas a lieu lorsque $m = n$, et que r est un nombre impair ; car les limites demeurent alors $\frac{r+1}{2}$ et $\frac{r-1}{2}$, qui sont des entiers.

Si on fait $r = pq\,(m+n)$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} h < \frac{npq\,(m+n)+n}{m+n} = npq + \frac{n}{m+n} \\ h > \frac{npq\,(m+n)+m}{m+n} = npq - \frac{m}{m+n} \end{array}\right\}$$

d'où il suit $h = npq$, comme on l'a dit à l'endroit cité.

Si n étoit un binôme $u+s$, en sorte qu'on demandât le plus grand terme du trinôme $(m+u+s)^r$, après avoir trouvé le plus grand terme de la série

$$m^r + rm^{r-1}(u+s) + \frac{r.r-1}{2}\, m^{r-2}(u+s)^2$$

que nous supposerons $= 2M$. Comme il renferme implicitement la série qui provient du développement n^h, ou de $(u+s)^h$, on cherchoit, comme précédemment, le plus grand terme de cette suite; et, nommant h'

l'exposant de s dans ce terme, on auroit

$$\left.\begin{array}{l} h' < \frac{sh+s}{u+s} \\ h' > \frac{sh-s}{u+s} \end{array}\right\}$$

et par conséquent

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots r}{1.2.3\ldots r-h-h' \times 1.2.3\ldots h-h' \times 1.2.3\ldots h'}\cdot m^{r-h}\, u^{h-h'} s^{h'}$$

pour le plus grand terme du trinôme. Soit $r = p\,(m+u+s)$, on aura d'abord $h = p\,(u+s)$ et $h' = ps$, dont le plus grand terme du trinôme $(m+u+s)^{p(m+u+s)}$ est

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots p(m+u+s)}{1.2.3\ldots\ldots pm.1.2.3\ldots\ldots pu\ldots\ldots 1.2.3\ldots\ldots ps}\, m^{pm}\, u^{pu}\, s^{ps}.$$

Il résulte de cette formule que, dans le cas de $p\,(m+u+s)$ épreuves de trois évènemens possibles, la chance la plus probable est celle qui amènera chacun d'eux un nombre de fois proportionnel à leur probabilité respective, ainsi qu'on l'a fait voir pour le cas de deux évènemens contradictoires. Nous ne pousserons pas plus loin cet objet ; on voit assez que la marche et les résultats seront les mêmes pour tous les autres cas.

Nous nous proposerons, pour terminer cet article, le problême suivant, extrait *des*

Mélanges analytiques de *Moivre*, ainsi que la plus grande partie de ce qui précède :

Trois joueurs, désignés par A, B, C, *doivent tirer, dans l'ordre de leur lettre, chacun une boule, d'une urne qu'on suppose contenir un nombre* a *de boules blanches, et* b *de boules noires. Celui qui le premier tirera une boule blanche, gagnera. On demande, en supposant que le gain soit représenté par l'unité, quelle doit être la mise de chaque joueur.*

1°. A a pour lui la probabilité $\frac{a}{a+b}$ d'amener une boule blanche, et contre lui $\frac{b}{a+b}$ d'amener une boule noire.

2°. Après le tirage de A, il reste, au cas qu'il n'ait pas gagné, un nombre $b-1$ de boules noires. Ainsi, B a pour lui, dans cette hypothèse, la probabilité $\frac{a}{a+b-1}$; mais cette hypothèse elle-même a pour probabilité propre $\frac{b}{a+b}$: on aura donc la probabilité absolue en faveur de B $\frac{a.b}{(a+b)(a+b-1)}$.

3°. C, s'il vient à tirer, aura $\frac{a}{a+b-2}$ pour amener une boule blanche ; mais il ne peut courir cette chance que dans le cas où A et B n'auroient pas gagné. La probabilité particulière de chacun de ces évènemens est $\frac{a}{a+b}$ et $\frac{b-1}{a+b-1}$; la probabilité de leur con-

cours sera $\frac{b.(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}$; et par conséquent celle du gain de C. $\frac{b.b-1}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)}$.

Si A recommence à tirer avant que le sort soit décidé, il aura $\frac{a}{a+b-3}$ pour la probabilité d'avoir une boule blanche ; mais, comme ce tirage suppose le concours des trois évènemens contraires à A, B et C, dont les probabilités sont $\frac{b}{a+b}$, $\frac{b-1}{a+b-1}$, $\frac{b-2}{a+b-1}$, on aura

$$\frac{ab.(b-1)(b-2)}{(a+b)(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)}, \text{ etc.}$$

de sorte qu'en faisant, pour abréger $a+b=n$, si on écrit la suite

$$\frac{a}{n}+\frac{ab}{n.n-1}+\frac{ab \times b-1}{n.n-1.n-2}+\frac{a.b.(b-1)(b-2)}{n.n-1.n-2.n-1},$$

dont la loi est facile à saisir, la somme de tous les termes pris dans les rangs 1.4.7.10, ou pris de 3 en 3, à compter du premier, sera l'espérance du premier joueur ; celle des termes dont le rang est 2.5.8.11.etc., ou pris de 3 en 3, à compter du deuxième, sera l'espérance du second ; enfin, les termes des rangs 3.6.9.12, pris de 3 en 3, à partir du troisième, formeront l'espérance de C. Si l'on fait

$$\left.\begin{aligned} n &= 12 \\ a &= 4 \\ b &= 8 \end{aligned}\right\}$$

la suite précédente deviendra

$$\frac{4}{12}+\frac{4.8.7}{12.11}+\frac{4.8.7}{12.11.10}+\frac{4.8.7.6}{12.10.11.9}+\frac{4.8.7.6.5}{12.11.10.9.8}$$
$$+\frac{4.8.7.6.5.4}{12.11.10.9.8.7}+\frac{4.8.7.6.5.4.3}{12.11.10.9.8.7.6}+\frac{4.8.7.6.5.4.3.2}{12.11.10.9.8.7.6.5}$$
$$+\frac{4.8.7.6.5.4.3.2.1}{12.11.10.9.8.7.6.5.4}.$$

En prenant les termes que nous avons désignés, et en réduisant les fractions à leurs plus simples expressions et au même dénominateur, on trouvera les espérances des joueurs $A.B.C$ proportionnels aux nombres 77.53.35 dessous, qu'ils doivent déposer avant de jouer les sommes

$$\frac{77}{77+53+35}M, \frac{53 \quad\quad M}{77+53+35}, \frac{35 \quad\quad M}{77+53+35}$$

pour avoir droit à la somme M. (a)

(a) Le développement de toutes les combinaisons possibles, dans la plupart des questions relatives aux calculs des probabilités, donne lieu à des formules qui renferment les produits successifs d'un très-grand nombre de facteurs, et souvent même la somme d'un nombre considérable d'expressions de ce genre : mais, comme il ne s'agit jamais que d'assigner des rapports entre les quantités, les géomètres ont trouvé des méthodes d'approximation, à l'aide desquelles on arrivera très-promptement à la valeur suffisamment exacte d'une formule que sa longueur auroit rendue impossible à calculer rigoureusement. On peut consulter, sur cet objet, le calcul différentiel d'Euler, *pag.* 467, et les *Mémoires de l'Académie*, ann. 1782 et 1783.

TABLEAU GÉNÉRAL
DE LA SCIENCE
QUI A POUR OBJET L'APPLICATION DU CALCUL AUX SCIENCES POLITIQUES ET MORALES.

Dans les premiers âges des sciences, un seul homme les cultive à la fois ; mais elles restent isolées, car on ne doit placer qu'au nombre des rêves scientifiques ces chimériques rapprochemens, alors enfantés par quelques imaginations ardentes. Au contraire, lorsque leurs progrès forcent les savans à s'en partager les diverses branches, on voit s'établir entr'elles des lignes de communication, et l'application d'une science à une autre en devient souvent la partie la plus utile ou la plus brillante.

Cette application exige non seulement que chacune des deux sciences ait atteint une certaine étendue, mais que chacune aussi soit assez répandue pour qu'il se trouve des hommes qui, les possédant toutes deux à la fois, puissent en parcourir la double carrière d'un pas égal et sûr.

L'application du calcul aux sciences morales et politiques n'a donc pu naître qu'à l'époque où les mathématiques ont été cultivées avec succès chez des peuples dont la liberté ait eu la tranquillité pour compagne et les lumières pour appui. En Hollande, le célèbre Jean de Witt, disciple de Descartes ; et, en Angleterre, le chevalier Pétri, donnèrent les premiers essais de cette science dans le siècle dernier, à peu près à l'époque où Fermat et Pascal créoient le calcul des probabilités, qui en est une des premières bases, et n'osoient l'appliquer qu'aux jeux de hasard ; on n'avoit pas même eu l'idée de l'employer à des usages plus importans et plus utiles.

Maintenant l'étendue de ces applications permet de les regarder comme formant une science à part, et je vais essayer d'en tracer le tableau.

Comme toutes ces applications sont immédiatement relatives aux intérêts sociaux, ou à l'analyse des opérations de l'esprit humain, et que, dans ce dernier cas, elles n'ont encore pour objet que l'homme perfectionné par la société, j'ai cru que le nom de *mathématique sociale* étoit celui qui convenoit le mieux à cette science.

Je préfère le mot *mathématique*, quoiqu'actuellement hors d'usage au singulier, à ceux d'arithmétique, de géométrie, d'analyse, parce que ceux-ci indiquent une

partie de mathématiques, ou une des méthodes qu'elles emploient, et qu'il s'agit ici de l'application de l'algèbre, ou de la géométrie, comme de celle de l'arithmétique ; qu'il s'agit d'applications dans lesquelles toutes les méthodes peuvent être employées. D'ailleurs la dernière expression est équivoque, puisque le mot analyse signifie tantôt l'algèbre, tantôt la méthode analytique, et nous serons même obligés d'employer quelquefois ce même mot dans le sens qu'on lui donne dans d'autres sciences.

Je préfère le mot sociale à ceux de morale ou politique, parce que le sens de ces derniers mots est moins étendu et moins précis.

Cette exposition montrera toute l'utilité de cette science; on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle nous donne des idées pluspr écises, des connoissances plus certaines ; on verra combien, si cette science étoit plus répandue, plus cultivée, elle contribueroit et au bonheur et au perfectionnement de l'espèce humaine.

Deux observations suffiront pour le faire sentir. D'abord presque toutes les opinions, presque tous les jugemens qui dirigent notre conduite, s'appuient sur une probabilité plus ou moins forte, toujours évaluée d'après un sentiment vague et presque ma-

chinal, ou des apperçus incertains et grossiers.

Il seroit impossible sans doute de parvenir à soumettre au calcul toutes ces opinions, tous ces jugemens, comme il le seroit également de calculer tous les coups d'une partie de trictrac ou de piquet; mais on pourroit acquérir le même avantage qu'obtient aujourd'hui le joueur qui sait calculer son jeu, sur celui qui ne joue que d'instinct et de routine.

De plus, les vérités absolues, celles qui subsistent indépendamment de toute mesure, de tout calcul, sont souvent inapplicables et vagues, et pour les choses qui sont susceptibles d'être mesurées, ou de recevoir de nombreuses combinaisons ; elles ne s'étendent pas au delà des premiers principes, et deviennent insuffisantes dès les premiers pas. Alors, en se bornant aux raisonnemens sans calcul, on s'expose à tomber dans des erreurs, à contracter même des préjugés ; soit en donnant à certaines maximes une généralité qu'elles n'ont pas, soit en déduisant de ces maximes des conséquences qui n'en résultent point, si on les prend dans le sens et l'étendue où elles sont vraies. Enfin, l'on arriveroit bientôt au terme où tout progrès devient impossible sans l'application des méthodes rigoureuses du calcul et de la science des combinaisons, et la marche des sciences

morales et politiques, comme celle des sciences physiques, seroit bientôt arrêtée.

Lorsqu'une révolution se termine, cette méthode de traiter les sciences politiques acquiert un nouveau genre, comme un nouveau degré d'utilité. En effet, pour réparer promptement les désordres inséparables de tout grand mouvement, pour rappeler la prospérité publique, dont le retour peut seul consolider un ordre de choses contre lequel s'élèvent tant d'intérêts et de préjugés divers, il faut des combinaisons plus fortes, des moyens calculés avec plus de précision, et on ne peut les faire adopter que sur des preuves qui, comme les résultats des calculs, imposent silence à la mauvaise foi, comme aux préventions. Alors il devient nécessaire de détruire cet empire usurpé par la parole sur le raisonnement, par les passions sur la vérité, par l'ignorance active sur les lumières. Alors, comme tous les principes d'économie publique ont été ébranlés, comme toutes les vérités reconnues par les hommes éclairés ont été confondues dans la masse des opinions incertaines et changeantes, on a besoin d'enchaîner les hommes à la raison par la précision des idées, par la rigueur des preuves, de mettre les vérités qu'on leur présente hors des atteintes de l'éloquence des mots ou des sophismes de l'intérêt; on a besoin d'accoutumer les esprits à la marche lente et paisible de la discussion pour les préserver de cet art perfide par lequel on s'empare de leurs passions pour les entraîner dans l'erreur et dans le crime; de cet art qui, dans les temps d'orage, acquiert une perfection si funeste.

Or, combien cette rigueur, cette précision qui accompagne toutes les opérations auxquelles s'applique le calcul, n'ajouteroit-elle pas de force à celle de la raison! Combien ne contribueroit-elle point à en assurer la marche sur ce terrain couvert de débris, et qui, long-temps ébranlé par de profondes secousses, éprouve encore des agitations intestines!

La mathématique sociale peut avoir pour objet les hommes, les choses, ou à la fois les choses et les hommes.

Elle a les hommes pour objet lorsqu'elle enseigne à déterminer, à connoître l'ordre de la mortalité dans telle ou telle contrée, lorsqu'elle calcule les avantages ou les inconvéniens d'un mode d'élection. Elle a les choses pour objet lorsqu'elle évalue les avantages d'une loterie, et qu'elle cherche d'après quels principes doit être déterminé le taux des assurances maritimes. Enfin, elle a en même temps l'homme et les choses pour objet, quand elle traite des rentes viagères, des assurances sur la vie.

Elle peut considérer l'homme ou comme un individu dont l'existence, quant à sa

durée et à ses relations, est soumise à l'ordre des évènemens naturels, et elle peut aussi s'appliquer à la marche des opérations de l'esprit humain.

Elle considère l'homme comme individu quand elle fait connoître avec précision, et par les faits, l'influence que le climat, les habitudes, les professions ont sur la durée de la vie; elle considère les opérations de l'esprit, quand elle pèse les motifs de crédibilité, qu'elle calcule la probabilité qui résulte ou des témoignages, ou des décisions.

Le calcul ne pourroit s'appliquer immédiatement qu'à une seule chose à la fois, et ses usages seroient très-bornés, si les hommes n'avoient été conduits par la nécessité à établir pour les choses une mesure commune de leur valeur; mais l'existence de cette mesure permet de comparer toutes les choses entr'elles, et les soumettre au calcul, malgré leurs différences naturelles dont alors on fait abstraction.

Cependant la détermination de cette mesure commune, telle qu'elle résulte des besoins de l'homme et des lois de la société, est bien éloignée de cette précision, de cette invariabilité qu'exige une véritable science, et la théorie de la réduction des valeurs à une mesure commune devient une partie nécessaire de la mathématique sociale.

La valeur d'une chose peut n'être pas la même, si on la considère comme actuellement et absolument disponible, comme ne l'étant que pour un temps, après lequel elle doit cesser de l'être pour le même individu, comme ne devant le redevenir qu'à une certaine époque.

Ces diverses considérations s'appliquent à toutes les choses dont on peut tirer un service quelconque, sans les altérer, ou dont les altérations peuvent être évaluées.

De là naît la théorie de ce qu'on nomme intérêt de l'argent.

Quel que soit l'objet que cette science considère, elle renferme trois parties principales; la détermination des faits, leur évaluation, qui comprend la théorie des valeurs moyennes, et les résultats des faits.

Mais, dans chacune de ces parties, après avoir considéré les faits, les valeurs moyennes, ou les résultats, il reste à en déterminer la probabilité. Ainsi, la théorie générale de la probabilité est à la fois une portion de la science dont nous parlons, et une des bases de toutes les autres.

On peut diviser les faits en deux classes; les faits réels donnés par l'observation, et les faits hypothétiques résultant des combinaisons faites à volonté. Sur tant d'individus nés le même jour, tant sont morts la première année, tant la seconde, tant la troisième; voilà des faits réels. Je suppose

deux dés de six faces, je puis amener avec eux tous les nombres depuis 2 jusqu'à 12; voilà des faits hypothétiques. On forme le tableau des faits réels d'après l'observation; celui des faits hypothétiques est la suite des combinaisons possibles.

Parmi ces faits hypothétiques, les uns sont semblables, soit absolument, soit seulement par certains caractères. La méthode de les classer, celle de connoître le nombre des combinaisons différentes, considérées sous tel ou tel point de vue, ou le nombre de fois que chaque combinaison est répétée, dépend de la théorie générale des combinaisons, base première de la science dont nous traitons.

De même, en considérant la suite des faits observés et différens en eux-mêmes, il arrive que l'on a besoin de faire abstraction de quelques unes de ces différences, et de ranger dans une même classe tous ceux qui sont semblables, quant aux autres circonstances, afin de connoître, soit le rapport des nombres entre ceux qui ne diffèrent que dans tel ou tel point, soit quelles sont les circonstances qui accompagnent plus ou moins constamment ceux qu'on a rangés dans telle ou telle classe séparée.

Ainsi, par exemple, dans des tables de naissances et de mortalités, on sépare les hommes d'avec les femmes, soit pour connoître le nombre des uns et des autres, soit pour examiner l'ordre de mortalité particulier à chaque sexe. C'est par ce seul moyen que, des faits individuels, on peut s'élever à des faits généraux, et connoître ceux qui résultent des observations. Le moyen général de classer les faits observés suivant l'ordre qu'on a besoin de leur donner, et de pouvoir saisir facilement les rapports qu'ils présentent, est pour ces faits, ce que la théorie des combinaisons est pour les faits hypothétiques. Cet art de déduire les faits généraux des faits observés, est encore une des bases de la mathématique sociale; et il y a deux parties, l'une, la recherche des faits généraux; l'autre, celle des lois générales qui peuvent en résulter; et c'est proprement l'art de faire des découvertes par l'observation.

Un tableau qui exprime pour un nombre d'hommes nés le même jour, combien survivent après la première année, après la seconde, etc. présente une suite de faits généraux, tels que celui-ci : dans tels pays la moitié des hommes périt avant d'avoir atteint l'âge de dix ans : mais, si je puis représenter ce même tableau par une formule, alors j'ai une loi générale; telle seroit celle-ci : sur un nombre donné d'hommes de tel âge, il en meurt chaque année un nombre égal, ou, ce qui revient au même, le rapport du nombre des morts, pour chaque année, à celui des survivans,

croît suivant une progression arithmétique (a).

Entre les faits donnés par l'observation, souvent on n'en trouvera pas deux qui soient rigoureusement semblables. Cependant, quand leur différence est très-petite, on est obligé de les regarder comme absolument les mêmes, si on veut parvenir à des résultats généraux, et ne pas se perdre dans l'immensité des détails : alors il faut substituer à ces faits observés, un fait unique qui puisse les représenter avec exactitude.

Le même fait individuel, s'il est observé plusieurs fois, peut aussi se présenter avec des différences qui sont une erreur des observations; il faut donc alors chercher, d'après ces observations, ce qu'on croit le plus propre à représenter le fait réel; puisque le plus souvent, il n'existe point de motifs pour préférer exclusivement une de ces observations à toutes les autres. Enfin, si nous considérons un grand nombre de faits de la même nature, dont il naît des effets différens, soit qu'il s'agisse de faits déjà arrivés, soit qu'il s'agisse de faits futurs, également possibles, il en résulte,

(a) Cette loi a été proposée par Moivre : elle est assez d'accord avec l'observation, depuis 10 ans jusqu'à 80; et on peut, dans plusieurs circonstances, l'employer pour abréger les calculs. Lambert, et le cit. Duvillard ont présenté d'autres lois de mortalité plus exactes, mais plus compliquées.

dans le premier cas, une valeur commune de ces effets, et dans le second (pour celui qui, devant éprouver un de ces effets, peut les atteindre également); il en résulte, dis-je, une situation qu'on doit chercher à évaluer pour pouvoir comparer, ou cet effet commun ou cette expectative, à d'autres effets, à d'autres situations du même genre.

La détermination de ce fait unique, qui en représente un grand nombre d'autres, qu'on peut substituer à ces faits dans les raisonnemens ou dans les calculs, est une sorte d'appréciation des faits observés ou regardés comme également possibles; et c'est ce qu'on nomme une valeur moyenne.

La théorie des valeurs moyennes doit être considérée comme un préliminaire de la mathématique sociale; car elle n'est pas bornée à cette application particulière en calcul.

Dans toutes les sciences physico-mathématiques, il est également utile d'avoir des valeurs moyennes des observations ou du résultat d'expériences.

Ainsi, la science dont nous traitons ici doit naturellement être précédée par cinq théories mathématiques, qui peuvent être développées indépendamment de toute application :

La théorie des grandeurs susceptibles d'accroissemens proportionnels au temps,

qui renferme celle de l'intérêt de l'argent;

La théorie des combinaisons;

Celle de la méthode de déduire des faits observés, soit les faits généraux, soit les lois plus générales encore;

La théorie du calcul des probabilités;

Enfin, celle des valeur moyennes.

Dans cette science, comme dans toutes les autres applications du calcul, si des connoissances profondes en mathématiques sont nécessaires pour résoudre certaines questions, pour établir même certaines théories, pour y faire des pas nouveaux, les connoissances élémentaires suffisent pour entendre la solution au moins de la plupart de ces questions, comprendre ces théories, en déduire les applications les plus immédiates à la pratique.

La science ne peut faire de progrès qu'autant qu'elle sera cultivée par des géomètres qui auront approfondi les sciences sociales; mais elle peut devenir, quant à son utilité pratique, une connoissance presque générale, parmi tous ceux qui voudront s'éclairer sur les objets importans qu'elle embrasse.

Il est possible de la traiter d'une manière simple, élémentaire; de la mettre à portée de ceux à qui ni les premières théories mathématiques, ni l'habitude du calcul ne sont pas étrangères.

Il a fallu toute la sagacité, tout le génie de plusieurs grands géomètres, pour donner une théorie de la lune, d'après laquelle on pût former des tables d'un usage sûr. Mais la formation de ces mêmes tables, mais leur application à la détermination des longitudes, n'exigent que des connoissances élémentaires.

Ce n'est donc pas d'une science occulte, dont le secret soit renfermé entre quelques adeptes, qu'il s'agit ici, c'est d'une science usuelle et commune; c'est, à la fois, et d'accélérer les progrès d'une théorie dont dépendent ceux des sciences les plus importantes au bonheur public, et de répandre sur plusieurs parties de ces mêmes sciences, des lumières d'une utilité générale et pratique.

OBJETS DE LA MATHÉMATIQUE SOCIALE.

I.	II.
L'HOMME.	LES CHOSES.
1. L'homme individu. 2. Les opérations de l'esprit humain.	Réduction des choses à une mesure commune. Calcul des valeurs (1).

III.

L'HOMME ET LES CHOSES.

Méthode de la Science.

I.	II.
Détermination des faits.	Appréciation des faits. Formation et usage des valeurs. Moyens 5. Leurs probabilités (4).
1. Faits observés. 2. Faits hypothétiques.	
1. Énumération des faits. 2. Classification des faits. (3) Combinaisons (2). Probabilités des faits (4).	

III.

RÉSULTAT DES FAITS.

PROBABILITÉ DES RÉSULTATS.

Théories préliminaires qui doivent précéder les applications.

1. Théorie des grandeurs susceptibles d'accroissemens proportionnels;
2. Théorie des combinaisons;
3. Méthode de déduire des faits individuels observés, soit les faits généraux qui en résultent, soit les lois générales qui y sont observées;
4. Théorie générale des probabilités;
5. Théorie générale des valeurs moyennes.

Je vais maintenant esquisser les divers objets d'économie sociale auxquels le calcul peut s'appliquer;

1°. L'homme considéré comme individu.

On sait combien il est modifié par la température du climat, la nature du sol, la nourriture, les habitudes générales de la vie; la nourriture, les pratiques préservatrices, les institutions sociales; et on peut demander comment ces causes diverses influent sur la durée de la vie, sur le rapport du nombre des individus de chaque sexe, soit à la naissance, soit aux différens âges, sur celui du nombre des naissances, des mariages, des morts, avec le nombre des individus existans, sur celui des céliba-

taires, des mariés, des veufs, soit de chaque sexe, soit des deux classes, avec ce même nombre total.

On verra ensuite de quelle manière ces causes influent sur la mortalité causée par les différentes classes de maladies.

Enfin, jusqu'à quel point on peut en reconnoître l'influence sur la force, sur la taille, sur la forme des individus, ou même sur leurs qualités morales.

On peut considérer ou l'action séparée de chacune de ces causes, ou l'action de plusieurs réunies entr'elles; et il faut, à la fois, examiner si, dans ce dernier cas, les deux, les trois causes réunies agissent d'une manière isolée; ou si, se combinant réellement, elles corrigent ou aggravent les effets que chacune d'elles auroit pu produire.

L'observation ne peut faire connoître ici que la coexistence entre le fait regardé comme cause, à celui qu'on regarde comme l'effet. Il reste à déterminer par le calcul des probabilités, si l'on doit ou non regarder cette coexistence comme résultant d'une loi constante, si l'effet doit être attribué à la cause qu'on lui suppose, ou au hasard, c'est-à-dire à une cause inconnue.

Si je jette deux dés 50 fois de suite, et que j'amène 27 fois un nombre impair, et 23 fois un nombre pair, quoique je sache que des 36 combinaisons possibles, qui

donnent depuis 2 jusqu'à 12 points, 18 produisent un nombre pair, et 18 un nombre impair, il ne me viendra pas dans l'idée que je doive attribuer à une inégalité dans les dés cette supériorité des nombres impairs. Mais, si je réitère cette même épreuve cent fois de suite, si alors j'ai amené environ 2700 fois un nombre impair contre environ 2300 un nombre pair, si, dans ces cent expériences, 98 contre 2 m'ont présenté cet avantage en faveur des nombres impairs, alors n'aurai-je pas lieu de croire que les dés sont formés de manière que, l'un donnant plus aisément un nombre pair, et l'autre un nombre impair, il en résulte plus de facilité pour amener un nombre impair, en les jetant tous deux à la fois?

On voit que cette même observation s'applique également aux faits naturels, et qu'on s'exposeroit à des erreurs même ridicules, si on concluoit leur dépendance mutuelle d'un petit nombre de coïncidences; si, par exemple, après avoir trouvé qu'à une telle époque, dans un tel lieu de trois mille habitans il se trouve six aveugles, et quatre seulement dans un autre de la même population, on alloit en conclure que le climat du premier est plus défavorable à la conservation de la vue.

On voit qu'on ne peut ici rassembler les faits qu'avec le secours de la puissance publique. En effet, s'ils sont en petit nombre, ils ne conduisent à aucune conclusion assez probable pour en lever des conséquences utiles, et les recherches d'un ou de plusieurs individus ne peuvent donner ce qu'on pourroit obtenir facilement par l'examen, soit des registres de naissances, de mariages et de morts, soit des tableaux des citoyens ou de ceux des gardes nationales.

Mais alors, si on veut que ces registres soient vraiment utiles à la connoissance de l'homme, il faut leur donner la forme et l'étendue qu'exige ce but jusqu'ici trop négligé. Il faut, de plus, trouver les moyens de disposer les dépouillemens de ces registres nombreux, de manière à ce que les tables qui en résultent puissent offrir à l'observateur tous les faits généraux qui sortent de cette masse de faits, et non pas seulement ceux que l'on auroit eu intention de chercher en dressant ces tables.

Les applications du calcul aux opérations intellectuelles, soit d'un homme seul, soit de plusieurs, ne présentent pas une carrière moins vaste.

En les considérant en elles-mêmes, on peut y appliquer la théorie des combinaisons.

La théorie du syllogisme, donnée par Aristote, en est le premier et presque le seul exemple.

Mais, quoique toutes les preuves rigou-

reuses des vérités intellectuelles puissent se réduire à cette forme, comme elle n'est pas la seule marche qu'on puisse suivre; comme la réduction d'une suite un peu étendue de raisonnemens à la forme syllogistique seroit longue ou difficile, il seroit utile d'appliquer la théorie des combinaisons, soit à d'autres méthodes, soit aux moyens de faciliter ou de simplifier cette réduction.

Le calcul des probabilités nous apprend à connoître, à mesurer la véritable force des motifs de crédibilité, depuis l'adhésion que nous donnons aux vérités démontrées par le calcul ou le raisonnement rigoureux, jusqu'à l'opinion qui se forme d'après des témoignages; il nous enseigne à évaluer ceux qui peuvent résulter, soit de la liaison naturelle des faits entr'eux, pour la vérité d'un fait qui n'a pu être immédiatement observé, soit de leur ordre, en faveur de l'existence d'une intention de les produire.

Le même calcul apprendra également à estimer les motifs de crédibilité de même genre, ou d'une nature diverse, qui peuvent se combiner ou se combattre relativement à une même proposition : comme, par exemple, lorsqu'un fait improbable en lui-même, est cependant appuyé sur des témoignages imposans.

L'application du calcul à ces dernières questions aura l'avantage de porter le jour

de la raison sur des objets trop long-temps abandonnés aux influences séductrices de l'imagination, de l'intérêt ou des passions.

Au lieu de céder machinalement à la force de certaines impressions, on saura la calculer et l'apprécier. C'est par ce seul moyen que l'on peut, à la fois, porter les derniers coups à la superstition comme au pyrrhonisme, à l'exagération de la crédulité comme à celle du doute.

C'est alors qu'on verra comment et pourquoi la force du sentiment qui nous porte à croire, s'affoiblit à mesure que les motifs de crédibilité sont appréciés avec plus d'exactitude; et, par conséquent, pourquoi une sorte de défiance accompagne si constamment les grandes lumières, tandis qu'une conviction intrépide est le partage de l'ignorance.

C'est enfin par là qu'on reconnoîtra la véritable différence entre les jugemens de l'instinct qui dirigent impérieusement nos actions habituelles, et ces résultats de la raison qui nous déterminent dans les actions importantes ou qui fixent nos opinions spéculatives.

Il faut ensuite fixer les limites de la probabilité, d'après laquelle, suivant la nature de la question, on peut diriger sa conduite, et comment, suivant la différence des effets résultant d'une action ou de l'action contraire, on doit ne se déterminer pour

un tel parti que sur des preuves, pour tel autre, d'après le plus léger degré de probabilité.

On doit compter aussi parmi ces applications aux opérations de l'esprit les moyens techniques ou même mécaniques, d'exécuter des opérations intellectuelles : tel est l'art de former, soit des tableaux historiques, chronologiques, ou scientifiques, soit des tables, soit des registres; tel est celui de former ou de deviner les chiffres; telles sont celles qu'on emploîroit pour trouver plus aisément le résultat d'un scrutin très-nombreux.

Si on passe ensuite aux opérations de l'esprit, exécutées à la fois par plusieurs hommes, après en avoir analysé la marche, la théorie des combinaisons peut s'appliquer à la forme, et le calcul à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, à l'examen des avantages et des inconvéniens des divers modes d'élire, à la probabilité qui en résulte pour la bonté du choix.

Là, se présente la distinction des décisions où l'on peut se contenter d'une simple pluralité, et de celles où l'on doit en exiger une plus forte; ou, si on ne l'a pas atteinte, il faut ou invoquer une autre décision, ou la remettre, ou enfin se conduire d'après le vœu de la minorité, parce que l'opinion de la majorité est du nombre de celles qu'il ne faut pas suivre, tant qu'elle reste au dessous d'un certain degré de probabilité.

De même, dans les élections, on distingue celles qui n'expriment qu'un jugement en faveur de la capacité absolue des sujets préférés; celles où l'on donne à la fois à quelques égards un vœu relatif, à d'autres un vœu absolu.

On sent combien l'inégalité des esprits qui concourent à ces opérations, les différences nécessaires suivant certaines circonstances dans la probabilité des diverses décisions données par un même individu, combien la mauvaise foi qu'on peut quelquefois soupçonner, peuvent mêler, à des questions simples en elles-mêmes, de considérations essentielles, mais difficiles à soumettre au calcul. On sent enfin qu'il faut trouver le moyen de connoître, par des observations, la probabilité d'un jugement d'un seul, ou du moins les limites plus ou moins étroites entre lesquelles on peut renfermer cette probabilité.

Telle est l'esquisse très-imparfaite des deux premières parties de la mathématique sociale.

La théorie des valeurs et des prix qui en expriment les rapports, en les réduisant à une mesure commune, doit servir de base à cette partie de la mathématique sociale qui a les choses pour objet.

Sans

Sans cela, le calcul ne pouvant s'appliquer qu'aux choses d'une même nature, n'auroit que des applications très-bornées et d'une foible utilité.

Tout ce qui sert aux besoins d'un individu, tout ce qui est à ses yeux de quelque utilité, tout ce qui lui procure un plaisir quelconque ou lui évite une peine, a pour lui une valeur dont l'importance de ce besoin, le degré de cette utilité, l'intensité de ce plaisir ou de cette peine sont la mesure naturelle.

Comme tous les hommes qui habitent un même pays, ont à peu près les mêmes besoins, qu'ils ont aussi en général les mêmes goûts, les mêmes idées d'utilité; ce qui a une valeur pour l'un d'eux, en a généralement pour tous.

Si un homme qui, ayant besoin de blé, peut disposer d'une certaine quantité de vin, en rencontre un autre qui ait besoin de vin, et dispose d'une certaine quantité de blé, alors il se fait entr'eux un échange, et l'un donne à l'autre deux mesures de blé, par exemple, pour une mesure de vin.

On peut dire d'abord que ces deux valeurs sont égales dans ce sens, que ces deux mesures de blé ont pour l'un de ces hommes la même valeur qu'une mesure de vin pour l'autre.

De plus, si, dans un même lieu, un pareil échange se fait entre un certain nombre

d'individus, suivant le même rapport, ces valeurs sont encore égales, dans ce sens que chacun peut à son gré avoir deux mesures de vin, ou réciproquement.

Voilà donc un rapport de valeur établi entre des quantités déterminées de blé et de vin; et l'on peut dire, vingt-cinq mesures de vin en valent cinquante de blé, et celui qui a cent mesures de blé possède des valeurs égales.

Si, dans ces échanges, une même chose est généralement échangée contre toutes les autres; comme, par exemple, si des peuples sauvages échangent des peaux de bêtes contre les denrées dont ils ont besoin, alors cette chose sert de mesure commune aux valeurs, et on l'en appelle le prix. Ainsi, le prix d'un couteau, d'une hache sera pour ces peuples tant de peaux de bêtes; et dès lors, quand on connoît le prix de deux choses, on connoît aussi leur rapport de valeur, et on peut faire entrer les valeurs de toutes les choses dans un même calcul, et en tirer des résultats communs pour toutes ces valeurs, en calculant seulement les unités de la chose qui est devenue leur mesure commune.

Mais il faut pour cela, ou choisir pour méthodes des choses semblables qui puissent être comptées, ou une seule chose dont l'on puisse avoir constamment des quantités déterminées. Il faut, de plus,

pouvoir supposer que ces choses semblables sont égales entr'elles; cette chose se retrouve toujours la même.

En effet, supposant qu'un couteau vaut deux peaux, et qu'une hache vaut dix couteaux, on se seroit bientôt apperçu si ces peaux, qui servent de mesure, ne sont pas supposées égales entr'elles.

Il peut arriver, comme dans cet exemple, que la chose prise pour mesure commune ne soit pas suceptible de cette constance; et, dans ce cas, on a imaginé de prendre pour unité une de ces choses dans l'état de grandeur, de bonté, et où elles se présentent le plus souvent dans les échanges réels; ainsi, par exemple, la mesure commune sera une peau de castor, à peu près de telle grandeur, un mouton à peu près de tel âge, de telle taille. C'est une espèce de valeur moyenne qui se forme naturellement, parce qu'on en sent le besoin. De là même on est parvenu à une espèce d'unité abstraite dont on a conservé le nom, même lorsqu'on est convenu de l'attacher à une chose d'une nature toute différente.

D'autres peuples ont imaginé de prendre pour mesure commune des coquillages qui ne peuvent être employés à aucun autre usage, mais qui acquièrent aussi une valeur réelle, parce qu'ils deviennent alors utiles pour faciliter les échanges.

Enfin, dans un état de société plus avancé, on a choisi des métaux susceptibles de divisions exactes, homogènes, se trouvant par-tout les mêmes, ayant une valeur réelle en tout temps, puisqu'ils servent à d'autres usages, et en prennent une plus grande, à raison de la nouvelle utilité qu'ils acquièrent, lorsqu'on les emploie comme mesure commune des échanges.

Mais si cette mesure commune est de la même nature dans divers pays et dans divers temps, quels résultats réels peut-on tirer des rapports de valeur que la connoissance des prix peut faire connoître?

Si, par exemple, je sais que l'on a dans la Chine un quintal de riz pour une once d'argent, et que l'on auroit, en Europe, deux onces d'argent pour la même quantité de riz, j'en puis conclure qu'un tel poids de riz vaut 1600 fois moins en Chine, et seulement 800 moins en France, qu'un égal poids d'argent.

J'en tire ensuite la conséquence pratique, qu'il y a du profit à envoyer de l'argent en Chine, pour en faire venir du riz.

De même, si on avoit à Athènes une certaine mesure de farine pour une once d'argent, et que la même mesure en coûtât deux en France aujourd'hui, on pourroit en conclure que le rapport de valeur de poids égaux de farine et d'argent a doublé depuis cette époque.

Mais c'est là que ces conséquence s'arrêtent, et ces rapports n'apprennent rien sur la masse des besoins qu'on satisfait avec cette quantité de riz ou de farine, sur le prix que, suivant les différens pays et à différentes époques, on attache aux jouissances qui peuvent résulter de la possession de telle ou telle chose.

Il faut porter plus loin ces observations, si l'on veut pénétrer jusqu'à des conséquences plus éloignées.

Et, avant d'y pénétrer, il faut connoître quelle influence les divers systèmes monétaires, soit métalliques, soit représentatifs, ont sur les prix, et calculer les effets de la différence de ces systèmes sur le commerce qu'ont entr'eux les pays qui en ont adopté de différens; c'est-à-dire, connoître la théorie des monnoies, des changes et des banques.

Il faut aussi apprendre à reconnoître ou à former, à distinguer le prix individuel d'une chose qu'on achète actuellement, le prix commun de cette même chose dans le même lieu et à la même époque, son prix ordinaire, son prix moyen, soit pour divers pays, soit pour un certain nombre d'années. Il faut voir ensuite comment ce qu'il en coûte pour produire une telle chose, influe sur le prix qu'elle doit avoir à chaque époque, dans chaque pays, soit dans le cas où l'on peut regarder la production de cette chose comme bornée dans

de certaines limites, tels sont les fruits de la terre, les animaux, les productions naturelles dont la masse reste en deçà des besoins; soit dans le cas où cette production peut être regardée comme ayant une étendue indéfinie, tels sont certains produits des arts, les dentelles, les estampes, par exemple.

C'est après avoir appris à ne point confondre ces diverses espèces de prix d'une même chose, après s'être prémuni contre cette confusion d'idées qui naît de l'inexactitude du langage, qu'au delà de cette mesure usuelle et reconnue, et dans laquelle se place l'unité de mesure pour toutes les valeurs, d'où naît la possibilité de les soumettre au calcul, qu'on pourra placer une mesure naturelle moins susceptible de variations fréquentes, indiquer des rapports plus constans et plus importans à l'ordre général des sociétés.

Telle seroit, par exemple, la quantité de la nourriture la plus générale et la plus commune qui suffit pour un jour à un homme fait, d'une constitution et d'une taille ordinaires. Tel seroit le prix commun de la journée d'un homme qui n'a point d'industrie particulière, ou bien la valeur de la dépense annuelle d'un homme sain, borné au plus simple nécessaire.

Ces connoissances préliminaires étant établies, on est naturellement conduit aux

moyens d'évaluer, avec exactitude, la richesse d'une nation, les progrès ou le décroissement de cette richesse.

La production annuelle en est l'unique source dans chaque nation isolée. Si la consommation surpasse cette production, la richesse diminue, et avec elle le bien être et la population. Si au contraire, la reproduction surpasse la consommation, la richesse augmente, et l'on a un superflu qui produit plus ce bien-être pour ceux qui existent, par conséquent plus de moyen de conservation pour les enfans, ce qui conduit à un accroissement de population.

Une portion de la reproduction annuelle est nécessairement employée à s'assurer une reproduction égale pour l'année suivante; le reste forme ce qu'on appelle le produit net.

Ce produit net est ce qu'on nomme aussi produit disponible, parce qu'il peut être employé à volonté, sans altérer la reproduction. Une partie en est consommée, le reste peut devenir un accroissement de richesses.

On voit donc naître trois classes d'hommes; ceux qui, travaillant à la culture de la terre, produisent plus qu'ils ne consomment; ceux qui, employant ces productions premières pour en tirer les produits d'un art quelconque, ne font qu'en changer la forme, et rendent à la masse une valeur égale à celle qu'ils ont consommée; enfin, les simples consommateurs, qui détruisent et ne produisent point.

On peut même en compter une quatrième et une cinquième. D'abord celle des commerçans qui se chargent de conserver, de transporter les productions de la terre, ou les produits du travail, et qui les vendent avec l'accroissement d'une valeur égale à celle du travail employé, ou des valeurs consommées pour procurer cette conservation, pour faire ce transport : et ensuite la classe des hommes qui, même sans aucun travail, peuvent, par leur volonté, conserver, ou même augmenter la valeur d'une portion de ce qui, étant disponible entre leurs mains, n'auroit pu être consommé par eux. Par exemple, un homme riche consomme 10,000 francs par an à s'habiller avec luxe, à se nourrir avec délicatesse ou avec recherche, etc.; et cette somme de valeurs peut être regardée comme détruite inutilement, quoiqu'elle ait servi à faire subsister les hommes employés par lui, et à maintenir l'industrie : un autre dépense cette même somme à se procurer des tableaux, des estampes, des livres, alors cette valeur est conservée; il a fait également subsister des hommes, mais en les employant d'une manière plus utile; un troisième enfin, le dépense à dessécher un marais, défricher une terre, et il en naît une

augmentation de valeurs, une reproduction nouvelle.

Or, il est aisé de voir quels résultats différens, et pour la richesse nationale, et pour la prospérité publique, peuvent naître de ces divers emplois de valeurs également disponibles, et comment, suivant la direction donnée par l'opinion commune aux mœurs des hommes, à qui la disposition est remise, l'état de la société peut s'améliorer, se soutenir ou se détériorer.

De cette formation, de cette distribution, de cet emploi des richesses, naissent entre les hommes des relations sociales qui nécessitent une foule d'opérations diverses, et dans lesquelles on emploie nécessairement le calcul aux opérations de commerce et de banque.

Tous les calculs appliqués aux théories dont nous venons d'indiquer l'objet, aux faits généraux que nous venons d'exposer, se compliquent nécessairement par la nécessité d'y faire entrer, comme élément, l'intérêt des capitaux qui fournissent les avances indispensables dans les opérations relatives à la reproduction des valeurs, à leur changement de forme, à leur transmission.

De là toute la théorie du commerce, où il faut soigneusement distinguer dans le profit, l'intérêt réel du capital avancé, le salaire des soins du négociant, et le prix

du risque auquel il s'expose; depuis la perte qui peut résulter de ce qu'une denrée gardée long-temps aura perdu de sa valeur, jusqu'à celle qui peut naître d'un naufrage dans une expédition lointaine; depuis le petit calcul d'assurance que chaque commerçant pourroit faire pour lui-même, jusqu'à celui des assurances maritimes prises dans leur plus grande étendue; la théorie générale des assurances de valeurs quelconques, sous quelque forme que ces opérations se présentent, vient ici se rallier au système général de la science.

C'est alors que, connoissant toutes les causes qui influent sur la formation des prix, tous les élémens qui doivent y entrer, il deviendra possible d'analyser les phénomènes que présentent leurs variations, d'en reconnoître les lois, et de tirer de ces observations des conséquences vraiment utiles.

On doit s'occuper ensuite du calcul, et des résultats du commerce entre les diverses nations, et de la formation de sa véritable balance, balance qu'il ne faut pas confondre avec celle où l'on ne considère que les métaux employés comme monnoies. Alors on verra ce que cette dernière balance, la seule sur laquelle on ait recueilli des faits, peut réellement exprimer, et quelles erreurs ont commises la plupart de ceux qui se sont occupés de cet objet.

Ici la principale utilité de l'application du calcul sera de montrer que l'on a trop souvent adopté, comme des vérités absolues et précises, plusieurs principes qui, suceptibles d'exceptions, et même de modifications, ne sont vrais qu'en général, et ne conduiroient même pas à des résultats suffisamment approchés; car presque toujours on a raisonné sur ces objets à peu près comme si, dans le calcul d'une grande machine hydraulique, on se bornoit à la simple application des principes généraux de la mécanique. Ce sera alors de faire voir que souvent on a oublié d'avoir égard, dans le raisonnement, à des données qu'il ne pouvoit être permis de négliger, et qu'enfin, dans cette masse d'opérations exercées d'une manière indépendante, par un grand nombre d'hommes, et dirigées par l'intérêt, par l'opinion, pour ainsi dire, par l'instinct de chacun d'eux, on a supposé un ordre, une régularité dont elles n'étoient pas susceptibles.

Jusqu'ici nous n'avons considéré les nations que comme des collections d'hommes occupés de leurs intérêts ou de leurs travaux.

Il nous reste à les considérer comme un corps dont le pacte social a fait, en quelque sorte, un individu moral.

Sous ce point de vue, la déférence commune, le maintien de la sûreté, de la propriété, les travaux, les établissemens utiles à tous, exigent des dépenses auxquelles on ne peut subvenir que par des impôts.

Ces impôts, ou sont à peu près les mêmes chaque année, durant un long espace de temps, ou ils n'ont lieu que pour une ou quelques années, à des époques non régulières, déterminées par les conjonctures.

Sur quelle partie de la reproduction annuelle les impôts constans sont-ils nécessairement payés? Comment, suivant leur nature et leur mode, se distribuent-ils entre les diverses portions de cette partie du produit annuel?

Considérant ensuite la somme plus ou moins forte à laquelle ils montent chaque année, les objets qu'ils affectent directement, le mode suivant lequel ils sont tarifiés ou répartis, les sommes employées pour les lever, les lois de rigueur nécessaires pour en assurer le recouvrement, on se demandera quels effets ces diverses causes doivent produire sur la richesse nationale, sur sa distribution, sur son accroissement ou sa conservation, et de quelle manière ces mêmes causes agissent sur la culture, l'industrie ou le commerce, sur le taux de l'intérêt.

Le simple raisonnement suffit pour répondre à toutes ces questions; mais le calcul doit donner plus de précision à ces réponses. Il apprend à balancer ceux de ces effets qui peuvent se contredire.

On doit examiner séparément les effets des impôts qui n'ont qu'une durée momentanée. En effet, il est évident que le système total de la richesse nationale doit se modifier d'après l'établissement quelconque d'une masse de contributions à peu près constante dans sa valeur et dans ses formes, et prendre sous l'influence de cette cause, long-temps continuée, une sorte d'équilibre, ou un mouvement régulier. On doit donc chercher quel sera l'état constant, et par quels états intermédiaires on peut y parvenir.

Mais s'il s'agit d'un impôt momentané, il doit seulement produire un dérangement quelconque dans l'économie sociale qui reprendra bientôt après son équilibre, et il faut en connoître les effets.

Cependant si ce dérangement est assez entier, ou s'il se répète assez fréquemment pour produire des altérations durables, alors il faut examiner à la fois, et les effets passagers, et le résultat final de ces mouvemens irréguliers.

On verra comment ces dérangemens sont presque toujours nuisibles précisément parce que, changeant nécessairement la distribution des richesses, ils changent aussi celle des moyens de subsistances; car en ce genre tout changement doit être fait de manière que le mouvement se communique paisiblement, et sans causer de secousses dans la chaîne générale de ses effets.

Les emprunts publics sont un moyen d'éviter les secousses, et l'on sent que le calcul seul peut apprendre à choisir entre les opérations de ce genre, celles qui doivent obtenir le plus de succès, celles dont les conséquences seront les moins onéreuses.

Ici se présente le calcul des loteries qui peuvent être à la fois ou des impôts, ou des emprunts, suivant la manière dont elles sont formées.

On ne doit en parler sans doute que pour en démontrer les effets ruineux et funestes, pour ajouter l'autorité d'une vérité calculée à la force jusqu'ici trop impuissante de la morale.

Les effets que l'existence d'une dette publique, ou d'une banque nationale, peuvent avoir sur la distribution des richesses, sur la culture, l'industrie et le commerce, sont encore un de ces objets auxquels l'application du calcul ne sera pas inutile.

On peut y ajouter l'examen de l'influence que peuvent avoir les divers systèmes de monnoie.

Plusieurs des dépenses publiques ont aussi, sur la richesse nationale, des effets plus ou moins directs, plus ou moins importans. Telles sont celles qui ont pour objet des secours, des travaux, des établissemens publics.

Par exemple, des secours mal distribués

peuvent changer en consommateurs inutiles des hommes dont le travail eût augmenté la masse, soit des productions du sol, soit des produits des différens arts, et ces secours deviennent alors une source d'appauvrissement.

La dépense d'un ouvrage public peut excéder l'utilité, et la perte occasionnée par cette dépense, être telle que jamais le bien produit par cet ouvrage ne puisse en dédommager.

Si un établissement d'instruction diminue la dépense nécessaire pour acquérir un genre d'industrie, dès lors il en fera baisser les produits.

La masse entière des institutions et des lois influe sur la richesse, et cette action peut dès lors être soumise au calcul. On peut examiner, par exemple, sous ce point de vue, l'effet de la destruction des ordres privilégiés, de celle des droits féodaux, de l'égalité des partages, de la suppression du droit de tester, examiner sur-tout avec quelle rapidité les deux derniers actes de justice influeroient sur une plus égale distribution de propriétés.

Enfin, plusieurs questions de jurisprudence ne peuvent être résolues sans emprunter le secours du calcul.

Telle est d'abord la fixation d'un intérêt légal, c'est-à-dire, de celui qui doit être perçu, mais qui cependant n'a pas été déterminé par une convention particulière.

Telle est la fixation de la valeur d'une chose qu'un individu devoit fournir en nature, lorsque l'exécution de la condition se trouve impossible, et qu'elle doit être remplacée par un équivalent.

Tel seroit le partage, soit d'une obligation qu'on doit remplir en commun, soit d'une chose à laquelle divers individus ont des droits, toutes les fois que ces droits sont mêlés de considérations éventuelles qui nécessitent des évaluations pour lesquelles ce calcul ou la théorie des valeurs moyennes sont indispensables.

Tel est le mode suivant lequel doit se résilier un traité entre plusieurs individus, lorsqu'il se trouve annulé par une cause que l'acte même n'a pas prévue, et que des évènemens incertains, ou des évaluations compliquées, influent sur les droits des contractans, obligent encore de recourir aux mêmes moyens.

Cette seconde portion du tableau des objets auxquels le calcul peut s'appliquer, paroît embrasser l'économie politique presqu'entière; et cela doit être, puisque l'économie politique ne considère les choses que relativement à leur valeur. Cependant ces deux sciences ne doivent pas être confondues.

Dans toutes les questions de l'économie politique, dans toutes les opérations pratiques dont elle développe la théorie, et qui ne

supposent ou n'exigent que des calculs très-simples, la mathématique sociale doit se borner à une exposition générale des méthodes, et ne s'arrêter qu'aux questions où les difficultés de la solution dépendent du même calcul.

Elle ne doit s'occuper de l'analyse des idées, ou des faits, qu'autant qu'il le faut pour s'assurer d'appuyer le calcul sur des bases solides.

C'est la foiblesse de l'esprit humain, c'est la nécessité de ménager le temps et les forces, qui nous oblige à diviser les sciences, à les circonscrire, à les classer, tantôt d'après les objets qu'elles considèrent, tantôt d'après les méthodes qu'elles emploient. Dans cette dernière division, les lignes de séparation doivent être plus incertaines: or, c'est d'une division de cette espèce qu'il s'agit ici.

La minéralogie et l'application de l'analyse chimique à la connoissance des minéraux ne sont point une même science; mais elles s'exercent sur le même objet, en employant des méthodes différentes: elles s'éclairent mutuellement; on ne peut bien traiter l'une sans le secours de l'autre.

Dans la première, l'observation des minéraux, leur inscription, leur histoire forment le fonds de la science; mais souvent elle invoque la chimie contre les difficultés que l'observation seule n'eût pu résoudre.

Dans l'application de la chimie aux substances métalliques, leur analyse chimique est la base de la science; mais souvent elle a besoin de s'éclairer par des observations.

De même, quoique l'économie politique emploie l'observation et le raisonnement, cependant on y éprouve à chaque instant le besoin du calcul; et la mathématique sociale n'apprendroit à calculer que des abstractions, si elle n'emprunte de l'économie politique les données qu'elle doit employer, si celle-ci ne lui indiquoit les questions qu'il est important de résoudre.

Il n'est peut-être aucune portion des sciences politiques sur laquelle il reste plus de préjugés à détruire, et où ces préjugés puissent avoir des conséquences plus funestes. Ils ont résisté jusqu'ici à la raison; abattus plus d'une fois, on les a vus se relever avec plus de force: disparoissent-ils d'un pays, on les voit se rencontrer dans un autre.

Osons espérer qu'attaqués par la raison et par le calcul, nous n'aurons plus à redouter ces résurrections inattendues, ces oscillations entre la vérité et l'erreur.

FIN.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Elémens du calcul des probabilités

AUTEUR :

Marquis de Condorcet

RESUME :

Dans cet ouvrage posthume, destiné à servir de complément à l'édition donnée par Condorcet, des lettres à une princesse d'Allemagne d'Euler, l'auteur expose les principes du calcul des probabilités et ses applications aux sciences sociales.

MOTS CLES :

Histoire-épistémologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-037-X