IREM

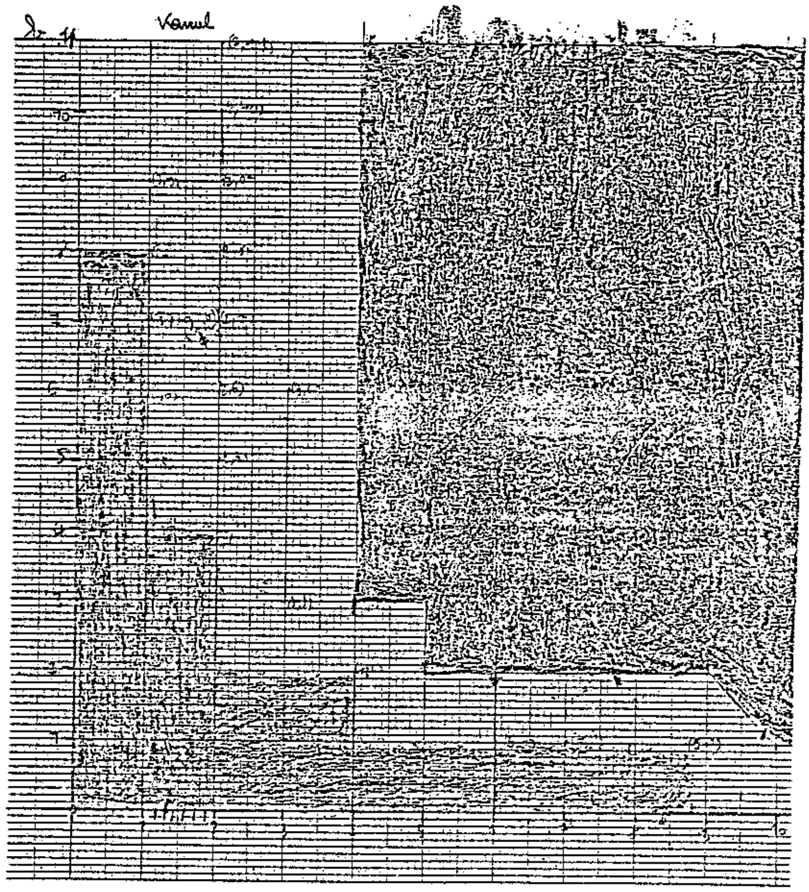
INSTITUT DE RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

62

Février 86

LIAISON ECOLE-COLLEGE

nombres



décimaux

objectif: Apport d'informations didactiques et mathématiques à l'enseignant pour construire des situations d'enseignement

sujet: Un processus d'apprentissage des nombres décimaux. Construction et analyse didactique de séquences d'enseignement

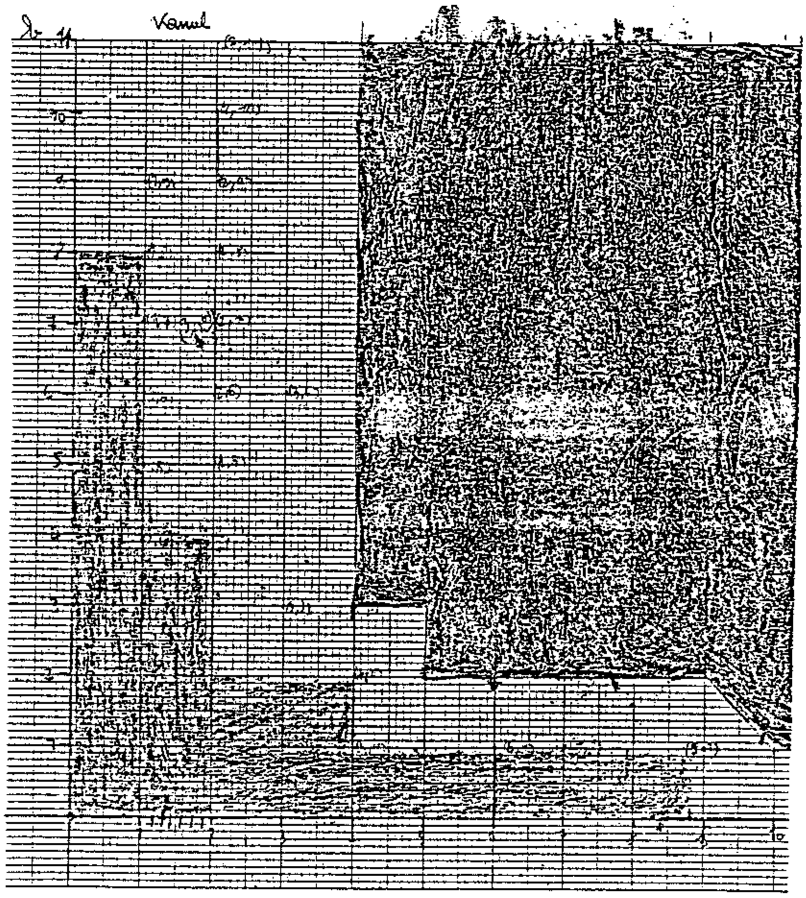
niveau: Cours Moyen - 6e-5e

public: Instituteurs - Professeurs de mathématiques du Collège

UNIVERSITE-PARIS VII

LIAISON ECOLE-COLLEGE

nombres



décimaux

Introduction :

Cette brochure s'adresse aux maîtres de l'école élémentaire (CM_1 - CM_2) et aux professeurs de collège (6e-5e).

L'objectif de ce travail est l'enseignement des nombres décimaux : les séquences sont rédigées ici dans le cadre d'une construction de nouveaux nombres au cours moyen ; mais elles peuvent être utilisées au collège pour redonner du sens aux nombres décimaux que les élèves connaissent déjà mais avec des règles de fonctionnement souvent inadaptées. La présentation n'est pas toujours linéaire. Les nouveaux nombres sont créés pour répondre à des situations de mesure où les nombres entiers sont insuffisants. Dans les situations proposées on joue sur l'interaction entre le cadre numérique et les cadres géométrique ou graphique pour faire progresser les connaissances sur les nombres.

Les nouveaux nombres créés sont d'abord écrits sous forme fractionnaire. Les fractions décimales sont utilisées pour simplifier les calculs et la convention de la virgule apparait pour simplifier l'écriture. Une grande importance est accordée à la graduation d'une droite en interaction avec l'ordre des nombres.

Par ailleurs, les nombres, qu'ils soient entiers, fractionnaires ou décimaux sont utilisés pour désigner des coefficients de fonctions numériques linéaires, i.e. des coefficients de proportionnalité et ramener les calculs sur les fonctions linéaires (addition, composition, comparaison) à des calculs sur les nombres (addition, multiplication, comparaison).

D'autre part, dans toutes les situations choisies nous avons eu le souci de faire fonctionner les notions dont on visait l'apprentissage avant de leur donner le statut de connaissances à retenir, avec le vocabulaire adapté, puis de les réutiliser dans des situations différentes.

La plupart des séquences proposées ont été expérimentées à l'école élémentaire en CM_1 et CM_2 et certaines l'ont été dans des classes de 6ème. Que les enseignants de ces classes soient ici remerciés pour leur collaboration sans laquelle ce travail n'aurait pu se faire.

Toutes remarques, critiques, et suggestions seront les bienvenues, les adresser à : R. Douady

M.J. Perrin-Glorian

SOMMAIRE

PREMIERE PARTIE : QUEL APPRENTISSAGE DES NOMBRES DECIMAUX ?

I.- HYPOTHESES DIDACTIQUES.

Voici quelques hypothèses sur lesquelles nous nous sommes appuyées pour la construction des séquences d'apprentissage.

1) Construction d'un concept.

- Les concepts se construisent à l'occasion d'actions. Ils prennent leur sens grâce aux problèmes qu'ils permettent de résoudre. Chaque nouveau problème contribue à enrichir le concept.

- Un nouveau concept se construit aussi en se situant par rapport aux connaissances déjà acquises, soit pour les élargir et les généraliser, soit pour les remettre en cause et en construire de nouvelles mieux adaptées au problème posé.

- Un problème fait en général intervenir plusieurs concepts. Chacun prend aussi son sens dans les relations qu'il entretient avec les autres concepts impliqués dans le problème.

- Cette diversité apparaît notamment si le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre numérique, cadre graphique).

  Prenons, par exemple, le problème suivant :

  "Recherche de rectangles de périmètre donné, parmi ces rectangles, y en a-t-il un d'aire maximum ?" (cf cf. V et ch VIII)

Il est formulé dans le cadre géométrique, on peut le reformuler dans les cadres numérique et graphique. Chacun des cadres sert de référence à l'autre et contribue à donner de la signification au problème.

- Les notions mathématiques fournissent des moyens de décrire une situation et de faire des prévisions sur le résultat d'actions non encore effectuées. Pour faire ces descriptions et prévisions et les communiquer, on est amené à construire un langage oral et écrit rendant compte des objets de la situation et des relations entre eux.

- Les prévisions peuvent être contrôlées par l'action et éventuellement remises en cause. Cependant ce moyen de contrôle n'est pas toujours possible ni adapté au problème ni même sûr. Les élèves sont alors amenés à chercher d'autres moyens de validation; cette phase est nécessaire à l'explicitation par les élèves des concepts et des relations dont le maître vise l'apprentissage.

- Il est dès lors possible au maître de pointer les connaissances que les élèves doivent retenir. C'est l'objet de la phase d'institutionnalisation. Cette phase contribue à donner un statut d'objet mathématique autonome aux nouvelles connaissances. Leur réinvestissement dans d'autres problèmes est alors possible.

- Une seule situation ne suffit pas pour construire un concept. Plusieurs situations sont nécessaires pour faire fonctionner le concept sous ses divers aspects et notamment mettre en jeu la diversité des relations qu'il entretient avec d'autres concepts.

- Pour que les nouvelles connaissances soient intégrées aux anciennes et soient facilement mobilisables pour poser et résoudre de nouveaux problèmes, il est nécessaire qu'elles deviennent suffisamment familières. Elles prennent alors le statut de connaissances anciennes sur lesquelles on va pouvoir s'appuyer pour en construire de nouvelles. Des situations de renforcement permettent d'acquérir la familiarité souhaitée.

- Compte tenu des principes précédents, il faut s'attendre à ce qu'un concept se forme sur une longue période de temps. C'est ce que nous affirme la psychologie cognitive et ce qu'on constate dans la pratique, par exemple pour la construction des décimaux ou de la proportionnalité.

2.- Conditions sur les problèmes utilisés dans l'apprentissage.

La résolution de problèmes joue un rôle fondamental dans l'apprentissage. Mais suivant les moments de l'apprentissage, les problèmes remplissent des fonctions différentes, essentiellement :

1°) favoriser la construction de nouvelles connaissances (à travers les diverses phases d'action, formulation, validation, institutionnalisation décrites au paragraphe précédent).

2°) fournir des occasions d'emploi diverses aux anciennes connaissances et ainsi cerner leur domaine d'efficacité et de validité.

Etant données les hypothèses sur la construction des concepts développées dans le premier paragraphe, nous choisissons, pour répondre à la première fonction, des problèmes remplissant certaines conditions :

- l'énoncé est facile à comprendre et l'élève est capable d'envisager ce que peut être une réponse au problème ; ceci est indépendant de sa capacité à en proposer une (cette condition est valable pour tous les problèmes).

- la réponse n'est pas évidente mais compte-tenu de ses connaissances, l'élève peut engager une procédure de réponse partielle.

- pour répondre complètement au problème, l'élève devra construire la connaissance dont le maître vise l'apprentissage.

- le problème est riche ; le réseau de concepts impliqués est assez important, mais pas trop pour que l'élève puisse en gérer la complexité.

- le problème est suffisamment ouvert pour que l'élève puisse envisager des questions non formulées dans le texte et utiliser des procédures diverses. Cependant les possibilités qui lui sont offertes ne sont pas trop grandes de façon à ce qu'il puisse effectivement faire des choix. Ces conditions éliminent par exemple un découpage du problème en de trop petites questions pour lesquelles il n'y a qu'une procédure possible.

- le problème peut se formuler dans au moins deux cadres, chacun ayant son langage, cadres entre lesquels on sait établir des correspondances.

3.- Situations d'apprentissage.

Une situation d'apprentissage est caractérisée par un problème et une certaine organisation du travail adaptés aux objectifs visés. Les conceptions des élèves sont le résultat d'un échange avec les problèmes qu'ils ont à résoudre et avec les interlocuteurs en communication avec lui (autres élèves, maître, sans compter l'apport extérieur à la classe : parents, télévision, journaux...). Au cours de ces échanges les connaissances antérieures sont mobilisées pour être modifiées, complétées ou rejetées.

Dans le but d'organiser les échanges de l'élève avec le milieu de façon productive, on peut classifier les situations autour de 3 formes de dialectique qui ont des fonctions différentes (G. BROUSSEAU - I.R.E.M. de BORDEAUX) :

- dialectique de l'action :

L'élève est confronté à une situation qui lui pose problème. Dans sa recherche d'une solution, il produit des actions qui peuvent aboutir à la création d'un savoir-faire. Il peut plus ou moins expliciter ou valider ses actions, mais la situation d' action ne l'exige pas.

- dialectique de la formulation :

Des conditions différentes rendent nécessaire un échange d'informations et la création d'un langage pour assurer l'échange. Dans la situation de formulation, l'élève peut justifier ses propositions, mais la situation ne l'exige pas.

- dialectique de la validation :

Les échanges ne concernent plus seulement les informations mais aussi les déclarations. Il faut prouver ce que l'on affirme autrement que par l'action. C'est le cas si l'élève doit convaincre un camarade dans une situation de communication.

Remarque sur les situations de communications de type émetteur-récepteur :

Cette forme de travail remplit 2 fonctions :

+ traiter des classes de problèmes en donnant l'occasion à chacun de traiter un énonce différent. La diversité des énoncés provient de choix différents des données par leur nature et leur valeur, mais les relations en jeu sont toujours les mêmes. La nature des renseignements donnés par l'émetteur influe sur la procédure du récepteur (cf §4 variables didactiques)

En laissant l'initiative de ces choix aux élèves, on peut au bilan placer la discussion sur le plan des relations en jeu et pointer la variablité des données.

+ développer les dialectiques de formulation et de validation.

Ce type de situation présente des avantages indiscutables sur le plan de l'apprentissage. Il peut cependant être difficile à réaliser dans certaines classes. On peut remplacer la communication entre les élèves par une communication entre le maître et l'élève. Le maître joue le rôle d'émetteur pour tous les élèves en faisant varier lui-même les données, tant par leur nature que par leur valeur. On perd cependant l'occasion d'enclencher une dialectique de preuve. Un élève sait que le maître "sait" et n'a pas sérieusement envie de développer une argumentation convaincante.

4.- Variables didactiques

Une situation didactique dépend de facteurs dont le choix va influer sur les stratégies de résolution du problème. De tels facteurs sur lesquels le maître peut agir sont des variables didactiques de la situation. En voici quelques exemples :

- les nombres en jeu, qui peuvent être plus ou moins grands, entiers ou fractionnaires.

- le matériel dont disposent les élèves (exemple : situation segment, ch. I : les élèves disposent de la règle graduée ou non, disposent de l'unité de mesure avant de tracer le trait ou après).

- les connaissances antérieures des élèves (le même problème ne donnera pas les mêmes stratégies de résolution au cours moyen ou en seconde).

Au cours de la présentation des problèmes et de la description des séquences, nous préciserons les variables de la situation, les choix que nous avons faits et, autant que possible, les raisons de ces choix.

5.- Organisation des séquences.

Une séquence se décompose en plusieurs phases :

a) Exposé du problème

Le maître expose la consigne, distribue éventuellement le matériel, s'assure, au cours d'une discussion avec les élèves que la consigne a du sens pour chacun d'eux.

b) Phase de recherche :

Les élèves travaillent individuellement ou en équipe, ou en situation de communication. Au cours de cette phase, il se peut que des difficultés fassent l'objet d'une discussion : c'est par exemple le cas si des élèves ne retiennent qu'une partie de la consigne ou ajoutent des contraintes qui n'y sont pas. C'est aussi le cas si leurs conceptions entrent en conflit avec les faits ou avec celles d'autres élèves.

c) Bilan. Présentation des résultats.

Selon le cas, le maître recense les résultats et les fait commenter par la classe, ou bien les équipes viennent présenter leur travail et le soumettent à la critique des autres.

Au cours de cette phase, les élèves sont obligés soit de convaincre leurs camarades de la validité de leur réponse, soit de se laisser convaincre de leurs erreurs ou de leur mauvaise interprétation du problème.

Dans tous les cas une argumentation sur le problème doit se développer. Celle-ci peut déboucher sur de nouvelles questions, une nouvelle extension du problème et des procédures utilisées.

d) Phase de synthèse et d'institutionnalisation :

Au début de la séance suivante, on résume la séance (ou les séances) précédente(s) sur le même problème. Les élèves rappellent le problème, les solutions qu'ils ont trouvées et les méthodes utilisées.

Les élèves comparent les méthodes, leurs avantages et leurs inconvénients.

Au cours de cette phase de synthèse, les caractères importants du problème (autrement dit l'objectif d'apprentissage visé par le maître) sont soulignés.
Ils sont alors détachés de leur contexte d'introduction et institutionnalisés. Il s'agit, pour le maître, de dégager, à partir de ce qu'ont produit les élèves, ce qu'ils doivent retenir et de le leur dire. Ce pointage est indispensable si on ne veut pas perdre les bénéfices de la phase d'action.

e) Mise à niveau de la classe et évaluation.

C'est une phase de travail personnel servant au maître à avoir une photographie de la classe et à l'élève à savoir où il en est. Ce travail se fait essentiellement sous forme d'exercices de 2 types qui interviennent à des moments différents et qui remplissent des fonctions différentes.

1) Repérer les élèves en difficulté et leur apporter individuellement un complément d'informations et d'explications. Cette mise à niveau de l'ensemble de la classe est essentielle à la progression de l'apprentissage.

Elle n'est cependant réalisable que si peu d'élèves en ont besoin. Pour remplir cette fonction de repérage et mise à niveau, le maître propose aux élèves un petit nombre d'exercices courts mais typiques de l'apprentissage visé, en général à la fin des phases de bilan.

2) * Familiariser l'élève avec les nouvelles connaissances qu'il doit retenir et maîtriser

* Evaluer l'élève, tester ses acquis présumés après la mise à niveau.

Pour répondre à cela, le maître propose plusieurs séries d'exercices comportant chacune de nombreuses petites questions. Chaque série met en jeu un élément nouveau (dans un contexte plus ou moins complexe) qui a déjà fonctionné en situation d'action et avec lequel il reste à se familiariser pour en acquérir une bonne disponibilité. Ces tests se passent après la phase d'institutionnalisation.

Ces exercices peuvent révéler des failles. Ils permettent une nouvelle mise à niveau sélective si elle porte sur peu d'élèves, et la mise en place d'une nouvelle situation d'action centrée sur les difficultés des élèves si nombre d'entre eux sont concernés. On se rend compte de l'importance de chacun des trois temps : activités - institutionnalisation - exercices pour un apprentissage durable et sur lequel on va s'appuyer pour continuer à faire évoluer les conceptions.

f) Réinvestissement. Evolution des conceptions.

On peut penser qu'au cours du travail les conceptions des élèves ont évolué. Il est important de proposer aux élèves des problèmes plus complexes dans lesquels les nouvelles conceptions devraient fonctionner et au cours desquels elles pourront continuer à évoluer.

II.- ROLE DES NOMBRES.

Les nombres servent principalement à dénombrer des collections, à désigner des mesures, des rapports entre mesures et à calculer sur ces mesures. Ils servent aussi à coder des fonctions et à calculer sur ces fonctions.

1°) Les nombres entiers ont été définis pour rendre compte des propriétés communes à certaines collections d'objets. L'ordre et les opérations dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers sont introduits pour rendre compte de manipulations sur les collections d'objets. En fait $\mathbb{N}$ est un modèle imparfait parce que trop riche : en effet des nombres tels que 10^{200} vraisemblablement plus grand que le nombre de particules de l'univers, ne sont pas susceptibles d"interprétation physique. Mais on serait gêné pour raisonner si la somme ou le produit de deux nombres entiers n'était pas un nombre entier. Ainsi les nombres entiers sont adaptés à la mesure de quantités discrètes.

2°) Nombres décimaux.

Intéressons-nous maintenant à la mesure des quantités continues que sont les grandeurs physiques, par exemple les longueurs, les aires, les volumes, les durées, les masses, les pressions... Elles ont toutes les mêmes propriétés et vont amener au même modèle mathématique : l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Plus précisément, si on choisit une unité de mesure u, les nombres entiers permettent de mesurer certaines quantités mais pas toutes. Si l'on veut augmenter le stock des quantités mesurables, on a deux possibilités :

- prendre une unité v plus petite que u; mais on reste limité, on est amené à changer à nouveau d'unité, cependant quelle que soit l'unité choisie, on ne peut mesurer avec $\mathbb{N}$ les quantités plus petites que v.

- inventer des nombres qui rendent compte de toutes les mesures en u. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels répond à la question. Les nombres décimaux permettent d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel. Les nombres rationnels ont aussi cette propriété. De plus, la somme la différence, le produit et le quotient de deux rationnels sont encore rationnels : la somme, la différence, le produit de deux décimaux sont encore des nombres décimaux ; le quotient de deux décimaux n'est pas toujours décimal mais il peut être approché d'aussi près qu'on veut par des nombres décimaux. En revanche, compte-tenu de notre écriture en base 10, l'ensemble des nombres décimaux présente un avantage majeur par rapport à l'ensemble des rationnels : les calculs, les comparaisons y sont beaucoup plus faciles.

3°) Codage de fonctions linéaires

* Pour connaître une fonction f, il faut connaître les couples $(x, f(x))$ pour toutes les valeurs possibles de la variable x. Pour certaines fonctions on peut faire une grande économie. C'est le cas des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ où la donnée d'un seul couple $(a, f(a))$ permet de connaître tous les couples $(x, f(x))$. Comme on a le choix de a, en prenant $a = 1$, la seule donnée de $f(1)$ suffit grâce à la relation $f(x) = x \cdot f(1)$. On peut donc coder la fonction par $f(1)$.

* Considérons le cas de fonctions linéaires entre grandeurs mesurables. Pour chaque grandeur on choisit une unité de mesure : par exemple la seconde pour les temps, le mètre pour les longueurs. Si x est mesuré en u et $f(x)$ est mesuré en v, on peut écrire $f(1u) = kv$. La fonction f est caractérisée par le couple $(1u, kv)$ (qui fait intervenir les unités u et v et le coefficient k) et la relation $f(au) = af(1u) = kav$. Les

unités de mesure u et v étant fixées, à la fonction f entre grandeurs correspond une fonction $\dot{f}$ entre nombres qui les mesurent. On a $\dot{f}(1) = k$; la fonction $\dot{f}$ est codée par k ; on peut coder f par (u, v, k) ou plus simplement par k lorsque u et v sont fixées.

* Si une fonction f est codée par (u, v, k) où k est un nombre réel, et on remplace les unités u et v par des unités u' et v' proportionnelles à u et v (il existe un nombre t tel que u' = tu et v' = t v), alors f est aussi codée par (u', v', k) avec le même coefficient k. En effet, on a
$f(u) = kv$ et $f(u') = f(tu) = t\ f(u) = t(k\ v) = k(t\ v) = k\ v'$
donc $f(u') = k\ v'$ et f peut être codée par (u', v', k).

* Dans le cas où u et v correspondent à des grandeurs de nature différente, on peut dire que k est la mesure en v/u d'une nouvelle grandeur. C'est le cas de la vitesse mesurée en m/s. La fonction peut alors être codée par k v/u.

* <u>Exemples</u> :

• <u>fonctions linéaires entre grandeurs de même nature</u> : c'est le cas de la réalisation d'un plan à l'échelle ou de cartes de géographie. La correspondance entre longueurs caractérisée par (1 km, 2 cm) est codée (km, cm, 2) ou (km, km, $\frac{2}{100\ 000}$) ou (cm, cm, $\frac{2}{100\ 000}$) ou encore $\frac{2}{100\ 000}$ en sous-entendant qu'on prend la même unité au départ et à l'arrivée.

• <u>fonctions linéaires entre grandeurs de nature différente</u> : c'est le cas de la correspondance entre le temps t et la distance d parcourue pendant ce temps dans un mouvement régulier. La correspondance entre temps et distance caractérisée par (1 s, 3 m) peut être codée par (s, m, 3) ou par (h, m, 3 x 3600) ou par (h, km, 3 x 3,6). Ici la nouvelle grandeur est la vitesse qui vaut 3m/s ou 10 800 m/h ou 10,8 km/h.

C'est aussi le cas d'une correspondance entre masses et prix, du type prix payé pour l'achat d'une certaine quantité de pommes. Une telle correspondance est caractérisée par (1 kg , 8 F) et codée (kg, F, 8) ou 8 F/kg. Ici la nouvelle grandeur est le prix par kg de pommes, elle vaut 8 F/kg.

* Pour comparer deux fonctions f_1 et f_2, on compare les coefficients k_1 et k_2 correspondants.

* On peut additionner f_1 et f_2 on obtient une nouvelle fonction $f = f_1 + f_2$ caractérisée pour (1u, $(k_1 + k_2)$ v) et codée par (u, v, $k_1 + k_2$).

Ainsi les fonctions linéaires ont les propriétés d'une grandeur mesurable : on peut les comparer entre elles; les additionner, lesmultiplier par un nombre.

* Dans certains cas on peut composer deux fonctions linéaires f_1 et f_2 :

Par exemple si f_1 est une correspondance entre capacités et masses qui, à 1 litre associe k_1 grammes, si f_2 est une correspondance entre masses et prix qui à 1 gramme associe k_2 francs, la fonction linéaire composée $f = f_2 \circ f_1$ entre capacités et prix est caractérisée par (1 l, $k_1 \times k_2$F).
Autrement dit si f_1 est codée par (l, g, k_1)

ou k_1 g/l

si f_2 est codée par (g , F, k_2)

ou k_2 F/g

alors f est codée par (l, F, $k_1 \times k_2$)

ou $k_1 \times k_2$ F/l

Remarque : Nous venons de voir que le calcul sur les fonctions (numériques) linéaires peut se ramener à un calcul sur les nombres. Il peut arriver que pour résoudre un problème comportant des données numériques on ait intérêt à interpréter certaines d'entre elles comme des fonctions linéaires.

Prenons par exemple le problème suivant : une longueur de 50 mètres est représentée sur un plan par un segment de 8 cm de long ; on place entre A et B des points M_n arbitrairement, on voudrait connaître les distances réelles correspondant aux distances AM_n sur un plan. On a intérêt ici à considérer les données 8 cm, 50 m comme représentatives d'une fonction linéaire. Il reste à formuler cette fonction et à chercher l'image par cette fonction des valeurs données.

III. - DES CADRES EN INTERACTION AVEC LE CADRE NUMERIQUE

III.1. Les fonctions numériques

- Elles interviennent pour étendre le domaine des nombres connus et les relations sur les nombres, (opérations et ordre), tant du côté des grands nombres, que des nombres à intercaler entre deux nombres connus. Par ailleurs nous avons déjà vu que les nombres servent à coder les fonctions linéaires (Cf. II.3.) et à traduire commodément des calculs sur ces fonctions. Or on ne peut échapper à ces calculs dans les problèmes de proportionnalité.
- L'interprétation d'une équation, par exemple $a.x = b$, comme valeur d'une fonction (ici b pour la fonction $x \to ax$) pour une certaine valeur de la variable, change la signification de l'équation et permet un autre accès à sa résolution : par exemple par tests et encadrements, à la place d'un recours direct au rationnel $\frac{b}{a}$ ou à la division de b par a.

- Le concept de fonction intervient dans le choix de la stratégie de résolution d'un problème en élargissant le champ de recherche à des problèmes voisins ou à des cas limite*. C'est le cas lorsqu'on fait varier les données numériques du problème. On se donne alors :

  . des moyens de contrôler la validité des procédures envisagées, par exemple en faisant apparaître des incohérences.

  . des moyens de réduire l'incertitude en utilisant le sens de variation de la fonction.

  . des moyens de généraliser.

  . des moyens de contribuer à la construction de concepts par la recherche d'invariants (exemple vitesse constante dans un mouvement uniforme).

Ainsi dans l'approche des nombres décimaux que nous proposons, les fonctions interviennent implicitement et jouent un rôle d'outil dans les problèmes de proportionnalité et dans les problèmes d'approximation.

Il n'y aura pas à leur propos d'institutionnalisation sauf dans le cas des fonctions linéaires, et même dans ce cas, on n'utilisera pas le mot "fonction" mais celui adapté à la situation comme par exemple échelle, vitesse.

Les fonctions interviennent déjà comme outil pour résoudre des problèmes de proportionnalité sur les entiers, donc pour traiter des quantités discrètes.

L'approximation est un moyen de traiter des grandeurs continues par l'intermédiaire de quantité discrètes. On se sert, comme outil implicite, de la continuité et de la monotonie, au moins locales, des fonctions en jeu dans le problème pour obtenir de l'information sur des grandeurs qu'on ne peut pas mesurer.

---

* Par exemple, pour se convaincre que la vitesse moyenne sur un aller et retour n'est en général pas la moyenne des vitesses à l'aller et au retour, on peut regarder le cas où l'une des vitesses est très petite ou même nulle.

Prenons l'exemple de la représentation d'un parcours de 50 m par un segment AB de 8 cm de long, on cherche à représenter la position d'un poteau situé à 23 m du départ.

Si on sait calculer l'échelle, et si on pense à le faire, la réponse est facile à trouver, sinon on peut chercher à placer le point représentatif du poteau par approximations. Par exemple :

50 m $\longrightarrow$ 8 cm
25 m $\longrightarrow$ 4 cm

$0 < 23 < 25$ le point cherché est à moins de 4 cm de A, mais assez près du milieu de AB.

Autre exemple :

Considérons la relation entre la longueur a du côté d'un carré et son aire a^2.

Si $a = 3$ cm $\qquad a^2 = 9$ cm^2

Si $a = 4$ cm $\qquad a^2 = 16$ cm^2

Un carré d'aire 12 cm^2 a des côtés dont la longueur est comprise entre 3 et 4 cm.

La recherche de variables et des relations entre elles, l'analyse de ces relations permettent de structurer l'information en organisant les données.

Prenons par exemple le problème de recherche d'un rectangle de périmètre donné P_o et d'aire A_o. (Cf. Ch. VIII)

Tel qu'il est posé le problème fait intervenir deux inconnues : les dimensions a et b du rectangle cherché.

Un moyen de résoudre ce problème est de le faire entrer dans un cadre plus large : parmi les rectangles de périmètre P_o , y-en-a-t'il un d'aire A_o ?.

On s'intéresse alors à tous les rectangles de périmètre P_o , les variables en jeu sont les dimensions a et b du rectangle et son aire A : avec les relations $a + b = P_o$, $a \times b = A$.

Une façon de progresser est de s'apercevoir que l'aire A est fonction de l'une des dimensions (soit a, soit b) l'autre étant déterminée par la relation $a + b = P_o$.

Le problème est de savoir comment il faut faire varier le couple (a,b) de façon que A se rapproche de A_o.

III.2. La géométrie

Dans le cadre géométrique, les grandeurs en jeu (longueur, aire, volume) sont des grandeurs continues. Implicitement, on admet que, pour une unité choisie d'une grandeur déterminée, il doit y avoir correspondance parfaite entre les valeurs de cette grandeur et les nombres (connus ou inconnus des élèves) qui les mesurent.

La géométrie fournit une source de problèmes conduisant à des mesures, pour lesquels on est convaincu de l'existence d'une solution géométrique, et qui vont motiver la construction de nouveaux nombres pour désigner ces solutions : par exemple toutes les longueurs comprises entre 1 cm et 2 cm peuvent avoir de la signification, même si l'élève ne connaît pas de nombre entre 1 et 2 pour désigner leur mesure.

Pour que le cadre géométrique puisse jouer le rôle qu'on attend de lui dans la construction des nombres, pour que le cadre graphique puisse être pleinement utilisé dans son double aspect symbolique et géométrique, il est nécessaire que les élèves aient un minimun de connaissances en géométrie avec lesquelles ils soient suffisamment familiarisés pour y recourir facilement. Par exemple, pour construire les notions de longueur, aire, volume, on aura recours à des transformations géométriques sur un axe, dans le plan ou dans l'espace : symétrie, translation, rotation, découpage et réagencement de figures du plan ou de l'espace. Par ailleurs, les propriétés géométriques des figures manipulées interviendront dans les problèmes : par exemple symétries d'un rectangle ou d'autres figures pour déterminer, avec ou sans calcul, l'aire ou le périmètre.

III.3. Les représentations graphiques

Les problèmes de mesures de longueurs et d'aires peuvent se formuler dans plusieurs cadres : le cadre géométrique et le cadre algébrique en premier lieu : les nombres, entiers d'abord, fractionnaires ensuite, qui traduisent des mesures de longueur ou d'aire sont aussi des solutions d'équations : par exemple $n \cdot x = 1$, $n \cdot x = a$ $x \cdot x = a$

La représentation graphique se situe dans un troisième cadre qu'il nous paraît intéressant de manipuler dès l'école élémentaire. Pour un problème qui met en jeu des grandeurs continues telles que longueurs ou aires, les points repérés graphiquement correspondant à certaines mesures sont la trace visible d'un graphique représentant plus complètement le problème. Le graphique est une partie du plan et jouit des propriétés géométriques de celui-ci : on peut, par exemple, s'interroger sur la signification dans le problème des points du segment joignant 2 points déjà repérés. Le recours au graphique permet une autre formulation pour des problèmes dans lesquels on peut isoler des variables ayant des relations entre elles. Il permet de supposer l'existence de solutions à des équations, de situer ces solutions et de faire des choix dans une recherche par tests en utilisant les propriétés géométriques du support : le plan n'a pas de "trou". Par exemple, tout point (a,b) d'un quadrillage gradué représente un rectangle de dimensions a et b. Les rectangles d'aire 38 se répartissent sur une courbe frontière entre les deux régions correspondant respectivement aux couples (a,b) tels que $a \times b > 38$ et $a \times b < 38$. Les carrés sont sur la première bissectrice, ensemble des couples (a,a). Le carré d'aire 38, s'il existe, se trouvera à l'intersection des deux courbes.

Mais il faut aussi connaître les limites de cette représentation : le tracé toujours imparfait (épaisseur des traits ...) et l'échelle qu'on ne peut pas agrandir indéfiniment font qu'il manque de précision et qu'il ne peut que donner des indications.

Avec ces limites, le graphique est cependant un outil qui, en donnant une autre représentation du problème, sert de relais entre le cadre numérique et lui-même au cours des différentes phases de la recherche numérique par l'utilisation des propriétés géométriques des courbes construites, ou entre le cadre des grandeurs physiques et celui des nombres en ramenant la dialectique grandeurs/nombres à la dialectique graphiques/nombres.

IV. - CHOIX DE LA SITUATION

IV.1. Donner du sens aux nombres non entiers

Les hypothèses didactiques explicitées plus haut (I) nous conduisent à chercher des problèmes dans lesquels les décimaux sont un outil efficace pour les résoudre. Rappelons que l'intérêt des nombres décimaux est d'approcher d'aussi près qu'on veut n'importe quel nombre réel et ce, avec des calculs plus faciles qu'avec d'autres nombres rationnels.

Nous introduirons donc les nombres décimaux dans des situations où les entiers sont insuffisants à fournir une solution et où les décimaux permettront de donner des solutions approchées.

Les fractions et les nombres décimaux vont venir enrichir l'ensemble des nombres entiers que les élèves maîtrisent déjà assez bien.

Parmi toutes les grandeurs physiques qu'on est susceptible de mesurer, les longueurs et les aires jouent un rôle privilégié dans l'apprentissage proposé car certaines d'entre elles au moins modélisent des objets matériels que les enfants peuvent manipuler ou construire facilement, ce qui n'est pas le cas du temps par exemple. La mesure des longueurs joue un rôle important à cause de la représentation des nombres qu'elle permet : un trait gradué qu'on peut concevoir très long permet de représenter aussi bien des longueurs que des nombres, les mesures des longueurs pour une unité choisie : entiers d'abord puis 1/2, 1/4 etc : la graduation s'enrichit au fur et à mesure du stock des longueurs mesurables jusqu'à ce que tout point de l'axe représente un nombre (ce qui s'achèvera bien au-delà de l'école primaire).

Par l'intermédiaire de la mesure, on peut d'ailleurs représenter sur un axe gradué n'importe quelle autre grandeur physique.

Nous avons choisi d'introduire les premières fractions dans une situation de mesure des longueurs.

Nous nous intéressons ensuite à la mesure des aires de surfaces planes : la comparaison des longueurs de segments se ramène à l'inclusion des segments, à un déplacement près ; ce n'est pas le cas pour la comparaison des aires de surfaces planes (deux surfaces peuvent avoir même aire sans être superposables). Dans cette situation, on distingue clairement les cadres géométrique et numérique.

La mesure des aires nous sert aussi à donner un sens au produit de 2 fractions.

IV.2. Définition des opérations

La correspondance grandeurs/nombres par la mesure comporte aussi une correspondance entre relations : à la juxtaposition de longueurs ou d'aires correspond l'addition des nombres qui les mesurent.

Le produit de deux entiers a et b prend entre autres deux sens :

1) a est une mesure, b un nombre sans dimension

$$b \times a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ termes}}$$

b X a est une mesure de la même grandeur que a ; exemple : périmètre d'un carré.

2) a et b sont des mesures

a X b ou b X a désigne une mesure produit ; exemples : aire d'un rectangle comme produit de longueurs ; distance comme produit d'une vitesse par une durée.

L'extension des nombres va se faire en interaction avec l'extension des opérations.

* Le premier sens est utilisé tout de suite pour fabriquer de nouveaux nombres ; exemples : pour deux longueurs u et v telles que :

$$u + u = 2\,u = v \quad \text{on a :} \quad u = \frac{1}{2}v$$

d'où sur les nombres :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

si $u + u + u = v$, alors

$$u + u = \frac{1}{3}\,v + \frac{1}{3}\,v = 2\cdot\frac{1}{3}\,v = \frac{2}{3}\,v$$

d'une façon générale, si $n.u = v$

$$p.u = p.(\frac{1}{n}\,v) = \frac{1}{n}\,v + \frac{1}{n}\,v + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n}\,v = \frac{p}{n}\,v$$

Ainsi la correspondance grandeurs/nombres permet d'étendre le produit de deux entiers au produit d'une fraction par un entier :

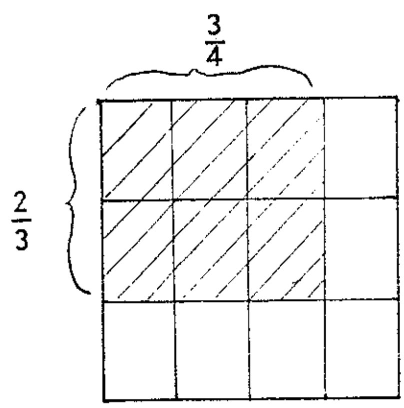
$$n \times \frac{1}{q} = \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q} = \frac{n}{q} \quad \text{et}$$

$$n \times \frac{p}{q} = \underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{n \text{ termes}} = n \times p \times \frac{1}{q} = \frac{n \times p}{q}$$

$n \times \frac{p}{q}$ est défini, $\frac{p}{q} \times n$ ne l'est pas encore. Il n'est pas évident que la multiplication ainsi définie soit commutative, pas plus que ne l'était, pour les entiers, la multiplication définie comme une addition répétée.

* Référence au deuxième sens : de la même manière que dans les entiers, on a choisi de récupérer la commutativité grâce au produit de mesures dans les calculs d'aires de rectangles. Ceci nécessite au préalable de faire des mesures directes d'aires avec des unités d'aires diverses (plusieurs formes de carrelage pour paver une pièce) et d'établir dans le cas des rectangles la relation entre la mesure de l'aire et celle des côtés pour des unités bien choisies. On donne ainsi un sens non seulement aux produits $n \times \frac{p}{q}$ et $\frac{p}{q} \times n$ pour n entier mais aussi au produit $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'}$, ce qui constitue un prolongement de la multiplication en se référant au 2e sens de la multiplication sur les entiers : on convient, dans un premier temps, que la multiplication de 2 nombres non entiers a le sens de mesure de l'aire d'un rectangle en fonction des dimensions avec des unités adaptées.

C'est en utilisant la mesure directe des aires qu'on va pouvoir nommer le résultat avec des écritures déjà connues ou en en créant de nouvelles selon un algorithme déjà établi.
Par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ est l'aire[1], mesurée avec le carré de côté lu,



(1) Pour des raisons de lisibilité, on commet l'abus de langage qui consiste à identifier l'aire et sa mesure avec une unité donnée.

d'un rectangle de côtés $\frac{2}{3}$ u et $\frac{3}{4}$ u. Le petit rectangle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$ est reporté 12 fois dans le carré unité, son aire est $\frac{1}{12}$. Il en faut 6 pour paver le rectangle $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$.

Son aire est $6 \times \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Au passage, on identifie $n \times \frac{p}{q}$ défini comme aire de rectangle ou comme addition répétée.

Par ailleurs, nous avons vu que les nombres servent à coder des applications linéaires (Cf. II.2). De ce point de vue, le produit de deux nombres entiers a et b prend deux autres significations :

- $a \times b$ est le coefficient de la composée de deux applications linéaires $x \to a \times x$ et $y \to b \times y$.

En effet, pour $y = a \times x$,

$$y \to b \times y = b \times (a \times x) = b \times a \times x = a \times b \times x$$

d'où $x \to b \times a \times x = a \times b \times x$ pour la composée

L'extension aux nombres non entiers de ces deux sens de la multiplication se fera dans les situations de proportionnalité avec a et b non entiers, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions linéaires que les élèves mettent en oeuvre :

$1 \to a$

$\frac{1}{n} \to \frac{a}{n}$ $\frac{a}{n}$ étant solution de $n \times x = a$

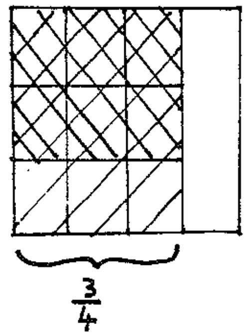
$\frac{p}{n} \to p \times (\frac{a}{n}) = \frac{p \times a}{n}$

On retrouve dans ce cadre le sens donné primitivement à la multiplication.

En effet, dans le calcul d'aires de rectangles, $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ prend les 3 sens suivants :

. comme indiqué plus haut, c'est $6 \times (\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}) = 6 \times \frac{1}{12}$ où $\frac{1}{12}$ est tel que $12 \times \frac{1}{12} = 1$.

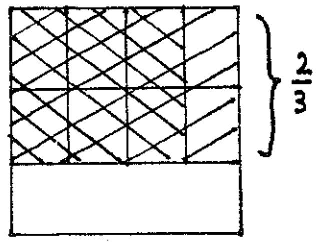
Il s'agit là d'un produit de mesures.



. C'est aussi $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ est une mesure qui pourrait varier.

Il s'agit de prendre la valeur de la fonction $x \to \frac{2}{3}$ de x pour $x = \frac{3}{4}$



. C'est aussi $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$

Il s'agit de prendre la valeur de la fonction $x \to \frac{3}{4}$ de x pour $x = \frac{2}{3}$

On a bien ici $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{3} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$$

Ceci peut s'étendre à n'importe quelle valeur entière ou fractionnaire de x :

$$\frac{2}{3} \text{ de } x = \frac{2}{3} \times x$$

IV.3. <u>Où les décimaux interviennent</u>

Les premiers nombres que les élèves font intervenir pour compléter les entiers dans les situations de mesure proviennent des partages en deux successifs de l'unité de mesure : 1/2 , 1/4 , 1/8 , ... D'autres nombres apparaissent aussi :

1/3 , 1/5 ... mais ensuite les "chaînes" continuent par partages en deux :

1/3 , 1/6 , 1/12 , etc
1/5 , 1/10 , 1/20 , etc

Ce privilège du partage en deux n'a rien d'étonnant : c'est le plus facile à réaliser matériellement d'une part, c'est le procédé d'encadrement le plus efficace d'autre part. L'usage des fractions décimales est particulièrement économique dans les situations où il y a de nombreux calculs et comparaisons entre fractions à faire, où ni les nombres entiers ni les fractions ne permettent de donner une réponse exacte soit parce qu'elle n'existe pas (c'est le cas de la recherche d'un carré d'aire 38 où le problème revient à chercher un nombre x tel que $x \times x = 38$), soit parce qu'on n'a aucune chance de la trouver (jeu de l'explorateur)*.

Dans les deux cas, la recherche ne pourra se faire que de façon approchée et avec des exigences de précision arbitraires.

Nous avons choisi le problème suivant :

Parmi tous les rectangles d'aire donnée A, y-a-t-il un carré (d'aire A) ?

Par exemple si $A = 38\ cm^2$, le problème revient à chercher un nombre x tel que $x \cdot x = 38$.

Les décimaux permettent de trouver des solutions approchées avec une précision arbitraire.

---

* Il s'agit de donner des fourchettes d'encadrement de plus en plus précises d'une fraction inconnue (Cf. chapitre III).

2EME PARTIE
SEQUENCES DE CLASSE

CHAPITRE I

MESURE DES LONGUEURS - RECOURS AUX FRACTIONS.

Objectifs.

Le travail que nous allons décrire dans ce chapitre a pour objet :

- l'utilisation de fractions pour désigner des mesures de longueur qu'on ne sait pas désigner par des nombres entiers avec l'unité donnée et pour calculer sur ces mesures
- l'explicitation de relations entre des unités de mesure u et v et des relations entre les mesures correspondantes d'une même longueur.

I.- CHOIX DE LA SITUATION.

1) Correspondance longueurs-nombres.

Nous avons expliqué dans la première partie l'importance que nous accordons au choix de problèmes qui permettent de travailler sur plusieurs cadres en interaction. Ici nous allons poser un problème dans le cadre des longueurs. Pour le résoudre les élèves auront besoin de le traduire en termes de nombres.

Une unité de longueur u étant choisie, à certaines longueurs on peut associer un nombre entier, à d'autres non. Le problème va être d'enrichir l'ensemble des nombres pour enrichir l'ensemble des longueurs mesurables en u.

2) Recherche de relations entre unités de mesure.

Soient u et v deux longueurs non nulles.

Supposons par exemple $v < u < 2v$. On ne peut mesurer en nombre entier ni v en u, ni u en v. Toutefois u et v peuvent servir chacune d'unité de mesure.

Si une longueur ℓ a une mesure entière p en u et une mesure entière q en v, il est clair que $p \neq q$. En effet, on a dans le cadre des longueurs :

$\ell = p.u = q.v$ et $v < u$ donc

$p\,v < p\,u$ donc $p\,v < q\,v$ donc $p < q$.

Dans les problèmes on pourra substituer, si besoin est, $p.u$ à $q.v$ ou $q.v$ à $p.u$. Mais il peut arriver que u ou v intervienne autrement que par leur multiple $p.u$ ou $q.v$. On voudra indifféremment calculer avec u ou avec v. Il faudra pour cela qu'on sache exprimer u en fonction de v ou v en fonction de u. Une telle expression fait nécessairement intervenir p et q.

3) Incidence didactique du choix du rapport entre l'unité de mesure et la longueur à mesurer.

Selon que l'unité demesure est très grande par rapport à la longueur ℓ à mesurer, très petite ou du même ordre de grandeur, les enfants peuvent adopter des procédures différentes (cf[R.R.]) [[R.R] : Ratsimba - Rajohn - thèse de 3ème cycle - Université de Bordeaux I. 1981] .

a) <u>Si u est très grand par rapport à ℓ</u>; on peut s'attendre à ce que les élèves reportent ℓ dans u. Si ce rapport tombe juste, u est de la forme $n.\ell$ et la mesure de ℓ en u est un inverse d'entier : $\ell = \frac{1}{n} . u$. Si le report ne tombe pas juste $u = n.\ell + r$ avec $r < \ell$; si on peut négliger r, on est ramené au cas précédent, si on ne peut pas négliger r, la situation devient compliquée :

- ou bien on itère le procédé en reportant r dans u ; même dans le cas facile où le report tombe juste, on aura $u = qr = n\ell + r$ et il est difficile d'exprimer ℓ en fonction de u.

- ou bien on reporte r dans ℓ et, en admettant que ce report tombe juste, on aurait $pr = \ell$ et $u = n\ell + \frac{1}{p} \ell$ ce qui n'est pas facile non plus.

On peut cependant s'en tirer en cherchant des multiples entiers $k.u$ de u et $n.\ell$ de 1 tels que $k.u = n.\ell$.

On écrira : $\ell = \frac{k}{n} u$ où $\frac{k}{n}$ est caractérisé par

$$n \times \left(\frac{k}{n}\right) = k.$$

C'est le cas si l'on veut mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier par l'intermédiaire d'une pile de n feuilles d'une épaisseur de k cm (cf. BROUSSEAU - Recherches en Didactique des Mathématiques 1981 -2.1 p.88 et suivantes)

b) <u>Si u est très petit par rapport à ℓ</u>, les élèves vont reporter u dans ℓ. On aura $\ell = n.u + r$ avec $r < u$. Dans le cas où u est très petit par rapport à ℓ (n grand), les élèves seront tentés de négliger r et de se satisfaire d'une mesure entière. La situation n'est pas propice au recours aux fractions.

c) <u>Si ℓ est du même ordre de grandeur que u</u>, c'est le cas si $\ell < u$ mais pas trop petit, ou si u peut être reporté un petit nombre p de fois dans ℓ. On a $\ell = p.u + r$ avec $r < u$.

(Le cas $\ell < u$ correspond à $p = 0$). Si r n'est pas négligeable devant u, le problème est alors de mesurer r en u. Si u n'est pas trop petit, une des procédures est de fractionner u en longueurs v telles que $n.v = u$. On mesure r à l'aide de v et on exprime cette mesure en fonction de u grâce à la relation $v = \frac{1}{n} . u$. Si $r = k.v$, on écrit $r = k \times (\frac{1}{n} . u) = \frac{k}{n} . u$ et $\ell = (p + \frac{k}{n}) . u$. L'expression $\frac{k}{n}$ est caractérisée par $\frac{k}{n} = k \times \frac{1}{n}$ et $n \times \frac{1}{n} = 1$.

Nous avons choisi de mesurer des longueurs avec une unité de l'ordre de quelques centimètres. On pourra ainsi la fractionner facilement et la reporter quelquefois sur un trait dessiné sur une feuille de papier (le cas c).

4) Extension des nombres et des opérations.

Le problème est de savoir si les nouvelles expressions vont fonctionner comme des nombres. Peut-on les comparer aux entiers, les comparer entre elles, et comment ; peut-on leur étendre les opérations qu'on savait faire sur les entiers ?

Les opérations et comparaisons sur les longueurs vont donner lieu à des opérations et comparaisons sur leurs mesures (nombres entiers ou nouvelles expressions) et réciproquement. Dans cette correspondance, les nouvelles expressions acquièrent le statut du nombre.

II.- ORGANISATION DE LA SEQUENCE.

1) Matériel

Feuilles de papier blanc (sans lignes), petites bandes de carton fin servant d'unité de longueur (environ 6 cm) en au moins autant d'exemplaires que d'élèves.

2) Organisation de la classe

Les élèves sont binômés par deux : émetteur, récepteur, placés assez loin l'un de l'autre dans la classe pour pouvoir travailler séparément. Chaque élève est émetteur d'un message vers un camarade et récepteur d'un autre message (provenant de ce camarade ou d'un autre).

3) Consigne :

Vous dessinez un trait. Votre récepteur doit reproduire un trait * de même longueur. Pour cela, vous allez lui donner, sans vous servir de votre règle graduée, l'information nécessaire . Vous lui envoyez cette information dans un message écrit sans dessin. Si le récepteur a besoin d'informations supplémentaires, il les demande par écrit sur le message. Ensuite émetteur et récepteur comparent leurs traits pour voir s'ils ont bien la même longueur.

4) Analyse de la tâche.

Pour satisfaire à la consigne, émetteur et récepteur ont besoin de disposer d'une même unité de longueur. L'information pertinente que doit transmettre l'émetteur est alors la mesure de son trait avec l'unité donnée.

Nous avons expliqué dans le premier paragraphe le choix fait de l'unité. Il reste à déterminer le moment où on va distribuer cette unité. Cela peut être avant que les élèves aient dessiné leur trait ou après qu'ils l'aient tous dessiné.

a) si on donne l'unité avant, l'émetteur peut choisir la longueur de son trait en se servant de l'unité fournie, par exemple en la reportant un nombre entier de fois. Son message sera alors facile à rédiger et facile à lire.

b) si on donne l'unité après, la longueur du trait a de fortes chances de ne pas avoir une mesure entière. Pour écrire un message efficace, l'émetteur sera amené à choisir une unité plus petite par exemple en subdivisant celle qui a été donnée (cf I.3.c.). Dans ce cas la rédaction du message sera plus difficile. L'émetteur pourra décrire sa procédure de subdivision et l'utilisation qu'il en a faite. Il pourra coder ses opérations. Dans tous les cas, la lecture d'un tel message sera plus difficile aussi. Mais c'est dans ce contexte que le recours aux fractions sera efficace et indispensable pour raccourcir les messages.

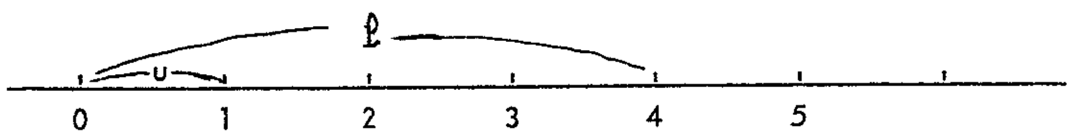
---

* La consigne est formulée ici pour de jeunes élèves (CE2-CM1) qui ne connaissent pas le mot "segment". Il va de soi qu'avec des élèves de 6ième, on utiliserait le mot "segment".

Remarque : Le changement d'unité n'est pas indispensable. On peut construire une nouvelle longueur L telle que $L = p.\ell = q.u$ où ℓ est la longueur du segment et u l'unité de mesure (cf I.3.a). Cette procédure n'a aucune chance d'apparaître ici. Il faudrait pour cela que l'élève, de sa propre initiative, complexifie la situation proposée en construisant un nouveau segment plus grand ; il lui faudra ensuite repérer les relations entre ce nouveau segment et son objet d'étude : ℓ et u pour en déduire la relation cherchée entre ℓ et u.

5) Choix des conditions.

Au moment où le travail ci-dessus est proposé, les enfants ont une pratique des additions et comparaisons de longueurs dans diverses situations : mise bout à bout de baguettes en carton, de traits dessinés sur une feuille. Ils savent faire des comparaisons directes par superposition ou indirectes par un intermédiaire. Ils savent construire des longueurs en reportant une longueur donnée. En particulier, ils savent graduer un trait en nombres entiers pour une unité donnée.



$\ell = 4\ u$ par exemple.

Dans un premier temps, nous donnons la consigne sous la forme a (unité donnée avant) pour permettre aux élèves d'utiliser des reports de longueurs et des codages en nombres entiers, autrement dit de se référer à leurs connaissances antérieures. Ils peuvent toutefois procéder autrement. Dans un deuxième temps, nous donnons la consigne sous la forme b (unité donnée après). Cette fois ils sont contraints de procéder autrement. Les procédures décrites ci-après correspondent à la forme b proposée à deux reprises :

- une première fois sans parler de la longueur du message.
- une deuxième fois en précisant que le message doit être le plus court possible.

III - DESCRIPTION DES PROCEDURES.

1) Procédures de l'émetteur.

P.1. Dessiner un segment qu'on peut décrire par rapport à la feuille (exemple une diagonale ou un segment obtenu en allant d'un côté de la feuille au côté opposé parallèlement au bord de la feuille).

A ce moment là les élèves se réfèrent directement à la feuille et n'ont pas besoin de mesurer leur segment avec l'unité donnée. Ils savent que les feuilles distribuées par le maître sont les mêmes pour tous. Pour bloquer cette procédure, on peut imposer que le trait dessiné ne touche aucun bord de la feuille.

P.2. On reporte u autant de fois qu'il est possible sur la longueur choisie ℓ. On se ramène à évaluer le reste $r = \ell - nu$.

a) r est tout petit devant u (par défaut ou par excès) et on le néglige : le message comporte alors le nombre n de reports et une information qualitative sur le reste ("un tout petit peu plus" ou "c'est presque n u").

Si r est notable, on cherche à évaluer r.

b) On plie u pour obtenir une unité plus petite v qu'on sait relier à u. Comportement majoritaire : pliage en deux itéré. On plie u en deux, on reporte $\frac{1}{2}$ u dans r si possible; si on ne peut pas ou s'il reste encore quelque chose, on plie à nouveau en deux, on obtient une nouvelle unité $\frac{1}{4}\, u = \frac{1}{2}\, (\frac{1}{2}\, u)$ etc ... et on itère le pliage en deux tant que ce pliage est possible et tant que le reste n'est pas négligeable (le piage en deux est matériellement possible trois ou quatre fois).

Autre pliage : si le pliage en deux fournit une unité trop grande et le pliage en quatre une unité trop petite, on estime que le pliage en trois devrait convenir et on le teste.

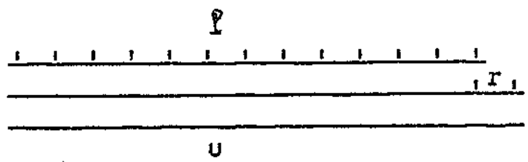
S'il donne un reste négligeable on utilise les 1/3, sinon on revient au pliage en deux.

c) On reporte r dans l'unité u. Si le report tombe juste (ou presque) r est de la forme $(1/n)u$. Si le report ne tombe pas juste, cette procédure est abandonnée.

Exemple rencontré :

Un élève a tracé un segment de longueur ℓ légèrement plus petit que u, il a marqué r sur u et a reporté r dans ℓ. Il a pu reporter la longueur r 12 fois dans ℓ et donc 13 fois dans u et a écrit.

$$\ell = \frac{12}{13} u$$



d) on choisit la largeur de la baguette unité comme nouvelle unité plus petite pour mesurer le reste. Pour bloquer cette procédure le maître choisit pour matérialiser u des baguettes de longueur u mais de largeur variable. Emetteur et récepteur savent que leurs baguettes sont de même longueur mais pas forcément de même largeur.

2) Ecriture des messages.

On repère trois catégories de messages :

- l'émetteur décrit en français la suite de ses actions. Le message peut être suffisant pour reconstruire le segment ou comporter des ambiguïtés. Exemple : "tu prends la baguette dans le sens de la longueur, tu la places sur ton trait, tu mets un trait, ... il reste un petit bout, tu plies en deux, etc......"

- l'émetteur envoie des indications sur la mesure de son segment , indications qu'il note en français. Exemple : "mon trait fait 3 unités et le demi du demi de u".

- l'émetteur envoie la mesure de son segment avec un codage chiffré, soit complètement, soit partiellement.

  Exemples : $2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$

  $\frac{1}{2}u$ + un demi du quart de u.

La première fois que cette consigne b est posée, les messages émis sont majoritairement du premier type. Ceci n'est pas étonnant, pour écrire un tel message, l'émetteur n'a pas besoin d'analyser son travail, il lui suffit de décrire ce qu'il a fait. La description pose cependant des problèmes d'expression en français. Les phrases sont longues, pas toujours claires, et on risque d'oublier certaines étapes. Le récepteur peut ne pas comprendre le message ou obtenir un segment de longueur différente.

Après une phase de compte-rendu avec discussion des premiers messages et bilan des premières écritures codées, on repose la même consigne b. en demandant que les messages soient le plus court possible. Le troisième type de messages devient alors majoritaire.

3) Travail du récepteur et confrontation des deux segments

Au cours du premier échange de messages (consigne b) le récepteur rencontre des difficultés pour lire le message et le décoder, soit parce qu'il est long et mal construit, soit parce qu'il manque des informations, soit parce qu'il ne comprend pas le codage de l'émetteur.

Au cours du deuxième échange, les messages sont en général bien écrits et bien décodés. Les segments de l'émetteur et du récepteur ne se superposent pas toujours. L'erreur provient soit de la manipulation, soit d'un reste négligé par l'émetteur, soit des deux. Emetteur et récepteur ont alors à se mettre d'accord sur les causes du décalage observé et sur la précision de la mesure qu'il est raisonnable d'exiger.

4) Premières écritures dégagées de la comparaison des messages.

Dès le premier bilan qui suit les échanges de messages, des écritures fractionnaires sont utilisées :

$\frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2}\,u = 1u \qquad 2 \times (\frac{1}{2}u) = 1u$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\,u) = \frac{1}{4}\,u$

$\frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u = \frac{1}{2}\,u \qquad 2 \times (\frac{1}{4}\,u) = \frac{1}{2}\,u.$

$\frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u + \frac{1}{4}\,u = 1\,u = 4 \times (\frac{1}{4}\,u)$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\,u) = \frac{1}{8}\,u \qquad \frac{1}{2}(\frac{1}{8}\,u) = \frac{1}{16}\,u$

$\frac{1}{3}\,u + \frac{1}{3}\,u + \frac{1}{3}\,u = 1\,u.$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}\,u) = \frac{1}{6}\,u \qquad 2 \times (\frac{1}{6}\,u) = \frac{1}{3}\,u.$

$\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\,u) = \frac{1}{12}\,u.$

$\frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4}\,u = 2 \times (\frac{1}{4}\,u) + \frac{1}{4}\,u = 3 \times (\frac{1}{4}\,u) = \frac{3}{4}\,u.$

Elles sont reprises en compte par l'ensemble de la classe pour écrire de nouveaux messages lors de la 2ème consigne b

IV.- DEVELOPPEMENT DES ECRITURES ET ENRICHISSEMENT DE LA GRADUATION.

1° Codage d'autres subdivisions de l'unité.

Lors de la consigne b sous sa deuxième forme (messages le plus court possible), les écritures fractionnaires sont largement utilisées dans les messages. Au cours du bilan qui suit, pour améliorer la précision, les élèves sont amenés à itérer le pliage en deux de l'unité u. Au delà du 1/8 ou à la rigueur du 1/16, le pliage effectif n'est plus possible. Certains élèves proposent des désignations orales ou écrites telles que $\frac{1}{1024}$ u ou $\frac{1}{2048}$ u avec le sens

$$\frac{1}{1024} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{512}\right) \text{ et } \frac{1}{2048} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1024}\right)$$

il s'agit là d'une extension formelle de la subdivision en 2 qui se produit chez des élèves qui ont une bonne pratique du calcul oral. Si ce n'est pas le cas, ce travail sera de toute façon repris à propos des fractions décimales. Si les élèves ne les ont pas encore envisagées, le maître propose d'autres subdivisions plus difficiles à réaliser matériellement :

$\frac{1}{5}$ u, $\frac{1}{10}$ u = ... avec le sens $5 \times \frac{1}{5}$ u = 1.u,

$10 \times \frac{1}{10}$ u = 1.u. Les élèves utilisent diverses écritures telles

que $\frac{p}{5}$ u = p $\times \frac{1}{5}$ u. Plus généralement pour des valeurs entières de p et n ils utilisent des écritures du type :

$\frac{p}{n}$ u = p $\times \frac{1}{n}$ u avec n $\times \frac{1}{n}$ u = 1.u

2) Correspondance longueurs-nombres.

L'unité de longueur u étant choisie, à toute longueur ℓ obtenue en reportant u un nombre entier de fois, on associe le nombre n de reports, qu'on appelle la mesure de ℓ en u. Mais il y a des longueurs qui ne sont pas de la forme n.u, le problème est de leur associer une mesure en u. Les codages fractionnaires vont permettre de le faire pour certaines d'entre elles. Par exemple 1/2 est la mesure de la longueur 1/2 u, $2 + \frac{3}{4}$ est la mesure de la longueur $2u + 3 \times \frac{1}{4}$ u. Les opérations et comparaisons entre longueurs vont se traduire en opérations et comparaisons entre les mesures : par exemple $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$; $2 + \frac{3}{4} < 3$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

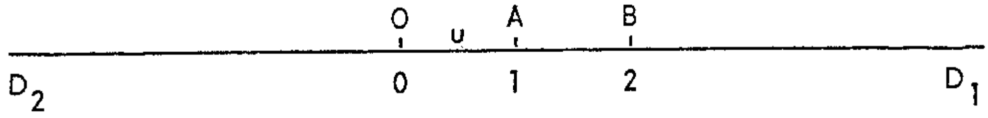
Des questions sur le statut de ces écritures se posent : on les additionne, on les compare comme des nombres; pourtant l'extension des règles de calcul ne va pas de soi. Citons la remarque d'un élève : "c'est drôle, la moitié de 12 c'est 6, et la moitié de $\frac{1}{12}$ c'est $\frac{1}{24}$, la moitié de $\frac{1}{6}$ c'est $\frac{1}{12}$".

Ces nouvelles écritures vont acquérir le statut de nombre au fur et à mesure de l'extension des opérations (+, - , x , :) et des comparaisons.

3) Représentation des longueurs et de leur mesure :

Points marqués sur une droite ; graduation d'un axe.

a) Soit D une droite, O un point marqué sur D. Il partage D en 2 demi-droites D_1 et D_2.
Soit u une longueur



On peut reporter u sur chaque demi-droite à partir de O . Choisissons D_1 par exemple. Le report permet de marquer sur D_1 un point A tel que la distance OA de O à A soit u. Nous associons au nombre 0 le point O et au nombre 1 le point A. Reportons à nouveau u, cette fois à partir de A. Notons B le point de D_1, autre que O, tel que AB = u. On a aussi OB = 2 u. Au nombre 2, nous associons le point B. Plus généralement, à chaque entier n nous associons le point M_n de D_1 obtenu en reportant n fois sur D_1 l'unité u toujours dans le même sens. On a $OM_n = n\ u$. Le nombre n, mesure en u de la longueur OM_n est appelé <u>abscisse</u> de M_n.

- <u>Correspondance</u> $\mathbb{N} \longrightarrow D_1$

Nous venons ainsi d'établir une correspondance $n \longmapsto M_n$ entre l'ensemble des entiers et certains points de D_1 qui a les propriétés suivantes :

. à un entier n donné correspond un point M_n déterminé de façon unique.

. quels que soient les entiers p et q distincts, les points M_p et M_q correspondants sont distincts.

D'autre part, étant donnés 2 points M et N de D_1 d'abscisses x_M et x_N ,supposons $x_N \geqslant x_M$,on a

$x_N = x_M + |MN|$ où $|MN|$ désigne la mesure en u de la distance de M à N.

Ce faisant, nous sommes en train de construire une <u>graduation</u> de D_1 dont l'origine est O et u l'unité.

- Correspondance $\mathcal{L} \longrightarrow D_1$

On peut représenter n'importe quelle longueur (qu'elle soit de la forme n.u ou non) par un point de D_1 en associant à la longueur ℓ le point M_l de D_1 tel que $OM_l = \ell$.

. A toute longueur de la forme n.u on sait faire correspondre 1 point de D_1 et 1 nombre : l'abscisse du point.

. A toute longueur qui n'est pas de la forme n.u on sait faire correspondre un point de D_1 auquel on n'a pas encore associé d'abscisse.

Si toute longueur ℓ était mesurable en u on pourrait associer au point M_ℓ, la mesure de ℓ en u. On pourrait ainsi associer un nombre à tout point de D_1. Le problème est bien d'étendre l'ensemble des nombres de manière que toute longueur soit mesurable en u.

L'axe gradué D_1 sera alors une représentation de l'ensemble des longueurs et de leurs mesures. Il permettra d'ailleurs de représenter n'importe quelle grandeur physique par l'intermédiaire de sa mesure dans une unité donnée.

Les nombres décimaux permettront soit de désigner, soit d'approcher d'aussi près qu'on veut les mesures cherchées.

b) Pour qu'un axe gradué (D_1, O, u) soit un outil efficace de résolution de problèmes, les élèves ont besoin de savoir que :

(P 1) l'abscisse x_M d'un point M de D_1 désigne la mesure en u de la distance OM de O à M.

$$OM = x_M . u$$

(P 2) la distance AB entre 2 points A, B de D_1 est

$AB = (x_B - x_A)\ u \quad \text{si} \quad x_B > x_A$

ce qui s'écrit aussi $x_B = x_A + |AB|$, en notant $|AB|$ la mesure en u de AB.

(P 3) la distance AB est invariante par translation le long de l'axe. Ceci s'exprime de la manière suivante sur les abscisses :

pour tout nombre c, soient M et N les points d'abscisses respectives $x_M = x_A + c$ et $x_N = x_B + c$ on a

$$|MN| = (x_M - x_N) = (x_B - x_A) = |AB|, \quad \text{si } x_B > x_A.$$

4) <u>Activités proposées aux élèves</u>.

Les élèves ont mesuré au CE des longueurs. Ils savent en principe se servir d'une graduation en nombres entiers. Les activités que nous allons décrire ont pour but de vérifier d'abord que c'est bien le cas et ensuite d'enrichir la graduation en y indroduisant les mesures non entières trouvées. Ceci est un pas dans l'acquisition du statut de nombre par ces mesures.

a) Une unité de longueur u est choisie pour toute la classe. Le maître demande à chaque élève de dessiner sur sa feuille, une demi-droite d'origine O et d'y placer le point u d'abscisse 1.

<u>Consigne 1</u> : travail par deux, émetteur-récepteur.

Chaque élève joue les 2 rôles, émetteur puis récepteur.

. Chacun choisit 2 points A et B différents de O, où il veut sur son axe. Il marque les abscisses x_A de A et x_B de B. Il envoie un message à un camarade pour que celui-ci place sur son axe (axe du récepteur) un point C tel que la distance OC de O à C sur l'axe du récepteur soit égale à la distance AB de A à B sur l'axe de l'émetteur, i.e OC = AB. Le récepteur marque sur son axe, le point C et son abscisse.

<u>Commentaires</u>.

Les messages peuvent être de 3 types :

1 - donnée de AB

2 - donnée de x_A et x_B

3 - donnée de AB et de x_A et x_B.

L'émetteur utilise au moins P_1 pour marquer 1, x_A et x_B

Dans le cas 1 et 3, le récepteur connaît la distance AB. Il doit seulement placer C et marquer son abscisse. Il utilise P_1 et P_3. Dans le cas 2, le récepteur peut calculer AB. Il utilise alors P_1 ,P_2 et P_3. S'il reporte AB après avoir placé A et B, il utilise seulement P_1 et P_3. Pour que P_2 soit nécessaire , il faut sortir des limites de la feuille : l'élève est alors obligé de calculer $AB = x_B - x_A$. Dans une deuxième phase, le maître propose des valeurs de x_A et x_B correspondant à des points hors de la feuille; les élèves calculent x_C et placent le point C si c'est possible.

Consigne 2 : Travail par deux : émetteur-récepteur. Chaque élève joue le rôle d'émetteur vers un camarade puis le rôle de récepteur d'un camarade. L'émetteur choisit 2 points A et B où il veut sur son axe, puis un point M_1 d'abscisse non entière ($x_{M_1} \notin \mathbb{N}$). Il envoie un message à un camarade pour que celui-ci place sur son axe un point M_2 tel que $x_{M_2} = x_{M_1}$ et un point N tel que la distance M_2N sur l'axe du récepteur soit égale à AB (i.e. $M_2N = AB$). Le récepteur marque sur son axe les abscisses de M_2 et de N.

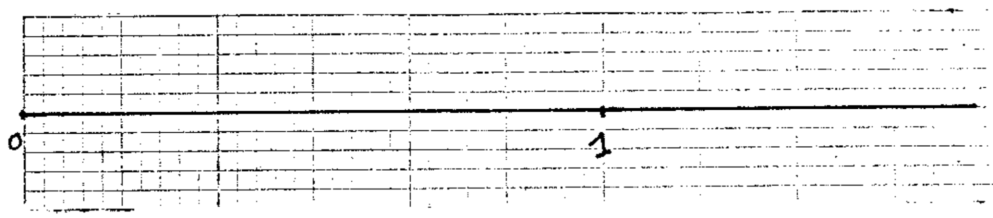
Commentaires.

Pour faire son travail le récepteur utilise P_2 et P_3. D'autre part la consigne 2 oblige émetteur et récepteur à graduer des points intermédiaires et à utiliser P_2 et P_3 pour des points d'abscisse non entière, ce qui était évitable dans la consigne 1.

Remarque : En cas de difficulté à organiser un jeu émetteur-récepteur dans la classe cf(I-3) le maître peut assurer le rôle d'émetteur pour tous les élèves en faisant varier la nature des données (donnée de la distance AB ou donnée des abscisses x_A x_B) et les valeurs numériques (points d'abscisses entières ou fractionnaires, distances entières ou fractionnaires).

Consigne 3 : travail individuel.

On distribue une feuille de papier quadrillé sur laquelle on a dessiné un trait, marqué une origine et une unité (voir échantillon).



Chacun gradue l'axe, choisit un point A d'abscisse entière et un point B d'abscisse non entière. Le maître demande de marquer sur l'axe plusieurs points -par exemple 5 points - M_1 M_2 ..... M_5, dont il donne les abscisses (le maître a choisi de ne prendre ni des entiers, ni des $\frac{1}{2}$ mais par exemple des $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$,

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ faciles à repérer si on a pris 3 grands carreaux pour u). Puis le maître demande de marquer les points N_1, ..., N_5 tels que $M_1N_1 = M_2N_2 = M_5N_5 = AB$ et leurs abscisses.

Commentaire :

les élèves sont obligés d'utiliser P_2 ou P_3. Dans le cas où ils utilisent les deux, chacune sert de contrôle à l'autre.

Consigne 4 : Travail par équipe de 4.

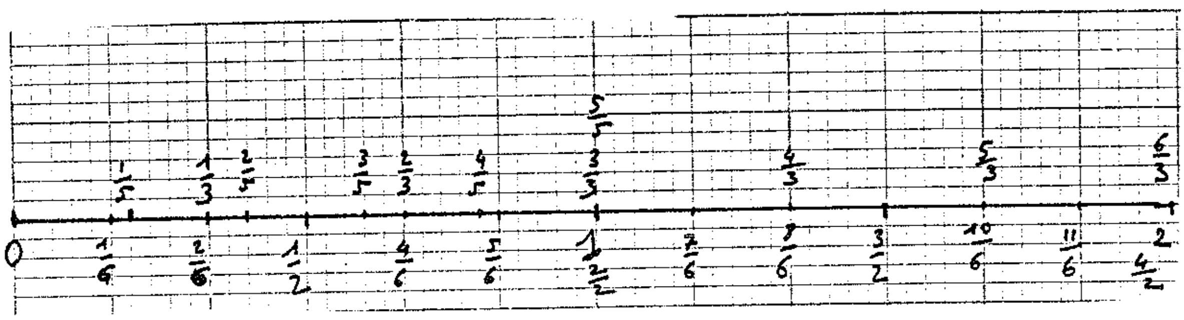
On distribue à chacun une bande de papier quadrillé de 12 carreaux de long, sur laquelle un trait est dessiné (modèle consigne 3).

Le travail de l'équipe consiste à construire une longue règle graduée en recollant des portions d'axe gradué par chacun dans l'équipe : l'un gradue de 0 à 2, le suivant de 1 à 3, le 3ème de 2 à 4 et le 4ème de 3 à 5.

Commentaire :

Pour que le recollement soit possible, les élèves d'une même équipe doivent avoir choisi une même unité pour graduer chacun des morceaux. En effet, 2 points surperposés devront avoir même abscisse. Une même abscisse pourra être écrite de plusieurs manières.

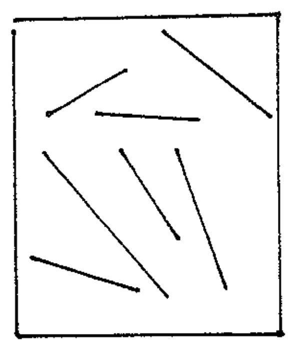
Exemple :



b) Utilisation d'une graduation pour mesurer des longueurs.

L'objectif de cette séquence est d'enrichir la correspondance entre les points de D_1 et les mesures de longueur .

a) Matériel + une feuille polycopiée sur laquelle sont dessinés des segments, distribués n'importe où dans la feuille et dans des directions différentes. Les longueurs des segments sont assez voisines (par exemple : 8cm, 12 cm, 10 cm, 9 cm, 10 cm 1/2, 13 cm 1/2, 12 cm 3/4, 9cm3/4 11 cm).



+ Une unité de mesure de longueur (par exemple 6 cm) matérialisée par une petite bande de carton.

+ une bande de papier de 20 cm environ

Consigne : classer tous les segments selon leur longueur.

La disposition des segments dans la feuille et leur longueur ont été choisies de façon que le classement ne puisse se faire à l'oeil pour tous les segments. Les élèves peuvent

- soit mesurer les segments avec l'unité u et comparer les mesures obtenues
- soit reporter les longueurs des segments sur la bande de papier à partir d'une même origine, et déduire le classement des segments de celui de leurs extrémités.

La deuxième procédure est commode mais ne permet pas de connaître les mesures des longueurs des segments avec l'unité u. Un moyen de réunir les avantages des deux procédures est de graduer la bande de papier à l'aide de l'unité u (en marquant les entiers les $\frac{1}{2}$, les $\frac{1}{3}$, les $\frac{1}{4}$, etc....)

b) Dans un deuxième temps, on distribue une deuxième feuille polycopiée donnant une série de longueurs de segments mesurés en u (différents de ceux de la première feuille). La consigne est d'ordonner tous les segments selon leur longueur, ceux de la première feuille et ceux de la deuxième feuille.

Trois procédures sont possibles :

- procédure numérique : mesurer en u les segments dessinés et comparer les mesures (donc ordonner des nombres).

- procédure géométrique : représenter par des segments les longueurs données et reporter tous les segments sur un axe à partir d'une même origine. On obtient ainsi des segments emboîtés.

- procédure mixte : repérer sur un axe gradué avec l'unité u les mesures fournies, reporter à partir de O sur l'axe gradué les segments de la première feuille. Comparer les longueurs revient à repérer l'ordre des points marqués.

Avec cette procédure, les élèves ont un moyen de contrôle de l'ordre des nombres par l'emboîtement des longueurs correspondantes.

V.- AUTRES ACTIVITES SUR LES LONGUEURS.

Voici maintenant quelques thèmes que nous ne développons pas.

1) Calcul de distances sur un itinéraire.

2) Utilisation des unités légales de longueur et les relations entre elles.

3) Calcul de périmètres de figures variées présentant ou non des symétries, entre autres périmètres de polygones réguliers ou non, de carrés, de rectangles, de triangles. Classement de figures selon le périmètre.

4) Recherche de rectangles à périmètre donné.

Cette activité sera décrite dans le chapitre V.

Les mesures qui interviennent dans ces activités peuvent être entières ou fractionnaires (avec les fractions dont on dispose).

Pour les calculs et classements de périmètres par exemple les élèves pourront être amenés à ajouter ou à comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur. Il ne s'agit en aucun cas de faire l'apprentissage de la technique de réduction au même dénominateur dans un cadre général. Les élèves pourront résoudre ce problème dans des cas particuliers. Certains cas pourront même rester sans solution pour l'instant.

Pour comparer des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, d'autres procédés que la réduction au même dénominateur apportent souvent la solution : comparaison à l'unité, comparaison au demi.

Exemple : * $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ parce que $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ et

$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

* $\frac{17}{18} < \frac{22}{21}$ parce que $\frac{17}{18} < 1$ et

$\frac{22}{21} > 1$ $(1 = \frac{18}{18} = \frac{21}{21})$

* $\frac{3}{8} < \frac{4}{7}$ parce que "déjà $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$

et il y a un septième de plus que de huitièmes"

ou encore $\frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7}$.

* $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$ parce que $\frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

* Pour comparer $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{8}$ c'est plus difficile mais la comparaison au demi ou à l'unité donnent quand même des résultats :

. $\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$ $\quad\quad$ $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$

. ou encore "il manque $\frac{3}{7}$ à $\frac{4}{7}$ pour faire 1.

il manque $\frac{3}{8}$ à $\frac{5}{8}$ pour faire 1 et $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$

donc $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$ ".

Pour ajouter deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, il est nécessaire de trouver "une unité commune" à $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{q'}$.
Ceci est facile si les deux fractions appartiennent à une même "chaîne" par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ ou encore $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{64}$. Ceci est encore assez facile pour des dénominateurs petits : par exemple $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{5}$ ou encore $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$.

D'autres dénominateurs communs pourront être recherchés. Mais ce sera toujours pour résoudre un problème précis. On ne fera d'apprentissage systématique de la réduction au même dénominateur que dans le cas où les dénominateurs sont de la forme 10, 100, 1000 ... c'est-à-dire des puissances de 10. Ce travail dont l'outil essentiel est la numération en base dix, est nécessaire à la construction des nombres décimaux. Un autre outil essentiel pour cette construction est la proportionnalité : en effet il faut savoir que

si $\frac{1}{10} \longmapsto \frac{10}{100}$, alors $4 \times \frac{1}{10} \longmapsto 4 \times \frac{10}{100}$.

CHAPITRE II.

UTILISATION DES FRACTIONS POUR CODER DES AIRES

OBJECTIFS :

Utilisation des fractions pour coder l'aire de portions de feuilles de papier, l'unité de référence étant la feuille entière.

Deux portions de feuille peuvent être codées par la même fraction sans être superposables, ce qui n'est pas le cas des longueurs. Ceci va permettre de distinguer plus facilement le nombre (mesure) de la grandeur à mesurer.

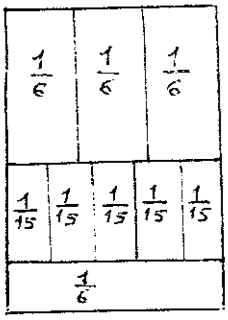
Remarques sur le choix de la situation.

Il s'agit ici de mesure directe des aires par report de l'unité ou d'une fraction de l'unité. Pour aborder cette situation, il n'est pas nécessaire d'avoir travaillé sur la notion d'aire. On s'appuie néanmoins sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement. On peut trouver des situations sur la notion d'aire dans la brochure n° 48 "Mesure des longueurs et des aires".

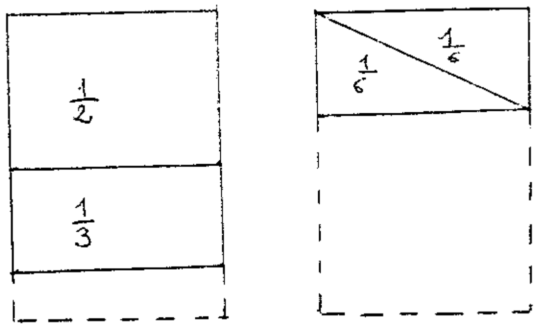
II.1 - CODAGE D'AIRES DE PIECES DECOUPEES DANS UNE FEUILLE DE PAPIER.

a) Matériel utilisé : des feuilles de papier blanc 21 x 29,7 et des enveloppes contenant chacune des pièces découpées par le maître dans des feuilles de couleur de même format : 6 ou 7 découpages différents n'utilisant chacun pas plus de 2 ou 3 feuilles. Les pièces ne comportent aucune indication.

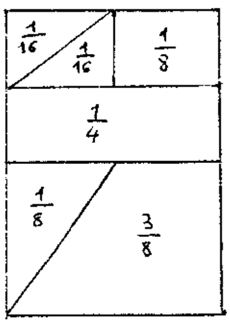
Exemples de découpages.



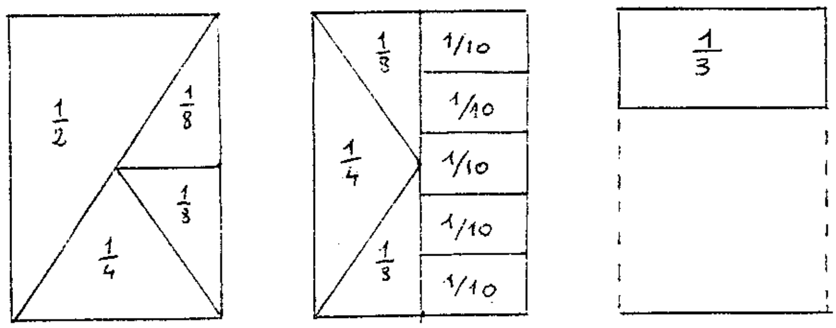
D_1



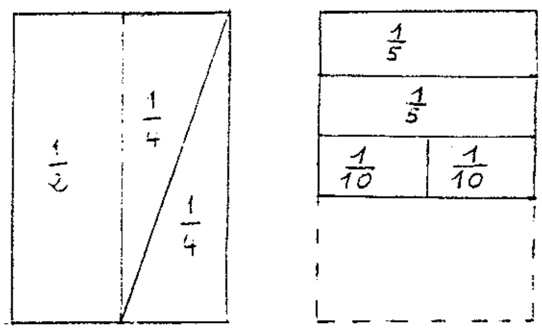
D_2



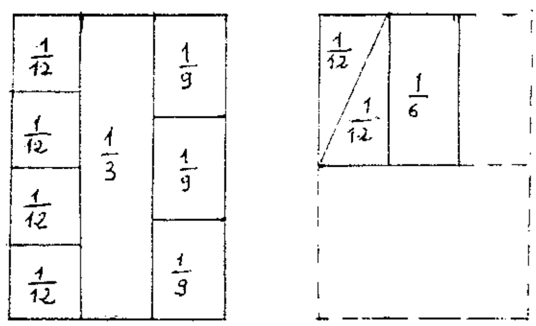
D_3



D_4



D_5



D_6

b) Organisation de la classe :

Les élèves travaillent par équipes de 2. Chaque équipe reçoit 2 feuilles blanches et une enveloppe.

Consigne : Dans chaque enveloppe il y a plusieurs pièces en papier. Avec une pièce, vous pouvez en général, en en prenant plusieurs copies, reconstituer une feuille entière. En assemblant les pièces de l'enveloppe vous pouvez obtenir une feuille ou plus.

1) Assembler les pièces comme un puzzle de façon à reconstituer une feuille entière et plus si nécessaire.

2) Evaluer chaque pièce par rapport à une feuille, c'est-à-dire, pour chaque pièce, dire quelle fraction de feuille on utilise pour la réaliser.

3) Passer commande du nombre de feuilles de papier nécessaires pour reproduire l'ensemble des pièces de l'enveloppe en faisant le moins possible de chutes. Le reproduire.

4) Evaluer la quantité du papier effectivement utilisé et évaluer les chutes. Chacun dans l'équipe fait les calculs.

Remarques :

1) Les pièces qui ne pavent pas la feuille sont elles-mêmes pavables avec d'autres pièces de l'enveloppe. On peut donc évaluer toutes les pièces.

2) La première consigne demande un travail d'équipe. En effet, l'activité d'assemblage des pièces est complexe. Les élèves doivent s'accorder sur une bonne reconstitution et argumenter leurs propositions en cas de désaccord. Pour la 2ème et la 3ème consignes,

les coéquipiers peuvent se partager le travail à condition qu'ils se mettent d'accord sur les résultats. La 4ème consigne se fait en travail individuel avec confrontation des résultats.

c) <u>Analyse de la tâche</u>.

1 - Les pièces sont à considérer comme les pièces d'un puzzle qu'il faut assembler bord à bord. On aura réalisé une feuille entière si les pièces permettent de recouvrir complètement la feuille vierge sans chevauchement.

2 - L'évaluation d'une pièce P par rapport à la feuille de papier se fait en cherchant combien il en faut d'exemplaires pour paver la feuille entière. Ceci peut s'obtenir en se référant à un morceau déjà évalué (Ex : 1/6 f = 1/2(1/3 f.).

On peut admettre une erreur de 1 ou 2 millimètres due au manque de précision dans le découpage des pièces, mais un décalage de l'ordre du centimètre n'est pas admissible. Prenons l'exemple de l'ensemble de pièces D1 qui comprend 5 rectangles de valeur 1/15 et de dimensions 9,9 cm sur 4,2 cm. On peut recouvrir une feuille 21 x 29,7 avec 3 bandes de 5 petits rectangles (Fig. 1). Avec 2 bandes de 7 rectangles placés dans l'autre sens on recouvre presque la feuille (fig. 2)

7 x 4,2 = 29,4 décalage 3 mm acceptable

2 x 9,9 = 19,8 décalage 1,2 cm inacceptable

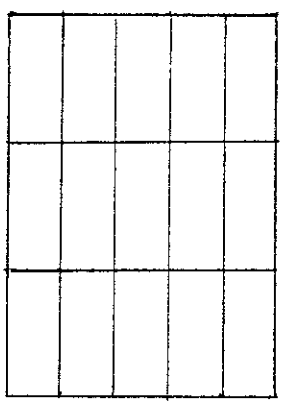


Fig. 1

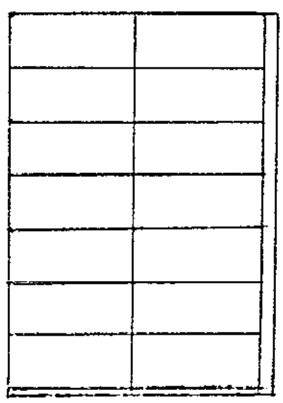


Fig. 2

Les activités 1 et 2 (reconstitution du puzzle et évaluation de chaque pièce) sont complémentaires et servent de contrôle l'une à l'autre.

3 - La réponse à la troisième question résulte de le reconstitution du puzzle.

4 - Pour évaluer la quantité du papier utilisé et les chutes, on est obligé de recourir au calcul : ajouter les fractions. Il s'agit ici de fractions simples, il n'est pas nécessaire de recourir à une technique générale de réduction au même dénominateur, mais seulement de manipuler d'autres écritures de fractions dans un champ de nombres connu.

C) <u>Bilan</u>.

Compte-tenu de nos observations dans les classes où nous avons réalisé cette séquence, on peut prévoir qu'à la fin de la séance, les élèves auront en général reconstitué le puzzle, évalué chaque pièce à l'aide d'une fraction simple et évalué la quantité de papier utilisé par une somme de fractions, réduite ou non.

Par exemple pour D_2, ils peuvent avoir écrit

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ou encore $1 + \frac{1}{6}$

Le travail est riche d'informations et il est important de faire le point des résultats obtenus à la fin de la séance même si toutes les questions n'ont pas été résolues. Au cours du bilan on récapitule les résultats trouvés par chacune des équipes, on explicite le fait que des pièces non superposables peuvent être codées par la même fraction. Le nombre fractionnaire qui a servi à évaluer une pièce est la mesure de <u>l'aire</u> de cette pièce quand on prend l'aire de la feuille comme unité.

Par ailleurs, pour l'évaluation de la quantité du papier utilisé, on obtient des écritures variées et on écrit au tableau de nombreuses égalités.

Par exemple : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}+(2\times \frac{1}{6})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + (2 \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$ etc....

e) <u>Exploitation des résultats</u>.

Une deuxième séance reprend le bilan de la séance précédente et permet de terminer le travail : évaluation des chutes. Le travail consiste à trouver le complément à l'entier supérieur le plus proche de la quantité du papier utilisé. On peut répondre à cette question par le calcul : par exemple,

pour D_2, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} \quad = 2 - \frac{5}{6}$

On peut aussi se servir du puzzle lui-même pour réduire le calcul à ce qui dépasse un nombre entier de feuilles. Par exemple, pour D 5, une fois le puzzle assemblé, on peut constater qu'il manque $2 \times \frac{1}{5}$ pour terminer la deuxième feuille. On peut alors retourner au calcul et formuler que :

$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + (2 \times \frac{1}{10}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$;

$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$ et donc $1 + \frac{3}{5} = 2 - \frac{2}{5}$

et ainsi enrichir le domaine des nombres avec lesquels on calcule.

Cette exploitation numérique se fait pour toute la classe à propos de chaque puzzle. Ceci assure une diffusion au niveau de la classe des résultats de chacun.

On propose ensuite une nouvelle consigne pour faire fonctionner ce qui a été appris au cours du bilan.

<u>Consigne</u> : Comparer les puzzles du point de vue de la quantité de papier utilisée.

Travail individuel.

<u>Analyse de la tâche</u> : Chacun dispose des expressions numériques obtenues au cours du bilan, mais non des pièces elles-mêmes. Les élèves ont nécessairement à comparer des fractions. Ils peuvent cependant dessiner ou reporter les fractions sur un axe gradué (cf ch. I). On peut de toute façon le leur demander à titre d'exercice.

Avec les exemples proposés, les comparaisons sont faciles : pour D_1 il faut 1 feuille, pour D_3 1 feuille, pour D_4 il faut $2 + \frac{1}{3}$ feuille, donc plus de 2. Restent D_2, D_5, D_6 qui utilisent entre 1 et 2 feuilles.

$D2 \longrightarrow 1 + \frac{1}{6}$; $D6 \longrightarrow 1 + \frac{2}{6}$ et $D5 \longrightarrow 1 + \frac{3}{5}$, c'est plus que $1 + \frac{1}{2}$ alors que D_2 et D_6 utilisent moins que $1 + \frac{1}{2}$ feuille.

On compte sur ce travail de comparaison, comme sur celui d'évaluation de la quantité de papier utilisée et des chutes pour que les élèves se familiarisent avec des calculs sur les fractions sans nécessairement recourir à une technique élaborée : on peut par exemple comparer des sommes sans disposer d'une écriture réduite. Tous ces calculs contribuent à donner un statut de nombre aux écritures fractionnaires. Il reste, pour chacun, à fixer les acquis et à en acquérir une pratique convenable. L'institutionnalisation, dont le maître est responsable, a pour rôle de fixer ce que les élèves doivent retenir et les exercices ont pour rôle de faire acquérir la pratique nécessaire.

f) Institutionnalisation.

* A chaque pièce on a associé une valeur numérique. Une même valeur numérique peut être associée à des pièces différentes. Deux pièces de même valeur numérique ont la même aire. L'écriture $\frac{1}{n}$ désigne la valeur d'une pièce lorsqu'il en faut n copies pour paver la feuille. Par exemple :

$$6 \times \frac{1}{6} = 1 \text{ et on écrit } 4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6}.$$

Vocabulaire : dans $\frac{4}{6}$, 4 est le numérateur et 6 est le dénominateur.

* On a plusieurs écritures d'une même fraction. par exemple

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \ldots\ldots\ldots$$

* A la juxtaposition des pièces correspond la somme de leurs valeurs numériques. On a une écriture réduite de la somme de plusieurs fractions facile à trouver si les fractions ont même dénominateur : cela correspond à évaluer une pièce obtenue en juxtaposant des pièces de valeurs $\frac{P1}{n}$, $\frac{P2}{n}$ .... c'est-à-dire à compter des pièces élémentaires de valeur $\frac{1}{n}$ donc à substituer à l'unité "feuille" l'unité "pièce de valeur $\frac{1}{n}$".

Par exemple $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{7}{5} + \frac{4}{5} =$

$$(2\times\frac{1}{5}) + (3\times\frac{1}{5}) + (7\times\frac{1}{5}) + (4\times\frac{1}{5}) =$$

$$(2+3+7+4) \times \frac{1}{5} = \frac{16}{5}.$$

D'autre part $\frac{5}{5} = 1$ et $\frac{16}{5} = [(3\times5) + 1] \times \frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5}.$

* Pour réduire à une fraction une somme de fractions de dénominateurs différents, on a besoin de trouver une "unité commune". Ceci traduit la recherche d'une pièce élémentaire qui permette d'évaluer les pièces dont les valeurs sont les fractions données. Par exemple, on cherche une fraction exprimant la somme $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$;

$\frac{1}{4}$ (resp. $\frac{1}{6}$) est la valeur d'une pièce qui peut être reportée 4 fois (resp. 6 fois) dans la feuille.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \ldots\ldots.$$

Cela veut dire que 2 petites pièces de valeur $\frac{1}{8}$ peuvent paver $\frac{1}{4}$ feuille, etc ....

Ainsi avec $\frac{1}{12}$ on peut évaluer les $\frac{p}{4}$ et les $\frac{k}{6}$.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{15}$$

Remarque : l'interaction entre les deux cadres : pièces de papier et valeurs numériques est indispensable pour que les calculs aient du sens et que les erreurs soient repérables.

g) Exercices.

En voici quelques exemples :

- Reporter sur un axe gradué toutes les fractions rencontrées au cours de l'activité.

- Trouver ou contrôler selon le cas l'ordre des valeurs numériques.

- Proposer pour chacune des fractions suivantes dix écritures différentes :

$$\frac{1}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{2}{7} ; \frac{14}{5} ; \frac{132}{10} ; \frac{84}{12}$$

- Ordonner les fractions précédentes.

- Situer les fractions sur un axe gradué en nombres entiers.

- Encadrer chacune d'elles par 2 entiers consécutifs.

- Chercher la valeur à attribuer à x pour que les relations suivantes soient vérifiées :

$$x + \frac{3}{4} = 1 \qquad x + \frac{3}{4} = 5 \qquad \frac{1}{4} + x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} + x = \frac{5}{4} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = x \qquad \frac{2}{3} + x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + x = \frac{4}{3} \qquad \frac{11}{6} + x = 2 \qquad \text{etc ....}$$

II.2 - <u>FABRICATION DE DECOUPAGES PAR LES ELEVES EUX-MEMES</u>.

Il s'agit d'un jeu de communication. Les élèves travaillent par deux : émetteur-récepteur.
Matériel : chaque élève dispose de 2 feuilles de papier.

a) Consigne :

Chaque élève dessine un puzzle qui n'utilise pas plus de 2 feuilles de papier. Il envoie ensuite un message à un camarade en donnant les indications nécessaires pour que le récepteur puisse réaliser un puzzle comportant le même nombre de morceaux que celui de l'émetteur. On veut de plus que, à chaque pièce de l'un des puzzles corresponde dans l'autre une pièce de même aire.

Emetteur et récepteur comparent ensuite leurs puzzles.

b) Analyse de la tâche.

Ici l'émetteur, comme le récepteur, ne doit plus seulement reconnaître une fraction de feuille de papier. Il doit la construire : pour cela l'élève ne doit pas découper de façon arbitraire mais de façon à être capable de coder son découpage. Il peut utiliser le pliage ou mesurer les dimensions de sa feuille pour réaliser les partages. C'est une occasion pour le maître de repérer chez les élèves la coordination entre pièces de papier et fractions . En laissant le choix du découpage à l'élève, le maître a l'occasion de repérer les fractions que l'élève peut manipuler.

Remarque : A chaque pièce de l'un des puzzles correspond une pièce de l'autre de même aire mais non nécessairement superposable.

c) Description de découpages et de messages observés.

Pour fabriquer leur puzzle les élèves ont utilisé majoritairement le découpage en deux, itéré :

on a eu des $\frac{1}{2}$, des $\frac{1}{4}$, des $\frac{1}{8}$, des $\frac{1}{16}$ et des $\frac{1}{32}$; on a eu aussi des $\frac{1}{3}$, des $\frac{1}{6}$ (tiers d'une demi-feuille) ou des $\frac{1}{12}$ (demi-sixièmes).

Certains messages indiquaient le nombre de morceaux à obtenir, d'autres non.

On a observé plusieurs types de codages :

1er type : $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$

2ème type : $6 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$

3ème type : $\frac{2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$

Les deux premiers codages ne sont pas ambigus ; même si on ne précise pas le nombre de morceaux. Par exemple le 2ème codage désigne un ensemble de pièces comprenant 6 pièces de valeur $\frac{1}{16}$, 3 pièces de valeur $\frac{1}{8}$ et une pièce de valeur $\frac{1}{4}$.

Etant donné le travail fait aux séances précédentes les enfants se comprennent bien avec un tel message. Par contre, le 3ème type de codage est ambigu , on ne sait pas si le puzzle comporte 3 ou 4 morceaux.

L'ambiguïté est encore plus grande dans le message suivant :

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{4}{32}$$

Le puzzle doit-il comprendre 7 morceaux, 9 morceaux, 10 morceaux ou 12 morceaux ? On pourra toutefois pointer au bilan que l'aire totale du puzzle est la même quelle que soit l'interprétation donnée au message.

<u>BILAN</u> : La situation est ici une situation de renforcement sur le plan numérique. Le bilan portera essentiellement sur la comparaison des messages et sur leur efficacité.

CHAPITRE III

SITUER UNE FRACTION SUR UN AXE GRADUE
DIVISER UN ENTIER a PAR UN ENTIER b

III.1. SITUER UNE FRACTION ENTRE 2 ENTIERS.

OBJECTIFS

- Encadrement d'une fraction $\frac{a}{b}$ par deux entiers. Recherche de la partie entière de $\frac{a}{b}$.

- Approche de la division d'un entier a par un entier b.

III.1.1. Analyse mathématique.

Le problème est le suivant :
Trouver un entier k tel que $k \leqslant \frac{a}{b} < k + 1$.

On dit que k est la partie entière de $\frac{a}{b}$.

Cet énoncé a du sens si on sait qu'on peut comparer non seulement deux entiers entre eux mais aussi un entier et une fraction. Pour cela on s'appuie sur le fait qu'un entier p peut s'écrire de différentes manières sous forme d'une fraction puisque :

$$1 = n \times \frac{1}{n} = \frac{n}{n}$$

pour n'importe quelle valeur de n et que

$$p = p \times 1 = p \times \frac{n}{n} = \frac{p \times n}{n}\ .$$

Etant donné une fraction $\frac{a}{b}$, si $a < b$ on a $\frac{a}{b} < 1$.

Si $a > b$, ou $a > 2b$ et on a $\frac{a}{b} > 2$

ou $b < a < 2b$ et $1 < \frac{a}{b} < 2$

ou $a = 2b$ et $\frac{a}{b} = 2$.

on peut comparer a aux multiples n.b de b.

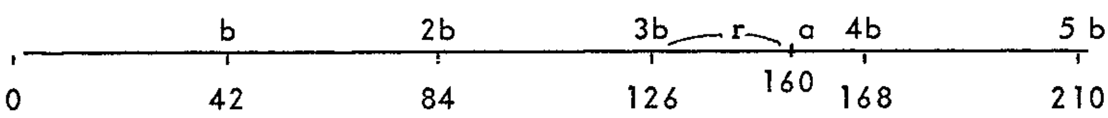
Soit k l'entier tel que $k.b \leqslant a < (k + 1).b$.

On a $\frac{k.b}{b} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{(k+1).b}{b}$ et $k \leqslant \frac{a}{b} < k + 1$

L'entier k est la <u>partie entière</u> de $\frac{a}{b}$; c'est aussi le quotient dans la division euclidienne de a par b. En effet, si $k.b < a < (k+1).b$, on a $a = k.b + r$ et $0 < r < b$.

La représentation des nombres par un axe gradué est bien adaptée à la comparaison des nombres. On peut ici repérer les points d'abscisses b, 2b, 3b, ... nb... Le problème est de déterminer des intervalles contenant a. Le meilleur encadrement est donné par l'intervalle $[k\ b, (k+1)b[$ qui contient a. Le nombre entier r est la distance de a à la borne kb de l'intervalle $[k\ b, (k+1)\ b[$

<u>Exemple</u> : $\frac{a}{b} = \frac{160}{42}$



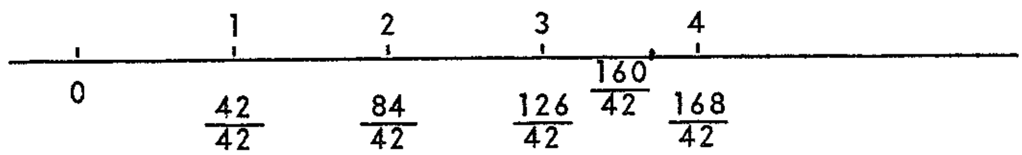
$\frac{42}{42} = 1$ $\frac{84}{42} = 2$ $\frac{126}{42} = 3$ $\frac{168}{42} = 4$

$$3 < \frac{a}{b} < 4$$

$$160 = 168 - 8 \qquad 160 = 126 + 34$$

$$\frac{a}{b} = 3 + \frac{34}{42} = 4 - \frac{8}{42} \qquad r = 34$$

Autre utilisation de l'axe gradué.



La première représentation fait référence à la division euclidienne de a par b.
La deuxième représentation met l'accent sur la partie entière de $\frac{a}{b}$.

III.1.2. Choix de la situation.

Cette analyse mathématique étant faite, nous proposons aux élèves une situation dans laquelle la fraction intervient comme un nombre et non pas comme un couple de nombres entiers. Les élèves auront à comparer une fraction à des nombres entiers, ils chercheront à encadrer "au mieux" la fraction par des entiers k et ℓ. L'écart minimum est 1 si la fraction n'est pas déjà un entier.

La division euclidienne est l'outil adapté pour chercher la partie entière de la fraction $\frac{a}{b}$. Ce travail de division demande une certaine technique de calcul. Compte-tenu de l'écriture des nombres en base 10, ces calculs sont particulièrement simples si $b = 10, 100, 1000$ ...... plus généralement une puissance de 10.

Nous proposons aux élèves une situation dans laquelle ils auront le choix de la fraction et donc en particulier de b. Les calculs qu'ils auront à faire seront plus ou moins faciles suivant leur choix de b. Ils pourront alors se rendre compte de l'économie qu'ils font en choisissant pour b une puissance de 10.

Nous proposons une situation de communication pour qu'ils aient à expliciter et justifier leurs calculs.

III.1.3. Organisation de la classe et consigne

Les élèves jouent par équipes de 2 : équipe contre équipe ou une équipe de 2 élèves contre toute la classe.

Consigne : Une équipe(composée de 2 élèves E_1, E_2) choisit une fraction $\frac{a}{b}$ comprise entre 0 et 100 et qui n'est pas égale à un nombre entier. Les autres joueurs (une autre équipe ou le reste de la classe), qui ne connaissent pas cette fraction doivent en au plus 10 questions, déterminer un intervalle dans lequel se trouve la fraction avec une erreur d'au plus une unité, c'est-à-dire situer le mieux possible la fraction entre deux entiers.

On ne peut répondre aux questions que par oui ou par non.

A la fin de la partie, tous les partenaires, au vu de la fraction, contrôlent l'encadrement trouvé. Ensuite on échange le rôle des équipes (dans le cas d'un jeu équipe contre équipe).

Remarque 1. Pour familiariser les élèves, on peut d'abord jouer à ce jeu sur les entiers et dans ce cas il s'agit de deviner le nombre entier choisi.

Remarque 2. Pour les fractions, il s'agit de situer la fraction et non de la deviner. Si on demande de deviner la fraction, les élèves risquent d'essayer de deviner séparément 2 nombres entiers en posant des questions du genre "Est-ce que le numérateur est pair" ? etc ... C'est ce que l'on cherche à éviter.

On veut par exemple que $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; on veut que la fraction soit un nombre qu'il s'agit de comparer aux entiers.

Remarque 3. .Quand les élèves posent une question du type :

"Est-ce que la fraction est plus grande que 2" ou

"Est-ce que la fraction est entre 2 et 3" ? Ils se réfèrent en général à l'ordre strict. Cela peut entraîner une ambiguïté sur les bornes de l'intervalle dans le cas où la fraction choisie est égale à un entier. Pour éviter cette ambiguïté, nous avons demandé de choisir une fraction qui ne soit pas un entier.

III.1.4. Analyse de la tâche.

III.1.4.1. Travail de E_1, E_2 :

a) Choix de $\frac{a}{b}$

On veut que $0 < \frac{a}{b} < 100$. Sans faire de calculs précis, si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$ et $\frac{a}{b}$ convient. Si $a > b$, mais pas beaucoup plus grand, on a toutes les chances pour que $a < 100\ b$ et alors $\frac{a}{b}$ convient. Une manière commode de procéder est de choisir un intervalle $[k, k + 1]$ où k est un entier et de prendre la fraction $\frac{a}{b}$ dans cet intervalle. Pour cela on prend $\frac{a}{b}$ de la forme $k + \frac{c}{d}$ où $\frac{c}{d}$ est une fraction plus petite que 1. On a $\frac{a}{b} = \frac{k.d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{k.d + c}{d}$
Par exemple, on choisit $\frac{a}{b}$ entre 25 et 26. Prenons $\frac{a}{b} = 25 + \frac{1}{3}$. On peut l'écrire $\frac{a}{b} = \frac{3 \times 25}{3} + \frac{1}{3} = \frac{76}{3}$.

b) Réponse aux questions

- Dans le cas où les élèves ont choisi la fraction dans un intervalle qu'ils se sont donné à l'avance, ils n'ont pas besoin de division euclidienne pour répondre aux questions concernant la comparaison de $\frac{a}{b}$ aux entiers. Il suffit de savoir comparer des entiers. Si on veut que la division euclidienne soit utilisée, il faudra bloquer cette procédure. (Voir III.1.6.).

- Dans le cas où la fraction est désignée directement sous la forme $\frac{a}{b}$, E_1 et E_2 sont obligés de recourir à la division euclidienne pour répondre aux questions, soit explicitement en cherchant à situer a parmi les multiples de b (cf plus haut III.1.1), soit implicitement en comparant $\frac{a}{b}$ aux multiples de $\frac{b}{b}$ et en cherchant un entier k tel que

$$\frac{k.b}{b} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{(k+1)b}{b}$$

Par exemple, pour $\frac{1035}{42}$, on a

$$2 = 2 \times \frac{42}{42} = \frac{84}{42} \quad \text{et} \quad \frac{84}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$20 = 20 \times \frac{42}{42} = \frac{840}{42} \quad \text{et} \quad \frac{840}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$24 = 24 \times \frac{42}{42} = \frac{1008}{42} \quad \text{et} \quad \frac{1008}{42} < \frac{1035}{42}$$

$$25 = 25 \times \frac{42}{42} = \frac{1050}{42} \quad \text{et} \quad \frac{1035}{42} < \frac{1050}{42}$$

donc

$$24 < \frac{1035}{42} < 25 \quad \text{et} \quad k = 24$$

Pour $\frac{1035}{10}$, on a tout de suite $\frac{1035}{10} = 103 + \frac{5}{10}$ et $k = 103$.

Pour $\frac{1035}{100}$, on a $k = 10$.

Pour répondre facilement aux questions qu'on va leur poser, E_1 et E_2 ont intérêt à choisir pour b une puissance de 10.

III. 1.4.2. Travail des questionneurs

Ils ont à situer une fraction inconnue dans un intervalle]k, k + 1[où k est un entier. Ils peuvent poser des questions du type "la fraction est-elle entre n et m ?" ou du type "la fraction est-elle plus grande que n ?" "la fraction est-elle plus petite que n". De toute façon ils ont intérêt à partager systématiquement l'intervalle d'incertitude en 2. Ici par exemple]0,50[,]0,25[etc ... .

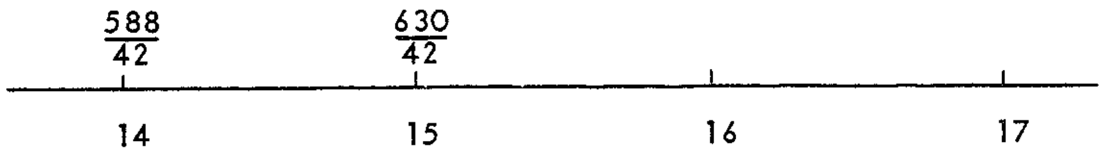
Pour noter les informations fournies par E_1 et E_2, une bonne représentation consiste à les reporter sur un axe gradué en nombres entiers et à hachurer au fur et à mesure les intervalles qui ne conviennent pas. Cela permet de visualiser l'intervalle d'incertitude et de suivre sa réduction.

La tâche de E_1 et E_2 demande une bonne maîtrise de la numération, la tâche des autres une bonne organisation et une bonne maîtrise de l'ordre. La représentation des nombres par un axe gradué étant bien adaptée au problème, elle facilite le choix des bonnes questions. En échangeant les rôles des équipes, les élèves mettent à l'épreuve et éventuellement développent les deux types de compétence.

Le contrôle du dernier intervalle proposé se fait au vu de la fraction par tous les partenaires. Il se peut qu'il reste des erreurs qui n'ont pas entraîné d'incohérence au cours du jeu. Pour les détecter, on est amené à comparer la fraction aux entiers qui désignent les bornes de l'intervalle retenu. Par exemple, si à la suite d'une erreur de calcul, E_1 et E_2 prétendent que $14 < \frac{1035}{42} < 15$, on va exprimer 14 sous la forme $\frac{n}{42}$ et 15 en $\frac{n + 42}{42}$ et comparer 1035 à n.

$$14 = 14 \times \frac{42}{42} = \frac{588}{42} \quad , \quad 15 = \frac{630}{42} \quad \text{et}$$

$1035 > 630$; on ne peut pas avoir $\frac{1035}{42} < 15$



III.1.5. Bilan

- Si $a < b$ alors $a \times \frac{1}{b} < b \times \frac{1}{b}$ et $\frac{a}{b} < 1$

- Une conséquence immédiate est que tout nombre de la forme $k + \frac{a}{b}$, où k est un entier et $a < b$, est compris entre k et $k + 1$.

. Pour comparer un entier n et une fraction $\frac{a}{b}$, on peut soit exprimer n sous la forme $\frac{n \times b}{b}$ et comparer a et $n \times b$, soit chercher "Combien il y a d'entiers dans $\frac{a}{b}$" autrement dit chercher la partie entière de $\frac{a}{b}$ et la comparer à n.

. Pour chercher la partie entière de $\frac{a}{b}$ on divise a par b à une unité près c'est-à-dire on encadre a par 2 multiples consécutifs kb et $(k + 1)b$ de b. Le nombre k est la <u>partie entière</u> cherchée.

III.1.6. Variante de la consigne

Le maître choisit les fractions et les fournit à E_1 et E_2. Par exemple, le maître écrit chaque fraction choisie sur un papier plié de façon à cacher la fraction ; E_1 et E_2 tirent un papier. De cette façon E_1 et E_2 ne disposent pas de l'intervalle $]k, k + 1[$.

III.2. Affinement de la graduation

Dans la première phase (III. 1.), nous avons demandé aux élèves de situer la fraction dans un intervalle, à une unité près ; nous exigeons maintenant plus de précision.

III.2.1. Un premier affinement de la graduation

Consigne : On reprend la consigne III.1.3. de la façon suivante : le nombre de coups est fixé à 10. Les équipes jouent à tour de rôle. L'équipe qui est le plus près de la fraction choisie par l'équipe adverse a gagné. On limite davantage l'intervalle de départ pour en arriver plus vite à l'affinement de la graduation : par exemple choisir la fraction entre 5 et 10.

Dans ce cas on peut s'attendre à ce que les élèves cherchent à gagner de la précision en coupant l'intervalle en deux(si les élèves ont une certaine familiarité avec le jeu sur les entiers): si on a situé la fraction entre k et k + 1 on teste $k + \frac{1}{2}$ puis $k + \frac{1}{4}$ ou $k + \frac{3}{4}$ suivant le cas etc ...

C'est de toute façon la stratégie la plus performante pour les questionneurs et les $\frac{p}{2^n}$ sont faciles à nommer. Face à cette procédure des questionneurs, il est facile à leurs adversaires de répondre s'ils ont choisi une fraction de la forme $\frac{p}{2^n}$; s'ils ont choisi une fraction avec un dénominateur quelconque, la seule manière efficace de s'y prendre est alors de décomposer la fraction suivant les $\frac{p}{2^n}$ et par exemple, si on a choisi $\frac{101}{52}$:

$$\frac{101}{52} = \frac{52}{52} + \frac{49}{52} = 1 + \frac{49}{52} \qquad 1 < \frac{101}{52} < 2$$

$$\frac{49}{52} = \frac{26}{52} + \frac{23}{52} = \frac{1}{2} + \frac{23}{52} \qquad 1 + \frac{1}{2} < \frac{101}{52} < 2$$

$$\frac{23}{52} = \frac{13}{52} + \frac{10}{52} = \frac{1}{4} + \frac{10}{52} \qquad 1 + \frac{3}{4} < \frac{101}{52} < 2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{13}{52} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{8} = \frac{6 + \frac{1}{2}}{52} = \frac{13}{104}$$

$$\frac{10}{52} = \frac{20}{104} = \frac{1}{8} + \frac{7}{104} \qquad 1 + \frac{7}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < \frac{101}{52} < 2$$

Si on veut continuer le processus :

$$\frac{1}{8} = \frac{13}{104} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{16} = \frac{6 + \frac{1}{2}}{104} = \frac{13}{208}$$

$$\frac{7}{104} = \frac{6 + \frac{1}{2}}{104} + \frac{\frac{1}{2}}{104} = \frac{1}{16} + \frac{1}{208} \quad \text{donc} \quad 1 + \frac{15}{16} < \frac{101}{52} < 2$$

$$\frac{101}{52} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{208}$$

$$\frac{1}{208} < \frac{1}{32} \qquad \text{donc} \qquad 1 + \frac{15}{16} = 1 + \frac{30}{32} < \frac{101}{52} < 1 + \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{208} < \frac{1}{64} \qquad \text{donc} \qquad 1 + \frac{60}{64} < \frac{101}{52} < 1 + \frac{61}{64}$$

$$\frac{1}{208} < \frac{1}{128} \qquad \text{donc} \qquad 1 + \frac{120}{128} < \frac{101}{52} < 1 + \frac{121}{128}$$

$$\frac{1}{256} < \frac{1}{208} < \frac{2}{256} = \frac{1}{128} \quad \text{donc} \qquad 1 + \frac{241}{256} < \frac{101}{52} < 1 + \frac{242}{256}$$

Les calculs deviennent vite compliqués et les élèves seront coincés et ne pourront pas répondre aux questions au-delà des quarts (à la rigueur des huitièmes) ou alors ils risquent de déraper.

En demandant dans la consigne d'avoir une erreur d'au plus $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ etc ... on incite les élèves à poser des questions qui utilisent les $\frac{p}{10^n}$.

III.2.2. Un autre affinement de la graduation. Préparation de la division

a) Consigne

On reprend la consigne III.1.3. en demandant que l'erreur soit d'au plus $\frac{1}{10}$ (d'au plus $\frac{1}{100}$ ...).

b) Analyse de la tâche

On se place dans le cas où les questionneurs posent des questions utilisant des $\frac{p}{10^n}$.

Un moyen commode de répondre est de continuer la division de a par b (si la fraction s'écrit $\frac{a}{b}$) au-delà du quotient entier, autrement dit chercher combien il y a d'entiers, de dixièmes, de centièmes etc ... dans $\frac{a}{b}$.

Par exemple $\frac{a}{b} = \frac{101}{52}$

$\frac{101}{52}$ est le nombre x tel que $x.52 = 101$

On cherche à approcher x à $\frac{1}{10}$ près, $\frac{1}{100}$ près, ...

- première procédure : recherche par approximations :

$\frac{101}{52} = 1 + \frac{49}{52}$ $\quad 1 < x < 2$ mais x proche de 2

On essaie $1 + \frac{9}{10}$

$(1 + \frac{9}{10}) \times 52 = 52 + \frac{468}{10} = \frac{520}{10} + \frac{468}{10} = \frac{988}{10} < 101$

donc $\quad 1 + \frac{9}{10} < x < 2$

$(1 + \frac{9}{10}) \times 52 = 98 + \frac{8}{10} = 101 - (2 + \frac{2}{10})$

$52 \times 2 = 104 = 101 + 3$

x est un peu plus près de $1 + \frac{9}{10}$ que de 2

On essaie $1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}$

$(1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}) \times 52 = \frac{988}{10} + \frac{208}{100} = 98 + \frac{8}{10} + 2 + \frac{8}{100} =$

$100 + \frac{8}{10} + \frac{8}{100} = 101 - (\frac{1}{10} + \frac{2}{100})$

il manque $\frac{12}{100}$

$(1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100}) \times 52 = \frac{988}{10} + \frac{260}{100} = 98 + \frac{8}{10} + 2 + \frac{6}{10} = 101 + \frac{4}{10}$

on a $\frac{4}{10} = \frac{40}{100}$ de trop

$1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} < x < 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100}$ et x plus près de $1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}$

on peut essayer $1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000}$ etc ...

- deuxième procédure : dans la procédure précédente on peut avoir une recherche plus économique en repartant du reste.

$\frac{101}{52}$ est le nombre x tel que $x.52 = 101$

$101 = 1 \times 52 + 49$ $\quad x = \frac{101}{52} = 1 + \frac{49}{52}$

donc $1 < x < 2$

On cherche maintenant à situer x sur l'axe gradué en dixièmes, autrement dit on cherche un entier p tel que $1 + \frac{p}{10} < x < 1 + \frac{p+1}{10}$

ou encore tel que $\frac{p}{10} < x - 1 < \frac{p+1}{10}$

$49 = \frac{490}{10} = 490 \times \frac{1}{10}$

$490 = (9 \times 52) + 22$

$\frac{490}{10} = (\frac{9}{10} \times 52) + \frac{22}{10}$

$101 = (1 \times 52) + (\frac{9}{10} \times 52) + \frac{22}{10}$

$101 = (1 + \frac{9}{10}) \times 52 + \frac{22}{10}$

$1 + \frac{9}{10} < x < 2$

On cherche maintenant à situer x sur l'axe gradué en centièmes : autrement dit on cherche un entier k tel que :

$$1 + \frac{9}{10} + \frac{k}{100} < x < 1 + \frac{9}{10} + \frac{k+1}{100}$$

$\frac{22}{10} = \frac{220}{100} = 220 \times \frac{1}{100}$

$220 = (4 \times 52) + 12$

$\frac{220}{100} = (\frac{4}{100} \times 52) + \frac{12}{100}$

$$101 = (1 + \frac{9}{10}) \times 52 + \frac{22}{10} = (1 + \frac{9}{10}) \times 52 + (\frac{4}{100} \times 52) + \frac{12}{100}$$

$$= (1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}) \times 52 + \frac{12}{100}$$

$$1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} < x < 1 + \frac{9}{10} + \frac{5}{100}$$

On cherche les millièmes

$$\frac{12}{100} = \frac{120}{1000} = 120 \times \frac{1}{1000}$$

$$120 = (2 \times 52) + 16$$

$$\frac{12}{100} = \frac{120}{1000} = (\frac{2}{1000} \times 52) + \frac{16}{1000}$$

$$101 = (1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}) \times 52 + (\frac{2}{1000} \times 52) + \frac{16}{1000}$$

$$101 = (1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}) \times 52 + \frac{16}{1000}$$

$$1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} < x < 1 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000} \quad \text{etc ...}$$

Ce faisant, on situe avec une précision arbitraire la fraction sur un axe gradué et en même temps, on est en train de construire la division de l'entier a par l'entier b dans les décimaux (voir chapître VII pour le passage à la disposition traditionnelle).

Si les élèves savent déjà "pousser" la division d'un entier par un autre, c'est quand même l'occasion de s'apercevoir que c'est une réponse au problème d'approximation d'une fraction par des nombres décimaux.

Cette méthode est intéressante pour ceux qui répondent car un seul calcul leur situe la fraction dans un intervalle parmi 10 possibles alors que les questionneurs ont en général besoin de plusieurs questions pour situer la fraction entre deux dixièmes consécutifs.

Les calculs sont considérablement simplifiés si on choisit une fraction qui a pour dénominateur une puissance de 10 :

par exemple $\frac{1354}{1000} = 1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}$

Il est dans ce cas très facile de répondre aux questions formulées avec les $\frac{p}{10^n}$.

c) <u>Place de cette séquence dans l'apprentissage</u>

Cette activité est importante car elle permet de faire la relation entre les fractions et la division d'un entier par un autre avec une précision arbitraire.

Elle permet aussi aux élèves de se rendre compte de l'intérêt des fractions décimales pour faciliter les calculs. Cet intérêt est d'autant plus grand qu'on montre en même temps comment encadrer n'importe quelle fraction par des fractions décimales avec une précision fixée d'avance. Cependant l'analyse précédente nous a montré la complexité de la tâche à accomplir.

Dans l'analyse de la tâche, nous avons vu qu'une opération importante sur laquelle est basé l'algorithme de division est d'exprimer p sous la forme $p \times 10 \times \frac{1}{10}$; on est alors ramené à faire la division euclidienne de $p \times 10$ par q. Celle-ci va fournir un quotient a et un reste r , on aura $p \times 10 = aq + r$ et $p = (\frac{a}{10} \times q) + \frac{r}{10}$

Il se peut que a soit nul (c'est-à-dire $p \times 10 < q$). On a alors $r = p$ et on est conduit à exprimer p sous la forme $p \times 100 \times \frac{1}{100}$, et peut-être sous la forme $p \times 1000 \times \frac{1}{1000}$ etc ... jusqu'à ce que $p \times 10^n > q$.

Dans le déroulement des séquences nous placerons donc l'activité qui vient d'être décrite (III.2.2) après celles décrites dans les chapîtres IV et V. A ce moment de l'apprentissage, nous attendons seulement que les élèves situent la fraction à $\frac{1}{2}$ près ou à $\frac{1}{4}$ près, et qu'ils reconnaissent la facilité du calcul de la partie entière dans le cas où le dénominateur est une puissance de 10.

CHAPITRE IV

REINVESTISSEMENT DES NOUVEAUX NOMBRES DANS DES PROBLEMES UTILISANT LA PROPORTIONNALITE

IV. 1. REPRESENTATION D'UN PARCOURS A L'ECHELLE

IV.1.1. Choix de la situation :

Il s'agit d'une course de relais par équipes de 4 ou 5 élèves sur un parcours fermé de 200 m.

Nous ne prenons en compte ici que l'aspect distance et le travail va consister à reproduire le parcours à l'échelle. L'étude des relations temps - distance - vitesse n'est pas développée ici mais fait l'objet d'une autre brochure (à paraître).

IV.1.2. Organisation de la classe et consigne :

Les enfants vont repérer dans la cour un parcours fermé de 200 m. comportant des virages, qui servira pour une course de relais. Les coureurs sont par équipes de 4 ou 5 : les équipes de 4 courent sur 4 tronçons de 50 m. chacun, repérés par des bornes peintes, les équipes de 5 sur 5 tronçons de 40 m. repérés par des bornes d'une autre couleur (quilles ou cerceaux par exemple).

Le maître chronomètre les temps de la manière suivante : le maître déclenche le chrono au départ du 1er coureur, note les temps aux passages du témoin et arrête le chrono à l'arrivée du dernier.

Après la course, de retour en classe, le maître demande à chaque équipe de représenter le parcours des 200 m. avec la consigne suivante :

Chacun représente son parcours et celui du suivant (sauf le dernier qui représente le sien et celui du premier) - on obtiendra le parcours complet en recollant les différents dessins.

Analyse de la tâche

Le fait d'avoir à recoller les représentations avec une partie commune pose nécessairement le problème de l'échelle : un même trajet doit être représenté par des traits de même longueur par les deux enfants qui en sont chargés dans une même équipe. Ceci oblige tous les enfants d'une même équipe à représenter 2 trajets de 40 m. (resp. 50 m.) par des traits de même longueur et de ce fait à rejeter une représentation qui ne respecterait pas cette règle. Pour l'instant "échelle" signifie "échelle aux 50 m. (ou aux 40 m.)".

Naturellement les échelles peuvent être différentes pour des équipes différentes. Le problème de la représentation des angles va se poser

- non pas d'un point de vue théorique : tout se passe comme si les enfants admettaient que les angles sur le terrain sont représentés par des angles de même mesure sur la feuille de papier.

- mais d'un point de vue pratique : les angles droits sur le terrain sont reproduits à l'équerre, pour les autres on se contentera d'une représentation approximative à l'oeil ou à l'aide des moyens artisanaux proposés par les enfants (exemple : patron en carton fabriqué directement sur le terrain).

Cette question sera reprise plus tard.

IV.1.3. Nouvelle consigne : points intermédiaires

Le but de cette activité est de donner du sens aux points intermédiaires sur la représentation à l'échelle.

L'activité proposée se déroule en plusieurs temps :

1. Autres bornes :

Consigne :

Chaque équipe redessine une représentation du parcours à l'échelle choisie.

Sur cette représentation elle place les bornes correspondant aux 50 m. dans une couleur, aux 40 m. dans une autre. Les unes sont déjà placées, elle place les autres.

Analyse de la tâche :

Les points intermédiaires sont ici proposés par le maître ; ces points ont une signification dans la situation matérielle, ce qui fournit aux élèves des moyens de contrôler leur travail.

En plaçant la double série de bornes on pense donner du sens à l'intervalle compris entre une borne de 40 et une borne de 50 sur leur dessin et ainsi récupérer "une échelle aux 10 m." si celle-ci n'a pas déjà été le moyen de placer les nouvelles bornes.

En effet si un élève n'a pris en compte que l'ordre des bornes et non la distance entre la borne de 40 m. et la borne de 50 m., il risque de se heurter à des incohérences : les tronçons de 40 m. ne sont pas tous représentés par une même longueur.

2. Points intermédiaires quelconques

Consigne :

Chaque membre de l'équipe choisit un point ; on a donc 4 à 5 points sur la représentation de l'équipe correspondant à des positions des coureurs sur le parcours.

L'équipe envoie un message à une équipe réceptrice pour qu'elle place sur sa représentation les positions des coureurs, choisies par les émetteurs (l'émetteur ignore l'échelle du récepteur et réciproquement).

IV.1.3.1. Analyse de la tâche

Plusieurs cadres sont en jeu dans le problème :

- le cadre de la course (cadre de référence)
- le cadre de la représentation géométrique du parcours (dessin) ; cadre dans lequel est posé le problème.
- le cadre numérique
- le cadre de la représentation symbolique (écriture fonctionnelle ou représentation graphique)

Suivant le point choisi l'émetteur va faire intervenir un ou plusieurs cadres pour écrire son message et, suivant le message reçu, le récepteur aura à faire intervenir un ou plusieurs cadres pour placer son point.

a) Problème de l'émetteur :

Il s'agit pour l'émetteur de donner des informations qui caractérisent le point choisi : d'abord sur quel intervalle il est placé, disons ici AB et notons M le point choisi.

<u>messages a</u> : s'il choisit une borne ou un milieu, l'émetteur peut rester dans le cadre du dessin pour formuler son message : "le point A", "le milieu de AB", "juste entre A et B"... .

<u>message b</u> : s'il choisit un autre point, il doit donner une information numérique :

(b_1) - soit un rapport de distances ($\frac{AM}{AB}$ ou $\frac{AM}{MB}$)

(b_2) - soit un couple de distances (AM, AB) ou (AM,MB) ou les 3 distances (AM, MB, AB)

(b_3) - soit la distance réelle correspondant à AM ou à OM (distance réelle parcourue depuis le départ)

(b_4) - soit l'échelle et la distance AM (ou MB)

<u>Remarque 1</u>. Un message de type b_3 est l'indice du souci de donner une information intrinsèque (indépendante de la représentation de l'émetteur).

<u>Remarque 2</u>. Si le modèle linéaire ne lui est pas familier, l'émetteur aura tendance à profiter de sa liberté de choix du point pour réduire son incertitude sur le message en choisissant des points particuliers pour lesquels il ne doute pas de la position sur la représentation du récepteur : c'est le cas des bornes ou du milieu des segments : une borne va sur une borne, dans le même ordre ; un milieu de segment va au milieu du segment correspondant. On peut prévoir que ce seront les premiers choix. Pour faire évoluer les conceptions des élèves, il faudra bloquer ces possibilités de choix.

b) Problème du récepteur :

Il dépend du message reçu. Notons A_1B_1 le segment correspondant à AB et M_1 le point correspondant à M.

* si le message est du type a (milieu ou borne)

Le travail du récepteur est simple : une borne va sur la borne correspondante, un milieu va sur le milieu correspondant.

* si le message est du type b_1 (rapport)

On attend des rapports simples ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ...).

Le récepteur doit recourir à la mesure de son segment et à un calcul pour placer son point, donc traduire son problème dans le cadre numérique, le résoudre dans ce cadre et revenir au dessin pour répondre au problème posé.

Il y a bien une manière de répondre au problème en restant dans le cadre géométrique (voir Ch. III. & 2.2.) mais nous n'attendons pas cette procédure à ce niveau scolaire.

* si le message est du type b_2 (2 distances)

Le récepteur dispose d'informations numériques (2 distances, éventuellement 3) et de son propre dessin. Nous pouvons dans ce cas envisager au moins quatre procédures :

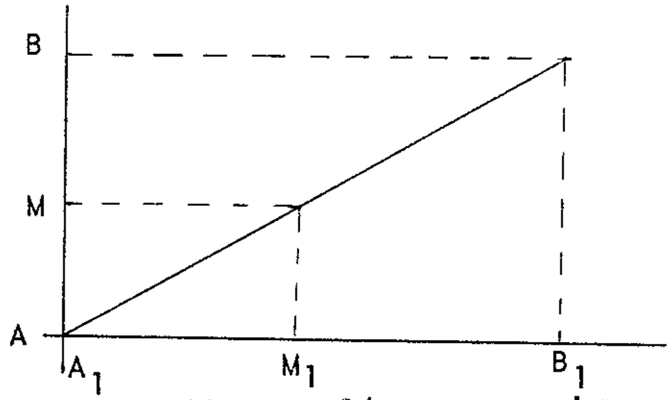
- traduction du problème dans le cadre numérique par la mesure de A_1B_1 et résolution du problème dans ce cadre (règle de 3 au tableau de proportionnalité) puis retour à la représentation.

- Calcul et formulation explicites de l'échelle qui permet de passer directement d'une représentation à l'autre $\frac{A_1B_1}{AB}$ et calcul de la distance A_1M_1 par application de l'échelle : $\frac{A_1B_1}{AB} \times AM$.

Dans ce cas l'élève mobilise une fonction et donc fait intervenir un 3e cadre, celui de la représentation symbolique.
Remarquons qu'un élève peut avoir fait le même calcul par règle de 3 ou dans un tableau de proportionnalité sans avoir donné au rapport $\frac{A_1B_1}{AB}$ le statut de désignation de la fonction : $AM \rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} \times AM$.

- <u>Calcul de la distance réelle</u> :
L'élève calcule la distance réelle correspondant à AM à partir des informations reçues et traduit cette distance sur sa représentation.
Cette procédure est associée au recours à l'échelle dans le cas d'un passage de la réalité à la représentation, donc avec un changement d'ordre de grandeur - il se peut que la pratique des élèves à propos de la notion d'échelles les fasse lier l'échelle à un changement d'ordre de grandeur et qu'ils ne l'utilisent pas quand il s'agit de mesures de même ordre de grandeur. L'échelle est une correspondance entre longueurs, donc grandeurs de même nature au départ et à l'arrivée, mais le changement d'ordre de grandeur (unités différentes) joue pour différencier le départ et l'arrivée, comme s'il s'agissait de grandeurs différentes.

- utilisation d'une représentation graphique :



Pour que cette procédure apparaisse, il faut

- avoir traduit le choix d'un point sur un segment en terme de distance à une extrémité choisie du segment.
- avoir reconnu qu'il y a une correspondance fonctionnelle entre les distances sur une représentation et sur l'autre.
- avoir reconnu que cette fonction est linéaire
- savoir que la représentation d'une fonction linéaire est une droite.

Nous ne pouvons attendre cette procédure que si les élèves ont une bonne maîtrise des fonctions linéaires et des représentations graphiques.

* si le message est de type b_3 (distance réelle)

Le récepteur doit trouver la distance correspondante sur sa représentation. Il doit recourir à l'échelle pour sa propre représentation et faire un calcul. Le récepteur est obligé, lui aussi, de mobiliser le cadre symbolique et donc les 4 cadres en jeu.

* <u>si le message est de type b_4</u> (échelle + distance AM)

Un tel message oblige le récepteur à calculer la distance réelle (et on est alors ramené au cas précédent) ou à composer les deux échelles. De toute façon le récepteur est obligé de mobiliser le cadre symbolique et donc les 4 cadres en jeu.

<u>Remarque</u> : Dans l'analyse du problème que nous venons de faire, nous n'avons envisagé, pour l'émetteur comme pour le récepteur, que les procédures amenant à la résolution du problème. Toutefois, nous prévoyons aussi d'autres procédures :

- pour l'émetteur messages qualitatifs ou insuffisants.
- pour le récepteur placement qualitatif ou report brut de la distance AM donnée par l'émetteur.

IV.1.3.2. <u>Compte-rendu et bilan</u>

Après un premier échange entre émetteurs et récepteurs, le maître engage une discussion dans la classe sur les difficultés rencontrées pour concevoir et rédiger le message et pour le réaliser selon les points choisis.

Exemples de difficultés rencontrées :

- messages qualitatifs : "entre A et B plus vers A que vers B".

- placements qualitatifs à partir de données numériques ou de données qualitatives.

- l'émetteur fournit la distance entre une borne et le point choisi, mesurée sur sa représentation. Le récepteur reporte cette distance sur sa représentation.

En général, la comparaison à l'oeil suffit à rejeter cette procédure ; elle fournit parfois un point qui n'est pas dans le bon intervalle.

- l'émetteur fournit les deux distances entre le point choisi et chacune des bornes du segment auquel il appartient. Le récepteur reporte ces deux distances et obtient 2 points au lieu d'un, ce qui permet de rejeter la procédure.

- pour un point voisin du milieu (ou d'une borne), l'émetteur indique "le milieu plus 2mm". Le récepteur prend le milieu de son intervalle et place un point à 2mm de ce milieu.

Compte tenu des longueurs des segments dans les représentations, l'erreur relative est petite et la mauvaise position du point ne se repère pas à l'oeil. Pour la déceler, on a besoin de se référer à la proportionnalité et il faudra avoir recours à d'autres exemples (points non voisins des bornes ou des milieux) pour mettre cette procédure en défaut de façon flagrante.

Le maître propose un deuxième échange de messages en s'interdisant les bornes et les milieux des intervalles de façon à inciter les élèves à recourir au modèle proportionnel.

Institutionnalisation

. Sur une représentation, les distances sont proportionnelles aux distances réelles : si on connaît un couple (distance réelle, distance sur la représentation), on peut déterminer tous les autres ; en particulier, si on sait que 1 m est représenté par d cm, alors pour n'importe quelle distance x mesurée en m, la longueur correspondante sur la représentation, est $d \times x$ cm.

De même si 1m est représenté par a m = $d \times 0{,}01$ m, alors pour n'importe quelle distance x mesurée en m, la longueur correspondante sur la représentation est $a \times x$ m = $d \times 0{,}01 \times x$ m.

En prenant pour unité le mètre, la distance sur la représentation se calcule à partir de la distance réelle par la relation $x \to a \times x = d \times 0{,}01 \times x$.

1 m est représenté par d cm, donc

1 cm est représenté par $d \times 0{,}01$ cm = a cm

En prenant pour unité le centimètre, la distance sur la représentation se calcule à partir de la distance réelle par la relation $x \rightarrow a \times x = d \times 0{,}01 \times x$.

. Plus généralement, on admet que le nombre a ne dépend pas de l'unité de longueur choisie pourvu qu'on prenne la même au départ et à l'arrivée. On l'appelle échelle de la représentation.

. Si on a des représentations d'un même parcours à des échelles différentes, a et b, les distances sur une représentation sont proportionnelles aux distances sur l'autre ; la relation est caractérisée par le couple (a,b) [ou (b,a) selon le cas].

Exercices

. Faire varier les unités de longueur et calculer le coefficient de proportionnalité selon les unités choisies.

. Faire varier l'échelle dans une correspondance représentation - réalité.

. Passage d'une représentation à une autre avec des échelles variées.

IV.2. SITUATIONS DE LA VIE COURANTE

Au fur et à mesure que de nouvelles fractions apparaissent, on les fait intervenir dans des situations variées différentes de celles où elles ont été créées. De cette manière les fractions vont pouvoir être décontextualisées et prendre le statut de nombre. De plus, les nouvelles situations vont permettre aux élèves de produire de nouvelles écritures, qu'on pourra à leur tour utiliser dans de nouveaux problèmes. C'est ainsi que le stock des nombres disponibles s'agrandit. Il s'agit ici d'utiliser les écritures fractionnaires pour traiter des relations de proportionnalité entre des quantités continues. Pour atteindre les objectifs décrits ci-dessus, il est important d'aborder ces situations du point de vue de l'étude d'une relation entre des quantités variables de façon à manipuler beaucoup de nombres (tableaux de valeurs) et non pas sous forme de problèmes fermés où il y a une seule réponse à une seule question (voir dans la première partie le paragraphe "Rôle des fonctions"). Cela n'empêche évidemment pas de proposer ensuite aux élèves des problèmes précis à résoudre. C'est une activité complémentaire et tout aussi importante. L'utilisation des représentations graphiques apporte dans l'étude de ces situations un cadre supplémentaire qui fournit d'autres critères de reconnaissance de la proportionnalité et d'autres procédures de résolution : la représentation graphique suggère des solutions qu'il reste à contrôler par le calcul. (Voir dans la première partie le paragraphe III.3.).

Nous ne détaillerons pas ici ces situations de proportionnalité. En voici quelques exemples :

- prix payé pour des marchandises en fonction de la masse.
- consommation d'essence en fonction de la distance parcourue.
- prix payé pour une course de taxi en fonction de la distance parcourue.
- distance parcourue en fonction du temps dans un mouvement uniforme.

Certaines de ces situations sont décrites dans une brochure I.R.E.M (à paraître) consacrée à la proportionnalité.

IV.3. RECHERCHE DE RECTANGLES AYANT UNE DIMENSION DONNEE. CALCUL DU PERIMETRE. CALCUL DE L'AIRE

Cette situation est traitée au chapitre V. paragraphe V.1.

IV.4. AGRANDISSEMENTS ET REDUCTIONS D'UN PUZZLE*

Remarque : Nous présentons cette situation dans ce chapitre parce qu'elle se rattache à la proportionnalité, mais elle est plutôt à proposer aux élèves après celles du chapitre 5, après la construction de la multiplication sur les nombres fractionnaires et l'introduction de l'écriture décimale.

Objectifs : Reconnaissance et utilisation d'un modèle de proportionnalité.

IV.4.1. Présentation du problème

a) description du matériel

. Le patron d'un puzzle dessiné assez gros à afficher au tableau.

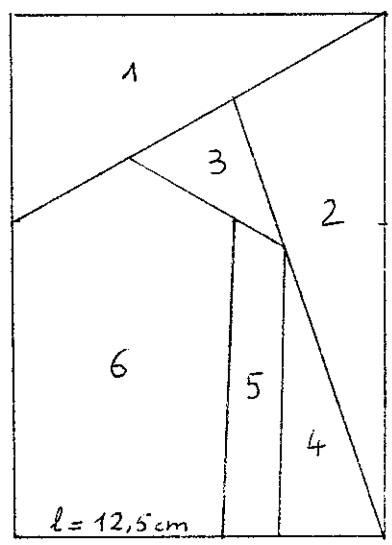
Le puzzle est constitué de pièces ayant une forme géométrique qu'on puisse construire avec les instruments habituels de géométrie. L'important est

+ qu'il y ait des triangles et des trapèzes.
+ qu'il y ait des angles droits et d'autres qui ne le soient pas.
+ qu'un côté d'une pièce coïncide avec la somme de deux autres, ou qu'un côté soit double d'un autre.
+ que sur les bords parallèles du puzzle il n'y ait pas le même nombre de pièces (cf. exemple 1 : bord gauche 2 pièces - bord droit une pièce ; bord haut 1 pièce - bord bas 3 pièces)

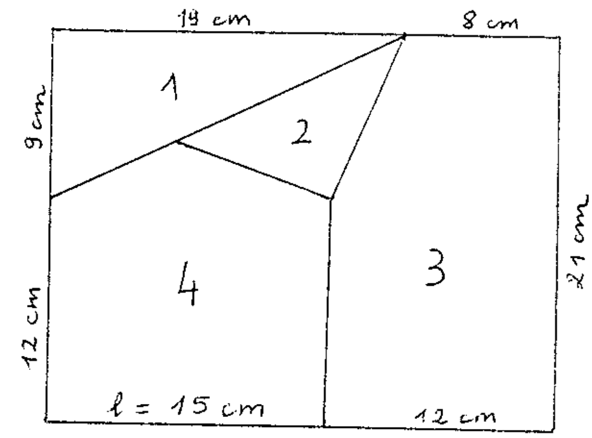
---

* Cette situation est inspirée d'une situation développée par G. Brousseau (I.R.E.M de Bordeaux).

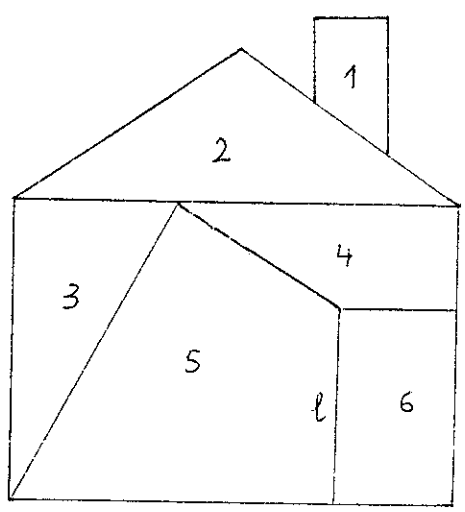
Exemples de choix possibles :



Exemple 1



Exemple 2



Exemple 3

. Des exemplaires identiques du puzzle (tous de même taille) que le maître a fabriqués et découpés, en nombre suffisant pour que chaque élève dispose d'une pièce du puzzle initial.

. du papier de différentes couleurs en feuilles assez grandes.

b) <u>organisation de la classe et consigne</u>

Le maître affiche au tableau le patron du puzzle. Les élèves vont devoir reproduire des puzzles de même forme mais de tailles différentes. Pour cela ils vont se partager le travail par équipes (voir IV.4.3. constitution des équipes). Chacun agrandira une pièce. En rassemblant les pièces d'une équipe, on aura un puzzle de même forme que le patron mais plus grand ou plus petit. Chaque équipe s'occupe d'une taille différente. Il y a une couleur par taille (et donc par équipe). Chaque élève d'une équipe reçoit une des pièces du puzzle initial de l'équipe et du papier de couleur. Tous les élèves de la même équipe ont la même couleur, les élèves de deux équipes différentes ont des couleurs différentes.

<u>consigne</u> : Vous allez fabriquer des puzzles de même forme que le modèle affiché au tableau mais de tailles différentes (plus grands ou plus petits). Vous allez vous partager le travail par équipes : chacun fabriquera une nouvelle pièce de même forme que celle dont il dispose en se servant du papier de couleur. Il y a une couleur par équipe. Quand toutes les pièces seront fabriquées, les membres d'une même équipe se réuniront pour reconstituer le nouveau puzzle.

Pour fabriquer votre pièce, on vous donne une des dimensions du nouveau puzzle.

puzzle initial	rouge	vert	bleu	jaune
l = 12,5 cm	l = 25 cm	l = 10 cm	l = 6,25 cm	l = 20 cm

Remarque : La consigne a été donnée pour l'exemple 1 : 4 équipes de 6 élèves, avec des données numériques qui ont été données dans une classe de CM_2. L'exemple 2 a été choisi dans un autre CM_2 avec 6 équipes de 4 élèves et les valeurs numériques suivantes :

puzzle initial	rouge	vert	bleu	jaune	rose	orange
1 = 12 cm	24 cm	9 cm	6 cm	18 cm	20 cm	8 cm

Le choix du patron, du nombre d'élèves par équipes et des valeurs numériques est une des variables de la situation sur lesquelles le maître peut agir (cf. IV.4.2).

IV.4.2. Analyse de la tâche. Comportements attendus

a). Construction des pièces.

Les élèves ont à reconnaître et à appliquer le modèle de proportionnalité. Ce modèle n'est pas indiqué du tout dans la consigne. Deux propriétés sont à mettre en oeuvre :

- les angles sont conservés
- si une longueur l est somme de deux autres a et b, appelons l', a', b' les longueurs correspondant dans le nouveau puzzle à l, a, b respectivement, on doit avoir $l' = a' + b'$.

Les observations que nous avons faites nous permettent de prévoir que la plupart des élèves vont chercher à appliquer une règle commode du point de vue numérique (pour l'exemple $12 \rightarrow 15$, la tendance majoritaire est d'ajouter 3 ; pour l'exemple $12 \rightarrow 24$, la tendance est de multiplier par 2).

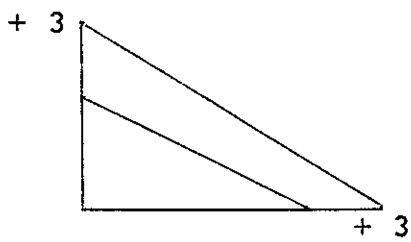
La pertinence (ou non) de leur règle apparaîtra aux élèves soit au moment de la construction de la pièce, soit au plus tard au moment de la reconstitution du puzzle : si un des élèves ne s'est pas servi de la proportionnalité, sa pièce n'a pas la même forme que la pièce de départ et le puzzle ne se reconstituera pas bien.

Influence de la forme des pièces

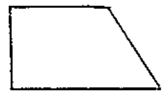
. On peut s'attendre à ce que les propriétés des figures ne soient pas également conservées :

Les angles droits sont faciles à repérer et à reproduire et les élèves ont envie de les conserver. Pour les autres angles, il y a peu de chances pour que les élèves essaient de les conserver explicitement, tout au plus, associent-ils les angles dans une conservation de la forme, à l'oeil.

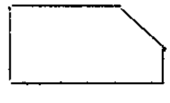
. Ainsi un triangle rectangle sera sûrement transformé en un triangle rectangle. Si les élèves appliquent une régle du type (+ 3) pour les 3 côtés en conservant l'angle droit, ils rencontrent une contradiction. Mais il se peut qu'ils se contentent de le faire pour les deux côtés de l'angle droit et joignent les points obtenus sans vérifier la longueur du troisième côté. Dans ce cas ils peuvent ne pas rencontrer de problème à la construction et ne pas s'apercevoir à ce moment là du changement de forme : il n'apparaîtra qu'à la phase de reconstitution.



. La même remarque est valable pour un trapèze rectangle ou pour un "rectangle tronqué" (Cf. figure)



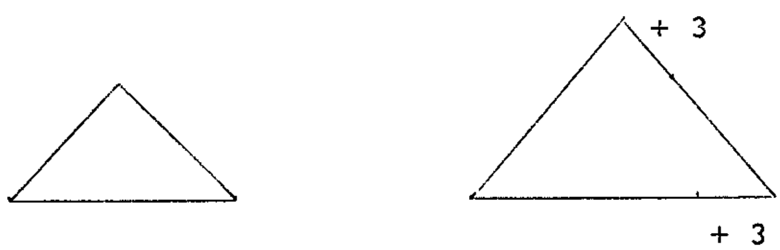
trapèze rectangle



rectangle tronqué

Cependant pour de telles pièces, l'allongement ou l'élargissement ou le changement de pente du biais se perçoivent mieux s'il y a une grande différence entre le "petit côté" et le "grand côté".

. Pour un triangle isocèle, les élèves conserveront l'égalité des côtés et ne rencontreront pas de problème à la construction en se servant d'une règle du type + 3.

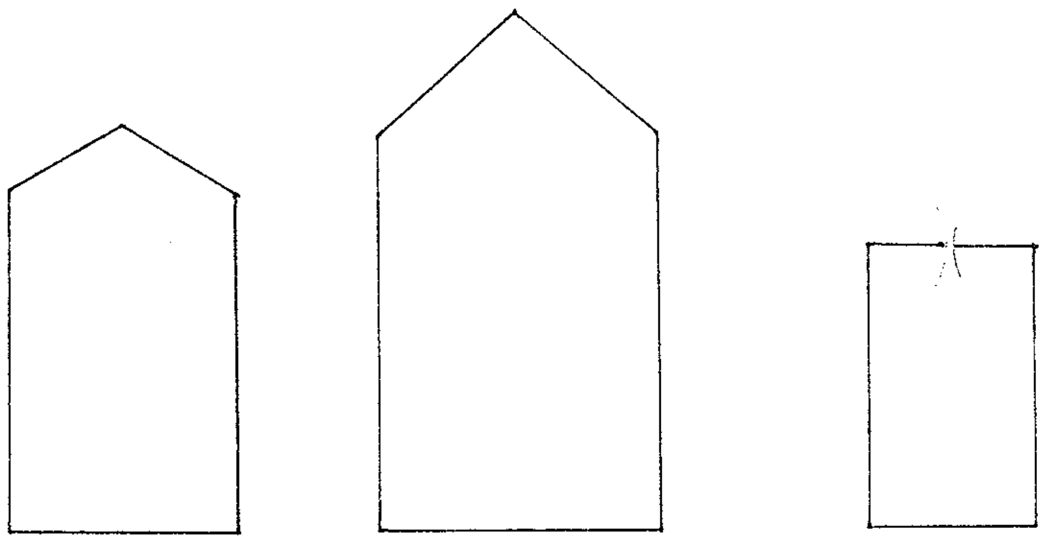


Toutefois si le décalage entre les mesures des côtés est suffisant ils peuvent s'apercevoir que le nouveau triangle "n'est pas pointu pareil".

. Pour un triangle quelconque, en connaissant les trois dimensions l'élève peut construire le triangle. Mais le changement de forme n'est pas toujours facile à repérer.

. Pour une pièce du type "petite maison". (Cf. figure), avec une procédure de type (+ 3), le changement de pente sera d'autant plus facile à repérer que la différence de longueur entre les "côtés penchés" et les côtés droits sera grande. Il se peut même que le toit ne se ferme plus.

Exemple :



12 — pièce initiale

12 → 15 — régle (+ 3) toit plus pointu

12 → 9 — régle (- 3) Le toit ne se ferme plus

<u>Influence du rapport choisi</u>. (Le rapport est choisi par le maître mais n'est pas donné aux élèves).

Il est clair que si le rapport choisi est 2 on peut s'attendre à ce que les élèves concernés utilisent la multiplication par 2, et sans doute pour le rapport ½ la division par 2 : les doubles et les moitiés sont une référence familière des élèves. Ce rapport sera d'autant plus facile à reconnaître que les mesures données sont entières (par exemple 12 → 6 est plus facile que 12,5 → 6,25). Nous n'avons pas essayé de rapport entier autre que 2 pour une raison pratique : les pièces auraient été trop grandes.

Le recours aux rapports 2 ou $\frac{1}{2}$ est important pour garantir que le problème peut avoir des solutions. Mais même si les puzzles sont convenablement réalisés avec ces rapports (2, $\frac{1}{2}$), il n'est pas sûr que les élèves aient établi le lien entre le modèle proportionnel mis en oeuvre et la réussite du puzzle. D'où l'importance de faire intervenir des rapports non évidents posant le problème du choix du modèle.

Pour les rapports non entiers et autres que $\frac{1}{2}$, il est à prévoir que la reconnaissance du modèle proportionnel sera beaucoup plus difficile et que les élèves auront tendance à se servir du modèle additif, quitte à tricher un peu au moment de la construction. La valeur du rapport est une variable sur laquelle l'enseignant peut agir pour adapter la difficulté du problème au degré de complexité que l'élève peut gérer.

Nous avons déjà signalé l'importance qu'il y a à traiter dans la classe le rapport 2 et des rapports "difficiles" (par exemple 12 → 10).

Du point de vue de l'organisation du travail dans la classe, l'enseignant essaie d'équilibrer les difficultés en attribuant les rapports faciles aux élèves lents ou mal à l'aise en mathématiques et les rapports difficiles aux élèves susceptibles de les maîtriser. De toute façon on a besoin des résultats de toutes les équipes. Si les équipes concernées par les rapports 2 ou $\frac{1}{2}$ ont fini très vite, on peut leur confier la construction d'un autre puzzle.

b) <u>Reconstitution du puzzle</u>

Deux élèments interviennent dans le contrôle :

1) Si des élèves ont utilisé une règle du type (+ 3), les pièces n'ont pas gardé la même forme et le puzzle ne peut pas se reconstituer correctement. La conservation (ou non) de la forme n'est pas aisée à percevoir pour les triangles quelconques, par

exemple, surtout qu'il y a souvent dans ce cas un doute sur le sens dans lequel il faut tenir la pièce.

2) Le puzzle total a une forme qu'il faut retrouver. Or nous n'avons pas le même nombre de pièces sur chaque bord : si les élèves ont appliqué un modèle additif, ils vont avoir un décalage : pour l'exemple 1, avec une règle (+ 3), le bord gauche a 3 cm de plus que le bord droit, le bas 6 cm de plus que le haut. En effet, le bord gauche est constitué de 2 segments de longueurs a et b et le bord droit d'un segment de longueur $l = a + b$; les longueurs correspondantes dans le puzzle construit sont $(a + 3 \text{ cm}) + (b + 3 \text{ cm}) = a + b + 6 \text{ cm}$ pour le bord gauche et $l + 3 \text{ cm} = a + b + 3 \text{ cm}$ pour le bord droit. Cela devrait amener les élèves à prendre en compte les propriétés suivantes* :

Si une dimension d'une pièce est somme des dimensions de 2 ou plusieurs pièces dans le puzzle initial, cela doit se retrouver dans le puzzle fabriqué par l'équipe.

Si une dimension est double ou moitié d'une autre dans le puzzle initial, cela doit être vrai des dimensions correspondantes du puzzle transformé.

On attend dans un premier temps une procédure de "type scalaire" pour les rapports autres que 2 et $\frac{1}{2}$, laquelle met en oeuvre les propriétés ci-dessus.

Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 12 & \longrightarrow & 15 \\ 6 & \longrightarrow & 7,5 \\ 3 & \longrightarrow & 3,75 \\ 9 & \longrightarrow & 11,25 \\ 2 & \longrightarrow & 2,5 \\ 1 & \longrightarrow & 1,25 \end{array}$$

---

* Il est important de tenir compte de cette propriété au moment du choix du puzzle.

La recherche de l'image de 1 peut être motivée par une des mesures du puzzle initial : par exemple on connaît l'image de 12, on veut celle de 10, on cherche celle de 6, de 3, de 9, il reste à chercher l'image de 1. On peut ne pas avoir à chercher l'image de 1 pour la construction du puzzle, mais reconnaître le modèle de proportionnalité et la rechercher à ce moment là. C'est l'indice que les élèves passent à une procédure de "type fonction" : "quand on sait ce que devient 1 cm, on sait tout, il n'y a plus qu'à multiplier". C'est à ce moment que l'on peut dire que les élèves ont reconnu le modèle linéaire.

IV.2.3. Constitution des équipes :

On peut constituer les équipes de 2 manières :

1) Les élèves travaillant sur un même agrandissement sont regroupés. Ceci entraîne que le puzzle n'ait pas plus de 4 pièces, et donc exactement 4 pièces, sinon on ne pourrait pas mettre en jeu la propriété d'additivité recherchée. (Exemple 2).

2) Les élèves travaillant sur un même agrandissement sont dispersés dans la classe et deux élèves voisins travaillent sur des agrandissements différents. Le puzzle peut alors avoir davantage de pièces. (Exemple 1).

De toute façon la première phase de construction d'une pièce donnée est une phase de travail individuel.

La première organisation devrait inciter les élèves à choisir une même règle de transformation pour toutes les longueurs : dans le cas où deux élèves ont à reproduire des pièces ayant une dimension commune.

Le contrôle est possible à l'intérieur de l'équipe dès qu'on essaie de reconstituer le puzzle, même non terminé. Ceci permettrait éventuellement de remetre en cause sans trop attendre un mauvais modèle, si les élèves ont le souci de confronter leurs propositions dans une perspective de production cohérente de l'équipe, ce qui n'est pas évident.

La deuxième organisation valorise plutôt la conservation des angles : dans un premier temps, les élèves ne peuvent pas rassembler les pièces, leur réflexion et les discussions avec les voisins portent sur les relations numériques entre anciennes et nouvelles mesures et sur la conservation de la forme des pièces.

De toute façon la phase de confrontation finale est nécessaire dans les 2 cas.

IV.4.4. Comportements observés

Dans toutes les classes observées, les élèves ont cherché une règle dans le but de l'appliquer à toutes les longueurs. Ils ont appliqué le bon modèle quand il s'agissait de doubler.

Quand il s'agissait de diviser par 2, les comportements étaient différents selon les données numériques.

Par exemple, pour 12,5 cm → 6,25 cm, avec le puzzle n° 1, 4 pièces sur 6 étaient correctes, une pièce a été construite avec la régle "tous les côtés mesurent 6,25 cm" et a été rejetée comme ne respectant pas la forme initiale (il s'agissait de la petite maison). Une autre pièce a été construite suivant la régle (- 6,25) (il s'agissait d'un triangle de dimensions 33 cm, 29,5 cm, 13 cm).

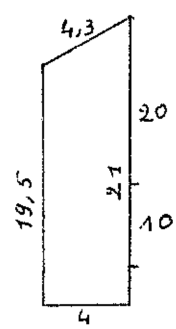
Avec l'exemple 12 → 6 et le puzzle n° 2, les 4 élèves étaient regroupés en équipe travaillant sur le même puzzle, une des élèves a proposé la division par 2 et toute l'équipe a adopté la même procédure. De toute façon plusieurs des dimensions étaient de l'ordre de 8 cm ou 9 cm et enlever 6 cm aurait donné une dimension très petite par rapport aux autres.

Pour les autres rapports, tous les élèves ont appliqué un modèle additif dans un premier temps. Beaucoup ont eu du mal à remettre en cause leur procédure, s'accusant réciproquement de maladresse dans la réalisation matérielle.

Les élèves remarquent la non conservation des angles. Mais ils ne remettent pas forcément leur régle de calcul en cause tout de suite. Même quand ils ont aussi observé le décalage entre les bords du puzzle, et sont persuadés que leur règle de construction est fausse, certains élèves ne savent plus quoi faire.

D'autres utilisent des procédures type scalaire : par exemple un élève avait la consigne 12,5 → 20 et la pièce dessinée ci-contre.

Il a mesuré 12,5 cm sur sa pièce partout où c'était possible.
Il a écrit 20 à côté, puis il a mesuré 6,25 cm et écrit 10, il lui restait à peu près 2 cm, alors il a voulu chercher ce que devenait 1 cm.



Ce qui l'a conduit à chercher le nombre qui, multiplié par 12,5 donne 20.

IV.4.5. Bilans - institutionnalisation

Un premier bilan permet de recenser les difficultés

- pour construire une pièce
- pour assembler les pièces

Il aboutit au rejet des modèles (+ a), (- a), fonction constante.

On procède à une première institutionnalisation :

1) les angles doivent être conservés

2) si dans le puzzle initial, on a $l = a + b$, dans le puzzle cherché, on aura $l' = a' + b'$.

Ce bilan est aussi l'occasion d'exposer les premiers succès ; par exemple :

- assemblage correct des pièces correspondant à la consigne 12,5 → 25

- assemblage partiel pour la consigne 12,5 → 6,25

Les élèves ne sont pas forcément en mesure d'expliquer les succès partiels, et par là même ils ne peuvent pas adapter la procédure aux autres consignes.

A ce stade, une intervention du maître peut être nécessaire pour faire repartir les élèves de ce dont ils sont sûrs. Par exemple avec la consigne 12 → 15 , les élèves sont sûrs que chaque fois qu'on a 12 cm, il doit lui correspondre 15 cm. Il s'agit alors d'enrichir le stock des couples (a,b) dont on est sûr que b correspond à a.
Par exemple :

$$\begin{array}{rcl} 12 & \longrightarrow & 15 \\ 6 & \longrightarrow & 7,5 \\ 24 & \longrightarrow & 30 \\ 30 & \longrightarrow & 37,5 \\ 18 & \longrightarrow & 22,5 \end{array}$$

etc ...

Cet enrichissement peut conduire des élèves qui ont déjà travaillé avec la fonction linéaire à reconnaître qu'une telle fonction est à l'oeuvre ici et qu'il s'agit de chercher l'image de 1 pour déterminer la fonction, ou au moins les engager dans une nouvelle procédure.

Si les élèves ont une pratique de la représentation graphique, ils disposent alors d'assez de couples à reporter graphiquement. Le graphique (points alignés) peut leur permettre de reconnaître la fonction linéaire et leur donner le moyen de déterminer de nouveaux couples sans rechercher l'image de 1.

Ce premier bilan relance l'action de construction des autres puzzles.

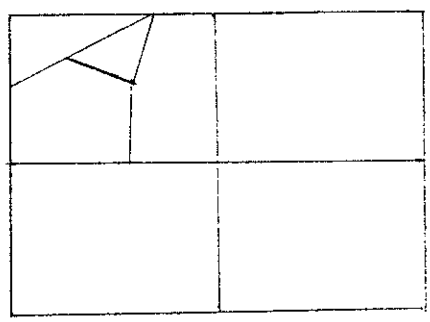
Un autre bilan est l'occasion d'institutionnaliser le modèle linéaire comme modèle pertinent dans les agrandissements ou réductions.

IV.4.6. Aire des nouvelles pièces

Si parallélement, on a fait avec les élèves un travail sur la notion d'aire, on peut aborder un nouveau problème.

Nous avons examiné la correspondance entre puzzles du point de vue des longueurs. On peut maintenant poser le problème de la correspondance entre aires des pièces.

Cette question ne peut être abordée que si les élèves ont déjà travaillé sur la notion d'aire (Cf. brochure 48 de l'I.R.E.M de Paris-Sud), en particulier s'ils ont établi la relation entre aires de rectangles et dimensions. Si le puzzle s'inscrit dans un cadre rectangulaire on peut déjà chercher les correspondances entre les aires des rectangles bordés par les cadres de départ et d'arrivée. La situation est suffisamment difficile pour examiner le rapport 2 seulement, dans un premier temps au moins.



La considération du puzzle terminé (rectangle) permet de constater que dans le grand on peut inscrire 4 petits puzzles.

Cela ne nous dit pas que chaque pièce du grand puzzle a une aire 4 fois plus grande que celle de la pièce correspondante dans le petit. Pour cela, il faudrait savoir qu'il y a un rapport constant entre les aires.
C'est un problème à étudier.
On peut l'aborder pour les rectangles, puis pour les triangles, puis pour tous les polygones (en les décomposant en triangles).

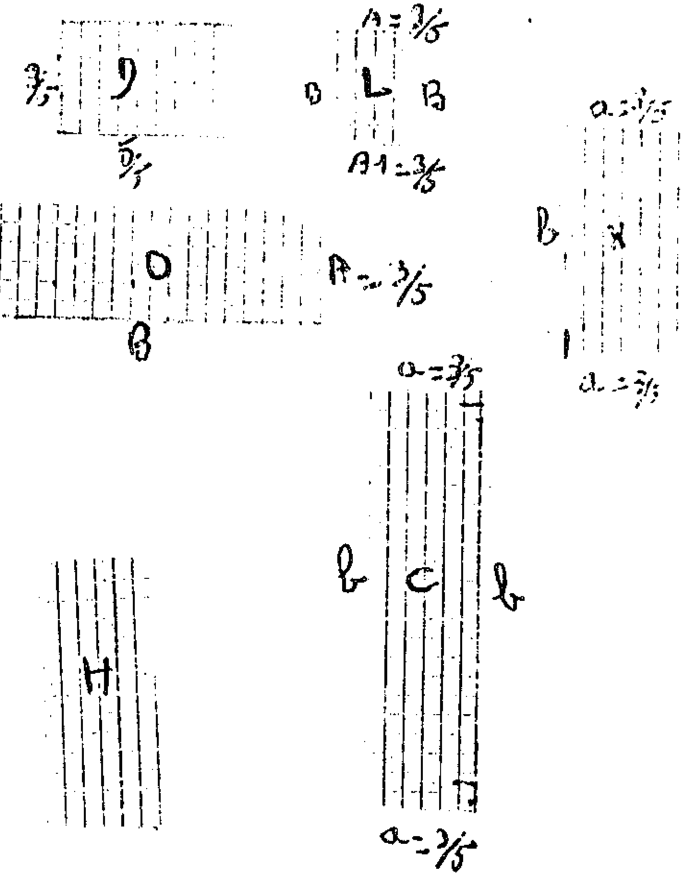
Le problème est posé à propos des puzzles, dans le contexte géométrique, mais nécessite une traduction et une étude numérique des relations entre mesures des longueurs et mesures des aires pour y répondre. Le recours au seul pavage est insuffisant. A la rigueur on pourrait s'en tirer avec des découpages très élaborés pour le rapport 2, mais le recours à la mesure est nécessaire pour les rapports qui ne sont pas entiers ou inverses d'entiers.

Hongrie, jeudi 8 décembre 1977 CE 2

$a = 3/5$

	$a = 3/5$	b	$l_{a + b} = 1/2\,P$	$A = a \times b$ aire
OM				
D1	3/5	5/5 = 1	1 + 3/5	15/25
D2	3/5	10/5 = 2	2 + 3/5	30/25
L	3/5	2/5	5/5 = 1	6/25
K2	3/5	6/5	9/5 = 1 + 4/5	18/25
C1	3/5	11/5	14/5 = 1 + 4/5	33/25
H1	3/5	7/5	10/5 = 2	21/25
F	3/5	20/5 = 4	23/5 = 4 + 3/5	60/25
G	3/5	23/5 = 4 + 3/5		
I	3/5			
J1				
K				
N				

$(A) = (a \times b)$



$y = (3/5 \times x)$ - $\boxed{y = \text{l'aire} \quad y = A}$

$(l =)\ (3/5 + b)$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 15 \\ \hline 75 \\ +\ 150 \\ \hline 225 \end{array}$$

CHAPITRE V

RELATIONS ENTRE DIMENSIONS, PERIMETRE ET AIRE D'UN RECTANGLE

Avant d'aborder ce travail, on suppose que les élèves

- ont fait une étude géométrique du rectangle (diverses caractérisations par les angles, les côtés, symétries...),

- savent que, parmi les rectangles, un rectangle choisi est caractérisé par ses deux dimensions,

- savent ce qu'est le périmètre d'une figure, ont fait des calculs de périmètre,

- savent mesurer l'aire d'un rectangle avec l'unité d'aire adaptée à l'unité de longueur (Cf. Brochure I.R.E.M n° 48 Mesure des longueurs et des aires). Les unités utilisées ici seront les cm et cm^2.

Il s'agit dans ce chapitre d'utiliser le cadre géométrique pour faire avancer les connaissances sur les nombres : c'est en calculant la mesure de l'aire de rectangles qu'on donnera du sens au produit de fractions, et les fractions décimales seront privilégiées pour approcher la mesure du côté d'un carré dont l'aire est donnée. Les représentations graphiques fournissent un troisième cadre qui prend le relais du cadre matériel des figures et donne une autre représentation des problèmes que les élèves ont à traiter.

Pour un rectangle donné, une fois les unités fixées (ici cm et cm^2) on a 4 nombres a, b, P, A qui sont les mesures des

2 dimensions , celle du périmètre et celle de l'aire. Il existe des relations entre ces quatre nombres :

$$P = 2 \times (a + b) = (2 \times a) + (2 \times b)$$
$$A = a \times b$$

chaque fois qu'on fixe un de ces quatre nombres on définit une famille de rectangles, et on s'intéresse aux relations entre les 3 autres nombres :

si a fixé, relation entre P et b, entre A et b
si P fixé, relation entre a et b, relation entre a et A
si A fixé, relation entre a et b, relation entre a et P

On pourrait s'intéresser à d'autres relations, par exemple $\frac{a}{b}$ fixé.

V.1. RECHERCHE DE RECTANGLES AYANT UNE DIMENSION FIXEE. CALCUL DU PERIMETRE - CALCUL DE L'AIRE - ETUDE DE LEURS VARIATIONS

Objectifs

- Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle dans le cas de mesures non entières pour les dimensions : quelques additions de fractions dans des cas simples. Produit d'un entier et d'une fraction. Produit de deux fractions plus petites que 1.

- Etude des variations du périmètre et de l'aire :
  . quand une dimension est fixée, l'aire du rectangle est proportionnelle à l'autre dimension. La représentation graphique de la fonction correspondante est une droite passant par l'origine.
  . quand une dimension est fixée, le périmètre est fonction de l'autre dimension, mais ne lui est pas proportionnel : on a une fonction affine non linéaire ; la représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine.

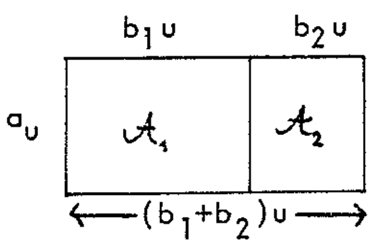
a) Analyse du problème

Quand une dimension est fixée, l' par exemple, on peut exprimer la variation du périmètre $\mathcal{P}$ et de l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle de dimensions (l, l') en fonction de la dimension variable, l. Pour une unité de longueur choisie u (par exemple cm) et l'unité d'aire c adaptée à u (l'aire d'un carré de dimension u - par exemple cm^2), la relation en termes de grandeurs reçoit une traduction en termes de nombres.

. cas de l'aire :

u fixé
c fixé

grandeurs	nombres
l' fixée $\quad l' = a\,u$	a fixé
par exemple $l' = 5$ cm	par exemple $a = 5$
à chaque longueur l on associe l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle de dimension (l, l')	à la mesure de l en u, on associe la mesure A de $\mathcal{A}$ en c
$l \mapsto \mathcal{A}$	$b \mapsto a \times b = A$
$l = b\,u \qquad \mathcal{A} = (a \times b)c$	par exemple $b \mapsto 5 \times b$
Par exemple $\mathcal{A} = (5 \times b)cm^2$	
L'aire du rectangle de dimension $(a\,u, (b_1 + b_2)u)$ est la somme des aires des rectangles de dimensions $(a\,u, b_1\,u)$ et $(a\,u, b_2\,u)$	$b_1 \mapsto A_1 = a \times b_1$ $b_2 \mapsto A_2 = a \times b_2$ $b_1 + b_2 \mapsto A = a \times (b_1 + b_2)$ $= (a \times b_1) + (a \times b_2) = A_1 + A_2$



$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

En particulier, chaque fois que b augmente de h, A augmente de a X h. On peut dire qu'à un accroissement constant h de b correspond un accroissement constant $k = a \times h$ de A. Il en serait de même dans le cas d'une diminution.

Résumons : $b \overset{f_u}{\longmapsto} f_u(b) = a \times b$

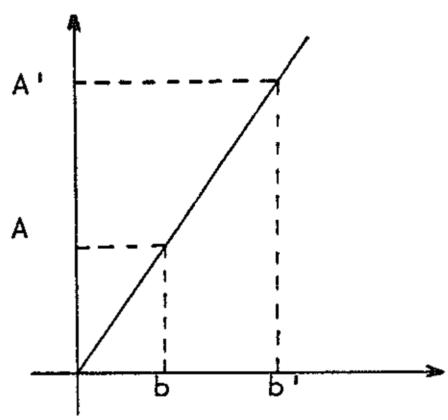
1) Si $b = b_1 + b_2$, $f_u(b_1 + b_2) = f_u(b_1) + f_u(b_2)$

2) Si $b' = b + h$, $f_u(b') = A' = A + (a \times h) = A + k$

$$f_u(b + nh) = A + nk$$

Cette dernière propriété de f_u se traduit graphiquement par l'alignement des points représentant les couples $(b + nh, A + nk)$ quand n varie. La pente de la droite qui porte ces points est $\frac{k}{h} = \frac{ah}{h} = a$.

La première propriété entraîne de plus que les couples (b, A) sont représentés par des points alignés avec O.



Autrement dit, l'aire $\mathcal{A}$ est proportionnelle à la dimension variable l. Sur les nombres, cela veut dire que l'application f_u qui, à la mesure b de l associe la mesure A de $\mathcal{A}$ est une application linéaire. Cette propriété est reconnue et utilisée par les enfants au moins dans le cas où les mesures en jeu sont entières. Il reste à exploiter la correspondance qu'on vient d'établir entre la proportionnalité en termes de grandeurs d'une part, en termes de nombres d'autre part, pour étendre le domaine de validité de la relation de proportionnalité, autrement dit le champ des nombres sur lequel les élèves utilisent la fonction linéaire, et ainsi étendre la multiplication à des nombres non entiers.

Sur la représentation graphique, la question est de savoir si les points de coordonnées (x, y) alignés avec les précédents mais avec x non entier correspondent à des rectangles de la famille et, réciproquement, si tous les rectangles de la famille sont représentés par des points alignés avec les précédents.

. Cas du périmètre

u fixé

grandeurs

. l' fixé l' = a u

par exemple l' = 5 cm

A chaque longueur l, on associe le périmètre $\mathcal{P}$ du rectangle de dimensions (l, l')

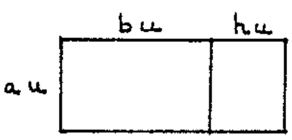
$l \mapsto \mathcal{P}$

$l = b\ u \qquad \mathcal{P} = 2a\ u + 2b\ u$

Par exemple $\mathcal{P} = 2b\ cm + 10\ cm$

$\mathcal{P} = (2b + 10) cm$

. Variation du périmètre



$b\ u \mapsto \mathcal{P} = 2a\ u + 2\ b\ u$

$b_1\ u = (b + h)u \mapsto \mathcal{P}_1 = 2a\ u + 2b\ u + 2h\ u$

$= \mathcal{P} + 2h\ u$

nombres

. a fixé

par exemple a = 5

à la mesure b de l en u, on associe la mesure P de $\mathcal{P}$ en u.

$b \mapsto P = (2 \times a) + (2 \times b)$

$= 2 \times (a + b)$

par exemple b $(2 \times b) + 10$

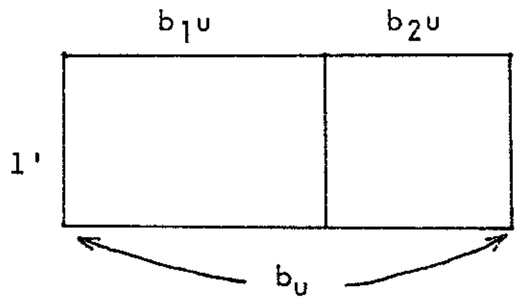
$P = 2a + 2b$

$P_1 = 2a + 2b + 2h$

$= P + 2h$

Chaque fois que b augmente de h, P augmente de $k = 2h$. Autrement dit, à une augmentation constante de la dimension 1, correspond une augmentation constante du périmètre. Il en serait de même dans le cas d'une diminution.

Comme pour l'aire, la représentation graphique des couples (b, P) est formée de points alignés sur une droite de pente $\frac{k}{h} = 2$. Par contre le périmètre du rectangle de dimensions $((b_1 + b_2)u, l')$ n'est pas la somme des périmètres des rectangles de dimensions $(b_1\ u, l')$ et $(b_2\ u, l')$.



$\mathcal{P}$ périmètre du rectangle de dimensions (b u, l')

$\mathcal{P}_1$ périmètre du rectangle de dimensions (b, u, l')

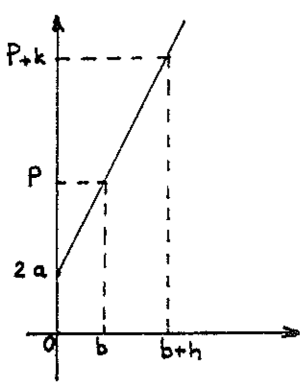
$\mathcal{P}_2$ périmètre du rectangle de dimensions $(b_2\ u, l')$

$$\mathcal{P} = 2l' + 2\ b\ u = 2\ l' + 2\ b_1\ u + 2b_2\ u$$

$$\mathcal{P}_1 = 2l' + 2b_1\ u \qquad \mathcal{P}_2 = 2l' + 2b_2\ u$$

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 4l' + 2b_1\ u + 2b_2\ u$$

Les points représentant les couples (b, P) sont sur une droite qui ne passe pas par l'origine.



Le point de coordonnées (O, 2a) correspond au cas limite où le rectangle de dimensions (a u, b u) n'est plus qu'un segment de longueur a u l'autre dimension b u = O

b) Une variable didactique

Si on laisse aux élèves le choix de la dimension variable, ils peuvent eux-mêmes introduire des valeurs numériques non entières (demis, quarts, nombres décimaux qu'ils connaissent), mais ils n'y sont pas obligés. L'enseignant peut provoquer le calcul sur de tels nombres en choisissant pour a une valeur non entière mais connue des élèves. Le choix de a est une variable de la situation sur laquelle l'enseignant peut agir. Toutefois, quel que soit le choix de a entier ou fractionnaire, les élèves peuvent n'avoir jamais à additionner ou multiplier 2 fractions. Ils leur suffit de choisir l'autre valeur entière.

c) Organisation de la classe et consigne

Les élèves sont par équipes de quatre. On donne à chaque équipe une valeur de a.

Exemples : $a = 5$, $a = 7$, $a = 3 + \frac{1}{2}$, $a = 8 + \frac{1}{2}$, $a = 2 + \frac{3}{4}$, $a = 4 + \frac{6}{10}$

Consigne : Dans chaque équipe, vous allez vous partager le travail. Chacun dessine 4 ou 5 rectangles différents dont une des dimensions mesure en cm la valeur qu'on vous a donnée. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents. Pour chacun de ces rectangles, vous calculez le périmètre en cm et l'aire en cm^2. Vous organisez les résultats dans un tableau.

d) Analyse de la tâche

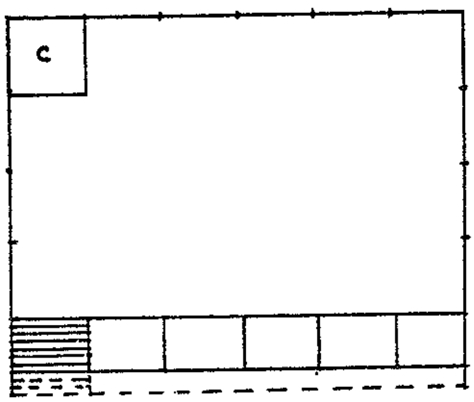
- Calcul de l'aire :

Nous présentons cette analyse dans le cas où les deux dimensions sont fractionnaires. Ce cas a peu de chances de se présenter dans cette séquence. Au contraire, il interviendra inévitablement à l'occasion de la recherche de rectangles à périmètre constant et du calcul de leur aire.

. Si une des dimensions est entière, on a à faire le produit d'une fraction par un entier, ce qui se ramène à une addition répétée en utilisant l'additivité des aires.

Exemple : $a = 4 + \frac{7}{10}$ $x = 6$

L'unité d'aire est l'aire c du carré C de dimension u. Le problème est de savoir combien de C il nous faut pour paver le rectangle



Il faut déjà 24 carrés entiers (6 X 4) et on sait qu'il en faut moins de 30 (6 X 5). Pour le reste on a 6 petits rectangles dont l'aire de chacun vaut $7 \times \frac{1}{10} c = \frac{7}{10} c$: chaque petite bande se reporte 10 fois dans le carré C et il faut en prendre 7 pour recouvrir un petit rectangle.

On a donc $6 \times \frac{7}{10} = \frac{42}{10} = 4 + \frac{2}{10}$

L'aire du rectangle en c est donc

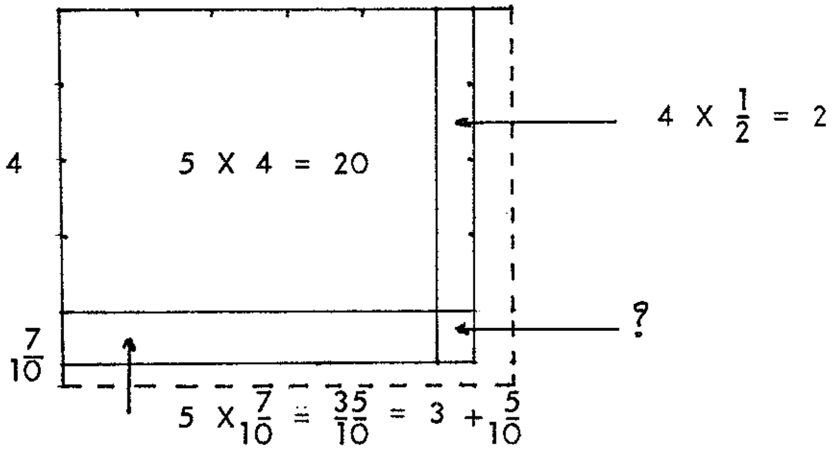
$$(6 \times 4) + (6 \times \frac{7}{10}) = 24 + \frac{42}{10} = 24 + 4 + \frac{2}{10} = 28 + \frac{2}{10}$$

on peut écrire

$$6 \times (4 + \frac{7}{10}) = 28 + \frac{2}{10}$$

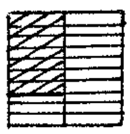
. Si les deux dimensions sont fractionnaires, le rectangle est coupé en 4 parties dont on sait calculer l'aire pour 3 d'entre elles. On peut déterminer l'aire de la 4ème partie par référence au pavage. Et l'aire du rectangle est la somme des aires des quatre parties. Finalement la connaissance des dimensions détermine l'aire du rectangle. Par convention, le produit de 2 nombres fractionnaires a et b est la mesure de l'aire du rectangle de dimensions (a,b) en prenant des unités de longueur et d'aire adaptées.

Exemple : $a = 4 + \frac{7}{10}$ $\qquad x = 5 + \frac{1}{2}$



$$\left(4 + \frac{7}{10}\right) \times \left(5 + \frac{1}{2}\right) = (4 \times 5) + \left(4 \times \frac{1}{2}\right) + \left(5 \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}\right)$$
$$= 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \left(\frac{7}{10} \times \frac{1}{2}\right)$$

Il reste à calculer l'aire du rectangle R de dimensions $\frac{7}{10}$u et $\frac{1}{2}$u. On le reporte dans le carré unité.



le rectangle R de dimensions $\frac{7}{10}$u et $\frac{1}{2}$u est composé de 7 petits rectangles r de dimensions $\frac{1}{10}$u et $\frac{1}{2}$u. Il faut 20 de ces petits rectangles pour paver le carré unité. L'aire du petit rectangle r est donc $\frac{1}{20}$c, l'aire du rectangle R est $7 \times \frac{1}{20}c = \frac{7}{20}c$.
Finalement la mesure de l'aire cherchée est :

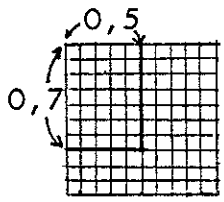
$$\left(4 + \frac{7}{10}\right) \times \left(5 + \frac{1}{2}\right) = 20 + 2 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{10}{20} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}$$

Observations

. Dans toutes les classes de CM_1 et CM_2 observées, les élèves ont procédé de la manière décrite ci-dessus.

. Les élèves de 6ème ont déjà en général une certaine connaissance des nombres décimaux et de la technique de multiplication de 2 décimaux. L'activité présentée ici est l'occasion de donner du sens à la fois à cette multiplication et au calcul de l'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions dans le cas où les mesures ne sont pas entières.

Remarque : Avec des nombres décimaux, on aurait le même travail.



Par exemple 0,5 X 0,7 = 0,35 :
on a besoin de 100 carrés de dimension 0,1u pour paver le carré de dimension 1u.
L'aire du carré de dimension 0,1u est donc 0,01C, il en faut 35 pour paver le rectangle de dimensions (0,5u ; 0,7u) donc 0,5 X 0,7 = 0,35.

- Calcul du périmètre :

Si les élèves ont un a fractionnaire, ils sont amenés à ajouter un entier et une fraction ou à ajouter 2 fractions. Comme ils ont le choix de la deuxième dimension, ils peuvent choisir pour la deuxième dimension un entier ou une fraction de même dénominateur que la première ou au moins une fraction pour laquelle le choix de l'unité commune est facile. Par exemple :
$a = 3 + \frac{1}{2}$ $b = 2 + \frac{1}{4}$ ce qui est facile ou encore $b = 2 + \frac{1}{5}$, on peut dire, en reprenant des connaissances antérieures, que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ $a + b = 5 + \frac{7}{10}$ et $P = 10 + \frac{14}{10} = 11 + \frac{4}{10}$;
dans ce cas on peut plus facilement faire $a + a = 7$, $b + b = 4 + \frac{2}{5}$.
$P = 7 + 4 + \frac{2}{5} = 11 + \frac{2}{5}$.
Autre exemple $a = 2 + \frac{3}{4}$, $a + a = 4 + \frac{6}{4} = 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2}$.
Si on choisit $b = 2 + \frac{1}{5}$ $b + b = 4 + \frac{2}{5}$ et
$P = 5 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{2}{5} = 9 + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 9 + \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = 9 + \frac{9}{10}$

e) Représentations graphiques

Travail individuel

- Cas de l'aire :

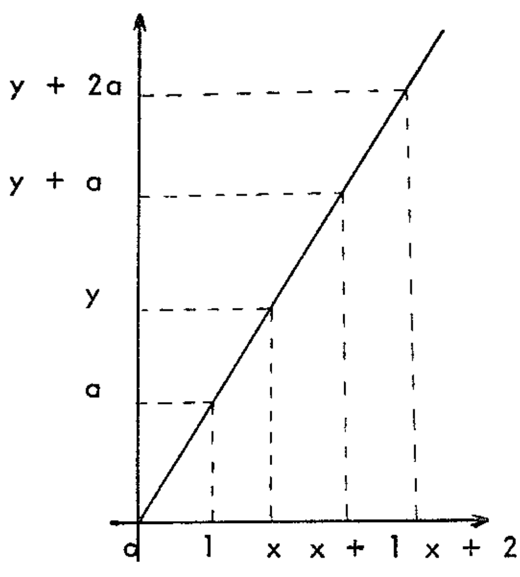
Consignes. 1. Représenter graphiquement tous les couples (x, y) trouvés par l'équipe pour la valeur de a donnée ; x est la mesure en cm de l'autre dimension du rectangle, y est la mesure de l'aire en cm^2.

2. Y-a-t-il dans la famille un rectangle d'aire 20 cm^2, 25 cm^2 etc ... .

Commentaire

Pour réaliser convenablement les représentations graphiques demandées, les élèves ont besoin de choisir sur chaque axe une échelle : par exemple 1 cm pour 1 cm en abscisse, 1 cm pour 5 cm^2 en ordonnée. Ou bien, si la représentation se fait sur un papier quadrillé à maille carrée on peut choisir 1 ou n bords de maille pour 1 cm, en abscisse, 1 bord de maille pour 5 cm^2 en ordonnée par exemple, sans s'intéresser nécessairement à la mesure des bords. L'échelle est à choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème, de façon à reporter graphiquement assez de couples. Cette tâche peut être délicate. Elle est toutefois importante pour l'exploitation du graphique.

Le but de ce travail est de faire jouer à la représentation graphique un double rôle : recueil et organisation de l'information (consigne 1), source d'information nouvelle (consigne 2) en donnant du sens à de nouveaux points intermédiaires.



Les points obtenus s'alignent sur une droite qui passe par l'origine : si on progresse de 1 vers la droite, on progresse de a vers le haut.
Les élèves constatent d'abord cette propriété quand x est entier. Ils disent que le graphique forme un escalier avec des marches régulières.
Soient M et P les points de coordonnées respectives (n, axn) et (n + 1, a X (n + 1)) avec n entier.

Si on considère un rectangle de dimensions a cm et x cm avec $n < x < n + 1$, à ce moment de la situation un élève sait lui associer son aire $a \times x$ cm^2 , du moins si x est un nombre qu'il connait. Le point de coordonnées (x, y) avec $y = a \times x$ est sur le segment MP. Tous les points correspondant aux rectangles de la famille qu'on a examinés sont alignés avec M et P sur une droite D qui passe par l'origine. Réciproquement, étant donné un nombre y, existe-t-il un rectangle de la famille, d'aire y cm^2. La réponse fait intervenir la division comme outil : un tel rectangle aurait pour dimensions a cm et x cm avec $y = a \times x$. Graphiquement, en admettant que tous les rectangles de la famille sont représentés par des points de la droite D, ce rectangle serait représenté par le point de la droite D, d'ordonnée y. Les élèves peuvent lire un résultat approché sur le graphique et le contrôler par le calcul. Le graphique sert aussi de contrôle au calcul : si on trouve un point qui n'est pas dans l'alignement, il faut vérifier le calcul correspondant. On admet là que la droite D est exactement l'ensemble des points de coordonnées (x, a.x) où x désigne n'importe quelle mesure de longueur en cm.

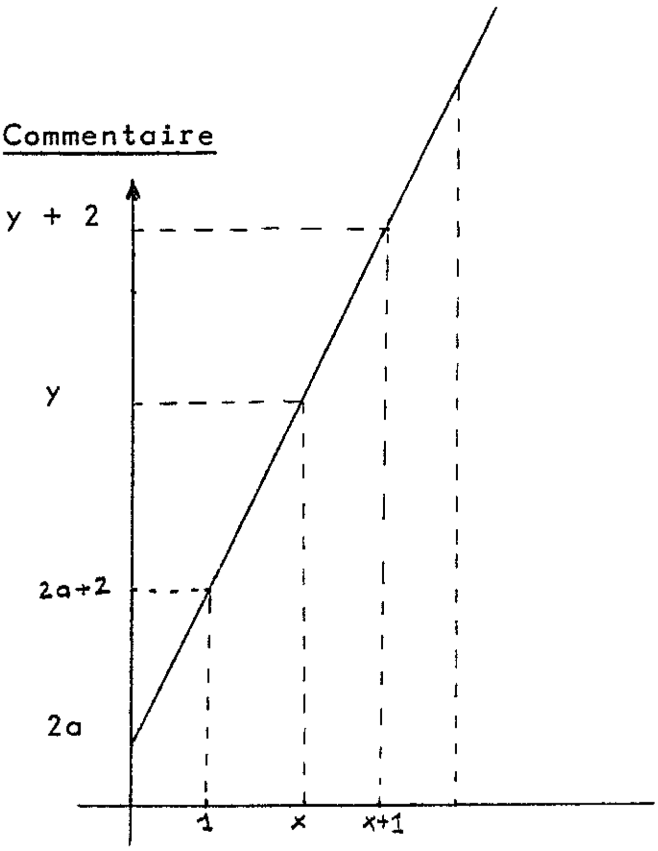
- Cas du périmètre :

Consignes. 1. Représenter graphiquement tous les couples (x, y) trouvés par l'équipe pour la valeur de a donnée ; x est la mesure en cm de l'autre dimension du rectangle, y est la mesure du périmètre en cm.

2. Y-a-t-il dans la famille un rectangle de périmètre 25 cm, 32 cm, ... ?.

3. Comparer le graphique obtenu à celui qu'on avait obtenu dans le cas de l'aire.

Commentaire

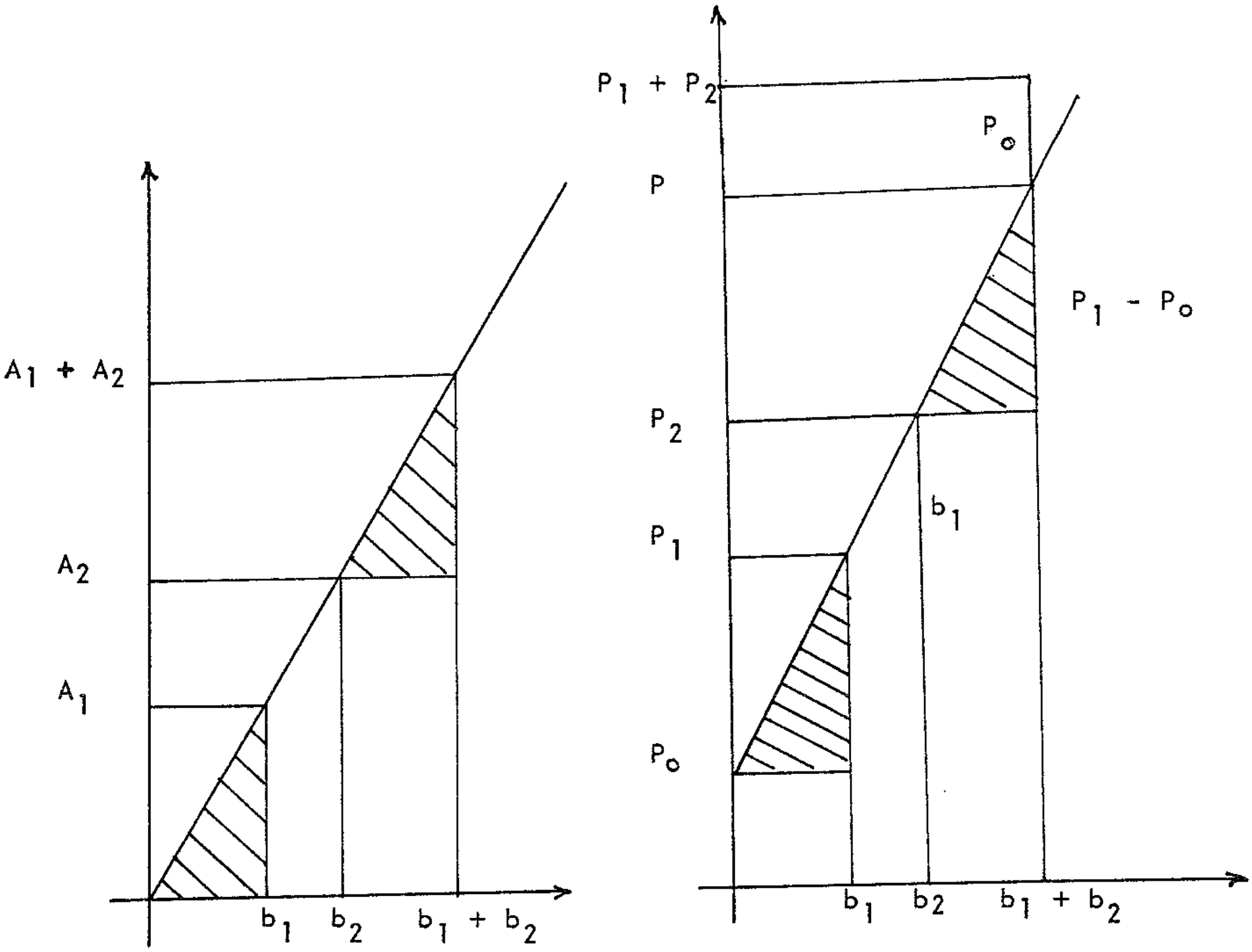


. Si on progresse de 1 vers la droite, on progresse de 2 vers le haut. On a encore un escalier à marches régulières. Les points obtenus s'alignent encore sur une droite.

. Cependant, aucun nombre inférieur à 2a ne peut représenter le périmètre d'un rectangle de la famille, alors que n'importe quel nombre, si petit soit-il, peut représenter une aire. Cette fois, la droite obtenue sur le graphique ne passe pas par l'origine.

. Dans le calcul et sur le dessin, on a vu que si $b = b_1 + b_2$, l'aire A cm^2 du rectangle de dimensions a cm, b cm est la somme des aires A_1 cm^2 et A_2 cm^2 des rectangles de dimensions a cm, b_1 cm et a cm, b_2 cm.

Géométriquement, cela se traduit sur le graphique par l'alignement des points (b_1, A_1) , (b_2, A_2) et (b, A) avec l'origine.



Ce n'est pas le cas pour le périmètre :

Si P cm est le périmètre du rectangle de dimensions a cm, b cm
P_1 cm est le périmètre du rectangle de dimensions a cm, b_1 cm
P_2 cm est le périmètre du rectangle de dimensions a cm, b_2 cm

et si $b = b_1 + b_2$, on a $P \neq P_1 + P_2$

en effet :

$P_1 = 2a + 2b_1$, $P_2 = 2a + 2b_2$, $P = 2a + 2b_1 + 2b_2 = P_1 + P_2 - 2a$

Dans le cas de l'aire, la relation $b \to A$ est linéaire, on dit que A est proportionnel à b. En revanche, dans le cas du périmètre, la relation $b \to P$ n'est pas linéaire.

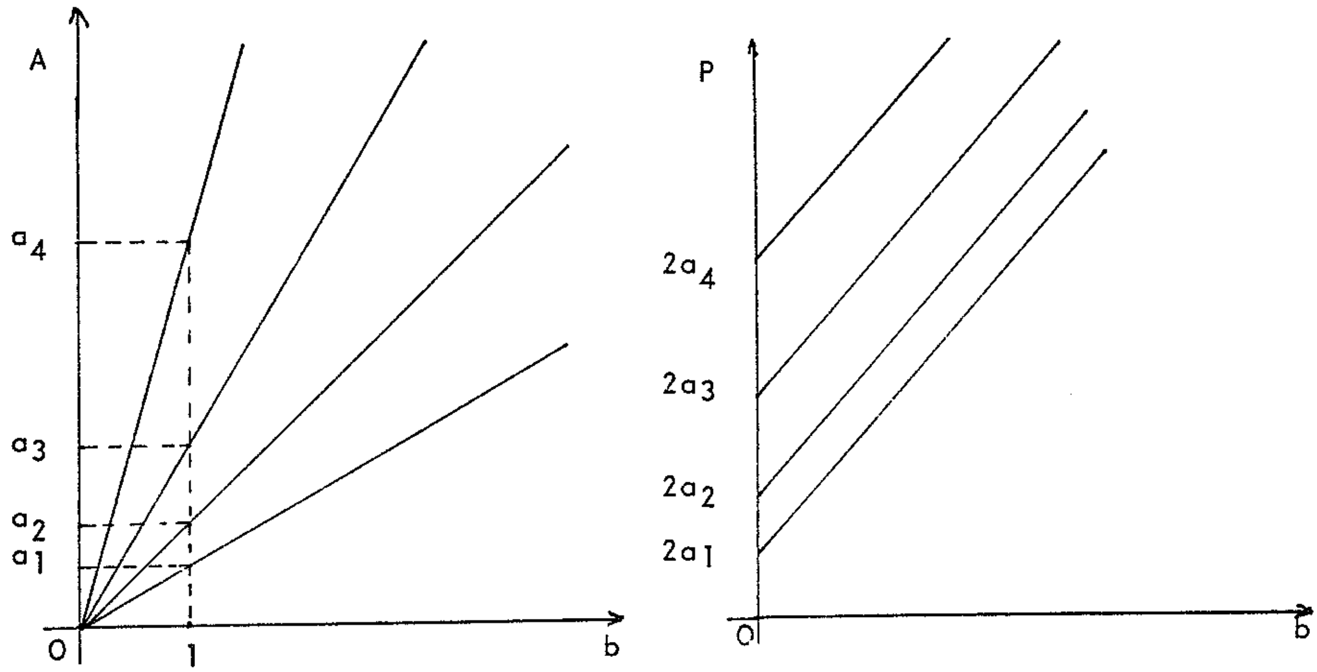
Toutefois, la variation de périmètre est proportionnelle à la variation de la dimension b cm : si b augmente (ou diminue) de h, P augmente (ou diminue) de $2h$.

f) Bilan collectif et institutionnalisation

On rassemble les résultats de toutes les équipes sous forme de deux grands graphiques affichés au tableau : un pour l'aire, un pour le périmètre.

Chaque équipe vient dessiner sur le quadrillage collectif le graphique qu'elle a obtenu pour chacune des relations :

$b \rightarrow A = a \times b$ et $b \rightarrow P = 2a + 2b$



Le fait de faire varier a met bien en évidence les ressemblances et les différences entre les deux relations :

Dans les deux cas, on a des droites.

Dans le cas de l'aire, toutes les droites passent par l'origine, l'aire peut prendre n'importe quelle valeur, et la pente de la droite dépend de a : plus précisément la droite est déterminée par le point de coordonnées (1, a).

Dans le cas du périmètre, les droites sont parallèles : la pente ne dépend pas de a, (c'est toujours 2). La plus petite valeur que peut prendre le périmètre dépend de a : c'est 2a.

Institutionnalisation de la variation de l'aire en fonction des dimensions

Le bilan a permis de conclure que l'aire est proportionnelle à la dimension variable du rectangle, en particulier : si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre quel qu'il soit, entier ou non, l'aire est multipliée par le même nombre.

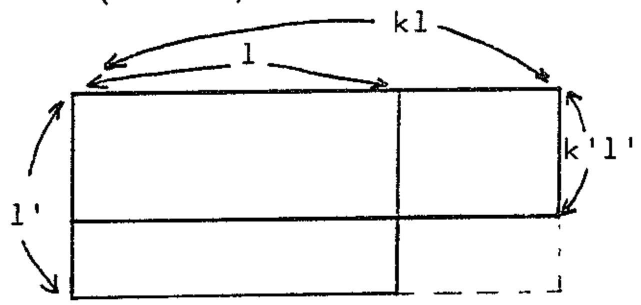
Cela entraîne aussi que :

- si on multiplie une dimension d'un rectangle par un nombre k entier ou non, et l'autre dimension par un nombre k', entier ou non, l'aire est multipliée par $k \times k'$:

$$A \mapsto kA \mapsto k' \times (kA) = (k \times k')A$$

- en particulier si on multiplie les deux dimensions d'un rectangle par un nombre k, l'aire est multipliée par $k \times k = k^2$.

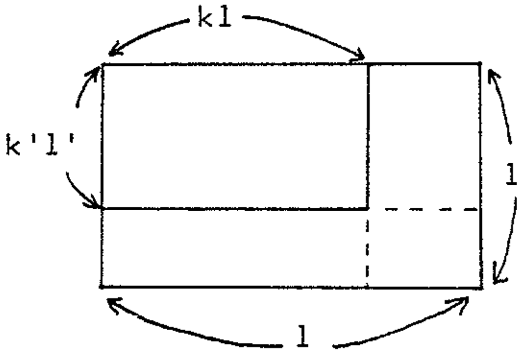
- c'est vrai aussi quand $k < 1$ ou $k' < 1$. Dans ce cas le rectangle obtenu ne contient pas l'ancien, mais on a $A' = (k \times k')A$.



$k > 1$ et $k' < 1$

$A' = (k \times k')A$

Si $k < 1$ et $k' < 1$, on obtient un nouveau rectangle d'aire $(k \times k')A$ qui peut s'inclure dans le rectangle donné d'aire A.



$k < 1$ et $k' < 1$

$A' = (k \times k')A$

V.2. RECHERCHE DE RECTANGLES DE PERIMETRE DONNE. CALCUL DE L'AIRE.

Cette situation a un double objectif :

- elle permet un renforcement de la situation précédente de calcul de l'aire d'un rectangle dans le cas où les dimensions ne sont pas entières : quand P est fixé, il y a peu de rectangles de la famille dont les dimensions sont entières et d'autant moins que P est petit. Si on demande à chaque équipe de produire suffisamment de rectangles différents, les élèves seront obligés de choisir a et b non entiers.

- elle permet d'institutionnaliser le fait que, à périmètre constant, l'aire varie. Dans l'approche de la notion d'aire indépendamment de la mesure (voir Brochure 48 I.R.E.M Paris-Sud), nous avions fabriqué des surfaces de périmètres différents et de même aire, nous avions peu étudié la situation symétrique (même périmètre, aires différentes) faute de moyens pour apprécier la variation d'aire ou de connaissances géométriques suffisantes. Nous sommes maintenant en mesure de le faire au moins dans le cas des rectangles.

V.2.1. Recherche de rectangles ayant un périmètre donné. Etude des couples (a, b)

a) Organisation de la classe et consigne

Les élèves sont par équipes de quatre.

A chaque équipe on donne une valeur pour le périmètre. Par exemple 20 cm, 14 cm, 8 cm, 24 cm, 30 cm, 18 cm, 15 cm, 25 cm.

Consigne. Chacun cherche 4 ou 5 rectangles ayant le périmètre donné. Tous les rectangles de l'équipe doivent être différents.

Chaque équipe rassemble ses résultats dans un tableau

a	b	P

et chaque élève représente graphiquement les couples (a, b) obtenus.

b) Analyse de la tâche

Pour chaque valeur de a choisie, on peut trouver une valeur de b correspondante à condition que $2a < P$. Pour leur recherche, les élèves ont intérêt à traduire la relation donnée ($P = 20$ par exemple) en une autre équivalente mais plus simple pour les calculs ($a + b = 10$ pour l'exemple choisi). Cette traduction des élèves est une étape importante dans l'économie des calculs et par suite dans le travail de recherche des enfants. On peut prévoir qu'elle ne sera pas immédiate pour beaucoup d'entre eux mais se fera après la recherche de quelques rectangles de la famille : il faut se rendre compte que la donnée de P revient à celle de $a + b$. Pour cela, l'habitude de désigner les quantités variables par des lettres est déterminante pour que les enfants se fassent une représentation efficace du problème. En effet, sur les relations numériques, il est clair que, par exemple, $2a + 2b = 20$ revient à $a + b = 10$.

La valeur de P choisie est une variable didactique de la situation : suivant que l'on choisit un nombre pair ou impair, un nombre entier ou non, on peut prévoir que la traduction de la consigne en $a + b = \frac{P}{2}$ se fera plus ou moins vite, que la recherche se fera plus ou moins rapidement.

On demande au moins une quinzaine de rectangles différents par équipe, donc toutes les équipes devront avoir recours aux fractions.

c) productions des élèves

Dans les classes de CM_1 et CM_2 observées, les élèves ont tous traduit la consigne en recherche de a et b avec $a + b = \frac{P}{2}$, certains immédiatement, d'autres après quelques productions par tâtonnements.

La première procédure des élèves est de se donner une dimension et de chercher l'autre par différence ou par test.

La plupart des élèves passent ensuite à une autre procédure : à partir d'un rectangle donné, enlever quelque chose à une dimension et l'ajouter à l'autre (ou le contraire).

Chaque groupe a produit des rectangles de dimensions non entières, au moins des demis, souvent des quarts, parfois d'autres fractions. A partir d'un des rectangles, ils en produisent d'autres. Deux procédures sont mises en oeuvre de façon importante :

. l'une est une traduction numérique d'un procédé géométrique de compensation

Exemple : $P = 18 \qquad a + b = 9$

$a = 5 \qquad b = 4$

$a = 5 + \frac{1}{2} \qquad b = 4 - \frac{1}{2}$

$a = 5 + \frac{1}{3} \qquad b = 4 - \frac{1}{3}$

$a = 5 + \frac{1}{4} \qquad b = 5 - \frac{1}{4}$

$a = 5 + \frac{1}{10} \qquad b = 5 - \frac{1}{10}$

$a = 5 - \frac{1}{10} \qquad b = 5 + \frac{1}{10}$ ....

. l'autre est plutôt issue du calcul. Elle consiste à chercher des solutions $a_1 + b_1 = 9 - 1 = 8$ et à distribuer $1 = \frac{n}{n}$ en $\frac{p}{n}$ et $\frac{q}{n}$ avec $p + q = n$.

Par exemple :

$a_1 = 4 \qquad b_1 = 4 \qquad\qquad a = 4 + \frac{1}{3} \qquad b = 4 + \frac{2}{3}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = 4 + \frac{2}{5} \qquad b = 4 + \frac{3}{5}$

$a_1 = 6 \qquad b_1 = 2 \qquad\qquad a = 6 + \frac{7}{8} \qquad b = 2 + \frac{1}{8}$

Autre exemple pour $P = 15 \quad a + b = 7 + \frac{1}{2}$ à partir de $a = 4 \quad b = 3 + \frac{1}{2}$, on fabrique

$$a = 4 + \frac{1}{4}\ ,\ b = 3 + \frac{1}{4} \qquad \text{parce que} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

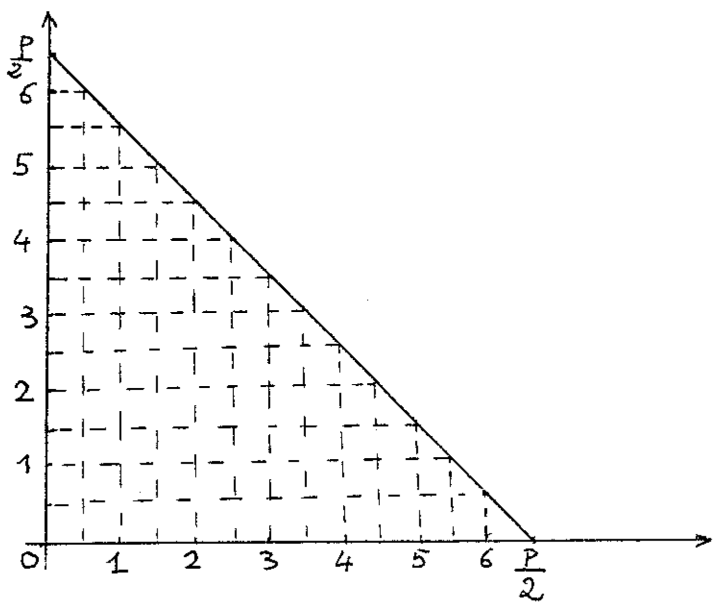
ou $\quad a = 4 + \frac{1}{2}\ ,\ b = 3$

ou $\quad a = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ ,\ b = 3 - \frac{1}{4}$

ou encore

$$a = 3 + \frac{2}{3}\ ,\quad b = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \text{parce que} \quad 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

En reportant les points sur le graphique, les enfants observent d'abord "un escalier à marches régulières", lequel est la traduction de la procédure de compensation utilisée systématiquement : Ils ont en général trouvé tous les rectangles de dimensions entières et souvent tous ceux qui ont un nombre entier de demis



Ils constatent l'alignement des points et proposent des arguments du type :

"On a un escalier : si on augmente a de 1, on diminue b de 1 , ce qu'on ajoute à a, il faut l'enlever à b."

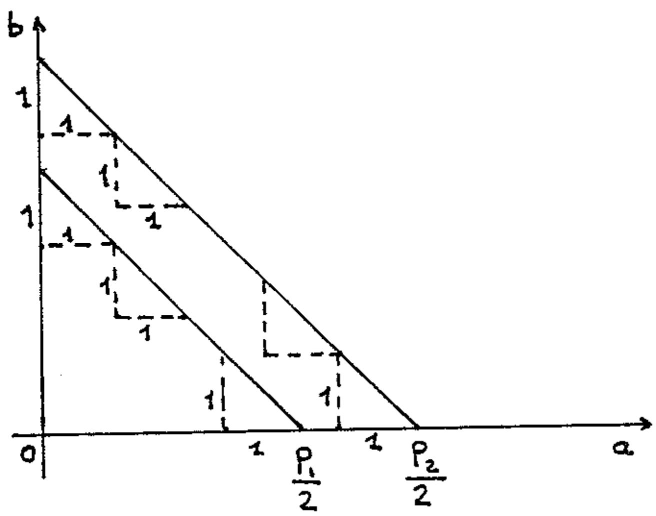
Le graphique est alors producteur d'une nouvelle information en suggérant de s'intéresser à des points situés sur le segment joignant deux points consécutifs d'un alignement répéré. C'est en particulier le cas des milieux des segments, de la forme AA' avec A de coordonnée (a, b) et A' de coordonnées (a + 1, b - 1). C'est ainsi une occasion d'homogénéiser l'information au niveau de la classe en complétant celle des élèves qui n'avaient pas trouvé tous les "demis".

d) Bilan

On récapitule les résultats : un tableau par valeur de P, un seul graphique.

La récapitulation des résultats permet de pointer le fait que chaque équipe a traité le même problème avec des valeurs numériques de P différentes. On a des graphiques qui se ressemblent et qui sont simplement décalés. Ils ont tous la même propriété. En effet, quelle que soit la valeur choisie pour P, si a et b sont les dimensions* d'un rectangle de périmètre P ($a + b = \frac{P}{2}$), alors (a + 1, b - 1) sont les mesures des dimensions d'un autre rectangle de même périmètre.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que les droites correspondant à des valeurs différentes de P ont même pente, elles sont parallèles.



* Par abus de langage lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il nous arrive dans le texte d'identifier une grandeur (longueur ou aire) et sa mesure pour une unité fixée.

Remarque : Au collège, on pourra dire que toutes les droites ont pour pente - 1.

On peut même prolonger les relations numériques $a + b = K$ aux nombres négatifs mais alors, elles ne représentent plus le problème géométrique pour des valeurs < 0 de a ou b.

V.2.2. Calcul de l'aire

Objectif :

Extension du calcul de l'aire d'un rectangle au cas où les dimensions ne sont pas entières. Renforcement de la situation précédente. (Cf.V.1.)

a) Consigne

Pour chacun des rectangles trouvés de périmètre P, calcul de l'aire. Vous vous partagez le travail au sein de l'équipe, et vous organisez vos résultats. Chacun représente graphiquement les couples (a, A).

b) Analyse de la tâche

Parmi les rectangles trouvés par l'équipe, il en est dont les dimensions a et b sont fractionnaires. Les élèves sont tous confrontés au produit de nombres non entiers.

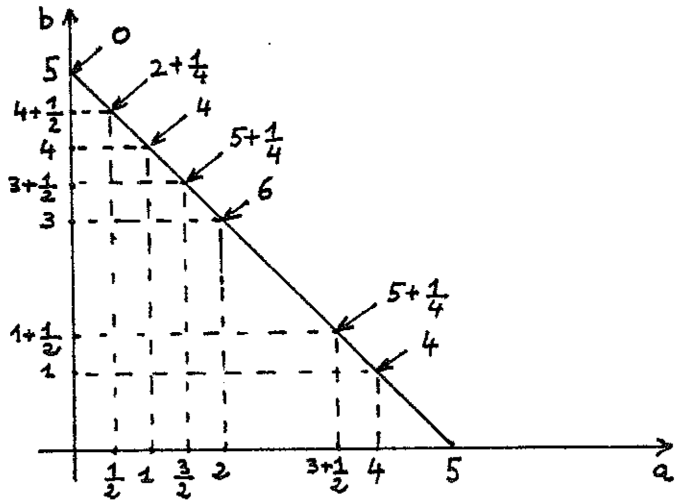
En principe ils l'ont déjà été au cours de la situation précédente (Cf. V.1.). Il s'agit d'un renforcement des méthodes de calcul.précédemment établies. Les élèves peuvent recourir au dessin chaque fois que c'est nécessaire.

Une manière d'organiser les résultats consiste à adjoindre au tableau précédent (a, b, P) une colonne pour A. On obtient ainsi un tableau à 4 colonnes. Une autre manière consiste à porter les valeurs de A sur le graphique des couples (a, b) correspondant aux rectangles de périmètre P, déjà construit.

Le tableau "montre" que l'aire n'est pas constante, mais il ne dit rien sur la façon dont elle varie.

Le report des valeurs de A sur le graphique des couples (a, b) tels que $a + b = \frac{P}{2}$ permet de visualiser cette variation :

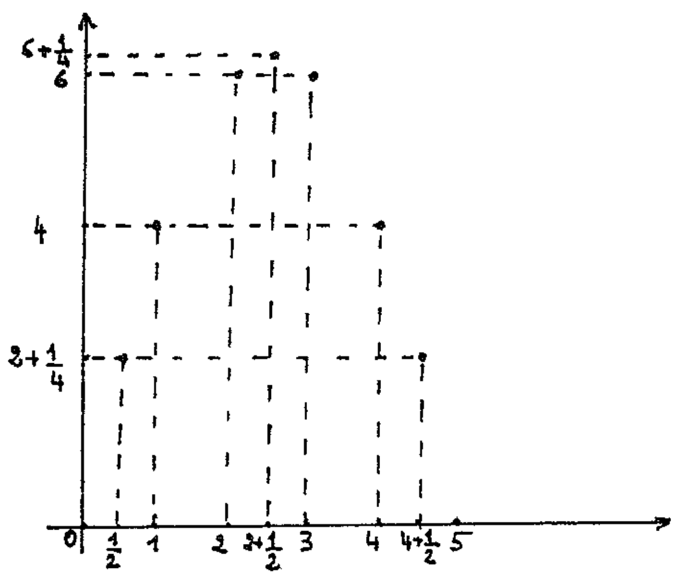
Si le point M(a, b) représente un rectangle de la famille, M'(b, a) représente le "même" rectangle. L'aire augmente quand la différence entre a et b diminue.



Exemple P = 10

c) <u>Exploitation de la représentation graphique des couples (a, A)</u>

Les élèves portent en abscisse une dimension (l'autre est alors connue aussi) et en ordonnée l'aire du rectangle. Pour préciser le tracé de la courbe, ils sont incités à faire des calculs intermédiaires.



Exemple P = 10

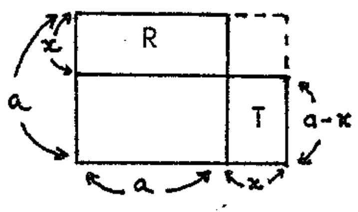
Quand a augmente, A augmente puis diminue.

On a une symétrie : les points correspondants représentent des rectangles de mêmes dimensions.

Nouveau problème :

La représentation graphique suggère que, parmi tous les rectangles de la famille, c'est le carré qui aura la plus grande aire. Comment contrôler cette conjecture ?.

En réponse à cette question qui leur était posée, des élèves de CM_2 ont fourni un argument géométrique :



Si, à partir du carré de la famille de dimensions (a, a), on fabrique un rectangle de la famille, on doit enlever à un côté ce qu'on ajoute à l'autre. On enlève un rectangle R d'aire plus grande que le rectangle T qu'on ajoute. Il nous manque le petit carré de dimensions (x, x).

Pour les élèves du Collège, on peut remarquer au passage que $(a + x) \times (a - x) = a^2 - x^2$.

d) Institutionnalisation du calcul de l'aire

Les procédures du calcul de l'aire sont exposées au cours du bilan sur de nombreux exemples. Chaque élève a eu à faire le calcul dans le cas où a et b sont fractionnaires au cours de cette séquence.

Après ces exercices, l'enseignant est en mesure d'institutionnaliser la technique de la multiplication en tableau.

Par exemple : $(4 + \frac{7}{10}) \times (5 + \frac{1}{2})$

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{4}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$

Résultat :

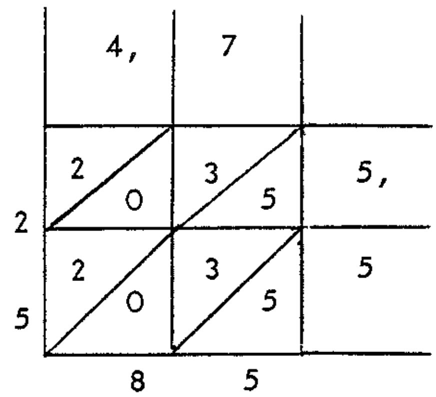
$$20 + \frac{35}{10} + \frac{4}{2} + \frac{7}{20} =$$

$$= 20 + 3 + \frac{5}{10} + 2 + \frac{7}{20} =$$

$$= 25 + \frac{5}{10} + \frac{7}{20} = 25 + \frac{17}{20}$$

La disposition pourra se perfectionner quand on aura affaire à des nombres décimaux.

4	$\frac{7}{10}$	
20	$\frac{35}{10}$	5
$\frac{20}{10}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{5}{10}$



25,85

V.3. RECHERCHE DE RECTANGLES D'AIRE DONNEE. COLORIAGE D'UN QUADRANT DU PLAN GRADUE

Objectifs

- Calcul de produits de fractions, et en particulier de fractions décimales.

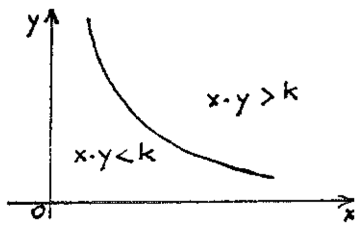
- Fonctionnement de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

- Recherche de solutions exactes ou approchées à des équations de la forme $a.x = b$

V.3.1. CHOIX DU PROBLEME

Un rectangle est caractérisé par ses deux dimensions. Une unité de longueur u étant choisie, un rectangle de dimensions au, bu est représenté dans le plan gradué par les points de coordonnées (a,b) et (b,a). Réciproquement à tout point de coordonnées a, b positives correspond un rectangle de dimensions au, bu.

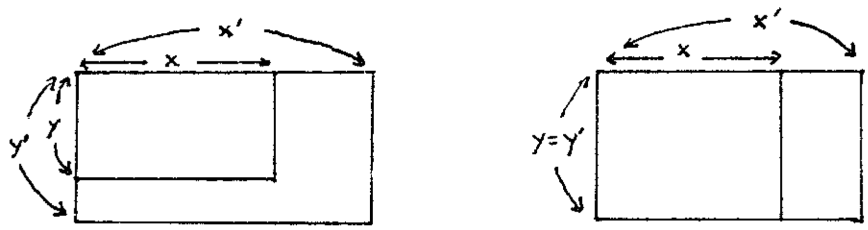
Appelons s l'unité d'aire adaptée à u. On se donne un nombre k quelconque positif (pour les élèves on choisira des valeurs entières pour k). La famille des rectangles d'aire ks est représentée par l'ensemble des couples (x,y) tels que x. y = k. Ils forment une courbe frontière entre deux régions : l'ensemble des couples (x,y) avec x.y < k correspondant aux rectangles d'aire A < ks et l'ensemble des couples (x,y) avec xy > k correspondant aux rectangles d'aire A > ks.



Cette description de la situation respecte le rôle symétrique des deux dimensions d'un rectangle.

Elle traduit du point de vue numérique, la compatibilité entre la multiplication des nombres positifs et l'ordre

Du point de vue géométrique, cette compatibilité correspond à l'inclusion des surfaces.

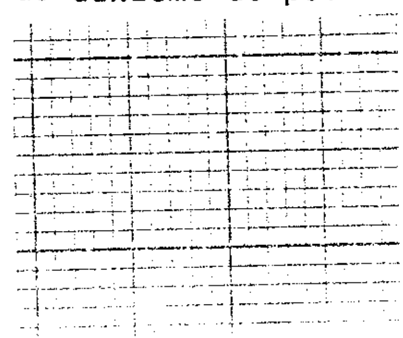


On choisit de demander aux élèves de colorier toute une région du plan plutôt que rechercher seulement les rectangles d'aire fixée pour augmenter les moyens à la disposition des élèves ; en particulier la recherche pour approximations et encadrements en utilisant la compatibilité de l'ordre et de la multiplication ou encore l'inclusion des rectangles suivant le cadre utilisé.

V.3.2 ORGANISATION DE LA CLASSE ET CONSIGNE

Travail individuel ou en équipes de 2.

Chaque élève dispose d'une feuille de papier quadrillé. Il est commode d'utiliser du papier quadrillé au dixième de pouce (papier pour ordinateur)



On peut aussi utiliser du papier quadrillé au $\frac{1}{2}$ cm (en prenant 5 carreaux pour 1 unité) ou du papier millimétré (un peu fin pour les élèves de l'école élémentaire).

Consigne

Vous tracez des axes et vous les graduez (1 gros carreau pour une unité). Chaque point (x,y) du quadrillage représente un rectangle de dimensions x cm et y cm.

Vous allez colorier tous les points du quadrillage avec la consigne suivante :

. Si l'aire du rectangle est supérieure à 24 cm^2, vous marquez un point rouge

. Si l'aire du rectangle est inférieure à 24 cm^2, vous marquez un point bleu.

. Si l'aire du rectangle est égale à 24 cm^2, vous marquez un point noir.

En résumé

si $\mathcal{A} > 24$ cm^2 point rouge
si $\mathcal{A} < 24$ cm^2 point bleu
si $\mathcal{A} = 24$ cm^2 point noir

V.3.3. ANALYSE DE LA TACHE

Connaissant les dimensions d'un rectangle, les élèves savent en principe calculer son aire, du moins pour des valeurs entières des dimensions et pour certaines fractions. De toute façon, ils savent que pour calculer l'aire ils doivent faire le produit des dimensions.

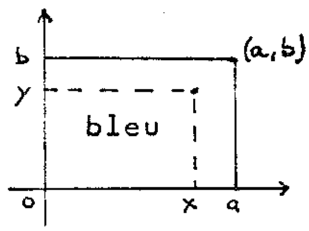
Une procédure (P_1) consiste à choisir un point sur le quadrillage, lire les coordonnées, a, b, effectuer le produit a. b, comparer à 24 et colorier.

Il y a beaucoup de points à colorier, donc beaucoup de calculs à faire, même si, dans un premier temps, des élèves se limitent aux points à coordonnées entières (une centaine). La tâche incite donc les élèves à trouver des moyens plus rapides.

Si on connait la couleur d'un point (a,b), on peut connaitre la couleur des points de toute une zone. En effet :

- si (a,b) est bleu, cela veut dire que le rectangle de dimensions (a,b) a une aire inférieure à 24 cm^2. Cela entraîne que si $x \leqslant a$ et $y \leqslant b$, le rectangle de dimensions (x,y) a une aire inférieure ou au plus égale à celle du rectangle (a,b).

Le point (x,y) doit aussi avoir la couleur bleue. Cela permet de colorier toute la zone en bas et à gauche du point (a,b). Numériquement, cela correspond à dire que $x.\ y < a.\ b < 24$



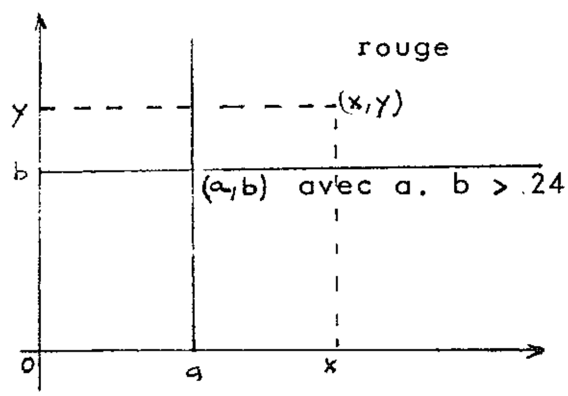
avec a.b > 24

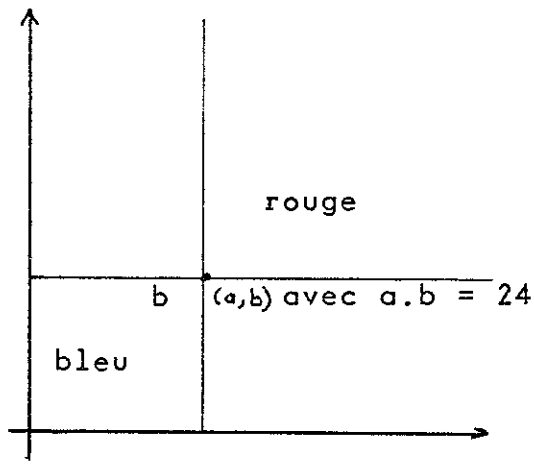
- si (a,b) est rouge, le rectangle de dimensions (a,b) a une aire supérieure à 24 cm^2.

Si $x > a$ et $y > b$, le rectangle de dimensions (x,y) a une aire supérieure ou au plus égale à celle du rectangle (a,b)

$x.\ y > a.\ b > 24$

Le point (x,y) doit être rouge. Cela permet de colorier toute la zone en haut à droite de (a,b)





- si (a,b) est noir, le rectangle de dimensions (a,b) a une aire égale à 24 cm^2.

Soit (x,y) un point représentant un rectangle de dimensions (x,y).

Si $x \leqslant a$ et $y < b$, ou $x < a$ et $y \leqslant b$, le rectangle de dimensions (x,y) a une aire inférieure à 24 cm^2 ; (x,y) est un point bleu.

si $x \geqslant a$ et $y > b$, ou $x > a$ et $y \geqslant b$, le rectangle de dimensions (x,y) a une aire supérieure à 24 cm^2 ; (x,y) est un point rouge.

On peut dire que le point noir est séparateur entre les points (a,y) avec $y > b$ qui sont rouges et les points (a,y) avec $y < b$ qui sont bleus. (autrement dit rouge au-dessus, bleu en dessous).

De même il est séparateur entre les points (x,b) avec $x < a$ qui sont bleus et les points (x,b) avec $x > a$ qui sont rouges (autrement dit bleu à gauche et rouge à droite).

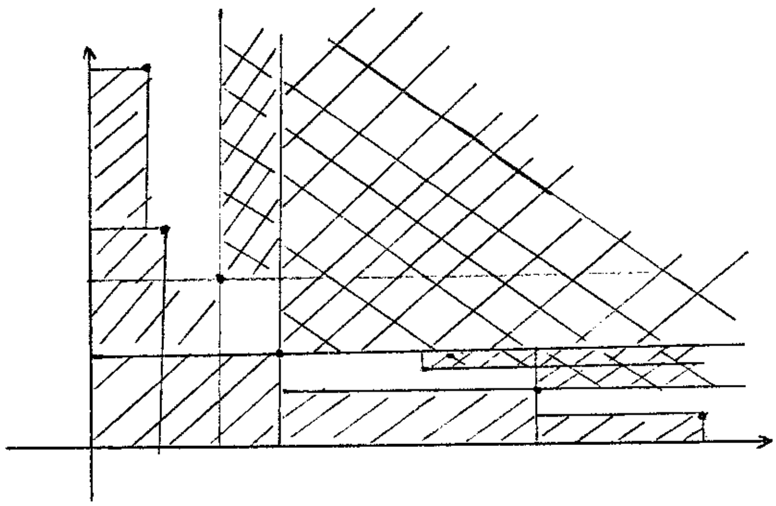
La connaissance d'un point (a,b) noir permet de colorier deux zones : en bas à gauche en bleu, en haut à droite en rouge.

Selon les valeurs numériques, les points noirs seront plus ou moins faciles à repérer.

L'intérêt de 24 est qu'il a beaucoup de diviseurs qui donnent des points noirs à coordonnées entières.

La tâche est maintenant de choisir les points tests. Par exemple, il n'est pas très efficace de balayer régulièrement le quadrillage. Les points noirs donnent plus de renseignements, mais il n'est pas très facile d'en trouver beaucoup.

On a toutefois intérêt à travailler au voisinage de ces points c'est à dire à chercher des rectangles dont l'aire est voisine de 24 cm^2 pour faire les tests. C'est ce qui permet de réduire la zone d'incertitude



V.3.4. PROCEDURES OBSERVEES ET BILAN

Tous les élèves commencent par la procédure P1 (choix d'un point (a,b), calcul de a.b, coloriage).

Suivant les élèves les points sont pris

- un peu partout
- de manière à se ramener à une variable (sur une horizontale, sur une verticale, sur la diagonale a = b).

Pour des raisons d'efficacité, les procédures évoluent.

Les élèves mettent en oeuvre le fait que l'aire augmente quand les deux dimensions augmentent ou quand l'une seulement augmente mais que l'autre reste fixe. Cela conduit à la procédure :

P_2: Coloriage par secteur (ou par ligne verticale ou horizontale) à partir d'un point colorié.

En haut et à droite d'un point rouge, tous les points sont rouges.

En bas et à gauche d'un point bleu, tous les points sont bleus.

Remarque 1

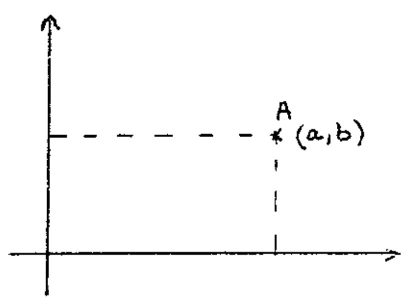
Quand les élèves parlent de "tous" les points en haut, à droite... ce "tous" peut prendre des significations différentes selon les élèves et, pour un même élève, évolue au cours de la situation. Il peut faire référence :

- soit à tous les nombres connus de l'élève ;
- soit aux noeuds du quadrillage ;
- soit seulement aux entiers.

Dans ce dernier cas, la consigne de colorier tous les points du quadrillage oblige à considérer d'autres nombres que les entiers. A cette étape, les quadrillages se couvrent rapidement de hachures. La zone d'incertitude se rétrécit.

Remarque 2

Certains élèves confondent le rectangle représenté par le point A de coordonnées (a,b) et le rectangle délimité sur le quadrillage par les axes et les parallèles aux axes menant au point (a,b) et colorient ce rectangle de la même couleur que le point A.



On ne repère pas cette erreur si A est bleu, en revanche elle amène à des incohérences si A est rouge et soulève les questions :

- Un point peut-il être à la fois bleu et rouge ?
- Un point rouge peut-il être entouré de points bleus ?
- Un point bleu peut-il être entouré de points rouges ?

Certains élèves se rendent compte que les points noirs donnent plus de renseignements, et évoluent vers les procédures suivantes (P_3, P_4).

P_3 Réduction de la zone d'incertitude :

Coloriage par secteur à partir d'un point situé entre un point bleu et un point rouge (approximation géométrique de la courbe à l'aide du calcul).

P_4 Recherche systématique de points noirs par résolution algébrique

On choisit a (par exemple a = 7).
on cherche à résoudre a X x = 24 (ici 7 X x = 24 en décrivant ou non sous forme de fraction la solution, en la déterminant soit par division, soit par test et encadrements.

Cette procédure aboutit à déterminer un point noir sur chaque verticale repérée.

Ces procédures font l'objet d'un compte-rendu collectif qui permet de pointer l'intérêt qu'il y a à repérer les points noirs. Il permet aussi de rejeter la possibilité de trouver des points bleus entourés de points rouges (ou réciproquement).

L'argument fourni dans les classes observées est le suivant "un point rouge ne peut pas être en-dessous d'un point bleu sinon on aurait un rectangle d'aire plus grande avec des côtés plus petits".

Ce bilan aboutit à un nouveau problème : rechercher les points noirs, autrement dit les rectangles d'aire 24 cm^2.

Les procédures des élèves sont de quatre types :

- fixer une des coordonnées et faire varier l'autre en recherchant le point noir par encadrement ;

Exemple : a = 18

18 X 1 = 18 bleu

18 X 2 = 36 rouge

18 X (1 + 1/2) = 27 rouge

18 X (1 + 1/4) = 22 + 1/2 bleu

" je vais chercher 18 X (1 + 1/4 + 1/8)..".

Remarque : Dans l'une des classes observées, parmi les élèves ayant utilisé cette procédure, aucun n'a posé la division 25 : 18

Dans une autre classe, certains ont proposé comme réponse 24/18 et ont tout de suite ajouté "c'est 1 et quelque chose" et ont déclenché une procédure comme ci-dessus. Dans une 6e au contraire, les élèves ont utilisé en majorité la division. Cela n'a rien d'étonnant, les élèves du CM ne connaissaient pas encore les nombres décimaux et donc ne savaient pas "pousser la division" alors que les élèves de 6e avaient l'habitude de cette pratique ;

- choisir le milieu du segment joignant deux points noirs.

exemple : 6 X 4 = 24 ; 8 X 3 = 24

7 X (3 + 1/2) = ?

On obtient un point rouge, le segment qui joint deux points noirs n'est pas constitué uniquement de points noirs. Les points noirs trouvés ne sont pas sur une droite, ils semblent se répartir sur une courbe dont le procédé ci-dessus permet de préciser la forme.

- compenser à partir d'un point noir

exemple : 4 X 6 = 24

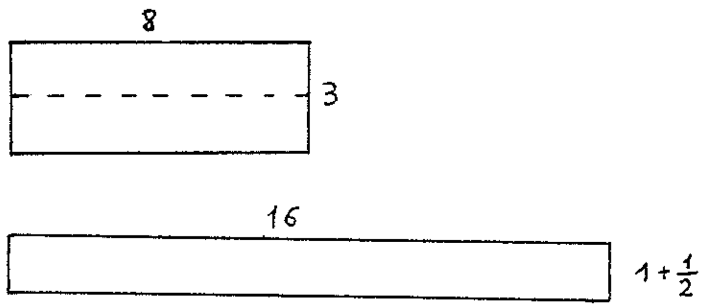
"je vais augmenter un peu 4, diminuer 6" :

$(4 + \frac{1}{2}) \times (5 + \frac{1}{2})$ trop grand

$(4 + \frac{1}{2}) \times (5 + \frac{1}{4})$ trop petit

$(4 + \frac{1}{2}) \times (5 + \frac{1}{3}) = 24$

- fabriquer de nouveaux rectangles d'aire 24 à partir d'un rectangle d'aire 24 :



"je coupe en deux, je mets les deux rectangles bout à bout et je recommence".

Les élèves ont explicité au bilan précédent que l'aire croît quand l'une des dimensions augmente et que l'autre reste fixe ou a fortiori quand les deux dimensions augmentent. Tous s'appuient sur ce fait d'expérience pour se convaincre que sur chaque ligne horizontale ou verticale il y a au plus un point noir. Une manière d'en assurer l'existence est de fournir une valeur numérique pour l'autre dimension. Ce calcul a été fait dans de nombreux cas. Dans les autres cas, la conviction venait de ce qu'on ne pouvait pas passer de $a \times b < 24$ à $a \times b > 24$ sans passer exactement par 24.

Bilan

Le bilan permet de pointer que :

- les points (a,b) correspondant aux rectangles d'aire 24 forment la frontière entre les points bleus correspondant aux rectangles d'aire inférieure à 24 et les points rouges correspondant aux rectangles d'aire supérieure à 24.

- sur chaque verticale, il y a un seul point noir : en dessous on n'a que des points bleus, au-dessus, on n'a que des points rouges.

- de façon analogue, il y a un point noir et un seul sur chaque horizontale.

- pour une valeur de a choisie, (par exemple $a = 7$),
La valeur de b correspond au point noir est $b = \frac{24}{a}$ (ex $\frac{24}{7}$).

Pour certaines valeurs de a ($a = 2$, $a = 4$, $a = 5$, $a = 10$) il est facile de repérer le point (a,b). Pour d'autres ($a = 7$), c'est plus difficile, on va chercher à l'encadrer.

Dans tous les cas, $\frac{24}{a}$ prend une nouvelle signification : ce n'est plus seulement $24.\frac{1}{a}$, c'est la solution de $a.x = 24$

C'est la mesure en cm d'une des dimensions d'un rectangle d'aire 24 cm^2 et dont l'autre dimension est a cm ce qui se traduit dans le cadre numérique par :

$\frac{24}{a}$ est le nombre qui, multiplié par a, donne 24.

Ces résultats sont réutilisés au cours d'une séquence suivante où les élèves travaillent par équipe avec des valeurs différentes pour l'aire (voir VI.1)

Réponse d'Elsa

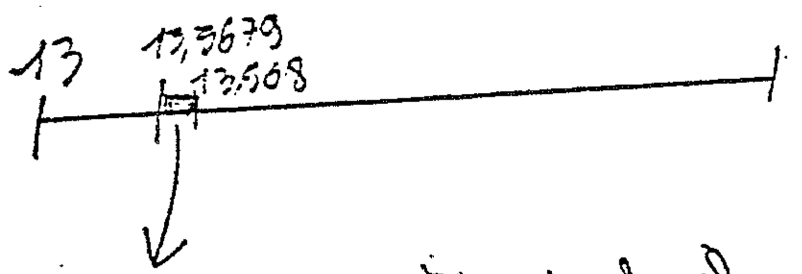
② Y a-t-il un nombre x tel que

$13,5679 < x < 13,568$

Oui il y en a beaucoup a car derrière le 7 et le 9 de 13,5679 nous pouvons ajouter tous les chiffres que l'on veut du moment que tous les chiffres qui sont derrière le 7 et le 9 n'arriveon arriveront jamais à donner un résultat de 8 millièmes

exemples : 13,56791286809 ; 13,56790806090 4.

Réponse de Bastien



dans ce petit rectangle il y a des millions de x :

13,56791
13,56792
93
94
95
96 etc...

CHAPITRE VI

APPROXIMATIONS DECIMALES
PASSAGE A L'ECRITURE A VIRGULE

VI.1. RECHERCHE DE RECTANGLES D'AIRE DONNEE

Objectifs

- Réutilisation des résultats précédents (V.3)
- Préparation à la séquence suivante :

Recherche d'un carré dans une famille de rectangles d'aire donnée.

Organisation de la classe et consigne

Les élèves sont groupés par équipes de 4. On donne à chaque équipe une valeur A pour l'aire.(1)

Consigne : Rechercher le plus possible de rectangles d'aire A
On peut s'aider de la représentation graphique des couples (a,b) où a et b sont les dimensions des rectangles.

Commentaire : Le maître peut choisir de rester dans le même champ de valeurs numériques (exemples : A = 15, 16, 20, 36,49, 27) ou en sortir (exemples : A = 450, 154, 324, 441, 616, 1232).

---

(1) Par abus de langage, on notera dans la suite de la même manière l'aire et sa mesure qu'avec une unité choisie, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

L'important est que parmi ces nombres, figurent des carrés et des nombres qui ne sont pas des carrés.

<u>Procédures des élèves</u> : Les procédés systématiques de calcul se développent pour obtenir de nouveaux rectangles à partir d'un rectangle déjà trouvé : diviser une mesure par un nombre, multiplier l'autre mesure par le même nombre (cette procédure numérique généralise la procédure géométrique qui consiste à découper un rectangle suivant un axe de symétrie, à mettre bout à bout les deux morceaux de façon à fabriquer un nouveau rectangle dont on mesure ou on calcule les dimensions).
Ce procédé peut amener les élèves à sortir du champ numérique qui leur est familier et à s'interroger sur sa validité. Exemple $(24,1)$ $(72, \frac{1}{3})$... $(72 \times 1000, \frac{1/3}{1000})$. La question du sens de $\frac{1/3}{1000}$ peut se poser et recevoir ou non une réponse selon les acquis des élèves.
La représentation graphique des rectangles déjà trouvés incite les élèves à chercher d'autres points intermédiaires pour préciser le tracé de la courbe. Suivant leurs acquis antérieurs, les élèves peuvent procéder par test ou par division. S'ils privilégient le cadre graphique, ils vont choisir un point situé entre deux points déjà marqués, repérer les coordonnées, comparer l'aire du rectangle qu'il représente à l'aire donnée. S'ils privilégient le cadre numérique, les élèves vont essayer de résoudre $a \times x = A$ soit par tests numériques, soit par division de A par a.
Au bilan, on confrontera les procédures et les résultats obtenus.

<u>Question</u> : Dans chacune de ces familles de rectangles, y-a-t-il un carré ?

Dans certaines familles de rectangles d'aire A, les élèves ont trouvé un carré en produisant un nombre n tel que $n.n = A$.

Par exemple $6 \times 6 = 36$, $18 \times 18 = 324$, $21 \times 21 = 441$.

Dans d'autres familles, ils n'en ont pas trouvé.

La question reste ouverte et fera l'objet de la séquence suivante.

VI.2. RECHERCHE DE RECTANGLES D'AIRE 27 cm^2

On reprend au niveau de toute la classe la consigne de coloriage avec A = 27 (cfV.3.2).

Les élèves peuvent utiliser les résultats trouvés par l'équipe qui s'occupait de cette valeur,ou en trouver d'autres.

Le coloriage les amène à rechercher les points noirs, c'est à dire les rectangles d'aire 27 cm^2.

Cette situation a un double objectif :

- d'une part servir de renforcement aux situations précédentes de calcul sur les fractions.
- d'autre part fournir suffisamment d'informations numériques et graphiques pour aborder convenablement la situation de recherche du carré d'aire 27 cm^2 (cf VI.3)

VI.3 RECHERCHE D'UN CARRE D'AIRE 27 cm^2

Objectif

- Utilisation des fractions dans un problème d'approximation.
- Avantage des fractions décimales pour faciliter les calculs.
- passage à l'écriture à virgule.

VI.3.1. OU L'ON POSE LE PROBLEME

Le maître reprend collectivement la question restée en suspens : "Parmi les rectangles d'aire 27 cm^2, y-a-t-il un carré ?".

Deux conceptions se manifestent à travers les réponses des élèves :

a) 5 X 5 = 25, 6 X 6 = 36, quand le côté augmente de 5 à 6 cm, l'aire passe de 25 cm^2 à 36 cm^2, il doit bien y avoir un moment où elle passe par 27.

Citons des remarques d'élèves :

"Entre 5 et 6 c'est pas le vide il y a quand même des nombres".

"Il y a des nombres fractionnaires, on mettrait peut-être des jours ou des années mais on en trouverait toujours un".

b) On ne sait pas, il faudrait trouver un nombre a avec a X a = 27

"Je crois qu'il y en aura un dans les fractions. Seulement, je le croirai quand je serai sûre et que j'aurai vérifié".

"il faut un nombre, multiplié par le nombre, égale 27".

Il n'y a pas de moyen de trancher entre ces deux conceptions pour le moment puisqu'il n'y a pas de nombre rationnel qui réponde à la question : la mesure cherchée est un nombre irrationnel qu'on peut seulement approcher par des suites de rationnels.

On est conduit à poser différemment le problème:

IV.3. 2. "TROUVER DES CARRES D'AIRE AUSSI PROCHE QUE POSSIBLE DE 27 cm^2

Organisation de la classe

Les élèves travaillent par équipes de 2 ou 4 élèves.

Ils disposent des informations numériques et des graphiques précédemment établis.

Consigne

Trouver des carrés d'aire aussi proche que possible de 27 cm^2

Analyse de la tâche

. Pour des élèves qui disposent déjà des nombres décimaux et de la division dans les décimaux (ce n'est pas le cas ici mais c'est le cas dans une classe de 6e) une procédure possible consiste à recourir à la division : on part d'une valeur approchée a, par exemple $a = 5$, on cherche b tel que $5.b = 27$
$b = 27 : 5 = 5{,}4$
5 est trop petit parce que $5 \times 5 < 27$
5,4 est trop grand parce que $5 \times 5{,}4 = 27$, donc on sait que $5{,}4 \times 5{,}4 > 27$ sans faire l'opération. On peut essayer la moyenne entre 5 et 5,4.

D'un point de vue mathématique cette procédure est très efficace : si on la poursuit, on construit une suite de valeurs approchées qui converge très rapidement (on double le nombre de décimales exactes à chaque fois).

Dans une classe de 6eme, une élève s'est engagée dans cette procédure. Elle a trouvé un premier encadrement, essayé la valeur moyenne, mais n'a pas pu poursuivre le même processus qui conduisait à la construction d'une suite numérique définie par récurrence.

Elle s'est ralliée à la procédure majoritaire décrite ci-dessous.

. Pour des élèves qui ne disposent pas de la division dans les décimaux la seule procédure possible est celui de recherche par essais et encadrements : on cherche x tel que $x.x = 27$

Si on a trouvé a et b avec $a.a < 27$ et $b.b > 27$, on a $a < x < b$.

On prend c tel que $a < c < b$, on calcule $c.c$, si $c.c < 27$, alors $c < x < b$ si $c.c > 27$, alors $a < x < c$

On améliore l'encadrement à chaque essai. Ce procédé amène à construire deux suites u_n et v_n avec $u_n.u_n < 27$, $v_n.v_n > 27$, $u_n < x < v_n$ et $v_n - u_n$ de plus en plus petit.

. Le graphique peut aider les élèves dans le choix des valeurs à tester. On peut aussi attendre qu'il ait un rôle dans l'évolution des conceptions des élèves au sujet de l'existence du nombre cherché : la solution, si elle existe, se trouve à l'intersection de la "courbe" représentant les rectangles d'aire 27 cm^2 et de la droite représentant les carrés.

. Evolution dans le choix des valeurs :

La procédure efficace consiste à partager l'intervalle d'incertitude (entre u_n et v_n) en deux.

Cela conduit à des calculs avec les fractions (produits, comparaisons, recherche du milieu de l'intervalle $[u_n, v_n]$).

Les calculs qui portent sur des demi-sommes $\frac{u_n + v_n}{2}$ se compliquent rapidement (par exemple $\frac{a}{8}\cdot\frac{a}{8} = \frac{a^2}{64}$)

Comme on a le choix des valeurs comprises entre un et v_n, et que les calculs sur les fractions décimales sont plus faciles, on a intérêt à subdiviser l'intervalle $[u_n, v_n]$ non pas en deux mais en dix. On a alors le choix entre 9 valeurs intermédiaires. Mais on peut restreindre ce choix en prenant une nouvelle valeur test plutôt plus près de u_n ou de v_n selon que ${u_n}^2$ ou ${v_n}^2$ est plus près de 27.

Ce faisant on admet implicitement que la fonction $x \to x^2$ est continue et croît à peu près régulièrement.

<u>Procédures des élèves dans les classes observées.</u>

Ils procèdent par encadrements : ils nomment la mesure du côté du carré, x par exemple, et cherchent à encadrer x.

$5 \times 5 = 25$ $\qquad$ $6 \times 6 = 36$

$5 < x < 6$

Le problème est de s'approcher le plus possible d'un x tel que : $x \times x = 27$.

<u>1ère étape</u> : partager en deux l'intervalle d'incertitude. On essaie :
$5 + \frac{1}{2}$, $5 + \frac{1}{4}$, $5 + \frac{1}{8}$. On a $5 + \frac{1}{8} < x < 5 + \frac{1}{4}$

Arrivés au 1/16, les calculs deviennent compliqués. Le report graphique permet de situer la recherche : le carré cherché doit être sur la "droite des carrés", parmi l'ensemble des couples (a,a) mais aussi parmi les rectangles d'aire 27, donc correspond toujours à un point noir situé entre les points bleus et les points rouges. A mesure que la recherche se précise, on agrandit l'échelle de manière à grossir la zone critique et à mieux voir. Notons que certains élèves engagés dans la procédure numérique ne recourent plus au graphique.

<u>2ème étape</u> : passage aux $\frac{1}{10}$. Certains pensent qu'il est plus facile de calculer avec des $\frac{1}{10}$ et essaient $5 + \frac{1}{10}$, $5 + \frac{2}{10}$
$5 + \frac{1}{10} < x < 5 + \frac{2}{10}$

Le premier élève qui propose cet intervalle continue en testant : $5 + \frac{3}{20}$. C'est dire la pression du partage en deux. Son groupe continue à travailler avec $\frac{7}{40}$ et $\frac{15}{80}$

Nous assistons là à un conflit entre deux points de vue à prendre en compte si on veut progresser efficacement :

- simplifier les calculs d'où le choix des $\frac{1}{10}$;

- faire converger rapidement le processus de recherche du carré et donc couper en deux.

D'où le retour aux $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{15}{80}$ après l'essai de $\frac{2}{10}$.

On peut encore se servir du graphique.

<u>3ème étape</u> : passage aux $\frac{1}{100}$ et abandon du graphique. Après l'essai de $5 + \frac{15}{80}$, ou $5 + \frac{7}{40}$ déjà, les élèves passent aux $\frac{1}{100}$. A ce moment là, on a déjà agrandi deux fois la zone intéressante du graphique. On peut encore placer quelques points, mais on ne peut plus lire les intervalles et un nouvel agrandissement n'apporterait rien de plus. On avait abandonné depuis un moment les dessins de rectangles, le graphique restait un support et un guide pour le calcul, l'apport du graphique a maintenant aussi atteint sa limite. A partir des $\frac{1}{100}$, les élèves ont définitivement opté pour le calcul avec des fractions décimales (des centièmes, des millièmes), tant les calculs devenaient complexes. Ils ne font cependant pas leurs essais au hasard. Dans une classe où il s'agissait d'approcher x tel que x.x = 38, après avoir situé x entre :

$6 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$ et $6 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}$ un élève remarque que l'écart de $(6 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}) \times (6 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100})$ à 38 est plus faible que celui de $(6 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100}) \times (6 + \frac{1}{10} + \frac{7}{100})$ à 38. En conséquence, il annonce $6 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000}$ et décide d'essayer $6 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$

Avec les fractions décimales les calculs sont plus faciles, on s'approche de plus en plus de 38.

Il reste que l'écriture est très lourde lorsqu'il s'agit de calculer le carré d'un tel nombre et d'écrire le résultat :

6	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{4}{1000}$	
36	$\frac{6}{10}$	$\frac{36}{100}$	$\frac{24}{1000}$	6
$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{4}{10\ 000}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{36}{100}$	$\frac{6}{1000}$	$\frac{36}{10\ 000}$	$\frac{24}{100\ 000}$	$\frac{6}{100}$
$\frac{24}{1000}$	$\frac{4}{10\ 000}$	$\frac{24}{100\ 000}$	$\frac{16}{1000000}$	$\frac{4}{1000}$

$$36 + \frac{12}{10} + \frac{73}{100} + \frac{60}{1000} + \frac{44}{10000} + \frac{48}{100000} + \frac{16}{1000000}$$

$$37 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{10000} + \frac{8}{100000} + \frac{1}{100000} + \frac{6}{1000000}$$

$$37 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{6}{1000000}$$

VI.3.3. RECHERCHE D'UNE ECRITURE PLUS SIMPLE

Le maître propose aux élèves de chercher une écriture plus simple où on n'ait pas besoin d'écrire tous ces 0.

Procédure observée dans un CM_2 :

1ere étape : choix d'une écriture.

Les élèves proposent des écritures tendant d'abord à conserver le maximum d'informations. Trois retiennent l'attention :

* $\underset{\times 10}{\xleftarrow{\quad 37 \quad}} \Big| \underset{:\,10}{\xrightarrow{\quad 994896 \quad}}$

* 37.9.9.4.8.9.6 "Le point veut dire : diviser par 10"

* 37.994896 est l'écriture des calculettes.

Le maître donne alors la convention française de la virgule. L'écriture standard est adoptée.

2eme étape : Le rôle des zéros après la virgule.

Munis d'une écriture plus commode, et d'un ensemble de nombres plus facile à manipuler, on continue à approcher x.

Sabine essaie $6 + \frac{1646}{10000}$

Elle trouve $38 + \frac{229316}{100000000}$

Elle n'a pas utilisé la nouvelle écriture pour calculer mais elle veut écrire le dernier nombre en écriture à virgule.

Elle écrit 38, 229316 et énonce au fur et à mesure $\frac{2}{10}$, $\frac{2}{100}$, et arrive à $\frac{6}{1000000}$

Elle s'aperçoit qu'elle devrait arriver à $\frac{6}{100000000}$ et dit "je vais commencer de l'autre côté".

Elle part de $\frac{6}{100000000}$ et remonte jusqu'à $\frac{2}{1000}$, continue $\frac{0}{100}$, $\frac{0}{10}$ et écrit 38,00229316.

Mardi 18 Novembre
Valérie Y
Marie-Anne T

A

$a \times a = 5$

1) $2\ \frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$
2) $1\ \frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$
3) $2\ \frac{1}{10}$	$2\frac{1}{10} \times 2\frac{1}{10} = 4\frac{41}{100}$
4) $2\ \frac{2}{10}$	$2\frac{2}{10} \times 2\frac{2}{10} = 4\frac{84}{100}$
5) $2\ \frac{3}{10}$	$2\frac{3}{10} \times 2\frac{3}{10} = 5\frac{29}{100}$
6) $2\ \frac{23}{100}$	$2\frac{23}{100} \times 2\frac{23}{100} = 4\frac{9729}{10000}$
7) $2\ \frac{24}{100}$	$2\frac{24}{100} \times 2\frac{24}{100} = 5\frac{136}{100000}$
8) $2\ \frac{246}{1000}$	$2\frac{246}{1000} \times 2\frac{246}{1000} = 5\frac{44516}{1000000}$
9) $2\ \frac{236}{1000}$	$2\frac{236}{1000} \times 2\frac{236}{1000} = 4\frac{999696}{1000000}$

	2	$\frac{23}{100}$
2	4	$\frac{4600}{10000}$
$\frac{23}{100}$	$\frac{4600}{10000}$	$\frac{529}{10000}$

$4\ \frac{9729}{10000}$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4600 \\ 529 \\ 4600 \\ \hline 9729 \\ \hline 10000 \end{array}$$

	2	$\frac{24}{100}$
2	4	$\frac{4800}{10000}$
$\frac{24}{100}$	$\frac{4800}{10000}$	$\frac{536}{10000}$

$4\ \frac{10136}{10000}$

$5\ \frac{136}{10000}$

$$\begin{array}{r} 4800 \\ 4800 \\ 536 \\ \hline 10136 \end{array}$$

$2\ \frac{230}{1000} < a < 2\ \frac{240}{1000}$

CHAPITRE VII

TECHNIQUES OPERATOIRES SUR LES NOMBRES DECIMAUX *

VII. EXTENSION DU TABLEAU DE NUMERATION. NOMBRES DECIMAUX

Les élèves savent calculer avec des fractions décimales et les décomposer sous la forme $n + \frac{a1}{10} + \frac{a2}{100} + \dots + \frac{ak}{10^k}$ où n est un nombre entier qu'ils savent aussi décomposer en puissances de 10 :

$n = bo + 10b_1 + 100\ b_2 + \dots + 10^p\ b_p$.

Un même nombre décimal peut se décomposer de plusieurs manières selon les puissances de 10 et de $\frac{1}{10}$. Les écritures diffèrent par les valeurs des coefficients a_i ou b_j. Par exemple :

$$3258 + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000} = 3258 + \frac{14}{1000} + \frac{3}{10000} = 3250 + \frac{80}{10} + \frac{1}{100} + \frac{43}{10000}$$

---

* Il s'agit des nombres décimaux positifs. Certains résultats ou algorithmes restent valables pour les décimaux relatifs, d'autres sont à modifier.

Compte-tenu des résultats déjà établis sur les fractions décimales :

. $\frac{10}{10} = 10 \times \frac{1}{10} = 1$

. $\frac{10}{100} = 10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$

. $\frac{10}{1000} = 10 \times \frac{1}{1000} = \frac{1}{100}$ etc.....

Il est possible de n'utiliser comme coefficients des puissances de 10 et $\frac{1}{10}$ que des nombres compris entre 0 et 9 (inclus).

Ceci permet d'étendre le tableau de numération vers la droite aux puissances de $\frac{1}{10}$.

Pour obtenir l'écriture d'un nombre, on dispose les coefficients a_i et b_j (plus petits que 9) dans le tableau.

Exemple :

10 000	1000	100	10	u	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
	3	2	5	8	0	1	4	3
		1	0	2	1	0	7	

Dans le tableau sont écrits les nombres

. $3 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 8 + \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000}$

. $1 \times 100 + 0 \times 10 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000}$

Par convention on écrit 3258,0143 et 102,107

On obtient ainsi une écriture à l'aide des chiffres 0, 1, 2,....9. La virgule sert à repérer le chiffre des unités et par là même la partie entière (ici 3258 ou 102) et la partie décimale (0,0143 ou 0,107).

Dans tous les cas la partie entière s'écrit à l'aide d'un nombre fini de chiffres.

Les nombres décimaux sont ceux pour lesquels la partie décimale peut s'écrire à l'aide d'un nombre fini de chiffres.

Autrement dit ils ont une écriture sous forme de fraction décimale $\frac{n}{10^p}$ où n est un nombre entier et $10^p = \underbrace{10 \times 10 \ldots \times 10}_{p.\ \text{facteurs}}$

Ce qui précède correspond à la phase d'institutionnalisation de l'écriture à virgule : le maître fixe les conventions d'écriture en rappelant leur signification. Il fait suivre cette mise au point d'exercices de familiarisation (traduction d'une écriture dans l'autre, calculs variés)

Problème :

Parmi les fractions qu'on connait lesquelles représentent des nombres décimaux ?

Analyse de la tâche :

Pour les fractions dont le dénominateur est une puissance de 10, la réponse est immédiate.

D'autre part $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

donc $\frac{P}{2} = \frac{P \times 5}{10}$. Toutes les fractions "en demis" représentent des nombres décimaux.

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$

donc $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ et $\frac{P}{4} = \frac{P \times 25}{100}$, toutes les fractions "en quarts" représentent des nombres décimaux.

$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ toutes les fractions "en cinquièmes" représentent des nombres décimaux.

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} > \frac{3}{10}$.

On ne trouve pas 10 ni 100 dans la table des 3. Le lien avec la division de 1 par 3 permettra de répondre que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal, mais qu'on peut l'approcher d'aussi près qu'on veut avec des nombres décimaux.

De façon plus générale le lien entre la fraction $\frac{a}{b}$ et la division de a par b fournira des encadrements de $\frac{a}{b}$ par des nombres décimaux (cf chapitre III). Si la division "tombe juste", $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal.

VII.2 ADDITION

Le tableau de numération étendu aux puissances de $\frac{1}{10}$ permet d'étendre aux nombres décimaux la technique opératoire de l'addition.

Rappelons que les égalités $10 \times \frac{1}{10} = 1$, $10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$ ...

$\frac{5}{10} + \frac{6}{10} = \frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10}$... permettent de mettre en oeuvre le système des retenues, déjà connu dans le cas des nombres entiers.

VII.3 ORDRE - SOUSTRACTION

a) Etant donnés deux nombres décimaux x et y, peut-on toujours les comparer ?

- on sait comparer deux entiers
- on sait situer un nombre décimal entre deux entiers consécutifs. Cela permet de comparer :
  . un nombre décimal et un nombre entier
  . deux nombres décimaux ayant des parties entières différentes

- il reste à examiner le cas de deux nombres décimaux ayant même partie entière.

Pour comparer les nombres de dixièmes : il faut situer la partie décimale de chaque nombre entre "deux dixièmes consécutifs".

Par exemple : 0,679 compris entre $\frac{6}{10}$ et $\frac{7}{10}$ parceque $\frac{6}{10} = \frac{600}{1000}$ et $\frac{7}{10} = \frac{700}{1000}$ et $\frac{600}{1000} < \frac{679}{1000} < \frac{700}{1000}$. Autrement dit, $0,679 = \frac{6}{10} + u$ où $u < \frac{1}{10}$

Plus généralement, pour les nombres décimaux, lesquels peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule, le chiffre des dixièmes nous donne un encadrement en dixièmes. Par exemple : $0,6... = 0,6 + v$ avec $v < \frac{1}{10}$ donc $0,6 < 0,6... < 0,7$. Cela permet de conclure dans le cas où les 2 nombres n'ont pas le même chiffre des dixièmes : le plus petit nombre est celui qui a dans son écriture à virgule le plus petit chiffre pour les dixièmes.

Dans le cas où les deux nombres à comparer ont la même partie entière et le même chiffre des dixièmes, on est conduit à comparer les centièmes de façon analogue.

Cela donne un algorithme de comparaison des nombres décimaux positifs qui revient pour la comparaison des parties décimales à l'ordre alphabétique du dictionnaire.

Remarque : Comme dans le dictionnaire, on a $0,679 < 0,67918$

De la sorte on peut comparer deux nombres décimaux quelconques.

b) Lien avec l'addition et la soustraction

Etant donnés deux nombres décimaux différents x et y, si $y = x + z$ ($z > o$) alors $x < y$

Réciproquement si $x < y$, peut-on trouver z tel que $x + z = y$?

Si on interprète les nombres x, y comme des mesures de longueurs, ce qui est le cas si on situe les nombres sur un axe gradué d'origine O : x est représenté par un segment OA, y par un segment OB, alors z est la mesure du segment AB.

Ce faisant on étend la soustraction à tous les nombres décimaux : avec $y > x$, $y - x = z$

La recherche de z fera l'objet d'exercices variés et permettra d'étendre aux nombres décimaux la technique opératoire de la soustraction.

VII.4. MULTIPLICATION

Rappelons que nous avons présenté au chapitre V.2.2 une technique de la multiplication issue de l'additivité des aires : disposition en tableau

$$\left(25 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}\right) \times \left(18 + \frac{7}{100}\right)$$

25	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{100}$	
450	$\frac{72}{10}$	$\frac{54}{100}$	18
0	0	0	$\frac{0}{10}$
$\frac{175}{100}$	$\frac{28}{1000}$	$\frac{21}{10000}$	$\frac{7}{100}$

$$450 + \frac{72}{10} + \frac{54}{100} + \frac{175}{100} + \frac{28}{1000} + \frac{21}{10000} =$$

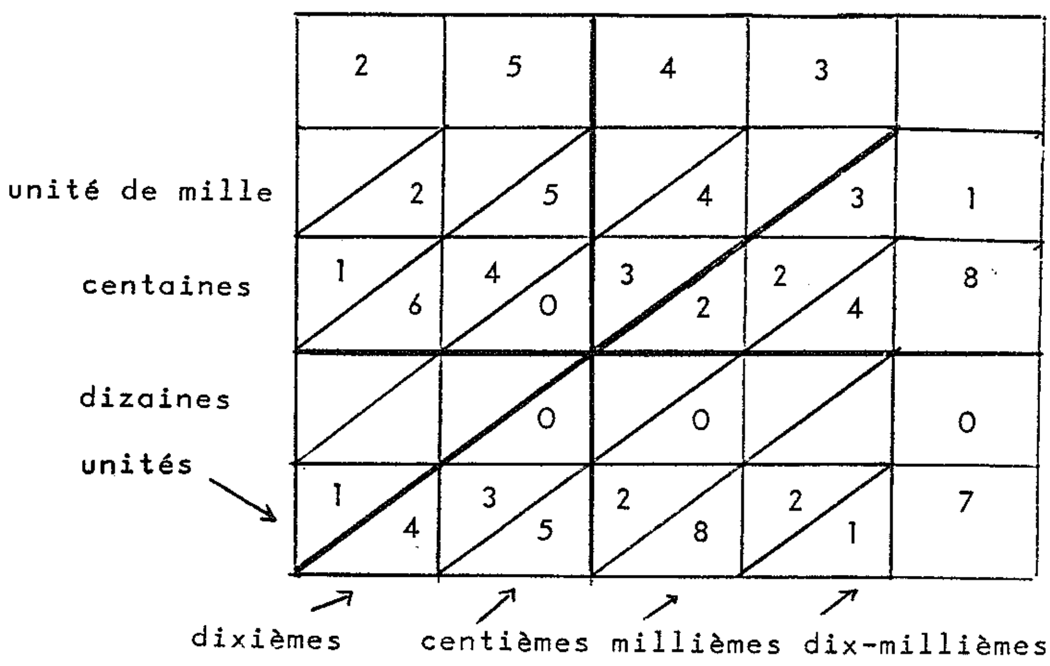
$$450 + 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + 1 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000}$$

$$= 458 + \frac{14}{10} + \frac{11}{100} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{10000}$$

$$= 459 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} = 459 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{10000}$$

$$= 459,\ 5201$$

Compte tenu de la numération en base 10, et de l'écriture à virgule qui la prend en compte, cette présentation peut être améliorée.



Dans chaque case, le produit qui intervient s'écrit avec au plus 2 chiffres, ce qui permet, comme dans le cas du produit de 2 nombres entiers* de séparer chaque case en deux suivant la diagonale. En diagonale on trouve des chiffres correspondant à des unités de même ordre : par exemple, pour la

* cf brochure 46 IREM de Paris

diagonale hachurée : 2×7 correspond à $20 \times \frac{7}{100}$ donc à $2 \times 7 \times 10$ $= \frac{14}{10} = 1 + \frac{4}{10}$ le 4 est dans la colonne des dixièmes, le 1 dans celle des unités.

De la même façon. 5×7 correspond à $5 \times \frac{7}{100} = \frac{35}{100} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$, le 3 est dans la colonne des dixièmes, le 5 dans celle des centièmes.

<u>Une autre lecture du tableau</u> : <u>vers la disposition traditionnelle</u>

On peut lire le tableau par ligne :

la ligne du haut correspond à $25{,}43 \times 10$

la suivante à $25{,}43 \times 8$

la suivante à $25{,}43 \times \frac{0}{10}$

la suivante à $25{,}43 \times \frac{7}{100}$

Le produit cherché est la somme de ces produits partiels.

$$\begin{array}{r} 25{,}43 \\ \times\ 18{,}07 \\ \hline 254{,}3 \\ +\ 203{,}44 \\ +\ 0\phantom{{,}7801} \\ +\ 1{,}7801 \\ \hline 459{,}5201 \end{array}$$

La présentation traditionnelle consiste à repérer ces produits partiels dans l'ordre inverse et à se ramener aux entiers : $25{,}43 = \frac{2543}{100}$ $\qquad 18{,}07 = \frac{1807}{100}$

$$25{,}43 \times 18{,}07 = 2543 \times 1807 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100}$$
$$= 2543 \times 1807 \times \frac{1}{10000}$$

D'où la règle pour placer la virgule.

```
     25,43
   X 18,07
   -------
      1 7801
    203 4400
    254 3000
   ---------
    459,5201
```

VII.5. DIVISION D'UN ENTIER a PAR UN ENTIER b

a) quotient à un entier près

On s'appuie sur le travail qui a été fait sur la division euclidienne dans les classes antérieures et sur les technique artisanales qui ont été utilisées à cette occasion pour trouver 2 nombres q et r tels que $a = (b \times q) + r$: soustractions successives de b ou multiples de b, ou recherche de multiples de b de plus en plus proches de a.

Il s'agit maintenant de situer a entre deux multiples consécutifs de b, autrement dit trouver q tel que :

$$b \times q < a \text{ et } b \times (q + 1) > a.$$

q est alors le quotient entier à une unité près par défaut, et q + 1 le quotient entier à une unité près par excès. Le reste $r = a - (b \times q)$ est plus petit que b. (cf ch. III)

Mise en place d'une technique opératoire (cf "la division à l'école élémentaire" brochure APMEP

Exemple : $385 : 14 = \frac{385}{14}$

$14 \times 10 = 140$

$14 \times 20 = 280$

$14 \times 30 = 420$

$14 \times 20 < 385 < 14 \times 30$

$385 = (14 \times 20) + 105$

$105 < 14 \times 10$

$$
\begin{aligned}
14 \times 1 &= 14\\
14 \times 2 &= 28\\
14 \times 3 &= 42\\
14 \times 4 &= 56\\
14 \times 5 &= 70\\
14 \times 6 &= 84\\
14 \times 7 &= 98\\
14 \times 8 &= 102\\
14 \times 9 &= 116
\end{aligned}
$$

$14 \times 8 < 105 < 14 \times 9$

$105 = (14 \times 8) + 3$

$385 = (14 \times 20) + (14 \times 8) + 3 = (14 \times 28) + 3$

Compte-tenu de l'écriture des nombres en base 10, la connaissance de la table de multiplication par 14 : 14 X 1.... 14 X 9 est un répertoire suffisant pour déterminer les multiples cherchés.

Dans un premier temps on peut établir cette table et adopter la disposition suivante :

385 − 280	14	14 X 1 = 14
105 − 102	14 X 20 = 280	⋮
3	14 X 8 = 102	⋮
	20 + 8 = 28	14 X 9 = 116

385 = (14 X 28) + 3

Cette présentation va s'alléger pour aboutir à la disposition connue

$$
\begin{array}{r|l}
385 & \;14 \\ \cline{2-2}
-\,280 & \;28 \\ \cline{1-1}
105 & \\
-\,102 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

On peut commencer par prévoir le nombre de chiffres du quotient à une unité près en situant a parmi les produits b X 1, b X 10, b X 100, b X 1000 etc........
Ici 14 X 10 < 385 < 14 X 100 donc le quotient cherché a deux chiffres.

b) <u>recherche de quotients plus précis - Quotients décimaux</u>

Reprenons l'égalité : 385 = (14 X 28) + 3 et la disposition :

$$
\begin{array}{r|l|l}
385 & \quad 14 & 14 \times 1 = 14 \\ \cline{2-2}
-\,280 & 14 \times 20 = 280 & 14 \times 2 = 28 \\ \cline{1-2}
105 & 14 \times 8 = 102 & \quad \vdots \\ \cline{2-2}
-\,102 & & \\ \cline{1-1}
3 & & 14 \times 9 = 116
\end{array}
$$

$3 < 14 \qquad\qquad 3 = \dfrac{30}{10}$

On prend comme nouvelle unité le $\frac{1}{10}$ et on cherche à situer 30 parmi les multiples de 14.

Cela revient à situer 3 parmi les produits 14 X 0,1, 14 X 0,2, 14 X 0,3 etc.....

ici 14 X 0,2 < 3 < 14 X 0,3

Cela permet d'étendre la technique opératoire à la recherche de quotients décimaux.

385	14
−280	14 X 20 = 280
105	14 X 8 = 102
−102	14 X 0,2 = 2,8
3	14 X 0,01 = 0,14
− 2,8	14 X 0,004 = 0,056
0,2	
− 0,14	20 + 8 + 0,2 + 0,01 + 0,004 =
0,06	28,214
− 0,056	
0,004	

385 = (14 X 28, 214) + 0,004

Une autre disposition consiste à se ramener à des entiers supérieurs à 14 pour écrire les restes successifs en changeant l'unité de référence

à 1 unité près 385 = (14 X 28) + 3 $\qquad 3 = 30 \times \frac{1}{10}$

14 X 28 < 385 < 14 X 29

à 1 dixième près 30 = (14 X 2) + 2 $\qquad 385 = (14 \times 28) + (14 \times \frac{2}{10}) + \frac{2}{10}$

$\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$

14 X 28,2 < 385 < 14 X 28,3

à 1 centième près 20 = (14 X 1) + 6

$385 = (14 \times 28{,}2) + (14 \times \frac{1}{100}) + \frac{6}{100} \qquad \frac{6}{100} = \frac{60}{1000}$

$14 \times 28{,}21 < 385 < 14 \times 28{,}22$

à 1 millième près $60 = (14 \times 4) + 4$

$$385 = (14 \times 28{,}21) + (14 \times \frac{4}{1000}) + \frac{4}{1000}$$

$14 \times 28{,}214 < 385 < 14 \times 28{,}215$

$385 = (14 \times 28{,}214) + 0{,}004$

Ce qui explique l'expression courante "abaisser un zéro" et la disposition usuelle :

```
  385    |  14
_ 280    |__________
 ----    |
  105    |  28,214
_ 102    |
 ----    |
   30    |
 - 28    |
 ----    |
   20    |
  - 14   |
 -----   |
    60   |
  - 56   |
 -----   |
     4   |
```

On met la virgule avant de chercher le chiffre des dixièmes (après avoir noté celui des unités), au moment où on abaisse le premier zéro non écrit dans a.

c) quotients d'un décimal par un entier

La technique précédente s'adapte immédiatement

```
  385, 432  |  14
 -28        |__________
            |  28
 ---------  |
  105       |
 - 102      |
 ---------  |
   3        |
```

385,432 = (14 X 28) + 3,432

La recherche se prolonge comme précédemment avec 3,432 au lieu de 3 comme reste.

Il s'agit maintenant de chercher le chiffre des dixièmes dans le quotient : on place la virgule après le chiffre des unités au quotient, quand on abaisse le chiffre des dixièmes du dividende.

Reprenons notre disposition ci-dessus :

385,432	14
3 4	28,245
- 2 8	
63	
- 56	
72	
- 70	
2	

385,432 = (14 X 28,245) + 0,002

Le quotient écrit 28,245 est un quotient au millième qu'on pourrait rendre plus précis, si besoin était.

d) <u>quotient d'un décimal par un décimal</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times 10}{b \times 10} = \frac{a \times 100}{b \times 100} = \frac{a \times 10^n}{b \times 10^n}$$

Le quotient décimal à $\frac{1}{10}$ près (à $\frac{1}{100}$ près, à $\frac{1}{1000}$ près........ à $\frac{1}{10^p}$ près) de a par b est le même que celui de $10 \times a$ par $10 \times b$, le même que celui de $100 \times a$ par $100 \times b$, le même que celui de $10^n \times a$ par $10^n \times b$.

En effet $a = (b \times q) + r$ avec $r < b$

$10\ a = (10\ b \times q) + 10\ r$ avec $10\ r < 10\ b$

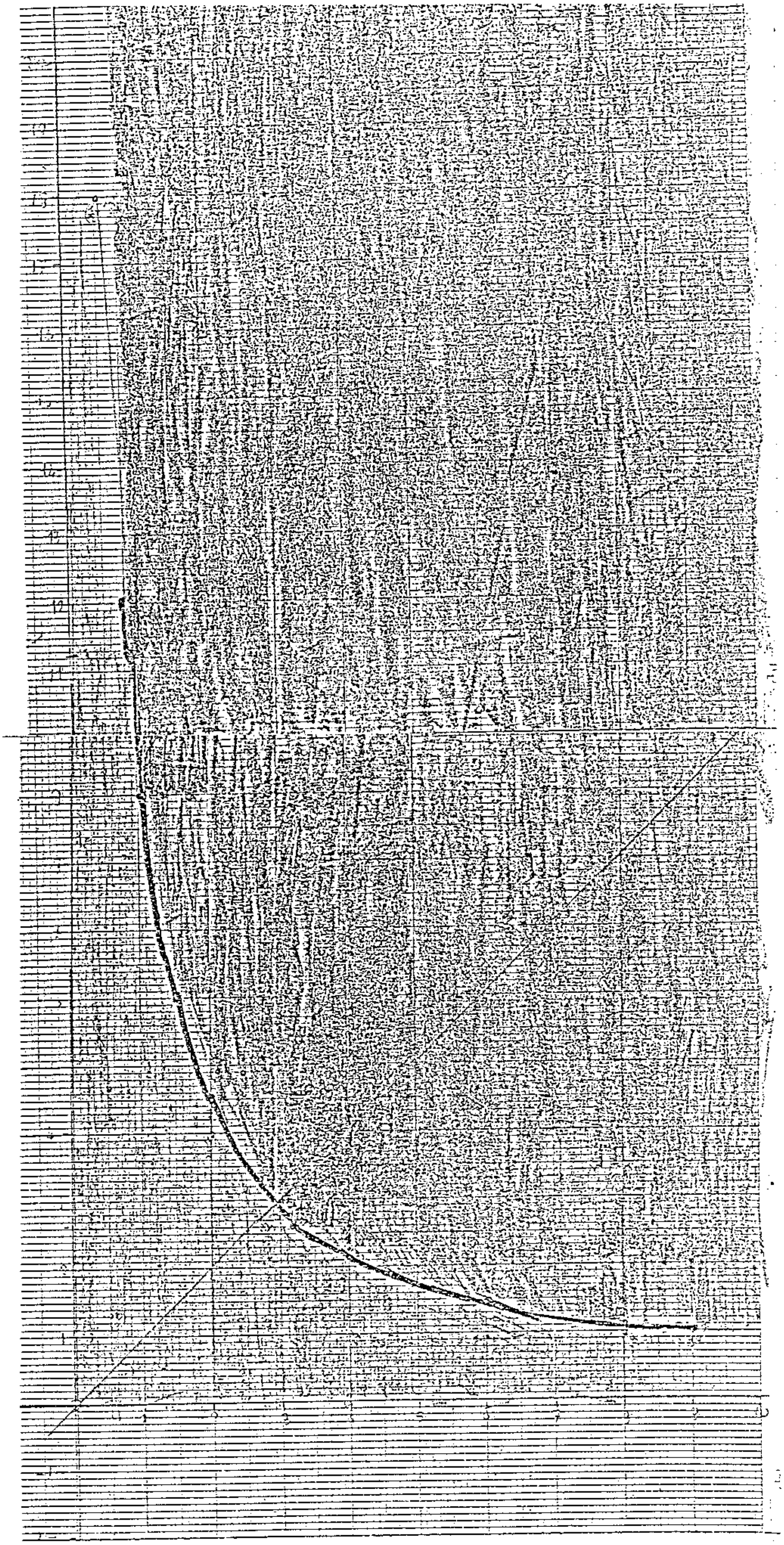
$10^n a = (10^n b \times q) + 10^n r$ avec $10^n r < 10^n b$

On peut dès lors se ramener à la division d'un décimal par un entier en multipliant b par la puissance de 10 convenable.

exemple : $385,432 : 14,53 = \dfrac{385,432}{14,53} = \dfrac{38543,2}{1453} = 38543,2 : 1453$

Chercher les quotients décimaux de 385,432 par 14,53 revient à chercher les quotients décimaux de 38543,2 par 1453.

Grégoire
23/11/78 CE2



CHAPITRE VIII

RECHERCHE DE RECTANGLES D'AIRE ET PERIMETRE DONNES

VIII.1. CHOIX DE LA SITUATION

Pour des unités de longueur et d'aire adaptées, par exemple cm et cm^2, le problème se traduit en la recherche de deux nombres a et b dont on fixe par avance la somme k et le produit k'. Le problème a une double formulation : dans le cadre géométrique et dans le cadre numérique. L'interaction entre ces deux cadres permettra d'avancer dans la recherche d'une solution.

Dans le problème interviennent deux inconnues : les dimensions d'un rectangle répondant à la question. Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues de la forme $\begin{cases} a + b = k \\ a \times b = k' \end{cases}$

(ou une équation du second degré $x^2 - kx + k' = 0$)
L'apprentissage ne vise pas la résolution algébrique d'un tel système, mais plutôt une recherche de solutions par approximations. Cela conduira à des calculs avec les nombres décimaux et à la recherche de décimaux compris entre deux autres. Implicitement ce problème met en jeu deux fonctions : le périmètre et l'aire dépendent chacune des deux dimensions du rectangle. En fait, résoudre l'équation $a + b = k$, revient à chercher les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction $(a,b) \rightarrow a + b$ prend la valeur k. De même résoudre l'équation $a \times b = k'$, revient à chercher les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction $(a,b) \rightarrow a \times b$ prend la valeur k'. Ce faisant a et b ne jouent plus un rôle d'inconnue, mais

un rôle de variable, ce qui permet de leur donner différentes valeurs et de chercher parmi celles-là s'il y en a qui réalisent les deux conditions. La question est de savoir comment choisir les valeurs à donner à a et b pour se rapprocher de la solution du problème. Toutefois, nous considérons que le traitement simultané de ces deux fonctions est trop lourd pour des élèves de fin d'école primaire ou du début du collège et nous réduisons l'ouverture de la situation en nous intéressant plus précisément au problème suivant : Parmi les rectangles ayant un périmètre choisi à l'avance (par exemple 42 cm, i.e. $k = 21$), y-en a-t-il qui ont une aire donnée (par exemple 95 cm^2, i.e. $k' = 95$).

Le problème se ramène alors à l'étude de la seule fonction numérique : $(a,b) \rightarrow a \times b$ où a et b sont liés par la relation $a + b = k$ et à chercher parmi ces couples (a,b) ceux pour lesquels $a \times b = k'$, ou au moins, $a \times b$ est proche de k', de plus en plus proche de k'.

Suivant les valeurs numériques choisies pour k et k', le problème peut ne pas avoir de solution, il peut aussi en avoir. Dans le cas où le problème a une solution, si k et k' sont des nombres décimaux, et même s'ils sont entiers, il se peut que les valeurs de a et b cherchées ne soient pas décimales, on pourra toutefois les approcher de mieux en mieux à l'aide de nombres décimaux. Le maitre pourra choisir différents couples de valeurs numériques pour k et k' de façon à rencontrer les trois possibilités.

<u>Remarque</u> : on aurait pu aussi réduire la complexité en fixant l'aire au lieu du périmètre et chercher parmi les rectangles d'aire fixée à l'avance, un rectangle de périmètre donné.

Cette situation a l'air symétrique sur le plan mathématique, elle ne l'est pas du point de vue du traitement par les élèves. D'abord, du point de vue de la technique opératoire, c'est plus difficile de diviser pour trouver $b = \frac{k'}{a}$ que de soustraire pour trouver $b = k - a$. Par ailleurs, même si les élèves disposent d'une calculette, ce qui les libère des opérations, la recherche d'un couple (a', b') "meilleur" qu'un couple (a,b) déjà trouvé est plus difficile à gérer : lorsque le périmètre est fixe, les élèves peuvent procéder par compensation additive (si $a + b = k$, alors $(a + c) + (b - c) = k$). L'analogue dans le cas où l'aire est fixée serait une compensation multiplicative (si $a \times b = k'$, alors $(a \times c) \times (b \times \frac{1}{c}) = k'$) ce qui demande une maîtrise opératoire qui n'est pas induite par le simple fait de disposer d'une calculette, d'autant que pour rester proche de (a,b) il faudrait prendre des valeurs de c proches de 1.

VIII.2. RECHERCHE DE RECTANGLES DE PERIMETRE DONNE

VIII.2.1. CALCUL DE L'AIRE

On reprend le problème du chapitre V.2 avec un objectif différent : donner aux élèves les moyens d'utiliser le sens de variation des fonctions en jeu pour restreindre les choix de valeurs dans la recherche de solutions approchées au problème qui leur sera proposé ensuite (cf. VIII.1). Les élèves ont maintenant une certaine connaissance des nombres décimaux avec ordre et opérations. Ceci va leur permettre d'enrichir le stock des nombres qu'ils peuvent solliciter pour répondre au problème et éventuellement mieux exploiter les représentations graphiques des couples (a,b) avec a + b fixé ou des couples (a, A) avec A = a X b et a + b fixé.

Consigne :

a) Chercher des rectangles de périmètre 52 cm. Pour chacun calculer son aire en cm^2. Rassembler les résultats dans un tableau.
b) Représenter graphiquement les couples (a,b) obtenus. A côté de chaque couple, indiquer la valeur de l'aire correspondante.
c) Représenter graphiquement les couples (a, A)

Voir l'analyse de la tâche et les représentations graphiques au chapitre V.2. Cette fois on attend que les élèves utilisent les nombres décimaux pour trouver davantage de rectangles de périmètre 52 cm, et pour préciser le tracé de la courbe (a, A). A partir des représentations graphiques, on peut attendre une explicitation du sens de variation : plus précisément, on peut attendre que la représentation graphique suggère un sens de variation de A en fonction d'une dimension ou de la différence entre les dimensions (quand le rectangle se rapproche du carré, l'aire augmente) et que le carré réalise l'aire maximum. On peut argumenter de façon plus solide cette dernière affirmation en se plaçant dans le cadre géométrique (cf V.2.2).

VIII 2.2 RECHERCHE D'UN RECTANGLE D'AIRE DONNEE

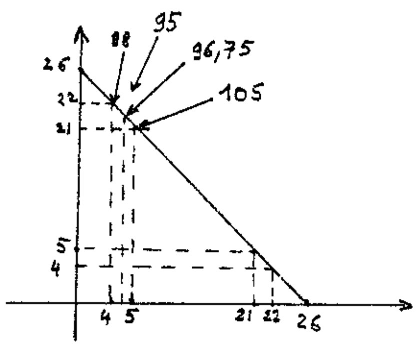
Consigne : Parmi les rectangles de périmètre 52 cm, y-en-a-t-il un d'aire 95 cm^2 ?
Travail individuel ou par équipes de 2 élèves.

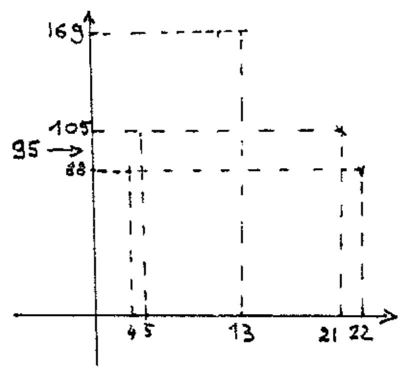
Analyse de la tâche.
Les élèves peuvent se poser le problème de l'existence d'un tel rectangle : on a vu que parmi les rectangles de périmètre 52 cm, le carré a la plus grande aire : 13 X 13 cm^2 . Ici 95 < 169, on peut chercher un tel rectangle. Avec le choix de 52 cm pour le périmètre, la mesure du côté du carré de la famille est entière (13 cm), le carré est donc assez facile à repérer dans la famille; cependant les élèves n'ont aucun besoin de se poser le problème de l'existence avec les valeurs numériques choisies que les élèves se préoccupent ou non de ce problème

Que les élèves se préoccupent ou non de ce problème d'existence, ils ne peuvent chercher le rectangle demandé qu'en procédant par approximations. Ils peuvent se centrer sur la variation de l'aire en fonction d'une des dimensions ou sur un moyen d'obtenir des encadrements de plus en plus précis. Notons que l'aire du rectangle est fonction croissante de la largeur et fonction décroissante de la longueur. Cependant les deux dimensions jouent un rôle symétrique dans l'énoncé, elles sont liées par la relation $a + b = k$; si les élèves privilégient une des dimensions pour les calculs, il n'y a pas a priori de raison de choisir l'une plutôt que l'autre. Or, leur tendance est de faire comme si les fonctions étaient croissantes, ce qui convient dans le cas où ils ont privilégié la largeur et crée des difficultés dans le cas où ils ont privilégié la longueur et peut les amener à faire des essais infructueux. Ils peuvent aussi utiliser le fait que l'aire augmente quand les deux dimensions se rapprochent, ce qui a l'avantage de garder le rôle symétrique des deux dimensions. Dans le cas où les élèves recherchent des encadrements de plus en plus précis, ils se réfèrent à deux couples déjà obtenus, un d'aire plus grande et un d'aire plus petite : cela revient à chercher à mettre un ordre sur les couples, ce qui garde aussi aux deux dimensions leur rôle symétrique. Par exemple 5 X 21 = 105, 4 X 22 = 88, (a, b) est entre (4,22) et (5,21) on peut essayer (4,5 ; 21,5).

Certains élèves peuvent être bloqués après avoir épuisé les solutions entières de $a + b = 26$, d'autres peuvent l'être après avoir essayé les demis. Pour continuer leur recherche, les élèves ont besoin d'être convaincus qu'ils peuvent encore faire bien d'autres choix.

Un autre écueil pour les élèves consiste à être bloqués devant l'infinité de choix. Pour que les élèves puissent mener à bien les procédures d'approximation, il faut qu'ils disposent d'un moyen de choisir de façon pertinente de nouvelles valeurs numériques à essayer. Un tel moyen est ici par exemple une utilisation du sens de varation de l'aire, même si elle est implicite : choix d'une valeur entre deux autres pour resserrer l'intervalle d'incertitude. Pour cela les représentations graphiques réalisées auparavant peuvent apporter une aide précieuse : elles permettent soit d'expliciter le sens de variation de l'aire soit de préciser l'intervalle où on va continuer les recherches.





Procédures observées

D'un point de vue numérique, les procédures observées font appel soit aux nombres entiers exclusivement, soit aux nombres décimaux. Examinons ce dernier cas. On peut répartir ces procédures en trois catégories.

1) Les décimaux sont tous traités de la même façon. On ne recherche aucun moyen de privilégier les uns par rapport aux autres. Les élèves qui se trouvent dans ce cas et qui sont capables, par ailleurs, de concevoir toute la richesse des décimaux, sont atterrés par l'immensité des cas à envisager, des calculs à faire et par l'impossibilité de réaliser leur projet ("on ne peut pas tout calculer"). Ils sont bloqués. On observe alors deux issues à cette situation bloquée :

- On ne fait rien, ou on manipule des nombres, on fait des opérations justes mais dépourvues de sens vis à vis du problème. Par exemple 95 : 52 ou 95 : 26 = a puis 26 - a .

- On restreint le champ des choix possibles : par exemple en se limitant aux entiers ou aux demis ou aux dixièmes.

2)On fait des essais non organisés, mais une fois proche de la solution, on modifie les choix en faisant une hypothèse sur le sens de variation des éléments qui peuvent varier. Nous notons là une utilisation locale de la notion de fonction.

3) On trie les données, on recherche tout de suite comment varie l'aire et on fait les choix en conséquence. Cette organisation permet de réduire l'incertitude à des intervalles de plus en plus petits. Les décimaux servent alors à désigner les bornes des intervalles. Dans ce cas, le problème est envisagé de façon globale. La fonction est un outil implicite.

Remarques

1. Le recours au cadre des dessins géométriques ou au cadre graphique est un moyen de revenir au sens pour les élèves qui font des opérations avec les nombres en jeu (comme 95 : 52) mais qui ne répondent pas au problème.

2. Pour les élèves qui recherchent un sens de variation, ceux qui s'intéressent à la variation de l'aire en fonction de la longueur font parfois de mauvais choix : ils essaient une valeur, trouvent par exemple une aire trop grande et diminuent la longueur pour faire un nouvel essai (alors qu'il faudrait l'augmenter). Ils constatent qu'ils se sont écartés davantage, prennent alors une valeur plus grande pour la longueur et constatent qu'ils se rapprochent. Certains reproduisent plusieurs fois cette démarche. Ceux qui s'intéressent à la variation de l'aire en fonction de la largeur ne rencontrent pas ce problème. Les élèves qui procèdent par encadrements évitent aussi ce problème : à partir d'un rectangle ayant une aire trop grande et d'un rectangle ayant une aire trop petite, ils choisissent un nouveau rectangle ayant une longueur comprise entre les deux longueurs (ou une largeur comprise entre les deux largeurs) et ils calculent l'autre en conséquence. Notons que les élèves qui ont privilégié la longueur changent parfois de procédure pour celle des encadrements.

Utilisation du graphique :

Quand les élèves ont construit auparavant les représentations graphiques des couples (a,b) et des couples (a, A), ils peuvent s'en servir pour exprimer un sens de variation : "le carré a la plus grande aire"; "quand le rectangle se rapproche du carré l'aire augmente";

"quand l'écart (entre les dimensions) diminue, l'aire augmente"; "l'aire augmente et après elle diminue". Il semble que le recours au graphique, particulièrement celui des couples (a,b) avec mention de l'aire correspondante, aide certains élèves dans la mise en place d'un processus de recherche par encadrements. Mais les élèves n'y recourent pas d'eux-mêmes en particulier s'ils n'ont pas fait une représentation de ce type. C'est pourquoi nous leur avons d'abord proposé la construction des graphiques (VIII.2.1). Le graphique est aussi un moyen de discussion de l'existence d'une solution. Les élèves peuvent ne pas se poser le problème de l'existence au cours de cette séquence, mais ils se le poseront nécessairement au cours de la séance suivante (VIII.2.3). Quand les élèves ont mis en route un processus efficace de recherche, un algorithme qui leur permet de s'approcher de plus en plus de la solution, ils abandonnent le graphique, et adoptent une procédure purement numérique.

VIII.2.3 CONDITION D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION

Objectif : formuler les conditions d'existence d'une solution en se servant du fait que le carré a une aire maximum parmi les rectangles de périmètre fixé.

Pour cela on reprend le problème précédent mais en choisissant les données de façon qu'il n'existe pas de solution.

Consigne : Parmi les rectangles de périmètre 60 cm, y-en-a-t-il un d'aire 300 cm^2 ?

Les valeurs numériques ont été choisies assez simples pour que le carré soit facile à repérer et que les calculs numériques puissent rester faciles.

Analyse de la tâche

La procédure efficace consiste à calculer l'aire du carré de la famille: 15 X 15 = 225, le carré a la plus grande aire parmi les rectangles de périmètre 60 cm, donc il n'y a pas de rectangle de périmètre 60 cm et d'aire 300 cm^2.

Un autre moyen consiste à reprendre les processus d'approximation élaborés précédemment : partir d'un rectangle quelconque de périmètre 60 cm et augmenter l'aire. Quand on arrive au carré on peut se poser la question de l'aire maximale parce que "après on retrouve les mêmes". De toute façon, pour argumenter, il faut revenir au cadre graphique ou au cadre géométrique (cf V. 2.2).

VIII.3. VARIANTES - PERSPECTIVES

VIII.3.1. UNE VARIABLE DIDACTIQUE

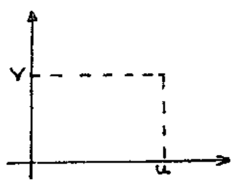
Une des variables de la situation proposée est la valeur choisie pour le périmètre. Suivant cette valeur, les calculs sont plus ou moins faciles, le carré est plus ou moins facile à repérer. Par exemple si on donne des valeurs entières multiples de 4, le carré est facile à trouver, si on donne des valeurs entières impaires ou des valeurs décimales c'est plus difficile. On peut également faire travailler les élèves par équipe avec une valeur différente pour chaque équipe. La confrontation des résultats des équipes peut ainsi en amener certaines à chercher de nouvelles valeurs pour préciser la courbe (en particulier au voisinage du maximum).

Exemples de valeurs numériques choisies pour P :

P = 15 cm ; P = 35 cm ; P = 15,4 cm ; P = 9,3 cm ; P = 42 cm

VIII.3.2. Coloriage du plan gradué (élèves du collège)

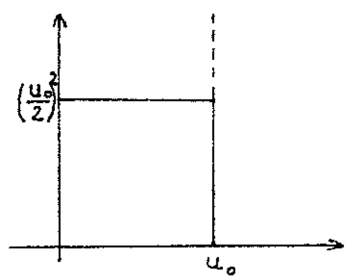
Quand le problème de l'existence du rectangle a été posé on peut proposer aux élèves la consigne suivante :



Pour chaque point du plan de coordonnées (u,v) on peut se demander s'il existe un rectangle de demi périmètre x cm et d'aire y cm^2. Si la réponse est oui on colorie le point en rouge, si la réponse est non on colorie le point en bleu.

Analyse de la tâche :

Sur chaque verticale le demi-périmètre est fixé, par exemple u_o. Parmi les rectangles de demi-périmètre u_o cm le carré a la plus grande aire : $(\frac{u_o}{2})^2$ cm^2 il est représenté par le point de coordonnées $(u_o, (\frac{u_o}{2})^2)$.



En dessous on peut trouver des rectangles, donc on a des points rouges, au dessus on ne peut pas, donc on a des points bleus. Les carrés forment la frontière entre les points rouges et les points bleus.

La règle numérique à laquelle on aboutit pour colorier le quadrillage est la suivante :
si $v < \frac{u^2}{4}$, le point de coordonnées (u,v) est rouge, c'est à dire qu'il existe un rectangle de demi-périmètre u cm et d'aire v cm^2.
Si $v = \frac{u^2}{4}$, le rectangle est un carré de côté $\frac{u}{2}$ cm. Notons qu'on retrouvera plus tard sous l'appellation "signe du discriminant" cette condition d'existence de 2 nombres dont on connait la somme et le produit.
(solutions de l'équation $x^2 - u\,x + V = 0$, u et v fixés).

REFERENCES

- Nombres à l'école élémentaire Brochure n° 46
  I.R.E.M Université Paris 7

- Mesure des longueurs et des aires Brochure n° 48
  I.R.E.M Université Paris 7

- La division à l'école élémentaire
  Brochure APMEP Elem Math III

[GB] - G. Brousseau. Problèmes de didactique des décimaux
  Revue Recherches en didactique des Mathématiques 1981 Vol. 2.1

[RR] - Ratsimba-Rajohn - Thèse de 3e cycle
  Université de Bordeaux I 1981

- Liaison école-collège : proportionnalité
  Brochure I.R.E.M Université Paris 7 à paraître

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :
Liaison Ecole-Collège: Nombres décimaux

AUTEUR (S) :
DOUADY Regine
PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne

RESUME :
L'objectif de ce travail est l'enseignement des nombres décimaux : les séquences sont rédigées ici pour le Cours Moyen dans le cadre d'une construction de nouveaux nombres ; mais elles peuvent être utilisées au collège pour redonner du sens aux nombres décimaux que les élèves connaissent déjà mais avec des règles de fonctionnement souvent inadaptées. Les nouveaux nombres sont créés pour répondre à des situations de mesure où les nombres entiers sont insuffisants. Dans les situations proposées on joue sur l'interaction entre le cadre numérique et les cadres géométrique ou graphique pour faire progresser les connaissances sur les nombres.
Les nouveaux nombres créés sont d'abord écrits sous forme fractionnaire. Les fractions décimales sont utilisées pour simplifier les calculs et la convention de la virgule apparaît pour simplifier l'écriture. Une grande importance est accordée à la graduation d'une droite en interaction avec l'ordre des nombres et les opérations (addition, soustraction).
Par ailleurs, les nombres, qu'ils soient entiers, fractionnaires ou décimaux sont utilisés pour désigner des coefficients de fonctions numériques linéaires, i.e. des coefficients de proportionnalité et ramener les calculs sur les fonctions linéaires (addition, composition, comparaison) à des calculs sur les nombres (addition, multiplication, comparaison).
D'autre part, dans toutes les situations choisies nous avons eu le souci de faire fonctionner les notions dont on visait l'apprentissage avant de leur donner le statut de connaissance à retenir, avec le vocabulaire adapté, puis de les réutiliser dans des situations différentes.

MOTS CLES :
didactique-pratique-enseignants-formation-maitres-aire-approximation-calcul numérique-décimal-fraction-graduation-mesures multiplication-ordre-problèmes proportionnalité représentation graphique

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-034-5