INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

64

JUIN 1986

UNE ANNEE DE GEOMETRIE EN TERMINALE C

Par Isabelle TENAUD

objectif: Enseignement géométrie

sujet: géométrie

niveau: Terminale

public: professeurs lycée

UNIVERSITE - PARIS VII

La recherche qui a donné lieu à cette brochure fait partie d'une recherche plus générale sur l'enseignement de la géométrie, en particulier avec des étudiants préparant le CAPES et une classe de terminale. Ce texte ne concerne que la terminale C où j'ai enseigné en 85-86.

Cete recherche a été motivée initialement par l'introduction, dans les programmes, de la géométrie "pure"; cette modification a entrainé des changements importants des contenus enseignés et des activités des élèves.

Deux points me paraissaient importants :

* ne pas faire un cours chapitre par chapitre mais dégager des idées générales sur la géométrie,

* aller contre l'idée suivante, souvent répandue et malheureusement paralysante : en géométrie "on trouve ou on ne trouve pas".

Je voulais en particulier que chaque élève trouve un minimum de choses et ne reste pas bloqué devant une page blanche.

J'ai donc changé ce que je faisais les années précédentes en tenant compte des hypothèses didactiques suivantes :

* les changements de cadres (cf. R. Douady) favorisent l'apprentissage et ceci tout particulièrement en géométrie,

* dans un même cadre, les changements de point de vue (cf. changements de stratégie) sont souvent efficaces dans la résolution des problèmes de géométrie ce qui en constitue une des principales difficultés,

* enseigner à des élèves plus agés doit permettre un discours plus métamathématique, plus méthodologique, et par là-même plus efficace.

Voici, en conséquence, les modifications que j'ai effectivement adoptées, et ceci à deux niveaux :

1) Au niveau des contenus

Dans le déroulement des cours et encore plus pour les activités des élèves, j'ai privilégié les exercices pouvant se résoudre de plusieurs façons et ceux associés à des configurations riches. C'est ce type d'exercices qui m'a permis particulièrement de développer un discours métamathématique sur :

* comment trouver des idées pour commencer un exercice,
* les types de problèmes rencontrés,
* les outils disponibles,
* la comparaison de différentes démonstrations utilisées pour un même exercice.

2) Au niveau des formes de travail

Sur 9 heures de cours hebdomadaire en TC, il y en a une par demi-classe. J'ai changé une seule chose : j'ai mis ces élèves par groupe de quatre (soit en 85-86 quatre groupes par demi-classe) et je les ai laissés travailler pendant toute la séance, à leur propre rythme, sur un ou deux exercices proposés en début de séance. Mes seules interventions ont consisté le cas échéant à débloquer les groupes qui n'arrivaient pas à continuer ; si un seul élève du groupe était bloqué souvent les autres suffisaient à le faire avancer. Soulignons au passage que ceci me semble déjà trés important sur le plan de l'apprentissage.

Je souligne que tout ceci ne concerne que la géométrie plane. La géométrie dans l'espace ayant cette année une place moins importante dans le programme, je l'ai traitée à la fin de l'année ; par ailleurs il y a des problèmes spécifiques comme la représentation plane des figures de l'espace, sur lesquels je ne me suis pas penchée.

Dans la première partie je vais détailler le travail que j'ai fait cette année avec les élèves et dans la seconde partie je donnerai le texte d'un questionnaire sur la géométrie proposé à la fin de l'année avec des réponses d'élèves dont je pense qu'elles témoignent d'un changement positif des élèves vis-à-vis de la géométrie.

I Déroulement du cours.

Ce qui est intéressant en TC c'est que les élèves savent déjà beaucoup de choses en géométrie. En particulier à propos des transformations, ils ont étudié la plupart d'entre elles les années précédentes, les seules transformations nouvelles du programme étant les affinités, les symétries glissées et les similitudes directes, les deux derniéres étant d'ailleurs des composées de transformations connues.

Signalons que dans le programme 86-87 il n'y a plus les généralités sur les applications affines ni les affinités et que l'essentiel sera " d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures ". J'ai donc essayé de m'appuyer au maximum sur ces acquis pour faire des exercices variés dès le début de l'année.

J'ai choisi ici de développer plus particulièrement :

a) des exercices que j'ai proposé à la classe pendant le cours sur les applications affines (soit pendant l'heure de travail en groupe, soit en classe entière).

En fait mon parti pris a été de tirer le maximum de chacune de ces situations géométriques, en particulier de multiplier si possible les approches (i.e. les outils) au lieu de n'en utiliser qu'un aspect comme illustration d'une propriété du cours. Non seulement cela a permis d'enrichir les représentations des différents types de problèmes en géométrie et des différents outils, de réaliser la variété d'outils pour un problème donné mais encore cela a vraiment préparé les cours suivants sur telle ou telle transformation particulière.

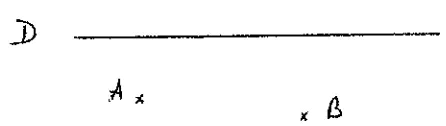
b) un exercice donné à la suite de ce cours où précisément une grande diversité de méthodes sont possibles.

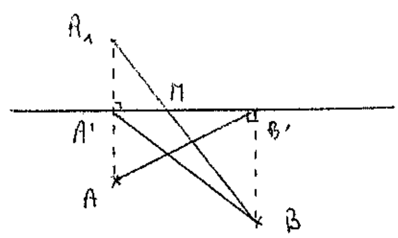
c) certaines activités de fin d'année.

d) un exemple de travail en groupe.

a) <u>Exercice 1</u>

<u>Enoncé</u> : soit une droite D et deux points A et B non situés sur D et du même côté par rapport à D. Minimiser AM + MB où M est un point de D.





<u>Remarques</u>

C'est un problème de trajet minimum. Le trajet est transformé en un trajet plus simple à minimiser par une isométrie. Le point M qui est solution du problème peut être défini de deux autres façons, ce qui a été remarqué par certains élèves et ce que j'ai demandé de prouver à l'ensemble de la classe (M est le barycentre de (A', BB') et (B', AA'), M est le projeté de H).

Ces deux propriétés ne sont pas très intéressantes par rapport au problème de minimum mais il y a déjà ici trois façons de regarder le point M.

Extrait d'un cahier d'élève

Soit A_1 le sym. de A par rapport à D

Le + court chemin pr aller de A_1 à B est le segmt $[A_1, B]$
Donc le + court chemin p aller de A à B

On utilise le fait qu'une sym ⊥ est une isométrie : elle conserve les distance

Soit M le point d'intersection de D et $(A_1 B)$.

On veut mq $\quad BB' . \overline{MA'}\, \vec{i} + AA' . \overline{MB'}\, \vec{i} = \vec{0}$

$$BB' . \overline{MA'} + AA' . \overline{MB'} = 0$$

$$- BB' . MA' + AA' . MB' = 0$$

c'est à dire : $\quad - BB' . MA' + A'A_1 . MB' = 0$

Soit h homothétie de centre M qui transforme A_1 en B, On a : $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA_1}$

$$\boxed{k = -\frac{MB}{MA_1}}$$

~~h transforme~~ l'image de A' par h appartient à (MA').

h(A') appartient à l'image de la droite (A_1A').
Cette image passe par $h(A_1) = B$ et elle est parallèle à (A_1A'). Donc c'est la droite (BB').

Conclusion : $\boxed{h(A') = B'}$

On a donc $\overrightarrow{MB'} = \frac{-MB}{MA_1}\overrightarrow{MA'}$

or on a $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{A_1A'}$
c'est à dire $\overrightarrow{BB'} = \frac{-MB}{MA_1}\overrightarrow{A_1A'}$

$$BB' = \frac{MB}{MA_1}\cdot A_1A'$$

d'où $k = \frac{-MB}{MA_1} = \frac{-BB'}{A_1A'}$

d'où $\overrightarrow{MB'} = \frac{-BB'}{A_1A'}\cdot\overrightarrow{MA'} = \frac{-BB'}{AA'}\cdot\overrightarrow{MA'}$

d'où $\boxed{BB'\cdot\overrightarrow{MA'} + \overline{A'A'}\cdot\overrightarrow{MB'} = \vec{0}}$

c.à.d. M bary (A', BB')
et (B', AA')

Commentaires : , il faut reconnaître la figure.

, utiliser : l' image d' 1 dte est 1 dte //.

, ——— : $\left.\begin{array}{l} M \xrightarrow{h} M' \\ N \xrightarrow{h} N' \end{array}\right)$ $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

, penser au barycentre : $A' \xrightarrow{h} B'$

si $\overrightarrow{MB'} = k\,\overrightarrow{MA'}$

alors $\vec{0} = k\overrightarrow{MA'} - \overrightarrow{MB'}$

donc M bary de (A', k) et $(B', -1)$.

avec $k \neq 1$

3°) $B'B_1 = B'B = |k| . AA'$ $\overrightarrow{B'B} = k\ \overrightarrow{AA'}$

L'homothétie h' de centre H telle que

$h'(A') = B$

alors l'image de la dte $(A'A)$ est 1 dte

parallèle à $(A'A)$ et qui passe par B.

$h'(A) \in (AH)$ donc $\boxed{h'(A) = B'.}$

or $\overrightarrow{B'B} = k\,\overrightarrow{AA'}$ donc h' a le même rapport k que h.

M bary de (A', k) $(B', -1)$

de même, H bary de $(A; k)$ $(B, -1)$.

$\dfrac{\overline{A'M}}{\overline{MB'}} = \dfrac{\overline{A'H}}{\overline{HB}}$

Ds la proj. $\perp$ sur $(A'B')$

on a : $A \longrightarrow A'$

$B \longrightarrow B'$

$H \longrightarrow H'$

Grâce à Thalès : $\frac{\overline{HB}}{\overline{HA'}} = \frac{\overline{H'B'}}{\overline{H'A'}} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MA'}}$

donc $\boxed{M = H'}$

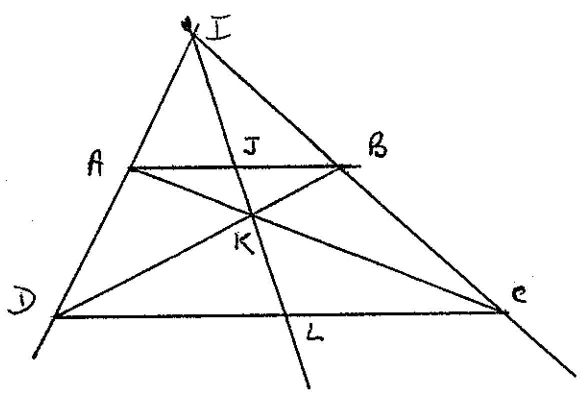
donc $H \xrightarrow{\text{proj} \perp} M$.

Exercice 2

Enoncé : soit ABCD un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (DC) et AB $\neq$ CD . On appelle I le point d'intersection de (AD) et (BC), K le point d'intersection de (AC) et (BD), J le milieu de [AB] et L le milieu de [CD] . Montrer que I, J, K et L sont alignés.

Remarques

C'est un problème d'alignement. On a donné deux démonstrations avec deux types de transformations : symétrie oblique avec alignement des points invariants, homothétie avec alignement du centre, d'un point et de l'image du point. C'est une configuration de base.



My I, J, K, L st alignés.

K intersect de (BD) et (AC).

Soit h l'homothétie de centre I telle que $A \xrightarrow{h} D$

~~$B \xrightarrow{h}$~~

L'image de B se trouve sur (IB).
et l'image de B se trouve sur l'image de la dte (AB).

donc $B \xrightarrow{h} C$

J isob. de A, B.
et L isob de D, C

or happl. affine, Donc $J \xrightarrow{h} L$

Donc I, J, L alignés.

idées :
- homothéties bien choisies
- ou bien symétries obliques

h' K : $A \to C$
$B \to D$
$J \to L$

J K L alignés.

Commentaire : L'outil utilisé est ds 1 homoth. : • le centre, 1 pt et son image st alignés,
• l'image d'1 dte est : dte parallèle,

2^e^ méthode :

- On utilise 1 symétrie (oblique) s d'axe (JL) et de direction (AB).

s : $D \rightarrow C$ car L mil $[DC]$

$A \rightarrow B$ car J mil $[AB]$

$(AD) \rightarrow (BC)$ (car l'image d'1 dte par s est une dte.

or $s = s^{-1}$ donc $(BC) \rightarrow (AD)$

$I \in (AD) \cap (BC)$ donc $I' \in (BC) \cap (AD)$

$I = I'$ donc I invariant.

~~$I \in (AD)$ — $I' \in (BC)$~~ donc $I \in (JL)$.

donc I, J, L alignés.

autre méthode :

Soit I_1 l'intersect° de (AD) et (JL)

~~$I_1 \in (JL)$ donc $I_1' \in (JL)$~~,

$I_1 \in (AD)$ donc $I_1' \in (BC)$.

or $I_1 = I_1'$ puisque $I_1 \in (JL)$

Donc $I = I_1$ et donc $I \in (JL)$

donc I, J, L alignés.

Attention ! Bien s'assurer que (AD) et (JL) sont sécantes

car on n'a pas $(AD) // (JL)$

car on n'a pas $(AD) // (BC)$.

Commentaire : On a utilisé :

Si une dte coupe l'axe (de la sym) en 1 pt A, comme A est invariant, alors la dte image passe aussi par A.

<u>Corollaire</u> : Si 1 dte est // axe, alors son image est // axe^2.
(sinon l' image couperait l'axe et l'image de l' image coupant l'axe aussi).

Autre propriété utilisée : $s = s^{-1}$
$s \circ s = id$

Exercice 3

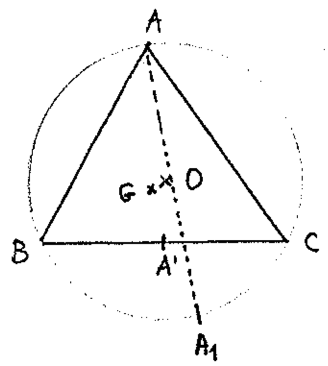
Enoncé : soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, G l'isobarycentre de ABC, A' le milieu de BC .

1) Montrer que le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ est l'orthocentre de ce triangle. En déduire que O, G, H sont alignés.

2) Soit A_1 le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. Prouver que H, A', A_1 sont alignés et que A' est le milieu de $[A_1 H]$.

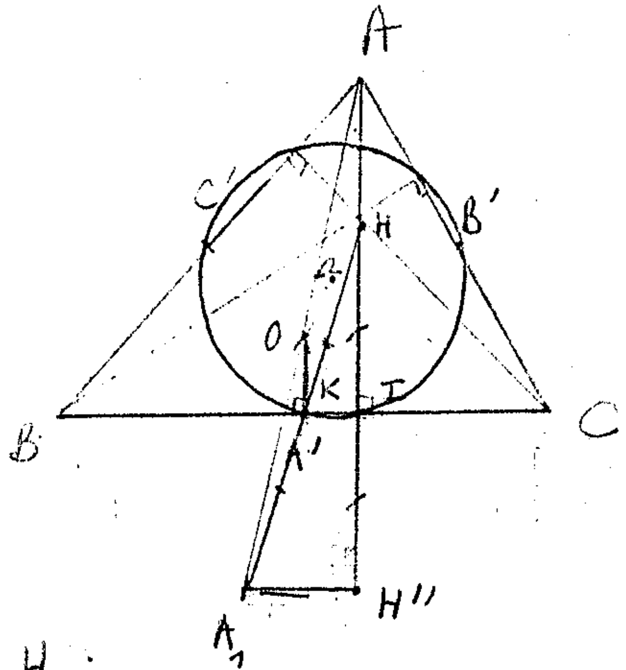
3) En déduire que le symétrique de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit.

4) Montrer que les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, le milieu de $[AH]$, le milieu de $[BH]$, le milieu de $[CH]$ sont sur un même cercle.



Remarques

Il y a successivement un problème d'alignement et un problème de cocyclicité. On a utilisé des homothéties, la décomposition d'une symétrie centrale en un produit de deux symétries axiales, et les deux configurations de base de la droite des milieux d'un triangle et du triangle rectangle inscrit dans un cercle.



1/ Soit H :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Soit A' le milieu de [BC].

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OA'}$$

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$$

or $(OA') \perp (BC)$ donc $(AH) \perp (BC)$

donc H appartient à la hauteur issue de A.

De même, H appartient aux autres hauteurs.

$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ Donc O, H, et G sont alignés.

On a : $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'} \end{array} \right.$

O mil de $[AA_1]$.

Soit h l'homo de centre A_1 telle que $O \xrightarrow{h} A$
de rapport 2.

Soit K l'intersect. de $[A_1H]$ et $[OA']$

$K \in [A_1H]$.

$h(K) = H$ car $h(K) \in (A_1H)$

et $h(K) \in (AH)$

$$2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$$

or $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AH}$ donc $A' = K$.

$$T_{2\overrightarrow{OA'}} = S_{A'} \circ S_O$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S_O"] \arrow[rr, bend right] & A_1 \arrow[r, "S_{A'}"] & A_2 = H. \end{tikzcd}$$

$$T_{2\overrightarrow{OA'}} = T_{\overrightarrow{AH}}$$

donc A' mil de $[A_1H]$.

1ère démonstrat° :

Soit H' l'intersect° de (AH) et du cercle.

Or A_1A est 1 diamètre. donc le triangle A_1AH' est rectangle en H'
donc $(BC) // (A_1H')$

Or A' mil de A_1H
donc (BC) coupe $[HH']$ en son milieu) $\perp$ donc

donc $H' = s_{BC}(H)$.

2e démonstration :

Soit H'' le sym orthogonal de H par rapport à (BC).

Soit h l'homoth. de centre H et de rapport 2

$h : I \to H''$
$A' \to A_1$

donc $(A_1H'') // (A'I)$

Donc $(A_1H'') // (BC)$

donc le triangle (A_1AH'') est rectangle en H''
or $[A_1A]$ est 1 diamètre, donc $\underline{\underline{H'' \in \mathcal{C}.}}$

3e démonstration :

Soit $H'' = s_{BC}(H)$

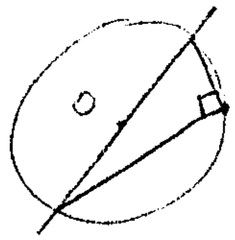
$$A_1 \xrightarrow{S_{A'}} H \xrightarrow{s_{BC}} H''$$

or $s_{BC} \circ \underbrace{S_{A'}} = s_{BC} \circ \underbrace{(s_{BC} \circ s_{OA'})}$

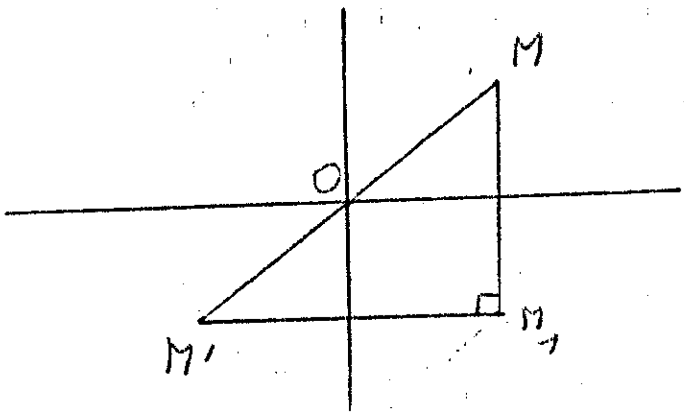
$= s_{OA'}$

donc $A_1 \xrightarrow{s_{OA'}} H'$
$OA_1 = OH'' = R$ donc $H' \in \mathcal{C}$.

Commentaires : • On a utilisé 1 nouvelle configuration :



• (pr la 3e demo) : 1 sym cent. de centre O peut se décomposer en produit de 2 sym axiales d'axes ⊥ en O



$OM = OM' = OM_1$

Suite de cet exo :

Mq les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, le milieu de [AH], le milieu de [BH], de [CH] sont sur un même cercle, (nommé cercle des 9 points, cercle d'Euler).

Soit h l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$.

or A, B, C appartiennent au cercle circonscrit.

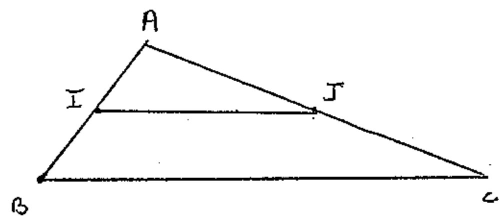
donc les milieux des segments [AH], [BH], [CH] appartiennent tous à 1 m̂ cercle.

Exercice 4

Enoncé : construire un triangle connaissant les milieux des côtés. Même question avec un quadrilatère, un pentagone.

Remarques

C'est un problème de construction. On a utilisé deux types d'outils différents : deux configurations (droites des milieux dans un triangle, parallèlogramme des milieux des côtés dans un quadrilatère), une composition de symétries centrales. Suivant les cas il n'y a pas de solution, ou une solution unique ou une infinité. Cet exercice a été l'occasion de faire une mise au point à propos de la configuration



On peut la considérer de différents points de vue, le point de vue "numérique" (cf. théorème de Thalès), le point de vue vectoriel (cf. l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$) , le point de vue des transformations (en introduisant la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ composée des symétries centrales S_I et S_J et l'homothétie de centre A et de rapport 2 ou 1/2).

Extrait d'un cahier d'élève

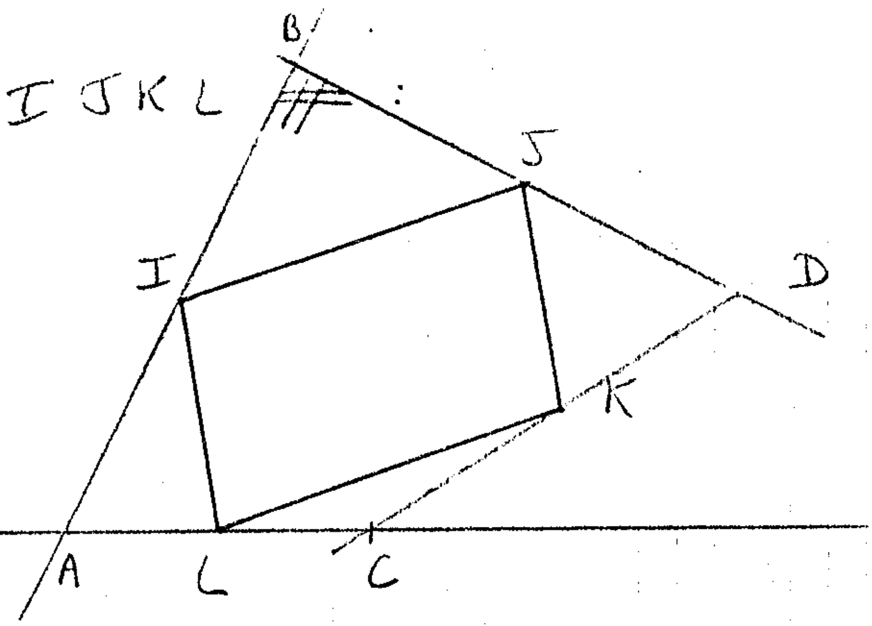
1°/ On trace les parallèles à (IJ), (JK), (KI) passant respectivement par K, I, J.

On obtient ainsi les pts A, B, C.

2)

I, J, K, L n'est pas parallélogramme. → | construction impossible.

Si I J K L # :



On fixe A

On trouve ainsi B et C, en sachant que :

$$\begin{cases} \bullet\ 2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{BC} \\ \bullet\ L \text{ mil de } [AC] \\ \bullet\ I \text{ mil de } [AB]. \end{cases}$$

de même, puisque on connait maintenant C,

on trouve D en sachant que :

$$\begin{cases} \bullet\ 2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BD} \\ \bullet\ K \text{ mil de } [CD]. \end{cases}$$

Soit A fixé.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & A \xrightarrow{s_L} C \\ (2) & A \xrightarrow{s_I} B \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ B \xrightarrow{\Delta_J} D \\ (4)\ C \xrightarrow{\Delta_K} D'\end{array}\right\}\quad \text{Est-ce que } D' = D\ ?$$

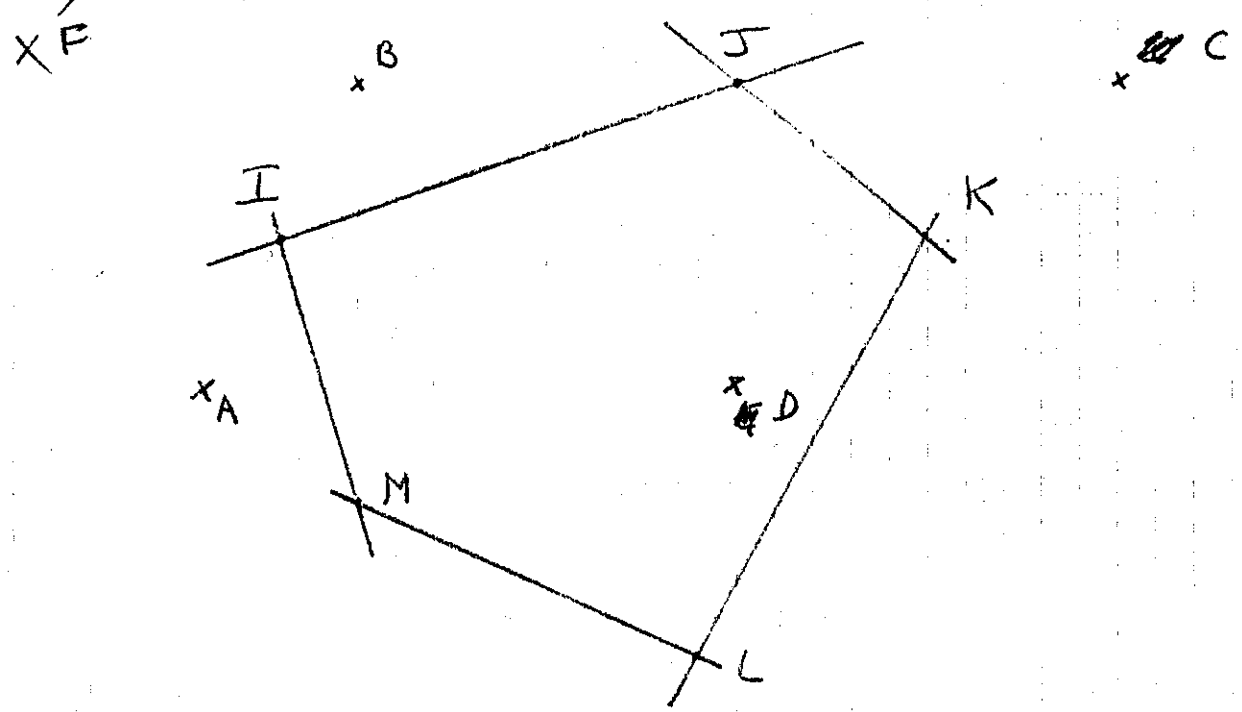
(1) et (4) : $A \xrightarrow{T_{2\overrightarrow{KL}}} D'$

(2) et (3) $A \xrightarrow{T_{2\overrightarrow{JI}}} D$

or $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{KL}$ (car $IJKL$ $\#$).

donc $\underline{D = D'}$ $\underline{\text{infinité de solut°.}}$

3) I, J, K, L, M fixés

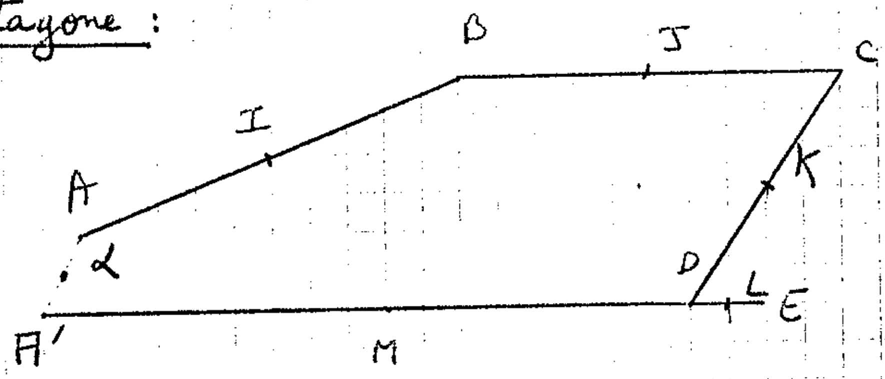


On fixe A.

$$A \xrightarrow{\Delta_I} B \xrightarrow{\Delta_J} C \xrightarrow{\Delta_K} D \xrightarrow{\Delta_L} E \xrightarrow{\Delta_M} F \overset{?}{=} A.$$

$$A \xrightarrow{T_{2\overrightarrow{IJ}}} C \xrightarrow{T_{2\overrightarrow{KL}}} E \xrightarrow{\Delta_M} F \overset{?}{=} A$$

Pentagone :



$$A \xrightarrow{S_I} B \xrightarrow{S_J} C \xrightarrow{S_K} D \xrightarrow{S_L} E \xrightarrow{S_M} A'$$

$$S_M \circ S_L \circ S_K \circ S_J \circ S_I = S_\alpha$$

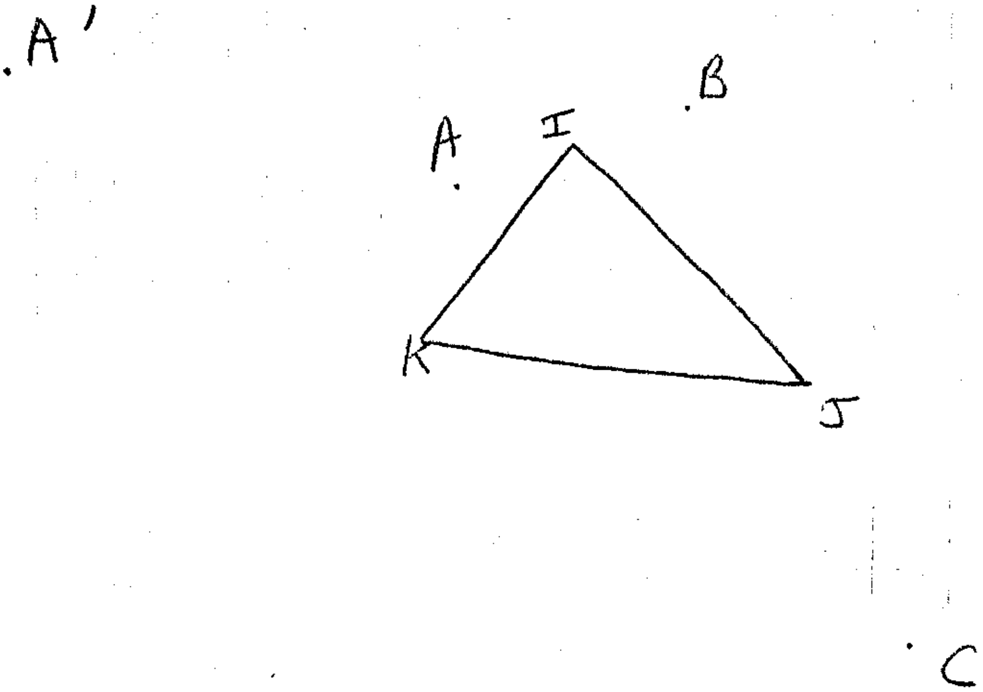
car :

$$\overrightarrow{XY} \to -\overrightarrow{XY} \to \overrightarrow{XY} \to -\overrightarrow{XY} \to \overrightarrow{XY} \to$$

$\to$ Solution unique $A = \alpha$.

(avec α milieu de $[AA']$).

Retour au triangle :

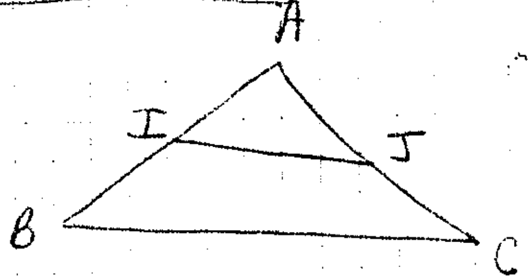


$$A \xrightarrow{S_K \circ S_J \circ S_I} A'$$

S_α

unique solution $A = \alpha$

Commentaire :



Cette figure peut être utilisée de différentes façons :

- Th des milieux et Thalès.
- $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$
- homo de centre A de rapport 2
- transl. de vecteur $\overrightarrow{BC}$

$= S_J \circ S_I$

Généralisat° :

Construire 1 polygone à n côtés connaissant les milieux

- <u>1er cas :</u> n impair :

Solution unique

Composée d'1 nb impair de sym centrales.

↳ sym. centrale.

- <u>2e cas : n pair</u> :

La composée d'1 nb pair de sym centrales est 1 translation.

- Si le vecteur n'est pas $\vec{0}$, la construct° est impossible.

- Si ce vecteur est $\vec{0}$, infinité de solutions on peut partir de n'importe quel pt A.

Exercice 5

Enoncé : soit deux triangles ABC et A'B'C' tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles, (BC) et (B'C') sécantes en I, (AC) et (A'C') sécantes en J, (AB) et (A'B') sécantes en K. Montrer que I, J, K sont alignés.

Remarques

C'est un problème d'alignement. On en a donné quatre démonstrations, la première en utilisant une composition d'homothéties avec la propriété d'alignement des centres, la seconde en utilisant une affinité et l'alignement des point invariants, la troisième en appliquant le théorème de Ménélaüs, et la quatrième en considérant la figure comme la projection d'une figure de l'espace et en utilisant l'alignement des points communs de deux plans sécants.

Dés ces premiers exercices j'ai pu expliciter les idées générales que l'on a mises en application toute l'année :

* il existe différents cadres en géométrie (numérique, affine, vectoriel...),

* il y a différents types de problèmes : lieu, construction, alignement, cocyclicité....

* il y a différents types d'outils : configurations élémentaires, transformations, analytique, numérique, vectoriel... (cf IREM de Marseille),

* pour résoudre un exercice on peut récapituler les outils disponibles et chercher quels sont ceux susceptibles de fonctionner avec les données du problème,

* pour un même problème on peut construire différentes démonstrations suivant : - le cadre où on se place,

- l'outil choisi.

Le fait que cela ait été dit aux élèves aussi tôt dans le cours de géométrie leur a permis de réinvestir souvent des idées qui leur avaient effectivement servi et cela me semble trés important.

b) Je leur ai alors donné en devoir à la maison, l'exercice suivant :

Soit D et D' deux droites sécantes en un point I situé en dehors de la feuille ; soit A un point de la feuille qui n'appartient ni à D, ni à D'. Tracer (AI).

On trouve cet exercice dans les livres mais avec des indications, ou bien sans indications mais comme il est dans un chapitre, on peut en déduire un outil à utiliser.

Je l'ai donné sans indication et en plus j'ai demandé deux démonstrations par élève. Sur l'ensemble de la classe il y eu neuf démonstrations différentes.

Six utilisent une transformation :

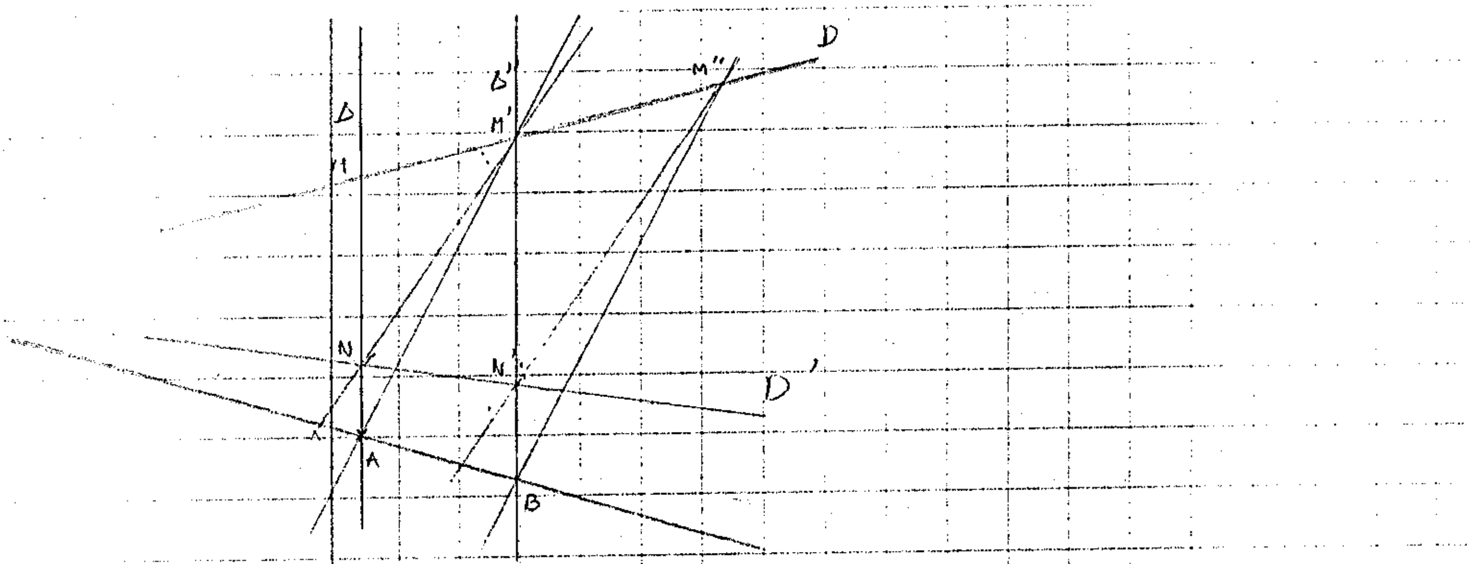
- homothétie de centre I (copie A)
- homothétie de centre A (copie B)
- symétrie de centre A (copie C)
- affinité d'axe (AI) (copie D)
- affinité d'axe D (copie E)
- affinité d'axe D' (copie F)

Et trois utilisent une configuration élémentaire :

- parallèlogramme (copie G)
- triangle rectangle et cercle circonscrit (copie H)
- trapèze (cf exercice 2) (copieI)

On a pu comparer les différentes méthodes : quelles sont celles qui conviennent seulement dans certains cas particuliers et quelles sont celles qui conviennent toujours.

COPIE A



Soient M et M' deux points de D

On trace $\Delta = (MA)$ et Δ' la parallèle à Δ passant par M'

soit $\{N\} = D' \cap \Delta$ et $\{N'\} = D' \cap D'$

Soit h l'homothétie de centre I qui transforme M en M'

alors l'image de Δ est Δ' (car Δ' parallèle à Δ passant par M

et $h(N) = N'$ car $\{h(N)\} = (IN) \cap \Delta'$ (*)

(*) et l'image de A est sur Δ'

On trace (M'N) ; son image par h est une droite parallèle à (M'N) passant par N' - soit M'' l'intersection de cette dernière droite avec D

On en déduit : $h(M') = M''$

On trace $(M'A)$; son image par h est une droite parallèle à $(M'A)$ passant par M'' (et aussi par l'image de A)

On pose : $B = h(A)$ alors B est à l'intersection des droites images de Δ et de $(M'A)$

Or, dans une homothétie, le centre, un point et son image sont alignés donc $(AB) = (AI)$

COPIE B

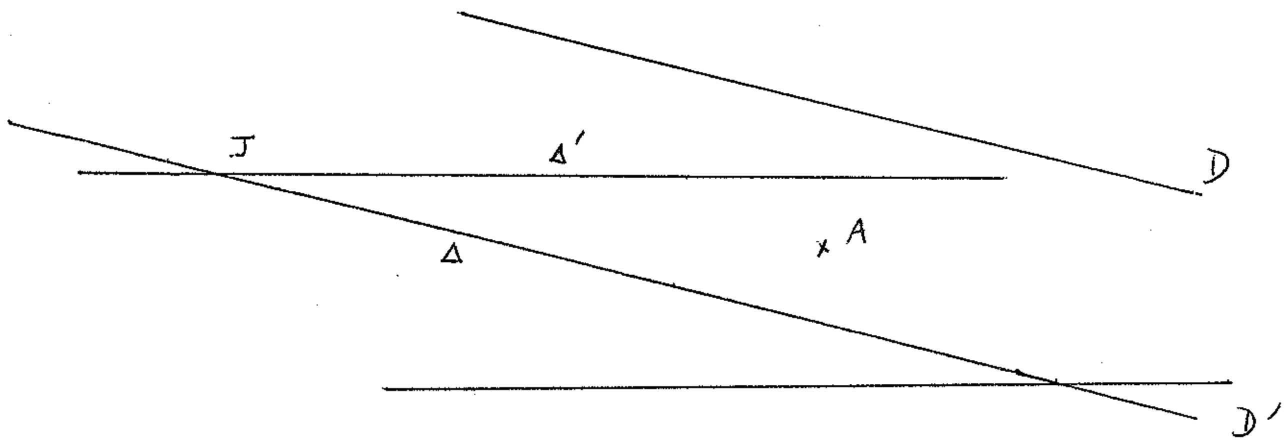
Soit h hune homothétie de centre A

- Appliquons cette homothétie h à la droite D, nous obtenons ainsi une autre droite Δ.
- faisons de même avec la droite D' et nous obtenons une droite Δ'.

Nous savons que Δ et Δ' se coupe en un point J.
Or J est l'intersection des deux droites images Δ et Δ' de D et D', donc J est l'image par h de l'intersection des deux droites D et D'.

Nous savons qu'un point, le centre de l'homothétie et l'image du point sont alignés.

Il suffit donc de joindre A et J et on obtient ainsi la droite (AJ) ou plutôt (AI)



COPIE C

Nous allons ici utiliser une symetrie centrale de centre A.

Soit Δ l'image de D par la symetrie centrale
Soit Δ' l'image de D' par la même symetrie centrale.

l'intersection de Δ et Δ' est l'image par la symetrie de l'intersection des droites D et D'.
Donc en joignant A et cette intersection de Δ et Δ' J
on obtient la droite (AI)

Remarque :

Cette deuxième méthode n'est qu'un cas particulier de l'homothétie car une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1 et de centre, le centre de la symétrie, ici A

COPIED

- tracer Δ_1 non parallèle à D et D' et passant par A.
- tracer Δ_2 une parallèle à Δ_1

Soit $D \cap \Delta_1 = \{M\}$ $\quad D' \cap \Delta_1 = \{N\}$

$D \cap \Delta_2 = \{O\}$ $\quad D' \cap \Delta_2 = \{P\}$

Considérons f l'affinité de base (AI) de direction Δ_1 et qui tq

$$\left.\begin{array}{l} M \xrightarrow{f} N \\ O \to P \\ A \to A \end{array}\right)$$

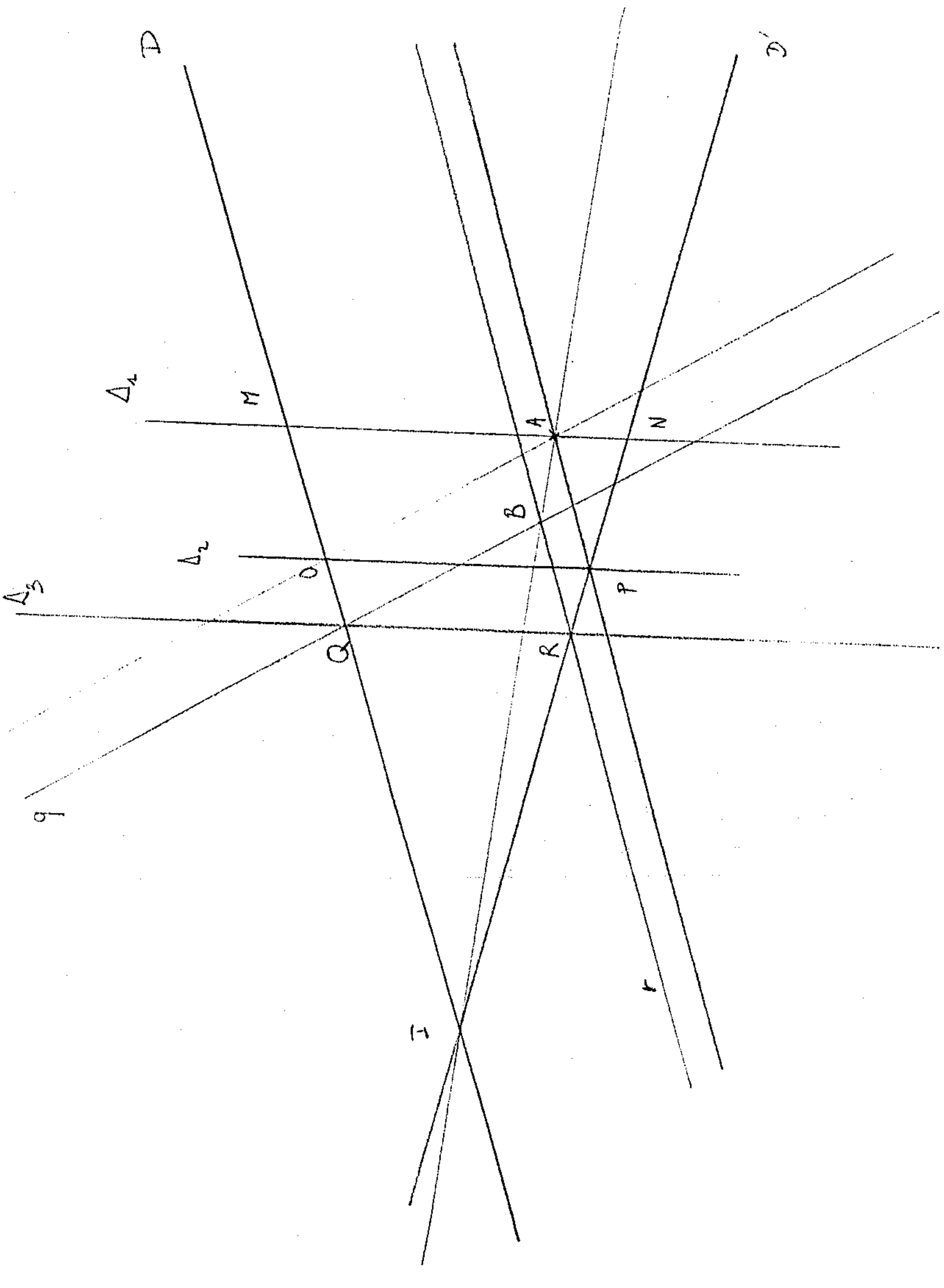
donc $D \to D'$

et $(AO) \to (AP)$

donc tracer (AO) et (AP)

De plus nous savons que les images de deux droites parallèles par une affinité sont deux droites parallèles (P)

donc tracer Δ_3 parallèle (et non confondue) à Δ_1 et Δ_2


D
D'
Δ_1
Δ_2
Δ_3
M
A
N
B
O
P
Q
R
q
r
I

soit $D \cap \Delta_3 = \{Q\}$ $D' \cap \Delta_3 = \{R\}$

comme $D \xrightarrow{f} D'$ on a donc $Q \xrightarrow{f} R$

d'après (p), l'image de la droite (q) passant par Q et parallèle à (AO) est la droite (r) passant par R et parallèle a (AP)

traçon ces deux droites (q) et (r)

Soit B l'intersection de (q) et (r)

Nous savons aussi que si (q) coupe (AI) en H alors son image (r) coupe (AI) en H

~~conclus~~ or $(q) \cap (r) = \{B\}$

donc $H = B$ et $B \in (AI)$

conclusion pour tracer (AI) il suffit de tracer (AB)

COPIE E

Soient O et M deux points de D'

On trace $\Delta = (OA)$ et Δ' la parallèle à Δ passant par M

Soient $\{P\} = \Delta \cap D$ et $\{N\} = \Delta' \cap D$

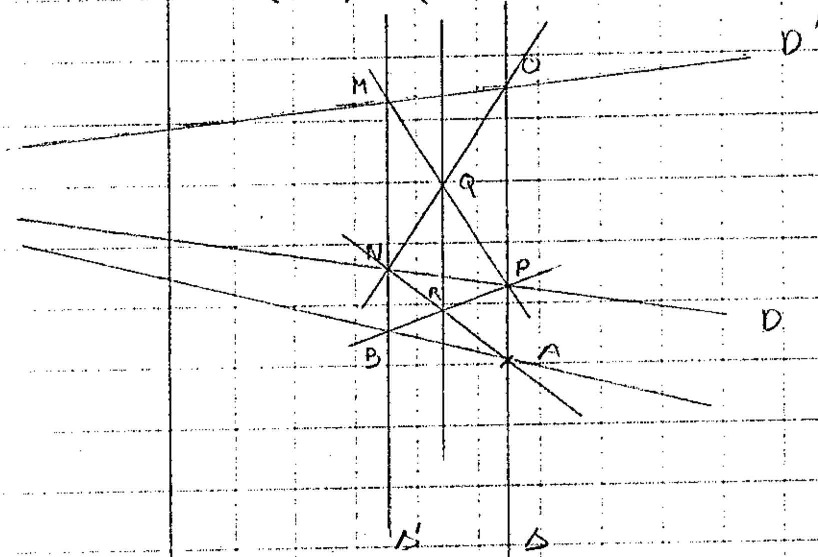
Soit f l'affinité de base D et de direction Δ qui transforme O en A

alors l'image de D' est (AI); il faut donc chercher B, l'image de M.

L'images de (NO) est (NA) car N est invariant et $f(O) = A$

On trace (MP), son image est donc (BP) (B toujours inconnu

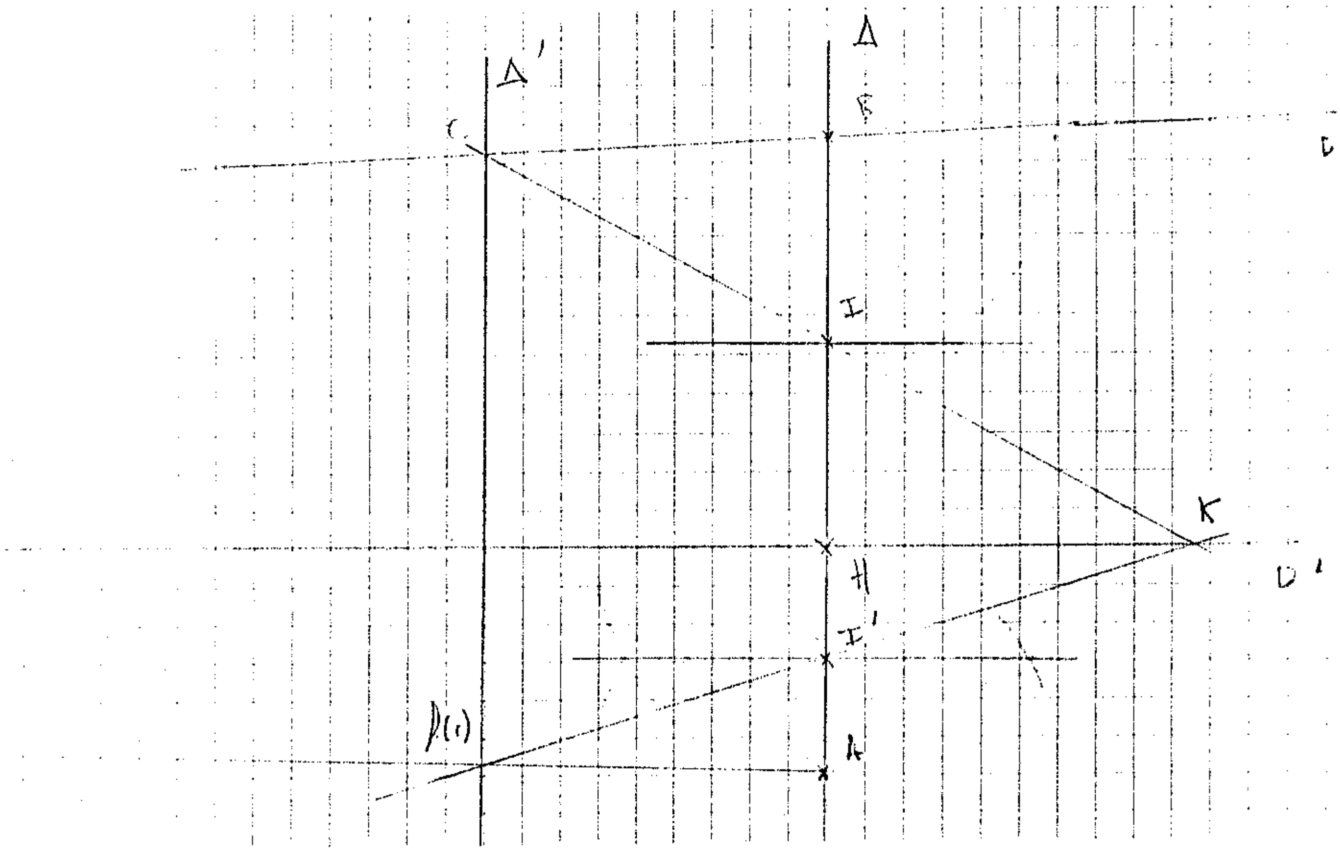
Soit $\{Q\} = (MP) \cap (ON)$
Alors $f(Q) = R$ se trouve à l'intersection de (NA) (l'image de (NO)) et de la parallèle à Δ passant par Q
Donc l'image de $(PQ) = (PM)$ est la droite $(PR) = (PB)$
Donc B est à l'intersection de (PR) et de Δ'
et $(AB) = (AI)$



COPIE F

Soit Δ une droite passant par A, différente de (AI) et coupant D' et D en H et B.
Soit f l'affinité de base D', de direction Δ et de rapport $\dfrac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$ ($\overline{HB} \neq 0$ car $\Delta \neq (AI)$ et D', sont supposées non confondues)
On a $f(B) = A$ et $I \in D'$ donc $f(I) = I$.
l'image de (IB) c'est à dire de D est (IA) par f.

Si C, 1 point de D. $f(C)$ appartient à la droite Δ' passant par C et parallèle à Δ



Soit I ~~notation déjà utilisée~~ le milieu de [BH], I est transformé par f en le milieu I' de [HA] (car $f(H) = H$ et $f(B) = A$)

Si on a bien choisi C, la droite (IC) coupe D' en un point K. L'image de (CI) par f est alors (KI')

Donc $f(C) \in (KI')$ et $f(C) \in \Delta'$ donc $f(C) = (KI') \cap \Delta'$. On peut tracer $(f(C)A)$ c'est-à-dire la droite (IA)

- tracer D_1 la parallèle à D passant par A
- tracer D_1' la parallèle à D' passant par A.
- Soit K l'intersection de D_1 et D'
Soit L l'intersection de D_1' et D.

En traçant D_1 et D_1' on a construit ~~le parallég~~ parallélogramme AKIL

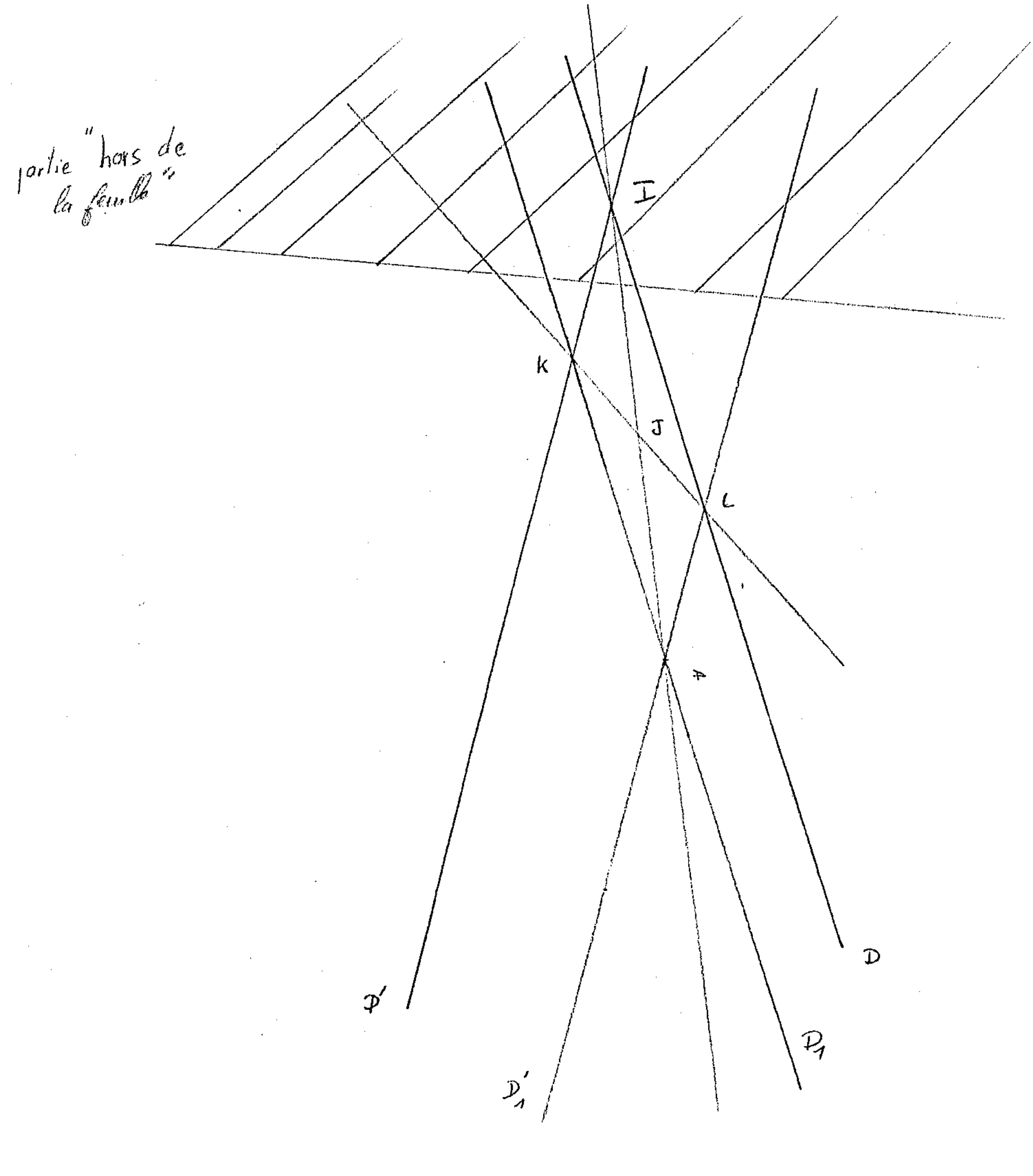
Or dans un parallélogramme, les diagonales [KL] et [AI] se coupent en leur milieu. (α)

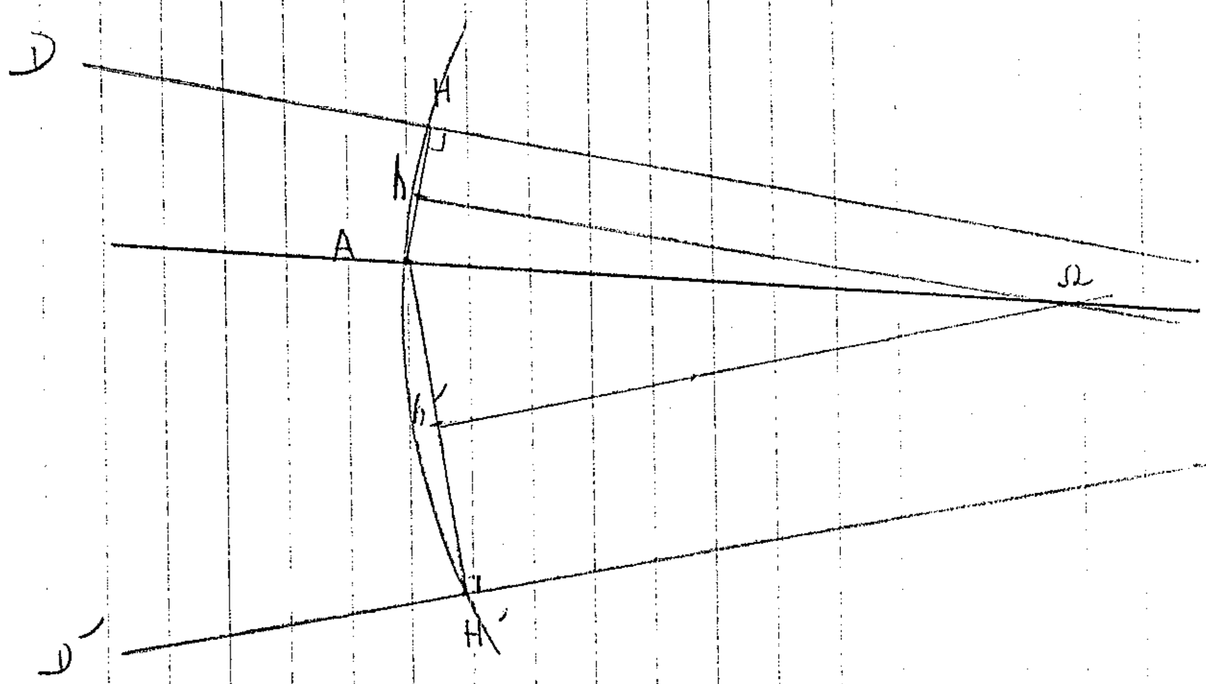
Donc : - tracer [KL]
- soit J le milieu de [KL]

Donc. D'après (α) pour tracer (AI) il suffit de tracer (AJ)

⇒ mais voir remarque sous la figure.

Remarque : malheureusement cette méthode ne fonctionne pas toujours, cela dépend du choix de A.
Par exemple ici si A n'avait pas été à l'intérieur du secteur délimité par D et D' la construction n'aurait pas été possible car K ou L ne peuvent être définis.
Je m'en suis aperçu trop tard.


partie "hors de
la feuille"
I
K
J
L
A
D
D'
D_1
D'_1



Soit H et H', les projetés orthogonaux respectifs de A sur D et D'.
Soit Δ et Δ' les médiatrices des segments [AH] et [AH'], et Ω, l'intersection de Δ et Δ'.
Ω existe toujours car : Δ // D et Δ' // D,
et on sait que : D ∦ D'
- L'intersection des médiatrices de deux cordes d'un cercle, définissent le centre du cercle.
Ω est donc le centre du cercle contenant les points A, H, et H'.

~~Or, le Triangle~~
On sait que trois points distincts d'un même cercle, dont deux diamétralement opposés, forment un Triangle rectangle au troisième point.

De même, si deux points ~~sont~~ sur un même cercle forment une corde, et la ~~per~~ droite perpendiculaire à cette corde passant par l'une de ses extrémités va couper le cercle en cette extrémité et en un point diamétralement opposé au ~~l'a~~ point de l'autre extrémité de la corde.

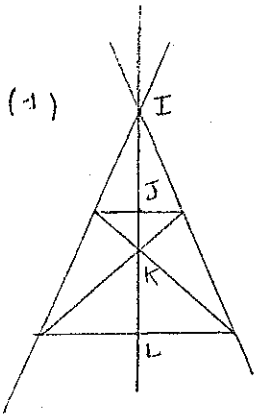
Par conséquent H et H' appartenant au cercle considéré :
D coupe $(A\Omega)$ en un point diamétralement opposé à A.
D' coupe $(A\Omega)$ en un point diamétralement opposé à A.
Ce point est unique et se trouve à l'intersection de ~~D~~ D et D'. Il s'agit du point I.

D'où $I \in (A\Omega)$ et $(A\Omega) = (AI)$.

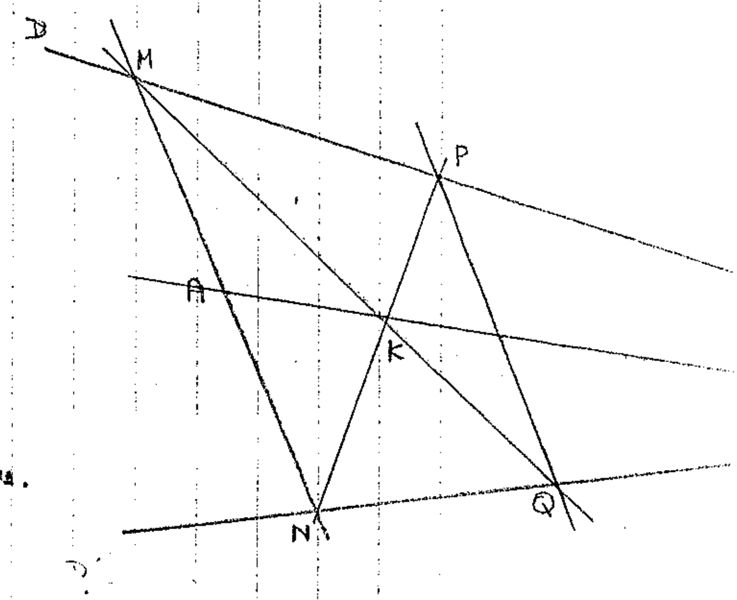
Si Ω est en dehors de la feuille, on remplace H et H' par h et h' et on fait la même construction et ainsi de suite.

COPIE I

(1)



Om a vu que dans la figure (1), I, J, K, L sont alignés, J et L étant les milieux des côtés parallèles.
Om essaye donc de reconstituer cette figure.
Mais cette méthode ne marche ~~dans~~ que si A est situé entre les droites D et D'.



Om essaye de trouver 2 points M et N respectivement sur D et D', tels que A = m [MN]. On trace une parallèle quelconque coupant D en P et D' en Q. Soit {K} = (MQ) ∩ (P
(AK) = (AI) car A, K et I sont alignés

c) Dans les chapitres suivants (angles, isométries planes, similitudes directes) j'ai travaillé de la même façon, avec un outil supplémentaire pour les isométries et les similitudes : les complexes. En particulier on a redémontré la propriété des symétriques de l'orthocentre avec les angles (cf exercice 3).

C'est après ces chapitres sur les transformations que j'ai situé un chapitre sur les lieux, ce qui a été une autre façon de réorganiser les connaissances.

On peut en effet classer les lieux rencontrés en TC en trois catégories :

* les lieux définis par des conditions numériques (par exemple avec la fonction de Leibnitz),
* les lieux obtenus par des transformations,
* les lieux liés à des configurations.

On avait déjà rencontré ces problèmes de lieux dans les différents chapitres du programme mais plutôt comme application d'une propriété précise. Ici les élèves disposaient de presque tous les outils du programme dans les différents cadres et ils avaient donc la possibilité de faire jouer au maximum différentes stratégies.

A part les coniques et les isométries de l'espace le cours de géométrie était presque fini, et lors d'une séance de travail en groupe j'ai demandé aux élèves de récapituler les différentes méthodes, rencontrées au cours de l'année, pour prouver l'alignement de trois points : ils en ont trouvé quinze! La liste de ces démonstrations, plus ou moins directes, plus ou moins efficaces, est jointe en annexe 1.

d) Donnons pour terminer un exemple de travail en groupe sur un problème de géométrie.

Enoncé : soit C un cercle fixe passant par deux points fixes A et B. Soit M un point de C, on considère le point P situé sur la demi-droite BM) d'origine B et tel que AM = BP.

Quel est le lieu de P lorsque M décrit C ?

Le groupe "le moins fort" a choisi une méthode expérimentale en construisant le maximum de points P. D'abord déroutés par les points obtenus, ces élèves ont été les premiers à dessiner le lieu, mais ils n'ont pas su faire la démonstration.

D'autres groupes ont choisi de s'intéresser à des points particuliers

- quel point associe-t-on à A ? C'est B.
- quel point associe-t-on à B ? Aucun, car la demi-droite n'est pas définie mais si on la remplace par la tangente à C en B il y a deux demi-droites et deux points susceptibles de convenir.
- y a-t-il des points invariants ? Les élèves ont alors trouvé Ω, l'un des points d'intersection de C avec la médiatrice de $[AB]$. L'observation de la figure et des angles les ont amenés à se demander si la rotation de centre Ω et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$ transformait M en P, ce qui semblait

vrai sur la figure et qui résolvait le problème. Mais des élèves du groupe ont remarqué qu'il y avait un autre point fixe, le deuxième point d'intersection de C et de la médiatrice de AB . Ils ont donc considéré le "deuxième" arc AB et ont scindé l'étude du lieu en deux cas, suivant la position de M.

D'autres groupes ont tout de suite étudié la rotation transformant A en B et M en P. Les justifications de ce choix ont été donné à la suite de questions posées par d'autres élèves du groupe ou parfois par moi-même. Les voici :

- dans l'énoncé il y a AM = BP , donc on pense à une isométrie.
- on a le choix entre A B, M P, ou bien A P, M B ; on choisit la première solution qui au point fixe A associe le point fixe B.
- d'après le cours on sait qu'il y a un déplacement et un antidéplacement tel que A donne B et M donne P. Lorque M décrit le cercle C il y a un angle qui reste fixe, on considère donc plutôt le déplacement.
- mais c'est un angle de vecteur qui intervient dans la rotation, or lorsque M décrit le cercle il y a deux angles de vecteurs, il y aura donc deux cas à considérer.
- enfin, dans chaque cas l'angle de la rotation est (AM , BP), angle fixe lorsque M décrit un arc de cercle AB ; il reste donc seulement à déterminer le centre de la rotation.

Dans certains groupes, l'exercice n'avait pas été complètement terminé ; aussi j'ai demandé de le terminer à la maison, et une synthèse a été réalisée en classe la séance suivante avec tous les élèves.

II Questionnaire de fin d'année

Texte du questionnaire

I Y a-t-il des problèmes ou exercices de géométrie que vous trouvez plus difficile que d'autres ? Précisez.

II Pouvez-vous résumer le cours de géométrie en précisant les points qui vous semblent importants (dix lignes maximum).

III Quelles sont les interventions du professeur ou les formes de travail qui vous ont le plus aidé ?

IV Y a-t-il des différences dans la façon dont vous abordez les problèmes de géométrie par rapport à la première S ?

V A la fin de cette année aimez-vous la géométrie ?

Plutôt que de décrire ces réponses, j'ai préféré livrer les plus significatives d'entre elles (12 sur 32). Une analyse détaillée en fonction d'hypothèses précises sur l'efficacité d'un enseignement méthodologique et/ou du travail en groupe sera donnée ultérieurement.

I) Certains problèmes de construction, qui nous laissent une (trop) grande autonomie dans la démarche à suivre

Les fonction scalaire de Leibnitz
II) Les nombres complexes, qui interviennent dans des problèmes de construction (ex: dans les similitudes)
Les isométries, les déplacements, les antidéplacements, les similitudes, (les coniques), les angles

III) Les TP, qui permettent la mise en commun de différentes méthodes de résolution d'exercices (surtout en géométrie), et ainsi une meilleure et plus complète approche de l'exercice

IV) Oui, car, par rapport à l'année dernière, nous disposons de plus de méthodes de résolutions d'exercices, qui sont eux-même plus intéressants qu'en 1ère S

V) Oui, beaucoup plus qu'au début, car elle devient plus intéressante au fur et à mesure que nous disposons de méthodes de résolution.

I) Tous les problèmes de lieu géométrique me semblent plus difficiles

III) - Les méthodes de travail qui m'ont le plus apporté sont les travaux effectués en groupes : Ils m'ont fait penser à des méthodes que je n'utilisais jamais par exemple.

- les interventions du professeur lorsqu'il nous dit comment aborder un problème lorsqu'on a pas d'idées m'ont beaucoup aidé.

IV) En 1ère S, j'avais une haine profonde pour la géométrie. Celle ci était due au fait que je ne savais comment commencer un problème. Comme je l'ai dit dans la precedemment, lorsque je n'ai pas d'idée, je me débrouille pour essayer de trouver un fil conducteur

V) Je ne peux pas dire que j'aime la géométrie. Cependant, je ne la redoute plus et elle me paraît ainsi plus intéressante. Mon dégoût de la géométrie est donc en partie annihilé. Cette année m'a donc fait apprécier la géométrie.

II) Il est difficile de résumer le cours de Géométrie étant donné son importance. Cependant, nous avons vu les barycentres, importants car on s'en sert très souvent dans les problèmes, les applications affines et les applications vectorielles associées, puis nous avons déterminé les affinités, nous avons vu les isométries avec les déplacements et les antidéplacements; des angles, les similitudes et les coniques

(I) Oui :
- certains problèmes de lieu.
- certaines constructions où l'on n'est pas tellement guidé (il faut trouver rapi-
-dement la bonne méthode, quelle partie du cours, il faut appliquer).

(II) cours : - barycentres - applications affines.
- transformations. (déplacements - antidéplacements - af similitudes)
- théorèmes sur les transformations.
- applications vectorielles associées.
- coniques -
- problèmes de lieu avec réciproque.
- utilisation des différentes sorte d'angles.
- Partie analytique = - équations
- déf. analytique des transformations.
- Complexes → rapport transformations — complexes.

III) - les T.P en groupe sont intéressants.
(On a toujours l'impression qu'on a participé à la trouvaille de la solution même si ce n'est pas vrai). On doit aller vite et suivre les autres parfois
Les T.P font aimer la géométrie.
(la preuve : on a toujours l'impression que l'heure de T.P s'écoule 2,57 plus rapidement que les autres)

(IV) - Je pense qu'il y a une différence mais quoiqu'il en soit, me notes de géométrie en 1ère S étaient substantiellement plus élevées.
Le problème cette année, c'est que je ne trouve pas assez rapidement la méthode qui m'ouvrira la porte (blindée) de la solution.
De plus une fois que j'ai une fausse méthode dans la tête, elle me perturbe et me "bloque" pour trouver la bonne (méthode).

V) Oui quand j'ai la sensation que je peux trouver la solution, en cherchant. (Il est toujours agréable de sentir son cerveau travailler)
Mais ce n'est pas toujours le cas !!!

I Je pense en effet que certains exercices sont plus difficiles que d'autres. Le nombre de méthodes de solution fait varier cette difficulté : Si plusieurs méthodes aboutissent, mon choix s'orientera sur un cours dans lequel je me sens plus à l'aise.
Les exercices dont les ennoncés définissent des transformation (imposées) pour démontrer certaines propriétés me semblent plus difficiles que ceux qui nous laissent la liberté de choix.

II
- Barycentres. → Lieu des points
→ fonctions de Leibnitz

- Applications affines : (conservation des barycentres)
(translations, homothéties, symétries, affinités, projections, ...)
pts importants : - Les théorèmes sur les applications affines.
- Les applications linéaires associées.

- Isométries
(translations, rotations, symétries, symétries glissées ..)
pts importants : les théorèmes qui ~~caractérise~~ différencient les déplacements et les antidéplacements.
(Applications fréquentes en exercices)

- Similitudes directes.
(homothétie o déplacement)

- Angles : (géométriques, de vecteurs, de droites ...)
Points importants : (th. sur la cocyclicité ou l'alignement.
th. sur angle au centre.

III - Interventions du professeur :
Lors des exercices en classe, l'apprentissage de la méthode, l'éclaircissement des idées, en mettant les élèves sur la voie, en suscitant la réflexion, en provoquant les bonnes remarques.
- Formes de travail :
Travail de groupe en T.P, qui permet d'aborder diverses méthodes, de les comparer. Chacun corrige les erreurs de l'autre. Cela permet le rappel du cours (L'application des théorème est à mon avis la meilleure façon de les retenir).
Les travaux à la maisons permettent également d'approfondir ses propres méthodes personnelles.

IV Oui, bien sûr. Sur le plan de la méthode : l'année de 1ère n'est qu'une faible initiation, la terminale vous donne les outils ~~pour~~ de résoudre les exercices, surtout en géométrie pure.

V Au début de l'année, la géométrie m'intéressait déjà, en cas pour le peu que j'en avait fait.
Le fait d'en avoir fait davantage et de manière beaucoup plus approfondie a confirmé ce goût.
Le travail est moins abstrait qu'en Analyse. La plupart des méthodes aboutissent ce qui ~~rend les exercices~~ permet d'aborder les exercices d'un manière personnelle et non pas imposée.

I Oui, les recherches de lieux et de construction

II le cours nous apprend à résoudre les problèmes de géométrie de la façon la plus simple et la plus rigoureuse possible. Grâce à lui, on panique moins devant un énoncé: on peut passer en revue les principaux chapitres (Par exemple, montrer que 3 points sont alignés...). Et le cours "simplifie" les réponses; par exemple, on peut dire d'une application qu'elle est affine, simplement d'après son expression analytique.

III interventions du professeur: pour la rigueur dans les raisonnements (équivalence, réciproque, ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ ...)
formes de travail: TP, devoirs à la maison.

V oui: on fait une recherche plus systématique, plus rigoureuse. On fait plus attention aux cas particuliers. On se pose maintenant peut-être plus souvent la question de savoir si il faut une réciproque. On apprend à mieux se servir du cours.

V Pour toutes les raisons données aux II, III, IV, j'aime mieux la géométrie cette année que l'année dernière, surtout les isométries.

I Oui, par exemple les recherches de lieux car ils demandent une méthode assez rigoureuse de même pour les problèmes de constructions. C'est surtout au point de vue de la redaction.

II → méthode de resolution d'un problème de geométrie : cf. catalogue

→ les complexes et la possibilité de resoudre $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$ (au niveau geométrie, analytique).

→ notion d'angles : de droites ≠ de vecteurs avec les points cocyclique... pour tous les problèmes de construction puis transformations

→ toutes transformations ~~qui~~ du plan qui permettent de passer d'un point à un autre

→ catalogue de methodes de raisonnement, ~~de~~ et d'outils de resolution d'un problème...

III interventions du professeurs : exigence au niveau de la rigueur des raisonnements.
formes
méthode de travail : les catalogues de fin d'année, la recherche methodique des solutions pour exercice de geométrie fait ou non en classe : plusieurs solutions possibles, elles sont toutes corrigées.

IV La différence majeure à côté de la 1ère S est encore la methode, avant on, je, trouvais la solution ou ne la trouvais pas par chance et non par reflexion (une chance sur deux. de ne pas trouver!). On peut donc aborder ces problèmes avec

une plus grande confiance : on sait qu'il y a une solution et que l'on peut la trouver il suffit d'énumérer toutes les methodes possibles et de prendre celle qui semble convenir le mieux. Et après avoir trouvé, on sait que cela ne suffit pas, qu'il faut en général faire une "reciproque", c'est donc plus rigoureux comme raisonnement.

V. ~~Toujours~~, oui ~~surtout~~

I Oui. Ce qui me pose le plus de problème, c'est lorsque l'on parle de groupe. Ces difficultés interviennent en particulier dans les transformations, les isométries. J'ai des difficultés lorsque l'on demande quelque chose d'abstrait qui n'est expliqué où l'on n'indique pas le cheminement (D n° 20 facultatif : exercice à point rouge). Je préfère l'analytique, les questions d'angles.

II. Nous avons vu en géométrie les barycentres, les complexes, les applications affines, les isométries positives - négatives, les groupes de transformation, les coniques, les transformations du plan en général (homothéties, translations, symétrie centrale, axiale, affinités, similitudes ...), les déplacements et antidéplacements, les angles.

III Ce qui aide généralement, c'est le TP fait par groupe. Il permet de comprendre des choses que l'on n'avait pas comprises. Par contre, les devoirs à la maison posent parfois de nombreux problèmes en raison des difficultés qu'ils présentent mais sont très utiles pour les révisions des interrogations car ils abordent en général les principaux problèmes, les difficultés à surmonter

IV Je pense que maintenant, on aborde les problèmes et les exercices de géométrie avec plus de méthode et peut-être même, avec plus de facilité. Mais il subsiste encore le problème du commencement de l'exercice. Etant donné qu'il n'existe pas de réelle méthode pour commencer les exercices, c'est difficile de voir l'idée de départ.

V L'année dernière, la géométrie était une des matières que j'aimais le moins. Cette année, j'apprécie beaucoup plus cette matière (peut-être parce que j'ai de meilleurs résultats qu'en analyse), la géométrie me semble plus simple, plus abordable que l'on pense.
Cependant, il subsiste quelques chapitres que je n'aime pas encore en géométrie.

I Oui, il y a des problèmes de géométrie que je trouve plus difficile que d'autres.
- quelques fois les problèmes de recherche de lieu → la réciproq.
- et quelques autres dont je ne me souviens plus.

II Recherches de lieu (Analyse - ~~Re~~ Synthèse)
transformations du plans (l'unicité des applications affines)
complexes.
barycentres
angles (la nature de ces angles).

III La forme de travail qui m'a le plus aidé est le travail en groupe, surtout pour savoir comment aborder un problème de géométrie (utilisation des outils comme les transformations, et les théorèmes).
Les devoirs à la maison ~~ont~~ m'ont aussi beaucoup aidé pour m'apprendre à utiliser aux mieux le cours et aussi mais surtout ce qui a été démontré dans le problème (c'est à dire utiliser le problème pour le résoudre).
La petite phrase " la solution st dans le cours ou dans l'énoncé de l'exercice " m'a aussi permis de le résoudre plus rapidement.

IV Il semble que la géométrie de 1ères était beaucoup plus analytique.
Cette année il y a davantage de géométrie pure.
ce qui fait que les méthodes sont tout à faits différentes

V J'aime la géométrie sauf celle qui comporte trop d'analytique. parce que je fais beaucoup d'étourderies de calcul.

I Oui : les problemes de geometrie analytique. L'enoncé sans guide (en general) (Question mal comprise. J'ai repondu à "moins difficile", les autres ont la même difficultés. Le même probleme peut être fait en 20 min ou en deux heures. Il suffit d'avoir une bonne intuition au bon moment.

II Il m'est impossible de resumer precisement le cours de geometrie. Mais je peux dire que nous avons vu : les barycentres (Fonction scalaire de Leibniz), les coniques, les applications affines, les similitude, les angles. (les points importants sont soulignés)

III Le travail de groupe a été une bonne chose car il m'a rendu plus rapide (Il faut aller au même rythme que les autre). Pour la geometrie, il m'a aidé a avoir une plus grande inspiration (4 esprits au service d'un problème).

IV Trouvant la geometrie plus difficile cette année j'aborde les exercices avec une plus grande crainte de ne pas trouver la solution.

V A la fin de cette année, j'aime toujours la geometrie malgré que je me soit souvent remis en question sur ce point (lorsque la solution se faisait vraiment trop attendre)

I] Les exercices ou problèmes que je trouve plus difficiles sont les problèmes de construction (choix des méthodes, rédaction) et ceux qui font intervenir les angles.

II] 1) géométrie "pure" : où l'on utilise toutes les configurations et les théorèmes sur le parallélisme, l'orthogonalité, la cocyclicité, l'alignement, en vue de construire une figure précise ou de déterminer 1 ensemble de points (fonction de Leibniz)

géométrie affine et vectorielle (angles de vecteurs)

2) géométrie analytique : . expressions analytiques des applications affines (des similitudes, des affinités ...),

. expressions servant à démontrer l'orthogonalité, l'alignement (expression du produit scalaire ou du produit vectoriel).

. détermination d'un ensemble de pts, d'après son équation.

III] Les corrections de contrôles ou de devoirs m'aident beaucoup, car on voit en peu de temps plusieurs méthodes de résolutions, et cela permet de réviser les chapitres concernés.

Les travaux en groupe sont aussi très fructueux ; plusieurs

méthodes sont émises, on met en commun les idées...

Les devoirs à la maison sont aussi très intéressants : ils obligent à approfondir.

IV] Oui : En 1ère S, je me "lançait" aveuglément dans la résolution d'un exercice sans l'avoir entièrement lu, tandis que maintenant, je lis un problème en entier, pour essayer de prendre du recul et de rassembler l'ensemble des méthodes possibles de résolution avant de commencer à écrire sur ma feuille.

II] Autre classification : par chapitres, et non par grands thèmes.

Géométrie : Applications affines (homothéties, translations, rotations, symétries axiales, affinités), Similitudes directes, Coniques, Angles (géométriques de droites ou de demi-droites), Isométrie (Déplacement, Antidéplacements), Configurations (figures particu-lières à reconnaître dans une figure + grande).

V] J'aime bien plus la géométrie qu'au début de cette année, car j'ai à ma disposition beaucoup plus de matériel pour réflechir, tandis qu'avant, je me lançait "dans le vide", sans savoir quelle méthode utiliser.

=: Certains Problèmes de lieu sont assez dur à resoudre Par exemple, quand on donne peu ou même pas d'explications sur la ou les methodes à utiliser. Je trouve alors que la demarche à faire pour trouver sois-même les methode mais surtout pour aller jusqu'au bout, est difficile.

: le cours de geometrie :
- les barycentres — leibniz.
- les angles : de droites - de vecteurs - mesure d'angle.
- les Déplacements : Rotation translation
- les anti-Déplacements : Symetrie
- les Isométries
- les affinites
- les similitudes
- les Coniques

} f^tion format

~~[illegible]~~ nous avons surtout etudie beaucoup de transformations.

: Quand on fait un cours, l'explication de certains points un peu abstrait par un dessin (en Géométrie) par un exemple (de fonction en analyse) m'aide à comprendre le cours. Il est aussi bien de faire souvent des exercices qui permettent de comprendre et de voir comment on se sert du cours.
les TP en groupe sont interessant car ils nous permettent de travailler à plusieurs, d'echanger des idées.
Ils nous permettent de voir ce à quoi l'on ne pense pas tout seul. (tournure d'esprit de chacun et methodes face à un exercice)

: Il y a des différences par rapport à la 1°S surtout face aux problemes de bac.
Cette année, on doit réfléchir plus a quels "outils" utiliser.
On ne doit pas se lancer dans un exercice comme cela par ce que l'on peut tel ou tel chapitre en cours. On doit avoir une vue d'ensemble du programme.

: Effectivement, j'aime la geometrie aussi bien à la fin de cette année que precedement.
Mais, cette année, ce qu'il y a de supplementaire c'est que l'on a maintenant beaucoup de façon de résoudre un exercice. Cela donne donc plusieurs methodes, plusieurs façons de voir un problème.

I oui, certains exercices de geometrie analytique sont difficiles car on peut se perdre dans les calculs et perdre de vue les interpretations geometriques.
Il y a aussi les exercices où on ne nous guide pas du tout.

III le cours puis la correction des devoirs à la maison sur cette partie du cours.

IV oui, cette année nous avons fait plus de geometrie que en 1re, je pense que j'essaie de les resoudre plus methodiquement.

I oui

II le fait qu'il y ait des groupes de transformations que l'on connaisse ce que l'on obtient en les composant, et les theoremes sur l'existance et le nombre de transformations ayant certaines propriétés à partir d'un certain nombre de points et de leur image.

Conclusion

a) En guise d'évaluation, voici un dernier exercice donné à faire à la maison au mois de mai.

Enoncé : soit ABC un triangle quelconque direct. On construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux BAP, CBQ, ACR, de centre respectifs I, J, K. Montrer que IJK est équilatéral.

Dix-huit élèves sur vingt-huit ont traité cet exercice, dont quatorze tout à fait correctement. L'énoncé ne donnait aucune indication, en fait trois méthodes ont été données par les élèves :

- utilisation des complexes
- utilisation des transformations
- utilisation des angles

Trois copies d'élèves, illustrant les différentes méthodes, sont jointes en annexe 2.

b) Qualitativement, il semble bien que les changements introduits dans mon cours de géométrie sont corrélés à au moins des changements d'attitude si ce n'est à des changements de performance. La suite de cette recherche sera consacrée à se donner les moyens d'évaluer plus sérieusement et les changements des élèves (étude précise d'erreurs par exemple) et les causes de ces changements (enseignement méthodologique ? travail en groupe ? les deux ?).

ANNEXES

Les quinze démonstrations rencontrées en cours d'année pour démontrer l'alignement de trois points du plan (liste établie à partir de copies d'élèves auxquels la question a été posée à la fin de l'année)

Nous n'indiquons que sommairement les différentes méthodes proposées ; les trois points sont notés A, B, C et sont supposés distincts.

Pour démontrer l'alignement de ces trois points, on peut prouver que

* les coordonnées des trois points vérifient $ax + by + c = 0$ (un repère ayant été choisi)
* les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
* le déterminant $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est nul
* A est le barycentre de B et C affectés de coefficients convenables
* Si a, b, c représentent les affixes de A, B, C dans $\mathbb{C}$, le rapport $\frac{a-b}{c-a}$ est réel
* l'angle de droite $\widehat{(AB, AC)}$ est l'angle nul
* les trois points sont les projections sur les trois côtés d'un triangle d'un même point du cercle circonscrit au triangle (droite de Simson) ; on pourrait aussi utiliser la droite de Steiner, en démontrant que les trois points sont les symétriques par rapport aux trois côtés d'un triangle d'un même point du cercle circonscrit au triangle, mais les élèves n'y ont pas pensé
* Les trois points appartiennent simultanément à deux plans sécants (cette méthode suppose une utilisation de la géométrie dans l'espace pour résoudre un problème plan ; on l'a rencontrée dans l'exercice 5)

* Les points A, B, C sont les images par une application affine de trois points alignés (ce qui donne plusieurs méthodes en variant les applications !)

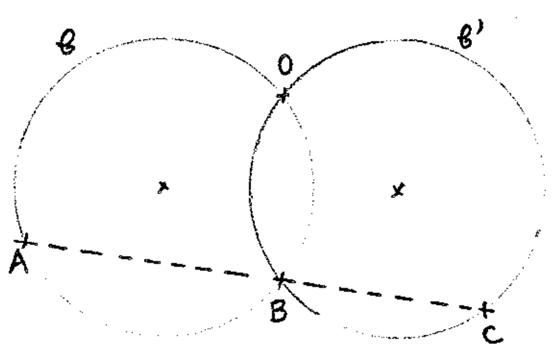
* les trois points représentent respectivement le centre d'une homothétie, un point et son image dans cette homothétie

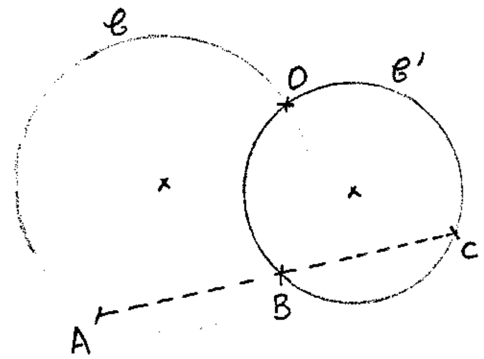
* les trois points représentent les centres de trois homothéties dont l'une est la composée des deux autres

* les trois points sont invariants dans une affinité

* il existe une symétrie glissée f telle que les trois points soient les milieux de trois segments du type $[Mf(M)]$

* il existe une rotation R de centre O, point d'intersection de deux cercles de même rayon $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telle que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par R et que les trois points représentent respectivement le deuxième point d'intersection des cercles, un point du premier cercle et son image par R (cf. configuration de base d'une rotation ci-dessous)





* il existe une similitude de centre O, point d'intersection de deux cercles quelconques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, telle que $\mathcal{C}'$ soit l'image de $\mathcal{C}$ par S et que les trois points représentent respectivement le deuxième point d'intersection des cercles, un point du premier cercle et son image par S (cf. configuration de base d'une similitude ci-dessus)

Annexe 2

Utilisons les complexes

Considérons la rotation ~~d'un~~ de centre B et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ tel que $r(A) = P$

On a donc $z_P - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_B)$

$\Rightarrow z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_A - z_B) + z_B$

$\Rightarrow z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A$

On trouve de même en considérant les rotation de centres A et C et d'angles $+\frac{\pi}{3}$:

$z_R = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C$

et $z_Q = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B$

~~Notons~~ On a I, J, K isobarycentres respectifs des triangles (A, P, B), $(C R A)$ et $(C B Q)$

donc $z_I = \dfrac{z_A + z_B + z_P}{3} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B + \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A\right)$

$z_J = \dfrac{z_B + z_C + z_Q}{3} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B\right)$

$z_K = \dfrac{z_A + z_C + z_R}{3} = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A + \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C\right)$

Donc $z_I - z_K = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + i\sqrt{3}\, z_A\right)$

$z_J - z_K = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_B - \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A - i\sqrt{3}\, z_C\right)$

Calculons $e^{i\frac{\pi}{3}}(z_I - z_K) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + i\sqrt{3}z_A\right)$

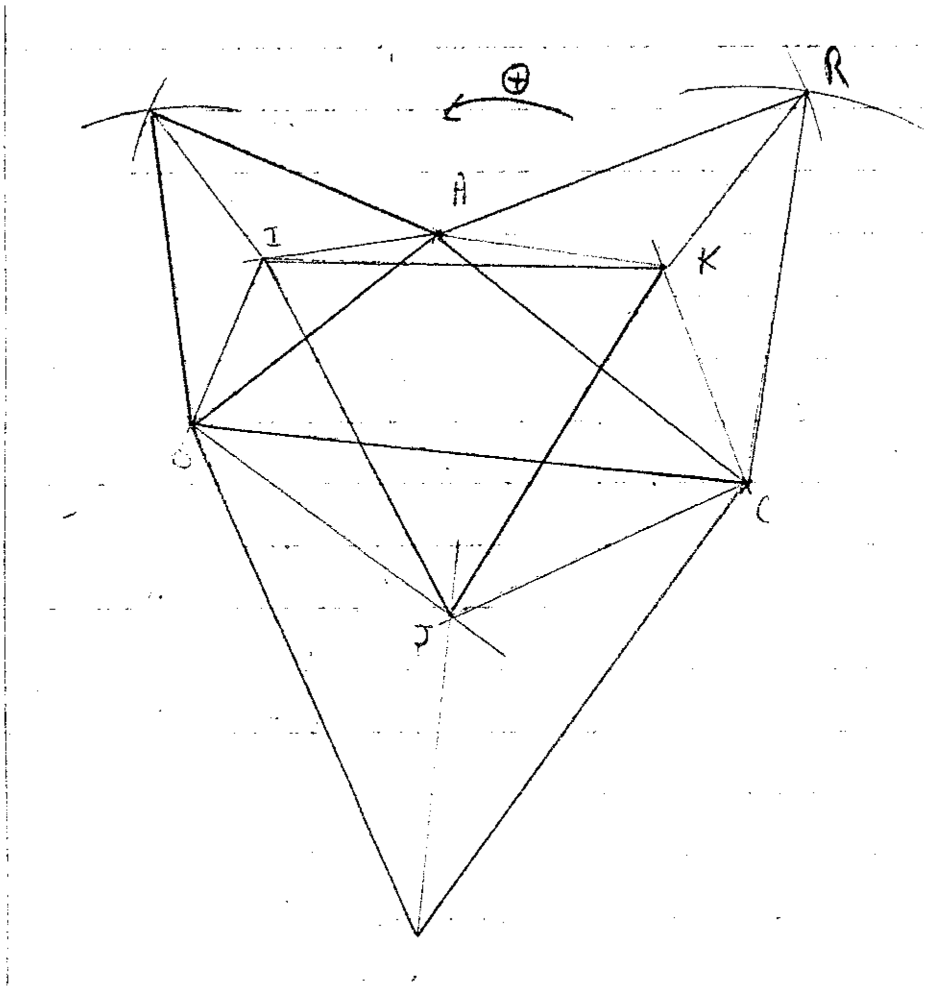
$\Leftrightarrow \quad e^{i\frac{\pi}{3}}(z_I - z_K) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B - i\sqrt{3}\,z_C - \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A\right)$

$= z_J - z_K$ donc $|z_J - z_K| = |z_I - z_K|$

$\arg(z_J - z_K) = \arg(z_I - z_K) + \frac{\pi}{3}$

$KI = KJ \Leftrightarrow IJK$ isocèle, or on a $\text{ang}(\widehat{\vec{KI}, \vec{KJ}}) = \frac{\pi}{3}$

donc I, J, K triangle équilatéral



propriété d'un triangle équilatéral : les angles qui le constituent mesurent tous $\frac{\pi}{3}$

pour montrer que I, J, K est un triangle équilatéral, <u>il suffit donc de montrer que mes $\widehat{I}$ = mes $\widehat{J}$ = mes $\widehat{K} = \frac{\pi}{3}$</u>.

pour cela utilisons des transformations du plan.
On sait que I, J, et K sont les centres de triangles équilatéraux
ils sont donc tous a equidistance de leurs sommets respectifs.
et d'autre part on a la propriété suivante :
mes $(\widehat{\vec{IA},\vec{IB}}) = \frac{2\pi}{3}$. c'est l'angle au centre.

* BAP est direct car ABC est direct et il a été construit à l'extérieur du triangle initial

et comme BAP* est direct on a
$(\vec{IB},\vec{IA}) = +\frac{2\pi}{3}$
même chose pour
$(\vec{JC},\vec{JB}) = +\frac{2\pi}{3}$ CBQ triangle direct.
et $(\vec{KA},\vec{KC}) = +\frac{2\pi}{3}$ ACR triangle equilatéral direct.

on peut donc considerer les rotations r_1, r_2, et r_3 de centres respectifs.
I, K, et J et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$
on connait quelques points et leurs images :
$B \xrightarrow{r_1} A \quad A \xrightarrow{r_2} C \quad C \xrightarrow{r_3} B$
$(A \xrightarrow{r_1} P) \quad (C \longrightarrow R) \quad (B \longrightarrow Q)$

etudions maintenant la composée.
$r_2 o r_1$: c'est une rotation $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = +\frac{4\pi}{3} \neq 0$.
de centre Ω.
qui transforme B en C :
$B \xrightarrow{r_1} A \xrightarrow{r_2} C$
Ω est donc defini : $\begin{cases} \Omega B = \Omega C \\ (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega A}) = +\frac{4\pi}{3} \end{cases}$

d'autre part considérons r_3^{-1}.
elle est de centre J et de ~~rap~~ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
et $B \xrightarrow{r_3^{-1}} C$
donc on a $\begin{cases} JB = JC \\ \text{et } (\vec{JB}, \vec{JC}) = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$
on en conclut donc que $\Omega = J$.

d'où $r_2 \circ r_1 = R_{(J, \frac{2\pi}{3})} = r_3^{-1}$

d'autre part on peut décomposer r_2 et r_1 en produit de symétries axiales : par exemple $r_1 = s_{(IK)} \circ s_{D_1}$ avec $I \in D_1$ et $(\widehat{D_1, (IK)}) = \frac{\pi}{3} [\pi]$ (1)

et $r_2 = s_{D_2} \circ s_{(IK)}$ avec $K \in D_2$ et $(\widehat{(IK), D_2}) = \frac{\pi}{3} [\pi]$ (2)

on a donc $r_3^{-1} = s_{D_2} \circ s_{(IK)} \circ s_{(IK)} \circ s_{D_1}$

$= s_{D_2} \circ s_{D_1}$

donc $D_2 \cap D_1 = \{J\}$ et $(\widehat{D_1, D_2}) = -\frac{\pi}{3} [\pi]$. (3).

donc $D_1 = (JI)$
et $D_2 = (JK)$.

on en conclut donc
d'après (1) : $((\widehat{JI), (I}K)) = +\frac{\pi}{3} [\pi]$

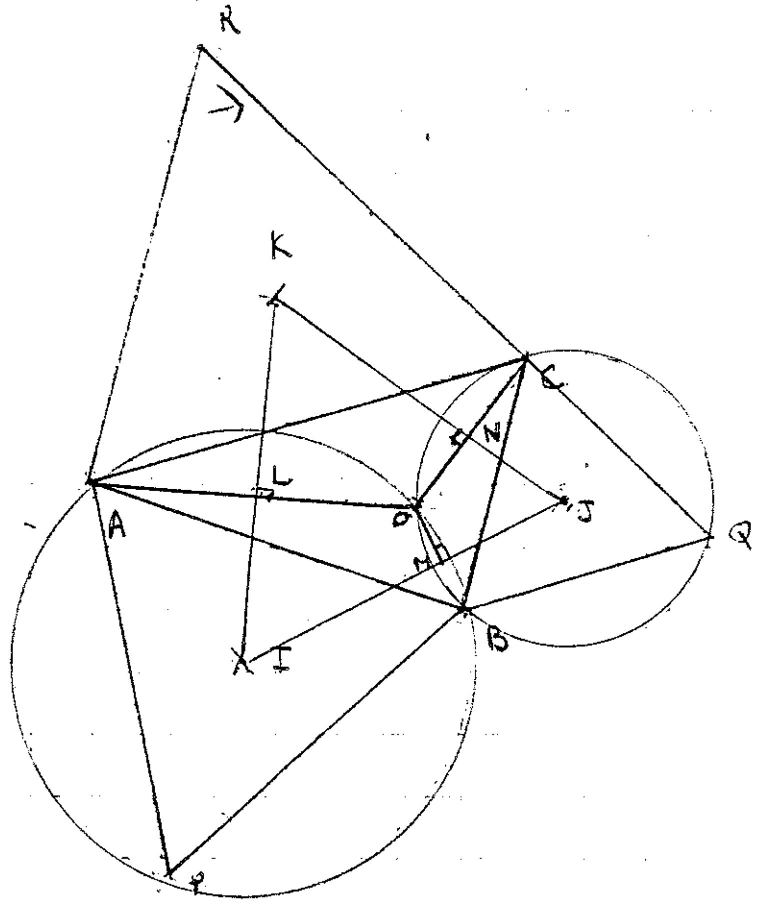
(2) $((\widehat{KI), (K}J)) = +\frac{\pi}{3} [\pi]$

(3) $((\widehat{JI), (J}K)) = -\frac{\pi}{3} [\pi]$ ou $((\widehat{JK), (J}I)) = \frac{\pi}{3} [\pi]$

et on a bien mes $((\widehat{IJ), (I}K)) =$ mes $\hat{I} = +\frac{\pi}{3}$
mes $((\widehat{KI), (K}J)) =$ mes $\hat{K} = \frac{\pi}{3}$
mes $((\widehat{JI), (J}K)) =$ mes $\hat{J} = \frac{\pi}{3}$

on a donc bien la condition <u>suffisante</u> pour que IJK soit un triangle <u>équilatéral</u>

conclusion : $\boxed{\text{le triangle IJK est equilatéral}}$



Soient : $\mathcal{C}_I$ le cercle de centre I et de rayon IP

A et B sont sur $\mathcal{C}_I$ (I centre de PBA)

$\mathcal{C}_J$ le cercle de centre J et de rayon JQ

B et C sont sur $\mathcal{C}_J$ (J centre de QCB)

B est sur les deux cercles donc

$\mathcal{C}_I$ et $\mathcal{C}_J$ sont toujours sécants en B.

Soit O, l'autre point d'intersection de $\mathcal{C}_I$

et $\mathcal{C}_J$. (Si $B \in (IJ)$, on aura $B = O$)

O, A, P, B sont cocycliques, sur le cercle $\mathcal{C}_I$.
donc, $(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{PA, PB})$ ①

O, B, Q, C sont cocycliques, sur le cercle $\mathcal{C}_J$.
donc, $(\widehat{OB, OC}) = (\widehat{QB, QC})$ ②

En ajoutant membre à membre les égalités
① et ②, on a :
$$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{PA, PB}) + (\widehat{QB, QC})$$

or : APB équilatéral direct donc : $\text{mes}(\widehat{PA, PB}) = -\frac{\pi}{3} \ (2\pi)$

BQC ———————— : $\text{mes}(\widehat{QB, QC}) = -\frac{\pi}{3} \ (\pi)$

Donc, $\text{mes}\left[(\widehat{PA, PB}) + (\widehat{QB, QC})\right] = -\frac{2\pi}{3} \ (\pi)$

donc $\text{mes}(\widehat{OA, OC}) = -\frac{2\pi}{3} \quad (\pi)$

D'autre part :
CRA équilatéral, donc :
$\text{mes}(\widehat{RA, RC}) = \frac{\pi}{3} \ (\pi)$

ou encore $\text{mes}(\widehat{RA, RC}) = \pi - \frac{2\pi}{3} \quad (\pi)$

Les mesures des angles $(\widehat{OA, OC})$ et $(\widehat{RA, RC})$ sont égales à π près.
Donc, les angles de droites sont égaux.
donc : $(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{RA, RC})$

On en déduit que R, A, O, C sont cocycliques ou alignés.

or, R, A, C sont tous sur le cercle $\mathcal{C}_K$, de centre K et de rayon KR (K centre RAC)

Donc O est sur $\mathcal{C}_K$.

Les cercles $\mathcal{C}_I$, $\mathcal{C}_J$, $\mathcal{C}_K$ sont concourants en O.

D'autre part :

O et B sont sur $\mathcal{C}_I$, donc,

$IO = IB$.

et donc I est sur la médiatrice de $[BO]$

O et B sont sur $\mathcal{C}_J$, donc,

$JO = JB$

et donc J est sur la médiatrice de $[BO]$.

D'où. $(OB) \perp (IJ)$

(Dans le cas où $B = O$, ~~la droite (OB) est~~ le rôle de ~~la~~ (OB) est joué par la tangente aux cercle $\mathcal{C}_I$ et $\mathcal{C}_J$ en B.)

De même, $(OA) \perp (IK)$

$(OC) \perp (JK)$

De plus, par cocyclicité sur les cercles $\mathcal{C}_I$, $\mathcal{C}_J$, et $\mathcal{C}_K$, on a les égalités :

$(\widehat{OB, OA}) = (\widehat{PB, PA})$ A

$(\widehat{OC, OB}) = (\widehat{QC, QB})$ B

$(\widehat{OA, OC}) = (\widehat{RA, RC})$ C

et ; Soit L l'intersection de (OA) et (KI)
— M ——— (OB) et (IJ)
N ——— (OC) et (JK).

Les quadrilatères L, O, M, I a deux angles droits non consécutifs
d'où : $\cancel{(\widehat{OM, OL}) = (\widehat{IM, IL})}$ $(\widehat{IM, IL})$

$$\Leftrightarrow \cancel{(\widehat{OB, OA}) = (\widehat{IM, IJ})}$$

$$(\widehat{OM, OL}) = (\widehat{IM, IL})$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{OB, OA}) = (\widehat{IJ, IK}) \quad (A')$$

De même :

$$(\widehat{ON, OM}) = (\widehat{JN, JM})$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{OC, OB}) = (\widehat{JK, JI}) \quad (B')$$

$$(\widehat{OL, ON}) = (\widehat{KL, KN})$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{OA, OC}) = (\widehat{KI, KJ}) \quad (C')$$

$$(A) \text{ et } (A') \Rightarrow (\widehat{IJ, IK}) = (\widehat{PB, PA}) \quad (1)$$

$$(B) \text{ et } (B') \Rightarrow (\widehat{J\cancel{N}K, JI}) = (\widehat{QC, QB}) \quad (2)$$

$$(C) \text{ et } (C') \Rightarrow (\widehat{KI, KJ}) = (\widehat{RA, RC}) \quad (3)$$

(1), (2) et (3) $\Rightarrow$ I, J, K est équilatéral.

TITRE :

Une année de géométrie en terminale C

AUTEUR :

TENAUD Isabelle

RESUME :

La brochure présente certains exercices proposés aux élèves dès le début du cours de géométrie et qui semblent bien adaptés à un apprentissage des méthodes en géométrie, et un résumé des interventions ultérieures. D'autre part, les questionnaires recueillis en fin d'année témoignent de changements positifs des élèves vis-à-vis de la géométrie.

MOTS CLES :

Mathématiques
Travail groupe
Géométrie
Méthodologie

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-038-8