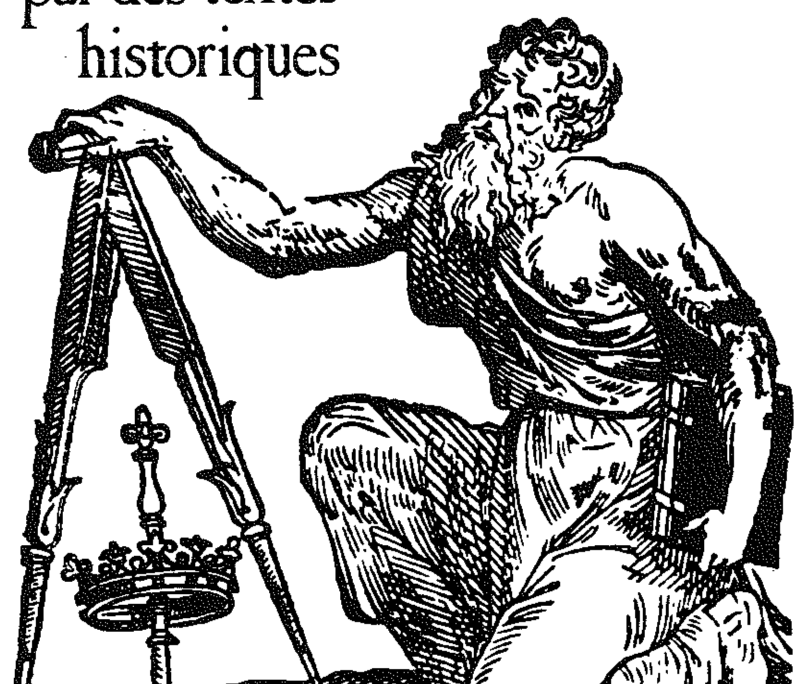
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

61

M.A.T.H.

mathématiques
approche
par des textes
historiques



objectif: Sensibiliser professeurs et élèves à l'évolution des concepts et du langage mathématiques

sujet: Exemples d'utilisation de textes originaux

niveau: Collège et lycée

public: Professeurs de mathématiques

UNIVERSITE-PARIS VII

mathématiques
approche
par des textes
historiques

M.A.T.H.

JANVIER 1986

I. R. E. M. DE PARIS VII

(1985)

Ont participé :

- *à l'élaboration de la brochure*
- *à l'expérimentation des textes :*

Marie-Louise BABAULT
Martine BÜHLER
Annie DEBIARD
Marie-Lucie DELALE
Marie-Françoise DELMAS
Bernadette DENYS
Michèle GREGOIRE
Maryvonne HALLEZ
Marie-Françoise JOZEAU
Paule KNERR
Yves PAQUELIER
Françoise VERDONCK
Jean-Luc VERLEY

La réalisation technique de l'ouvrage est due :

au *Studio* ACHEBEE *(maquette de la couverture)*

et à Mmes *Annie* COLLIN *(Dactylographie)*
Odette DIERAERT, *Nadine* LOCUFIER *(Duplication)*

Le bois de la couverture est celui de la page de titre de l'ouvrage "Institutiones arithmeticae ad perpiciendam astrologiam et Mathematicas facultates necessariae" de Hiernonymus MUNYOS, *Valencia, Espagne, 1566.*

Les professeurs de disciplines scientifiques ont de plus en plus conscience d'une dimension culturelle de la matière qu'ils enseignent face à une présentation des sciences comme "produit fini".

L'histoire des sciences participe de l'histoire des idées et de la société. Contrairement à l'idée courante d'un développement linéaire des mathématiques, celles-ci se développent suivant un mouvement qui peut nous sembler déconcertant : les découvertes techniques et les préoccupations de rigueur jouent un ballet subtil que nous souhaiterions faire apercevoir aux élèves dans la lecture de quelques textes originaux.

Elaboration de la brochure.

Un groupe de professeurs de mathématiques réunis toutes les trois semaines à l'I. R. E. M. a cherché comment intéresser les élèves du secondaire à l'histoire des mathématiques. Cette brochure est le résultat de leurs travaux.

Au cours de son élaboration, des expérimentations ont été effectuées dans des classes, de la 4e à la terminale ; elles ont mis en évidence les difficultés d'approche, par des lycéens ou des collégiens, des textes historiques. Des exercices ont alors été conçus pour en faciliter l'étude : ils consistent le plus souvent à poser le problème dont il est question dans le texte dans un langage mathématique moderne, plus proche des élèves.

Dans l'ensemble, ces études ont été bien accueillies malgré (et peut-être grâce à) leur caractère inhabituel, et les élèves ont manifesté un réel intérêt pour ce type d'approche.

Conception.

On lit dans les programmes :
- de 1e A1 : "On introduira une perspective historique, ce qui permettra de mieux saisir le sens et la portée des problèmes et notions étudiés, et de les situer dans le développement scientifique et culturel. En section A1, l'étude de quelques textes mathématiques originaux, en rapport avec le programme, est vivement conseillée".
- de 1e S : "On introduira une perspective historique, ce qui permettra de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre

les ressorts du développement scientifique".

L'étude de textes originaux, d'un niveau accessible aux élèves, permet de leur faire prendre conscience de l'évolution historique d'une notion mathématique.

Elle a comme avantage :

- d'introduire cette notion de manière plus concrète et plus motivante,
- de voir la manière dont cette notion a évolué,
- de voir les problèmes qui ont préoccupé les mathématiciens,
- de mettre en évidence les avantages du langage symbolique.

La brochure est organisée par thèmes donnant lieu chacun à un chapitre ; elle regroupe au total 15 textes d'ARCHIMEDE à NEWTON et ARGAND. Chaque thème est précédé d'un "chapeau" historique, et chaque texte est accompagné d'exercices d'approche.

Le problème des partis, de PACIOLI à PASCAL et FERMAT, a fait l'objet d'une introduction historique et d'une recherche particulières donnant lieu à deux types d'expérimentations et à des comptes rendus détaillés.

Utilisation.

Les exercices sont proposés pour faciliter la lecture du texte. Ils peuvent être traités préalablement à la maison ou en classe.

La lecture, si elle intervient après la correction des exercices, bénéficie des acquis de cette préparation. Les obstacles d'ordre mathématique étant levés, il reste alors à élucider les difficultés de langage.

Si, en revanche, le texte est proposé avant la correction des exercices, alors la recherche de la résolution du problème resté en suspens devient une motivation de la lecture du texte original.

Une mise au point historique permet de situer le problème dans le contexte du développement scientifique et culturel.

L'I. R. E. M. de Dijon a joué un rôle précurseur dans ce type de préoccupations, et nous avons largement profité de leur expérience.

Nous serons heureux de connaître les résultats de vos expérimentations, vos trouvailles, vos suggestions ; tous vos apports seront toujours les bienvenus à :

Groupe M : A. T. H.
I. R. E. M. Université Paris VII
2 place Jussieu
75005 - PARIS

SOMMAIRE

chapitre 1
Le nombre π

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'antiquité la plus reculée jusqu'aux recherches les plus récentes d'algorithmes performants pour calculer π . Les premières investigations datent de la naissance de la géométrie, et le problème était déjà célèbre dans l'Antiquité. Ainsi, dans sa comédie "Les Oiseaux", ARISTOPHANE, pour se moquer, fait dire à un géomètre : "Je vais, la règle et l'équerre en main, vous quarrer le cercle", faisant sans doute allusion aux solutions fausses qui foisonnaient déjà.

Le petit traité "La mesure du cercle" est caractéristique de la méthodologie d'ARCHIMEDE. On remarquera, dans la première partie, la lourdeur de la méthode apagogique de double raisonnement par l'absurde qui esquive le passage à la limite, et l'intervention de l'infini qui est proscrite. On notera également la formulation complètement géométrique de l'énoncé.

Le texte de VIETE utilise des méthodes archimédiennes très classiques, mais qui introduisent dans le résultat une suite infinie de termes. Signalons que, un peu plus haut dans le "Variorum de Rebus Mathematicis", VIETE donne π avec 10 décimales.

Cette précision a été considérablement améliorée par LUDOLPH, dit Van CEULEN (car il était originaire de la région de Cologne, CEULEN en flamand), qui consacra sa vie au calcul de π , et obtint 20 décimales exactes en calculant la longueur des côtés d'un polygone régulier de 15×2^{31} côtés. Il parvint à 35 décimales exactes, résultat qui fut publié de manière posthume par SNELLIUS (1621).

La naissance du calcul infinitésimal change radicalement la problématique, puisqu'il s'agit de calculer la valeur approchée d'une intégrale ou de la somme d'une série infinie. Le texte de NEWTON est caractéristique de ces nouvelles techniques.

La démonstration de la transcendance de π par LINDEMANN en 1882 établit définitivement l'impossibilité de la quadrature du cercle avec la règle et le compas.

ARCHIMEDE : "La mesure du cercle"
Traduction Charles Mugler
Edition "Les Belles Lettres", t. 1, 1970.

Niveau:

3e-2nd

Exercice préliminaire.

1) Soit $\mathcal{T}$ un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement P et R . Quelle est l'aire de ce triangle ?

2) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R , de périmètre P , et d'aire $\mathcal{A}$. Montrer : $\mathcal{A} = 1/2\ RP$.

Le but des exercices suivants est de faciliter la lecture d'un texte d'Archimède où celui-ci démontre géométriquement une proposition équivalente à cette égalité.

Lire la proposition 1 (lignes 1 à 4) du texte ci-joint.

Remarque : "Un cercle est équivalent à un triangle ..." signifie : "L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle ...".

Exercice 1.

On utilisera le fait que, dans le plan euclidien, le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite.

I-1) Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R , de centre O . Tracer un carré ACEG inscrit dans $\mathcal{C}$.

2) Soit K le projeté orthogonal de O sur (AC) . Justifier :

$$OK < OA \ .$$

(a)-Exprimer l'aire du triangle AOC à l'aide de OK .

-En déduire l'aire $\mathcal{A}_4$ du carré ACEG , et l'exprimer en fonction de son périmètre P_4 .

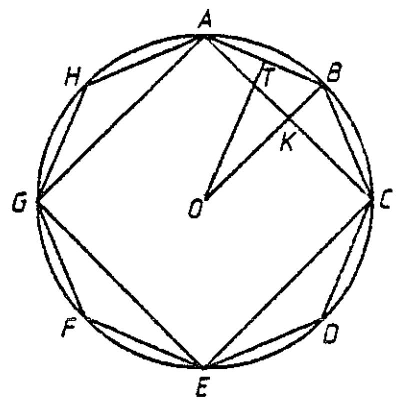
(b) Montrer : $\mathcal{A}_4 < 1/2\ RP$ (où P est le périmètre de $\mathcal{C}$).

II-1) On appelle B et F les points d'intersection de la médiatrice de $[A , C]$ et de $\mathcal{C}$. On appelle D et H les points d'intersection de la médiatrice de $[C , E]$ et de $\mathcal{C}$. On pourra montrer que le polygone ABCDEFGH est un octogone régulier.

2)(a) Soit T le projeté orthogonal de O sur (AB) .

-Exprimer l'aire du triangle AOB à l'aide de OT .

-En déduire l'aire $\mathcal{A}_8$ de l'octogone, et l'exprimer en fonction de son périmètre P_8 .



(b) Montrer : $\mathcal{A}_8 < 1/2\ RP$.

3) Comparaison de $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_8$.

(a) Exprimer l'aire du triangle OBC à l'aide de KC .

(b) Exprimer l'aire du triangle OKC à l'aide de KC .

(c) Comparer ces deux aires. En déduire : $\mathcal{A}_4 < \mathcal{A}_8$.

En itérant le procédé avec des polygones réguliers à 16 , 32 , 64 , ... côtés, on obtiendrait les inégalités suivantes :

$$\mathcal{A}_4 < \mathcal{A}_8 < \mathcal{A}_{16} < \mathcal{A}_{32} < \mathcal{A}_{64} < \ldots < 1/2\ RP \quad .$$

Comme l'aire des polygones successifs est de plus en plus proche de l'aire du cercle, on en déduit : $\mathcal{A} \leq 1/2\ RP$, où $\mathcal{A}$ est l'aire du cercle.

Voir texte : paragraphe suivant la figure 61.

Exercice 2.

1) Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R , de centre O . Tracer un carré A'C'E'G' circonscrit au cercle $\mathcal{C}$.

2) Calculer l'aire $\mathcal{B}_4$ de ce carré en fonction de son périmètre Q_4 .

3) On admet $Q_4 > P$. Montrer : $\mathcal{B}_4 > 1/2\ RP$.

Si on construisait un octogone régulier circonscrit à $\mathcal{C}$ d'aire $\mathcal{B}_8$, on pourrait montrer : $\mathcal{B}_4 > \mathcal{B}_8 > 1/2\ RP$.

En itérant le procédé avec des polygones réguliers à 16 , 32 , 64 , ... côtés, on obtiendrait les inégalités suivantes :

$$\mathcal{B}_4 > \mathcal{B}_8 > \mathcal{B}_{16} > \mathcal{B}_{32} > \mathcal{B}_{64} > \ldots > 1/2\ RP \quad ,$$

et, de la même manière que précédemment, on obtient :

$$\mathcal{A} > 1/2\ RP \quad .$$

Voir texte : paragraphe suivant la figure 62.

Exercice 3.

Construire un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 5 cm . Construire un carré ACEG inscrit dans $\mathcal{C}$, puis l'octogone régulier ABCDEFGH (*cf. exercice 1*). Sur la même figure, construire le carré A'C'E'G' circonscrit à $\mathcal{C}$ tel que $A \in (A'C')$, puis l'octogone régulier A"B"C"D"E"F"G"H" circonscrit à $\mathcal{C}$ tel que $A \in (A'B')$. Comparer à la figure 61 du texte.

Des conclusions des exercices 1 et 2, on déduit :

$$\mathcal{A} = 1/2\ RP \quad .$$

Exercice 4.

Lire la proposition 3 du texte d'ARCHIMEDE.

Compléter :

On appelle P le périmètre d'un cercle, et D son diamètre. Le texte affirme (transcrit en langage moderne) :

$$P = 3D + S \ , \qquad \text{avec} \quad \ldots < S < \frac{1}{7}D \quad .$$

En déduire :

$$\ldots < P < \ldots \quad .$$

En déduire un encadrement de π par des fractions, puis une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

LA MESURE DU CERCLE

1.

Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est-à-dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle[1].

Que le cercle ΑΒΓΔ soit au triangle Ε comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

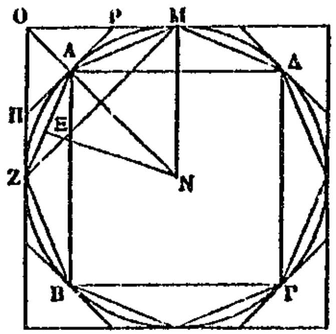


Fig. 61.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré ΑΓ et divisons en deux parties égales les arcs (sc. admettant comme cordes les côtés du carré) ; que les segments de cercle aient à la fin (sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales) une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle[2]. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N et abaissons la perpendiculaire ΝΞ. ΝΞ sera donc inférieur au (sc. plus petit) côté du triangle.

1 et 2. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

α'.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

Ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται· λέγω ὅτι ἴσος ἐστίν.

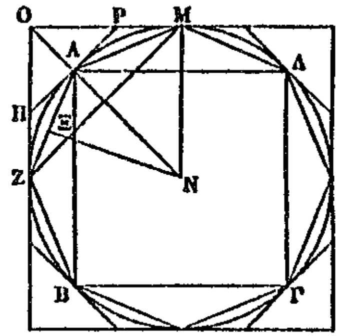


Fig. 61.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. Εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. Ἔστιν δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς

Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus petit que le périmètre du cercle[1]. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle E, ce qui est absurde.

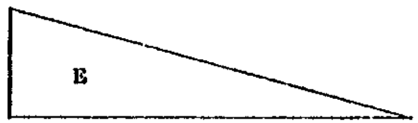


Fig. 62.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points (sc. de division). L'angle OAP est donc droit[2] ; OP est par conséquent supérieur à MP, du moment que PM est égal à PA, et le triangle POII est plus grand que la moitié de la figure OZAM[3]. Qu'il reste donc des segments tels que ΠZA, dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle E et celle du cercle ΑΒΓΔ[4]. La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle E, ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que NA est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle[5]. Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle E.

2.

Le cercle a au carré de son diamètre[6] le rapport des deux nombres 11 et 14.

Soit un cercle de diamètre AB ; que le carré ΓH lui soit circonscrit ; que (sc. sur le prolongement de ΓΔ) le segment de droite ΔE soit double du segment ΓΔ, et le segment EZ égal au septième de ΓΔ. Puisque donc le triangle AΓE est au triangle AΓΔ comme 21 est à 7,

1-6. Cf. les notes complémentaires à la fin de ce volume.

λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

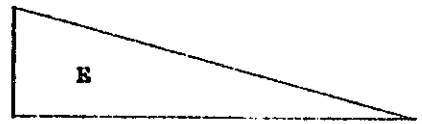


Fig. 62.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τριγώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ.

β'.

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\iota\alpha}$ πρὸς $\overline{\iota\delta}$.

Ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ ΓΗ, καὶ τῆς ΓΔ διπλῆ ἡ ΔΕ, ἕβδομον δὲ ἡ ΕΖ τῆς ΓΔ. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν $\overline{\kappa\alpha}$ πρὸς $\overline{\zeta}$, πρὸς δὲ τὸ ΑΕΖ τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ

4 ἐλάσσων BG : μείζων DEH ‖ 8 τῇ BCGH : τῆς DE ‖ 9 μεῖζόν DEGH : μείζων C.

et que, d'autre part, le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΕΖ comme 7 est à 1, le triangle ΑΓΖ est au triangle ΑΓΔ comme 22 est à 7. Mais le carré ΓΗ est quadruple du triangle ΑΓΔ, et le triangle ΑΓΔΖ est équivalent au cercle ΑΒ[1], puisque, d'un côté, la hauteur ΑΓ est égale au rayon de ce cercle et que, d'un autre côté, la base est égale, comme nous le montrerons[2], au triple du

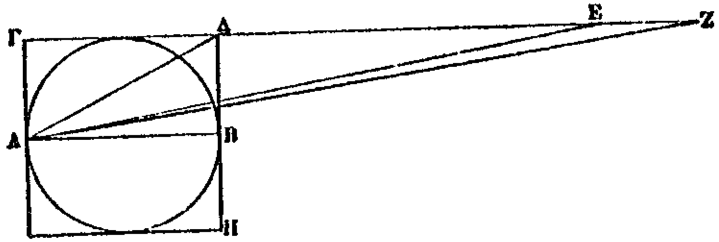


Fig. 63.

diamètre, augmenté d'un segment égal, avec une grande approximation, à son septième. Le cercle a donc au carré ΓΗ le rapport des nombres 11 et 14.

3.

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ,

1. Cf. Eucl. V, 7, coroll. ; V, 18 ; VI, 1.
2. Cf. prop. 3.
3. Proposition citée par Ptolémée, *Synt.* I, p. 513 ; Simplicius, *In Aristt. De caelo*, p. 549 ; Héron, *Métr.*, p. 66.
4. Ici et dans la suite, Archimède se borne à donner les résultats de ses calculs, dont Eutocius développe le détail dans son commentaire.

πρὸς ἕν, τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστίν, ὡς κ̅β̅ πρὸς ζ̅. Ἀλλὰ τοῦ ΑΓΔ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ΓΗ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστίν [ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέ-

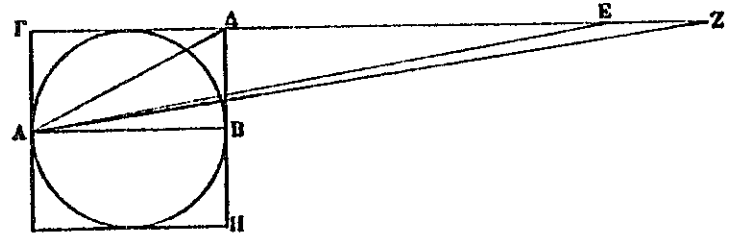


Fig. 63.

τρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ' ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται]· ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ ΓΗ τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ι̅α̅ πρὸς ι̅δ̅.

γ'.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τ̅ϛ̅ πρὸς ρ̅ν̅γ̅, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σ̅ξ̅ε̅ πρὸς ρ̅ν̅γ̅. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ

2 τοῦ BDEGH : τὸ C ‖ 5 τῷ BCG : τοῦ DEH ‖ 15 ὃν BG Eutocius : ἢ ὃν DEH.

VIETE : "Variorum de rebus mathematicis responsorum liber $VIII^{us}$"
Tours, 1593.

Niveau: 3e-2nd

<u>Exercice I</u> (proposition I du texte de F. VIETE).

1) Dessiner un cercle de diamètre $[B , C]$, de centre A (de rayon 3 cm).

Dessiner un polygone régulier de côté $[BD]$ inscrit dans ce cercle (le nombre de côtés est laissé au choix du lecteur).

La médiatrice de $[B , D]$ coupe l'arc $\widehat{BD}$ en E , et le segment $[B , D]$ en F . Compléter le polygone régulier de côté $[BE]$. Combien a-t-il de côtés ?

On appelle A_1 l'aire du premier polygone, et A_2 l'aire du second polygone.

On va montrer :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{DC}{BC}$$

2)(a) Montrer :

$$\frac{A_1}{A_2} = \text{"}\frac{\text{aire du triangle BDA}}{\text{aire du quadrilatère BEDA}}\text{"}$$

(lignes 16 à 20 de la traduction).

(b) Rappeler la formule de l'aire d'un triangle.

Montrer :

$$\text{"}\frac{\text{aire de BED}}{\text{aire de BDA}}\text{"} = \frac{EF}{AF} \quad .$$

En déduire :

$$\text{"}\frac{\text{aire de BDA}}{\text{aire de BEDA}}\text{"} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AB}$$

(lignes 20 à 28).

(c) Montrer :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{DC}{BC} \quad .$$

(lignes 28 à 32).

Exercice II.

Première partie.

1) Tracer un cercle de centre A , de diamètre 1 , et un carré BDCG inscrit dans ce cercle. (On prendra comme unité 6 cm .)

2) Calculer BD , et l'aire du carré.

3) Tracer la médiatrice de [B , D] . Elle coupe l'arc $\overset{\frown}{BD}$ en E , et le segment [B , D] en F .

(a) Quelle est la nature du triangle BFA ?

(b) Calculer BF ; en déduire FA et FE .

(c) Quelle est la nature du triangle BFE ? Calculer BE .

(d) Calculer EC . Montrer :

$$EC = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad .$$

4) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ECB}$? Quelles sont les valeurs des lignes trigonométriques de cet angle ?

Deuxième partie.

1) Compléter l'octogone régulier de côté [BE].

2) Tracer la médiatrice de [B , E] . Elle coupe l'arc $\overset{\frown}{BE}$ en H , et le segment [B , E] en I .

(a) Montrer : AI = 1/2 EC .

(b) Calculer IH , puis IB .

(c) Quelle est la nature du triangle BHC ?

Calculer BH , puis HC . Montrer :

$$HC = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad .$$

Troisième partie.

On appelle A_1 l'aire du carré, A_2 l'aire de l'octogone, A_3 l'aire du polygone à 16 côtés (de côté [BH]), A_4 l'aire du polygone à 32 côtés (comment le construirait-on ?), etc.

L'exercice I permet d'affirmer :

$$\frac{A_1}{A_2} = \ldots$$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{EC}{BC}$$

$$\frac{A_3}{A_4} = \ldots$$

En déduire la valeur de $\frac{A_1}{A_4}$. *(Lire la proposition II du texte.)*

<u>Exercice III</u> : Calcul numérique - Valeur approchée de π .

1) Que représente le nombre A_n quand n devient très grand ?

2) En itérant le procédé *(comme le suggère VIETE dans la proposition II)*, déduire la valeur numérique de $\frac{A_1}{A_6}$, puis de $\frac{A_1}{A_n}$. *(Voir le corollaire de VIETE.)*

3) Calculer $\frac{A_1}{A}$, où A est l'aire du cercle.

Déduire de 1) et 2) une formule donnant une valeur approchée de π pour n très grand.

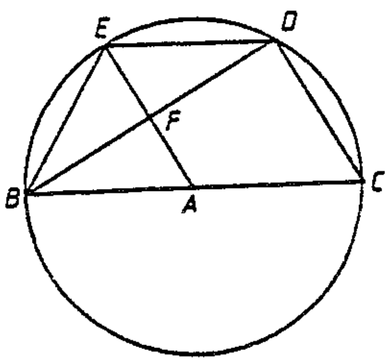
4)(a) Calculer la valeur approchée obtenue pour $n = 4$, 5 , 6 .

(b) Avec une machine programmable en basic, trouver un algorithme de calcul programmable permettant d'obtenir les valeurs approchées de π pour n quelconque.

Traduction approximative du texte de F. VIETE.

PROPOSITION I

Si, dans un même cercle, on inscrit deux polygones réguliers, et si le nombre de côtés ou d'angles du premier est la moitié du nombre de côtés ou d'angles du second, alors le premier polygone sera au second comme l'apotome du côté du premier est au diamètre.



J'appelle apotome du côté, la corde qui sous-tend l'arc restant de la demi-circonférence, une fois le côté enlevé.

Dans le cercle de centre A , de diamètre BC , on inscrit un polygone régulier quelconque, dont le côté est BD . L'arc de cercle BD étant coupé par moitié en E , on trace BE . De cette façon, on inscrit un autre polygone régulier dont le côté est BE . Le nombre de côtés ou d'angles du premier polygone sera la moitié du nombre de côtés ou d'angles du second. On trace DC . Je dis que le premier polygone de côté BD est au second polygone de côté BE ou ED comme DC est à BC . On trace DA et ED . Il apparaît que le premier polygone contient autant de triangles BAD qu'il y a de côtés ou d'angles dans le premier polygone. Et le second polygone contient le même nombre de trapèzes (*) BEDA . Donc le premier polygone est au second polygone, comme le triangle BAD est au trapèze BEDA , lequel trapèze BEDA est divisé en deux triangles BAD et BED , dont une base commune est BD . Or, deux triangles ayant une base commune sont entre eux comme leurs hauteurs entre elles. On trace AE sécante

(*) Pour VIETE, un trapèze est un quadrilatère quelconque. Pour le vocabulaire relatif aux polygones utilisé à l'époque, consulter : Dictionnaire mathématique d'Ozanam, paru en brochure IREM Paris-Sud.

en F à BD. Comme l'arc de cercle BD a été coupé par moitié en E, AE coupe BD à angle droit. C'est pourquoi AF est la hauteur du triangle BDA, et FE la hauteur du triangle BED. Donc, le triangle BAD est au triangle BED comme AF est à EF, et en comparant le triangle BAD aux triangles BAD et BED mis ensemble, c'est-à-dire au trapèze BEDA, on voit que c'est comme de AF à AE. Ainsi, le premier polygone sera au second polygone dans ce même rapport. Mais AF est à AE ou AB comme DC est à BC. En effet, l'angle BDC est droit comme BFA, et pour cette raison, AF et DC sont parallèles. Donc, le premier polygone dont le côté est BD est au second polygone dont le côté est BE ou ED comme DC est à BC. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II

Si, dans un même cercle, on inscrit des polygones réguliers à l'infini, et que le nombre de côtés du premier soit la moitié du nombre de côtés du second, le quart du nombre de côtés du troisième, le huitième du nombre de côtés du quatrième, le seizième du nombre de côtés du cinquième, et ainsi de suite chaque fois la moitié en continuant.

Le premier polygone sera au troisième, comme la surface sous les apotomes des côtés des premier et second polygones est au carré construit sur le diamètre du cercle.

Et au quatrième, comme le solide sous les apotomes des côtés des premier, deuxième et troisième polygones, est au cube construit sur le diamètre.

Et ainsi de suite en continuant à l'infini.

Soient, en effet, B l'apotome du côté du premier polygone, C celui du second, D celui du troisième, etc. Et soit Z le diamètre du cercle. D'après la proposition précédente, le premier polygone est au second comme B est à Z. C'est pourquoi, ce qu'on construit à partir de B dans le second polygone, sera égal à ce qu'on construit à partir de Z dans le premier polygone ; mais le second polygone est au troisième comme C est à Z . Et par conséquent, ce qu'on construit sous le second polygone et B , c'est-à-dire sous le premier et Z , est à ce qui se construit sous le troisième polygone et B , comme C est à Z . C'est pourquoi ce qu'on construit sous le premier polygone et le carré de Z est égal à ce qu'on construit sous le troisième et la surface sous B et C . Donc, le premier polygone est au troisième, comme la surface sous B et C est au carré de Z ...

COROLLAIRE

C'est pourquoi un carré inscrit dans un cercle sera au cercle, comme le côté du carré est à la puissance la plus élevée du diamètre appliquée à ce qui se construit à l'infini sous les apotomes des côtés des polygones réguliers à huit, seize, trente-deux, soixante-quatre, cent-vingt-huit, deux-cent-cinquante-six côtés, et tous les autres avec les côtés dans ce même rapport de moitié (*).

Soit un cercle de diamètre 2 . Le côté du carré inscrit dans le cercle est $\sqrt{2}$, le carré lui-même est 2 . L'apotome du côté de l'octogone est $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. L'apotome du côté du polygone à seize côtés est $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. L'apotome du côté du polygone à trente-deux côtés est $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. L'apotome du côté du

---

(*) Cette traduction est littérale. La phrase de VIETE n'est pas claire. La formule correspondante en langage moderne est :

$$\frac{\text{"Aire du carré"}}{\text{Aire du cercle}} = \frac{C.a_1.a_2.a_3\ldots a_n\ldots}{d.d.d\ldots d\ldots} ,$$

où d est le diamètre du cercle, C le côté du carré, et a_n l'apotome du côté du polygone régulier à 2^{n+2} côtés.

Ce qui donne, pour un cercle de diamètre 1 (dernier paragraphe) :

$$\frac{\frac{1}{2}}{N} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}{1} ,$$

où N est l'aire du cercle.

polygone à soixante-quatre côtés est $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$. Et ainsi de suite en continuant.

Soit un cercle de diamètre 1 . Le cercle est N . Alors, $\frac{1}{2}$ sera à N , comme $\sqrt{\frac{1}{2}}$ à l'unité appliquée à ce qui se construit à partir de :

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \;,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}} \;.$$

At vero cum magnitudines ſunt continue proportionales in infinitum, abibit X in nihilum. Et evaneſcere aſſerent Mechanici, cum minima quantitas ſubſit tantum intellectu.

Itaque erit ſecundum eos. Ut differentia terminorum rationis ad terminum rationis majorem, ita maxima ad compoſitam ex omnibus. Cum alioquin eſſet, Ut differentia terminorum rationis ad terminum rationis minorem, ita minima ad crementum. Et ut differentia terminorum rationis ad terminum rationis majorem, ita maxima ad compoſitam ex omnibus plus cremento.

Sint magnitudines proportionales in continua ratione ſubquadrupla εἰς ἄπειρον, & ſit maxima omnium 3. Compoſita ex omnibus fiet 4. Neque enim magnitudinibus illis in continua ratione ſubquadrupla exiſtentibus quarum maxima eſt 3, tantula poteſt addi, quin compoſita ſit major 4. Eoque pertinet quadratio Paraboles Archimedæa.

Sed vix adſentientur Platonici, cum ipſa omnis Geometria ſit intellectu.

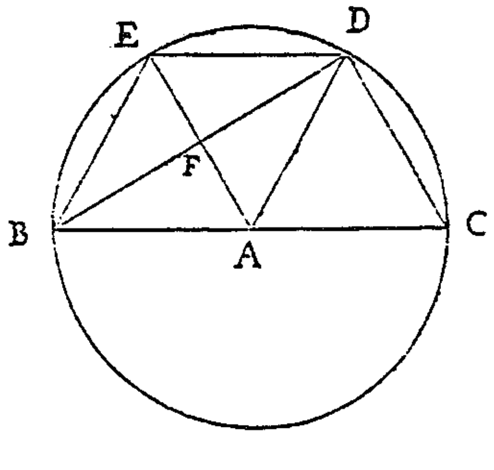
CAPUT XVIII.

Polygonorum circulo ordinate inſcriptorum ad circulum ratio.

QUadravit parabolen Archimedes inſcriptione continua triangulorum exiſtentium ἐν λόγῳ ῥητῷ, Quoniam enim triangulo maximo parabolæ inſcripto, ſuperinſcripſit triangula in continua ratione ad maximum illud conſtanter ſubquadrupla in infinitum: Ideo concluſit parabolen eſſe maximi illius trianguli ſeſquitertiam. At ita circulum quadrare neſcivit Antiphon, quoniam circulo inſcripta continue triangula exiſtunt ἐν λόγῳ ἀῤῥήτῳ, & vago. An igitur circulus non poterit quadrari? Si enim figura compoſita ex triangulis in ratione ſubquadrupla ad datum maximum triangulum conſtitutis in infinitum, ſit ad idem ſeſquitertia, infinitorum aliqua ſcientia eſt. Et figura quoque plana poterit componi ex triangulis circulo in infinitum continue inſcriptis ἐν λόγῳ, licet ἀῤῥήτῳ, & vago. Et compoſita illa ad maximum triangulum inſcriptum aliquam habebit rationem. Valebunt autem Euclidæi adſerentes angulum majorem acuto & minorem obtuſo non eſſe rectum. Circa hæc, ut liceat liberius Philoſophari de incerta illa & inconſtanti polygoni cujuſvis ordinate inſcripti ad polygonum infinitorum laterum, ſeu, ſi placet, circulum, ita propono.

PROPOSITIO I.

Si eidem circulo inſcribantur duo ordinata polygona, numerus autem laterum vel angulorum primi, ſit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi: erit polygonum primum ad ſecundum, ſicut apotome lateris primi ad diametrum.



Apotomen lateris voco ſubtenſam peripheriæ, quam relinquit è ſemicirculo ea cui latus ſubtenditur.

In circulo igitur cujus A centrum, diameter B C, inſcribatur polygonum quodcunque ordinatum, cujus latus ſit B D. Secta vero circumferentia B D bifariam in E, ſubtendatur B E. Itaque inſcribatur aliud polygonum ordinatum cujus latus ſit B E. Numerus igitur laterum vel angulorum polygoni primi, erit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi. Connectatur autem D C. Dico polygonum primum cujus latus BD ad polygonum ſecun-

secundum cujus latus BE vel ED esse, ut DC ad BC. Iungantur enim DA, ED. Constat igitur polygonum primum tot triangulis B A D, quot existunt latera vel anguli polygoni primi. Polygonum autem secundum constat totidem trapeziis BEDA. Polygonum igitur primum ad polygonum secundum se habet, ut triangulum B A D ad trapezium BEDA. Quod quidem trapezium B E D A dividitur in duo triangula BAD, BED, quorum basis communis est B D. Triangula autem quorum eadem est basis sunt ut altitudines. Agatur itaque semidiameter A E, secans B D in F. Quoniam igitur circumferentia BD secta est bifariam in E, acta A E secat B D ad rectos angulos. Itaque A F est altitudo trianguli B D A, & F E altitudo trianguli BED. Quare triangulum B A D ad triangulum BED est, ut AF ad E F, & componendo triangulum BAD ad triangula B A D, B E D simul juncta, id est trapezium B E D A, sicut AF ad AE. Qua adeo in ratione erit etiam polygonum primum ad polygonum secundum. Sed AF ad AE seu AB est, ut D C ad BC. Est enim angulus BDC rectus sicut BFA. & ideo sunt parallelæ A F, D C. Est igitur polygonum primum, cujus latus BD, ad polygonum secundum, cujus latus BE vel ED, sicut D C ad B C. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO II.

Si eidem circulo inscribantur polygona ordinata in infinitum, & numerus laterum primi sit ad numerum laterum secundi subduplus, ad numerum vero laterum tertii subquadruplus, quarti suboctuplus, quinti subsexdecuplus, & ea deinceps continua ratione subdupla.

Erit polygonum primum ad tertium, sicut planum sub apotomis laterum polygoni primi & secundi ad quadratum à diametro.

Ad quartum vero, sicut solidum sub apotomis laterum primi secundi & tertii polygoni ad cubum à diametro.

Ad quintum, sicut plano-planum sub apotomis laterum primi secundi tertii & quarti ad quadrato-quadratum à diametro.

Ad sextum, sicut plano-solidum sub apotomis laterum primi secundi tertii quarti & quinti polygoni ad quadrato-cubum à diametro.

Ad septimum, sicut solido-solidum sub apotomis laterum primi secundi tertii quarti quinti & sexti polygoni ad cubo-cubum à diametro. Et eo in infinitum continuo progressu.

Sit enim apotome lateris polygoni primi B, secundi C, tertii D, quarti F, quinti G, sexti H. Et sit diameter circuli Z. Ex antecedente igitur propositione polygonum primum ad polygonum secundum erit, ut B ad Z. Itaque quod fit ex B in polygonum secundum, erit æquale ei quod fit ex Z in polygonum primum; polygonum vero secundum ad tertium erit, ut C ad Z. Et per consequens, quod fit sub polygono secundo & B, id est quod fit sub primo & Z ad id quod fit sub polygono tertio & B, sicut C ad Z. Quare quod fit sub polygono primo & Z quadrato, æquale est ei quod fit sub polygono tertio & plano B in C. Est igitur polygonum primum ad polygonum tertium, sicut planum B in C ad Z quadratum. Et quod fit sub tertio & plano B in C, æquale erit ei quod fit sub primo & Z quadrato. Rursus ex eadem antecedente propositione est, ut polygonum tertium ad polygonum quartum, sicut D ad Z. Et per consequens. Quod fit sub tertio & plano B in C, id est quod fit sub primo & Z quadrato ad id quod fit sub quarto & plano B in C, est sicut D ad Z. Quare quod fit sub primo & Z cubo, æquale erit ei quod fit sub quarto & solido B in C in D. Est igitur polygonum primum ad quartum, sicut B in C in D ad Z cubum. Eademque demonstrationis methodo erit ad quintum, sicut B in C in D in F ad Z quadrato-quadratum. Ad sextum, sicut B in C in D in F in G ad Z quadrato-cubum. Ad septimum, sicut B in C in D in F in G in H ad Z cubo-cubum. Et eo continuo in infinitum progressu.

COROLLARIVM.

Itaque quadratum circulo inſcriptum erit ad circulum, ſicut latus illius quadrati ad poteſtatem diametri altiſſimam adplicatam ad id quod fit continue ſub apotomis laterum octogoni, hexdecagoni, polygoni triginta duorum laterum, ſexaginta quatuor, centum viginti octo, ducentorum quinquaginta ſex, & reliquorum omnium in ea ratione angulorum laterumve ſubdupla.

Sit enim quadratum circulo inſcriptum polygonum primum, octogonum erit ſecundum, hexdecagonum tertium, polygonum triginta duorum laterum quartum, & eo continuo ordine. Itaque erit, ut quadratum circulo inſcriptum ad polygonum extremum ſeu infinitorum laterum, ſicut quod fit ſub apotomis laterum tetragoni, octogoni, hexdecagoni, & reliquorum omnium in ea ratione ſubdupla in infinitum, ad poteſtatem diametri altiſſimam. Et per adplicationem communem, ſicut apotomes lateris quadrati ad poteſtatem diametri altiſſimam adplicatam ad id quod fit ſub apotomis laterum octogoni, hexdecagoni, & reliquorum omnium in ea ratione ſubdupla in infinitum. Eſt autem apotome lateris quadrati circulo inſcripti ipſi lateri æqualis, & polygonum infinitorum laterum circulus ipſe.

Sit circuli diameter 2. Latus quadrati ei circulo inſcripti ſit $\sqrt{2}$, *quadratum ipſum 2. Apotome lateris octogoni* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. *Apotome lateris hexdecagoni* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. *Apotome lateris polygoni triginta duorum laterum* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. *Apotome lateris polygoni ſexaginta quatuor laterum* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ *Et eo continuo progreſſu.*

Sit autem diameter 1. Circulus 1 N. Erit $\frac{1}{2}$ *ad 1 N, ſicut* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *ad unitatem adplicatam ad id quod fit ex* $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$, *in* $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, *in* $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$, *in* $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}$.

Sit diameter X. Circulus A planum. Erit X quadratum $\frac{1}{2}$ ad A planum, ſicut L. X quadrati $\frac{1}{2}$ ad X poteſtatum maximam adplicatam ei quod fit ex radice binomia X quadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadrato-quadrati $\frac{1}{2}$, in radicem binomiam X quadrati $\frac{1}{2}$, plus radice binomiæ X quadrato quadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadrato- quadrato- quadrato-quadrati $\frac{1}{2}$, in radicem binomiæ X quadrati $\frac{1}{2}$, plus radice binomiæ X quadrato-quadrati $\frac{1}{2}$, + radice binomiæ X quadrato-quadrato-quadrato-quadrati $\frac{1}{2}$, + radice X quadrato-quadrato-quadrato-quadrato-quadrato-quadrato-quadrato-quadrati $\frac{1}{2}$, in radicem &c. in infinitum obſervata uniformi methodo.

CAPVT XIX.

Πρόχειρον, ſeu ad uſum Mathematici Canonis methodica.

AT vos, ô nobiles ſiderum obſervatores, miſſa facta matæotechnia ad veram Cyclometriam revoco, hoc eſt, ad legitimum Mathematici Canonis uſum. Ut enim vulgo peccatur in ejus fabrica, ſic etiam in uſu. Itaque dum renovatur meus ad Canonem inſpectionum liber, Analyticæ meæ methodi, qua ſoleo expedire me à triangulis planis ac ſphæricis, ultro copiam facio ad excitandum veſtra ſtudia per aliquod laborum, quos ſuſtinetis in abacis Aſtronomicis, ſublevamen. Neque vero obruent vos multitudine præcepta. Tum enim negocium viginti & uno διδομένοις fere abſolvo.

Διό-

NEWTON : "La méthode des fluxions"
Ecrit en latin vers 1670
Publié en anglais en 1736
Traduction française de Buffon : 1740.

Niveau:

Terminale C

L'objet du problème est de déterminer une approximation décimale de π .

Préambule.

Dans cette partie, f désigne une fonction dérivable sur $[0\ ,\ a]$, avec a réel strictement positif.

1) On suppose :

$$\forall\ x \in [0\ ,\ a]\ ,\qquad |f'(x)| \leqslant M\ .$$

Donner une majoration de $|f(x) - f(0)|$ en fonction de $|x|$, pour $x \in [0\ ,\ a]$.

2) On suppose :

$$\forall\ x \in [0\ ,\ a]\ ,\qquad |f'(x)| \leqslant Mx^p\ ,\quad p \in \mathbb{N}\ .$$

(a) Pour tout x de $[0\ ,\ a]$, majorer $\left|\int_0^x f'(t)\,dt\right|$ en fonction de x .

(b) En déduire :

$$\forall\ x \in [0\ ,\ a]\ ,\qquad |f(x) - f(0)| \leqslant M\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\ .$$

I) Calcul de π à l'aide d'une intégrale.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(\frac{1}{2}\ ;\ 0)$, et de rayon $\frac{1}{2}$. Soient A le point de coordonnées $(\frac{1}{4}\ ;\ 0)$, et B le point du cercle d'abscisse $\frac{1}{4}$ et d'ordonnée positive.

1)(a) Faire une figure.

(b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du cercle $\mathcal{C}$, et l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle ΩAB .

2)(a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$.

(b) Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire $\mathcal{A}_2$ du domaine compris entre le segment $[O\ ,\ A]$, le segment $[A\ ,\ B]$, et l'arc de cercle $\overset{\frown}{OB}$.

3)(a) Déterminer une expression de π en fonction de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

(b) Donner une approximation décimale de $\mathcal{A}_1$ à 10^{-7} près.

On se propose maintenant de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}_2$.

II) Soient f et g les fonctions définies par :

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x - x^2} \quad ,$$

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{1 - x} \quad .$$

1)(a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g de f et g ?

(b) Quelle est la courbe représentative de f ?

(c) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $g(x)$, pour x élément de D_f .

2) Donner un développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage de 0 .

3)(a) Déterminer $g(0)$, g' , $g'(0)$, g'' , $g''(0)$, $g^{(3)}$, $g^{(3)}(0)$, $g^{(4)}$.

(b) Déterminer un réel M tel que :

$$\forall\, x \in [0 , \tfrac{1}{4}] , \qquad |g^{(4)}(x)| \leqslant M \quad .$$

4)(a) En remarquant que $g^{(4)}$ est la fonction dérivée de $g^{(3)}$, et que $g^{(3)}(0) = -\frac{3}{8}$, majorer en fonction de x l'expression $|g^{(3)}(x) + \frac{3}{8}|$ pour $x \in [0 , \frac{1}{4}]$.

(b) De façon analogue, majorer en fonction de x l'expression $|g^{(2)}(x) + \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}|$ pour $x \in [0 , \frac{1}{4}]$.

(c) En itérant le procédé, démontrer :

$$\forall\, x \in [0 , \tfrac{1}{4}] , \qquad g(x) - (1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3) = x^3\,\varepsilon(x) \quad ,$$

$$\text{avec } |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{M}{24}x \quad .$$

En déduire un développement limité d'ordre 3 de g au voisinage de 0 .

5)(a) Montrer :

$$\forall\, x \in [0 , \tfrac{1}{4}] , \qquad f(x) = h(x) + x^{7/2}\,\varepsilon(x) \quad ,$$

où ε est la fonction du 4)(c), et $h(x)$ est de la forme :

$$h(x) = \sum_{i=1}^{4} k_i \, x^{\alpha_i} , \qquad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{Q} \ .$$

(b) Déterminer la primitive H de h qui s'annule en 0 . Mettre $H(x)$ sous la forme : $H(x) = x^{3/2} P(x)$, où P est un polynôme de degré 3 .

III) Valeurs approchées de $\mathfrak{A}_2$ et π .

1)(a) Démontrer : $\mathfrak{A}_2 = q + r$, avec $q \in \mathbb{Q}$, et r un réel vérifiant :

$$|r| \leqslant M' , \qquad \text{où} \quad M' = \frac{M}{24} \int_0^{1/4} x^{9/2} \, dx \ .$$

(On utilisera les résultats obtenus dans les parties I et II.)

(b) Donner une valeur approchée de q à 10^{-7} près.

(c) Calculer :

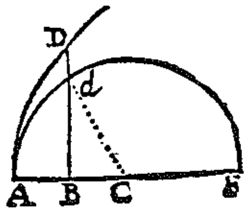
$$\int_0^{1/4} x^{9/2} \, dx \ ;$$

en déduire une valeur approchée de M' par excès à 10^{-7} près.

2) En déduire une valeur approchée de $\mathfrak{A}_2$. Quelle est la précision obtenue ?

3) Donner une valeur approchée de π . Quelle est la précision obtenue ?

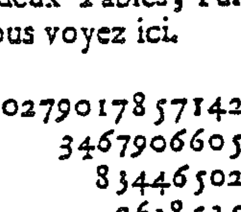
XLVI. Soit proposée l'Hyperbole AD dont l'Equation est $\sqrt{x + xx} = z$, le Sommet étant en A & les deux Axes égaux chacun à l'unité ; par ce qui a été dit ci-devant l'Aire ADB est $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$, &c. c'est-à-dire, $x^{\frac{1}{2}} \times (\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$, &c. Suite que l'on peut continuer à l'infini en multipliant continuellement le dernier Terme par les Termes successifs de cette Progression $\frac{1.3}{2.5}x$, $\frac{-1.5}{4.7}x$, $\frac{-3.7}{6.9}x$, $\frac{-5.9}{8.11}x$, $\frac{-7.11}{10.13}x$, &c. c'est-à-dire que le premier Terme $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ multiplié par $\frac{1.3}{2.5}x$, formera le second Terme $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$; lequel second Terme multiplié par $\frac{-1.5}{4.7}x$ formera le troisiéme Terme $- \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$, qui multiplié par $\frac{-3.7}{6.9}x$ donnera le quatriéme Terme $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ & ainsi à l'infini ; prenons maintenant AB de telle longueur que nous voudrons, par Exemple $\frac{1}{4}$; écrivons ce Nombre pour x, sa Racine $\frac{1}{2}$ pour $x^{\frac{1}{2}}$; le premier Terme $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$ réduit en Fractions decimales devient 0. 083333333, &c. ce qui multiplié par $\frac{1.3}{2.5.4}$ produit le second Terme 0.00625 qui multiplié par $\frac{-1.5}{4.7.4}$ donne $-$ 0.0002790178, &c. pour le troisiéme Terme & ainsi de suite à l'infini ; à mesure que je tire ainsi la Valeur de ces Termes je les dispose en deux Tables, l'une des affirmatifs & l'autre des négatifs, comme vous voyez ici.



+ 0.08333333333333333	— 0.0002790178571429
6250000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7964	75
352	4
16	— 0.0002825719389575
1	+ 0.0896109885646518
+ 0.0896109885646518	0.0893284166257043

Et ôtant la somme des negatifs de celle des affirmatifs, je trouve 0.0893284166257043 pour l'Aire Hyperbolique ADB, que je cherchois.

XLVII. Soit maintenant proposé le Cercle AdF representé par l'Equation $\sqrt{x - xx} = z$, le Diametre étant supposé égal à l'unité ; par ce qui a été dit ci-devant l'Aire AdB sera $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$, &c. comme cette suite ne differe de celle qui exprime l'Aire Hyperbolique que par les Signes + & — ;



il n'y a donc qu'à joindre ensemble les mêmes Termes numériques avec d'autres Signes, c'est-à-dire, ôter le Total des deux Sommes des deux Tables 0.0898935605036193 du premier Terme doublé 0.1666666666666, &c. le reste 0.0767731061630473 sera la portion A*d*B de l'Aire circulaire, AB étant le quart du Diametre, nous pouvons observer ici que quoique les Aires du Cercle & de l'Hyperbole ne soient pas comparables Géometriquement, elles se trouvent cependant par le même calcul Arithmetique.

XLVIII. L'Aire de la portion A*d*B étant trouvée, l'on peut en tirer l'Aire totale; car en tirant le Raïon *d*C & multipliant *b*D ou $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ par *b*C ou $\frac{1}{4}$, la moitié $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ du produit ou 0.0541265877365275 sera la Valeur du Triangle C*d*B, laquelle étant ajoutée à l'Aire A*d*B donne l'Aire du Secteur AC*d* = 0.1308996938995747, dont le Sextuple 0.7853981633974482 est la Valeur de l'Aire totale.

XLIX. On peut observer en passant que la longueur de la Circonférence qui est égale à l'Aire divisée par le quart du Diametre est égale à 3.141592653589 7928.

chapitre 2
Construction de tangentes

Les géomètres anciens savaient construire des tangentes aux coniques et à quelques autres courbes, comme la spirale étudiée par ARCHIMEDE, mais la méthode était spécifique à chaque courbe. Les premières méthodes générales sont dues à DESCARTES (qui construit de fait la sous-normale, Géométrie, livre 2, 1637) et à P. de FERMAT qui donne une méthode plus simple. FERMAT possédait vraisemblablement sa méthode dès 1629, comme le montre une lettre à ROBERVAL datée de 1636 ; elle fut publiée pour la première fois par HERIGONE en 1642. A proprement parler, cette méthode n'est pas infinitésimale, mais s'y ramène par modification du langage, comme le fera BARROW. Vers 1659, PASCAL, pour sa part, utilise dans ses recherches sur la cycloïde un triangle infiniment petit. BARROW, puis LEIBNIZ, reprendront cette idée.

Au milieu du XVIIIème siècle, le calcul infinitésimal, si des doutes subsistent sur ses bases, a fait ses preuves. Les deux textes de D'ALEMBERT sont de la vulgarisation scientifique, l'un destiné à l'Encyclopédie (article "différentiel", 1754), l'autre écrit à la demande de Frédéric de Prusse. On remarquera avec quelle netteté la notion de limite est explicitée. L'apport de D'ALEMBERT est en effet d'insister, en opposition à EULER qui utilise les infiniment petits, sur le fait que "La théorie des limites est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel" (article "limite" dans l'Encyclopédie, 1765).

FERMAT : "Varia Opera Mathematica"
Toulouse, 1679
Traduction Tannery, 1896, Paris.

Niveau:

1e S - TD

Exercice 1.

Soit $[A , C]$ un segment de longueur b. On cherche un point E de $[A , C]$, tel que $AE \times EC$ soit maximum.

On pose $AC = b$, et on cherche $AE = a$.

1) Exprimer le produit $AE \times EC$ en fonction de a et b.

2) Soit $E' \in [A , C]$ tel que $AE' = a + e$.

Exprimer $AE' \times E'C$ en fonction de a, b et e. *Lire le texte lignes 1 à 6.*

e peut-il être négatif ?

Discuter la position du point E' suivant le signe de e.

FERMAT se préoccupe-t-il de ce signe ?

3) On pose $\Delta(e) = AE' \times E'C - AE \times EC$.

(a)Montrer :

$[\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout $e]$ si et seulement si $[AE \times EC$ est maximum$]$.

Nous allons chercher une valeur de a pour laquelle $\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout e.

(b) Exprimer $\Delta(e)$ sous la forme $Ae + Be^2$.

(c)Déterminer une relation entre a et b impliquant $\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout e (quel que soit son signe).

(d)Où faut-il placer E pour que $AE \times EC$ soit maximum ? *Lire le texte de la ligne 7 à la ligne 12.*

(e)La relation entre a et b serait-elle la même si e était toujours positif ?

Exercice 2.

Dans le repère orthonormé $(O , \vec{\imath} , \vec{\jmath})$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de $f : x \to x^2$. Soit B un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse positive, et C la projection orthogonale de B sur $(D , \vec{J})$.

On appelle Δ la tangente en B à $\mathcal{P}$; Δ coupe $(D , \vec{J})$ en E . On se propose de déterminer analytiquement Δ et, pour cela, de calculer la distance CE (ce qui détermine le point E).

1) Faire une figure. La comparer à la figure 92 du texte.

Soit O un point de $[B , E]$ d'ordonnée positive, et I la projection orthogonale de O sur $(D , \vec{J})$. La droite (OI) coupe $\mathcal{P}$ en O' .

CD est connu (abscisse de B). On pose $CD = d$ et $DI = d - e$. On cherche $CE = a$. Pour trouver a , on fera varier e .

Que représente e sur la figure ?

Si $O \in (BE)$ est tel que $B \in [O , E]$, quel doit être le signe de e si $DI = d - e$? Que représente alors e ?

2) Comparer $\frac{CD}{DI}$ et $\frac{BC^2}{OI^2}$, puis $\frac{CD}{DI}$ et $\frac{CE^2}{IE^2}$. *Lire le texte de la ligne 13 à la ligne 21. (Le théorème de Thalès équivaut à la similitude des triangles.)*

Quel est l'argument sur O employé par FERMAT pour obtenir $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$?

3) Exprimer IE en fonction de a et e .

Déduire de ce qui précède une inégalité où interviennent a , d et e . *Lire le texte de la ligne 22 à la ligne 26.*

4) Après simplification, mettre l'inégalité sous la forme $Ae^2 > Be$.

Donner une relation entre a et d impliquant que l'inégalité est vraie pour tout e (quel que soit son signe). *Lire le texte de la ligne 27 à la ligne 36.*

5) Ecrire une équation de Δ en fonction de d (en utilisant $a = 2d$).

6) Dans un repère orthonormé, construire une dizaine de tangentes (à l'aide de l'équation déterminée en 5), et en prenant diverses valeurs de d). Qu'observe-t-on ?

Remarque : Ces exercices ont été posés sous une forme légèrement différente en 1e S, avant l'introduction des dérivées, et en TD, à titre de révision.
Cette expérimentation nous a amenés à donner une rédaction nouvelle à ces exercices, qui n'ont pas encore été proposés dans des classes.

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

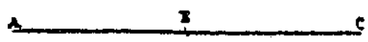
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum.*

Fig. 91.



Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba - a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$;

Supprimez e : $b = 2a$.

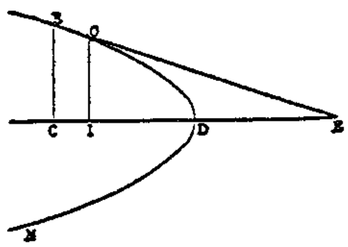
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais, $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

FERMAT : "Varia Opera Mathematica"
Toulouse, 1679
Traduction Tannery, 1896, Paris.

Niveau:

2e - 1e

Exercice 1.

Soit $[A , C]$ un segment de longueur b . On cherche un point E de $[A , C]$ tel que $AE \times EC$ soit maximum.

On pose $AC = b$, et on cherche $AE = a$.

1) Exprimer le produit $AE \times EC$ en fonction de a et b .

2) Soit $E' \in [A , C]$ tel que $AE' = a + e$.

Exprimer $AE' \times E'C$ en fonction de a , b et e . *Lire le texte lignes 1 à 6.* Le nombre e peut-il être négatif ?

Discuter la position du point E' suivant le signe de e .

Fermat se préoccupe-t-il de ce signe ?

3) On pose $\Delta(e) = AE' \times E'C - AE \times EC$.

(a)Montrer :

$[\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout $e]$ si et seulement si $[AE \times EC$ est maximum$]$.

Nous allons chercher une valeur de a pour laquelle $\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout e .

(b)Exprimer $\Delta(e)$ sous la forme $Ae + Be^2$.

(c)Déterminer une relation entre a et b impliquant $\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout e (quel que soit son signe).

(d)Où faut-il placer E pour que $AE \times EC$ soit maximum ? *Lire le texte de la ligne 7 à la ligne 12.*

(e)La relation entre a et b serait-elle la même si e était toujours positif ?

Exercice 2.

Soit $[A , C]$ un segment de longueur b . On cherche un point B de $[A , C]$

tel que $AB^2 \times BC$ soit maximum.

On pose $AC = b$, et on cherche $AB = a$.

1) Exprimer le produit $AB^2 \times BC$ en fonction de a et b .

2) Soit $B' \in [A , C]$ tel que $AB' = a + e$.

Exprimer $AB'^2 \times B'C$ en fonction de a , b et c . *Lire le texte de la ligne 13 à la ligne 21.*

3) On pose $\Delta(e) = AB'^2 \times B'C - AB^2 \times BC$.

(a)Montrer :

$$[AB^2 \times BC \text{ est maximum}] \quad \text{si et seulement si} \quad [\Delta(e) \leqslant 0 \text{ pour tout } e] \; .$$

(b)Exprimer $\Delta(e)$ sous la forme $Ae + Be^2 + Ce^3$.

(c)Déterminer a tel que $A = 0$ $(a \neq 0)$.

Montrer que, pour cette valeur de a , $\Delta(e) \leqslant 0$ pour tout e (quel que soit son signe).

(d)Où faut-il placer B pour que $AB^2 \times BC$ soit maximum ? *Lire le texte jusqu'à la fin.*

Exercice 3.

Soit f définie par :

$$f : \begin{array}{l} [0 , 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longrightarrow (a - 1)^3 \end{array} .$$

On se propose de chercher $a \in [0 , 2]$ tel que $f(a)$ soit maximum.

1) Développer, ordonner, et réduire $(a - 1)^3$.

2) Calculer $f(a + e)$.

3) On pose $\Delta(e) = f(a + e) - f(a)$.

Montrer :

$$[f(a) \text{ est maximum}] \quad \text{si et seulement si} \quad [\Delta(e) \leqslant 0 \text{ pour tout } e] \; .$$

Exprimer $\Delta(e)$ sous la forme $Ae + Be^2 + Ce^3$.

4) Déterminer a tel que $A = 0$.

Cette valeur de a réalise-t-elle un maximum pour f ?

5) La méthode de FERMAT s'applique-t-elle à ce cas ?

Remarque : Ces exercices n'ont pas encore été utilisés en classe. En effet, l'expérimentation précédente et la lecture d'autres extraits du même texte de FERMAT nous ont donné envie de rédiger des exercices utilisables en seconde pour les notions d'extremum.

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Céla fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum.*

Fig. 91.

Posons AC $= b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba-a^2$. Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba-a^2+be-2ae-e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba-a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae+e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a+e$;

Supprimez e : $b=2a$.

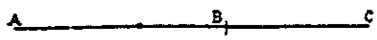
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.



Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$: on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2 b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a+e)^2(b-e-a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3.$$

Je le compare au premier solide : $a^2 b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité*, pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins ; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e ; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a : j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

Revenons à notre question, et divisons AC en B en sorte que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$, je dis que le solide $AB^2 \times BC$ est le maximum de tous ceux qui peuvent être formés sur la ligne AC, par une autre division quelconque.

D'ALEMBERT : "Eclaircissemens sur les Elémens de Philosophie"
in Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie, t. V, 1767.

Extrait de l'article "différentiel"
in Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, t. IV, Paris, 1754.

Niveau:

1°A1-TA1

Les exercices ont été conçus pour préparer la lecture du premier texte, texte de vulgarisation.

On considère la fonction f définie sur $[0\ ,\ 2]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 1\ , \quad \text{si } x < 1\ ,$$

et

$$f(x) = -x^3 + 2x + 1\ , \quad \text{si } x \geq 1\ .$$

On appelle (Γ), la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\omega\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

I. On note A et B, les points de (Γ) d'abscisses respectives 1 et x $(x \neq 1)$. On pose :

$$T(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 1}\ .$$

Que représente $T(x)$ pour la droite (AB) ?

La fonction T admet-elle une limite quand x tend vers 1 ?

Montrer que (Γ) admet une tangente (Δ) en A, déterminer une équation cartésienne de (Δ), et étudier la position de (Γ) par rapport à (Δ).

II. Etudier les variations de f sur $[0\ ,\ 2]$, et tracer la courbe (Γ).

III. *Lire le texte ci-joint.*

On se propose d'illustrer ce texte de d'Alembert par le graphique précédent.

1) Donner, sur ce graphique, une disposition des points nommés par d'Alembert

(on pourra utiliser des couleurs différentes).

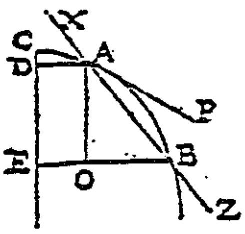
2) Calculer DE et BO en fonction de x , puis le "rapport de d'Alembert" *(lignes 25 à 28)* . Que représente ce "rapport" pour la sécante (AB) ?

3) Etablir une relation entre $f'(1)$ et ce "rapport".

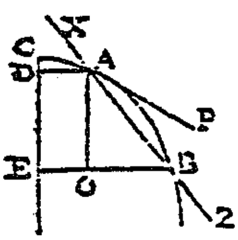
4) Donner, en quelques lignes, les remarques que vous inspire ce texte.

Remarque : Cet exercice a été donné lors d'une épreuve de type "bac blanc" en TA1, et assez bien réussi par les quelques élèves qui ont eu le temps de finir l'épreuve. Il peut très bien être donné en 1^eA1.

Ce que j'ai dit sur la quantité infinie, je le dis de même de la quantité infiniment petite. Le calcul de l'infini ne suppose point l'existence de ces sortes de quantités. Il est nécessaire de développer cette idée.



Je veux par exemple, trouver la tangente d'une courbe CAB au point A. Je prends d'abord deux points à volonté A, B, sur cette ligne courbe, & par ces deux points, je tire une ligne droite AB, indéfiniment prolongée vers Z & vers X, laquelle coupe la courbe, comme cela est évident; j'appelle cette ligne une *sécante;* j'imagine ensuite une ligne fixe CE, placée à volonté dans le plan sur lequel est tracée la courbe; & par les deux points A, B, que j'ai pris sur la courbe, je mene des ordonnées AD, BE, perpendiculaires à cette ligne fixe CE, que pour abréger j'appelle l'*axe* de la courbe. Il est d'abord évident que la position de la sécante est déterminée par la distance DE des deux ordonnées & par leur différence BO; en sorte que si on connoissoit cette distance & cette différence, ou même le



rapport de la distance des ordonnées à leur différence, on auroit la position de la sécante. Imaginons à présent que des deux points A, B, que nous avons supposés sur la courbe, il y en ait un, par exemple B, qui se rapproche continuellement de l'autre point A; & que par cet autre point A, qu'on suppose fixe, on ait tiré une tangente AP à la courbe; il est aisé de voir que la sécante AB, tirée par ces deux points A, B, dont l'un est supposé se rapprocher de plus en plus de l'autre, approchera continuellement de la tangente, & enfin deviendra la tangente même, lorsque les deux points se seront confondus en un seul. La tangente est donc la limite des sécantes, le terme dont elles approchent de plus en plus, sans pourtant jamais y arriver tant qu'elles sont sécantes, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Or nous venons de voir que la position de la sécante se détermine par le rapport de la différence BO des ordonnées, à leur distance DE.

Donc si on cherche la *limite* de ce rapport, c'est-à-dire la valeur dont ce rapport approche toujours de plus en plus à mesure que l'une des ordonnées s'approche de l'autre, cette limite donnera la position de la tangente, puisque la tangente est la limite des sécantes.

En quoi consiste donc le calcul qu'on appelle *différentiel?* A trouver la limite du rapport entre la différence finie de deux quantités, & la différence finie de deux autres quantités, qui ont avec les deux premieres une analogie dont la loi est connue.

Il est évident que plus chacune de ces différences est petite, plus leur rapport approche de la limite qu'on cherche. Il est de plus *évident,* que tant que ces différences ne sont pas absolument nulles, le rapport n'est pas exactement égal à cette limite; & que lorsqu'elles sont nulles, il n'y a plus de rapport proprement dit: car il n'y a point de rapport entre deux choses qui n'existent point: mais la limite du rapport que ces différences avoient entr'elles lorsqu'elles étoient encore quelque chose, cette limite n'est pas moins réelle; & c'est la valeur de cette limite qui conduit, comme nous l'avons vu, à déterminer la position de la tangente.

Pour faire entendre par un exemple, ce que je viens de dire sur la limite des rapports, je suppose deux quantités, dont la seconde soit égale au double de la premiere plus au quarré de cette premiere; il est évident, 1°. que le rapport de la seconde à la premiere sera toujours plus grand que le nombre *deux,* tant que la premiere & la seconde auront quelque valeur; 2°. que le rapport de la seconde à la premiere approchera d'autant plus d'être égal à *deux,* que cette premiere sera plus petite, & que ce rapport peut approcher aussi près qu'on voudra du nombre *deux,* en prenant la premiere quantité aussi petite qu'il le faudra. D'où il s'ensuit que le nombre 2 est la limite du rapport de ces deux quantités; lorsque la premiere des deux quantités devient nulle, la seconde devient aussi évidemment nulle; & il est vrai de dire qu'elles n'ont alors proprement aucun rapport, mais il n'est pas moins vrai ni moins évident, que 2 est la limite de leur rapport tant qu'elles sont quelque chose.

Soit AM (*fig. 3, Analyse.*) une parabole ordinaire, dont l'équation, en nommant AP, x, PM, y, & a le paramètre, est $yy = ax$. On propose de tirer la tangente MQ de cette parabole au point M. Supposons que le problème soit résolu, & imaginons une ordonnée pm à une distance quelconque finie de PM; & par les points M, m tirons la ligne mMR. Il est évident, 1.° que le rapport $\frac{MP}{PQ}$ de l'ordonnée à la soutangente, est plus grand que le rapport $\frac{MP}{PR}$ ou $\frac{mO}{MO}$, qui lui est égal à cause des triangles semblables MOm, MPR: 2.° que plus le point m sera proche du point M, plus le point R sera près du point Q, plus par conséquent le rapport $\frac{MP}{PR}$ ou $\frac{mO}{MO}$ approchera du rapport $\frac{MP}{PQ}$; & que le premier de ces rapports pourra approcher du second aussi près qu'on voudra, puisque PR peut différer aussi peu qu'on voudra de PQ. Donc le rapport $\frac{MP}{PQ}$ est la limite du rapport de mO à OM. Donc, si on peut trouver la limite du rapport de MO à OM, exprimée algébriquement, on aura l'expression algébrique du rapport de MP à PQ; & par conséquent l'expression algébrique du rapport de l'ordonnée à la soutangente, ce qui fera trouver cette soutangente. Soit donc $MO = u$, $Om = z$, on aura $ax = yy$, & $ax + au = yy + 2yz + zz$. Donc, à cause de $ax = yy$, il vient $au = 2yz + zz$ & $\frac{z}{u} = \frac{a}{2y+z}$.

Donc $\frac{a}{2y+z}$ est en général le rapport de mO à OM, quelque part que l'on prenne le point m. Ce rapport est toujours plus petit que $\frac{a}{2y}$; mais plus z sera petit, plus ce rapport augmentera; & comme on peut prendre z si petit qu'on voudra, on pourra faire approcher le rapport $\frac{a}{2y+z}$ aussi près qu'on voudra du rapport $\frac{a}{2y}$; donc $\frac{a}{2y}$ est la limite du rapport de $\frac{a}{2y+z}$, c'est-à-dire du rapport $\frac{mO}{OM}$. Donc $\frac{a}{2y}$ est égal à $\frac{MP}{PQ}$, que nous avons trouvé être aussi la limite du rapport de mO à OM; car deux grandeurs, qui sont la limite d'une même grandeur, sont nécessairement égales entr'elles. Pour le prouver, soient Z & X les limites d'une même quantité Y, je dis que $X = Z$; car, s'il y avoit entr'elles quelque différence V, soit $X = Z \pm V$: par l'hypothèse, la quantité Y peut approcher de X aussi près qu'on voudra; c'est-à-dire que la différence de Y & de X peut être aussi petite qu'on voudra. Donc, puisque Z diffère de X de la quantité V, il s'ensuit que Y ne peut approcher de Z de plus près que la quantité V, & par conséquent que Z n'est pas la limite de Y, ce qui est contre l'hypothèse. *Voyez* LIMITE, EXHAUSTION.

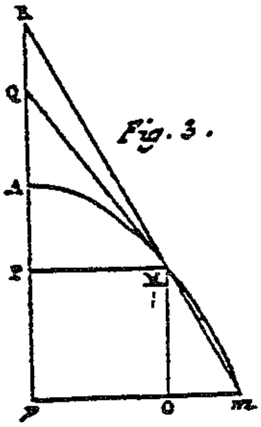


Fig. 3.

De-là il résulte que $\frac{MP}{PQ}$ est égal à $\frac{a}{2y}$. Donc $PQ = \frac{2yy}{a} = 2x$. Or, suivant la méthode du calcul *différentiel*, le rapport de MP à PQ est égal à celui de dy à dx; & l'équation $ax = yy$ donne $adx = 2y\,dy$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Ainsi, $\frac{dy}{dx}$ est la limite du rapport de z à u; & cette limite se trouve en faisant $z = o$ dans la fraction $\frac{a}{2y+z}$. Mais, dira-t-on, ne faut-il pas faire aussi $z = o$ & $u = o$, dans la fraction $\frac{z}{u} = \frac{a}{2y+z}$, & alors on aura $\frac{o}{o} = \frac{a}{2y}$. Qu'est-ce que cela signifie? Je réponds, 1.° qu'il n'y a, en cela, aucune absurdité; car $\frac{o}{o}$ peut être égal à tout ce qu'on veut: ainsi, il peut être $\frac{a}{2y}$. Je réponds, 2.° que, quoique la limite du rapport de z à u se trouve quand $z = o$ & $u = o$, cette limite n'est pas proprement le rapport de $z = o$ à $u = o$, car cela ne présente point d'idée nette; on ne sait plus ce que c'est qu'un rapport dont les deux termes sont nuls l'un & l'autre. Cette limite est la quantité dont le rapport $\frac{z}{u}$ approche de plus en plus, en supposant z & u tous deux réels & décroissans, & dont ce rapport approche d'aussi près qu'on voudra. Rien n'est plus clair que cette idée; on peut l'appliquer à une infinité d'autres cas. *Voyez* LIMITE, SÉRIE, PROGRESSION, *&c.*

chapitre 3
A propos de courbes

Les anciens connaissaient d'autres courbes que les coniques: la spirale, déjà citée, mais aussi des cubiques qui apparaissent dans des recherches de lieux géométriques (trisectrice d'HIPPIAS, liée à la trisection de l'angle, cissoïde de DIOCLES, etc.).

Avec la géométrie analytique de DESCARTES, qui réduit l'étude d'une courbe à l'algèbre, apparaît la distinction fondamentale entre les courbes algébriques et les courbes mécaniques (nous dirions transcendantes) comme la cycloïde, très étudiée au XVIIème siècle par PASCAL, ROBERVAL, HUYGENS (brachystochrone).

Le texte de HUYGENS étudie géométriquement une courbe introduite par l'intermédiaire de l'analyse, à savoir les propriétés des logarithmes liés, comme l'avait montré Grégoire de Saint VINCENT, à l'hyperbole équilatère. Il est trop tôt pour parler de graphe d'une fonction, car la notion de fonction commence à peine à se dégager et n'a pas de statut explicite avant les premières années du XVIIIème siècle. La terminologie "logistique" tient au rôle fondamental des logarithmes dans la manipulation des raisons, c'est-à-dire des rapports (λ o γ o s), réalisant la liaison entre les raisons et l'addition des nombres.

L'aspect représentation graphique d'une fonction prévaut aux XVIIIème et XIXème siècles, la courbe traduisant les propriétés de la fonction. Dès lors que l'analyse pose ses fondements et définit rigoureusement les notions de continuité et de dérivabilité, l'étude des courbes s'affine, et l'on voit apparaître des "monstres", par exemple des fonctions continues non dérivables. L'intérêt de la courbe de VON KOCH est de montrer géométriquement comment, par itération de constructions simples, on voit apparaître de manière naturelle des courbes sans tangente. Les recherches de ces dernières années ont fait apparaître le rôle important de ces objets fractals dans la description des phénomènes naturels.

HUYGENS : "Discours de la cause de la Pesanteur"
A la suite du "Traité de La Lumière", Leide, 1690.

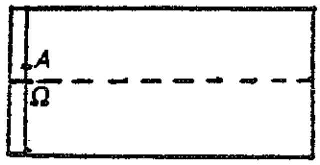
Niveau :

TC

Travail dirigé :

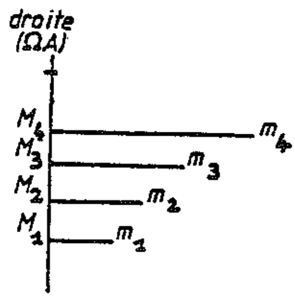
I. CONSTRUCTION D'UNE COURBE POINT PAR POINT

Sur papier millimétré, unité 2 cm , placer Ω sur le grand axe de la feuille, $(A\Omega)$ perpendiculaire à cet axe, et $A\Omega = 1$.



Tous les segments $[Mm]$ envisagés dans la suite sont perpendiculaires à $(A\Omega)$, leur extrémité gauche M étant sur $(A\Omega)$.

D'autre part, si ces segments sont équidistants, leurs longueurs sont en progression géométrique, c'est-à-dire que, si $M_1 M_2 = M_2 M_3 = M_3 M_4$, alors $M_1 m_1$, $M_2 m_2$, $M_3 m_3$, $M_4 m_4$ est une progression géométrique.



1) • Tracer les segments $[\Omega\omega]$ et $[Aa]$ tels que $\Omega\omega = 1$ et $Aa = 2$.

• Tracer de nouveaux segments (le plus grand nombre possible) de part et d'autre de ceux-là de telle sorte que la distance entre deux segments voisins quelconques soit égale à 1 . (Justifier brièvement la longueur de ces segments.)

• Tracer le segment $[B , b]$, B étant milieu de $[\Omega A]$. (Justifier sa longueur.)

Compléter de manière analogue de part et d'autre de $[Aa]$ et $[\Omega\omega]$ pour obtenir une figure où tous les segments sont régulièrement espacés.

- Tracer $[Cc]$, C étant milieu de $[\Omega B]$, puis compléter de manière analogue tout le graphique.

Finalement, tous les segments tracés sont espacés de $\frac{1}{4}$.

- Compléter ce tableau, en considérant des points M consécutifs sur le graphique.

Longueur de $[Mm]$					1				2				
Ordonnée de M					0		$\frac{1}{2}$		1				

Que peut-on dire de la suite des nombres de la 2e ligne du tableau ? de la 1ère ?

2) Soit $\mathscr{C}$ courbe passant par l'extrémité droite de tous les segments, et f fonction dont $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans le repère $(\Omega , \overrightarrow{\Omega\omega} , \overrightarrow{\Omega A})$.

Compléter :

- le tableau

x						...
$f(x)$						

où x prend les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{8} , \frac{1}{4} , \frac{1}{2} , 1 , \sqrt{2} , 2 , 2\sqrt{2} , 4 , 8 \quad ;$$

- les égalités

$$f(4) + f(2) = f(?)$$

$$f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{4}) = f(?) \qquad f(2) + f(\tfrac{1}{2}) = f(?)$$

$$f(2) + f(\sqrt{2}) = f(?) \qquad f(8) - f(2) = f(?)$$

$$f(4) - f(\sqrt{2}) = f(?) \qquad f(4) + f(?) = f(4) \quad .$$

3) Sur une feuille de papier calque (16 cm x 24 cm).

Dans ce paragraphe, tous les points m considérés sont ceux d'ordonnée $\frac{k}{2}$, k étant un entier relatif.

- Placer le calque sur le graphique, et y tracer $(A\Omega)$, $[\Omega\omega]$, et le repère.
- Pour chaque point m , on définit M' par $\overrightarrow{MM'} = -1{,}45\overrightarrow{\Omega A}$.

  Tracer sur le calque les segments $[Mm]$ et les droites $(M'm)$.
- Que vaut le coefficient directeur de $(M'm)$?
- Quelle position semble occuper la droite M'm par rapport à la courbe $\mathcal{C}$?

II. LECTURE DU TEXTE (1ère PARTIE)

1) HUYGENS donne la propriété fondamentale de "la logistique".

- Donner de cette propriété un énoncé plus conforme à la terminologie actuelle, et refaire un dessin où ne figureront que les traits et points nécessaires à la compréhension de cet énoncé.
- "La logistique" pourrait-elle être une autre courbe que $\mathcal{C}$ (tracée au I, 2)) ?

2) La propriété encadrée, indiquée au début du I, permet-elle théoriquement de trouver sur $\mathcal{C}$ autant de points que l'on veut ? de trouver tous les points de $\mathcal{C}$?

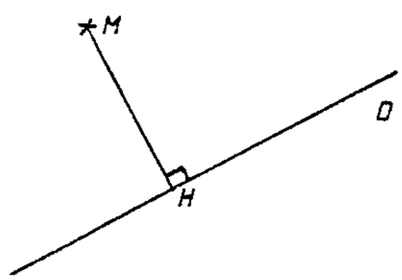
3) Soit f fonction dérivable représentée graphiquement par "la logistique" dans un repère orthonormé dont l'axe des ordonnées est l'asymptote BO orientée par $\overrightarrow{OB}$.

Que peut-on dire du nombre $f'(x_0)$, d'après la propriété 4 du texte de HUYGENS ?

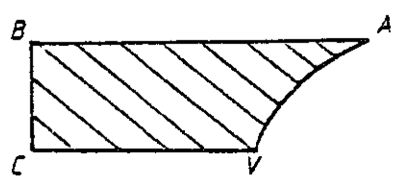
Indications :

Nombres proportionnels continus : nombres en progression géométrique.

Ordonnée du point M sur la droite D : le segment $[MH]$ ou sa longueur.



Espace ABCV : aire du domaine hachuré.



" a <u>et</u> b <u>sont entre eux comme</u> c <u>et</u> d " : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

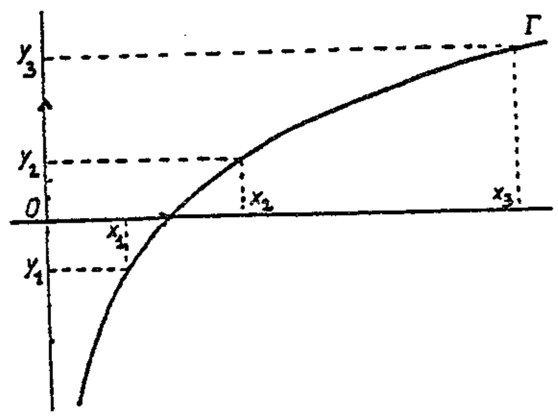
<u>Logistique</u> : les Grecs partageaient la science des nombres en deux parties :

- arithmétique ou étude des propriétés des nombres ;
- logistique ou pratique des calculs.

III. PROPRIETES DE LA FONCTION

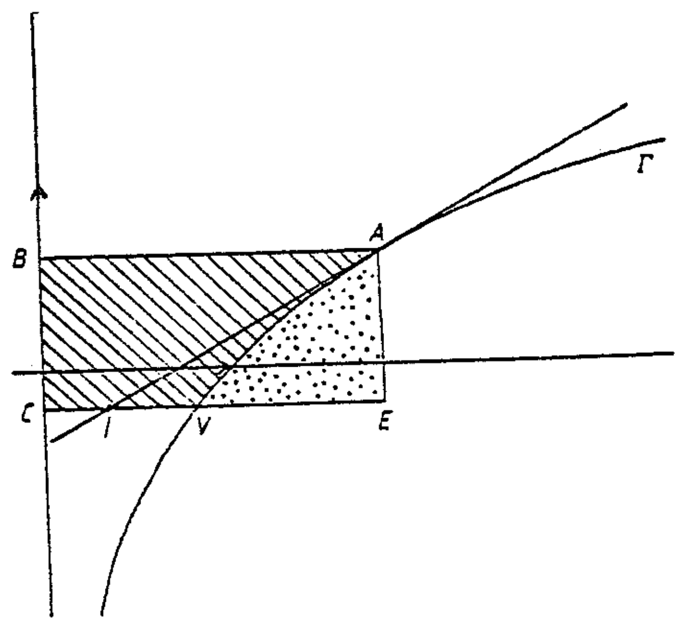
Dans cette partie, Γ est la courbe représentative du logarithme népérien.

1)



y_1, y_2, y_3 étant une progression arithmétique, que peut-on dire de x_1, x_2, x_3 ?

2)



Soit $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ell n\ x_1 \end{pmatrix}$, $V\begin{pmatrix} x_2 \\ \ell n\ x_2 \end{pmatrix}$, x_1 et x_2 étant des réels tels que $0 < x_2 < x_1$.

(a) Calculer

$$\int_{x_2}^{x_1} \ell n\ x\ dx \quad .$$

En déduire l'aire du domaine AVE pointillé, puis celle du domaine hachuré ABCV .

(b) Ecrire l'équation de la tangente à Γ en A (c'est-à-dire (IA)).

En déduire l'abscisse de I , et IV .

Compte-rendu d'expérimentation :

- Le travail dirigé (I et II) a été proposé au mois de septembre à une classe de TC. Le calcul de primitives avait été revu, mais ni les logarithmes, ni les exposants rationnels, n'avaient été étudiés.

Il s'agissait d'abord de mettre en place des points d'une courbe à l'aide de segments (I, 1)). Il n'y a eu aucune difficulté pour les segments espacés de 1 . Pour ceux qu'ils devaient ensuite intercaler, les élèves ont assez souvent tracé des segments dont les longueurs, qu'ils avaient calculées, étaient en progression arithmétique. Ils ont eu du mal à comprendre pourquoi leur erreur était très visible sur la figure.

Les valeurs de la fonction f introduite au I, 2), ainsi que les égalités écrites ensuite, ont surpris la plupart des élèves.

En revanche, trouver des "tangentes" à $\mathcal{C}$ en superposant le graphique sur calque (I, 3)) au premier n'a suscité aucun étonnement.

Le texte de HUYGENS a semblé alors "assez naturel et assez clair" au premier abord. Mais les questions posées ont amené des réponses diverses.

La classe s'est partagée entre ceux qui croyaient que seule l'épaisseur du trait de crayon les empêchait de trouver tous les points de $\mathcal{C}$, et ceux qui pensaient "approcher autant qu'on le voudrait tous les points théoriques de $\mathcal{C}$ " par le procédé utilisé au I.

Lors de la correction, l'existence de points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée $\frac{1}{3}$; ou $\sqrt{5}$, ayant *suscité un certain embarras, une discussion s'est engagée sur les rationnels, les irrationnels ("nombres impalpables"). Les élèves se sont rendu compte qu'ils avaient inconsciemment supposé la fonction continue, et ont constaté avec amusement que HUYGENS ne s'en souciait pas.*

La traduction par $f'(x_0) = \frac{k}{x_0}$ *du fait que la sous-tangente est constante (II, 3)) n'a été donnée spontanément que par des redoublants. La classe a alors compris qu'avec cette nouvelle fonction apparaissait un exemple de primitive pour* $x \mapsto \frac{k}{x}$.

- Après l'étude, en cours, des logarithmes et de l'intégration, la partie III a été proposée à titre d'exercice. Les résultats obtenus :

(aire de ABCV = EV , aire de AVE = VI)

ont été jugés plus précis que le texte de HUYGENS qui pourrait s'écrire :

$$\frac{\text{aire de } ABCV}{\text{aire de } ABQD} = \frac{VE}{DK} \ldots$$

Mais les élèves ont estimé que HUYGENS avait raison puisque "une surface ne peut pas être égale à une longueur".

La classe s'est beaucoup intéressée à l'ensemble du travail proposé. Les élèves ont trouvé que le texte original aurait été trop difficile à lire sans indication (à cause de sa terminologie ancienne) et à comprendre sans la recherche préliminaire du I, mais que "dans l'ensemble, les propositions de HUYGENS sont cohérentes" et en accord avec ce qu'ils auraient pu eux-mêmes dire sur le logarithme népérien.

- Des questions ont été posées.

• Qui était HUYGENS ?

• Etait-il un mathématicien connu ? un grand mathématicien ? un "mathématicien rigoureux" ?

• Dans le cours de TC, l'étude du logarithme se fonde sur la notion de primitive. HUYGENS, qui ne parlait ni de continuité, ni de dérivée, "savait-il démontrer les propriétés de sa courbe" ?

• Comment pouvait-il utiliser sa courbe pour faire des calculs ?

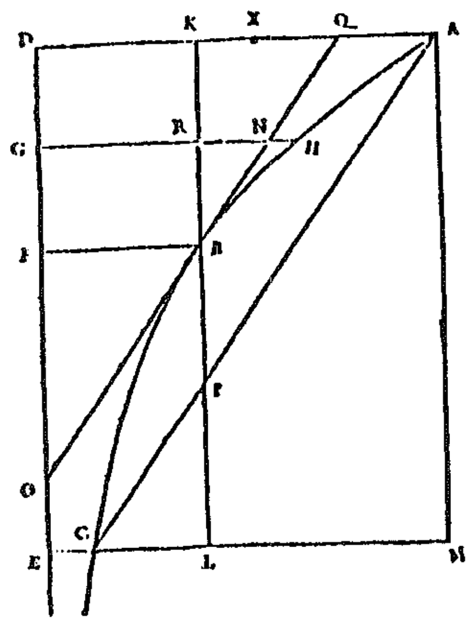
Ce texte a été réédité par l'I. R. E. M. de Dijon (avril 1981)

J'examinay premierement ces mouvemens, en supposant que les forces de la Resistance sont comme les Vitesses des corps, ce qui alors me paroissoit fort vraisemblable. Mais ayant obtenu ce que je cherchois, j'appris presque en mesme temps, par les experiences que nous fimes à Paris dans l'Academie des Sciences, que la resistence de l'air, & de l'eau, estoit comme les quarrez des vitesses. Et la raison est assez aisée à concevoir; parce qu'un corps, allant par exemple avec double vitesse, est rencontré par deux fois autant de particules de l'air ou de l'eau, & avec double celerité. Ainsi je vis ma nouvelle Theorie renversée, ou du moins inutile. Apres quoy je voulus aussi chercher ce qui arrive lors qu'on suppose ce veritable fondement des Resistances; où je vis que la chose estoit beaucoup plus difficile, & sur tout en ce qui regarde la ligne courbe que parcourent les corps jettez obliquement.

Dans la premiere supposition, où les resistances sont comme les vitesses, je remarquay que, pour trouver les espaces passez en de certains temps, lors que les corps tombent ou montent perpendiculairement, & pour connoitre les vitesses au bout de ces temps, il y avoit une ligne courbe, que j'avois examinée long temps auparavant, qui estoit de grand usage en cette recherche. On la peut appeller la *Logarithmique* ou la *Logistique*, car je ne vois pas qu'on luy ait encore donné de nom, quoyque d'autres l'aient encore considerée cy devant. Cette ligne infinie estant ABC, elle a une ligne droite pour Asymptote, comme DE; dans la quelle si on prend des parties égales quelconques qui se suivent, comme DG, GF, & que l'on tire des points D, G, F, des perpendiculaires jusqu'à la courbe, sçavoir,

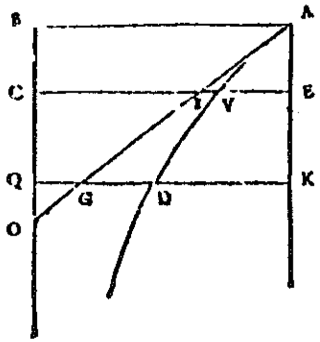
 voir,

voir DA, GH, FB, ces lignes seront proportionelles continuës. D'où l'on voit qu'il est aisé de trouver autant de points qu'on veut dans cette courbe; de la quelle je raporteray par apres quelques proprietez qui meritent d'estre considerées. Pour expliquer ce qui est des chûtes des corps, je repete icy premierement ce que j'ay écrit à la fin du Traité du Centre d'Agitation: sçavoir qu'un corps, en tombant à travers l'air, augmente continuellement sa vitesse, mais toutesfois en sorte qu'il n'en peut jamais exceder, ni mesme atteindre, un certain degré, qui est la vitesse qu'il faudroit à l'air à souffler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir descendre; car alors, la force de l'air contre ce corps, égale sa pesanteur. J'appelle cette vitesse, dans chaque corps, la vitesse *Terminale*.



LEs proprietez de la ligne Logistique, que j'ay promis de raporter. & dont quelques unes ont servi à trouver ce que j'ay remarqué touchant les mouvemens à travers l'air. sont les suivantes; outre la premiere, que j'ay desia indiquée, de la proportionalité des ordonnées à l'asymptote, quand elles sont également distantes, par laquelle on trouve des points dans cette ligne.

1. Que les espaces compris entre deux ordonnées à l'asymptote, sont entre eux comme les differences de ces ordonnées. Ainsi dans cette figure, où AVD est la Logistique, BO son asymptote, & les ordonnées AB, VC, DQ; dont ces dernieres, estant continuées, rencontrent AK, parallele à l'asymptote, en E, K; les espaces ABCV, ABQD sont entre eux comme les droites EV, KD.



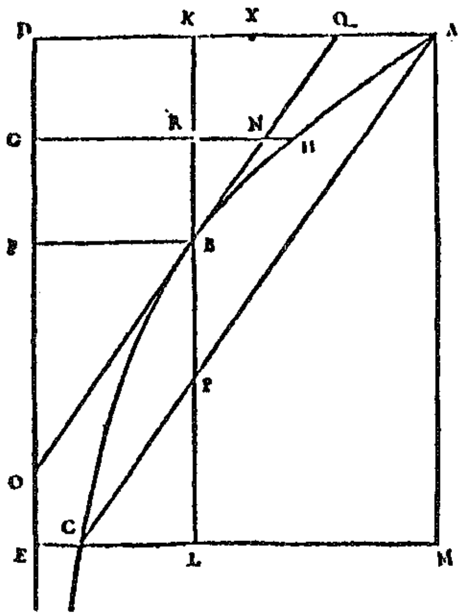
2. Que les mesmes choses estant posées, & AO estant la tangente au point A, laquelle coupe CE, QK, en I & G; les espaces AVE, ADK sont entre eux comme les droites VI, DG.

3. Que l'espace compris entre deux ordonnées, est à l'espace infini, qui, depuis la moindre de ces ordonnées, s'étend entre la Logistique & son asymptote, comme la difference des

des mesmes ordonnées est à la moindre. Quand je dis que l'espace infini à une certaine raison à un espace fini, cela signifie qu'il aproche si prés de la grandeur d'un espace donné, qui à cette proportion à l'espace finl, que la difference peut devenir moindre qu'aucun espace donné. Dans la figure precedente l'espace ABQD est à l'espace infini, qui depuis DQ s'étend entre la courbe & l'asymptote, comme KD à DQ.

4. Que la Soutangente, comme BO dans la mesme figure, est tousjours d'une mesme longueur, à quelque point de la Logistique que la tangente apartiene.

5. Que cette longueur se trouve par approximation, & qu'elle est à la partie de l'asymptote, comprise entre les ordonnées de là raison double, comme 43429 448190325 1804 à 30103999566398 1195; ou, bien pres, comme 13 à 9.



6. Que s'il y a trois ordonnées, comme dans cette figure sont AD, HG, BF, & que du point de la courbe, apartenant à la moindre, on mene une parallele à l'asymptote qui coupe les deux autres ordonnées en R & K, & une tangente BQ qui les coupe en N & Q; les espaces trilignes ABK, HDR sont entre eux, comme les parties des ordonnées entre la courbe & la tangente, sçavoir comme AQ, HN.

7. Que

7. Que l'espace infini entre une ordonnée, la Logistique, & son asymptote, du costé que ces deux dernieres vont en s'approchant, est double du triangle que font l'ordonnée, la tangente menée du mesme point que l'ordonnée, & la soutangente. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace infini, depuis l'ordonnée B F, est double du triangle B F O.

8. Que l'espace, compris entre deux ordonnées, est égal au rectangle de la soutangente & de la difference des mesmes ordonnées. Ainsi, dans la mesme figure, l'espace A D F B est égal au rectangle de la soutangente F O & de K A.

9. Que le solide que fait l'espace infini depuis une ordonnée, en tournant autour de l'asymptote, est sesquialtere du Cone, dont la hauteur est egale à la soutangente, & le demidiametre de la base égal à la mesme ordonnée. Ainsi le solide que fait l'espace infini B F O C, en tournant autour de F O, est sesquialtere du cone que fait le triangle B F O, en tournant autour de la mesme F O.

10. Que le solide produit par le mesme espace infini, en tournant autour de l'ordonnée B F, depuis laquelle il commence, est sextuple du cone que fait le triangle B F O, par sa conversion sur B F. De laquelle mesure des solides il s'ensuit;

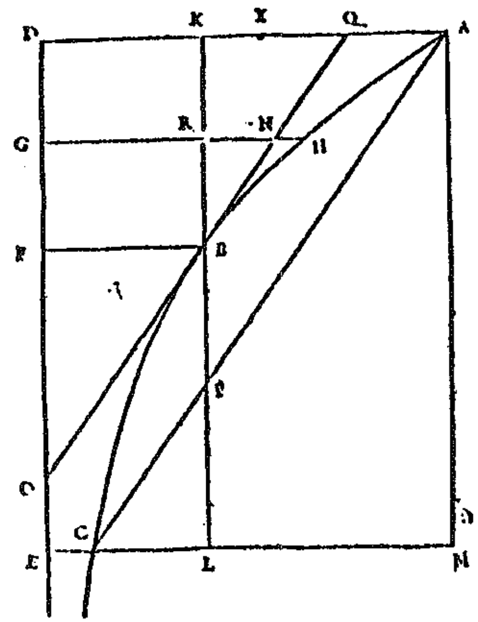
11. Que le centre de gravité de l'espace infini, depuis une ordonnée, est distant de cette ordonnée, de la longueur de la soutangente.

12. Que ce mesme centre de gravité est distant de l'asymptote, du quart de l'ordonnée.

13. J'avois aussi trouvé que le centre de gravité du premier des dits solides infinis, est distant de sa base, de la moitié de la soutangente.

14. Et que le centre de gravité de l'autre solide est distant de sa base infinie, d'une huitieme de son axe.

15. On sçait assez que cette ligne Logistique sert à la Quadrature de l'Hyperbole, depuis les demonstrations du P. Greg. de St. Vincent, touchant les espaces Hyperboliques compris entre deux ordonnees sur une des asymptotes. Et que s'il y a deux tels espaces, dont les ordonnées de l'un soient comme A D à H G dans la derniere figure, & les ordonnées de l'autre comme B F à C E; ces espaces seront entre eux comme les lignes D G à F E.



Mais on n'a point remarqué, que je sçache, que ces mesmes espaces Hyperboliques sont au Parallelogrâme de l'Hyperbole (j'appelle ainsi le parallelogramme dont les costez sont les deux ordonnées sur les asymptotes, tirées d'un mesme point de la Section) comme chacune des lignes D G, F E, à la soutangente F O. De sorte que, si le Parallelogramme de l'Hyperbole est supposé de 0,4342944819 parties, chaque espace Hyperbolique, compris entre deux ordonnées à une des asymptotes, sera à ce parallelogramme, comme le Logarithme de la proportion des mesmes ordonnées, c'est à-dire comme la difference des Logarithmes, des nombres qui expriment la proportion des ordonnées, au nombre 0,4342944819; en prenant des Logarithmes de 10 characteres outre la characteristique.

Et

VON KOCH : "Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire"
Archiv för Matematik, Astronomi och Pysik, 1904, t. 1, p. 681-702.

Niveau: 2nd

Helge VON KOCH (1904) explique comment passer d'un segment à une ligne polygonale en itérant la construction expliquée au paragraphe 1 du texte.

I. Fais de même avec un triangle équilatéral comme figure initiale. (On appelle C_0 le triangle équilatéral ABC de côté 1 - *unité laissée au choix du lecteur* - On appelle C_1 la figure suivante ...)

On présentera, sur une feuille de dessin, C_0 , C_1 , C_2 , C_3 . *(C_4 est laissé aux courageux.)*

Le dessin obtenu s'appelle flocon de VON KOCH ou flocon de neige. Théoriquement, on peut continuer ce procédé à l'infini.

II. On appelle S l'aire de C_0 .

1) Calcule S .

2) Complète le tableau suivant *(pour le début, voir le texte joint au paragraphe 2, à partir de la ligne 14).*

	C_0	C_1	C_2	C_3	...	C_n
Nombre de côtés	3					
Mesure du côté	1					
Longueur totale de la ligne	3					
Nombre de nouveaux triangles		3				
Aire de chacun de ces triangles en fonction de S		$\frac{S}{9}$				
Aire ajoutée en fonction de S		$\frac{S}{3}$				
Aire totale de C_n en fonction de S	S	$\frac{4S}{3}$				

On justifiera les différents résultats obtenus.

Sans le démontrer, on en déduira les formules pour C_n .

III. Vérifier que : $(\frac{4}{3})^9 > 10$.

A quel nombre est supérieur le périmètre du polygone C_{54} ?

Que devient le périmètre de C_n pour n très grand ?

En est-il de même pour l'aire ?

(a) On pourra, à l'aide d'une calculatrice, chercher ce que devient l'aire de C_n pour n très grand. *Ecrire un programme, et présenter les résultats dans un tableau.*

(b) Essaie de faire une démonstration.

- Soit x l'aire de C_n . Exprime $x - S$, puis $\frac{4}{9}(x - S)$ en fonction de S comme une somme de n termes.

- Déduis-en :

$$(x - S) - \frac{4}{9}(x - S) = \frac{1}{3} S - \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \times (\frac{4}{9})^{n-1} S \quad .$$

- On admet que, pour n très grand, $(\frac{4}{9})^{n-1}$ est négligeable ; calcule x dans ce cas, et vérifie ainsi le résultat obtenu au (a).

La courbe de VON KOCH peut être tracée sur ordinateur en langage LOGO.

REFERENCES

[1] Algorithmes au fil des âges, IREM de Poitiers-St Quentin.

[2] Pour une mathématique active en Seconde, Brochure APMEP.

polygonale formée par les cordes $KK_1, K_1K_2, \ldots K_n K'$. Faisons augmenter indéfiniment le nombre de ces points intermédiaires de telle manière que la longueur de chacune de ces cordes tende vers zéro. Si la longueur de la ligne polygonale ainsi définie tend vers une valeur finie et déterminée L, on dit que l'arc de courbe KK' est *rectifiable* et a pour *longueur* L.

Dans le cas contraire on dit que l'arc n'est pas rectifiable. Si la longueur de la ligne polygonale tend vers l'infini, on dit que la longueur de l'arc est infinie.»

I.

Définition de la courbe P et de la fonction $f(x)$. — Continuité. — Non-existence de la tangente.

1. Joignons par une droite deux points A et B d'un plan (fig. 1). Partageons le segment AB en trois parties égales

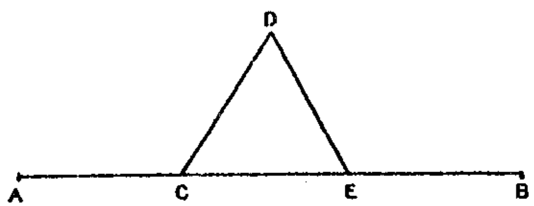


Fig. 1.

AB, CE, EB, et construisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE. Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre

eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Sur chacun de ces derniers segments nous effectuons encore l'opération Ω; nous aurons une ligne brisée $ASTUF\ldots$ composée par $4^3 = 64$ segments égaux entre eux AS, ST etc.

Effectuant l'opération Ω sur chacun de ces nouveaux segments et continuant ainsi indéfiniment, nous obtenons une suite indéfinie de lignes polygonales que nous désignerons par

$$(1) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

et qui se composent respectivement de

$$1, 4, 4^2, \ldots, 4^{n-1}, \ldots$$

côtés. P_1 désigne la droite primitive AB, P_2 la ligne $ACDEB$ et ainsi de suite.

Nous allons voir que, quand n croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue P qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée.

3. Nous nommerons *sommets* de P_1 les deux points A et B, *sommets* de P_2 les $4 + 1$ points A, C, D, E, B, *sommets* de P_3 les $4^2 + 1$ points $A, F, G, \ldots, B$ et ainsi de suite. On voit que P_n aura $4^{n-1} + 1$ sommets, que tous les $4^{n-2} + 1$ sommets de

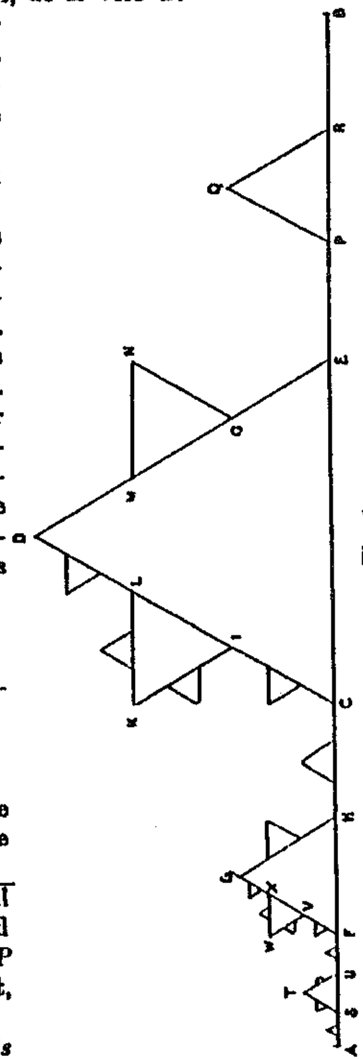


Fig. 2.

chapitre 4
Nombres complexes

Les nombres complexes furent introduits "accidentellement" au XVIème siècle par les algébristes italiens. Par un fait singulier, les formules de CARDAN pour résoudre l'équation trinôme du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ dans le cas de trois racines réelles $(4p^3 + 27q^2 < 0)$ font intervenir des expressions "impossibles" comportant des racines carrées de nombres négatifs. Et pourtant, il est possible, par des manipulations algébriques formelles, de retrouver ainsi les racines réelles. C'est ainsi que BOMBELLI ("L'Algebra", 1572) établit la relation :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4 \quad ,$$

en étudiant l'équation $x^3 = 15x + 4$ qui admet la racine évidente $x = 4$.

Avec des précautions oratoires plus ou moins grandes (DESCARTES, A. GIRARD, LEIBNIZ, etc.), les mathématiciens s'habituèrent à manipuler formellement des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$, mais seuls des nombres réels figuraient dans le résultat final, et ces expressions impossibles étaient dépourvues de tout statut mathématique rigoureux (comme aussi, et en plein XVIIIème siècle, pour D'ALEMBERT par exemple, les nombres négatifs).

Le texte d'ARGAND fait appel à une représentation géométrique pour justifier les calculs sur ces "nombres" qu'il représente comme des segments orientés ; en fait, il s'agit ici de la préhistoire du calcul vectoriel, et il définit ce que nous appelons le plan (vectoriel) d'ARGAND. Quelques années plus tard, GAUSS, partant de la représentation des nombres réels comme points d'une droite, suggérait de représenter les nombres complexes comme points d'un plan.

Le XIXème siècle a vu fleurir de nombreuses constructions algébriques du corps des nombres complexes (classes d'équivalence de polynômes modulo le polynôme $X^2 + 1$ chez CAUCHY, couples de nombres réels munis d'une addition et d'une multiplication adéquate chez HAMILTON, etc.), chacune de ces définitions conduisant à définir de nouveaux nombres : corps de nombres algébriques pour la théorie de CAUCHY, quaternions, matrices (CAYLEY) pour le point de vue purement formel de HAMILTON.

ARGAND : "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques"
Paris, 1806
Réédité par A. Blanchard, 1971.

Niveau:

TC , TD

Exercice 1.

Définition : On dit que x est moyenne proportionnelle entre a et b, si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ (a et b réels non nuls).

1) Déterminer les éléments z de $\mathbb{C}$, moyennes proportionnelles entre 1 et 1, puis entre 1 et -1.

Les mettre sous forme trigonométrique, puis construire leurs représentants A, I, E, N dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé $(K, \vec{u}, \vec{v})$. *Voir figure 1 du texte.*

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'inconnue (u, v) :

$$\frac{1}{u} = \frac{u}{v} = \frac{v}{z} ,$$

où z est un nombre complexe donné par son module $r \neq 0$ et une détermination θ de son argument.

Construire dans P les points d'affixe u et v dans les cas particuliers :

(a) $z = 1$,

(b) $z = i$.

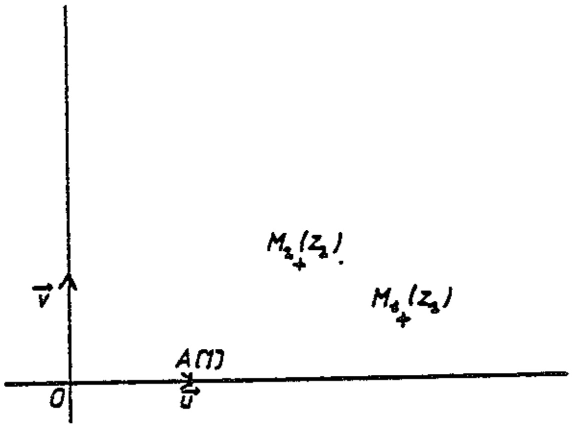
(Références dans le texte d'ARGAND ci-joint : paragraphes 3 et 4.)

La notation $1 : x :: x : -1$ *signifie :* $\frac{1}{x} = \frac{x}{-1}$.

Exercice 2.

Le problème est de construire dans P, plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, le point M d'affixe $z = z_1 z_2$, en utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 étant connus (z_1 et z_2 sont dans $\mathbb{C}$, non tous deux réels).

Dans la résolution du problème, on supposera : $z_2 \notin \mathbb{R}$.

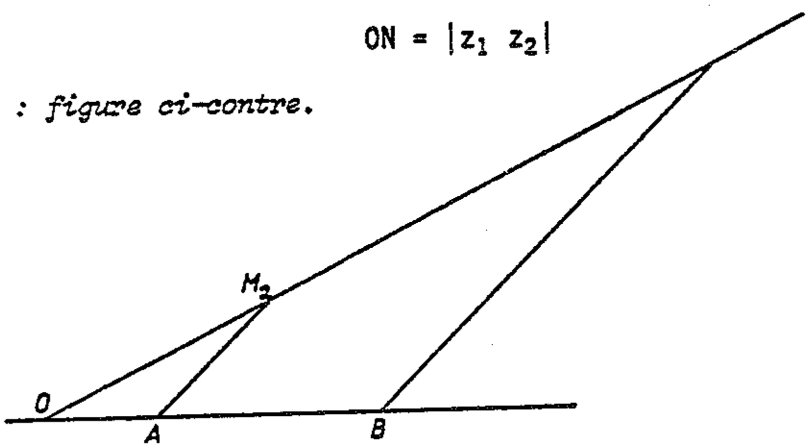


1) Tracer la demi-droite $[Ot)$ telle que $M \in [Ot)$.

2) Tracer le point B, sur la demi-droite $[OA)$, tel que $OB = |z_1|$, puis, à l'aide du théorème de Thalès, le point N sur la demi-droite $[OM_2)$ tel que :

$$ON = |z_1 \; z_2|$$

Indication : figure ci-contre.



3) Construire M .

4) Montrer :

$$(\widehat{\overrightarrow{OA} \, , \, \overrightarrow{AM_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_2} \, , \, \overrightarrow{M_2 M}}) \quad .$$

(On pourra utiliser les arguments d'affixes de vecteurs.)

En déduire une construction plus rapide de M . *(Référence : ARGAND, paragraphe 11.)*

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$
$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

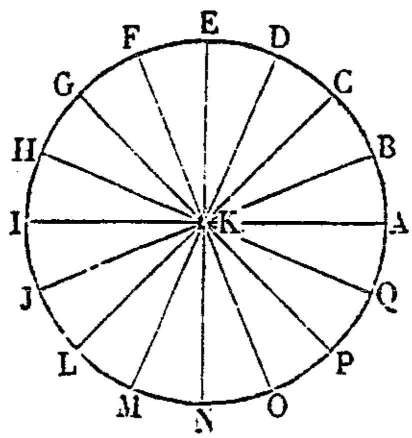
$$+1 : +x :: +x : -1.$$

On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de o la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (*fig.* 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.



comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Par une marche analogue, on pourra insérer de nouvelles moyennes proportionnelles entre les quantités dont il vient d'être question. En effet, pour construire la moyenne proportionnelle entre $\overline{KA}$ et $\overline{KE}$, il faudra tirer la ligne CKL qui divise l'angle AKE en deux parties égales, et la moyenne cherchée sera $\overline{KC}$ ou $\overline{KL}$. La ligne GKP donnera également les moyennes entre $\overline{KE}$ et $\overline{KI}$ ou entre

$\overline{KA}$ et $\overline{KN}$. On obtiendra de même les quantités $\overline{KB}$, $\overline{KD}$, $\overline{KF}$, $\overline{KH}$, $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$, $\overline{KO}$, $\overline{KQ}$ pour moyennes entre $\overline{KA}$ et $\overline{KC}$, $\overline{KC}$ et $\overline{KE}$, ..., et ainsi de suite. On pourra pareillement insérer un plus grand nombre de moyennes proportionnelles entre deux quantités données, et le nombre des constructions qui pourront résoudre la question sera égal au nombre des rapports que présente la progression cherchée. S'il s'agit, par exemple, de construire deux moyennes, $\overline{KP}$, $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports

$$\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB},$$

il faut qu'on ait

$$\text{angle } \overline{AKP} = \text{angle } \overline{PKQ} = \text{angle } \overline{QKB},$$

le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases AK, PK, QK. Or on peut y

Fig. 2.

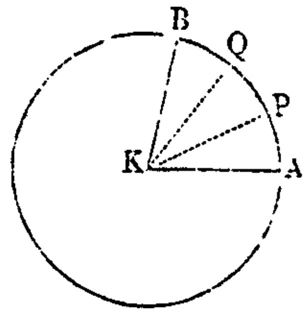
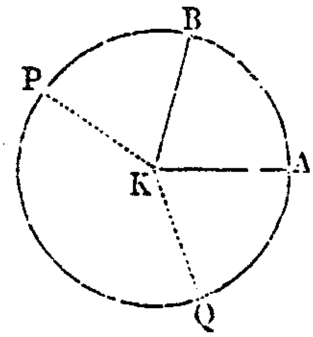
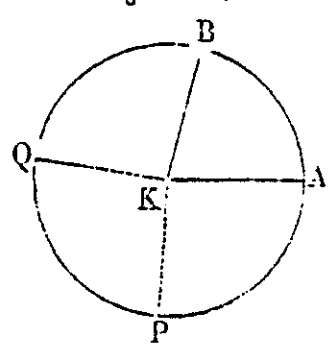


Fig. 2 *bis*.



parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales : 1° l'angle AKB ; 2° l'angle AKB, plus une circonférence ; 3° l'angle AKB, plus deux circonférences,

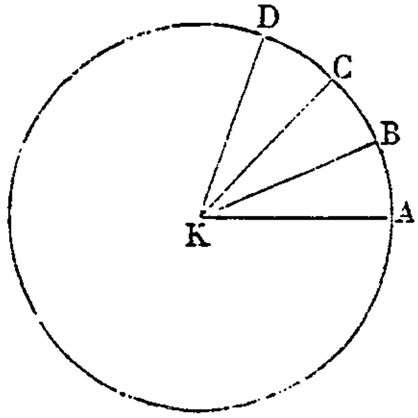
Fig. 2 *ter*.



ce qui donnera les trois constructions représentées par les *fig.* 2, 2 *bis*, 2 *ter* (*).

11. Passons à la multiplication des lignes dirigées, et proposons-nous d'abord de construire le produit $\overline{KB} \times \overline{KC}$

Fig. 7.



(*fig.* 7), dont les facteurs sont des unités non primes. Soit pris angle $\overline{CKD}$ = angle $\overline{AKB}$.

D'après ce qui a été dit plus haut, n° 4, note (*), on aura

$$\overline{KA} : \overline{KB} :: \overline{KC} : \overline{KD},$$

d'où

$$\overline{KA} \times \overline{KD} = \overline{KB} \times \overline{KC};$$

mais

$$\overline{KA} = +1,$$

donc

$$\overline{KB} \times \overline{KC} = \overline{KD}.$$

Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit : c'est encore une multiplication logarithmique. Il n'est pas nécessaire de montrer que cette règle a lieu pour un nombre quelconque de facteurs.

Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\overline{KB}$, $n.\overline{KC}, \ldots$, $m, n, \ldots$ étant des coefficients ou lignes primes positives; et le produit sera

$$(mn\ldots).(\overline{KB}.\overline{KC}\ldots) = (mn\ldots).\overline{KP}.$$

Or le produit de la ligne prime positive $(mn\ldots)$ par le rayon $\overline{KP}$ n'est autre chose que cette même ligne tirée dans la direction de ce rayon.

La division s'opérera par une marche inverse, qu'il serait superflu de détailler.

DESCARTES : Appendice au "Discours de la Méthode"
Géométrie, Livre III, 1637.

Niveau :

TA1

I. Résolution de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ dans $\mathbb{R}$ par la méthode de CARDAN (Ars Magna, 1545).

1) Chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que le changement d'inconnue réalisé en posant $x = X + \alpha$ conduise à une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$.

2) Résoudre l'équation d'inconnue X ; en déduire les solutions de l'équation proposée.

II. Chercher une racine évidente de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$, et résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

III. Résolution de l'équation $x^3 - 2x + 4 = 0$ (1) par la méthode de CARDAN (Ars Magna, 1545).

1) On pose $x = u + v$; que devient l'équation (1) ?

2) Montrer que l'on peut choisir le produit uv pour que la nouvelle équation soit équivalente à $u^3 + v^3 = -4$.

3) Former l'équation du second degré dont les solutions sont u^3 et v^3 .

4) En déduire la résolution de l'équation (1).

IV. Chercher une racine évidente de l'équation $x^3 - 2x + 4 = 0$, et résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

V.1) Développer $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

2) Résoudre l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$.

3) Utiliser la méthode de CARDAN (voir III) pour résoudre à nouveau cette équation.

COMPTE-RENDU D'EXPERIMENTATION

Le but était d'introduire l'ensemble $\mathbb{C}$ *en utilisant une démarche historique à partir des travaux de Jérôme CARDAN (1501-1576) reprenant les découvertes de TARTAGLIA (1500-1557), et d'un texte de DESCARTES, extrait de sa "Géométrie" parue en 1637.*

Cette expérimentation se fit en deux séances de travail individuel avec mise en commun.

Première séance (1h30).

1. Exercice préliminaire.

Calcul de $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$ *et de* $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^3$ *en utilisant l'identité remarquable*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \quad .$$

2. Travail individuel sur les exercices de la page précédente. (Il a été précisé aux élèves que le calcul précédent leur serait utile.)

Deuxième séance (2h).

1. Introduction du nombre i *comme nombre ayant pour carré* -1*, avec quelques applications numériques.*

2. Lecture du texte de la "Géométrie" de DESCARTES de 1637.

3. Lecture du texte de la conférence de Suzanne BACHELARD du 5 mars 1966 au Palais de la Découverte.

4. Exercice.

Calcul de

$$(\sqrt{3}+2i)^3 \quad ; \quad (\sqrt{3}-2i)^3 \quad ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\,i\right)^3 \quad ; \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\,i\right)^3 \quad ,$$

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)^3 \quad ; \quad \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)^3 \quad ,$$

en utilisant

$$(a + ib)^3 = a^3 + 3a^2\, ib + 3ai^2\, b^2 + i^3\, b^3$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2\, b - b^3) \quad .$$

5. Nouvel essai de résolution de l'équation $x^3 - 7x + 6 = 0$ *par la méthode de CARDAN, en utilisant les nombres complexes pour la résolution de l'équation du 2e degré dont le discriminant est négatif.*

Remarques.

Aucun élève du groupe des 17 élèves de TA1 n'a émis d'objection à la méthode proposée de CARDAN, bien qu'ils sachent tous déterminer les "zéros évidents" d'un polynôme.

Ils semblent avoir saisi l'utilité de la méthode dans le cas où le polynôme du 3e degré n'admet pas de "zéros évidents", mais aucune évaluation n'a été faite pour le moment.

La complexité de la résolution de l'équation $X^3 = a$ *dans* $\mathbb{R}$ *quand* $a \notin \mathbb{Q}$ *a été bien mise en évidence, et la satisfaction fut grande de trouver* $u^3 = \dfrac{10 + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$*, et de pouvoir utiliser le résultat préalable.*

Ils ont admis de bonne grâce et ont pu verbaliser que la méthode de CARDAN illustrait bien le texte de Suzanne BACHELARD dans le cas où l'équation du 3e degré avait trois racines réelles non "évidentes", mais ont manifesté le refus de résoudre une autre équation du 3e degré où les racines n'étaient pas évidentes.

Indication : Résolution de $x^3 - 7x + 6 = 0$ *par la méthode de CARDAN.*

On pose :

$$x = u + v \quad .$$

L'équation devient :

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - 7(u + v) + 6 = 0 \quad ,$$

$3uv(u + v) - 7(u + v)$ *s'annule pour* $uv = \dfrac{7}{3}$. *Il revient à résoudre :*

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -6 \quad , \\ uv = \frac{7}{3} \quad . \end{cases}$$

u^3 *et* v^3 *sont donc solutions de l'équation :*

$$X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0 \quad ,$$

qui a pour discriminant :

$$\Delta = -\frac{400}{27} \quad .$$

Ce qui donne :

$$u^3 = \frac{-9\sqrt{3} + 10i}{3\sqrt{3}} \, , \qquad v^3 = \frac{-9\sqrt{3} - 10i}{3\sqrt{3}} \quad .$$

Les couples $(u \, , \, v)$ *solutions sont :*

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3}} \, ; \, \frac{\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3}}\right) \quad ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\,i \, ; \, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\,i\right) \quad ,$$

et

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i \, ; \, -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) \quad .$$

Or $x = u + v$. *Les solutions sont donc les réels* 1 , 2 *et* -3 .

estoient $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere estoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Cómẽt on rend la quantité connuë de l'vn des termes d'vne Equation esgale a telle autre qu'on veut.

Cete operation peut aussy seruir pour rendre la quantité connuë de quelqu'un des termes de l'Equatiõ esgale a quelque autre donnée, comme si ayant

$$x^3 \; * \; -bbx + c^3 \infty 0$$

On veut auoir en sa place vne autre Equation, en laquelle la quantité connuë, du terme qui occupe là troisiesme place, a sçauoir celle qui est icy bb, soit $3aa$, il faut supposer $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$; puis escrire $y^3 \; * \; -3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$.

Que les racines, tant vrayes que fausses peuuent estre reelles ou imaginaires.

Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'vne reelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que ie viens d'expliquer, on ne sçauroit les rendre autres qu'imaginaires.

La reduction des Equatiõs cubiques lorsque le problesme est plan.

Or quand pour trouuer la construction de quelque problesme, on vient a vne Equation, en laquelle la quantité inconnuë a trois dimensions; premierement si les quantités connuës, qui y sont, contienent quelques nombres rompus, il les faut reduire a d'autres entiers, par la multiplication tantost expliquée; Et s'ils en contienent de sours, il faut aussy les reduire a d'autres rationaux, autant qu'il sera possible, tant par cete mesme multiplication,

LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES QUANTITÉS IMAGINAIRES AU DÉBUT DU XIX^e SIÈCLE

L'HISTOIRE de la découverte de la représentation géométrique des quantités imaginaires est un fragment, relativement bien connu, de l'histoire de l'algèbre. Ce que je voudrais évoquer dans cette conférence, c'est le retentissement que cette découverte a eu sur les fondements de l'algèbre, sur ce qu'on pourrait appeler la *métaphysique* de l'algèbre, en reprenant une expression que l'on trouve sous la plume de nombreux algébristes à la fin du XVIII^e et au début du XIX^e siècles.

Les quantités imaginaires avaient été introduites, sous le nom de quantités *impossibles*, au XVI^e siècle pour résoudre une équation du second degré, à l'occasion de la résolution de l'équation du 3^e degré. On sait bien que si l'on ne dispose que des nombres réels, la formule de résolution d'une équation du second degré à coefficients réels *n'a plus de sens*, peut-on dire, quand la racine carrée qui intervient dans cette formule est la racine carrée d'un nombre négatif. Au symbole $\sqrt{-a}$, a étant un nombre positif, on ne peut faire correspondre *aucune quantité* à proprement parler. Cependant, même dans ce cas, on peut continuer à calculer *formellement* sur les racines d'une telle équation. En particulier, la somme et le produit des racines de l'équation sont des nombres réels. C'est pourquoi Descartes a pu, dans sa *Géométrie*, en 1637, appeler de telles racines *imaginaires* en ce *double* sens qu'elles *ne* sont *pas* réelles mais aussi qu'on *peut* les imaginer. Je rappelle, pour la compréhension du court texte de Descartes que je vais citer, que Descartes a posé le principe qui avait déjà été formulé par Albert Girard en 1629, selon lequel une équation a un nombre de racines égal à son degré :

« Au reste, tant les vraies racines que les fausses (1) ne sont pas toujours « réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut « bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, « mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles « qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$$

« il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, « quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je « viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires » (2).

En 1746 d'Alembert démontra cette proposition importante que les nombres imaginaires sont tous de la forme $a + b\sqrt{-1}$, disons $a + bi$ pour prendre la notation d'Euler, a et b représentant des nombres réels (cette expression de nombres réels ne prenant d'ailleurs son plein sens qu'après la définition correcte qui a été donnée de ces nombres tardivement dans la seconde moitié du XIX^e siècle et qui correspondent à ce qu'on appelle aujourd'hui les points de la droite numérique), et i étant le symbole d'un « nombre » dont le carré est égal à -1. L'adoption de ces nouveaux nombres $a + bi$ qui rend soluble toute équation du second degré rend également soluble les équations algébriques de tout degré.

A la fin du XVIII^e siècle les quantités imaginaires intervenaient dans des domaines d'étude de plus en plus nombreux, dans l'étude des fonctions logarithmiques, dans l'étude des fonctions exponentielles et des fonctions trigonométriques — dont elles ont réalisé l'unité. Leur emploi facilitait les calculs, n'entraînait pas des résultats erronés et surtout donnait aux théorèmes algébriques cette généralité vers laquelle tend

(1) C'est-à-dire tant les racines positives que les racines négatives.
(2) La *Géométrie* de René DESCARTES, Paris, Hermann, 1927, p. 63.

chapitre 5
Newtoniana

Sous ce titre, nous rassemblons quelques textes du grand NEWTON, un scientifique qui, dans une dialectique de l'expérimentation et du raisonnement théorique, a changé le visage de la science. Il a rendu intelligible le système du monde ("Principes mathématiques de la philosophie naturelle, 1687), fondé la mécanique rationnelle, la théorie des couleurs ("Optique", 1704, conception granulaire de la lumière).
Pour développer les conséquences de la loi fondamentale de la gravitation universelle, un outil mathématique nouveau était indispensable. Dès 1665, NEWTON était en possession de sa "Méthode des fluxions" qui, aux notations près, est notre calcul infinitésimal. Ce texte ne sera publié qu'en 1736, neuf ans après la mort de son auteur.

L'"Arithmetica universalis" est une production de jeunesse de NEWTON, texte, dit-on, des leçons qu'il donnait sur l'algèbre à Cambridge. Cet ouvrage élémentaire n'a été publié qu'en 1707. Dans la continuation de la "Géométrie" de DESCARTES, avec une réflexion sur les bases des mathématiques, c'est un modèle de la manière systématique de soumettre des questions de diverses natures au calcul algébrique.

NEWTON : "La méthode des fluxions"
Ecrit en latin vers 1670
Publié en anglais en 1736
Traduction française de Buffon : 1740.

Niveau:

2e - 1e

Exercice 1.

Soit f l'application de R dans R, définie par $f(x) = x^2 - 7x + 3$.

Déterminer le domaine de définition de f, son taux de variation, son tableau de variations.

Tracer la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, pour x élément de $[0, 8]$. On pourra prendre $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm.

Résoudre à l'aide du graphe $f(x) = 0$.

Calculer $f(0,4)$; $f(0,5)$.

Exercice 2.

On se propose de déterminer avec 8 chiffres après la virgule la racine de $f(x) = 0$ pour $0,4 < x < 0,5$.

Soit $x_0 = 0,4$.

- Posons $x = x_0 + r$; on substitue dans $x^2 - 7x + 3 = 0$ (1).

On trouve une équation en r^2 notée (2). Comme $0 < r < 10^{-1}$, alors $0<r^2<10^{-2}$. On néglige le terme en r^2. On obtient une équation du premier degré en r. En déduire r.

On prend

$$r_0 = 0,0\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 chiffre}}}{.}$$

- Posons $r = r_0 + p$; on substitue dans (2). On trouve une équation en p^2 notée (3). Comme $0 < p < 10^{-2}$, alors $p^2 < 10^{-4}$. On néglige le terme en p^2, on obtient une équation du premier degré en p. En déduire p.

On prend :

$$p_0 = 0{,}00\underbrace{..}_{\substack{\uparrow \\ \text{2 chiffres}}}$$

• On pose $p = p_0 + q$, et on continue les calculs.

Essayer de donner une présentation claire des calculs (tableaux, schémas, etc.).

Combien de pas sont nécessaires pour obtenir 8 décimales ?

Exercice 3.

Tracer la courbe représentative de l'application f définie par $f(x) = x^3 - 2x - 5$ pour x élément de $[2 ; 2{,}15]$. Ce tracé se fera point par point pour un pas de $0{,}01$ en prenant $\|\vec{i}\| = 100\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$.

On remarquera : $f(x) = x(x^2 - 2) - 5$.

On pourra utiliser le programme "machine" suivant qui utilise la mémoire :

$\underbrace{\text{Ac Min ou MC}}_{\text{annule le contenu de la mémoire}}$ taper $\boxed{x}$ M^+ $x^2 - 2 =$ $*$MR $- 5 =$

On prendra pour les images les valeurs décimales approchées à 10^{-3} près par défaut.

Remarque : Les exercices ont été préparés à la maison par les élèves d'une classe de 2nde, et le texte a été étudié en séance de Travaux dirigés.

XIX. Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand, pour expliquer comment on doit reduire les Racines de ces Equations à des suites infinies; car ce que les Géometres nous ont donné sur les Equations en Nombres, est extrêmement embarassé, & chargé d'Opérations superfluës; de sorte qu'on ne peut prendre sur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Especes. Je ferai donc voir d'abord comment se doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & ensuite j'appliquerai la Methode aux Especes.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui est très-près de la vraie valeur de p; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en divisant 0,061 par 11,23 jusqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient exclusivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-dessous parce que ce Terme est Négatif; & supposant $-0{,}0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, & je continue ainsi l'Opération aussi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-dessous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+\ 2{,}10000000$ $-\ 0{,}00544852$ $+\ 2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+\ y^3$ $-\ 2y$ $-\ 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
SOMME.		$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+\ p^3$ $+\ 6p^2$ $+\ 10p$ $-\ 1$	$+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$. $+ 0{,}06 \quad + 1{,}2 \quad + 6$ $+ 1, \quad + 10,$ $- 1,$
SOMME.		$+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q$.	$+\ q^3$ $+\ 6{,}3\ q^2$ $+\ 11{,}23q$ $+\ 0{,}061$	$- 0{,}00000015$[illegible]$ + 0{,}000$[illegible]$r - 0{,}0$[illegible]$r^2 + r^3$ $+ 0{,}000183$[illegible] $\quad - 0{,}068$[illegible] $\quad + 6{,}3$ $- 0{,}060642 \quad + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
SOMME.		$+ 0{,}000$[illegible]$46 \quad + 11{,}1621r$
$- 0{,}00004852 + s = r$		

XXI. On peut abreger le Calcul vers la fin de l'Opération, & cela principalement dans les Equations qui ont plusieurs Dimensions; vous déterminerez d'abord jusqu'où vous voulez pousser votre Extraction, c'est-à-dire combien vous voulez que le Quotient contienne de Chiffres; ensuite vous compterez autant de Chiffres moins un après la premiere Figure du Coefficient du dernier Terme des Equations, qu'il reste de Places à remplir dans le Quotient, & vous rejetterez les Decimales qui suivent; dans le dernier Terme il faudra négliger les Decimales qui seront au-delà du nombre des Figures du Quotient; dans le Terme antepénultiéme toutes celles qui seront en-deçà de ce même nombre de Figures, en procedant ainsi Arithmetiquement, suivant l'intervalle des Chiffres; ou bien, ce qui est la même chose, vous couperez par-tout autant de Figures que dans le terme pénultiéme; de sorte que leurs Places les plus éloignées soient en progression Arithmétique, selon la suite des Termes, ou soient supposées remplies de Chiffres, lorsque cela arrive autrement. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, si je ne veux pas pousser mon Extraction, ou continuer mon Quotient plus loin que la huitiéme Figure des Decimales; lorsque j'aurai substitué $0,0054 + r$ pour q, il y aura dans le Quotient quatre Places de Decimales remplies, & autant qui demeureront à remplir; je puis donc négliger les Figures dans les cinq places les plus éloignées, & c'est pour cela que je les ai croisées de petites lignes; & à la vérité j'aurois pû négliger aussi le premier Terme r^3 quoique son Coefficient soit $0,99999$, &c. Ainsi en ne tenant plus compte de ces Figures, l'on aura dans l'Opération ci-dessus $0,0005416 + 11,162r$ pour la somme, ce qui par la Division continuée aussi loin que le terme prescrit, donne pour la valeur de r, $- 0,00004852$, ce qui remplit le Quotient jusqu'au Terme prescrit; il ne reste qu'à soustraire le Négatif du Quotient de l'Affirmatif, & l'on aura $2,09455148$ pour la Racine de l'Equation proposée.

NEWTON : "Arithmetica universalis"
Publié en 1707 (écrit beaucoup plus tôt)
Traduit par Noël Beaudeux, Paris, 1802.

Niveau:

4e - 3e

Exercice 1.

Résoudre : $64x - 14\ 800 = 54x$.

Exercice 2.

Chaque année, un marchand augmente d'un tiers son avoir diminué de cent livres, qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille. Au bout de trois ans, ses richesses sont doublées. Combien le marchand avait-il d'argent au départ ?

Exercice 3.

Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun ; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres.

Exercice 4.

Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles ; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B . On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B .

Méthode pour mettre une question en équation.

LORSQU'ON se sera suffisamment exercé à transformer et à réduire des équations, il faut essayer ses forces, en mettant des questions en équation. Une question étant proposée, une partie importante de l'art du calculateur consiste à exprimer par des équations chacune des conditions du problême. Pour y parvenir, il examinera d'abord si toutes ces conditions peuvent être exprimées par des caractères algébriques, de la même manière que nous peignons nos pensées par le moyen des lettres de l'alphabet. Si la chose est possible (comme elle l'est toujours, lorsque la question roule sur des nombres ou sur des quantités abstraites), alors il donnera des noms aux quantités connues, de même qu'aux quantités inconnues; et le sens de la question sera exprimé, si on peut parler ainsi, par un discours analytique. Et les conditions ainsi traduites en langage algébrique, donneront autant d'équations qu'il en faut pour résoudre la question.

Par exemple, qu'on demande trois nombres en proportion continue, dont la somme soit 20, et la somme des quarrés 140, j'appellerai ces trois nombres inconnus x, y, z; et la question sera traduite du langage ordinaire en langage algébrique, en cette manière:

Voici un autre exemple. Un marchand augmente son argent d'un tiers chaque année, moins cent livres (*) qu'il dépense dans le même espace de temps pour les besoins de sa famille ; au bout de trois ans ses richesses sont doublées ; on demande combien il avait d'argent. Voici toutes les propositions qui sont renfermées implicitement dans cette question, et qui doivent être exprimées, pour parvenir à la résolution du problême.

Question exprimée en langage ordinaire.	*La même en langage algébrique.*
Un marchand a un certain nombre d'écus,	x.
sur lesquels il dépense cent livres la première année ;	$x - 100$.
Il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$x - 100 + \frac{x - 100}{3}$, ou bien $\frac{4x - 400}{3}$.
La seconde année il dépense encore cent livres,	$\frac{4x - 400}{3} - 100$, ou bien $\frac{4x - 700}{3}$.
et il augmente ce qui lui reste d'un tiers.	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$, ou bien $\frac{16x - 2800}{9}$.
La troisième année il dépense encore cent livres,	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$, ou bien $\frac{16x - 3700}{3}$.
et il augmente ce qui lui reste d'un tiers,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$, ou bien $\frac{64x - 14800}{27}$.
et il se trouve deux fois plus riche qu'au commencement de la première année.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$.

(*) Il s'agit ici, comme on pense bien, de livres sterlings, ainsi cent livres font environ 2200 francs.

Un homme veut distribuer de l'argent à des pauvres. S'il avait huit deniers de plus, il pourrait en donner trois à chacun ; il ne leur en donne donc que deux, et il lui en reste trois. On demande le nombre des pauvres ?

Soit x le nombre des pauvres. Il s'en faut de huit deniers que l'homme ne puisse distribuer $3x$. Son argent peut donc être représenté par $3x - 8$. Il distribue sur cet argent $2x$ de deniers : par conséquent, ce qui lui reste après la distribution sera représenté par $3x - 8 - 2x$, ou $x - 8$; mais nous avons dit que ce reste était égal à trois deniers ; par conséquent, $x - 8 = 3$, ou $x = 11$.

PROBLÊME V.

Deux messagers A et B sont éloignés l'un de l'autre de 59 milles ; ils partent le matin pour aller à leur rencontre mutuelle. A fait 7 milles en deux heures, et B en fait 8 en trois heures, mais A est parti une heure avant B. On demande combien A fera de milles avant de rencontrer B.

Appelez ce nombre de milles x. Alors $59 - x$ sera le chemin qu'aura fait B. Et comme A fait 7 milles en deux heures, il fera x de milles en $\frac{2x}{7}$ d'heures ; ce qu'on trouve en faisant cette proportion, 7 milles : 2 heures :: x milles : $\frac{2x}{7}$ heures. De même, comme B fait 8 milles en 3 heures, il fera $59 - x$ milles en $\frac{177 - 3x}{8}$ d'heures. Maintenant, comme la différence de ces temps est 1 heure, ils deviendront égaux, en ajoutant 1 au plus petit, c'est-à-dire à $\frac{177 - 3x}{8}$; et on aura l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$. Et en réduisant, on trouve $x = 35$. En effet, si on multiplie l'équation $1 + \frac{177 - 3x}{8} = \frac{2x}{7}$ par 8, elle devient, $8 + 177 - 3x = \frac{16x}{7}$, ou $185 - 3x = \frac{16x}{7}$, et en multipliant de nouveau tout par 7, on a enfin, $1295 - 21x = 16x$, ou, $1295 = 37x$; et en divisant par 37, on a, $x = 35$. Ainsi A fera 35 milles avant de rencontrer B.

NEWTON : "Arithmetica universalis"
Publié en 1707 (écrit beaucoup plus tôt)
Traduit par Noël Beaudeux, Paris, 1802.

Niveau:

3e - 2e

Exercice 1.

On dit que b est moyenne proportionnelle entre a et c, si, et seulement si, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

De même, " a est à b comme c est à d " signifie : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Exemple : 1 est à 2 comme 2 est à 4, car : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

1) Complète :

- 8 est à 16 comme 4 est à ...
- 15 est à 3 comme ... est à 5.
- 21 est moyenne proportionnelle entre 3 et ...
- 3 est moyenne proportionnelle entre 1 et ...
- 15 est à 45 comme ... est à 48.

2) Quelle est la moyenne proportionnelle positive entre 4 et 16 ?

Quelle est la moyenne proportionnelle positive entre 3 et 15 ?

3) Soit $a > 0$.

Quelle est la moyenne proportionnelle positive entre 1 et a ? Exemple : 1 est à 8 comme 8 est à ..., autrement dit : 8 est moyenne proportionnelle entre ... et ...

Quelle est la moyenne proportionnelle positive entre 1 et 17 ?

Exercice 2.

Soient A et B deux points distincts. On veut construire à la règle et au compas un point D tel que : $BD = \sqrt{AB}$.

1) Faire la construction de Newton *(lignes 17 à 23)*. On prendra $BC = 1$ cm (et la longueur AB quelconque).

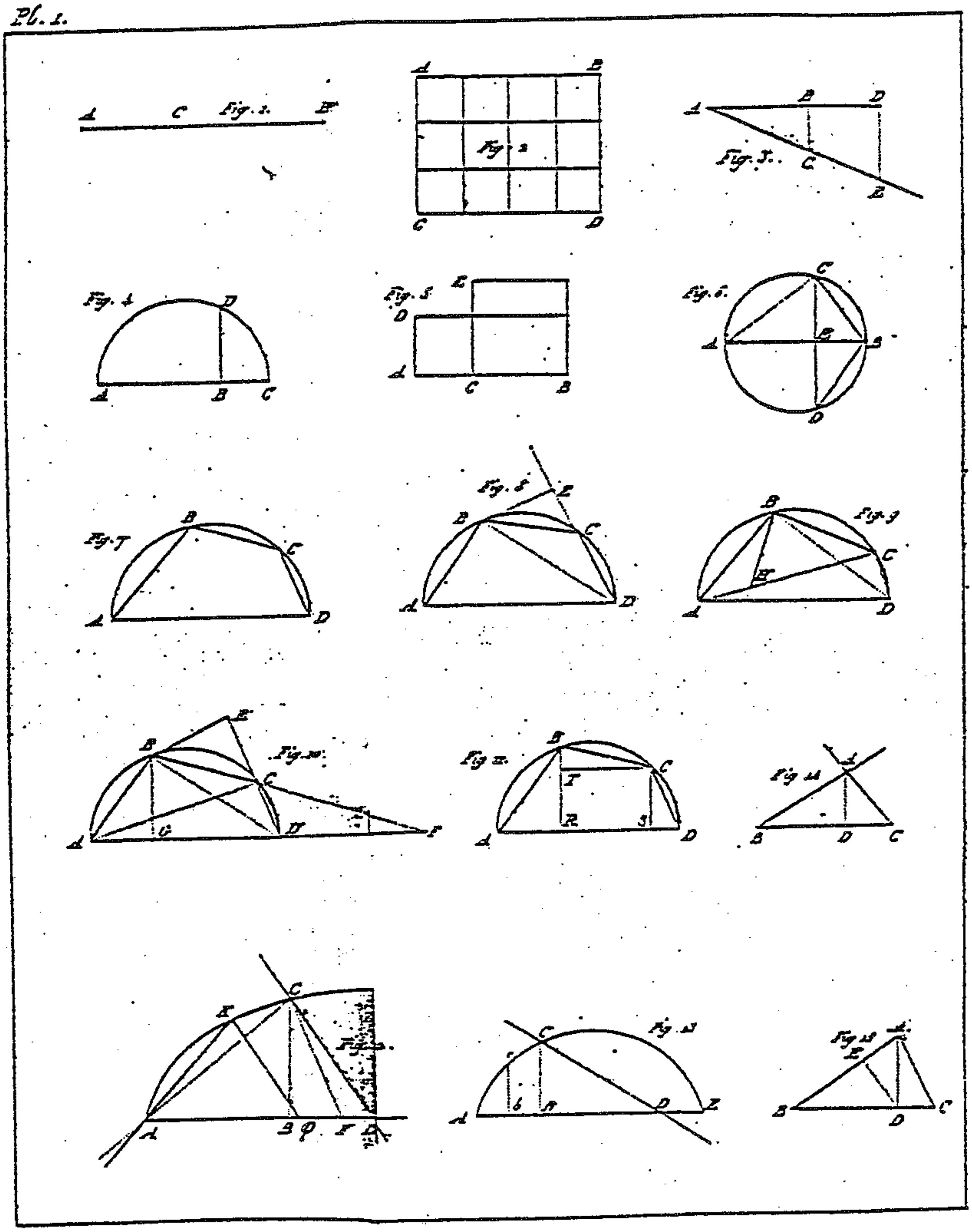
2) Quelle est la nature du triangle ADC ?

3)(a) Appliquer le théorème de Pythagore au triangle ADC .

(b) En appliquant encore deux fois le théorème de Pythagore, prouver : $BD = \sqrt{AB}$

4) Quel théorème du cours emploie Newton pour démontrer la même chose ?

Pl. 1.



NOTATION.

Une racine multipliée par elle-même produit un quarré; le quarré multiplié par la racine produit un cube, etc. Ainsi, d'après la définition qui a été donnée de la multiplication, on voit qu'il y a même rapport de l'unité à la racine, que de la racine au quarré, que du quarré au cube, etc. Donc la racine quarrée d'une quantité quelconque, est toujours moyenne proportionnelle entre l'unité et la quantité elle-même; et la racine cubique est la première de deux moyennes proportionnelles entre l'unité et cette même quantité; et la racine quatrième est la première de trois moyennes proportionnelles, et ainsi du reste. On pourra donc reconnaître les racines à deux caractères; en tant que se multipliant elles-mêmes, elles produisent les puissances; et en tant qu'elles sont des termes moyens entre ces puissances et l'unité. Ainsi on reconnaît, par exemple, que la racine quarrée de 64 est 8, et sa racine cubique 4, soit, parce que 8 . 8 vaut 64, ou que 4 . 4 . 4 vaut 64, ou bien, que 1 est à 8 comme 8 est à 64; ou bien, pour la racine cubique, parce que 1 est à 4 comme 4 est à 16 comme 16 est à 64. Il suit de-là, que s'il s'agit de tirer la racine quarrée d'une ligne, telle que *AB* (*Pl. I, Fig. 4*), il faut prolonger la ligne *AB* d'une quantité *BC* qu'on prendra pour unité, et sur *AC* comme diamètre ayant décrit un demi-cercle, on élevera au point *B*, la perpendiculaire *BD*, jusqu'à ce qu'elle rencontre en *D* la demi-circonférence, et la ligne *BD* sera la racine cherchée, parce qu'elle est moyenne proportionnelle entre *AB* et l'unité *BC*.

Pour désigner la racine d'une quantité quelconque, on a coutume de faire précéder cette quantité de la marque $\sqrt{}$, quand il s'agit de la racine quarrée; de $\sqrt[3]{}$, s'il s'agit d'une racine cubique; de $\sqrt[4]{}$, s'il s'agit d'une racine quatrième, etc. Ainsi, $\sqrt{64}$ est la

chapitre 6
Probabilités-Statistiques

CARDAN (dans son livre posthume "De ludeo Aleae"), GALILEE (problème du Duc de Toscane), et bien d'autres, avaient dénombré les possibilités de certains jeux de hasard, mais l'acte officiel de naissance du calcul des probabilités date de 1654, année de la correspondance PASCAL-FERMAT sur le problème des partis (cf. chapitre 7) : "le hasard est géométrisable". Le "Traité du Triangle Arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière" (publié en 1665, après la mort de PASCAL) était probablement terminé fin 1654. Dans la XIIème conséquence de ce traité étudiée dans les textes proposés ci-dessous, l'auteur dégage de manière très novatrice pour l'époque les deux étapes d'un raisonnement par récurrence.

Dès son arrivée en France en 1655, HUYGENS s'intéresse aux problèmes étudiés par PASCAL et FERMAT, et publie en 1657, dans les "Exercitationum mathematicarum" de VAN SCHOOTEN, un petit traité : "De ratiociniis in ludo aleae" (Du calcul dans les jeux de hasard) qui est le premier texte imprimé sur le calcul des probabilités. Il se termine par des exercices destinés à "laisser quelque chose à chercher aux lecteurs, afin que cela leur servît d'exercice et de passe-temps", qui furent un stimulant pour ses plus illustres successeurs.

Le premier ouvrage entièrement consacré au calcul des probabilités, l'"Essay d'Analyse sur les jeux de hazard" (Paris, 1708) de Pierre Remond DE MONTMORT, énonce et résout partiellement les principaux problèmes devenus classiques de théorie des jeux. Il rassemble tous les travaux de ses prédécesseurs, y compris la célèbre correspondance PASCAL-FERMAT qui n'avait été publiée que dans les oeuvres posthumes de FERMAT (Toulouse, 1679). Le texte proposé ci-dessous est extrait de la seconde édition de l'"Essay d'Analyse" (1713), plus précisément du "Traité des combinaisons", qui paraît ici pour la première fois ainsi que l'importante correspondance de l'auteur avec Nicolas BERNOULLI, neveu de Jacques BERNOULLI et éditeur de l'"Ars conjectandi" (posthume) de ce dernier (Basles, 1713). Dans cet ouvrage, J. BERNOULLI énonce (et démontre rigoureusement dans le cadre du jeu de pile ou face) la loi faible des grands nombres. Cette loi des grands nombres sera un fil directeur des recherches théoriques en probabilités ; il ne sera complètement démontré qu'au début de notre siècle par les mathématiciens de l'école russe (principalement TCHEBYCHEFF et MARKOV).

Avec l'"Ars conjectandi" et "The Doctrine of Chance" (Londres, 1718) d'Abraham de MOIVRE, le calcul des probabilités devient une branche à part entière des mathématiques, et la plupart des grands mathématiciens du XVIIIème siècle y ont apporté leur contribution ; la "Théorie analytique des probabilités" de LAPLACE (Paris, 1812) couronne l'édifice.

L'école anglaise du XIXème siècle (DE MORGAN, BOOLE) développe la logique mathématique dans le but avoué de formaliser le calcul des probabilités, et les recherches fines d'analyse de la fin du siècle dernier trouvent des applications dans et à travers le calcul des probabilités. L'axiomatisation de ce calcul par KOLMOGOROV (entre 1929 et 1933) le situe définitivement dans le cadre moderne de la théorie de la mesure.

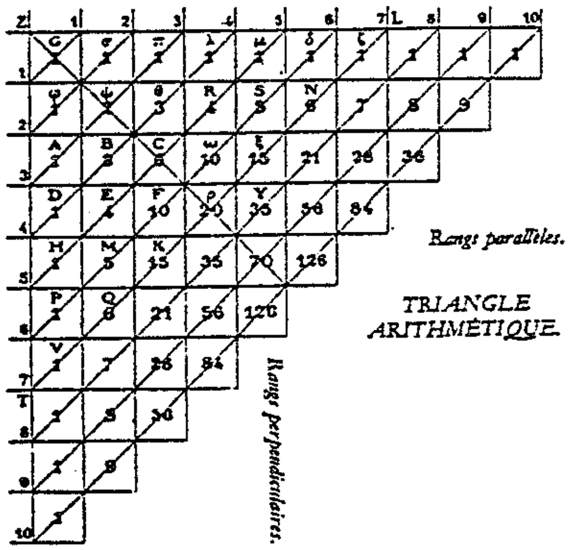
PASCAL : "Traité du Triangle Arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière", Paris, 1665.

Niveau :

TA1

I. Définition du triangle arithmétique.

Considérons la figure construite et décrite par PASCAL dans le "Traité du triangle arithmétique" (1) :



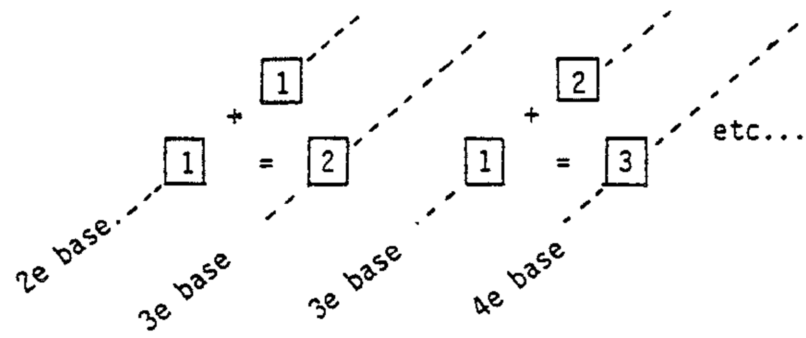
Le contenu de chaque "case" du triangle est appelé "cellule", les lignes "rangs parallèles", les colonnes "rangs perpendiculaires", et les lignes transverses telles que $A\psi\pi$ sont appelées "bases". Les "cellules d'une même base" sont celles qui sont traversées par la même ligne transverse (ou base).

---

(1) Il y a d'autres dispositions possibles du triangle arithmétique, par exemple :

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 etc...

On remplit les cellules du triangle de la manière suivante : les cellules de la 1ère ligne et de la 1ère colonne valent 1 , et on obtient une cellule en ajoutant les deux cellules de la base précédente qui lui sont voisines ("contiguës) suivant le schéma :



Compléter la 11e base du triangle arithmétique ci-dessus en appliquant les règles indiquées.

Quelle propriété remarquez-vous pour les cellules de la 2e ligne et de la 2e colonne ?

II. <u>Démonstration de la "conséquence douzième" du traité du triangle</u>.

Nous n'utiliserons pas dans cette partie les notations de PASCAL, mais une notation indicielle de position : nous appellerons C_n^p la cellule de la p-ième colonne de la (n + 1)-ième base (2). Le triangle se présente alors sous la forme suivante *(voir page suivante)*.

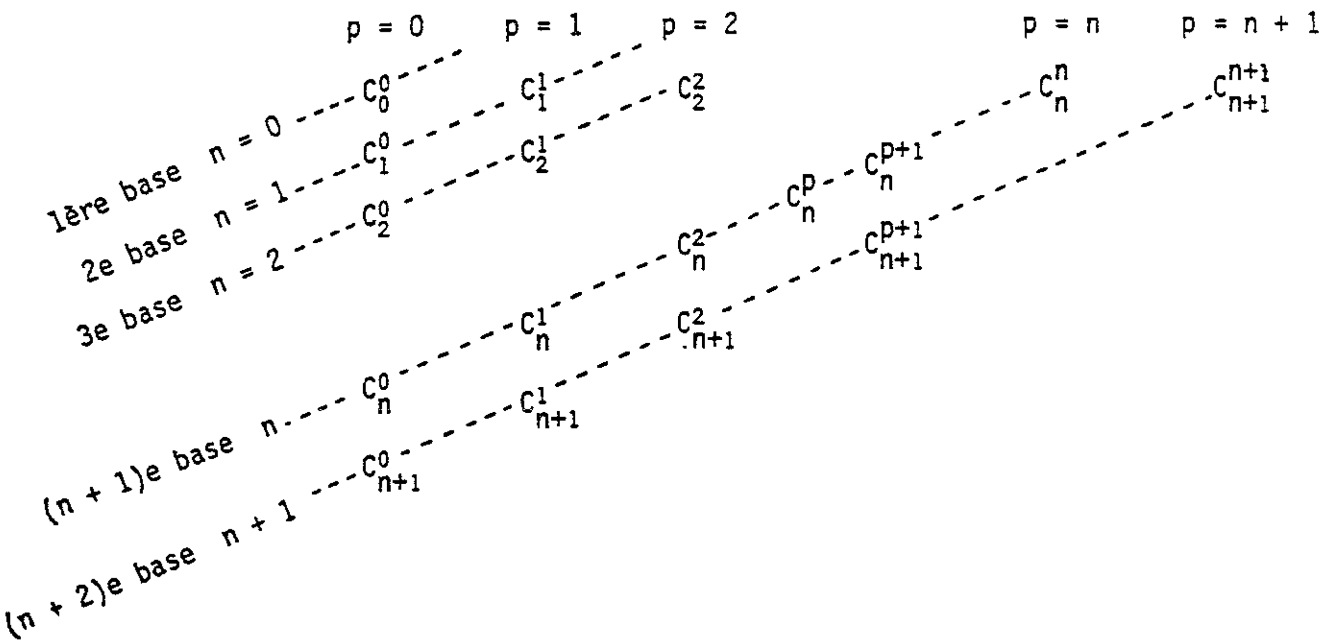
1) Compléter les 4e et 5e bases du triangle avec les notations C_n^p .

2) Démontrer que les nombres C_n^p satisfont aux propriétés suivantes, quels que soient n et p entiers $(0 \leqslant p \leqslant n)$:

$$C_n^0 = 1 \ , \qquad C_n^n = 1 \ , \qquad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \ .$$

---

(2) C_n^p ne représente ici qu'une notation de position. Bien sûr, elle coïncide avec la notation classique C_n^p , mais l'exercice peut être traité sans connaître la notion de combinaison et les formules donnant C_n^p , et il est même plus intéressant de ne pas les utiliser.



3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer C_n^1 (on peut faire un raisonnement par récurrence).

4) Combien de cellules contient chaque base ?

Considérons deux cellules consécutives de la $(n + 1)$-ième base C_n^p et C_n^{p+1} $(0 \leqslant p \leqslant n - 1)$. PASCAL énonce, dans la "conséquence douzième" du "Traité du triangle arithmétique", que C_n^p / C_n^{p+1} est égal au rapport $\frac{p + 1}{n - p}$ du nombre de cellules de la $(n + 1)$-ième base situées en dessous de C_n^p, cette dernière comprise, au nombre de cellules de la même base situées au-dessus de C_n^{p+1}, celle-ci comprise.

5) Vérifier que la propriété :

$$P(n) \qquad \forall p \in [0 , n - 1] , \quad \frac{C_n^p}{C_n^{p+1}} = \frac{p + 1}{n - p}$$

est vraie pour $n = 1$.

6) On suppose, dans cette question, que la propriété P(n) est vraie pour un entier n.

(a) Quel est le nombre de cellules de la $(n + 2)$-ième base situées en dessous de C_{n+1}^{p+1}, celle-ci comprise, et le nombre de cellules de cette $(n + 2)$-ième base situées au-dessus de C_{n+1}^{p+2}, celle-ci comprise ?

(b) Démontrer que :

$$\frac{C_{n+1}^{p+1}}{C_n^{p+1}} = \frac{C_n^p}{C_n^{p+1}} + 1 = \frac{n+1}{n-p}$$

et que

$$\frac{C_{n+1}^{p+2}}{C_n^{p+2}} = \frac{C_n^{p+1}}{C_n^{p+2}} + 1 = \frac{n+1}{n-p-1} \quad .$$

(c) Calculer C_n^{p+1}/C_n^{p+2} .

(d) Ecrire $C_{n+1}^{p+1}/C_{n+1}^{p+2}$ à l'aide des 3 rapports obtenus en (b) et (c). En déduire une valeur de $C_{n+1}^{p+1}/C_{n+1}^{p+2}$. Est-ce la valeur annoncée par PASCAL ?

(e) La démonstration ci-dessus permet-elle de donner la valeur de C_{n+1}^0/C_{n+1}^1 ? Calculer directement C_{n+1}^0/C_{n+1}^1 . Ce rapport satisfait-il à la propriété énoncée par PASCAL ?

(f) Ecrire la propriété P(n + 1). Que peut-on en dire ?

7) Quelle conclusion peut-on tirer des questions 6) et 7) ? Quel mode de raisonnement avez-vous utilisé ?

III. Etude du texte de PASCAL.

1) En utilisant les notations de la partie II, comment notez-vous les cellules D , B , θ , λ , E , C ?

2) Dans quelle question de la partie II avez-vous démontré le lemme 1 ?

3) Reprendre, avec les notations de la partie II, la démonstration (lignes 30 à 37) de la proposition énoncée ligne 29, " E est à C comme 2 à 3 " (c'est-à-dire $\frac{E}{C} = \frac{2}{3}$). Rectifier, en particulier, l'erreur de typographie ligne 34.

Indication : La règle de la proportion troublée peut se traduire, avec les notations actuellement utilisées, par : $\frac{C}{E} = \frac{C}{B} \times \frac{B}{E}$, et en itérant $\frac{C}{E} = \frac{C}{\theta} \times \frac{\theta}{B} \times \frac{B}{E}$ pour tout réel C et pour B , θ , E réels non nuls.

4) Quelles remarques vous suggèrent ce texte et le problème de la partie II ?

CONSÉQUENCE DOUZIÈME

En tout Triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.

Soient deux cellules contiguës[1] quelconques d'une même base, E, C : je dis que :

E	est à	C	comme	2	à	3
inférieure,		*supérieure,*		*parce qu'il y a deux cellules depuis* E *jusqu'en bas ; savoir,* E, H ;		*parce qu'il y a trois cellules depuis* C *jusqu'en haut ; savoir,* C, R, μ.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième Dλ, c'est-à-dire si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc.; je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, Hμ, et que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{D + B}_{E}$ est à B comme $\underbrace{1 \div 3}_{4}$ à 3.

De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{B + \theta}_{C}$ à B, comme $\underbrace{2 + 2}_{4}$ à 2.

Mais B à E, comme 3 à 4.

Donc, par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

C. q. f. d.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure, ce qui est vrai partout.

Remarque : Ce texte a été lu, commenté et travaillé en classe de Terminale A1. Certains élèves ont très consciemment "décortiqué" le texte ; ce qui nous a amené à cette présentation et cette traduction des propriétés dans le langage des C_n^p .

(Le texte a été utilisé après l'étude des dénombrements, mais peut l'être avant.)

DE MONTMORT : "Essay d'analyse sur les jeux de hazard"
2e édition, 1713 - Traité des combinaisons.

Niveau:

TA1

I. On lance deux dés non truqués, et on appellera "jet" tout couple de deux éléments distincts ou non pris dans l'ensemble $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$.

1) Combien obtient-on de "jets" différents ?

2) En lançant les deux dés, on peut obtenir le même coup (par exemple $\{4 , 1\}$) par deux jets différents ($(4 , 1)$ et $(1 , 4)$).

Déterminer le nombre de coups différents dans le lancer de deux dés.

On se propose, avec MONTMORT, de "trouver combien on peut amener de coups différens avec un nombre quelconque p de dés, dont le nombre des faces f soit aussi quelconque" (proposition XI du traité des combinaisons). Selon lui :

En nommant f le nombre des faces de chaque dé, on aura le nombre cherché de coups pour un dé $= f$ pour deux dés $= \frac{f \cdot \overline{f+1}}{1 \cdot 2}$, pour trois dés $\frac{f \cdot \overline{f+1} \cdot \overline{f+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, pour quatre dés $= \frac{f \cdot \overline{f+1} \cdot \overline{f+2} \cdot \overline{f+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, pour cinq dés $= \frac{f \cdot \overline{f+1} \cdot \overline{f+2} \cdot \overline{f+3} \cdot \overline{f+4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, & ainsi des autres; en sorte que dans deux dés on aura 21 coups differens, dans trois dés 56 coups, dans quatre dés 126 coups, dans cinq dés 252 coups, &c.

Ces nombres 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, & les autres suivans composent la sixiéme bande transversale de la Table, *art. 1*. L'on auroit les nombres de la septiéme bande transversale, si f étoit $= 7$; & les nombres de la huitiéme bande transversale, si f étoit $= 8$, &c.

II. Voici la Table citée par MONTMORT, qui n'est autre que le triangle arithmétique de Pascal :

Table de M. Pascal pour les combinaisons.

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13

1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45. 55. 66. 78

1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. 120. 165. 220. 286

1. 5. 15. 35. 70. 126. 210. 330. 495. 715

1. 6. 21. 56. 126. 252. 462. 792. 1287

1. 7. 28. 84. 210. 462. 924. 1716

1. 8. 36. 120. 330. 792. 1716

1. 9. 45. 165. 495. 1287

1. 10. 55. 220. 715

1. 11. 66. 286

1. 12. 78

1. 13

1

1) Faire apparaître la 6e bande transversale de la table qui contient les nombres cités ligne 8 du texte.

2) On rappelle que chaque élément de la table, en dehors de la première ligne qui ne contient que des 1 , est obtenu selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{1} & \\ + & & \\ & \boxed{4} & = \boxed{5} \end{array}$$

Vérifier que chaque nombre de la 6e bande transversale est égal à la somme des 6 premiers nombres de la bande horizontale précédente (par exemple :

$$56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 \quad).$$

Plus généralement, vérifier que chaque nombre de la table est égal à la somme des nombres de la bande horizontale précédente jusqu'à la colonne qui précède ce nombre (par exemple :

$$330 = 1 + 7 + 28 + 84 + 210 \quad).$$

III. Démonstration de la formule proposée par DE MONTMORT.

Première partie *(lignes 1 à 14)* : Lancer de 1 dé, puis de 2 dés.

DE MONTMORT utilise une nouvelle table *(lignes 23 à 28)* : à la première ligne *(ou ligne 23)* sont énumérés les six coups différents contenant l'as, soit :

$$\{1\ ,\ 1\}\ ,\ \{1\ ,\ 2\}\ ,\ \ldots\ ,\ \{1\ ,\ 6\}\quad ;$$

à la deuxième ligne *(ou ligne 23)* sont énumérés les cinq coups différents contenant le 2 et non l'as.

On obtient bien 21 coups différents dans le lancer de 2 dés.

Deuxième partie *(lignes 14 à 39)* : Lancer de 3 dés.

On lance trois dés indiscernables. Dénombrer le nombre de coups différents contenant :

(a) au moins un as,

(b) au moins un 2 , mais pas d'as,

(c) au moins un 3 , mais ni 2 , ni as.

En déduire le nombre de coups différents obtenus avec trois dés.

Troisième partie : Généralisation.

1) Comment DE MONTMORT justifie-t-il la généralisation de la formule démontrée pour 3 dés à 6 faces ?

2) Utiliser les notations C_n^p pour exprimer la formule que DE MONTMORT donne pour les coups différents pour le lancer de 5 dés.

Donner une formule généralisée pour le lancer de p dés à f faces.

(Voir le texte de DE MONTMORT page suivante.)

Remarque : Ce texte a été expérimenté en terminale A1, sous forme d'un devoir à la maison, et a été généralement bien compris. La tendance, à la question de la deuxième partie du paragraphe III, a été de reprendre les dénombrements (et même la rédaction) de MONTMORT, plutôt que de refaire des raisonnements et des calculs personnels.

DÉMONSTRATION.

IL est clair que pour sçavoir combien il y a de coups differens avec un dé, il n'y a qu'à ajouter en une somme les six premiers nombres de la premiere bande horizontale, *art. 1*, qui est composée d'unités; & que pour sçavoir combien il y a de coups differens avec deux dés, il faut ajouter en une somme les six premiers nombres de la seconde bande horizontale; puisqu'il est évident qu'en joignant l'as du deuxiéme dé avec les six faces du premier dé on a 6; & le 2 du deuxiéme dé avec les cinq faces du premier où l'as n'est point, on a 5; & qu'en joignant le 3 du deuxiéme dé avec les quatre faces du premier où l'as ni le 2 ne se trouvent point, on a 4, &c. En sorte qu'il y a en tout $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ coups differens où chacune des faces peut entrer. $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$, où chacune des faces peut entrer, à l'exception de l'as. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, où chacune des faces peut entrer, à l'exception de l'as & du 2, &c. & qu'ainsi ces nombres qui représentent les differens coups possibles avec deux dés, se forment en la même maniere que les nombres de la seconde bande horizontale, *art. 1*.

On remarquera de même pour trois dés, en considerant la Table ci-jointe, que l'as du troisiéme dé se joignant

$$
\begin{array}{r}
11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16 = 6 \\
22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26 = 5 \\
33,\ 34,\ 35,\ 36 = 4 \\
44,\ 45,\ 46 = 3 \\
55,\ 56 = 2 \\
66 = 1
\end{array}
$$

aux 21 coups differens de deux dés, donnera 21 coups differens, & que le 2 du troisiéme dé se joignant aux 15 coups de la Table où il n'entre point d'as, donne 15 coups; & que le 3 du troisiéme dé se joignant aux 10 coups de la Table où il n'entre point d'as ni de 2, donne 10 coups, & ainsi du reste.

En sorte que la somme de tous les differens coups possibles avec trois dés est $21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$, & que ces nombres se forment en la maniere que les nombres de la seconde bande horizontale du triangle arithmetique, *art. 1.*

Et de même qu'avec quatre dés il y aura 56 coups differens ou chacune des faces pourra entrer. $56 - 21 = 35$ où il n'y aura point d'as, $56 - 21 - 15 = 20$ où il n'y aura ni as ni 2, $56 - 21 - 15 - 10$ où il n'y aura ni as, ni 2, ni 3, &c. en sorte qu'avec quatre dés la somme de tous les differens coups possibles sera $= 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 126$.

Et que ces nombres se forment en la même maniere que les nombres de la quatriéme bande horizontale, *art. 1.* C'est la même chose pour tout autre nombre de dés & de faces. Or l'on sçait que chaque terme d'une bande transversale *f* est égale à la somme des *f* premiers nombres de la bande superieure horizontale : Donc, &c.

Document extrait de
"Démographie historique" de
Guillaume et Pousson, Collection U.

Niveau :

2nd - 1e A-B
Terminales

TRAVAIL DIRIGE :

COMPARAISON DU NOMBRE DES MALADES ET DE LA MORTALITE DE L'HOTEL-DIEU DE ROUEN AVEC LE PRIX DES GRAINS, DEPUIS 1680 JUSQUES ET COMPRIS 1699

- Prendre connaissance du tableau de nombres proposé.

- Reclasser les données : on peut, par exemple, extraire du tableau trois séries chronologiques distinctes donnant respectivement le nombre des malades et des morts à l'Hôtel-Dieu de Rouen, entre 1680 et 1700, et pour la même période la variation du prix du septier (ou setier) de blé à Paris, unité de capacité correspondant à 12 boisseaux, soit à peu près 156 litres.

Dans cette troisième série, l'unité monétaire utilisée est la livre ($\mathcal{L}$), et ses sous-divisions le sou (f) et le denier (d).

Les prix proposés peuvent être convertis soit en deniers, soit en livre décimale.

$$1\mathcal{L} = 20f \quad \text{et} \quad 1f = 12d \ .$$

- Proposer une représentation graphique du nombre des morts et des malades à l'Hôtel-Dieu de Rouen, entre 1680 et 1699, et de la variation du prix du blé pendant la même période.

Peut-on tirer quelques conclusions à la lecture des graphiques ?

- Calculer, de 1681 à 1699, année par année, le taux de croissance annuel du prix du blé et simultanément le taux de croissance annuel de la mortalité (ou de la maladie) à l'Hôtel-Dieu de Rouen pour la même période.

Tracer les deux graphiques représentatifs des résultats obtenus.

Ces deux nouveaux graphiques permettent-ils "d'affiner" les conclusions tirées de la première représentation graphique réalisée ?

- Représenter les variations de la mortalité (ou de la maladie) à l'Hôtel-Dieu de Rouen en fonction du taux de croissance du prix du blé, entre 1681 et 1699.

On portera en abscisse, pour chaque année, le taux d'augmentation du prix du blé, et en ordonnée le taux de croissance de la mortalité (ou de la maladie) correspondant à l'Hôtel-Dieu de Rouen.

Peut-on tirer de la lecture de ce dernier graphique de nouvelles conclusions ?

- Interpréter la dernière ligne du tableau statistique étudié.

Par exemple : Quel sens donner à l'intitulé "Année commune" ? Que représentent les nombres proposés dans les six colonnes ?

- Le second document propose une comparaison entre le prix du blé et le nombre de baptêmes à Gérone entre 1670 et 1700.

Faire un graphique significatif (à votre choix) permettant une interprétation des données.

Quelle(s) conclusion(s) tirer à la suite de ce dernier travail ?

Remarque : Ce travail peut être mené en seconde (Travaux dirigés), en première (A et B), ou en Terminales, avec un ajustement linéaire possible sur les derniers graphiques.

XV.^me TABLE. I.^re PARTIE.

COMPARAISON du nombre des malades & de la mortalité de l'Hôtel-Dieu de Rouen avec le prix des grains, depuis 1680 jusques & compris 1699.

On a mis dans la première colonne des années celles qui ont été les plus mortelles ; dans la seconde, celles qui l'ont été le moins.

Le nombre des malades & des morts a été pris sur les Registres tenus dans cet Hôpital. *

Années.	*Malades.*	*Morts.*	*Prix du septier de bled, mesure de Paris, au marché de Paris.*			*Années.*	*Malades.*	*Morts.*	*Prix du septier de bled, mesure de Paris. au marché de Paris.*		
			liv.	ſ.	d.				liv.	ſ.	d.
1680	3126	606	27			1682	2341	359	26	2	6
1681	2748	579	28	3		1683	2175	299	24		
1684	2732	400	29	7	9	1687	2048	366	21	6	3
1685	3461	482	33	5	3	1688	1946	343	15	2	
1686	2678	471	21	13	3	1689	1953	330	17	9	
1691	3760	430	17	9	9	1690	2577	326	17	13	9
1692	3100	545	22	16	3	1695	1676	272	22	15	6
1693	7453	1772	43	7		1696	1640	252	23	8	3
1694	6954	2294	52	2	6	1697	1852	264	25	10	
1699	2657	348	39	18	9	1698	2053	278	31	17	6
TOTAL.	38669.	7927	315	4	6	TOTAL.	20261	3089	225	4	9
Année commune.	3867	792	31	10	5	Année commune.	2026	309	22	10	6

* Pour les 20 années depuis 1680 jusques & compris 1699 on a employé le prix du septier de Paris, attendu que le prix des grains, au marché de Rouen, ne remonte pas plus haut qu'en 1709.

SOURCE : MESSANCE, *op. cit.*

Cherté et dénatalité à Gérone 1670-1700

Années	Prix du blé	Baptêmes	Années	Prix du blé	Baptêmes
1670..............	51,5	124	1686..............	56.6	126
1671..............	50	131	1687..............	61,3	129
1672..............	56	121	1688..............	52,8	147
1673..............	53,5	133	1689..............	46,8	146
1674..............	50	116	1690..............	48.5	136
1675..............	50	129	1691..............	65	159
1676..............	52,6	136	1692..............	77,3	151
1677..............	52,3	140	1693..............	67,8	145
1678..............	107,1	147	1694..............	89,8	135
1679..............	84,5	103	1695..............	92,8	98
1680..............	59	143	1696..............	100,8	112
1681..............	58,4	119	1697..............	34,8	109
1682..............	47,8	130	1698..............	66,1	136
1683..............	74,1	139	1699..............	66,3	170
1684..............	84,5	118	1700..............	53,1	145
1685..............	64	132			

NADAL (Jorge), *La Población española*, p. 45.

chapitre 7

Le problème des partis de PACIOLI à PASCAL et FERMAT 1494-1654

Deux joueurs jouent à "un jeu de pur hasard", et le premier qui aura gagné un nombre déterminé de parties sera déclaré vainqueur. Mais voilà qu'ils doivent "quitter le jeu" avant qu'aucun des deux joueurs n'ait atteint le nombre de parties entraînant la victoire. Comment doivent-ils alors, en se séparant, partager "l'argent qu'ils ont mis au jeu" ?

Tel est le célèbre "problème des partis" (1) qui doit son nom à Pascal, lequel traita de cette "juste distribution" dans sa correspondance avec Fermat et dans le troisième "usage" du Traité du Triangle Arithmétique (2), ceci en 1654, accomplissant par là même les premiers pas du calcul des probabilités.

Mais l'admirable échange que représente cette correspondance, ainsi que la clarté du "troisième usage", ont trop souvent conduit les commentateurs à rejeter dans l'ombre, ou tout au moins au musée des "curiosités" et des "erreurs grossières", les solutions du même problème proposées par des auteurs du XVI^{ème} siècle.

Or, si au contraire, nous prenons la peine de nous arrêter un moment sur ces premières tentatives, nous découvrons un "matériau" d'une réelle richesse, tant pour l'historien que pour l'enseignant de mathématiques, comme nous allons tenter de le montrer.

Assurément, il y a une "histoire" du problème des partis, ou, plus exactement, un ensemble de textes (souvent assez courts) qui, lorsqu'on les rapproche, permettent à l'analyse de saisir toute une "dynamique" entre les solutions proposées et les critiques de certaines d'entre elles, tout un cheminement dans la compréhension du problème. Et c'est bien cette dynamique, ce cheminement, qui constituent, à nos yeux, l'aspect le plus original et le principal intérêt d'un tel corpus de textes dans la perspective de son utilisation avec des élèves.

I. PRESENTATION HISTORIQUE

Avant de rendre compte de quelques exemples d'utilisation de ces textes dans des classes, il nous faut les présenter historiquement. Précisons qu'il s'agit bien uniquement, pour des questions de place, d'une "présentation", et non pas d'une analyse historique. Pour une étude plus approfondie, nous renvoyons à l'article très documenté d'E. COUMET (3) (cf. bibliographie [3]). Répétons, d'autre part, que ce qui nous intéresse ici se situe moins dans l'étude de chaque texte que dans ce que l'on peut tirer de leur rapprochement, voire leur confrontation.

Indiquons enfin, pour être tout à fait clair, que nous ferons référence, dans cette présentation, à deux types de textes :

1°) Des "adaptations-résumés" écrits à partir des textes originaux, et qui constituent ce qui a été proposé aux élèves dans un premier temps. Nous en justifierons l'emploi un peu plus loin (cf. p.*109*). Ils seront désignés par la numérotation (T1), (T2), (T3), ...

2°) Les textes originaux eux-mêmes, sans lesquels on ne peut prétendre, de notre point de vue, faire réellement de l'histoire des mathématiques. Ils sont situés en annexes, et désignés par (AI), (AII), (AIII), ...

1) PACIOLI.

C'est dans la Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, dont la première édition parut en 1494 à Venise, que Luca PACIOLI aborde, de manière d'ailleurs fort marginale, le problème des partis (AI).

Le problème étudié par le mathématicien italien est le suivant :

Une brigade joue à la paume. Il faut 60 pour gagner, et chaque coup vaut 10 . L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 , et le second 20 . On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp (cité d'après [5]).

Il fait partie d'une section intitulée *De Militaribus*, et se trouve après le problème suivant (également dans (AI)) :

Une brigade de 3 000 hommes fait sur l'ennemi un sac qui lui rapporte 7 876 ducats. On demande combien revient à chaque homme, en supposant que le capitaine touche dix pour cent (cité d'après [5]).

On peut se demander ce qui autorise PACIOLI à regrouper dans une même section ces deux textes qui représentent pour nous deux problèmes radicalement différents : si le premier, que nous avons cité, correspond bien à la situation du problème des partis, le second, en revanche, n'est à nos yeux qu'un simple problème de proportionnalité. Assurément, l'identité des contextes anecdotiques, si elle justifie le titre de la section, ne donne pas les raisons de sa constitution.

La réponse à cette question se situe dans la solution même de l'auteur. En effet, c'est à l'aide de la *Règle de compagnie* (à peu près notre "règle de trois"), "une des règles les plus fondamentales de l'arithmétique commerciale" ([3], p. 250), qu'il résout ces deux problèmes dont le rapprochement s'explique alors : il s'agit, dans les deux cas, de prendre une décision pratique à l'aide d'un "outil" pratique.

Dès lors, la solution de PACIOLI au problème des partis ne pose pas de problème de compréhension (4) : les deux camps ont déjà obtenu 70 points qui correspondent à l'enjeu de 10 ducats. Le premier camp aura donc 5/7 de 10 ducats, et le second les 2/7 restants (cf. (T5)).

Comme le dit fort justement E. COUMET, la démarche de PACIOLI se caractérise par le fait que "les points acquis constituent en quelque sorte un bien, un *acquis*, d'après lequel doit s'effectuer le partage. Ce qui compte, c'est ce qui a été joué et gagné" ([3], p. 250).

C'est en s'appuyant sur cette argumentation, et aussi sur le sentiment très fort qu'il avait d'avoir découvert la "voie droite" (5), que PACIOLI va rejeter deux autres modes de répartition (d'ailleurs équivalents entre eux) sur lesquels il ne nous livre que peu de chose (nous ignorons, en particulier, quels en sont les auteurs). Nous nous contentons pour ces deux solutions et leurs critiques par PACIOLI de renvoyer aux "résumés" (T1), (T2), (T3), (T4).

2) TARTAGLIA.

C'est dans un tout autre état d'esprit, fort éloigné de ce sentiment de certitude, que Niccolo TARTAGLIA aborde le problème des partis (6). Il écrit, en effet : "la résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera toujours sujet à litiges" (AII), allant jusqu'à refuser d'écrire plus longuement sur le sujet en disant que "parce que de telles questions sont matière à litiges et de peu d'intérêt, il ne faut pas en tenir compte" (AII).

Il s'agit donc pour lui de proposer la solution "la moins litigieuse" à ses yeux, et par conséquent de montrer, dans un premier temps, que la solution de PACIOLI est inacceptable.

L'argument qu'il emploie consiste à appliquer la méthode de son prédécesseur dans le cas où l'un des deux camps n'a gagné aucune partie :

> *Sa règle ne me paraît, ni bonne, ni belle, parce que, s'il arrive que un parti ait 10 (points) et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout et le second rien ; ce serait tout à fait déraisonnable que pour 10 il doive tirer le tout* ((AII), voir aussi (T6)).

Il s'agit donc bel et bien d'un contre-exemple, ce qui déjà ne manque pas d'intérêt. Mais l'étude de la solution même de TARTAGLIA est également riche d'enseignement.

Après avoir critiqué PACIOLI, il est légitime que son souci essentiel soit d'éviter les partages déraisonnables qu'il vient de relever. On peut alors penser que c'est en réfléchissant précisément sur les raisons qui rendent "efficace" le contre-exemple qu'il vient d'exhiber, que TARTAGLIA s'attachera à considérer, non plus seulement les points obtenus par chaque joueur, mais surtout l'écart entre ceux-ci. Et c'est bien ce qui caractérise sa solution (T7).

Il faut encore remarquer que cette solution est en fin de compte équivalente à celles que PACIOLI avait rejetées précédemment, non sans pertinence. On peut donc s'étonner que TARTAGLIA, qui a lu PACIOLI, n'ait pas reconnu dans la critique de celui-ci une réfutation "par avance" de sa propre solution.

Pour comprendre cela, il faut sans doute d'abord noter que "les différences de présentations devaient suffire à masquer cette similitude" ([3], p. 255) ; mais, n'est-il pas possible de penser également que s'affirme ici, dans cette régression apparente, le caractère particulier du "débat" autour de ce problème, à cette époque. Cela mériterait d'être explicité davantage (7), mais disons simplement que nous sommes ici en présence d'un niveau de rationnalité (peut-être faudrait-il risquer de dire "un niveau de mathématisation du problème") qui tient davantage de l'argumentation que de la démonstration. Et ce n'est pas là le moindre intérêt de cette étude simultanée des textes de PACIOLI et de TARTAGLIA.

3) FORESTANI.

Lorenzo FORESTANI (8) rejette également la solution de PACIOLI, mais pour des raisons d'un tout autre ordre que celles de TARTAGLIA. Ce qui est au coeur de son argumentation, c'est la notion de "Fortune" : puisque le sort peut favoriser n'importe lequel des deux joueurs, il faut partager équitablement (en deux parts égales) ce qui dépendrait de lui s'ils continuaient à jouer (9).

De là le calcul de FORESTANI qui débute par la recherche du maximum de jeux que peuvent faire les deux joueurs, puis établit un mode de répartition qui tient effectivement compte (contrairement à PACIOLI, cf. note 4) de ce maximum.

Pour le reste, cette solution ne présente, elle aussi, aucune difficulté. Le partage proportionnel est rapporté à ce nombre maximum de parties, et ce qui resterait à jouer (c'est-à-dire ce qui n'a pas été acquis) est partagé en deux, puisque l'on ne peut rien dire de sûr à son sujet (cf. (T8)).

Citons, pour en terminer avec FORESTANI, un passage de son texte qui résume parfaitement sa position :

> *La raison que quelques-uns allèguent à l'opposé est la suivante : ils disent que celui qui a davantage de jeux est plus près de pouvoir finir et d'obtenir le tout ; aussi convient-il qu'il retire une partie de ces deniers au prorata des jeux gagnés.*
>
> *Et nous nous disons que la fortune peut se retourner rapidement et favoriser l'autre à gagner le tout, comme on l'a vu et comme on le voit un nombre infini de fois, aussi bien dans le jeu de la balle que dans tout autre, mais principalement dans les choses de la guerre... ainsi que l'a doctement montré l'Arioste en la personne de Charles dans ces deux vers :*
>
> Ainsi la Fortune sourit-elle à Agramant
> Qui devint de nouveau, de Charles l'assiégant (10).

Charles ayant en effet assiégé Agramant, la Fortune se retourna à un tel point qu'Agramant mit en déroute en un instant l'armée de Charles, et l'assiégea une nouvelle fois dans Paris.

4) CARDAN.

Le dernier chapitre de la pratica arithmética et mesurandi singularis (11) est intitulé *De erroribus fratris Lucae in arithmetica* (cf. (AIV)).

Parmi ces erreurs de PACIOLI, il y a pour CARDAN les "absurdités" *(absurdissimum)* auxquelles conduit le partage que celui-ci a proposé dans le problème des partis. CARDAN parle même d'erreur que "même un enfant peut reconnaître" *(a puero etiam cognoscibili)*. Parmi les arguments qu'il emploie pour réfuter cette répartition, deux d'entre eux peuvent aisément être explicités (ce sont ceux que nous avons repris dans (T9)) :

- Le premier consiste à montrer que le partage défavorise celui qui a presque gagné, dans certains cas, comme lorsque l'un des joueurs a gagné 18 parties, l'autre 9 , et que l'on joue en 19 parties. En effet, la règle de PACIOLI, donnant respectivement 2/3 (18/27) et 1/3 (9/27) de la mise à chacun des joueurs, ne rapporte à celui qui a 18 que 1/3 de l'argent déposé par son adversaire, alors qu'il reste à ce dernier 10 parties à gagner (contre 1 pour celui qui a 18).
- Le second argument utilise le même type de contre-exemple que TARTAGLIA, prenant cette fois la défense de celui qui n'a (encore) gagné aucune partie face à celui qui en a gagné quelques-unes et qui reçoit cependant toute la mise comme s'il avait gagné le jeu. A noter que CARDAN "généralise" le contre-exemple de TARTAGLIA en considérant comme tout aussi injuste le partage de PACIOLI dans le cas où l'un des joueurs a presque gagné (18 parties dans le cas précédent) et où l'autre n'a rien gagné. Car alors, tout donner au premier serait considérer la dernière partie nécessaire (celle de 18 à 19) comme superflue.

En ce qui concerne la solution proposée par CARDAN, elle est d'un abord beaucoup plus difficile, le texte, par sa concision même, posant des problèmes d'interprétation.

Notons tout d'abord que CARDAN est le premier (se rapprochant ainsi de PASCAL et FERMAT) à avoir remarqué que ce qu'il faut considérer lorsque les joueurs s'arrêtent, ce n'est pas ce qu'ils ont acquis (ce qui est la position de PACIOLI et même de TARTAGLIA), mais ce qui leur manque pour gagner le jeu (ce qu'il appelle le *terminus ad quem*).

Partant de là (soit x et y les nombres de parties que devraient encore gagner chacun des joueurs pour remporter le jeu), CARDAN fait intervenir une "progression" *(progressio 3 est 6 ... progressio 7 est 28)* qu'il "applique" à x et y. Il trouve ainsi deux autres nombres (soit respectivement z et t) à partir desquels il partage proportionnellement la mise ($t/(z + t)$ pour celui auquel il manque x, $z/(z + t)$ pour l'autre).

Or, s'il est facile de remarquer que cette progression correspond à la somme des entiers naturels ($S_n = n(n + 1)/2$), il est beaucoup moins aisé de comprendre par quels raisonnements CARDAN justifie l'utilisation d'un tel outil dans lequel il voyait certainement "le moyen de résoudre rationnellement, et non pas par quelque compromis boiteux comme chez TARTAGLIA, la question du partage équitable" ([3], p. 263).

Ceci peut, en effet, donner lieu à plusieurs interprétations. Nous avons repris dans "l'adaptation-résumé" (cf. (T10)) celle de Moritz CANTOR (12), citée et critiquée par E. COUMET, bien que nous soyons sensibles aux arguments de ce dernier et préférions l'interprétation qu'il propose. Mais celle-ci exigeant une analyse plus fine, et donc plus longue, de "l'esprit de l'argumentation" de CARDAN, nous avons été conduits à faire ce choix "discutable" dans le texte proposé aux élèves. De même, il serait trop long de présenter ici cette interprétation qu'E. COUMET élabore dans son article; nous nous contentons d'en conseiller vivement la lecture ([3] , p, 266-270).

Il nous faut néanmoins citer deux passages du texte de CARDAN, afin de saisir un peu mieux l'esprit de sa démarche :

Le premier est d'une grande clarté :

Or la raison démonstrative de ce qui précède est la suivante : si la division une fois faite le jeu recommençait à nouveau, les partis en présence devraient miser la même somme que celle qu'ils ont reçue à condition de s'arrêter de jouer.

Ce principe, qui lie les "partis" aux "paris", est très proche de la position pascalienne (13), quoique "en sens inverse" d'une certaine manière ([3], p. 263).

C'est à coup sûr la grande originalité de CARDAN que d'avoir adopté ce point de vue. Cela lui fournit un autre argument pour réfuter PACIOLI ([3], p. 263), et lui permet d'expliciter (de manière il est vrai assez confuse) l'usage de sa progression sur un exemple :

Quelqu'un dit : "Je veux jouer à cette condition que tu ne puisses vaincre à moins de gagner 3 jeux de suite, et je veux être tenu pour le vainqueur si moi, je gagne 1 jeu. Et celui qui veut gagner 3 jeux mise 2 ducats ; de combien doit être la mise de l'autre ? Je dis qu'il mise 12 ducats. En voici en effet la raison : s'ils avaient à jouer en 1 jeu, il suffirait qu'il mise 2 ducats, et s'ils jouaient en 2 jeux, il devrait miser le triple, car en gagnant simplement 2 jeux, il gagnerait 4 ducats, mais il persévère en *courant le risque de perdre le second jeu après avoir gagné le premier, donc il doit avoir un bénéfice triple ; et s'ils jouent en 3 jeux, son bénéfice doit être sextuple, parce que la difficulté est redoublée, donc il devrait miser 12 ducats. Et tout-à-l'heure il a reçu 12 ducats et l'autre 2 : donc la division a été faite de manière convenable...*

La démarche de CARDAN exigerait certes de plus longs développements, et nous sommes tout à fait conscients de l'avoir quelque peu "mutilé" afin de ne pas rendre "illisible" le texte proposé aux élèves (T10). Les exigences de clarté et de concision de la formulation et le respect de l'esprit du texte ne sont pas toujours faciles à accorder. C'est là sans doute une difficulté de cette démarche d'introduction aux textes historiques à l'aide de "pré-textes" ("adaptation-résumés" ou "exercices"). Nous travaillons cependant à une autre rédaction, plus "fidèle", de la "solution de Jérôme".

5) PASCAL ET FERMAT.

Contrairement aux précédents, ces textes (notamment ceux de PASCAL) ont été abondamment étudiés (cf., par exemple, [2] et [6]). D'autre part, même s'ils sont parfois difficiles à suivre "dans le détail", ils demeurent cependant d'un accès plus aisé (ne serait-ce que parce qu'ils représentent ce que nous considérons aujourd'hui comme "LA" bonne solution). La lecture des textes originaux (AV), (AVI), (AVII), accompagnée de celle des "résumés" (T11), (T12), (T13), devrait donc suffire à la compréhension des méthodes de PASCAL et FERMAT. C'est pourquoi nous nous contenterons, dans ce paragraphe, de quelques remarques :

* Comme le rapporte PASCAL lui-même, Antoine GOMBAUD CHEVALIER de MERE (1607-1684) lui posa deux problèmes, dont le second correspond au problème des partis. Pierre de CARCAVI (1603-1684) servit un moment d'intermédiaire entre PASCAL et FERMAT (14) avant que les deux hommes n'entament une correspondance directe, tout au long de l'année 1654.

De cette correspondance, un certain nombre de lettres ne nous sont pas parvenues, notamment celle de FERMAT (antérieure à la lettre de PASCAL du 29 juillet) où celui-ci exposait sa méthode que nous ne connaissons donc que par l'exposé qu'en donne PASCAL (AV). Nous donnons des extraits (15) de trois de ces lettres :

1°) La lettre de PASCAL du 29 juillet, où celui-ci expose sa méthode.

2°) La lettre de PASCAL du 24 août, dans laquelle il expose la méthode de FERMAT pour deux joueurs, et l'objection de ROBERVAL envers cette méthode. PASCAL donne alors les arguments qu'il utilisa pour convaincre ROBERVAL. Enfin, il critique cette même "méthode des combinaisons" (16) dans le cas de trois joueurs.

3°) La lettre de FERMAT du 25 septembre, où le savant toulousain répond aux critiques de PASCAL, et donne clairement le principe de sa méthode.

★ Que l'on célèbre le génie de PASCAL et FERMAT, que l'on s'extasie ou ironise sur cette "rencontre de hasard" entre PASCAL et MERE (17), il n'en reste pas moins que la question de la genèse de la découverte de "la" solution par les deux mathématiciens français reste posée (18).

Question complexe (et encore ouverte), dont nous voudrions simplement évoquer deux aspects :

- Le premier concerne la "dette" de PASCAL et FERMAT envers leurs prédécesseurs (cités dans les quatre premiers paragraphes). Or nulle part, dans la correspondance de 1654 (ou dans le Traité du Triangle Arithmétique), il n'est fait allusion à un des quatre mathématiciens italiens (19). Nous sommes donc conduits à faire des hypothèses à partir de l'analyse des différentes méthodes (voir, par exemple, l'identité de point de vue que nous avons indiquée entre CARDAN et PASCAL).

- Le second s'attache au contexte historique dans lequel les idées de PASCAL et FERMAT virent le jour (statut "théologique" et "juridique" des jeux de hasard, notions de paris, de fortune, de risque...). Nous renvoyons pour tout ceci à un autre article, tout à fait passionnant de E. COUMET ([4]).

★ Reste alors l'analyse des deux méthodes développées dans cette correspondance, et la recherche de la spécificité de chacune d'entre elles (20).

Peut-être serait-il alors préférable de parler de "démarches", car l'opposition des deux mathématiciens se situe précisément dans la manière de "saisir" (au sens premier de "s'emparer de") le problème ; on serait presque tenté de dire : dans la façon qu'ils ont de "se raconter l'histoire" des deux joueurs.

Entre la formulation "personnalisée" (*je suis sûr d'avoir 32 pistoles...*), significative de ce que, faute de mieux, nous appellerons le "style" de PASCAL, et le tableau de FERMAT, entre le raisonnement progressif et récurrent du premier et la "mise à plat" globale et "conventionnelle" du second (*cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle...*), il n'y a pas seulement opposition de deux "techniques" de résolution, mais bien confrontation de deux démarches, de deux "regards"... Ceci dit pour inviter au travail passionnant de "commentaire de texte" détaillé de cette correspondance...

★ Un autre aspect tout à fait intéressant (y compris dans la perspective d'une étude en classe, voir, plus loin, le compte-rendu de la deuxième utilisation proposée), concerne l'aspect argumentatif de cet échange de lettres. Il se cristallise sur deux points :

1° L'objection de ROBERVAL ((AVI) et (T13)) qui représente une objection "forte" (21), très souvent formulée spontanément par des élèves découvrant la méthode de FERMAT, et qui donne l'occasion à PASCAL de développer toute une argumentation à la fois pertinente et "partielle" puisqu'elle est, à notre avis, l'une des causes de "l'incompréhension" (22) de ce dernier en ce qui concerne le deuxième point annoncé ci-dessus :

2°) <u>Le cas de trois joueurs</u> ((AVI), (AVII)) (23) où l'on voit PASCAL commettre une "erreur de lecture" du tableau de FERMAT qui s'explique alors très clairement sur sa méthode, dans sa réponse à PASCAL (24).

Encore une fois, tout ceci est davantage de l'ordre de la remarque (voire de la "piste de réflexion") que de l'analyse. Notre seul but est de montrer combien cette correspondance entre PASCAL et FERMAT peut être riche, si l'on dépasse le simple exposé (trop et mal connu) des deux méthodes de résolution.

Et il en va de même de toute cette présentation. Sa lecture ne permet certes pas de "tout comprendre", ni de clore le sujet, mais se veut, au contraire, point de départ de nouvelles questions et recherches sur des textes qui méritent mieux, à notre avis, que l'oubli (ou le trop rapide survol) dont ils furent l'objet dans la plupart des cas.

Et ceci d'autant plus, répétons le, qu'ils nous semblent parfaitement adaptés (ou adaptables) pour une étude avec des élèves ; ce dont nous allons maintenant dire quelques mots.

II. LES DIFFERENTES SOLUTIONS AU PROBLEME DES PARTIS EXPERIMENTATION EN TERMINALE D

1. PRESENTATION DES ADAPTATIONS-RESUMES

A mi-chemin entre les textes historiques et leurs traductions en langage moderne (voire formalisé), les textes qui suivent peuvent apparaître comme un compromis discutable et dangereux, susceptible d'entretenir la trop fréquente supercherie qui consiste à prétendre faire de l'histoire des mathématiques sans étudier les textes sources (en se contentant de "renseignements de seconde main").

Cependant, ils ont été rédigés dans un but bien précis, et suivant une démarche dont il convient sans doute de dire quelques mots afin, non seulement de se justifier, mais également de prévenir les malentendus éventuels :

★ Précisons, tout d'abord, qu'ils ont été élaborés et expérimentés dans le cadre d'une recherche (25) dans laquelle la dimension historique des mathématiques, sans être marginale, y était néanmoins secondaire. Davantage : le bon déroulement de l'expérimentation elle-même exigeait l'occultation momentanée de la nature historique des solutions proposées aux élèves (cf. le "scénario" exposé un peu plus loin). Elles furent donc présentées comme "solutions d'autres élèves" (d'où la dénomination par prénoms francisés).

Le passage par l'intermédiaire de ces "adaptations-résumés" nous semblait en effet être un stratagème indispensable pour que soient prises en compte, de manière équivalente pour les élèves, leurs propres solutions et les solutions historiques ; c'est-à-dire afin que ne s'introduisent pas d'artefacts du type : "un mathématicien a toujours raison", "la solution la plus récente est certainement la bonne"... dans les raisonnements des élèves.

★ Si nous pensons d'autre part que, malgré son caractère singulier, l'utilisation de tels textes a sa place dans cette brochure, c'est que, par delà l'emploi du "stratagème" évoqué ci-dessus (et sans doute grâce à lui), ces textes "fabriqués" constituent une sensibilisation possible (et "efficace" d'après nos observations) à "l'histoire" du problème des partis, et donc aux textes historiques eux-mêmes. Elle suit en cela la démarche commune à toutes les propositions de la brochure, les solutions proposées sous cette forme faisant alors office d'exercices d'introduction.

★ Enfin, il faut souligner que, sans être, bien évidemment, des traductions littérales des textes historiques, ces "adaptations" furent rédigées, à chaque fois, à partir du texte original, et avec pour souci constant le respect de l'esprit du texte, c'est-à-dire de la démarche de l'auteur.

Sans prétendre y être parfaitement arrivés (nous avons notamment souligné, dans la présentation, nos difficultés en ce qui concerne CARDAN), nous pensons néanmoins avoir sauvegardé la spécificité, le "style" de chaque solution, et par conséquent ce qui fait l'intérêt de leur confrontation.

Sans doute ne faut-il jamais oublier qu'il y a un moment où le résumé appauvrit définitivement, où le changement de langage trahit irrémédiablement. Mais c'est précisément cela qu'une analyse rigoureuse des textes originaux et un travail précis de rédaction doivent permettre d'éviter.

Rester fidèle aux textes, dissimuler un moment leur origine historique et, dans le même temps, être suffisamment clair pour permettre aux élèves "l'accès" aux textes originaux plus complexes, tels furent les objectifs et le rôle de ces "adaptations-résumés". Ce n'est que dans ce cadre qu'ils peuvent apparaître légitimes et adéquats.

AUTEURS ET SOURCES DES SOLUTIONS PROPOSEES

XAVIER et YANN : X et Y, auteurs inconnus, solutions rapportées et critiquées par Luca PACIOLI.

LUC : Luca PACIOLI (1445-1514).
Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita, 1ère édition, Venise, 1494.

NICOLAS : Niccolo TARTAGLIA (1500-1557).
La prima parte del general trattato di numeri e misure, 1556.

JEROME : Jérome CARDAN (1501-1576).
Pratica arithmética et mensurandi singularis, 1539.

LAURENT : Lorenzo FORESTANI.
Pratica d'aritmética e géométria, 1ère édition, 1603.

PASCAL : Blaise PASCAL (1623-1662).
Troisième usage du triangle arithmétique, 1665.
Correspondance avec Fermat, 1654-1660.

PIERRE : Pierre de FERMAT (1601-1665).
Correspondance avec Pascal, 1654-1660.

GILLES : Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675).

2. ADAPTATIONS-RESUMES

TO. PROBLEME.

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui a 8 points (c'est-à-dire qui a gagné 8 parties) est le vainqueur du jeu, et il gagne 84 francs (on appelle cette somme : la mise).

Seulement, Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu.

Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné 7 parties (elle a donc 7 points), et Bernard 5 parties (il a donc 5 points).

Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée (aucun d'eux n'a 8 points).

Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et que donner à Bernard pour que le partage soit juste ?

Quel partage proposez-vous, et pourquoi ?

Rappel de la situation :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,
Bernard a 5 points.

La mise totale est de 84 francs.

Question supplémentaire :

Quel partage proposeriez-vous, et pourquoi, si la situation, pour le même jeu, était la suivante :

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.

Quand ils s'arrêtent de jouer : Ariane a 7 points,
Bernard a 0 point.

La mise est toujours de 84 francs.

T1. SOLUTION DE XAVIER.

Revenons en arrière, et ôtons 2 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane a 5 points et Bernard 3 points.

Puisque $5 + 3 = 8$ et que 8 points font gagner 84F , alors Ariane, qui a 5 points, doit emporter $\frac{5}{8} \times 84F = 52,50F$, et Bernard ayant 3 points doit avoir, quant à lui, $\frac{3}{8} \times 84F = 31,50F$.

Donc la mise se partagera en :

52,50F pour Ariane ,
31,50F pour Bernard .

T2. SOLUTION DE YANN.

Revenons en arrière, et ôtons 5 points à chaque joueur, de sorte qu' Ariane n'a plus que 2 points et Bernard 0 point.

Puisque 2 est le quart de 8 , on peut dire qu' Ariane a déjà le quart du jeu, donc elle doit déjà prendre le quart de 84F , c'est-à-dire 21F .

Le reste de la mise ($84 - 21 = 63$) doit être partagé également entre les deux joueurs. Ce qui fera donc pour chacun 31,50F .

Donc la mise se partagera en :

21F + 31,50F = 52,50F pour Ariane ,
31,50F pour Bernard .

T3. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE XAVIER.

On ne doit pas faire comme Xavier pour partager la mise. Car, si on ôte deux points à Ariane, qui en a 7 , cela veut dire qu'on lui retire $\frac{2}{7}$ de ses points. Tandis qu'en ôtant 2 points à Bernard, on lui retire $\frac{2}{5}$ de ses points.

Or $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$. Proportionnellement, on a donc retiré plus à Bernard qu'à Ariane. C'est-à-dire qu'on a retiré une plus grosse partie de ses points à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

T4. LUC CRITIQUE LA SOLUTION DE YANN.

La solution de Yann n'est pas bonne. Car, en ôtant 5 points à Ariane, on lui a retiré $\frac{5}{7}$ de ses points (car elle en avait 7). Tandis qu'en ôtant 5 points à Bernard, on lui a tout retiré.

Proportionnellement, on a donc plus retiré à Bernard qu'à Ariane. Et cela n'est pas juste.

T5. SOLUTION DE LUC.

Voici ma solution :

Les joueurs ont à eux deux 12 points. On peut donc dire qu'Ariane a $\frac{7}{12}$ de tous les points, et que Bernard a $\frac{5}{12}$ de tous les points.

Il faut donc partager la mise suivant cette proportion : $\frac{7}{12}$ de la mise pour Ariane, et $\frac{5}{12}$ de la mise pour Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$\frac{7}{12} \times 84F = 49F$ pour Ariane ,

$\frac{5}{12} \times 84F = 35F$ pour Bernard .

T6. NICOLAS CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

La règle de Luc n'est ni bonne, ni belle. Car, si Ariane avait un seul point et Bernard zéro point, et si l'on appliquait la règle de Luc, alors Ariane devrait recevoir toute la mise et Bernard rien du tout !!

Ce ne serait pas juste que, pour un seul point (alors qu'il en faut 8 pour gagner), Ariane doive retirer toute la mise en ne laissant rien à Bernard.

T7. SOLUTION DE NICOLAS.

Quelle que soit la solution qu'on propose, on trouvera toujours moyen de la discuter. Je propose quand même ma solution qui me paraît être la moins discutable.

Si la mise est de 84F , on peut dire que chaque joueur a misé 42F .

Ariane, qui a le plus de points, doit déjà récupérer sa mise (42F) . Mais, puisqu'elle a 2 points de plus que Bernard et que 2 points représentent le quart du jeu, Ariane doit prendre aussi le quart de la mise de Bernard (c'est-à-dire 42F divisé par 4), ce qui est égal à 10,50F .

Donc la mise se partagera en :

42F + 10,50F = 52,50F pour Ariane ,

84F − 52,50F = 31,50F pour Bernard .

T8. SOLUTION DE LAURENT.

Je pense aussi que Luc se trompe. Car il faut tenir compte de la chance qui peut se retourner rapidement et favoriser Bernard d'un seul coup.

Si la partie se gagne en 8 points, les deux joueurs peuvent jouer au maximum 15 parties. Or Ariane en a gagné 7 et Bernard 5 , ce qui fait 12 parties en tout. Il pourrait donc encore y avoir 3 parties et, sur ces parties là, on ne peut rien décider.

Il faut donc faire ainsi :

- Ariane a gagné 7 parties, donc elle doit prendre $\frac{7}{15}$ de la mise, c'est-à-dire 39,20F .

- Bernard avec ses 5 parties doit prendre les $\frac{5}{15}$ de la mise, c'est-à-dire 28F .

- Il reste $\frac{3}{15}$ de la mise qui correspondent aux 3 parties qui pourraient avoir lieu s'ils continuaient de jouer. On ne sait rien de ces parties. Il faut donc diviser en deux parts égales ces $\frac{3}{15}$ de la mise qui représentent 16,80F . Il faut donc donner en plus à chacun 8,40F .

Donc la mise se partagera en :

39,20F + 8,40F = 47,60F pour Ariane ,

28F + 8,40F = 36,40F pour Bernard .

T9. JERÔME CRITIQUE LA SOLUTION DE LUC.

Je veux d'abord dire que la solution de Luc est absurde. Il fait une erreur que même un petit enfant pourraît reconnaître. Voici laquelle :

Dans la solution de Luc, Ariane emporte 49F et Bernard 35F . Autrement dit, si on considère qu'ils ont chacun misé 42F , cela veut dire que Ariane a gagné 7F sur l'argent de Bernard.

Or la somme de 7F représente seulement $\frac{1}{6}$ de la mise de Bernard, alors qu'il ne reste plus qu'une seule partie à gagner pour Ariane, tandis que Bernard doit encore en gagner 3 , c'est-à-dire 3 fois plus !!

On voit qu'Ariane ne gagne pas assez sur l'argent de Bernard. Ce partage est injuste.

Mais regardons encore un autre exemple où la solution de Luc n'est pas bonne :

Si Ariane avait 7 points et Bernard 0 point, alors, d'après la solution de Luc, Ariane devrait prendre toute la mise et Bernard rien du tout.

Mais alors, ce serait faire comme si Ariane avait gagné le jeu, comme si elle avait 8 points, comme si la dernière partie n'avait pas d'importance. Cela ne serait pas juste.

T10. SOLUTION DE JERÔME.

Voici ma solution :

Pour trouver le bon partage, il faut seulement regarder ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner : il manque 1 partie à Ariane et 3 parties à Bernard.

Il faut donc 1 hasard à Ariane pour qu'elle gagne la partie qui lui manque.

Il faut 1 hasard à Bernard pour qu'il gagne la première partie nécessaire, 2 hasards pour qu'il gagne la seconde, et 3 hasards pour gagner la troisième et enfin gagner le jeu.

Il faut donc 1 hasard pour Ariane et 1 + 2 + 3 , soit 6 hasards pour Bernard.

Donc Ariane doit avoir 6 fois plus de chances de gagner que Bernard, et elle doit emporter 6 fois plus.

Donc la mise se partagera en :

$$\frac{6}{7} \times 84F = 72F \quad \text{pour Ariane} \;,$$

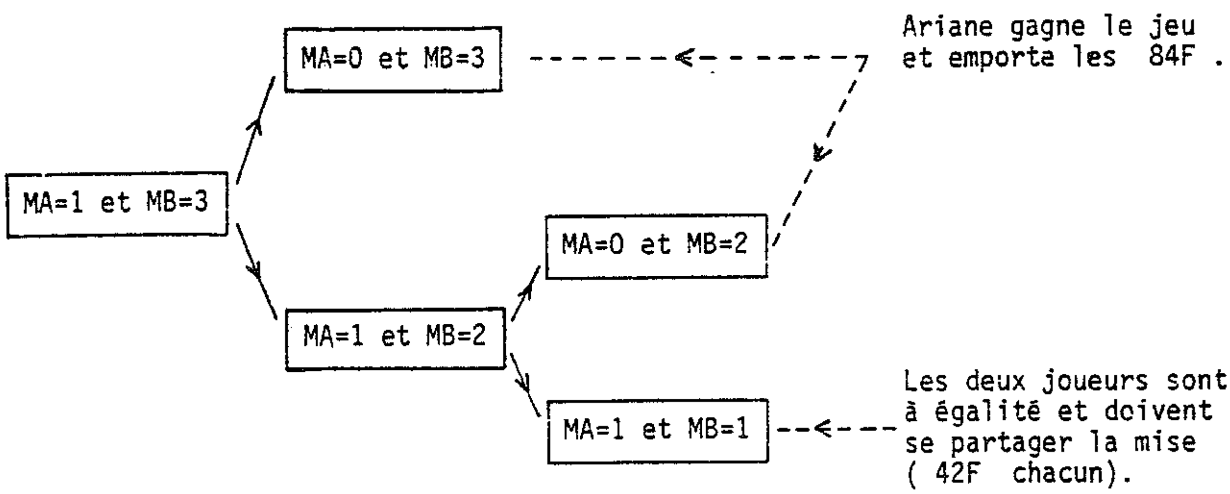
$$\frac{1}{7} \times 84F = 12F \quad \text{pour Bernard} \;.$$

T11. SOLUTION DE PASCAL.

Ce qui est important, c'est ce qu'il manque à chaque joueur pour gagner (1 point pour Ariane et 3 points pour Bernard), et ce qui pourrait se passer s'ils continuaient à jouer.

Par exemple : Si Ariane gagne la partie d'après, il lui manquera 0 point et elle aura gagné le jeu, mais si c'est Bernard qui gagne, il ne lui manquera plus que 2 points (et il manquera toujours 1 point à Ariane).

Pour imaginer tout ce qui pourrait se passer dans les parties qui suivraient s'ils ne s'arrêtaient pas de jouer, je représente cela sous forme d'un "arbre" (où MA désigne ce qui manque à Ariane, et MB ce qui manque à Bernard) :



Ensuite, voilà comment ils se partagent la mise. Ariane dit à Bernard :

"Imaginons qu'il me manque 1 point et toi 2 points. A la partie suivante :

- Si c'est moi qui gagne, il me manquera 0 point et j'aurai gagné le jeu. Donc je devrai prendre toute la mise : 84F .

- Mais si c'est toi qui gagne, il nous manquera à chacun 1 point. Nous devrons donc partager la mise en deux parts égales : 42F pour chacun.

Or nous avons chacun une chance sur deux de gagner cette partie. Je suis donc sûre de gagner au moins 42F , et pour les autres 42F , j'ai une chance sur deux de les gagner.

Donc, s'il me manque 1 point et toi 2 , je dois prendre 42F $+ \frac{1}{2} \times$ 42F = 63F . Et toi, tu prendras le reste : 21F .

Mais, en fait, il me manque 1 point et toi 3 points. Il faut donc remonter encore en arrière :

Si je gagne la prochaine partie, je gagnerai 84F , et si je la perds, il me manquera toujours 1 point, et toi il ne t'en manquera plus que 2 . Or je viens de te montrer que, dans ce cas, je dois prendre 63F et toi 21F . Je suis donc sûre de gagner 63F , et j'ai une chance sur deux de gagner le reste, c'est-à-dire 84F - 63F = 21F .

Donc je dois recevoir, avant de jouer cette partie et si on décide de s'arrêter : 63F $+ \frac{1}{2} \times$ 21F = 73,50F ."

Donc la mise se partagera en :

73,50F pour Ariane ,
10,50F pour Bernard .

T12. SOLUTION DE PIERRE.

Il manquera 1 point à Ariane et 3 points à Bernard. Donc, s'ils ne s'arrêtaient pas, ils devraient encore jouer au maximum 3 parties.

Regardons tout ce qui peut se passer pendant ces 3 parties. Je note "a" lorsque Ariane gagne, et "b" quand c'est Bernard qui gagne. On a alors comme possibilités tous les cas suivants :

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(1)	a	a	a
(2)	a	a	b
(3)	a	b	a
(4)	b	a	a

	Partie n° 1	Partie n° 2	Partie n° 3
(5)	a	b	b
(6)	b	b	a
(7)	b	a	b
(8)	b	b	b

Il y a 8 cas (en fait 2^3), et sur ces 8 cas, il y en a 7 où Ariane gagne (les sept premiers dans le tableau), et 1 seul où c'est Bernard.

Il faut donc qu'Ariane emporte une partie de la mise 7 fois plus importante que celle de Bernard.

Donc la mise se partagera en :

$$\frac{7}{8} \times 84F = 73{,}50F \quad \text{pour Ariane} \;,$$

$$\frac{1}{8} \times 84F = 10{,}50F \quad \text{pour Bernard} \;.$$

T13. OBJECTION DE GILLES.

Pierre a tort de faire la répartition de la mise en supposant que Ariane et Bernard jouent encore 3 parties.

Car, s'il manque 1 partie à Ariane et 3 à Bernard, il n'est pas nécessaire qu'ils jouent 3 parties pour terminer. Il peut arriver qu'ils n'en jouent que 1 ou 2 .

Alors, je ne vois pas pourquoi Pierre prétend faire la répartition de la mise en suivant une règle imaginaire (à savoir qu'ils jouent en 3 parties), car la règle naturelle du jeu est qu'ils s'arrêtent de jouer dès que l'un des deux a gagné. Ce qui n'est pas le cas dans le tableau de Pierre (sauf pour les lignes (6) et (8)).

Ce que fait Pierre n'est peut-être pas faux, mais, en tout cas, cela n'est pas démontré. Il risque donc d'y avoir une erreur dans le raisonnement.

3. EXPERIMENTATION EN TERMINALE D

Le travail proposé a été présenté comme une introduction au cours de probabilités. Deux séances de 45 minutes environ ont été proposées à 20 élèves d'une classe de Terminale D comprenant 8 redoublants (ayant donc eu un cours de probabilités l'année précédente).

Les élèves se sont constitués en binômes, dont 3 binômes de redoublants et 2 binômes mixtes.

Première séance.

Lors de la première séance, l'énoncé T0 (cf. p.111) a été distribué à chacun des binômes : il leur a été demandé de donner une solution, et de justifier leur réponse afin de convaincre un autre binôme. Au bout de 25 minutes environ, chaque binôme a rendu sa feuille de communication et a reçu celle d'un autre binôme (26) : il a eu mission d'exprimer son accord ou son désaccord avec la solution du binôme émetteur en justifiant son opinion.

L'atmosphère de la classe s'est avérée immédiatement excellente : la situation en binôme a été un puissant stimulant de la réflexion.

Sur 10 binômes, appelés Bi 1 , Bi 2 , ... , Bi 10 , 7 d'entre eux ont proposé une répartition proportionnelle au nombre de parties déjà gagnées (répartition appelée dans la suite "règle de proportionnalité"), soit $\frac{7}{12}$ de 84 F pour Ariane et $\frac{5}{12}$ de 84 F pour Bernard : il s'agit de la solution qui avait été proposée par PACIOLI (cf. T5, solution de Luc, p.113).

Bi 9 , qui avait lui aussi affecté la valeur de $\frac{1}{12}$ de 84 F , soit 7 F , à une partie, a remarqué qu'il manquait une seule partie à Ariane pour gagner, et a donc proposé la somme de 84 F - 7 F pour Ariane.

Bi 1 a tenté de tenir compte du nombre de points manquant à l'un et à l'autre pour gagner le jeu ; il en a déduit une répartition proportionnelle, pour chaque joueur, au nombre de points manquant à l'autre joueur, soit $\frac{3}{4}$ de 84 F pour Ariane et $\frac{1}{4}$ de 64 F pour Bernard.

Enfin Bi 7 , binôme de redoublants, a tenté d'utiliser des chances de $\frac{1}{2}$ et de $(\frac{1}{2})^3$, mais n'a pu mener son raisonnement correctement.

La question supplémentaire a été traitée par 8 binômes sur 10 . Elle porte sur un cas particulier (l'un des joueurs a 0 point), historiquement très important puisqu'il sert de contre-exemple à TARTAGLIA et à CARDAN. Cette question supplémentaire était destinée à faire obstacle à la "règle de proportionnalité" dont les expériences préalables avaient montré le caractère dominant.

- Bi 7 , après avoir affecté à Bernard une chance de $(\frac{1}{2})^8$, n'a pu, de nouveau, terminer correctement. Quant aux 7 autres binômes, ils ont tenté d'appliquer leur "règle de proportionnalité" avec des stratégies diverses :

- Bi 2 et Bi 5 ont appliqué strictement leur règle : ils ont donné 84 F à Ariane, soit parce qu'"Ariane a gagné toutes les parties", soit parce que "Bernard n'a pas encore gagné de parties".

- Bi 4 et Bi 6 n'ont sans doute pas accepté cette évidente injustice qui consisterait à donner la somme totale à Ariane, et ils ont "adapté" leur règle à la nouvelle situation ; ils ont affecté à chaque partie la valeur de $\frac{1}{8}$ de 84 F , soit 10,5 F (en pensant sans doute aux 8 parties à jouer pour gagner !), et en ont déduit la répartition de 7 x 10,5 F pour Ariane et de 1 x 10,5 F pour Bernard, en remarquant bien que celui-ci n'avait encore rien gagné.

- Bi 8 et Bi 10 , après avoir affecté de la même manière la valeur de 10,5 F à une partie, ont pensé que, après avoir donné 7 x 10,5 F , soit 73,5 F à Ariane, il fallait partager en deux parties égales les 10,5 F qui restaient ; d'où la répartition : 73,5 F + 5,25 F pour Ariane et 5,25 F pour Bernard.

- Bi 9 , enfin, a maintenu sa stratégie initiale : il a affecté à chaque partie la valeur de $\frac{1}{7}$ de 84 F , soit 12 F , et a proposé de donner à Ariane la somme de 84 F - 12 F , puisqu'il lui manquait une partie pour gagner (les 12 F restants étant donnés à Bernard comme "prime de consolation" !).

La solution "proportionnelle" de PACIOLI semble donc correspondre au schéma classique spontané (?) que les élèves mettent en oeuvre avant d'avoir reçu un enseignement de probabilités. Les autres solutions historiques ne se retrouvent guère dans les réponses des élèves, à l'exception peut-être du partage égal entre les deux joueurs du reste de la mise dans une solution rejetée par PACIOLI lui-même (cf. T2, solution de Yann, p. 112).

La critique de la solution d'un autre binôme qui a été demandée ensuite a donné les résultats suivants en ce qui concerne la première question :

- 4 binômes, qui avaient proposé une solution identique à la solution reçue, ont exprimé leur accord ;
- Sur 6 binômes qui ont eu à critiquer une solution différente de la leur, 4 ont mis en cause le raisonnement qui leur était soumis, un binôme s'est contenté de donner sa propre solution, un autre enfin a exprimé son incompréhension.

La critique de la solution à la question supplémentaire a suscité davantage de questions ; 7 binômes l'ont abordée :

- Bi 4 et Bi 9 se sont laissé tenter : "Ce n'est pas une mauvaise idée", "Pourquoi pas ?".
- Bi 10 avait reçu de Bi 3 une feuille de communication sans réponse à la question supplémentaire : il a appliqué le raisonnement employé à la première question (le même pour Bi 3 et Bi 10), et en a donc déduit une solution (somme totale remise à Alain) différente de celle qu'il avait proposée précédemment pour cette même question supplémentaire.
- Bi 6 , qui avait reçu une feuille de communication sans réponse à la question supplémentaire, s'est contenté de donner sa propre solution.
- Bi 5 a contesté la solution reçue qui, pourtant, était en accord avec la sienne.
- Bi 8 , refusant de donner la somme totale à Alain comme le proposait Bi 5 , a exposé sa solution.
- Bi 3 , enfin, qui n'avait pas répondu lui-même à la question supplémentaire, n'a pas été convaincu par Bi 9 : "La preuve n'est pas logique avec votre raisonnement".

La critique de la question supplémentaire semble avoir confirmé le rôle déstabilisateur joué par cette dernière.

Deuxième séance.

Lors d'une deuxième séance, une semaine plus tard, chaque binôme a reçu :

- sa feuille de communication sur laquelle étaient rédigées sa solution initiale de l'exercice T0 ainsi que la critique d'un autre binôme,
- une solution ou une critique de solution ayant pour auteur l'un des "prédécesseurs" de PASCAL et FERMAT (T1 à T10), ou d'un de leurs contemporains, ROBERVAL (T13),
- la solution de PASCAL ou celle de FERMAT (T11, T12).

Chaque binôme avait donc une "bonne solution" (5 binômes avaient celle de PASCAL, et les 5 autres celle de FERMAT). En ce qui concerne les autres textes, nous avions choisi une solution ou une critique de solution qui puisse provoquer une remise en cause de la solution initiale ; en particulier, le texte T5 (solution de PACIOLI) a été proposé à 4 binômes, accompagné, soit de sa critique par TARTAGLIA et de la solution de celui-ci (T6, T7), soit de sa critique par CARDAN et de la solution de ce dernier (T9, T10) ; les autres binômes ont reçu les solutions de FORESTANI (T8), de CARDAN (T10), de l'un des prédécesseurs de PACIOLI (T1, T2), ou l'objection de ROBERVAL (T13).

Il a été demandé à chaque binôme d'étudier toutes les critiques et solutions qui lui étaient soumises, puis de rédiger une nouvelle solution s'il le désirait, en indiquant pourquoi, éventuellement, il avait changé d'avis.

La solution de FERMAT a été retenue par 4 binômes sur 5 , alors que celle de PASCAL n'a été retenue que par 1 binôme sur 4 , et avec réticences. La solution de TARTAGLIA a été choisie de préférence à celle de FERMAT dans un cas, les solutions de CARDAN et FORESTANI de préférence à celle de PASCAL dans un cas chacune. Enfin 2 binômes, n'ayant pu se mettre d'accord ou n'ayant pas été convaincus, n'ont pas fait de choix final.

Les arguments, dans l'ensemble, ont été d'ordre plus qualitatif que quantitatif : "des forces autres que mathématiques agissent sur la réalité...", "quelque chose qui cloche dans les hypothèses", "la fin du raisonnement semble fausse", "le début paraît logique, la fin paraît compliquée et ambiguë", "convaincu en partie dans le raisonnement, pas dans les résultats".

La question supplémentaire a été traitée par 4 binômes (dont les 2 binômes qui n'y avaient pas répondu lors de la première séance).

- Bi 4 et Bi 3 ont utilisé cette question comme critère de choix : Bi 4 a tenté d'appliquer successivement les méthodes de FORESTANI et PASCAL et, n'ayant pu aboutir dans le cas de PASCAL, a élu la solution de FORESTANI ; pour Bi 3 , la solution de FERMAT "n'est pas équitable, mais elle est peut-être la bonne !", et il choisit "donc" (!) la solution de TARTAGLIA car, en l'appliquant au 2e cas, on obtient une répartition "équitable par rapport aux 42 F de mise".

- Bi 1 , après avoir choisi la solution de CARDAN, l'applique à ce cas particulier.

- Quant à Bi 7 , binôme de redoublants, il a reconnu dans la solution de FERMAT celle qu'il avait tenté d'utiliser lors de la première séance, et l'a appliquée correctement au cas de la question supplémentaire.

A la fin de la deuxième séance, nous avons remis à chacun des élèves l'ensemble des adaptations-résumés (T1 à T13), ainsi que le tableau de correspondance entre les solutions proposées et leurs auteurs ; enfin, les "bonnes" solutions leur ont été indiquées.

Evaluation.

Les deux séances ont été, pour chaque binôme, un temps privilégié de réflexion sur les "chances de gagner" de chacun des deux joueurs et le "partage équitable" au moment de l'arrêt, face au caractère concret de la répartition effective en cas de poursuite du jeu.

La nécessité de convaincre un autre binôme a modifié le contrat didactique (27) et a suscité une motivation inhabituelle à la première séance. Dans la deuxième séance, la lecture des textes a constitué une tâche délicate à laquelle les binômes ont consacré beaucoup de temps : d'où une argumentation moins solide et un choix de solution plus aléatoire qu'à la première séance.

L'ensemble s'est révélé être une bonne introduction au cours de probabilités qui a suivi (sans commencer par un cours de combinatoire). Cependant, cette introduction n'a pu être exploitée et discutée, par manque de temps, dans la suite du cours.

III. CORRESPONDANCE ENTRE PASCAL ET FERMAT EXPERIMENTATION EN PREMIERE A1

1. EXPERIMENTATION

Les trois lettres présentées dans l'introduction historique (cf. p.106) ont été proposées à 20 élèves de le A1 ; cette lecture a été précédée de travaux par binômes (28), et suivie d'une évaluation individuelle.

Cinq séances d'une heure environ y ont été consacrées : deux séances par binôme, deux séances avec toute la classe, et une séance d'évaluation individuelle.

Première séance : Travail, par binôme, sur le problème envisagé dans le cas de deux joueurs : exercices d'introduction, première partie, exercices 1.1 et 2 (cf. p.129).

Cinq binômes ont travaillé l'exercice 1.1 préparatoire à la méthode de PASCAL, et les cinq autres ont cherché l'exercice 2 préparatoire à la méthode de FERMAT.

Exercice 1.1.

Malgré les indications précises orientant la réflexion vers les scénarios à envisager au cas où le jeu ne serait pas arrêté, c'est la répartition proportionnelle aux points déjà gagnés par les deux joueurs qui a été le plus souvent adoptée par les élèves. Quand l'arbre des éventualités a été tracé, soit il n'a pas été utilisé pour proposer une répartition de la mise, soit la même "valeur" a été accordée aux "chances" de gagner au bout d'une partie ou de deux parties après l'arrêt.

Exercice 2.

Le nombre maximum de quatre parties qui resteraient à jouer après l'arrêt a été trouvé. La question suivante a souvent été mal comprise, et les élèves n'ont en général proposé que les 6 éventualités :

BABA - BABB - ABBA - ABBB - BBAA - BBAB ,

correspondant aux cas où il y aurait un vainqueur 4 parties exactement après l'arrêt : ils ont ainsi respecté spontanément l'objection de ROBERVAL (sans en avoir pris connaissance). Pour 2 binômes, chacune de ces éventualités a alors donné lieu à une répartition proportionnelle au nombre de parties gagnées, sans qu'il y ait un choix entre les 6 répartitions obtenues.

Les deux lettres de PASCAL (AV, AVI) ont été distribuées à la fin de la séance.

<u>*Deuxième séance*</u> *: Correction des exercices d'introduction, première partie, exercices 1.1, 1.2 (méthode de PASCAL) et exercice 2 (méthode de FERMAT) (cf. p.129) ; lecture partielle des lettres de PASCAL pour le cas de deux joueurs.*

Ces exercices avaient été préparés à la maison (s'ils n'avaient pas été traités en classe par binôme), et une première lecture des solutions proposées dans les deux lettres avait été faite.

Les deux méthodes ont pu être comprises grâce à l'utilisation d'arbres et (ou) de tableaux. La principale difficulté à surmonter a été, dans le cas de la méthode de FERMAT, le refus de poursuivre, au-delà de l'existence d'un gagnant, l'arbre permettant d'obtenir le tableau des 16 éventualités.

La lecture fut ensuite reprise, au moins partiellement, de manière à élucider les difficultés de présentation et de langage. Les élèves ont été manifestement intéressés, mais sont peu intervenus, sans doute pour deux raisons : le "caractère" peu bavard de la classe d'une part, et la "défloraison" du problème par la correction qui venait d'être effectuée, peut-être prématurément, d'autre part.

<u>*Troisième séance*</u> *: Travail, par binôme, sur le problème envisagé dans le cas de trois joueurs : exercices d'introduction, deuxième partie (cf. p.130).*

Sur 10 binômes, 8 ont donné la répartition correcte : 7 par la méthode de FERMAT, 1 seul par la méthode de PASCAL. Quant aux 2 autres binômes, ils ont dressé correctement l'arbre ou le tableau correspondant à la méthode de FERMAT, mais n'ont pas su poursuivre le raisonnement.

Il faut noter que les élèves avaient sous les yeux la deuxième lettre de PASCAL. En fin de séance, la lettre de FERMAT (AVII) leur a été distribuée.

Quatrième séance : Correction des exercices d'introduction, première partie, exercice 1.3 (préparé à la maison par la méthode de PASCAL), et deuxième partie (méthode de FERMAT) *(cf. p.130)* *; fin de la lecture des lettres de PASCAL et de FERMAT.*

Les principales difficultés ont semblé être surmontées, et les deux points de vue de PASCAL et FERMAT nettement différenciés.

Une fois l'objection de ROBERVAL surmontée dans le cas de la méthode de FERMAT appliquée à 2 joueurs, aucun élève ne s'accroche aux objections de PASCAL.

Cinquième séance : Evaluation individuelle (avec utilisation du texte des trois lettres) comportant un exercice à résoudre successivement par les deux méthodes de PASCAL et FERMAT suivi de questions concernant les méthodes et l'argumentation des deux mathématiciens.

Les élèves ont disposé, en fait, de trois quarts d'heure, et ce temps s'est révélé trop court pour traiter avec soin toutes les questions posées.

(a) Solution à l'exercice.

- Méthode de PASCAL.

L'exercice a été réussi correctement (éventuellement avec une méthode "mixte") par 12 élèves ; de plus, 1 élève qui a fort bien compris la méthode a fait une erreur de calcul ; 4 élèves ont résolu partiellement l'exercice, mais n'ont pas su mener le raisonnement jusqu'au bout ; enfin, 2 élèves n'ont pas utilisé cette méthode.

- Méthode de FERMAT.

Elle a été bien utilisée par 14 élèves (11 d'entre eux avaient correctement utilisé la méthode de PASCAL) ; 1 élève qui avait compris la méthode a fait une erreur de calcul ; 1 élève n'a pas su utiliser les 8 éventualités proposées ; 2 élèves n'ont pas compris le raisonnement, et 2 élèves n'ont pas utilisé cette méthode.

Souvent, les élèves ont adopté comme support de leur raisonnement la présentation proposée en classe : pour la méthode de PASCAL, un arbre dont chaque branche s'arrête au moment où il y a un vainqueur ; pour la méthode de FERMAT, un arbre dont chaque branche correspond à une ligne du tableau.

(b) Questions concernant les textes.

Les réponses aux questions qui suivaient l'exercice ont permis de préciser les observations faites pendant les séances précédentes.

Première question.

Chaque élève a exprimé comment il avait perçu les approches de PASCAL et FERMAT ; cependant, même un élève qui a correctement résolu l'exercice par les deux méthodes peut être difficilement lisible : "FERMAT envisage le nombre total de parties gagnées ; PASCAL envisage les chances, et partage en décomptant".

Pour la plupart des élèves, la méthode de PASCAL paraît "plus concrète", "plus logique", mais la méthode de FERMAT est "plus pratique", "plus sûre", "plus juste", elle est "la meilleure", et surtout ils la "préfèrent". Notons cependant qu'un élève trouve la méthode de PASCAL "plus pratique", "plus facile" ; il n'a d'ailleurs pas utilisé celle de FERMAT.

Pour un élève : "PASCAL a un raisonnement plus "littéraire", et FERMAT un raisonnement mathématique".

Des ambiguïtés peuvent être repérées.

- Pour un élève qui a mené à bien les deux méthodes, et qui précédemment avait résolu le cas de 3 joueurs par la méthode de PASCAL : "la méthode de PASCAL me paraît la plus simple, mais je préfère celle de FERMAT car les calculs sont plus simples".

- Pour un autre élève qui a, lui aussi, compris les deux méthodes, celle de PASCAL est "plus courte et plus sûre" ; cependant, il "trouve que celle de FERMAT est la meilleure" : "elle est plus longue, mais nous sommes sûrs de trouver un résultat juste".

Deuxième et troisième questions.

L'objection de ROBERVAL semble avoir été comprise par une majorité d'élèves :

"ROBERVAL trouve illogique que l'on continue", "Pourquoi continuer ?", "Ce n'est pas faux, mais ce n'est pas démontré".

Cependant, plusieurs élèves ont éprouvé des difficultés pour s'exprimer, et quelques-uns ont fait des confusions entre l'objection de ROBERVAL et celle de PASCAL.

La troisième question, traitée par 15 élèves, a été comprise par la plupart d'entre eux : "PASCAL reproche à FERMAT de négliger le fait qu'un joueur peut gagner après qu'un autre joueur a déjà gagné " . Les réponses n'ont, pourtant, pas toujours été claires.

Quatrième question.

Sept élèves ont répondu à cette question délicate, mais leurs réponses sont difficilement analysables, car insuffisamment explicitées. Pour un élève : "tous les jeux auront donc le même nombre de parties" ; pour un autre, la "réduction à un même dénominateur" est une "simplification effectuée en poursuivant un certain nombre de parties, et qui facilite le calcul".

Evaluation de l'expérimentation.

Tout au long du travail proposé, les élèves ont manifesté leur intérêt. La problématique historique et l'"échange" d'arguments entre PASCAL, ROBERVAL et FERMAT ("échange" qui illustre l'existence de problèmes de compréhension entre mathématiciens) ont créé une puissante motivation intellectuelle.

Cependant, la discussion à l'intérieur de la classe aurait sans doute été plus riche si elle s'était établie avant la correction des exercices d'introduction. De plus, l'évaluation individuelle aurait donné un matériau plus riche si davantage de temps avait été proposé aux élèves.

2. EXERCICES D'INTRODUCTION ET EVALUATION

(A) Exercices d'introduction.

Première partie.

Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui aura 3 points gagnera la mise de 64 F .

Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise équitablement.

Exercice 1.

1) Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 1 point.

Comment Ariane et Bernard peuvent-ils se répartir équitablement la mise de 64 F ?

Indications : Au moment où le jeu s'arrête, il manque donc 1 point à Ariane et 2 points à Bernard pour gagner 64 F . On peut donc examiner les différents scénarios possibles pour les parties qui se joueraient si Ariane et Bernard n'étaient pas obligés de s'arrêter.

La présentation de ces scénarios sous forme d'un arbre facilitera la recherche d'une répartition équitable.

On notera A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard.

2) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 2 points et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

3) Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

Proposer une répartition équitable de la mise.

Exercice 2.

Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points.

Quand le jeu s'arrête, Ariane a gagné 1 point et Bernard 0 point.

1) Quel est le nombre maximum des parties qui resteraient à jouer ? Soit n ce nombre.

2) En notant A une partie gagnée par Ariane, et B une partie gagnée par Bernard, dresser le tableau des résultats que pourraient donner ces n parties, si elles étaient toutes jouées.

3) En déduire une répartition équitable de la mise de 64 F .

Indication : Si le nombre maximum de parties était 3 , l'écriture "ABA" signifierait :

- $n = 3$;
- Ariane gagne la première et la troisième partie, Bernard la deuxième.

Deuxième partie.

Ariane, Bernard et Charles jouent à un jeu de hasard.

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.

Le premier qui aura 3 points gagnera la mise de 270 F .

Mais les trois joueurs sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer : Ariane a gagné 2 points, Bernard et Charles ont chacun 1 point.

Comment les trois joueurs peuvent-ils se répartir équitablement la mise ?

(B) Evaluation.

Exercice.

Alain et Béatrice jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face". Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui aura 6 points remportera la mise de 90 F . Mais les deux joueurs sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu : à ce moment, Béatrice a 5 points et Alain 3 points.

Comment les deux joueurs peuvent-ils se répartir équitablement la mise ?

Utiliser successivement les méthodes de PASCAL et de FERMAT pour résoudre ce problème.

Questions.

1) Comparer les méthodes employées par PASCAL et FERMAT : caractériser leurs différences. Quelle est, des deux méthodes, celle qui vous paraît la plus pratique ?

2) Quelle est l'objection faite par ROBERVAL à FERMAT ? Quels sont les arguments utilisés ? Que ROBERVAL n'a-t-il pas compris ?

3) Quelle est l'objection faite par PASCAL à FERMAT ? Quels sont les arguments utilisés ? Que PASCAL n'a-t-il pas compris ?

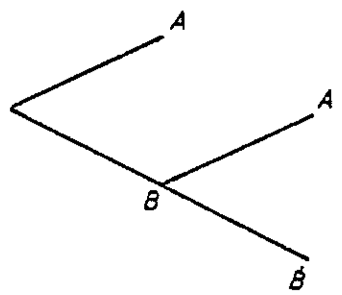
4) Que FERMAT entend-il par "réduction à une même dénomination" ?

(C) Corrigé des exercices - à titre indicatif.

Première partie.

Exercice 1. Méthode de PASCAL (2 joueurs).

1) Il manque 1 point à Ariane, 2 points à Bernard.

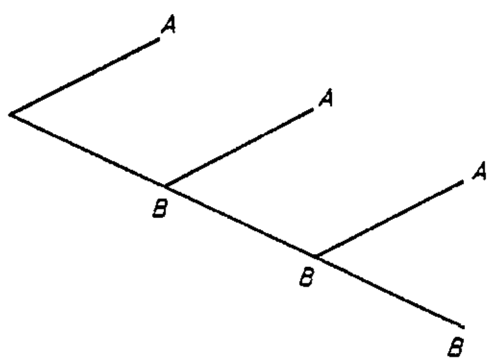


Répartition "équitable" :

Ariane : $32\text{ F} + \frac{1}{2}(64\text{ F} - 32\text{ F}) = 48\text{ F}$

Bernard : $64\text{ F} - 48\text{ F} = 16\text{ F}$.

2) Il manque 1 point à Ariane, 3 points à Bernard.



Si Bernard gagne, on se retrouve dans la situation précédente.

Répartition "équitable" :

Ariane : $48\text{ F} + \frac{1}{2}(64\text{ F} - 48\text{ F}) = 56\text{ F}$

Bernard : $64\text{ F} - 56\text{ F} = 8\text{ F}$.

3) Il manque 2 points à Ariane, 3 points à Bernard.

Si Ariane gagne, on se retrouve dans la situation précédente.

Répartition "équitable" :

Ariane : $32\text{ F} + \frac{1}{2}(56\text{ F} - 32\text{ F}) = 44\text{ F}$,

Bernard : $64\text{ F} - 44\text{ F} = 20\text{ F}$.

Exercice 2. Méthode de FERMAT (2 joueurs).

Il manque 2 points à Ariane et 3 points à Bernard.

Il y a 16 éventualités :

AAAA	ABAA	BAAA	BBAA
AAAB	ABAB	BAAB	BBAB
AABA	ABBA	BABA	BBBA
AABB	ABBB	BABB	BBBB

Il y a 11 éventualités favorables à Ariane et 5 éventualités favorables à Bernard.

D'où la répartition "équitable" :

Ariane : $\frac{11}{16} \times 64\text{ F} = 44\text{ F}$,

Bernard : $\frac{5}{16} \times 64\text{ F} = 20\text{ F}$.

Deuxième partie.

Méthode de FERMAT (3 joueurs).

Il manque 1 point à Ariane, 2 points à Bernard et 2 points à Charles.

Il y a 27 éventualités :

AAA	AAB	AAC	ABA	ABB	ABC	ACA	ACB	ACC
BAA	BAB	BAC	BBA	BBB	BBC	BCA	BCB	BCC
CAA	CAB	CAC	CBA	CBB	CBC	CCA	CCB	CCC .

Il y a 17 éventualités favorables à Ariane, 5 favorables à Bernard et 5 favorables à Charles. D'où la répartition "équitable" :

Ariane : $\frac{17}{27} \times 270\text{ F} = 170\text{ F}$,

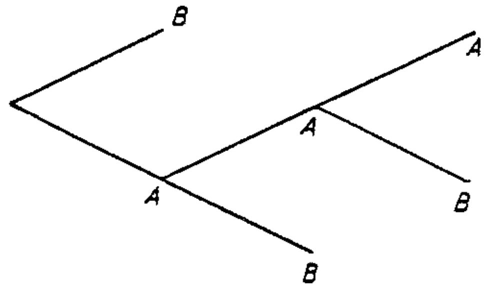
Bernard : $\frac{5}{27} \times 270\text{ F} = 50\text{ F}$,

Charles : 50 F .

Evaluation.

Il manque 1 point à Béatrice et 3 points à Alain.

Méthode de PASCAL.



Si Alain gagnait la 1ère partie après l'arrêt, il serait alors équitable de donner à Béatrice :

$$45\ F + \frac{1}{2}(90\ F - 45\ F)\text{ , soit } 67{,}5\ F\ .$$

Donc il est équitable de donner au moment de l'arrêt :

à Béatrice : $67{,}5\ F + \frac{1}{2}(90\ F - 67{,}5\ F) = 78{,}75\ F$,

à Alain : $90\ F - 78{,}75\ F = 11{,}25\ F$.

Méthode de FERMAT.

Il y a 8 éventualités :

AAA AAB ABA ABB BAA BAB BBA BBB .

Il y a 7 éventualités favorables à Béatrice et 1 favorable à Alain. D'où la répartition "équitable" :

Béatrice : $\frac{7}{8} \times 90\ F = 78{,}75\ F$,

Alain : $\frac{1}{8} \times 90\ F = 11{,}25\ F$.

IV. CONCLUSION

S'ils reflètent un même souci d'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement des mathématiques, ces deux exemples d'utilisation, dans des classes, des textes présentés au début de cet article, ne procèdent assurément pas de la même "stratégie didactique" :

Dans le premier exemple (en terminale D), il s'agit d'amener les élèves à modifier leurs solutions "premières" par la confrontation avec d'autres solutions et certaines critiques (à prendre en compte ou à rejeter) ; ceci dans un mouvement "d'aller et retour" entre l'ajustement ou le changement radical de leur solution et la réception de nouvelles propositions. En cela, la dimension historique ne sera explicite pour les élèves qu'à la fin de la recherche, donnant lieu, éventuellement, à une discussion à partir de certains textes originaux. Le matériau historique, "s'avançant masqué", est alors utilisé comme moteur d'une situation dont le but explicite est la résolution d'un problème. Il s'agit de participer "activement" à l'histoire du problème des partis.

Dans le second exemple (en première A1), en revanche, la démarche est toute différente. Il s'agit de faire participer les élèves à l'analyse plus ponctuelle, plus fine, d'un ensemble de textes plus réduit. C'est pourquoi, dès le départ, les exercices d'introduction "orientent" les solutions des élèves vers des approches équivalentes à celles des textes à étudier. La dimension historique est alors au centre même du travail des élèves. Il s'agit avant tout de comprendre un texte, d'appréhender la démarche d'un auteur. La recherche préalable et "balisée" du problème, au moyen des exercices, n'est que le point de départ de ce travail.

Il n'en reste pas moins qu'il s'agit avant tout de faire progresser un savoir mathématique, l'apport de l'histoire étant alors soit celui d'une dynamique (exemple 1), soit celui d'un éclairage différent (exemple 2).

Quel peut être alors le rôle de la prise en compte de la dimension historique d'une notion mathématique pour l'acquisition de cette notion par les élèves ? Question assurément complexe et abondamment débattue... Disons simplement qu'il nous paraît essentiel d'envisager cet aspect des choses lors de l'élaboration du "scénario" d'une expérimentation du type de celles présentées ci-dessus.

Il nous semble également important de dire que les exemples d'utilisation de ces textes, dont nous avons brièvement rendu compte, ne sont en rien "exemplaires", et ne sauraient, par conséquent, être considérés comme des "modèles".

L'introduction historique et les deux comptes rendus d'expérimentation sont là pour fournir des éléments utiles à la construction de séances autour du problème des partis. Là s'arrête notre ambition. Là commence un passionnant travail d'adaptation et de transposition, travail sans lequel ce qui est avant tout, pour nous, une démarche, risquerait de devenir une "recette" (29).

Signalons enfin un intérêt "indirect", mais non négligeable, de cette introduction de textes historiques avec des élèves. Il consiste en ce que les remarques, les interrogations ou les productions des élèves nous apprennent de la situation historique elle-même. Notre compréhension des textes originaux s'est, en effet, trouvée enrichie, sur plus d'un point, par l'étude des solutions des élèves et de leurs argumentations à propos du problème des partis.

Il y a comme un "retour d'éclairage" du comportement des élèves en direction de l'histoire des mathématiques (30). Ainsi, d'une certaine manière, "la boucle est bouclée", non pas dans le sens d'un achèvement, mais dans celui d'un enrichissement permanent entre l'histoire des mathématiques et leur apprentissage aujourd'hui...

NOTES

(1) "partis" (ou "partys"), avec cette orthographe, vient de "partager". Le mot se rencontre avec ce sens dans les arithmétiques du XVIème siècle ([3], p. 247). Il ne faut évidemment pas le confondre avec "parties" (les deux mots se trouvant employés simultanément dans les textes de Pascal).

(2) Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partys qu'on doit faire entre 2 joueurs qui jouent en plusieurs parties. Les expressions entre guillemets dans la présentation du problème sont tirées de ce texte.

(3) Cet article fut d'ailleurs à l'origine de notre travail et représente l'apport essentiel d'informations pour la rédaction de cette présentation.

(4) Notons que le texte de Pacioli n'est pas aussi clair, celui-ci faisant intervenir notamment, dans certaines répartitions, le nombre maximum de parties que les deux camps peuvent jouer. Mais cette intervention est une "opération blanche", et la solution se ramène bien toujours à une simple opération de proportionnalité.

(5) P. Boutroux le peint comme "un de ces savants enthousiastes qui croyait à la vertu universelle des mathématiques" et cite cette phrase de Pacioli à propos du rôle indispensable des mathématiques, même en médecine : *On se rendra compte que sans elle il n'y a pas de salut possible pour le corps humain !* ([5]).

(6) L'ouvrage de Tartaglia est La prima parte del general trattato di numere e misure, publié en 1556. Signalons, au passage, que Guillaume Gosselin, dans la traduction française qu'il donne en 1578 de l'arithmétique de Tartaglia, néglige le problème des partis.

(7) C'est ce que nous avons tenté de faire dans un exposé au cours du Colloque Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie de Montpellier (31 mai - 1er juin 1985). Pour une analyse plus détaillée de ce phénomène, on pourra donc se reporter aux Actes de ce colloque (à paraître début 86).

(8) Pratica d'aritmetica e geometria (première édition, 1603). Le problème des partis y est sujet à un développement assez long à cause de nombreux détails dont l'auteur aime enjoliver ses historiettes. Nous n'en avons donné que quelques extraits dans (AIII).

(9) E. Coumet signale que Forestani, en adoptant ce point de vue, n'a sans doute pas le mérite de l'originalité ([3], p. 257).

(10) Ces deux vers sont tirés du Roland Furieux (publié en 1516, puis 1532), et font allusion à la guerre (imaginaire) entre Charlemagne et le roi d'Afrique-Agramant.

(11) Ce texte parut en 1539. Nous suivons, dans cette présentation, l'ordre d'exposition "plus logique que chronologique" qui est celui d'E. Coumet. Sur bien des points, Cardan est en effet plus proche de Pascal que Tartaglia ou Forestani ([3], p. 264-271).

(12) Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, tome II, 1900, p. 502.

(13) *Le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne ou de continuer l'adventure du jeu ; et cette distribution s'appelle le party* (Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partys..., cf. p. 57).

(14) C'était déjà ce même Carcavi qui avait mis en relation Fermat et Etienne Pascal, le père de Blaise, en 1636, à propos de problèmes de mécanique.

(15) Il s'agit des passages se rapportant au problème des partis. D'autres problèmes sont en effet abordés dans cette correspondance, mais de manière beaucoup plus marginale.

(16) Nous utilisons ce terme avec le sens que lui donnent Pascal et Fermat dans leur correspondance. Il faut en effet noter que nulle part dans ces lettres il n'est fait usage explicite de "combinaisons" au sens où nous l'entendons maintenant.

(17) *Un problème relatif aux jeux de hasard, posé à un austère janséniste par un homme du monde, a été à l'origine du calcul des probabilités.* Poisson : Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, 1837, p. 1.

(18) Ceci, bien entendu, si l'on refuse le mythe de la "génération spontanée" en matière de découverte mathématique.

(19) Même si l'on peut douter, en raison de sa grande érudition, que Fermat n'ait pas eu connaissance des textes de Pacioli ou de Cardan.

(20) Notons que très vite celle de Fermat fut jugée "beaucoup meilleure" (Pierre de Montmort : Essay d'analyse sur les jeux de hazard, 1713). Mais le développement, ces trentes dernières années, de la théorie des jeux redonna au point de vue "décisionnel" de Pascal une certaine acuité (cf. [3], p. 246-247).

(21) D'Alembert ne fera rien d'autre que reprendre à son compte cette même erreur lorsqu'il prétendra qu'il y a 2 chances sur 3 (P et PF parmi P , PF et FF) d'obtenir au moins une fois "pile" en 2 coups.

(22) Il n'est pas non plus impossible de penser qu'il y a là une réaction de défense et d'orgueil de Pascal, vexé de voir la plus grande efficacité et généralité de la méthode de son correspondant. Là aussi nous reprenons tout ceci, de manière plus approfondie, dans l'article (à paraître) déjà cité (cf. note (7)).

(23) A signaler que Pacioli et Forestani avaient eux aussi abordé le problème de trois joueurs en y appliquant tout simplement, et sans difficulté, la même méthode que pour deux joueurs.

(24) Signalons, d'ailleurs, que Pascal reconnaîtra son erreur (ou sa mauvaise foi !) dans la courte lettre qu'il écrira à Fermat le 27 octobre *(votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait)*.

(25) Des phénomènes de persuasion dans l'enseignement des mathématiques. Cette situation s'intéresse à l'étude de tels phénomènes dans le cadre de la recherche d'un problème.

(26) Chaque binôme récepteur ignorait l'identité du binôme émetteur ; de plus, la permutation a été réalisée, non pas sur deux binômes, mais sur deux groupes de cinq binômes.

(27) Contrat didactique : "ensemble des conditions qui déterminent implicitement ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer, dont il est comptable devant l'autre".
Douady (R.) : Mathématiques (Didactique des) in Encyclopaedia Universalis, Nouvelle édition, 1984, t. 11.

(28) Les exercices d'introduction ont été préparés de la manière suivante :

Première partie.

Exercice 1 (1.2.3) : Introduction à la lettre de Pascal du 29 juillet 1654.

Exercice 2 : Introduction à la lettre de Pascal du 24 août 1654 (cas de deux joueurs).

Deuxième partie.

Introduction à la lettre de Pascal du 25 septembre 1654 (cas de trois joueurs) et à la lettre-réponse de Fermat du 25 septembre 1654.

(29) Il faut notamment prendre en compte la variable "temps" qui est loin, ici, d'être négligeable. De telles expérimentations, en effet, nécessitent, à notre avis, de "prendre son temps".

(30) On pourra consulter à ce propos la conférence de H. Freudenthal au Congrès international des mathématiciens de Varsovie en 1983, conférence qui sera traduite dans la prochaine brochure de l'APMEP sur l'histoire des mathématiques.

REFERENCES

[1] PASCAL : Oeuvres complètes, par L. Lafuma, 1963, Edition Seuil, Collection l'intégrale. (Les références à cette édition seront notées "laf" suivi du numéro de la page.)

[2] PASCAL, FERMAT : Correspondance, éditée par les cahiers de Fontenay, septembre 1983.

[3] E. COUMET : Le problème des partis avant Pascal, Archives internationales d'histoire des sciences, juillet 1965, p. 245-272.

[4] E. COUMET : La théorie du hasard est-elle née par hasard ?, Revue des annales, mai-juin 1970, p. 574-598.

[5] P. BOUTROUX : Les origines du calcul des probabilités, La revue du mois, juin 1908, p. 641-654.

[6] IREM de Dijon : Pages et calculs choisis de Blaise Pascal, Groupe d'histoire des mathématiques pour nos élèves, 1978, p. 16-24.

<u>ANNEXE I</u>

<u>LUCA PACIOLI.</u>

SUMMA DE ARITHMETICA, GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA. 1523. (cote BN: res V 116).

<u>FOLIO 197 :</u>

¶ Sequitur de militaribus.

Una brigata de homini darmi cavalli n°. 3000. fanno un facto a lor nemici. e si guadagniano duc. 7876. dimando che tocca per uno dandone el $\frac{1}{16}$ a lor capitano. Prima fendi el $\frac{1}{16}$ de 7876. per lo cap. e lo rimanente parti in li. 3000. e quello ne verra tochera p cavallo fatta. 45. Un signore a sotto di se cavalli n°. 3021. e si da duc. 11. per lansa el mese. dimando quanti duc. vorra a tenerli mesi. 15. Prima reca li cavalli a lance che 3. fa una lancia. parti. 3021. in. 3. neven 1007. poi mança. 11. via. 1007. fa 11077. e tanti duc. vogliano p un mese. e p. 15. ne vorano. 15. via. 11077. che fa. 166155. fatta &c. 46. Uno signore a sotto di se cavalli n°. 6042. e si da duc. 11. p lancia el me. dimando p duc. 33231o. quanti mesi li porra soldare. Reca prima li cavalli a lance prendo in. 3. son lance. 2014. poi mança. 11. via 2014. fa. 22154. e tanti duc spendara in un mese. Poi di se duc. 22154. mi dano un mese che mi dara 332310. che te verra a der. 15. mesi. e sie fatta. 47. Dodici caval. 10. fanti hanno guadagnato a un botino duc. 25. el cavallo a per paga duc. 1$\frac{1}{2}$ el mese. el fante duc. 1. dimando che tocca per un. Sappi che simili si debia far p modu societatis e deuese mancare. overo fondere le paghe lor che essi commo fai qui son mesi &c. po di. 12. cavalli via. 1$\frac{1}{2}$ che e la lor stima fa 18. e poi. 1. via. 10. fa. 10. giongi insiemi fa. 28. p lo monte e di se. 28. guadagna. 25. che guadagnera. 10. e che. 18. opera harai che. 10. guadagnera duc. 8$\frac{1}{14}$. e questo partirai poi i. 10. neven. $\frac{11}{14}$ de duc. e tanti tocca per fante. e p cavallo tochera eadem via duc. &c. Aliter ut te. &c. 48. Un castello e asediato e sonvi dentro. 200. fanti. e san lor conto che dando el di. G. 14. de pan p uno lor si possano tenere mesi. 10. e quei so in capo de mesi. 7. e. 10. di hanno auiso chel socorso non po verrire se non a giorni. 20. piu che non pensavano: cioe fin mesi. 10. 20. di. dimando quanto pane dovevan dar p uno acio lavitualia li basti fin al socorso. Prima reca. 10. mesi. a di che so. 300. e 7. mesi. e. 10. di son. 220. e questo e el tempo passato cavalo de. 300. resta. 80. giorni. e tanti di mança fin mesi. 10. che aspectavano. ma lauiso vole che stieghino. 20. piu donca haranno a star. 100 poi dirai se. 100. fosse. 80. che seria. 14. opera seria. 11$\frac{1}{5}$. e tante. G. ne doveran dare p lavenire. e bastarali fatta. Sappi che questa va i su la maniera de la valuta del star a far pan &c. Jo expedies.

Una brigata gioca a palla a. 60. el gioco e. 10. p caccia. e fano posta duc. 10. acade p certi accidenti che non possano fornire e luna parte a. 50. e laltra. 20. se dimanda che tocca p parte de la posta. In questo caso o trovato diverse opinioni si in un lato commo in laltro. e tutte mi paron certi frasci loro argumenti. ma la verita e questa che io diro e la retta via. Dico che poi sequire in tre modi prima die considerare quante caccie al piu fra luna e laltra parte si possino fare che seran. 11. cioe quando sonno a una. 50. per uno. Ora vedi quella da. 50. che parte hanno de tutte queste caccie che hanno li. $\frac{5}{11}$. e quelli da. 20. hanno li. $\frac{2}{11}$. donca di che luna parte deve tirar per. $\frac{5}{11}$ e laltra parte per. $\frac{2}{11}$. summati fanno. $\frac{7}{11}$. poi di. $\frac{7}{11}$ guadagna. 10. che tocca a. $\frac{5}{11}$. E che a. $\frac{2}{11}$. che a quel da. 50. virra. 7$\frac{1}{7}$. e a. 20. 2. $\frac{6}{7}$ fatta. Unc altro modo sie simile: cioe in tutto posson fare. 110. vedi che parte sia. 50. de questo che harai ut supra. $\frac{5}{11}$ e cosi. 20. sera. $\frac{2}{11}$. e sequi ut supra. El terso brevissimo sia che summi insiemi quello che hanno fra tutte doi le parte cioe. 50. e. 20. fa. 70. e questo e partitore di. 70. guadagna. 10. che tocca a. 50. e che a. 20. &c. E cosi farai de una cosa a pede o a cavallo vedendo quanti miglia a fatto per uno &c. e similiter quando giocano a la mora a. 10. o. 5. deta. che luna parte nara. 9. e laltra. 7. &c. o vero quando giocano a larco a tanti colpi che prima giongi habia el pregio et cetera. e guarda di sopra in quello de la palla: che tu non dicesse poi: che luna parte a li. $\frac{5}{11}$. di cioche possano fare in tutto cioe tirare li. $\frac{5}{11}$ de la posta che non veria ben perche auan. [illegible] non serebono ne de luno ne de laltro: perche a. 50. toccaria. 4$\frac{6}{11}$. e a. 20. 1$\frac{9}{11}$ che son. 7$\frac{4}{11}$ e li. 2$\frac{7}{11}$ verieno a esser di quello che tene li panni. io &c. ne anche dire commo alcuni che si fondano a la mora con no se doi fano a. 5. deta che lun habia. 4 laltro. 3. e dicano torniamo in drieto. 1. si che lun hara. 3. laltro. 2. che non e el dovere perche colui butta el. $\frac{1}{4}$ de cio che a e colui butta el. $\frac{1}{3}$ siche non buttano a un modo. e cosi dicono alcuni che si buti. 20. da ciascuna perche uno hara nulla laltro. 30. e poi dicano che quel de 30. torra la $\frac{1}{2}$ de la posta che. 5. perche ala $\frac{1}{2}$ del gioco e li altri. 5. dividerano in mezo fra loro: si che quel da. 50. naria. 7$\frac{1}{2}$. e laltro. 2$\frac{1}{2}$. che non serebbe iusto p la ragion gia ditta innanze &c.

<u>note</u>: Les annexes II, III, IV ne constituent pas des photocopies des ouvrages originaux mais des copies (manuscrites puis dactylographiées) de ces ouvrages.

ANNEXE II

<u>NICCOLO TARTAGLIA.</u>

LA PRIMA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NUMERE E MISURE. 1556 . (cote BN: V1480).

Livre X. Folio 265:

Laqual sua regola a me non pare ne bella ne buona perche se per forte una della parti havesse 10 et l'altra havesse nulla, procedèdo per tal sua regola seguiria, che quella parte, che havesse il detto 10 doveria titar il totto et l'altra non doveria tirar cosa alcuna che faria in totto fuora di ragione, che per huer 10 dovesse tirar il tutto. E per tanto dico che la risolutione di una tel questione e piu presto giudicale che per ragione, tal che in qual si voglia modo la sara risolta visi trovare da ligitare, nondimeno il men litigioso, a me par, che sia questo, prima si debbe vedere che parte ha ciascun di tutto il giuoco, cioe se per sorte uno habesse 10 et l'altro 8 adunque colui che a 10 haveria il sesto di tutto il giuco, e per tanto dico che in questo caso doveria haver la sesta parte delli, che metteno par uno cioe si metton 22 per parte, lui doveria haver la sesta parte di detti 22, che faria 3 che gionti con li suoi ducati 22 fariano 25 et l'altra parte doveria tirar il resto, il qual resto faria 18

ANNEXE III

DEL REV P. LORENZO FORESTANI DA PESCIA.

PRATICA D'ARITMETICA E GEOMETRIA. 1682.(cote BN: V6905)

Livre V. p.364-367:

p.364: Un genthiluomo già vecchio ritrovandosi a una sua villa, e dilettandosi grademente del giuoco di palla, chiamo due giovani Contadini e disse, eccoui 4 ducati, giocateli qui in mia presenza alla palla, e chi di voi prima vince 8. Giuochi voglio che habbia vinto li 4 ducati e cosi cominciaromo a giocare e quando un di loro hebbe vinto 6 giuochi e l'altro 3. Si perse la palla e non poterono finire e il gentilhuomo disse, eccoui i denari divideteli fra voi, si domanda quandi ne toccarà per uno.

Nel risoluere simili propositioni son diverse l'openioni, pero questa a noi pare la più retta e la più commune e prima diremo cosi che quello il qualle vorra li 4 ducati bisognara che vinca 8 giuochi et l'altro non ne puol vincer piu che 7 percioche fra di loro non puo correre più di 15 giuochi; Laonde il primo vincendo 5 giuochi viene a vincere 5/15 cioe 1/3 de 4 duc et il secondo che vince 3 giuochi viene a vincere 3/15 cio 1/5 de detti 4 duc. Di manierache tra il primo e secondo vengono a vincere 8/15 de 4 duc per la qual cosa chiaramente si conosce che vi resta 7/15 i quali non sono affaticati nè giuocati, nè vinti da nessun di loro e percio bisogna dividerli per metà di 7/15 piglia aduque la metà ch'é 7/30 et aggiungili a 1/3 fanno 17/30 e tal parte ne tocca al primo et l'altra meta cioe 7/30 aggiungilia a 1/5 fanno 13/30 e tal parte ne tocca al secundo.

p.367: La ragione che alcuni adducono in contrario e questa cioé dicono che chi ha piu giuochi e piu vicino al potere finere, e conseguire il tutto e percio gli si convien tirare di quei danari per rata de giucchi viuti, e noi diciamo que la Fortuna si puo rivoltar presto e favorir quell'altro a vincer il tutto, si come infinite volte s'e visto e vedesi, tanto nel giuoco di palla, come in ogn'altro ma molto piu nelle cose di guerra, si come dottamente ne dimostra l' Ariosto in persona di Carlo con questi due versi:

> *Cosi Fortuna ad Agramante arrife*
> *Ch'un altra volta a Carlo assedio mise.*

Il qual' havendo assediato Agramante, si rivolto talmente la Fortuna, che Agramante in un attimo ruppe l'Esercito di Carlo e nuovamante l'assedio in Parigi.

ANNEXE IV

CARDAN.

OPERA OMNIA. LYON 1663 (10 vol.).(cote BN: Z1425...Z1434)

Tome IV. Ch 61: De extraordinariis et ludis. p.112. §13 et 14.

§13 Quantum ad rationem ludorum sciendum est quod in ludis non habet considerari nisi terminus ad quem et hoc in progressione dividendo totum per easdem partes. Exemplum duo ludunt ad decem unus habent 7 alius 9 quaeritur in casu divisionis non finiendo ludum quantum quisque debet habere subtrahe 7 à 10 remanent 3, subtrahe 9 à 10 remanet 1. progressio 3 est 6. progressio 1 est 1. Dabis igitur dividendo totum depositum in 7 partes, 6 partes habenti 9 et 1 partem habenti 7. Ponamus igitur quod posuissent aureos 7 singuli, tunc totum depositum esset 14 ex quibus 12 contingunt habenti 9 et 2 habenti 7 ludos, quare qui habet 7 perdit 6/7 capitalis. Aliud exemplum [...]

§14 Ratio autem demonstrativa super hoc est quod si facta divisione iterum ludus esset inchoandus, partes haberent deponere idem quod receperunt stante conditione et sit in exemplo primo quod quis dicat volo ludere hac conditione ut tu non possis vincere nisi vincas 3 sine intermissione, et si ego vinco unum volo vincere et deponat ille qui vult vincere 3 ludos aureos 2 quantum habet deponere alius dico qod deponet 12. Ratio nam si ad unum ludum haberet ludere sufficeret ponere 2 et si duos haberet ponere triplum, ratio quia vincendo simpliciter 2 ludos vinceret 4 sed hic stat cum periculo perdendi secundum victo primo, igitur lucrari debet triplum et si ad 3 sexcuplum, quia duplicatur difficultas, igitur haberet ponere 12. Et iam accepit 12 et ille 2 igitur divisio fuit convenienter facta et hoc ubi separatio esset de voluntate partium, aliter si sit causa habentis plus dividitur per aequalia si causa habentis minus perdidit totum.

Tome IV. Ch 68 De Erroribus Fratris Lucae in Arithmetica. p.214. § 5

§5 Et erravit ludorum determinatione errore manifestissimo et à puero etiam cognoscibili dum alios arguit et suam laudat exquisitam opinionem. Unde ludentibus ad 6 et habenti 5 alteri 2 dat post multas superfluas supputationes partes 5 et 2 ita quod totam summam dividit in 7. Ponamus igitur quod duo ludant ad 19 et unus habeat 18 alius tantum 9 habet igitur primo 2/3 totius summe et secundo 1/3, sit igitur depositum aurei 12 summae amborum erit 24 quibus 16 primo et 8 secundo continget: non igitur ille qui habent 18 ludos lucratus est nisi aureos 4 et ex adversario qui sunt tertia pars depositi et tam ad complendum non deest nisi unus ludus, secundo autem desunt 10, hoc autem est absurdissimum praetera illam partem quisque debet assumere quam aeque ratione deponere posset ea conditione sed habens 18 cum habente 9 potest eundo ad 19 deponere 10 contra 1 imo 20 contra unum: igitur in divisione debet habere 20 et ille tantum unam.

ANNEXE IV (suite):

Tertio si ludimus ad 19 et unus habeat 2 alter nullum, per suam rationem qui habet 2 debet acquire totum depositum, patet ex suo computo hoc autem quale sit inconveniens mn est dubi tandum cum ex tam modica superatione, cim tanta remotione a fine debeat acquirere tantum quantum si lucratus fuisset 19 ludos: secundo quia ad deterius ille non potest venire qui perdit depositum, sed dato quod haberet 18 ludos primus et secundus nullus adhuc non debentur omnes quia ultimus esset superfluus, quanto igitur minus debet habere totum per duos tantum acquisitos [...]

ANNEXE V

LETTRE DE PASCAL A FERMAT DU 29 JUILLET 1654 ([1] p.43-44)

LETTRE DE PASCAL A FERMAT

Le 29 juillet 1654.

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties[1] dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56, s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44. »

ANNEXE VI

LETTRE DE PASCAL A FERMAT DU 24 AOUT 1654 ([1] p.46-49)

LETTRE DE PASCAL A FERMAT

Du 24 août 1654.

Monsieur,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les parties de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui était entre nous et qui m'était si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me regresser, si j'erre, ou de l'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre, mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	2
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	2
b b a a	1
b b a b	2
b b b a	2
b b b b	2

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours, et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa... bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui; et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou, à la vérité peut-être quatre :

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'était faux, cela n'était pas démontré, de sorte qu'il avait quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondais pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gre qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il niait que la même chose subsistât, en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer les quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un aurait atteint son nombre, peuvent, sans dommage ni avantage, s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagnées ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

Suivons la même pointe pour trois joueurs et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second et deux au troisième. Pour faire le parti, suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avait deux joueurs : ce sera en trois, car ils ne sauraient jouer trois parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien 3 parties se combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3, c'est-à-dire son cube 27. Car si on jette trois dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces (puisqu'il y a trois joueurs) l'une marquée a favorable au premier, l'autre b pour le second, l'autre c pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

Or, il ne manque qu'une partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un a sont pour lui : donc il y en a 19.

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Il manque deux parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux b sont pour lui : donc il y en a 7.

Il manque deux parties au troisième : donc toutes les assiettes où il y a deux c sont pour lui : donc il y en a 7.

Si de là on concluait qu'il faudrait donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperait trop grossièrement et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi; car il y a quelques faces favorables au premier et au second tout ensemble, comme abb, car le premier y trouve un a qu'il lui faut, et le second deux b qui lui manquent; ainsi acc est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié. Car, s'il arrivait l'assiette acc, le premier et le troisième auraient même droit à la somme, ayant chacun leur compte; donc ils partageraient l'argent par la moitié; mais s'il arrive l'assiette aab, le premier gagne seul. Il faut donc faire la supputation ainsi :

Il y a 13 assiettes qui donnent l'entier au premier et 6 qui lui donnent la moitié et 8 qui ne lui valent rien : donc, si la somme entière est une pistole, il y a 13 faces qui lui valent chacune une pistole, il y a 6 faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole, et 8 qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier

13 par une pistole, qui font	13
6 par une demi, qui font.	3
8 par zéro, qui font	0
Somme 27	Somme 16

et diviser la somme des valeurs, 16, par la somme des assiettes, 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui est ce qui appartient au premier en cas de parti, savoir 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même :

Il y a 4 assiettes qui lui valent 1 pistole : multipliez	4
Il y a 3 assiettes qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez	$1\frac{1}{2}$
Et 20 assiettes qui ne lui valent rien. . .	0
Somme 27	Somme $5\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième, et ces trois sommes, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ et 16, étant jointes, font les 27.

Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudrait faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue en trois parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusqu'à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue 3 parties; mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avait deux joueurs? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner, car la condition est que, dès qu'un a gagné, le jeu cesse. Mais, en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties : savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que, quand il n'y avait que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenaient pour les avantages des joueurs en tout; et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs, se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire s'il manque une partie au premier et deux au second et deux au troisième, veulent maintenant de gré à gré et conviennent de cette condition qu'on jouera trois parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entière, s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint, ou, s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également, en ce cas, le parti se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\frac{1}{2}$, le troisième $5\frac{1}{2}$ de 27 pistoles, et cela porte sa démonstration de soi-même en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, alors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale qui détermine aussi qu'en la condition précédente il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au second, et $5\frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons, car elle va partout et sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet, sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité; mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connaître par là que ma méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre et deux à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale et n'est bonne généralement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que, comme vous n'aviez pas ma méthode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous ne soyons de sentiments différents sur ce sujet.

Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez en la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me serait contraire. Je suis, etc.

ANNEXE VII

LETTRE DE FERMAT A PASCAL DU 25 SEPTEMBRE 1654 ([2])

Monsieur,

1. N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi.

Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez.

Je n'y trouve que 17 combinaisons pour le premier et 5 pour chacun des deux autres : car, quand vous dites que la combinaison acc est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu ?

Ce qui vient de ce que, comme vous avez très bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination.

Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de trois parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à quatre, il y aura non seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plus tôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plus tôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier seront 51 et celles de chacun des autres deux 15, ce qui revient à la même raison.

Que si vous prenez cinq parties ou tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours trois nombres en proportion de 17, 5, 5.

Et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison acc n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que cca n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant ma règle des combinaisons est la même en trois joueurs qu'en deux, et généralement en tous nombres.

2. Vous aviez déjà pu voir par ma précédente que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des trois joueurs dont je vous avois envoyé les trois nombres décisifs, 17, 5, 5. Mais parce que M. <de> Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième ; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ *et* $\frac{2}{27}$, *ce qui fait en tout* $\frac{17}{27}$

Et la règle est bonne et générale en tous les cas, de sorte que, sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et l'autre que la raison et la vérité.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages disponibles en langue française, d'un niveau élémentaire.

M. L. HOCQUENGHEM, C. et D. MISSENARD, F. MONNET, A. M. SERFATI, G. TARTARY : Histoire des mathématiques pour les collèges, CEDIC, Paris, 1980.

Groupe Inter-IREM : La rigueur et le calcul, Documents historiques et épistémologiques, CEDIC, Paris, 1982.

A. DAHAN et J. PEIFFER : Routes et dédales, diffusion Blanchard (9 rue de Médicis, 75006 - Paris), Paris, 1982.

P. DEDRON et J. ITARD : Mathématiques et mathématiciens, Magnard, Paris, 1959.

COLLETTE : Histoire des mathématiques, 2 vol., Vuibert, Paris, 1979.

J. DHOMBRES : Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire, CEDIC/NATHAN, Paris, 1978.

J.P. CLERO et E. LE REST : La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, CNRS, Paris, 1980.

Fragments d'histoire des mathématiques, brochure APEMP, n° 41 (13 rue du Jura, 75013 - Paris), Paris, 1981.

Numéro spécial π, supplément au Petit Archimède, ADCS (61 rue St Fuscien, 80000 - Amiens), Amiens, mai 1980.

Textes et documents mathématiques, CRDP (6 rue Sainte Catherine, 86034 - Poitiers Cedex), Poitiers.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

M.A.T.H : Mathématiques approche par les textes historiques.

AUTEUR (S) :

Babaut Marie-Louise, Bülher Martine, Debiard Annie, Delale Marie-Lucie, Delmas Marie-Françoise, Denys Bernadette, Grégoire,Michèle, Hallez Maryvonne, Jozeau Marie-Françoise, Knerr Paule, Paquelier Yves, Verdonck Françoise, Verley Jean-Luc

RESUME :

La brochure est organisée par thèmes donnant lieu chacun à un chapitre ; elle regroupe au total : 15 textes originaux précédés d'exercices introductifs (d'Archimède à Newton et Argand) expérimentés dans les classes de la 4ème à la terminale. Parmi les thèmes abordés : équations du premier degré, racines carrées, extrema, tangentes, dénombrement, nombres complexes, approximations .Une présentation historique pour chaque thème Deux expérimentations différentes autour du problème des partis (de Pacioli à Pascal et Fermat).

MOTS CLES :

mathématiques
histoire
textes historiques
pratique
enseignants

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-33-7