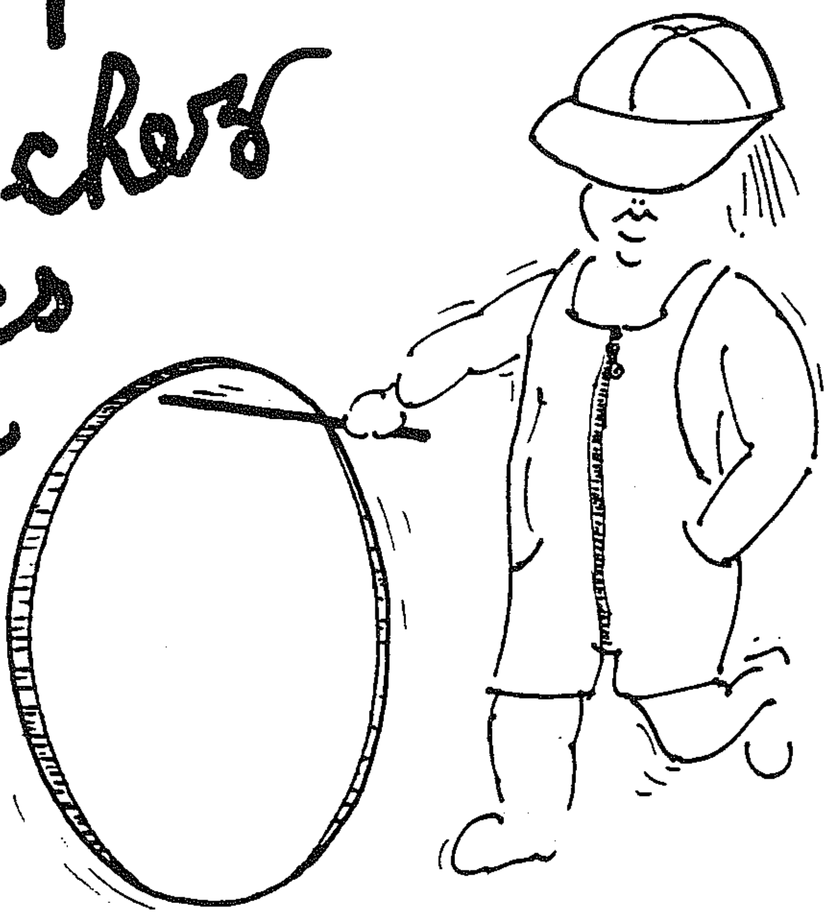
IREM

Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
UNIVERSITE PARIS VII

38

Réédition Fév. 86

Conception du cercle chez les élèves de l'école élémen-taire.



NIVEAU Enseignement Elémentaire
PUBLIC Enseignants - chercheurs en didactique
SUJET Conception du cercle chez des élèves de l'Ecole Elémentaire
OBJECTIF Rapport de Recherche

CONCEPTIONS DU CERCLE CHEZ DES ENFANTS DE 7 A 9 ANS

par: M. ARTIGUE
J. ROBINET

Donc, pour mieux me faire entendre, je déclare qu'en effet la vérité, dont la connaissance est fournie par les preuves mathématiques, est identique à celle que connaît la sagesse divine ; je vous concéderai cependant que la façon dont Dieu connaît les nombreuses vérités, dont nous ne connaissons qu'un petit nombre, est bien supérieure à la nôtre. Nous procédons par débats progressifs et avançons par étapes, de conclusion en conclusion, alors qu'Il comprend par un simple coup d'œil. Ainsi, par exemple, pour acquérir la connaissance de quelques-unes des propriétés du cercle, qui sont infiniment nombreuses, nous commençons par l'une des plus simples, la posons comme définition, et passons de là, par déduction, à une deuxième, puis à une troisième et une quatrième propriété, etc. L'intellect] divin, au contraire, comprend l'infinie multitude des propriétés du cercle par simple conception de sa nature, sans recourir à un examen temporel. En réalité, ces propriétés sont déjà virtuellement contenues dans les définitions de toutes choses et, bien qu'infinies par leur nombre, elles forment peut-être une unité dans leur substance et dans l'esprit divin. [Cela n'est même pas complètement étranger à l'intellect humain, mais bien obscurci par un épais voile de brouillard, qui s'éclaircit quelque peu et devient plus transparent, lorsque nous avons maîtrisé certaines déductions, qui sont rigoureusement démontrées et appartiennent à tel point à notre patrimoine spirituel que nous pouvons rapidement passer de l'une à l'autre

Galilée : "Dialogo dei massimi sistemi"

Nous tenons à remercier MMmes Clément-Bolayron, Matisse, MMrs Pigot, Pillas, enseignants à Melun, Mme Latour, enseignante à Montrouge, sans qui cette recherche n'aurait pas été possible.

PRESENTATION DE LA RECHERCHE

I - ORIGINE DE LA RECHERCHE

Cette recherche, comme la plupart des recherches en didactique menées actuellement, a sa source dans un problème d'enseignement. Il s'agissait pour nous d'organiser l'enseignement de la géométrie dans deux classes de l'école élémentaire d'observation de l'Almont à Melun, le CE_2 et le CM_1, classes dont nous étions chargées dans le cadre de notre travail à l'IREM Paris-Sud.

Une étude de ce qu'est l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire à ce niveau, montre que, classiquement, on y distingue deux domaines :

- L'étude de formes géométriques particulières du plan et de l'espace (cube, parallélépipède, carré, triangle ....)
- L'étude de transformations géométriques (translations, symétries, homothéties ....)

La première de ces activités prend traditionnellement essentiellement la forme d'un travail de vocabulaire basé sur une ostension des objets géométriques considérés. Ceci nous a été confirmé par l'analyse des manuels que nous avons menée. Elle révèle, excepté pour quelques ouvrages très récents, une conception de l'enseignement de la géométrie très homogène d'un manuel à l'autre, conforme à ce qui précède.

Or, lorsque nous avons placé les élèves dans des situations nécessitant la manipulation de formes géométriques, notre attention a été attirée par la variété et l'apparente étanchéité des conceptions qu'ils mettaient en oeuvre, à propos d'une même forme géométrique suivant la tache proposée. Ceci nous a conduit à nous poser la question de savoir quel sens on pouvait attribuer à des phrases comme :

"Connaissance de figures simples du plan et de l'espace"

le terme "connaissance" ne pouvant être compris, bien sûr, au sens de simple reconnaissance perceptive.

Une réponse, même partielle, à cette question nous a paru un préalable nécessaire à la construction de séquences didactiques concernant cette partie de la géométrie.

D'où le projet, dans une première pré-expérimentation, d'observer le comportement des élèves dans des situations variées, pour analyser les procédures utilisées suivant la tâche proposée et d'étudier s'il était possible d'associer aux procédures observées des conceptions des figures géométriques (qui seraient à définir).

II - ORGANISATION DE LA PRE-EXPERIMENTATION - CHOIX DU THEME

A - Choix du thème

Le problème que nous posions était, à notre avis, trop vaste pour que nous puissions l'attaquer globalement. Nous avons choisi de limiter le sujet de la recherche en nous bornant à l'étude d'une forme géométrique particulière.

Ce choix reposait sur l'hypothèse suivante :

Les phénomènes que notre recherche permettrait de mettre en évidence (si cela était le cas), même s'ils paraissaient spécifiques de la figure géométrique particulière considérée, devaient pouvoir se transposer par le biais de traductions adéquates à d'autres figures.

Dans la limitation du sujet de la recherche, compte tenu de nos préoccupations nous pouvions agir principalement dans deux directions :

- les figures (solution que nous avons choisie)
- l'éventail des situations

La première éventualité nous a paru plus raisonnable, d'une part à cause de la remarque faite plus haut, d'autre part, parce qu'au stade pré-expérimental qui était le nôtre, l'analyse, à priori, des conceptions que nous nous sentions en mesure d'effectuer ne permettait pas, à notre avis, une réduction motivée de l'éventail des situations.

Nous avons choisi le cercle. Il y a à cela deux raisons principales:

- Notre expérience empirique nous donnait à penser que les conceptions mises en jeu par les enfants, à propos du cercle, étaient suffisamment riches et variées pour que l'on puisse le considérer comme un objet "typique" pour notre étude.
- Notre expérience, empirique encore une fois, de l'enseignement, les conversations que nous avions eues avec divers maîtres de l'école élémentaire, semblaient poser le cercle comme une figure pour laquelle l'illusion de transparence de l'objet était des plus fortes.

A y réfléchir de plus près, cette illusion de transparence est confortée par différents facteurs. Sans prétendre en faire une liste exhaustive, il nous paraît nécessaire d'insister ici sur certains d'entre eux :

- Une assimilation de la "connaissance" de l'objet à sa reconnaissance perceptive. Or on sait que la reconnaissance du cercle parmi d'autres figures géométriques est possible chez le chien (cf. les célèbres expériences de Pavlov) et chez le nourisson âgé de quelques jours. Chez Piaget, également, en ce qui concerne la perception stéréognostique et le tracé et non plus la simple reconnaissance visuelle, le cercle est une des figures le plus tôt maîtrisées.
- Le fait qu'il existe un outil, d'un maniement aisé, qui permet à l'enfant de tracer des cercles avec présicion dès les premières années de l'école élémentaire (contrairement à ce qui se passe, par exemple, pour le parallélogramme). Encore une fois, il y a risque de confusion entre les capacités de tracé précis de la figure, donc d'utilisation de l'outil, et la connaissance des raisons de l'adéquation de l'outil ou, à un autre niveau, de la figure elle-même. Une telle confusion n'est pas possible lorsqu'il s'agit d'outils d'une technologie relativement compliquée mais, justement, dans le cas du cercle, elle peut être induite par la simplicité technologique.

Peut-être, sans l'y assimiler, peut-on la rapprocher de la confusion faite par certains parents qui pensent que leurs enfants savent compter parce qu'ils savent réciter la comptine.

- Le fait enfin que, pour le maître, l'enseignement relatif aux cercles pose des problèmes à un autre niveau (calcul du périmètre et de l'aire) problèmes perçus comparativement plus compliqués que ceux posés, par exemple, par le calcul de l'aire et du périmètre du carré ou du rectangle. Ceci monopolise son attention. C'est, nous pensons, une raison de cette nature qui a fait répondre à un maître à qui nous demandions ce qui devait être enseigné à propos du cercle : " Π "

B - Organisation de la pré-expérimentation

Ce qui précède pourrait laisser croire que la pré-expérimentation a reposé sur une recherche minutieuse préalable de conceptions possibles à propos du cercle, puis sur la recherche de situations favorisant à priori l'émergence de telle ou telle conception, enfin sur la confrontation à posteriori des résultats obtenus avec l'analyse a priori.

Cette démarche a été effectivement suivie pour l'expérimentation mais non pour la pré-expérimentation.

En fait, pour cette dernière, nous avons proposé aux élèves de CE_2 et de CM_1 des situations problèmes, en essayant de les choisir de caractéristiques suffisamment variées (par exemple : problèmes de reconnaissance de formes, de tracé,de figures géométriques, de trajectoires circulaires, problèmes relatifs à la position respective de deux cercles, au partage de cercles, à l'homothétie entre cercles) pour favoriser l'émergence de conceptions différentes du cercle si de telles conceptions existaient chez les enfants.

Pour chacune des séances de cette pré-expérimentation, nous avons rédigé un compte-rendu mentionnant le temps consacré à la séance, l'organisation de la classe, les consignes exactes données aux élèves, les procédures de résolution utilisées par eux et les obstacles rencontrés, de manière extrêmement classique mais nous n'avons procédé à aucun enregistrement.

C - Analyse de la pré-expérimentation

Nous voulions analyser ces observations préliminaires en nous efforçant de déterminer, dans le langage des élèves ou, au niveau opératoire, dans leurs procédures de résolution, des indices de la prise en compte de tel ou tel élément géométrique particulier, de relations entre différents éléments géométriques, de la construction d'invariants.

Il nous a paru alors utile avant d'aborder cette analyse de recenser le champ des possibles. Il ne s'agissait pas d'un recensement à priori puisque nous ne pouvions manquer d'être influencées par ce qui s'était passé dans les classes que nous avions suivies, mais nous ressentions sa nécessité à ce point de notre recherche.

Nous l'avons envisagé comme un pur exercice mathématique sans référence à aucune situation précise.

L'enseignement, qu'il soit primaire ou secondaire, ne propose actuellement aux élèves qu'une seule définition du cercle :

"Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble
des points du plan situés à la distance R de O"

Or pluralité des points de vue sur le cercle sous-entend pluralité des définitions possibles. Nous avons donc cherché le plus de définitions possible du cercle, en essayant pour chacune d'entre elles de mettre en évidence les éléments géométriques, les relations entre éléments géométriques qu'elle privilégiait. Puis, comme certaines d'entre elles reposaient sur la conjonction de propriétés, nous avons essayé de déterminer quel genre de monstres engendrait le non-respect des conjonctions (qui nous paraissait une attitude fréquente chez les élèves.)

Ce faisant, nous avons exhibé 6 définitions du cercle (cf Chap. I). Il en est bien sûr beaucoup d'autres et notre choix a été inconsciemment guidé par les comportements observés dans les classes. D'autres réactions des élèves auraient peut-être suscité des définitions différentes.

Ensuite, nous avons décidé d'associer à chaque définition D_i une conception du cercle notée C_i. Par exemple, dans C_3, C_4, C_5 les éléments primordiaux du cercle sont les "diamètres" (diamètres entre guillemets pour souligner qu'ils ne sont pas nécessairement dotés de toutes les propriétés que nous, mathématiciens, leur reconnaissont). Ainsi la discussion collective de la première séance au CE_2 montre clairement que l'enrichissement d'une conception de type C_4 (diamètres : axes de symétrie) en une conception de type $C_4 + C_5$ (diamètres : axes de symétrie + cordes maximales) a nécessité de la part des élèves une construction laborieuse.

Il est théoriquement possible d'associer une conception C_i à chaque définition D_i. Le problème reste posé de savoir à quels indices, dans le langage ou les procédures de l'élève, on va pouvoir reconnaître que l'on a affaire à telle ou telle conception. Par exemple, est-ce que la phrase :

"Il est rond partout pareil"

relève bien de la conception C_2 associée à une définition du cercle par courbure constante ? A notre avis, il est impossible de décider à coup sûr si l'on ne dispose pas d'informations précises sur le contexte au sens large dans lequel cette phrase a été prononcée.

Malgré les difficultés que nous venons de signaler, la procédure utilisée nous a semblé fournir une aide efficace dans l'analyse des observations. Par exemple, il est apparu que, dans les situations de reconnaissance de formes, lorsqu'ils avaient des conduites de preuve, les enfants privilégiaient des formulations de type C_4 ou C_6. Il serait intéressant d'étudier la stabilité de ces procédures : dans la pré-expérimentation, les activités de reconnaissance de formes ont été proposées aux élèves au début de l'apprentissage. Aurait-on le même type de formulation en se plaçant plus tard dans l'apprentissage ?

Enfin cette étude nous a permis de remarquer à postériori que, dans le choix des situations, nous n'avions fait la part belle ni à la propriété du cercle d'être une figure de courbure algébrique constante ni à son invariance par rotation autour de son centre. Nous avons essayé d'y remédier lors de l'expérimentation.

III - EXPERIMENTATION

L'expérimentation a consisté en l'organisation et l'analyse d'une séquence d'enseignement construite en fonction des impératifs suivants :

- Ne construire qu'une séquence relativement courte (comparativement à la pré-expérimentation) pour ne pas être submergé par le matériel à analyser.
- Construire des séquences permettant de disposer d'observables interprétables en termes de conceptions du cercle, même en dehors d'une explicitation par l'élève de ses procédures (ceci d'autant plus que toute explicitation relève en général d'une reconstruction à postériori).
- Construire des séquences pour lesquelles une analyse à priori fasse apparaître la possibilité théorique d'émergence de plusieurs des conceptions répertoriées, certaines étant favorisées pour des raisons d'économie, de fiabilité ou de technologie.

Cinq situations problèmes ont été ainsi proposées dans deux CE_2, l'un situé à Montrouge, l'autre à Melun. Dans chaque cas, nous avons précisé aux maîtresses :

- le matériel qui serait à distribuer aux élèves
- les consignes à donner
- l'organisation que nous souhaitions pour la classe (travail individuel, en équipes, nombre d'élèves par équipe).

Nous insistions sur la nécessité de commencer chaque séance par un rappel et de la terminer par une phase de bilan collectif.

Comme on le voit, le système était souple, chaque maîtresse pouvant, à partir des points de départ donnés et en suivant les contraintes, peu nombreuses fixées, conduire la classe à sa guise.

Il nous paraît important d'insister ici sur les raisons de cette organisation. L'étude que nous nous proposions (analyse des conceptions du cercle mises en oeuvre par les enfants suivants les situations proposées), à notre avis, ne prenait véritablement son sens que si elle était doublée d'une étude de la gestion de ces mêmes situations par les maîtres, dans le cadre de la classe. Cette dernière, de plus, nous fournirait certainement des indices précieux sur la façon dont les enseignants concevaient l'apprentissage relatif au cercle. Nous savions que notre présence suffisait à perturber le fonctionnement de la classe et que nous étions donc dans la situation classique où l'observateur perturbe l'objet de son étude. Ne pouvant éliminer ce fait, il nous paraissait nécessaire cependant de laisser le plus possible aux maîtresses la responsabilité de leur classe. Et, en effet, c'était à elles de prendre les décisions au cours des séances, d'introduire, quand elles en ressentaient le besoin et comme elles le désiraient, tel ou tel terme spécifique, de doser les phases collectives de rappel, de bilan et les phases de travail individuel ou en équipes.

La passation dans les deux classes, elle-même, était conçue pour nous permettre de mieux appréhender ces phénomènes de gestion de la classe, en particulier par l'étude comparative des décisions prises par l'une et l'autre maîtresse et des répercutions des choix effectués.

L'expérimentation a occupé huit séances de 1 heure environ.

Toutes les séances étaient magnétoscopées. Des observateurs suivaient les travaux des différentes équipes. En fait, les défaillances répétées du magnétoscope de Melun nous ont empêché de disposer pour cette classe des mêmes informations que pour celle de Montrouge. Malgré cela, nous disposions à la fin de la phase d'expérimentation d'un matériel considérable par l'ampleur duquel il importait de ne pas se laisser submerger.

IV - ANALYSE DE L'EXPERIMENTATION - TESTS

Nous avons analysé le matériel dont nous disposions dans les trois directions suivantes :

1) Conceptions du cercle mises en oeuvre par les élèves
2) Effets de l'apprentissage
3) Gestion de la classe

Pour chacune de ces directions, précisons un peu dès maintenant dans quel esprit fut menée l'analyse.

1) Il s'est agi, séquence par séquence, de répertorier et classer les procédures des élèves puis de mettre en rapport les résultats obtenus avec l'analyse effectuée à priori, éventuellement avec les observations de la pré-expérimentation. Nous avons cherché à évaluer la puissance et les limites des différentes conceptions, leur résistance plus ou moins forte à l'évolution, l'adaptation, suivant les situations où elles intervenaient, à déterminer des points d'équilibre.

2) Comme nous l'avons écrit précédemment, les situations avaient été présentées aux maîtresses comme des situations-problèmes devant nous permettre de mieux comprendre comment fonctionnaient les différentes conceptions du cercle chez les élèves. Il était clair, bien qu'il n'en ait pas été explicitement question entre nous, que ces huit séances constituaient, à leurs yeux, les séances consacrées cette année-là à l'enseignement relatif au cercle. Elles furent donc gérées comme telles, mis à part le fait que, pendant la phase de travail individuel ou en équipes consécutive à la donnée des consignes, les maîtresses s'imposèrent d'intervenir le moins possible pour éviter de perturber les observations en influant en direction de telle ou telle procédure.

Il était donc important de chercher à déterminer l'effet de l'apprentissage. Nous pouvions le faire de "l'intérieur", adoptant la position du maître qui, lui-même, dans sa classe, évalue de façon continue les effets de son enseignement. Les documents dont nous disposions nous permettaient de le faire dans de relativement bonnes conditions. Il nous a paru intéressant d'en croiser les résultats avec une évaluation plus "extérieure". C'est pourquoi nous avons fait passer individuellement aux élèves des deux classes, un test, un mois environ après la fin de l'enseignement à Montrouge, quinze jours après à Melun.

3) A l'origine, nous avions pensé aborder l'étude de la gestion de la classe à travers l'analyse des prises de décision des deux maîtresses au cours des différentes séquences. Nous l'avons fait d'abord pour une situation qui, de ce point de vue là, semblait particulièrement intéressante : celle de la trajectoire de l'extrémité d'une porte.

Parallélement, nous nous sommes aperçues que les séances de rappel dans la classe de Montrouge (celle pour laquelle nous disposions de tous les enregistrements) pouvaient se révéler très utiles dans l'étude de ces phénomènes; ceci pour deux raisons, principalement :

- Elles consistaient en un retour "à froid" sur les actions des élèves et nous notions souvent une différence sensible, au niveau du discours, entre la phase de bilan suivant une activité et le premier rappel consacré à cette activité. Les rappels, eux-mêmes, évoluaient au cours des séances, prenant un aspect de plus en plus synthétique, mettant l'accent sur tel ou tel point qui n'était qu'ébauché dans les premiers.... A ce titre, ils nous paraissaient correspondre à une intériorisation du savoir et pouvoir être considérés par la maîtresse, à l'intérieur de la classe, comme des indicateurs privilégiés de l'intégration des connaissances, donc, de ce fait, constituer des guides de son action ultérieure.

- Il est apparu que les phases de rappel étaient presque systématiquement utilisées par la maîtresse pour des actions d'institutionnalisation* du savoir, aisément repérables, fournissant des renseignements sur la conception qu'elle avait de l'enseignement relatif au cercle.

Il nous a donc paru raisonnable et légitime d'utiliser ces phases de rappel comme indicateurs des phénomènes que nous voulions étudier.

En conclusion de cette présentation de la recherche, nous voudrions souligner que nous avons voulu analyser les conceptions du cercle mises en oeuvre par les élèves indépendamment d'une étude précise des situations dans lesquelles elles intervenaient. Nous n'avons pas voulu analyser ces situations sans prendre en compte le fait qu'il s'agissait de situations de classe, mettant en jeu non seulement les élèves et l'état de leur développement psycho-génétique, mais aussi la classe et tout ce qui constitue la situation d'enseignement. Ceci nous a amené à étudier le jeu joué par le maître dans ces situations, jeu déterminé en partie par la conception qu'il a de l'apprentissage visé, conception que son caractère implicite nous empêche d'appréhender directement.

D'où, pour un sujet même aussi limité que celui-ci, un éventail nécessaire de directions de recherche que l'on est obligé, dans une première approche, de traiter de manière indépendante (bien qu'elles soient intrinsèquement dépendantes) avant de chercher à les rassembler en un tout cohérent.

Nous ne prétendons pas avoir réussi ici à répondre à toutes ces exigences qui sont celles de la recherche en didactique; nous avons simplement essayé de ne pas fonctionner de manière trop abusivement réductionniste.

*les situations d'institutionnalisation étant "celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir" (G. BROUSSEAU)

I - DEFINITION DU CERCLE

Dans la première partie de ce chapître, nous présenterons quelques définitions possibles pour le cercle. Dans la seconde partie nous étudierons, à travers des manuels récents ou anciens, comment est ou était introduite la notion de cercle*.

I - Définitions du cercle

Dans tout ce qui suit, on se place dans un plan euclidien P.

La distance euclidienne est notée d

Une courbe est une application continue φ de $[0, 1]$ dans P quasi-injective.

Le terme quasi-injectif signifiant que la seule exception à l'injectivité admise est $\varphi(0) = \varphi(1)$. Si $\varphi(0) = \varphi(1)$ on dit que la courbe est fermée.

Définition 1 : Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de P situés à la distance R de O.

Définition 2 : On appelle cercle toute courbe fermée de classe C^2 de courbure algébrique constante

Définition 3 : On appelle cercle toute courbe homogène par isométrie .

Définition 4 : On appelle cercle toute courbe admettant une infinité d'axes de symétrie (concourants).

Définition 5 : Soit Γ une courbe fermée convexe (c'est-à-dire bord d'une partie convexe G de P) admettant en tout point une tangente

pour toute direction θ , on désigne par :

- a_θ la borne supérieure des longueurs des segments de direction θ contenue dans G

Γ est un cercle si et seulement si 1) pour chaque direction θ, a_θ est la longueur d'un segment unique D_θ de direction θ inclus dans G.

2) tous les segments D_θ sont concourants et ont même longueur.

* Nous tenons à remercier Mme C. LABORDE et Mr G. GLEASER pour les documents qu'ils nous ont fournis.

Définition 6 : Une courbe Γ de P est un cercle si et seulement si il existe un point O du plan et un réel α positif ou nul, tels que toute droite passant par O coupe Γ en deux points M et M' vérifiant :

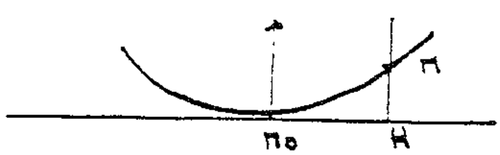
1) $d(M,M') = \alpha$
2) O est le milieu de MM'

Quelques remarques à propos de ces définitions :

Ces définitions appellent quelques remarques :

- la définition 2, peut, à première vue, reposer sur un cercle vicieux. On définit le cercle à partir de la courbure, mais la courbure elle-même ne se définit-elle pas à partir du cercle!

  Si Γ est une courbe C^2, en tout point elle a une tangente et une normale.



On désigne par s(M) l'abscisse curviligne M (à partir de Mo) par h(M) la mesure algébrique de HM. La courbure algébrique de Γ en MO n'est autre que la limite du rapport $\frac{2\,h(M)}{s^2(M)}$ lorsque M tend vers Mo

- la définition 3 est sans doute moins fréquente que les précédentes. Rappelons qu'une courbe Γ est dite homogène par isométrie si et seulement si

$$\forall x \in \Gamma,\ \forall y \in \Gamma,\ \exists f \text{ (f isométrie de P et } f(\Gamma) = \Gamma \text{ et } f(x) = y)$$

on aurait pu d'ailleurs, dans la définition, spécifier isométrie directe. Nous démontrerons dans un instant que la définition 3 équivaut à la définition 1.

- définition 4, nous avons mis "concourants" entre parenthèses parce que c'est une conséquence de ce qui précède. Mais le fait que les axes de symétrie du cercle soient nécessairement concourants constitue une telle évidence aux yeux des enfants que nous n'avons pas voulu l'exclure entièrement de la définition.

Nous reviendrons plus en détail ultérieurement sur la définition 5. Elle se différencie de la définition 6, en ce sens que dans 5, les diamètres sont nécessairement des cordes de longueur maximale, alors que dans 6) ceci n'apparaît pas directement.

La définition 6) correspond comme nous l'avons déjà annoncé dans l'introduction à une conception du cercle qui apparaît très tôt chez les enfants dans les conduites de vérification et de preuve et semble très résistante (cf. chapitres 2,3,4) .

<u>Démonstration de l'équivalence entre les définitions 1 à 6</u>

Montrons que $3 \Rightarrow 1$, $4 \Rightarrow 1$, $5 \Rightarrow 1$. Les autres démonstrations sont triviales.

$3 \Rightarrow 1$: Soit φ une application de $[0, 1]$ dans $\mathcal{P}$ définissant une courbe Γ homogène par isométrie.

. Γ est une courbe fermée : Soit f une isométrie quelconque du plan, f étant continue, l'image d'un connexe est connexe; f étant de plus bijective, on en déduit que :

$$\varphi(0) \neq \varphi(1) \Rightarrow [f[\varphi(0)] = \varphi(0) \quad \text{ou} \quad f[\varphi(0)] = \varphi(\alpha)]$$

ceci contredit l'hypothèse d'homogénéité par isométrie.

. Γ est compact comme image continue d'un compact dans un séparé. Il s'ensuit que Γ est inclusdans un disque $\mathcal{D}$ du plan.

On définit $\quad r = \inf (R \mid \Gamma \subset \mathcal{D}(0;R))$ $\mathcal{D}(0,R)$ disque de centre 0 et de rayon R

$$\text{soit} \quad r = \inf_{0 \in \mathcal{D}} (\sup_{M \in \Gamma} d(0,M))$$

La fonction $\psi : 0 \to \sup_{M \in \Gamma} d(0,M)$ est Lipschitzienne de rapport 1 donc continue. On peut relativiser à $\mathcal{D}$ la recherche de sa borne inférieure. ψ continue sur le compact $\mathcal{D}$ y atteint ses bornes.

$$\text{Donc : } \exists\, 0_1 \qquad r = \sup_{M \in \Gamma} d(0_1,M)$$

Ce point est unique. Sinon, soit 0_2

$$0_2 \neq 0_1 \qquad \tau = \sup_{M \in \Gamma} d(0_2, M)$$

$$\text{alors} \quad \Gamma \subset \mathcal{D}(0_1, r) \cap \mathcal{D}(0_2, r)$$

Donc Γ est inclus dans le disque de diamètre IJ dont le rayon est strictement inférieur à r. Ceci contredit la définition de r.

Soit $\Gamma_1 = \mathcal{C}(0_1, r)$ le cercle de centre 0_1 et de rayon r.

La construction ci-dessus est intrinsèque, donc toute isométrie de Γ est une isométrie de Γ_1 et de $\Gamma \cap \Gamma_1$

$\Gamma \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ car l'application $\quad g : \Gamma \to R$, $\; M \to d(0_1, M)$ est continue donc atteint sa borne supérieure sur Γ

Soient A tel que $d(O_1, A) = r$; B un point quelconque de Γ,
f une isométrie de Γ telle que $f(A) = B$

$A \in \Gamma \cap \Gamma_1 \Rightarrow B \in \Gamma \cap \Gamma_1$

Donc $\Gamma \subset \Gamma_1$

Comme Γ est fermée, il s'ensuit que $\Gamma = \Gamma_1$

CQFD

$4 \Rightarrow 1$ - Comme dans la démonstration précédente on considère $\mathcal{D}(O_1, r)$ le plus petit disque contenant Γ et Γ_1 le cercle bord de ce disque.

Une isométrie de Γ est une isométrie de Γ_1. Il s'ensuit que les axes de symétrie de Γ sont des axes de symétrie de Γ_1. Ils sont donc tous concourants au centre de Γ_1.

Soit $V = \Gamma_1 - (\Gamma \cap \Gamma_1)$ V est un ouvert de Γ_1. On le décompose en composantes connexes : $V = \bigcup_{i \in I} Vi$, les Vi sont nécessairement des arcs ouverts de Γ_1.

I peut être à priori infini, mais l'application $\Psi : I \to \mathbb{R}$, $i \to \ell g(Vi)$ nécessairement bornée, atteint sa borne supérieure : R (sinon on pourrait construire une suite (Vn) $n \in \mathbb{N}$ telle que la suite $\ell g(Vn)$ converge vers k. Ce qui est impossible puisque Γ_1 à une longueur finie).

Pour la même raison, les composantes connexes de longueur k sont en nombre fini; désignons les par $V_1 \ldots\ldots V_p$.

Soit mi le milieu de l'arc Vi.

Toute isométrie de Γ concerve $\{V_1 \ldots, Vp\}$ donc $\{m_1, \ldots, mp\}$

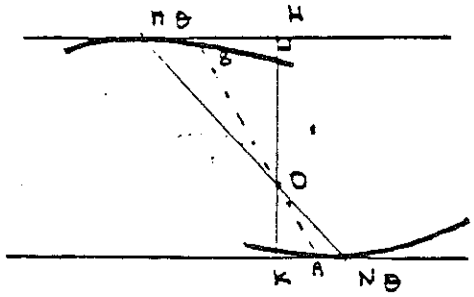
Or il existe une infinité d'isométries conservant Γ.

On en déduit que $V = \emptyset$ donc que $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Γ étant une courbe, il s'ensuit que $\Gamma = \Gamma_1$.

$5 \Rightarrow 1$

Soit $M_\theta N_\theta$ le diamètre dans la direction θ. a_θ est la borne supérieure des longueurs des cordes de direction θ, Γ est convexe, il s'ensuit que nécessairement les tangentes de Γ en M_θ et N_θ sont parallèles.

Supposons que $M_\theta N_\theta$ ne soit pas perpendiculaire à la direction de ces tangentes, on a alors la configuration suivante :



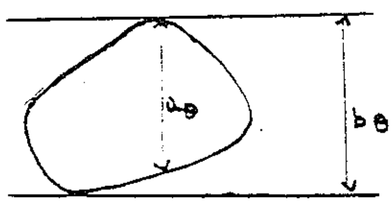
O est le point de concours des diamètres D_θ

Soient A et B situés comme sur la figure ci-contre, il est clair que $AB < M_\theta N_\theta$. Or c'est impossible vue la définition de O.

$M_\theta N_\theta$ est donc nécessairement perpendiculaire à la direction des tangentes en M_θ et N_θ . Il s'ensuit que la distance OM_θ est constante, donc que Γ est bien un cercle.

<u>Retour sur la définition 5</u>

Γ étant une courbe fermée convexe, soit a_θ défini comme dans 5. et b_θ la borne inférieure des largeurs des bandes perpendiculaires à la direction θ contenant a.

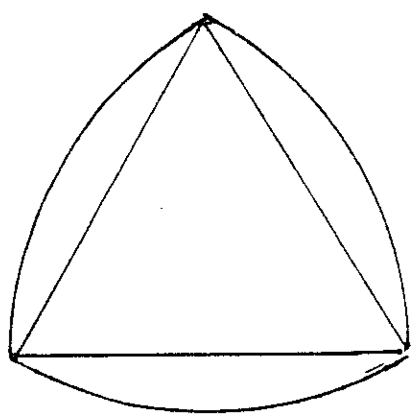


Il est clair que $\forall_\theta \quad a_\theta \leqslant b_\theta$

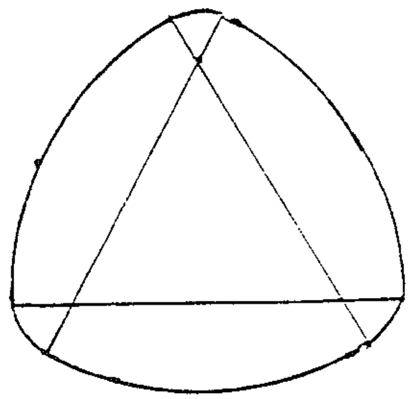
Si Γ est un cercle, a_θ est indépendant de θ, b_θ aussi et $\forall\ \theta \quad a_\theta = b_\theta$

Mais il existe des courbes satisfaisant ces trois propriétés sans être pour autant des cercles.

Celle-ci, formée de 3 arcs de cercle de même rayon, centrés aux trois sommets d'un triangle équilatéral présente trois points anguleux.



On peut supprimer les points anguleux en raccordant avec des arcs de cercle, mais c'est alors la courbure qui présente une discontinuité.



Enfin si l'on fait rouler sans glisser une règle sur une hypocycloïde à trois rebroussements, on obtient une courbe enclytique qui satisfait ces trois propriétés.

On peut noter que de telles courbes sont utilisées dans la technologie du moteur à piston rotatif.

Nous aurons ici le choix entre une définition en termes de b_θ ou en termes de a_θ. S'il s'était agi de la sphère et non du disque, nous aurions choisi la deuxième éventualité car elle correspond à des procédures de vérification utilisées. Dans le cas du disque, nous avons préféré la première éventualité qui modélisait des procédures effectivement observées chez les enfants.

II - Définitions du cercle dans la littérature mathématique

A) Citons d'abord quelques définitions "historiques" du cercle

- Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on appelle circonférence et telle que toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure sont égales entre elles. (Euclide - 3ème siècle avant J.C)

- Une ligne en mouvement étant placée de telle sorte que deux de ses points A et B restent immobiles, un autre point quelconque C de cette ligne décrit une circonférence (Liebniz - 1679).

- La ligne circulaire est une courbe tracée sur un plan de telle sorte que tous les points de cette courbe soient à une égale distance d'un point intérieur que l'on nomme centre et qu'elle enveloppe en tous sens (Révérend Père Bernard Lamy 1758).

- La circonférence du cercle est une ligne courbe dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle centre. (Legendre - 1794).

- La circonférence est un assemblage de points dont chacun est à une distance donnée de deux points donnés (Fourier - 1795).

- Un cercle est une position de plan terminée par une ligne dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé centre (Briot - 1863).

- La circonférence est une ligne courbe, plane et fermée dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur qu'on nomme centre (Frères de l'Ecole Chrétienne - 1903).

- Prenons dans un plan un segment OA et sur ce segment un point M. Imaginons que le segment tourne autour du point O, tout en restant dans le plan et jusqu'à ce qu'il ait repris sa position primitive. Par ce mouvement le segment OM décrit une portion de plan qui s'appelle cercle. Le point M, dans le mouvement considéré, décrit le contour du cercle; cette ligne s'appelle circonférence (Faifofer - 1903).

- On appelle circonférence une courbe fermée dont tous les points sont à une distance donnée d'un point fixe appelé centre. La partie du plan limitée par une circonférence s'appelle cercle (Camman et Reboues - 1933).

- Un cercle est une ligne plane fermée dont tous les points sont à une même distance d'un point fixe appelé centre (Chenevier - 1925).

- Une circonférence est le lieu des points du plan dont la distance à un point fixe O du plan est égale à une longueur donnée OA (Borel).

Ces définitions appellent quelques remarques :

- La référence à la notion de courbe est présente dans toutes les définitions sauf 2 (Fourier - Borel). Celle de Borel est sans aucun doute la plus proche des définitions actuelles justement par la façon dont elle privilégie l'aspect "ponctuel" du cercle au détriment de l'aspect "global".
Fourier, pour définir le cercle passe par l'espace puisque la circonférence qu'il définit est contenue dans le plan perpendiculaire à AB en son milieu.

Une autre des définitions citées procède de même : celle de Leibniz. Mais elle s'oppose à celle de Fourier par son caractère résolument dynamique.

- En fait, sur ces 11 définitions, 2 seulement sont dynamiques (Leibniz-Faifofer); et 6 des définitions statiques véhiculent exactement la même conception du cercle : Une courbe plane fermée dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur appelé centre.

- Le fait que la courbe doive être fermée n'apparaît qu'assez tardivement sous cette forme : chez le Révérend Père Lamy, c'est exprimé par une périphrase "Qu'elle enveloppe en tous sens".

Chez Legendre et Fourier, c'est carrément oublié - Chez Euclide et Briot c'est conséquence implicite de la nécessité de déterminer une portion de plan.

Nous avons, quant à nous, constaté lors de la passation des tests finaux, chez certains enfants, des difficultés à mettre en oeuvre de façon opératoire l'implication suivante : "Etant donné un cercle de centre O et de rayon R, si un point du plan est à la distance R de O, il appartient au cercle" Or cette implication est en quelque sorte une traduction "ponctuelle" de la propriété de fermeture de la courbe.

- Dans toutes les définitions (excepté Chenevier) le terme "cercle" représente ce que nous appelons aujourd'hui disque et le terme "circonférence" ce que nous appelons aujourd'hui cercle. Nous reviendrons sur ce point dans l'analyse des définitions de manuels plus récents.

Finalement, il nous semble que ce qui ressort de ce qui précède, c'est que ces définitions sont relativement homogènes. Sous des présentations linguistiques légèrement différentes, elles véhiculent dans l'ensemble la même conception du cercle E savoir une conception statique où le cercle apparaît comme une courbe dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur appelé centre.

B) Les Manuels de Mathématiques

Nous nous sommes limités pour cette étude à une vingtaine de manuels de la classe de sixième (premier niveau de la scolarité où est formulée systématiquement une définition du cercle) correspondants aux programmes de 1957, 1968, 1977.

Sur les 7 manuels les plus anciens consultés : (Cagnac - Thiberge 1958, Lespinard - Pernet 1958, Girard - Fournier 1958, Monge - Guinchan 1960, Boutin - de Gigord 1960, Maillard 1962, Cluzel - Nicolas 1963) un ne donne pas de définition (le Girard - Fournier) mais précise ensuite dans un résumé que : "tous les points du cercle sont à la même distance du centre" (on peut noter qu'ici aussi, l'énoncé n'étant pas formulé en équivalence, la réciproque de l'implication n'apparaît pas).

Toutes les définitions sauf celles du Lespinard - Pernet sont statiques Toutes sauf celle du Cluzel - Nicolas (analogue à celle de Borel) présentent le cercle comme une courbe. Plusieurs sont analogues à celle du Chenevier déjà citée. Dans le Cagnac - Thiberge, on ne précise pas que la courbe est fermée mais l'adjectif "tous" met l'accent sur la réciproque de l'implication : "le cercle est la ligne formée par tous les points du plan situés à une même distance d'un point appelé centre.

C'est à cette période qu'on assiste au glissement de vocabulaire déjà signalé :

"jusqu'à une époque récente, on faisait une distinction entre la circonférence qui était la ligne et le cercle qui était la portion de plan limité par cette ligne. Le mot circonférence tend à disparaître" (Cagnac - Thiberge)

Il figure encore dans le texte du programme mais en un seul endroit : "Formule donnant la longueur de la circonférence". Il disparaîtra définitivement dans les programmes de 1968, tandis que dans le programme 1977, c'est le terme "disque" qui apparaîtra.

Pour la période 1968-1977, les manuels consultés font apparaître une percée du point de vue ponctuel : "Une unité de longueur étant choisie, on appelle cercle de centre O et de rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que OM = R (Boursin - Capairos- Gitton 1974). La pesanteur formalisatrice de l'époque se traduit dans certaines définitions :

"Le cercle de centre O et de rayon AB, c'est l'ensemble des extrémités des segments liés ayant une extrémité en O et représentant le segment libre AB" (Polle 1969).

La propriété de conservation par glissement du cercle sur lui-même disparaît. Dans certains ouvrages, on définit déjà la notion de disque (Polle 1969, Boursin 1974 par exemple).Quant aux ouvrages postérieurs à 1977, ils se caractérisent par leur uniformité. Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan dont la distance au point O est r ÷ les variations linguistiques elles-mêmes s'amenuisent. On semble arrivé à une situation d'équilibre - la conception du cercle y est statique et ponctuelle. C'est, en fait, la définition I de la première partie de ce chapitre que, et ce n'est pas un hasard, nous avions spontanément proposée en premier.

Revenons un instant sur les six définitions de cette première partie. Elles sont toutes statiques (seule la définition 3, si elle était formulée autrement pourrait apparaître comme dynamique vue la référence aux isométries du plan). Toutes, exceptée la première, mettent par contre l'accent sur le fait que le cercle est une courbe tranchant en ceci avec les définitions actuelles.

Nous serons amenés dans les chapitres suivants à revenir à diverses reprises sur ces distinctions entre conceptions globales ou ponctuelles, conceptions statiques ou dynamiques, que l'étude de la littérature mathématique met en évidence. Elles apparaîtront comme des éléments explicatifs déterminants des conduites des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent.

II - PRE-EXPERIMENTATION

La pré-expérimentation s'est déroulée simultanément dans les classes de CE_2 et CM_1 de l'école de l'Almont I à Melun, classes dont nous avions la charge dans le cadre de notre travail d'animation à l'IREM.
Les thèmes traités dans les deux classes ont été respectivement les suivants:

- CE_2 : Jeu de messages à partir de constructions à la règle et au compas
  Reconnaissance de formes
  Problèmes de trajectoires circulaires (l'extrémité de la porte, du pendule)
- CM_1 : Jeu de messages à partir de constructions à la règle et au compas
  Problème de trajectoire circulaire (l'extrémité de la porte)
  Positions relatives à deux cercles
  Partages de cercles - Homothéties
  Construction de figures géométriques

Pour chacune de ces situations, nous allons essayer de préciser les conditions dans lesquelles elle s'est déroulée (consignes, matériel, organisation de la classe), puis nous analyserons brièvement les observations faites au cours des séances en nous limitant à ce qui nous a paru pertinent par rapport à notre projet de recherche.

I - SITUATION N° 1 : LES MESSAGES

(Séance n° 1 en CE_2 et au CM_1)

A - Organisation

Les mêmes consignes étaient, à l'origine, prévues pour les deux classes. Au CE_2, devant l'échec massif des élèves, le maître interrompra l'activité et organisera une discussion collective. Elle sera reprise avec des consignes modifiées après la séance n° 2 consacrée aux reconnaissances de formes.

Chaque élève dispose d'une règle graduée, d'un compas, d'une feuille blanche et d'un quart de feuille.

Des équipes de deux élèves ont été constituées.

Consignes : Chaque élève trace un dessin à la règle et au compas sur la feuille blanche puis écrit sur le quart de feuille un message pour son coéquipier qui devra essayer de reproduire exactement le dessin. Le message doit pouvoir être transmis par téléphone. Les dessins reproduits sont confrontés aux originaux. En cas d'échec, une concertation est prévue entre les deux équipiers.

Au CE_2 le maître insiste sur la nécessité de tracer un dessin très simple si l'on veut pouvoir réussir à écrire un message.

Consigne modifiée (au CE_2) : Tracez deux cercles et écrivez un message permettant de reproduire exactement votre dessin.

B - Observation

au CM_1

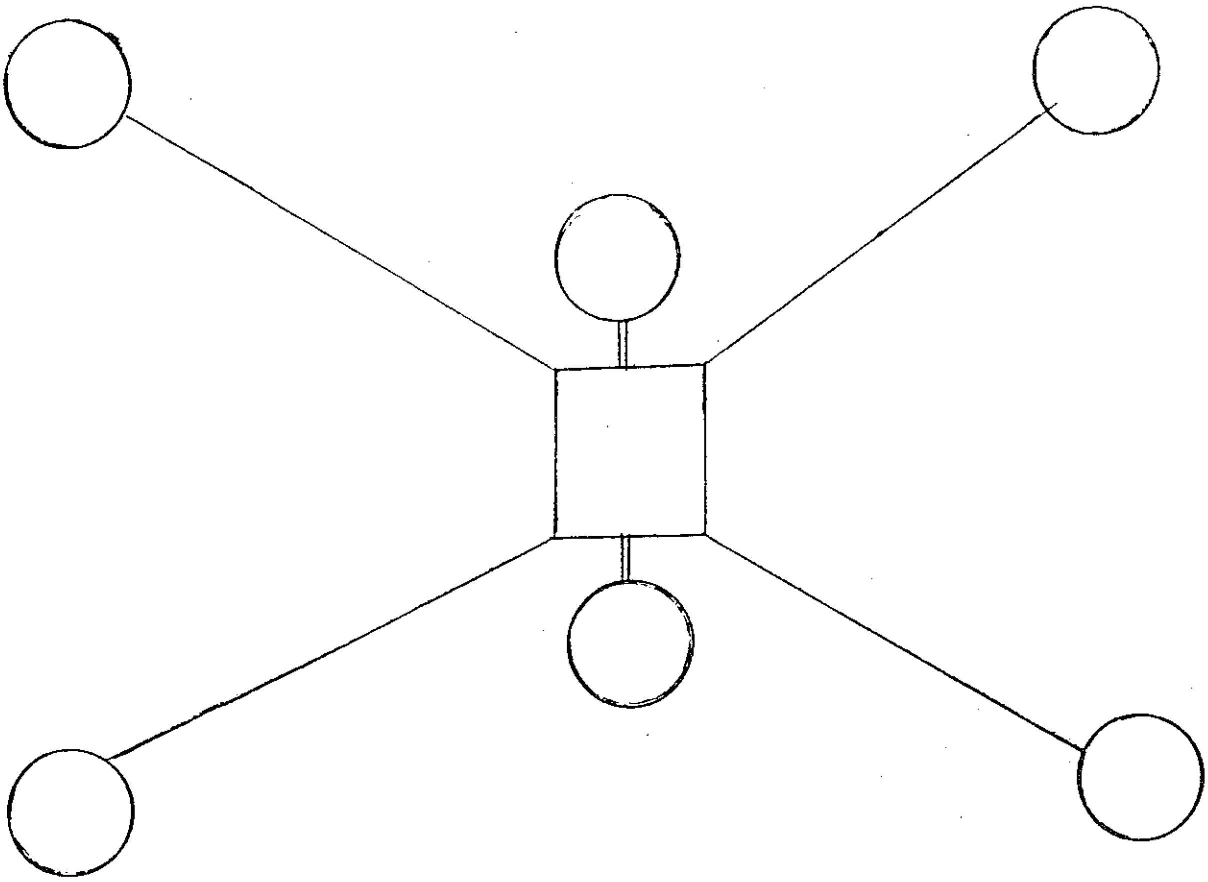
Il s'agissait d'une situation de communication : le message avait une fonction sociale (permettre au coéquipier de reproduire le dessin initial), deux élèves étaient associés pour une production commune (2 dessins initiaux - 2 messages, 2 dessins de décodage) et l'équipe serait jugée sur cette production.

Les enfants étant familiers de ce type de situation, le but avoué de communication nous avait paru suffisant pour la situer socialement et influer tant sur le choix des dessins que sur la conception des messages. Nous n'avions pas jugé nécessaire de fixer plus précisément l'enjeu de la partie par un système de points par exemple.

Que s'est-il effectivement passé ?

Dans un premier temps, les élèves ont conçu leur dessin sans anticiper sur l'activité d'écriture du message, se basant sur des considérations essentiellement esthétiques. Ils ont tracé de ce fait des figures compliquées se prêtant mal à une description écrite. Ils ont ensuite, pour la plupart, rédigé des messages assez longs, donnant une idée de l'agencement de la figure mais ne permettant pas une reproduction précise.

Exemple : la figure ci-après (réduction 1/4)



avec le message :

Il y a quatre rond dans chaque coin de la
feuille après il y a un carrée au milleux de la
feuille . tu fais un rond au dessus du carrée et
en dessous du carrée après tu fais deux bar en
dessous du rond pour rejoindre le carrée et le
rond qui est en dessous tu lui fais deux bar au
dessus pour rejoindre le carrée.

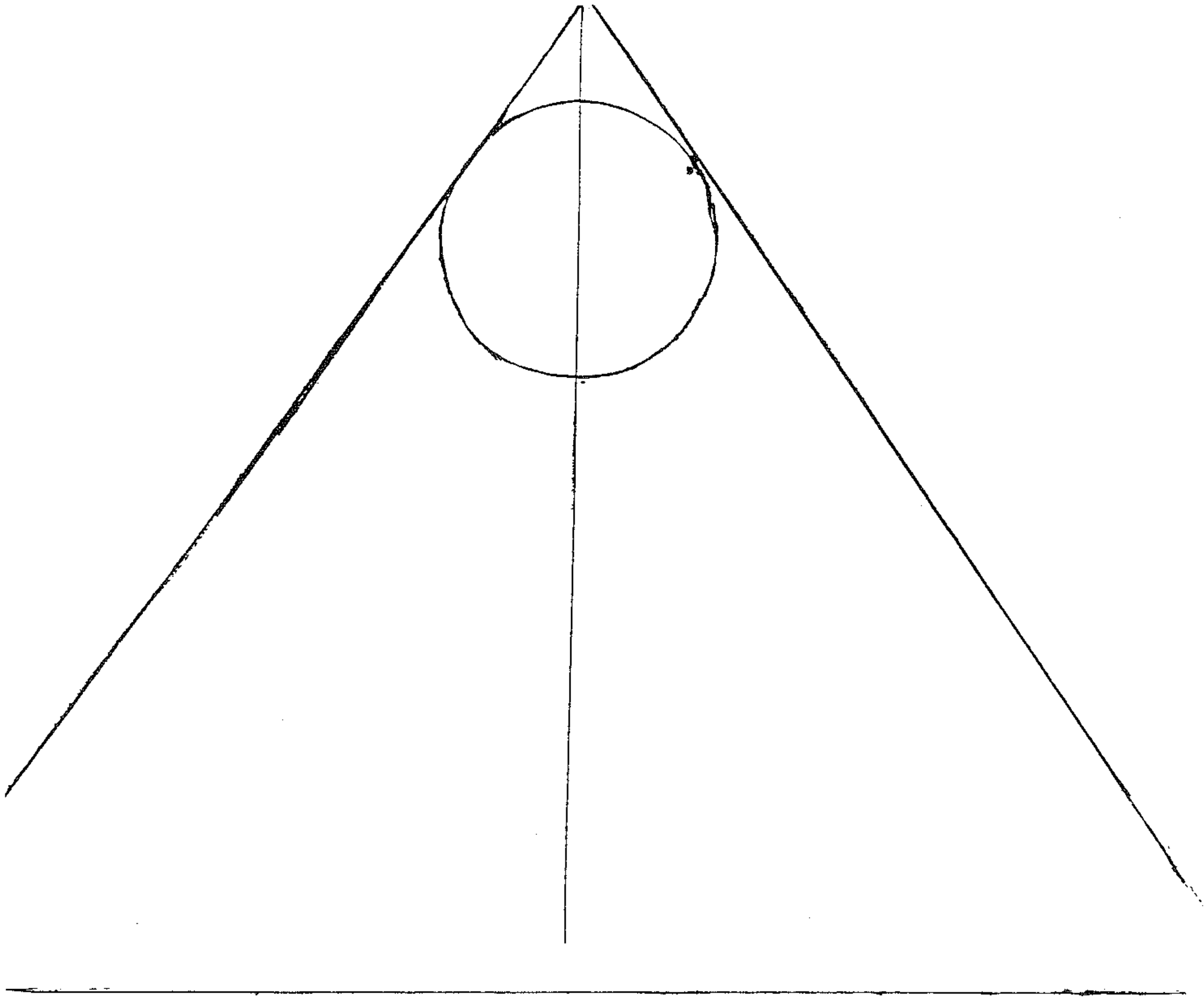
Les récepteurs ont, en général, tracé un dessin correspondant aux indications fournies en accordant visiblement moins d'intérêt à cette phase de l'activité qu'aux précédentes. La superposition des dessins a bien évidemment montré qu'aucune équipe n'était parvenue à remplir son contrat. Mais l'écart entre la complexité des figures produites et les capacités de codage des élèves était tel qu'il vouait d'avance à l'échec toute tentative, comme celle initialement prévue, de mise au point des messages par discussion entre émetteurs-récepteurs. Le maître l'a tout de même compris et pour que l'activité, de par sa trop grande difficulté, ne conduise au désintérêt général, il a demandé aux élèves, de tracer un nouveau dessin qui n'ait pas vocation d'oeuvre d'art mais soit adapté au but visé, puis d'écrire un message lui correspondant. Les dessins de la deuxième génération furent effectivement plus simples, mais très souvent encore d'une complexité disproportionnée aux capacités de description des élèves.

Peu de messages étaient réellement décodables, encore moins le furent convenablement. Citons deux messages représentatifs de cette période.

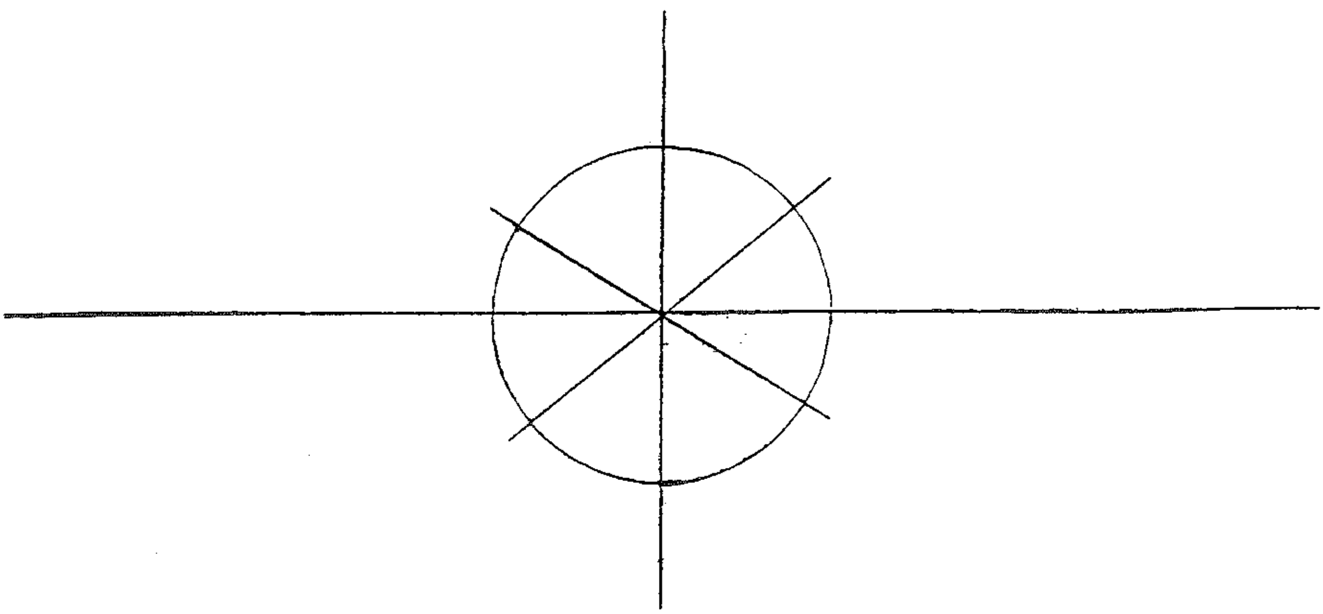
Le premier :

DIDIER Je plie la feuille en deux, je trace un trait
suivant le pliage ensuite je fait une diagonale
m le milieu le pliage et et le coupe la feuille je
fait pareil pour l'autre en côté après je
fait un rond qui mesure: rayon 3cm et le
diamètre 5,7 le rond join les deux digonale

correspond au dessin ci-dessous (réduction 1/2)



Il fut décodé ainsi :



Le second est un des rares correctement codé et décodé.

En bas, à la suite de la croix, figure la réponse à une précision demandée par le récepteur concernant la position exacte du centre des 4 cercles.

avec Message

Commence ton dessin au milieu de la feuille

Fais un rond dont le rayon est de 1 cm

En partant du même point fai un autre rond dont le rayon est de 2 cm

En partant toujours du même point fait un rond dont le rayon est de 3 cm

En partant du même point fait un rond dont le rayon est de 4 cm

Tu a maintenant sur ta feuille mon "Papatagram"

x

Plie ta feuille en quatre

à droite 11,5 cm

à gauche : 9,5 cm

en haut 6 cm et en bas 4,7 cm

Une discussion émetteurs-récepteurs a été organisée. Elle a rarement abouti, faute de temps, mais ainsi nous semble-t-il parce que,

- d'une part, les élèves ne disposaient pas d'un langage précis sur lequel se serait établi préalablement un consensus pour décrire les objets géométriques concernés.
- d'autre part, ils avaient d'énormes difficultés à déterminer, au vu d'un dessin, quelles étaient les informations pertinentes pour sa reproduction, au vu d'un message quelles étaient les informations supplémentaires dont ils désiraient disposer.

Quoi qu'il en soit, 49 messages ont été rédigés au cours de cette séance. Nous les avons classés et analysés suivant le langage utilisé pour décrire les cercles.

- 4 sont incompréhensibles
- 7 correspondent à des dessins sans cercles. Il s'agit de dessins très sommaires (2 traits qui se croisent, par exemple) ou figuratifs (maison,...)

Reste 38 messages que nous avons classés en 5 catégories :

Catégorie	Nombre d'élèves	Caractéristiques
I	8	pas d'indications de mesures
II	3	Référence à l'écartement du compas
III	14 { 8 R, 6 D }	Un indication de mesure mais sans préciser s'il s'agit du rayon ou du diamètre 8 élèves dans le premier cas, 6 dans le second.
IV	2	Référence à la longueur et la largeur du cercle
V	11 { 1 D, 3 R, 7 R+D }	Référence au diamètre (D), au rayon (R) ou au deux (D+R)

Citons quelques extraits de messages représentatifs de chaque classe :

- Catégorie I :

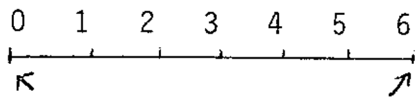
"deux ronds, un petit et un grand; le petit est à l'intérieur du grand, il y a un trait au milieu des deux ronds. Il fait 12-5"

Dans cette catégorie, lorsqu'un élève veut préciser les tailles respectives de plusieurs cercles, il les qualifie de "petit" ou "grand" comme dans le message ci-dessus.

Ceci est à rapprocher d'observations faites par H. SINCLAIR sur des enfants de 5, 6, 7 ans [9]. Si on demande d'exprimer des comparaisons entre des billes de grosseurs différentes, dans un premier stade, chaque bille est décrite en termes absolus ("celle-ci est petite", "celle-ci est moyenne",...) comme les cercles dans les messages ci-dessus. Cet emploi de "scalaires subjectifs" précède selon H. SINCLAIR l'emploi de "scalaires objectifs" (nombres, mesures), qui précède lui-même celui de "vecteurs simples" (plus que, moins que). Il est tout à fait frappant que les messages de la catégorie I où se retrouvent ces descriptions absolues soient précisément ceux qui ne comportent pas de mesure.

- Catégorie II :

"tu fais un cercle de 6cm. Tu prends la règle et tu plantes l'aiguille au zéro. Ensuite tu mets la mine au 6"



- Catégorie III :

"Un rond de 9 cm et deux ronds de 1 cm 2" (R)

"Un rond de 14 cm,5mm" "Un rond qui mesure 3,7"

Notons que de tels messages ne sont pas nécessairement ambigus : 14,5 cm compte tenu des dimensions de la feuille est sûrement une mesure de diamètre. De même, 1 cm 2 est sûrement une mesure de rayon.

Ainsi sur les 12 messages de cette catégorie qui sont décodés, 9 le sont correctement comme en témoigne le tableau suivant :

R cm	4cm	9 1cm2	6cm, 5mm	2cm	2cm	4cm 3cm	1,7cm 0,8cm 0,2cm	1,7cm 1,9cm
décodage	R	R	non décodé	R	R	D	R	R
D	2cm	3,7cm	14cm, 5mm	2cm	2,8cm 3,4cm	2,1cm		
décodage	D	R	D	D	R D	non décodé		

- Catégorie IV :

"Un rond de 9,8 cm de largeur et 9,8 de longueur. Ensuite deux ronds de 2 cm verticalement et horizontalement pour les deux".

- Catégorie V :

"Un rond de 8 cm de diamètre"

"Un rond dont le rayon est 1 cm"

"Un rond qui mesure, le diamètre mesure 9,3 et le rayon fait 4,7 et des ronds vers le haut qui montent diamètre 6 et rayon 3"

Il faut noter qu'il n'y a aucune confusion entre rayons et diamètre dans ces 11 messages. Par contre la relation D = 2R est loin d'être toujours respectée pour les 7 qui fournissent deux mesures (3 cas sur 8). Elle ne l'est même pas systématiquement lorsque la mesure du rayon est entière.

R	2	5,6	4,2	3	0,8	4,7	3	2
D	4	11,1	8,1	5,7	1,7	9,3	6	4

Comparons aux messages de la catégorie III. Dans ces derniers apparaissent deux directions privilèviées : l'horizontale et la verticale, auxquelles sont associées deux mesures du cercle que, par généralisation du vocabulaire connu, l'élève appelle longueur et largeur.

Nous ne disposons que de deux messages de ce type; toute généralisation serait donc abusive mais il semble bien que l'égalité des mesures qui se manifeste ici corresponde à l'une des convictions qui s'établissent les premières. Ceci se confirmera dans la suite de la pré-expérimentation. A plusieurs reprises, dès le début, on observera des élèves changeant légèrement la position de leur règle pour ajuster la seconde mesure à la première. Aux tests suivant l'expérimentation, on notera une extension de cette volonté d'ajustement à la relation "2R = D". Visiblement, ce n'est pas le cas chez ces élèves en début d'apprentissage.

Ajoutons, pour conclure, que l'égalité de la longueur et de la largeur nous paraît exprimer ici une certaine régularité du cercle par rapport à deux directions privilégiées. On ne peut, sans arbitraire rattacher ceci à une conception du type C_5 comme le prouve l'observation au CE_2.

<u>Note</u>: Il serait sans doute intéressant d'analyser plus précisément ces messages en utilisant la classification introduite par C. LABORDE et M. GUILLERAULT dans [4]. Après avoir défini un bloc instructionnel comme une "suite formée d'instructions correspondant à des tracés d'éléments", les auteurs distinguent les procédures inventaires ("correspondant aux messages ne comportant pas de bloc instructionnel et se présentant donc comme une suite de données qualitatives, non articulées entre elles, fournissant un inventaire plus ou moins complet des éléments de la figure") des procédures instructionnelles.

Pour les deux premiers messages cités intégralement ici, on remarque, bien que l'on ne puisse les assimiler à des procédures inventaires, la grande pauvreté dans l'expression de la dépendance entre les différents objets géométriques de la figure (les relations explicitées sont de type exclusivement topologique). Le troisième message cité constitue, lui, un essai de prise en compte de la façon dont les cercles dépendent les uns des autres '"En partant du même point ....").

On note également dans les messages, au niveau de la formulation, de nombreuses difficultés dans l'emploi des déterminants ou les renvois à d'autres éléments du discours, difficultés liées à l'égocentrisme de l'enfant au sens de Piaget. (Il est question "du même point", "du coin de la feuille", "de l'autre côté" comme si le lecteur savait automatiquement de quel point, de quel coin, de quel côté, il s'agit).

Mais nous n'irons pas plus avant dans cette analyse qui devrait faire l'objet d'un travail spécifique.

- au CE_2

Au CE_2, les difficultés déjà signalées en CM, se sont reproduites. De plus beaucoup d'élèves ne savaient pas se servir du compas et traçaient des cercles très approximatifs. La première série de messages ne comportait aucune indications de mesure. Avant l'échange, le maître demanda aux élèves de refaire leur propre dessin à partir du message puis de comparer à l'original par transparence. D'où une seconde série de messages rectifiés contenant des indications de mesures.

Les mesures faisaient référence soit au diamètre mais sans le dire explicitement, soit à une longueur et une largeur ou une hauteur et une largeur qui n'étaient pas nécessairement égales (c'était aussi le cas pour les cercles tracés). Voyant cela, le maître décida de modifier le cours prévu de la séance et au cours d'une phase collective questionna les élèves à propos du cercle.

Nous reproduisons ici l'intégralité de nos notes d'observation :

- Le maître : "je voudrais moi-aussi tracer un rond au tableau, mais je n'ai pas de compas. Comment faire ?
- Franck : "Il faut une ficelle"

- M. : "Une ficelle bon. Tiens, en voilà une. Trace un rond"

Franck enroule un morceau de la ficelle autour d'une main, place une craie à l'autre bout puis trace un rond autour de sa main. Les autres élèves suivent avec attention. Quand le rond se referme, plusieurs, ensemble, dirent : "juste". D'autres : "c'est bien comme çà" ou "çà fait un rond".

- M. : "Et alors qu'est-ce que c'est un rond ?
- E. : "C'est un trait qui est arrondi"

Le maître trace  et demande : "Ça, c'est un rond ?"

- E. : "Non"
- E. : "Non, c'est la moitié d'un rond"

Le maître complète son dessin : c'est un coeur

- E. : "c'est pas un rond"
- E. : "Ça ressemble à un coeur"
- E. : "à une pomme"
- M. " Mais alors comment peut-on faire pour savoir si quelque chose est rond ?"
- E. : "On mesure"
- M. : "On mesure quoi ?"
- E. : "On mesure plusieurs grandeurs".

Fabrice va au tableau, place la grande règle à peu près verticalement (le centre n'est pas marqué) et annonce : "ça fait 72"

- M. : "Est-ce que c'est rond parce que çà fait 72 ?"
- E. : "Non, il y a des carrés qui font 72"
- E. "Il faut mesurer de l'autre côté"
- M. : "Viens montrer"

L'enfant place la règle horizontalement et dit : "çà fait 74, ça fait pas beaucoup de différence".

Ils essaient alors de mesurer dans d'autres directions, toujours en plaçant la règle vers le milieu du cercle mais sans jamais l'expliciter.

- E. : "ça va faire 72"
- E. : "non, 74"

Stéphane trouve entre 71 et 72

- M. : "Alors, est-ce que c'est un rond ?"
- E. : "Il faudrait que de tous les côtés çà mesure pareil - On trace des traits - çà doit mesurer pareil, c'est pas un rond"
- M. : "Alors, on ne peut pas faire un rond avec de la ficelle ?"

Les avis sont partagés.

- M. : "Je vais recommencer en punaisant la ficelle au milieu"

Il trace le cercle. Au fur et à mesure, des enfants commentent "Ah! il est plus rond celui-là"

Quand le cercle est tracé, le maître enlève la punaise, le centre ne se voit plus.

Stéphane place la règle verticalement et mesure : "Entre 75 et 76"
D'autres élèves, à tour de rôle viennent mesurer dans d'autres directions et trouvent les mêmes mesures.

- E. "Ça c'est un rond, çà doit avoir la même distance"

Le Maître place la règle en biais n'importe où. Laurent vient mesurer : "Entre 72 et 73"

Les commentaires fusent: "Bien sûr, c'est plus petit, la règle si on la met bien au milieu du rond çà marche sinon çà ne marche pas"

Un élève va au tableau et dit : "il faut la mettre comme çà" (il part d'un point du cercle, essaie à la fois de passer par le milieu et d'avoir une mesure comprise entre 75 et 76. Quand c'est le cas, après ajustement, il annonce la mesure).

Le maître propose alors de tracer les traits. Les diamètres tracés se coupent. "C'est le milieu" "on va toujours passer par le petit point et on va toujours trouver pareil". Ils vérifient dans différentes directions.

Le maître propose maintenant de tracer des traits se coupant en un autre point du disque, choisit un point, et trace trois cordes dont un diamètre. Pascale, envoyée au tableau, commence par mesurer le diamètre, trouve 76. Les élèves sont très étonnés. D'autres viennent remesurer puis mesurer les autres cordes : 69 cm et 70 cm.

C'est la perplexité, jusqu'à ce qu'un enfant s'écrie : "Moi, je sais pourquoi". Un autre lui coupe la parole "Oui, on est passé par le petit point du milieu". Ceci résout le conflit.

Un des observateurs intervient : "Est-ce que l'on pourait trouver plus de 76 cm ?"

"Oh ! oui, si on fait le trait bien droit "Il montre la verticale passant par le centre et mesure : 76 cm. Ensuite, ils proposent d'essayer horizontalement - Toujours 76 cm.

"On devrait y arriver". Ils réfléchissent puis un découvre :

"Mais là, c'est sûr qu'on va trouver 76 puisqu'on passe par le petit point."

"Il faut choisir un autre point".

Ils le font puis tournent la règle autour du point de façon à avoir une corde maximale - se retrouvent avec un diamètre sans s'en rendre compte.

"Avec, ce point c'est 76"

"Encore !"

Silence, puis un élève :

"Mais oui, on est encore à côté du petit point - çà va faire 76"

Pendant 10 minutes, ils vont reprendre la même manipulation à partir de divers points du disque, arrivant toujours au même résultat. Finalement ils conclueront : "çà pourra pas, c'est par le milieu le plus grand".

<u>Ces notes font apparaître clairement un certain nombre de faits</u> :

* Conviction que le cercle a même mesure dans toutes les directions autour d'un point, ce point étant le milieu du cercle.

existence de deux directions privilégiées, verticale et horizontale, par lesquelles commencent toutes les procédures de vérification et la recherche de contre-exemples dans la dernière partie.

* Conviction que 76 est une mesure caractéristique des cercles passant par le milieu d'où l'étonnement des élèves,à plusieurs reprises, lorsqu'ils obtiennent 76 avec des cordes qui n'ont pas été tracées spécialement pour celà et résolution de la contradiction lorsqu'ils découvrent qu'elles passent ainsi par le milieu.

* Par contre, la conviction que 76 est une mesure maximale n'existe pas à priori et ne résulte que d'une longue expérimentation. On peut d'ailleurs se demander quel est réellement son statut à la fin de cette séance, car contrairement à ce qui se passera lors de l'expérimentation, elle ne semble pas résulter d'une véritable argumentation. Notons que cette partie de la discussion est lancée non par le maître mais par l'un des observateurs.

★ Quand les élèves affirment qu'il faut placer la règle bien au milieu du cercle, au début de la discussion, le centre n'étant pas encore matérialisé, on peut se demander si milieu n'a pas ici de façon prépondérante le sens "il faut que la règle partage bien le cercle en 2 parties égales", ce qui se rattacheraient à une conception des diamètres perçus globalement comme axes de symétrie du cercle. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

★ Le fait que les diamètres passent par le centre du cercle n'entraine pas de manière systématique l'ajustement à "D = 2R" des mesures déjà cité au CM_1. En effet, au cours de la deuxième séance le maître introduit les termes "rayon", "diamétre" puis l'après-midi reprend l'activité de message en en réduisant l'ouverture (cf. consigne modifiée). Les discussions collectives des deux séances ont sans doute permis aux élèves de préciser leurs idées sur les informations pertinentes, le vocabulaire introduit permet de les transmettre sans ambiguïté. La fermeture de la situation, enfin, la rend accessible aux élèves. L'évolution des messages est notable : Tous les messages comportent des indications de mesure. Toutes celles fournies sans précision sont des mesures de diamètres (plusieurs, dans ce cas, écrivent : "la taille du cercle est ...").

Mais, dans le cas où sont fournies à la fois les mesures de rayon et de diamètre, 5 données sur 10 ne vérifient pas la relation "2R = D". Bien sûr, on peut incriminer le manque de maîtrise des nombres à virgules des élèves de CE_2, mais, à notre avis, ce n'est pas la seule raison. Notons que ce point n'a pas été abordé au cours des deux séances collectives précédentes.

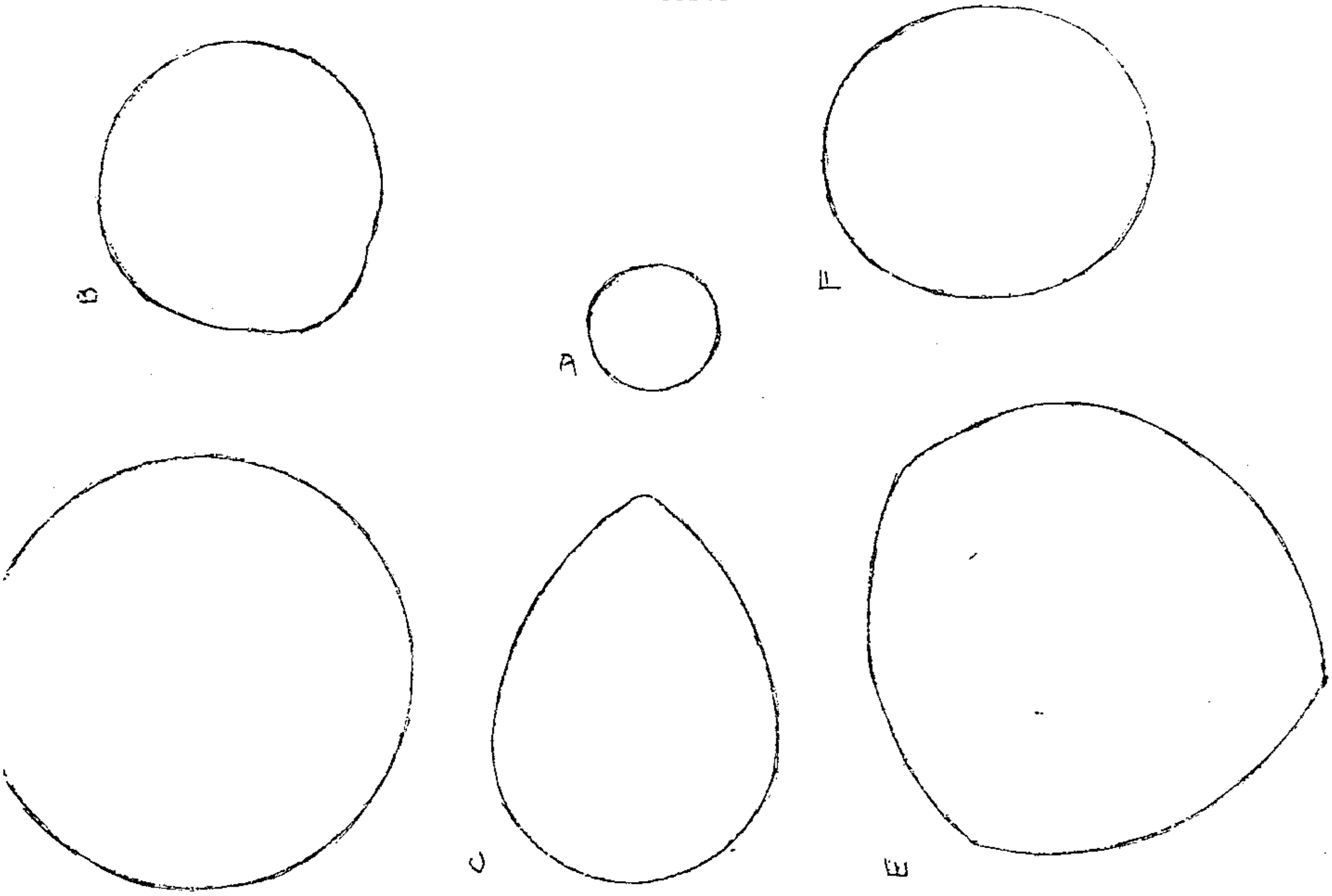
II - SITUATION N° 2 : RECONNAISSANCE DE FORMES

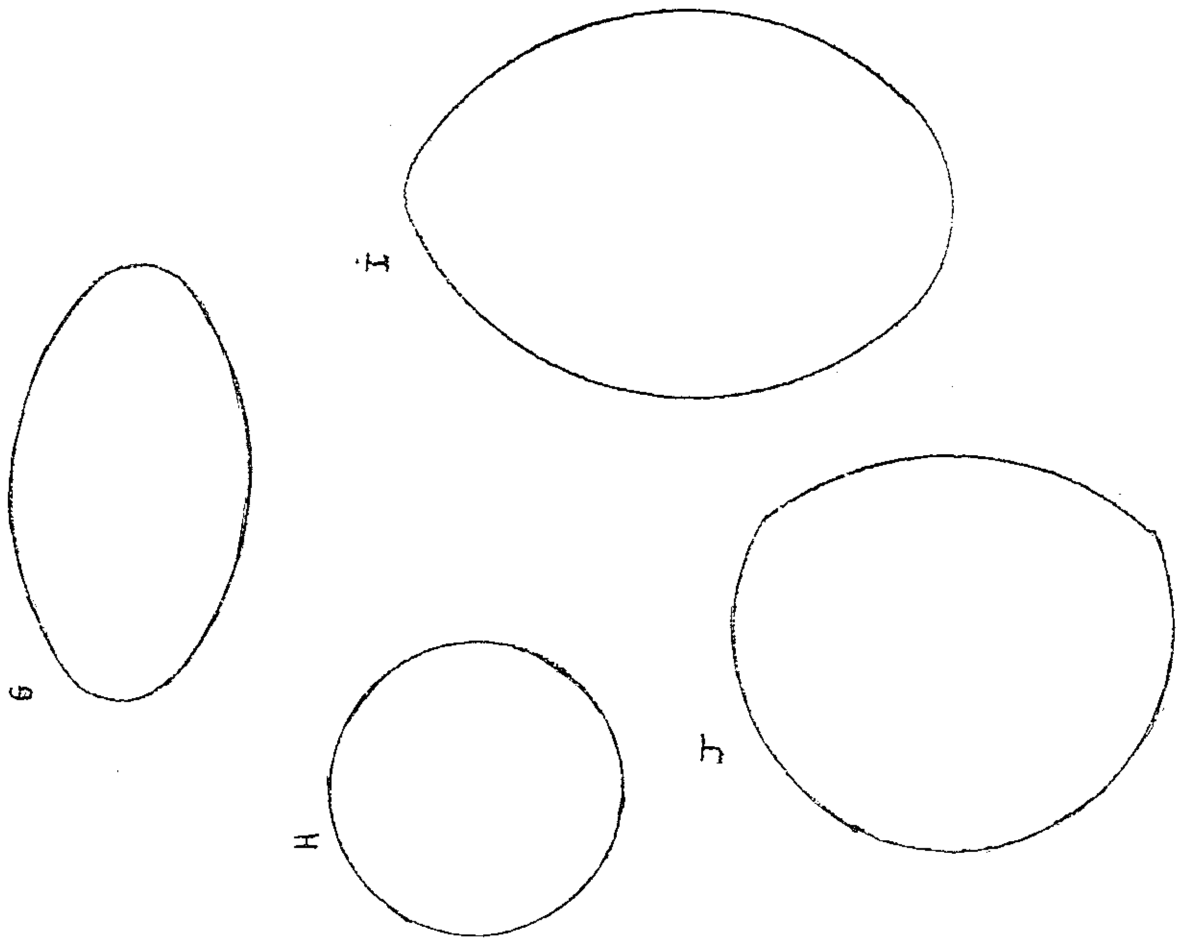
(Séance n° 2 au CE_2)

A - Organisation

Les élèves disposent d'une règle graduée et d'un compas. On leur distribue les feuilles ci-jointes (réduction 1/2).

Consigne : Regardez bien les figures tracées sur les feuilles. Si vous pensez que certaines sont des cercles dites pourquoi. Choisissez aussi une figure dont vous pensez que ce n'est pas un cercle et essayez de le prouver.


B
A
F
C
E

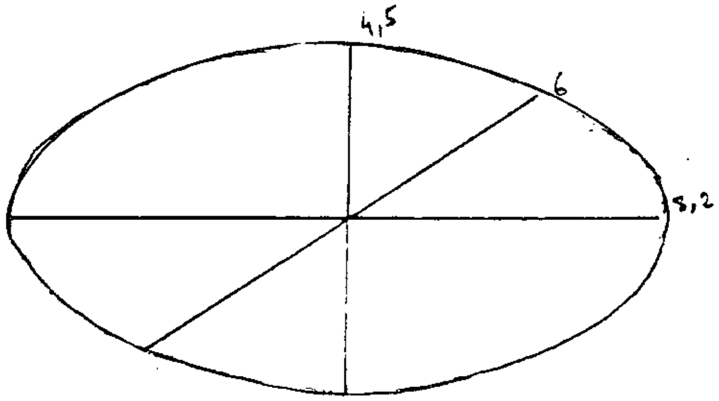

I
G
H
J

B - Observation

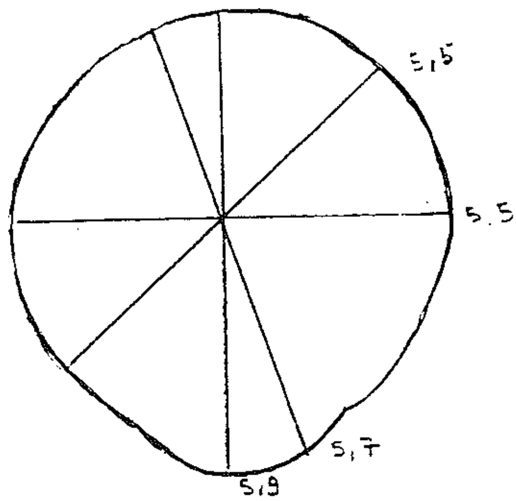
Comme l'on pouvait s'y attendre, les élèves repèrent les cercles à l'oeil. Leurs démarches de preuve reprennent les procédures utilisées à la séance précédente : ils tracent plusieurs "diamètres" à l'oeil, en commençant par un vertical et un horizontal, trouvent des mesures égales ou très proches et concluent :

"On a partout la même mesure donc c'est un cercle".

Ils opèrent de même pour prouver que certaines des figures ne sont pas des cercles. Ex.:



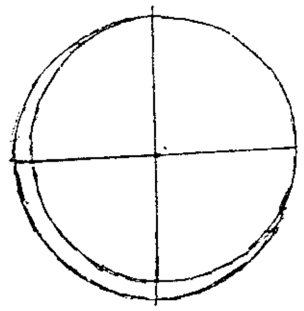
"Ce n'est pas un cercle car ce n'est pas toujours le même nombre



"chaque fois que je passe dans le trou, c'est plus long c'est un cercle auquel on a rajouté un bout".

Les deux premiers "diamètres", l'horizontal et le vertical sont toujours tracés à l'oeil, mais vue la procédure de vérification utilisée, cela n'est pas gênant : en effet, même si les deux cordes ne se croisent pas au centre du cercle, les autres cordes tracées par la suite et passant par le point de concours ont des mesures très proches du diamètre supposé. La situation serait tout autre si les élèves éprouvaient de plus le besoin de vérifier que tous les rayons tracés ont même mesure. Ceci se produira au cours de l'expérimentation et conduira, vu l'echec massif, à la recherche et la découverte d'autres méthodes de construction du centre. Bien qu'il ne soit pas fait explicitement mention de l'égalité nécessaire des rayons, c'est ce même problème que va soulever le maître lors de la discussion collective.

En effet, un cercle est tracé au tableau, un élève a déterminé le centre avec deux "diamètres" horizontaux et verticaux tracés à l'oeil. Le maître pose la pointe du compas sur le centre supposé et trace le cercle passant par le haut du "diamètre vertical". Il obtient la figure suivante



Les élèves concluent que "le centre n'est pas au milieu sinon le cercle n'aurait pas été plus bas" "Il faut le mettre un peu plus haut".

Le maître demande alors s'il n'y aurait pas un moyen de construire exactement le centre du cercle. "On ne met pas bien les traits. Est-ce qu'on ne pourrait pas se débrouiller autrement pour trouver le centre sans rien tracer" précise-t-il.

Puis, les élèves ne trouvant pas, il propose : "Est-ce que vous pouvez partager le cercle en deux ?". Ceci débloque aussitôt la situation, partage évoquant visiblement pour eux pliage.

Par la suite le maître introduit les termes de rayon et de diamètre. Ensuite, les élèves essaient d'utiliser le pliage pour prouver que certaines des figures ne sont pas des cercles. Il se produit alors un fait qui, sur l'instant nous surprend, mais se reproduira exactement de la même façon lors des tests suivant l'expérimentation : la conviction que les figures F ou G ne sont pas des cercles amène la plupart des élèves de la classe à nier la possibilité pour ces figures d'avoir un axe de symétrie comme si à l'implication "cercle ⇒ partage en deux", se superposait immédiatement la réciproque "non cercle ⇒ non partage en deux", cette réciproque allant jusqu'à conduire à la négation des convictions perceptives de symétrie que nous avions eu l'occasion de constater à plusieurs reprises chez les élèves, cette année-là et les années précédentes.

III - <u>SITUATION N° 3 : TRAJECTOIRES CIRCULAIRES</u>

Trajectoire de l'extrémité de la porte (séance n° 2 au CM_1, séance n° 3 au CE_2), trajectoire du pendule (séance n° 4 au CE_2)

A - Organisation

Dans les deux cas il s'agit de séances collectives. Les enfants sont par équipes de deux.

- Pour la porte : Les élèves sont rassemblés près de la porte de la classe qui est ouverte. Une grande feuille de papier est posée sur le sol. Le maître ferme la porte puis la rouvre. Chaque équipe doit placer un point sur la feuille de papier à un endroit où passera l'extrémité de la porte quand on la refermera. Lorsque toutes les équipes ont placé un point, on ferme la porte pour vérifier. Ceux qui ont échoué peuvent faire une seconde tentative. Après deux tentatives, on discute collectivement des diverses méthodes utilisées.

- Pour le pendule : La première partie de la consigne est la même; il s'agit de trouver la trajectoire de l'extrémité du pendule. Après la discussion collective, le maître, en fixant un crayon à l'extrémité du pendule, trace sur la feuille une partie de la trajectoire. La feuille est décrochée du tableau et les élèves doivent collectivement déterminer le centre de l'arc de cercle.

B - Observation

- Pour la porte : les comportements dans les deux classes sont semblables. Au CM_1, la première équipe mesure la largeur de la porte puis reporte la distance à partir de l'axe de la porte sur le trait en pointillé déjà tracé. Les deux équipes suivantes essaient à l'oeil de faire un arrondi à partir de cette position pour placer leur point. La trajectoire s'infléchit. La quatrième équipe remesure et place un point plus loin - les suivantes continuent à l'oeil - une équipe place un point abérrant. Une autre mesure la largeur de la porte mais la reporte comme une corde à partir de l'extrémité du trait pointillé ----

Les élèves qui ont à corriger leurs points utilisent systématiquement la procédure de mesure correcte.

Lors de la phase collective, les élèves expliquent très clairement leurs procédures. Exemples :

"Nous, on a mesuré du bout de la porte à l'autre bout et on a reporté en mettant le bout de la règle en-dessous le coin de la porte. On a tourné la règle et Sophie a choisi un point n'importe où".

"Moi, c'est quand même un petit peu au hasard mais j'ai quand même fait quelque chose, j'ai regardé la porte. Avec mon doigt, j'ai essayé d'imaginer comment elle s'ouvrait. J'ai rejoint les autres croix mais j'ai quand même mis un peu plus bas parce que je croyais que le numéro 4, elle était un peu haute".

Les élèves explicitent aussi le fait que la trajectoire tracée par le crayon est un 1/2 cercle. Ils ont un peu plus de mal à dire ce que représente pour ce cercle la largeur de la porte. Enfin, ils proposent de compléter le cercle en faisant un second tracé sur une nouvelle feuille puis en raccordant les deux courbes.

Au CE_2, aussi, la procédure correcte sera découverte par quelques équipes dès le premier tracé. Pour les corrections, elle sera reprise par toutes les équipes sauf deux.

- pour le pendule : Cette séance se place non dans le cadre des cours de mathématiques, mais pendant une activité d'éveil consacrée à l'étude du pendule..... Elle a lieu une quinzaine de jours après celle de la porte . Tout de suite les élèves affirment que la trajectoire sera "un rond". Le premier élève mesure la ficelle et reporte cette longueur à partir du point d'attache du pendule. Comme lors de la séance sur la porte, les suivants continuent à l'oeil et ne remesurent que lorsque la trajectoire s'écarte par trop de ce qu'à leurs yeux, elle devrait être. Il semble clair dans cette seconde situation que, si les élèves évaluent à l'oeil au lieu de mesurer précisément, ce n'est pas, pour la plupart d'entre eux, faute de savoir comment procéder, mais parce qu'ils ont confiance en leur évaluation perceptive.

Par la suite, les élèves ont une idée approximative de la position du centre du cercle. Pour le déterminer avec précision, ils vont mettre en oeuvre une stratégie par approximation qui va se révéler d'une convergence rapide. Ils marquent deux points A et B sur l'arc de cercle, essaient en utilisant la grande règle de trouver un point de la zone du centre équidistant de A et B. Ceci leur fournit un premier point C_1. Ils choisissent alors un autre point D sur l'arc de cercle mesurent C_1A et C_1D. Les mesures n'étant pas égales, ils corrigent la position de C_1 d'où un point C_2. et ils recommencent. Au quatrième point, ils sont à 2 mm du centre.

Nous n'insisterons pas sur cette situation qui sera étudiée très en détail dans le chapitre III. Nous voudrions simplement souligner qu'elle se rapporte à un aspect du cercle essentiel et fondamentalement différent de celui étudié jusqu'alors. Nous n'avons plus affaire à un problème statique de reconnaissance de forme mais à un problème dynamique de trajectoire circulaire, le cercle y apparaît comme la trajectoire d'un point avant d'être une courbe appréhendée globalement. De plus, la maîtrise de la situation repose sur la prise de conscience du fait que le centre du cercle n'est autre que le point fixe dans le mouvement de rotation. A cela se rattache l'erreur commise par une équipe en CM_1 et deux équipes au CE_2, erreur consistant à reconnaître un invariant : la largeur de la porte, mais à reporter cette mesure, faute d'avoir identifié le centre du cercle, à partir de n'importe quel point particulier du système.

IV - SITUATION N° 4 : POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

(séances n° 3, 4, 5, 6 au CM_1)

A - Organisation

Les élèves travaillent par équipes de deux. Les consignes successives sont les suivantes :

1) Dans la cour, à plusieurs endroits, deux fiches sont plantées dans le sol à deux mètres l'une de l'autre. Un représentant de chaque équipe vient demander au maître deux morceaux de ficelle en tenant compte des contraintes suivantes :

- La somme des longueurs des deux morceaux ne doit pas excéder 2 m 50
- Avec chaque ficelle, on doit tracer un cercle autour de l'une des deux fiches et les deux cercles ainsi tracés doivent se rencontrer.

2) Représenter, en choisissant une échelle convenable, sur une feuille de papier blanc, ce qui a été fait dans la cour. Chaque équipe dispose d'un compas et d'une règle graduée.

3) La séance n° 4 débute par une phase collective visant à faire le point sur les travaux des différentes équipes lors de la séance n° 3. Au cours de cette phase, des codages sont introduits pour les situations suivantes rencontrées : cercles ne se touchant pas, cercles tangents, cercles sécants. Chaque équipe va alors devoir vérifier pour le plus de cas possibles quelle est la position relative des deux cercles. Les rayons des deux cercles sont notés R_1 et R_2. La tâche est répartie entre les différentes équipes de la façon suivante : Chaque équipe aura deux valeurs imposées de R_1 et fera varier R_2 de 10 cm en 10 cm. entre les limites admises (0 - 250 cm pour R_1+R_2). Chaque équipe dispose d'une feuille de papier gradué au 1/2 cm., d'un compas et d'une règle graduée.

4) A la suite de cette séance, les élèves complètent les codages introduits : distinction entre cercles tangents extérieurement et intérieurement. Chaque équipe reçoit un quadrillage 25x25. Un grand quadrillage 25x25 est affiché au tableau.

Consigne : A chaque point (a,b) du quadrillage, on associe le couple de cercles de rayons respectifs a et b. Marquer à chaque noeud du quadrillage le code correspondant à la position relative des deux cercles.

Deux séances sont consacrées au coloriage du graphique, à la recherche de moyens économiques donc de régularités. Il est prévu de terminer cette activité par la recherche des équations des différentes zones du quadrillage.

B - Observation

Pour ce qui est des conceptions du cercle, cette activité nous a appris fort peu de choses. Par contre, elle s'est révélée d'une grande richesse et susceptible de prolongements algébriques féconds. C'est pourquoi il nous a semblé utile de la présenter ici de façon détaillée. Le lecteur pressé pourra sauter directement p. 43

Remarque : Dans cette situation, nous nous sommes placés directement au niveau de la représentation. Le fait que l'on travaille dans la cour en manipulant piquets et ficelles ne doit pas faire illusion. A postériori, nous devons avouer que nous nous sommes vainement interrogées sur les raisons de cet habillage.

Les conditions didactiques auraient été tout à fait différentes si l'on avait posé le problème sous la forme suivante : "deux chèvres sont attachées dans un pré chacune à un piquet. On veut que les deux chèvres puissent se rencontrer et connaître la partie du pré où elles pourront brouter toutes les deux".

Dans le premier cas, les cercles sont donnés, la recherche consiste à trouver des moyens de prévoir la position relative des deux cercles en fonction des mesures de leurs rayons.

Dans l'autre, les cercles ne sont pas donnés. Leur intervention ne peut résulter que d'une modélisation de la situation. On peut d'ailleurs, à priori, imaginer divers comportements possibles pour les enfants.

a) Les enfants choisissent les longueurs des ficelles un peu au hasard

Ils les prennent suffisamment longues pour que les deux chèvres aient des chances de se rencontrer mais le "suffisamment" ne correspond à aucun critère précis. Ensuite, ils attachent les ficelles aux piquets et cherchent si les deux extrémités peuvent se toucher. Puis, toujours expérimentalement, ils cherchent à déterminer la zone où les animaux se rencontrent. Ils peuvent faire des remarques à propos de cette zone et les utiliser pour en préciser le contour, par exemple, noter que les points du bord de la zone sont obtenus avec l'une des grilles tendues, mais ne pas faire intervenir ou alors très tardivement, à postériori presque une modélisation à l'aide de cercles. (Ceci serait à rapprocher des comportements au dernier item du post-test).

b) comme dans a), les enfants choisissent les longueurs des ficelles un peu au hasard, mais ensuite, ils cherchent à déterminer la zone couverte par chaque animal. Ils modélisent cette zone par un disque et se ramènent à la recherche de l'intersection de deux disques.

c) Les enfants cherchent à déterminer des critères leur permettant de choisir des longueurs qui "marchent" pour les deux ficelles. Un tel critère peut trouver son origine dans un raisonnement du type suivant par exemple : "Si les deux chèvres se rencontrent, elles se rencontrent sur la ligne entre les deux piquets et alors la somme des longueurs des deux ficelles sera supérieure à la distance des piquets". Puis adopter pour la suite la démarche b)

Il va sans dire que cette deuxième présentation nous paraît beaucoup plus riche que la première.

Enfin, pour obtenir dans la phase 4 un régionement du plan plus équilibré, il serait souhaitable de choisir par exemple $\frac{3d}{2}$ pour le sup (R_1+R_2), d étant la distance des deux centres.

Phases 1 et 2: Dans la cour, 2 groupes tracent deux cercles concentriques. 4 groupes ont des cercles qui ne se touchent pas, les mesures de leurs ficelles sont :

(80, 90) (100, 100) (100, 60) (100, 80)

Le second refait les noeuds en précisant : "Ils ne se touchent pas mais ils devraient se toucher".

En classe, les élèves choisissent une échelle commune pour leurs représentations. Après plusieurs essais, ils adoptent 5 mm. pour 10 cm.

Phase 3 : Lors de la phase collective de rappel, certaines affirmations sont proférées, les enfants cherchant à prévoir les résultats des différentes équipes.

ex. : "80 et 90, çà se touchera sûrement pas"
"Moi, je sais pourquoi, c'est parce que 80 et 90 ensemble çà fait moins de 2 mètres".

"90 et 90 çà se touche pas parce que c'est les 2 mêmes nombres"
"c'est pas vrai, çà, moi j'avais 120 et 120, c'était pareil et çà se croisait".

Le maître ne reprend pas les affirmations des enfants. Pour distinguer le cas où les cercles se croisent du cas où ils se touchent, les élèves proposent d'introduire un codage ($\not\!\!\!)($,)( ).

Dans l'activité qui suit, beaucoup sont troublés par le fait d'avoir à traiter deux valeurs de R_1 et ont du mal à comprendre la consigne. Il aurait mieux valu ne distribuer à chaque équipe qu'une valeur de R_1 puis donner le travail restant aux premiers à avoir terminé. Ceci d'autant plus que les enfants effectuant les vérifications qui leur paraissent nécessaires, le temps mis pour effectuer la tâche va varier d'une équipe à l'autre :
Certains se refèrent uniquement au modèle qu'ils se sont faits de la situation et ont terminé en 5 mm. D'autres ne vérifient que dans un nombre limité de cas. D'autres enfin (beaucoup moins nombreux)tracent tous les cercles.

Au bout d'un moment, chaque équipe va présenter son travail.

- Le première s'est basée sur le modèle suivant : "si la somme, c'est plus de 200, çà se touche, si c'est 200, çà se touche à ras, si c'est moins de 200, çà se touche pas". Elle n'a fait aucune vérification. La présentation ne suscite aucun commentaire.

- La seconde équipe a, elle, procédé à quelques réflexions et découvert que les cercles de rayons respectifs 10 et 240 ne se coupent pas. Cette affirmation, suscite un conflit dans la classe. Le maître propose de trancher entre les deux classes en faisant un tracé au tableau: une nouvelle configuration apparaît; elle sera codée (0) . Pour $R_2 = 210$ (R_1 étant toujours égal à 10), les deux cercles sont tangents. Les élèves remarquent que : "ils se touchent mais pas pareil que les autres", "il faut un nouveau signe". Ils adoptent (0) .
La séance se termine sur la présentation des travaux des différentes équipes.

phase (4) :

Au cours du rappel collectif, plusieurs élèves proposent de modifier et compléter le codage pour des raisons de symétrie.

Ils disposent de :

) (: "les deux cercles se touchent pas à l'extérieur"
)(: "les deux cercles se touchent à ras à l'extérieur"
: "les deux cercles se coupent à l'extérieur"
◎ : "les deux cercles se touchent pas à l'intérieur"
: "les deux cercles se coupent à ras à l'intérieur"

Ils transforment ◎ en et en , puis décident de rajouter:
: "les deux cercles se coupent à l'intérieur".

Le rappel achevé, le maître donne la nouvelle consigne (codage du quadrillage). Il propose de modifier le code pour faciliter la lecture. Les choix effectués par les élèves montrent ici encore leur volonté d'associer deux à deux les cas "extérieur" et "intérieur", à la fois par la forme et la couleur des symboles :

)(= o noir,)(= ∇ vert, = x jaune, = 0 noir, = Δ vert,
= + jaune)

Les premières lignes sont remplies collectivement.

Le codage des noeuds du quadrillage se poursuivra pendant deux séances, les phases de travail en équipes alternant avec les phases collectives. A la fin de la première, les élèves expriment leurs convictions de la façon suivante :

"Pour que çà se coupe, il faut plus de 200", "si çà fait moins de 200, çà se coupent pas", "quand çà se touche c'est à 200, après c'est pas sûr".

Le maître demandant d'exprimer ces remarques sous une forme plus mathématique, on arrive à la formulation suivante :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 > 200 \rightarrow \times \\ R_1 + R_2 = 200 \rightarrow \nabla \\ R_1 + R_2 < 200 \rightarrow 0 \end{cases}$$

(les cas Δ et 0 ont été de nouveau évacués)

Au cours de la deuxième séance, le maître interrompt le travail des élèves pour leur demander de prévoir le code d'un point éloigné de ceux qu'ils ont déjà codés. On s'aperçoit alors que beaucoup d'élèves pensent que le graphique va présenter un axe de symétrie mais qu'ils l'imaginent souvent vertical, passant par le point 100, 100. (Ici encore apparaît donc le rôle privilégié de la direction verticale).

Une discussion s'engage au sujet de l'axe de symétrie - Puis le maître demande de prévoir la place des triangles ∇. Christophe déclare aussitôt : "ils sont en oblique". "Sur une droite" précise Pascal. "Elle va de 200 à 200" ajoute Didier.

Quelques élèves pensent que les triangles Δ sont eux aussi alignés. Pour l'instant, ils n'en ont que deux. Aucun ne songe à essayer des points alignés avec ceux-là pour tester cette hypothèse.

Ensuite le coloriage se fera de plus en plus vite, les enfants utilisant des régularités de plus en plus apparentes. Mais si certains sont capables de prédire de façon argumentée le code de tel ou tel point, pour d'autres il semble que la prise de conscience des régularités soit avant tout visuelle : le graphique devient un dessin qui vit son existence propre en dehors de toute référence à la situation qui lui a donné naissance.

Le maître avait prévu d'exploiter plus largement le graphique, en particulier :

- dépasser le cadre de la situation initiale en envisageant des points pour lesquels $R_1 + R_2 > 250$.
- dresser les listes des coordonnées des points correspondant aux situations de tangences. A partir de ceci, écrire les équations des différentes droites et en déduire une reformulation des différentes zones du quart de plan.

En fait, ce travail sera juste amorcé, le codage ayant pris plus de temps qu'il ne l'avait prévu.

V - SITUATION N° 5 : PARTAGE DE CERCLES - HOMOTHETIES

(Séances n° 7, 8, 9 au CM_1)

A - Organisation

Les élèves travaillent par équipes de deux. Il s'agit de fabriquer des loteries sur du papier cartonné grand format. La maîtresse affiche une loterie qu'elle a réalisée (disque décomposé en 6 secteurs) puis montre aux élèves diverses loteries.

tracées sur des feuilles de papier blanc de format normal. Les élèves examinent ces loteries au cours d'une phase collective. Ensuite la maîtresse donne les consignes du travail à effectuer.

1) Réaliser sur du papier blanc format normal le plus grand nombre de loteries différentes possibles (différentes bien sûr quant au nombre des morceaux), en trouvant des moyens pour faire des parts égales comme sur les loteries affichées.

2) Choisir une des loteries tracées et l'agrandir sur une feuille de papier cartonné grand format.

Les élèves ont à leur disposition règle graduée, compas et une grande assiette en carton qu'il est interdit de plier.

A la fin de la phase 1 un bilan sera effectué :

- Quels partages a-t-on réussi à effectuer ?
- Avec quelles méthodes ?
- Quels partages non obtenus semblent faciles à réaliser ? Comment ?
- Quels partages paraissent difficiles à effectuer ? Pourquoi ?

B) Observation

La première discussion (à propos de la loterie à 6 parts réalisée par la maîtresse) va témoigner encore une fois de la fragilité des convictions des élèves.

La maîtresse demande aux élèves, comment, à leur avis, elle s'y est pris pour réaliser la loterie. Ils expliquent qu'elle a dû prendre un compas, tracer un cercle puis partager en 6 parts en partant du centre.

E : "6 parts de gâteau"

E : "6 parties égales"

"en faisant des rayons égaux"

Cette dernière phrase surprend la maîtresse qui demande à Jean-Sébastien de s'expliquer.

- "Les rayons auront tous la même longueur s'ils sont réguliers sinon il y en aura des plus courts" dit-il en montrant des rayons.

La maîtresse trace un rayon supplémentaire sur la loterie.

- "Que pensez-vous de sa longueur ?"

A sa surprise, plusieurs élèves estiment que vu qu'il est en biais, il sera peut-être moins long que le rayon horizontal. La maîtresse, sort les loteries réalisées sur papier blanc. Toutes correspondent à des cercles de même rayon. "Que pensez-vous des rayons de ces loteries ?" - En général, comme elles sont bien régulières, les élèves pensent que dans chacune les rayons ont même mesure. Par contre, ceux de la loterie à 5 parts leur paraissent plus courts que les autres. De plus, ils ne sont pas sûrs qu'ils soient égaux entre eux. Sandrine mesure ceux que les autres lui demandent de mesurer : elle trouve toujours pareil. Elle effectue bien une dizaine de mesures.

Alors se produit dans la classe un retournement radical - Jean-Sébastien, le premier affirme : "Bien sûr qu'ils ont la même longueur puisque c'est des rayons". Anne-Laure rajoute "si c'est un rond et si c'est bien au milieu, c'est sûr, ils ont tous la même longueur".

Tous considèrent maintenant ceci comme une évidence, semble-t-il. La maîtresse insiste : "Mais, tout à l'heure, vous disiez ...."
Jean-Sébastien : "Mais non, on s'était trompé, je sais pas .... Ils ont tous la même longueur".

La discussion s'arrête là, les élèves refusant de s'expliquer davantage.

Comment pouvons-nous interpréter cet épisode, qui par bien des aspects, rappelle la phase collective de la première séance au CE_2 ?

Pour les élèves, il semble clair qu'il faille attribuer la régularité du partage des loteries à la conservation d'une certaine grandeur. Mais laquelle ? - La conservation de l'angle ? Aucun n'y fait allusion. Comme on le verra dans la suite la prise en compte du rôle déterminant des angles, de leur égalité, dans cette situation de partage ne se fera que très difficilement.

. La conservation de la corde ? Elle se manifestera comme moyen privilégié de construction et de vérification dès que les élèves auront à construire effectivement des loteries. Mais ici la situation est autre : il s'agit d'une activité de pure observation et les cordes ne sont pas matérialisées. Elles n'interviendront pas, preuve, s'il en était besoin, comme le souligne Piaget [7], que "l'intuition de l'espace n'est pas une lecture des propriétés des objets, mais bien, dès le début, une action exercée sur eux; et c'est parce que cette action enrichit la réalité physique, au lieu d'en extraire sans plus des structures toutes fermées, qu'elle parvient à la dépasser peu à peu, jusqu'à constituer des schémas opératoires susceptibles d'être formalisés et de fonctionner déductivement par eux-mêmes".

. Il reste alors la possibilité de se raccrocher à l'autre élément caractéristique des parts de loterie : les bords des morceaux et à attribuer l'égalité des parts à l'invariance des longueurs des bords. Ceci est en conflit avec la conviction affirmée à plusieurs reprises de l'égalité des rayons du cercle. Mais pour reprendre une terminologie introduite par D. Tall et S.Vinner [13] il s'agit là d'un conflit "potentiel" qui ne sera à aucun moment réellement actualisé. Les élèves refuseront d'ailleurs avec énergie toute discussion à ce propos. L'égalité des rayons du cercle est donc provisoirement gommée et il y a régression à des conduites analogues à celles déjà observées au CE_2, où intervient le statut privilégié de la direction horizontale : Un rayon en biais est jugé moins long qu'un rayon horizontal et ce n'est que lorsque l'hypothèse aura été démentie par de nombreuses mesures qu'il y aura réemergence de la conviction de l'égalité des rayons.

Dans "la représentation de l'espace chez l'enfant", Piaget et Inhelder au chapitre XII étudient le problème de la conservation des angles en le liant à une approche géométrique des similitudes. Des triangles sont découpés dans du carton (5 triangles isocèles semblables, 3 triangles isocèles semblables, 3 triangles isocèles de même base donc non semblables, 3 triangles isocèles de hauteur identique donc non semblables, 4 triangles quelconque non semblables, 8 triangles équilatéraux donc semblables). On demande à l'enfant de "mettre ensemble ceux qui ont la même forme".

Au niveau IIIA (stade opératoire concret 1er niveau) on note un effort des sujets pour fonder la similitude des triangles sur l'égalité des angles avec superposition spontanée des triangles. Il semble donc que l'égalité des angles soit prise en compte par des sujets d'un âge voisin de celui de nos élèves. Ceci n'est pas en contradiction avec ce que nous observons nous-mêmes car les caractéristiques des deux tâches sont fondamentalement différentes. Ici, contrairement à ce qui se passe chez Piaget, de part la forme de la consigne, la tâche est rejetée dans une perspective avant tout perceptive. Il est vrai que les élèves ont le droit de toucher la loterie, la manipuler, ils effectueront d'ailleurs de nombreuses mesures sur les diverses loteries de la maîtresse mais uniquement dans un second temps pour tester des hypothèses formulées à partir de données visuelles. D'autre part, s'il est théoriquement possible de composer les angles par superposition pliage du cercle suivant un diamètre de manière à faire coïncider deux bords et observation par transparence, ce n'est possible que pour les loteries sur papier blanc, d'autre part c'est une tâche d'une complexité sans commune mesure avec celle qui consiste à prendre deux triangles en carton et à les superposer. Il est indubitable que le moyen le plus simple de vérifier l'égalité des angles consiste ici à recourir à l'intermédiaire corde, ce qui sera fait comme nous l'avons dit dès que les élèves seront confrontés à des tâches de construction.

La construction des loteries :

Deux faits caractérisent cette phase de construction :

1) La rapide maîtrise des partages par dichotomie et l'utilisation des cordes :

Au bout de 10 mn, tous les élèves ont réalisé des loteries en 4 ou 8 morceaux. Le partage en 4 a souvent été obtenu par pliage. Dans quelques cas, les élèves ont tracé à l'oeil un diamètre horizontal et un vertical puis ont vérifié la construction en mesurant les 4 rayons (parfois aussi les 4 cordes). Pour le partage en 8, l'utilisation des cordes rentre en très nette concurrence avec le pliage puisque la moitié des élèves prend le milieu de la corde correspondant au partage en 4 et trace le rayon passant par ce point. Une équipe a placé sous le cercle une feuille de papier quadrillé et partage en suivant la diagonale du quadrillage. Pour les itérations ultérieures, l'utilisation de la corde sera encore plus privilégiée, les loteries tracées par pliages itérés ayant du mal à rester planes. C'est cette méthode qui sera formulée lors du bilan collectif comme permettant de partager en 16, 32, 64, 128, 256, 512 .....

2) Il y a conviction chez les élèves de l'existence de relations algébriques simples entre les mesures du diamètre du cercle, des cordes, le nombre de parts, la recherche s'effectuant au début à partir de telles hypothèses formulées à priori et non par tâtonnement (contrairement à ce qui se passe dans Piaget-Inhelder - Szeminska - [6] , chapitre XII) :

Stéphane : "Je vais faire un cercle de 8 cm de rayon, çà fait 16 cm de diamètre. Je divise par 8, çà me fait 2 cm et je porte 2 cm tout autour du cercle avec la règle. Çà fera une loterie à 8 parts".

Voyant que cela ne marche pas, influencé par son voisin, il partage en 4 puis en 8 suivant les méthodes déjà citées. Ensuite il reviendra à son projet initial reportant des cordes de 4 cm puis de 8 cm. Çà ne tombe pas tout à fait juste mais, dès ce moment là, il est convaincu qu'en reportant 8 cm il obtient une loterie à 6 parts. Il recommence la construction.

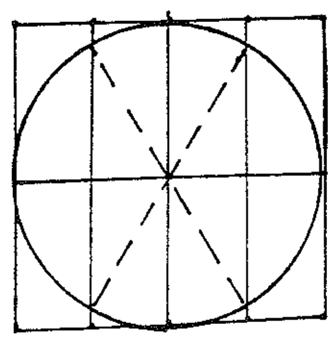
Sabine : "Je veux faire 10 parts, je vais prendre 5 cm de rayon"

Anne-Laure après avoir partagé en 4, mesure les quatre cordes. Elle obtient: 10,9, 11, 10,9, 11, additionne ces nombres, d'où : 43,8, divise par 6 et reporte une corde de la mesure correspondante le long du cercle.

La deuxième séance commence par la recherche d'un partage en 6. Stéphane essaie de reporter le rayon, mais doit commencer plusieurs fois avant d'obtenir un résultat acceptable.

Trois équipes essaient par pliage (les tentatives par pliage se produiront tout au long de cette activité).

On trouve, nous ne pouvons dire comment la construction suivante :



Trois équipes travaillent par approximations successives à partir d'un pliage en 2.

Les autres pataugent. La maîtresse demande aux élèves qui ont terminé de mesurer les cordes. Tous, sauf Stéphane vérifient sur des cercles de rayons différents que çà marche encore. La nouvelle fait alors très vite tâche d'huile et toutes les équipes se mettent à reporter le rayon, puis réalisent des loteries à 3, 12, 24 parts.

Beaucoup pensent que, bien qu'ils ne l'aient pas encore réalisé, un partage en 10 doit-être possible. Certains encore une fois, essaient par pliage. D'autres en reportant une fraction du diamètre, par exemple 1/3, souvent en partant d'un cercle de 5 cm de rayon. La plupart, sans doute conforté dans leurs convictions par le cas 6, pensent qu'il existe une construction exacte et se refusent, de ce fait, à procéder par approximation. C'est l'échec. La maîtresse distribue alors une loterie à 10 parts et leur propose de l'utiliser pour tracer la leur.

Mais ceci ne va pas se révéler évident et même lorsqu'elle suggérera de découper le disque pour pouvoir mieux utiliser la loterie achevée, ne sachant où elle veut en venir, les élèves ne la suivront pas. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, aucun élève n'aura recours spontanément à la superposition : Trois équipes disposent de rapporteurs; 2 mesurent l'angle de la loterie achevée et reportent cette mesure (36°) pour fabriquer la leur - 1, plus individuellement,mesure l'angle plat puis le divise par 5 pour obtenir 36.

Quelques équipes tracent des cercles de rayon double de celui de la loterie donnée et reportent des cordes doubles. Mais ils échouent lorsque les rayons ne sont pas dans des rapports simples.

La moitié des élèves, après avoir vainement tenté d'utiliser la loterie donnée se résoud à des tentatives d'approximation. Au cours de la discussion collective qui suit, ceux qui ont utilisé des rapporteurs viennent expliquer leur méthode, mais ne savent dire comment l'on pourrait procéder sans rapporteur. La maîtresse fait alors préciser ce qui, sur la loterie, mesure 36°. Jean-Sébastien vient montrer l'arc. Patrice colore le bout du secteur:

Ceci ne suffit pas encore. La maîtresse insiste :
"Puisque vous n'avez pas tous des rapporteurs, ne pouvez-vous pas utiliser la loterie donnée comme un rapporteur ?"

C'est le déclic. A partir de là, tout ira très vite.

Ici donc s'est manifesté très nettement, la difficulté à prendre en compte de façon opératoire la conservation de l'angle, même perçue, comme nous l'avions annoncé.

VI - SITUATION N° 6 : CONSTRUCTION DE FIGURES GEOMETRIQUES

(Séances n° 10, 11 au CM_1)

A - Organisation

Les élèves travaillent individuellement. Il est prévu de faire fabriquer,au cours de la première séance, un jeu style Tangram mais formé uniquement de triangles équilatéraux.

Chaque élève dispose d'une feuille cartonnée de couleur, de feuilles blanches, d'une règle graduée et d'un compas. Les consignes sont les suivantes:

1) Fabriquer 24 triangles équilatéraux de 4 cm de côté dans le carton de couleur. (le terme "équilatéral inconnu des enfants est remplacé par une périphrase).

2) Réaliser un motif avec ces 24 triangles (ou moins). Faire un patron à l'échelle 1/2 de ce motif sur papier blanc et décalquer sur une autre feuille le contour extérieur de ce patron. Ensuite les élèves, deux par deux échangeront les contours tracés et chercheront à réaliser avec leurs propres triangles une figure correspondant au contour reçu.

B - Observation

Trois méthodes seront principalement utilisées pour la phase 1 :

1 Tracer un segment AB de 4 cm. Tracer ensuite deux arcs de cercle, l'un de centre A de rayon 4 cm, l'autre de centre B de rayon 4 cm.

2 Tracer un segment AB de 4 cm puis, à l'oeil, la perpendiculaire à AB en son milieu. Enfin, chercher en tâtonnant un point C de AB à 4 cm de A.

3 Tracer un cercle de rayon 4 cm et faire une loterie à 6 parts.

Il faut noter que certains élèves ne parviennent pas à tracer un triangle équilatéral (l'un deux trace un demi-cercle de diamètre AB, prend C au sommet du demi-cercle et est tout étonné de ne pas obtenir un triangle équilatéral).

Bien que cette séance fasse suite à celles sur les loteries, la méthode 2 est tout aussi employée que la méthode 3 . D'ailleurs il apparaît au cours de la discussion collective que six élèves sont incapables de prévoir quel doit être le rayon du cercle. Ils proposent : 16, 10, 12, 6, 12, 2.

Quand à la méthode 1 , beaucoup moins employée, elle suscite des doutes chez certains. Patrice trace ainsi au tableau un triangle de 40 cm de côté. Géraldine intervient : "Comment tu peux être sûr que tous les côtés font 40 cm ?" Preuve que l'utilisation du compas conserve encore un côté mystérieux pour elle.

Nous n'évoquerons pas ici la phase 2 sans rapport avec notre recherche.

VII - CONCLUSION

Un certain nombre de faits se dégagent de cette pré-expérience.

En premier lieu, le cercle apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale : il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure.

Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales (respectivement verticales), mais plutôt à bien partager le cercle en deux parties égales.

Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur.

De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme les axes de symétrie horizontaux et verticaux du cercle plutôt que comme des diamètres ensemblistes.

Ceci pourrait constituer un ensemble de convictions de base (on les retrouve chez tous les élèves du CE_2 ou du CM_1 dès les premières séances et, ultérieurement, elles ne seront jamais remises en question par eux).

Comment, à partir de ce noyau de base, se construisent les connaissances relatives au cercle ? Bien sûr, les données de la pré-expérimentation ne nous permettent que de formuler des hypothèses à ce sujet. Néanmoins, il nous semble que :

1) La constance de la dimension dans les deux directions privilégiées se prolonge assez rapidement aux autres cordes passant par le milieu du cercle. Mais cette conviction est déjà moins stable que les précédentes puisqu'elle peut être, on le note à plusieurs reprises dans la pré-expérimentation, perturbée et momentanément occultée au profit de convictions perceptives : ainsi un rayon ou un diamètre obliques seront estimés à priori moins longs que leurs équivalents horizontaux.

2) La propriété qu'ont les diamètres horizontaux et verticaux d'être des axes de symétrie se prolonge elle aussi assez rapidement à tout un sous-ensemble de diamètres : ceux qui s'obtiennent à partir de ces deux-là par itération du pliage en deux. Mais, et ce sera très net, on constatera lors des tests suivant l'expérimentation qu'un certain nombre d'enfants n'ont pas encore acquis la conviction qu'un diamètre quelconque est nécessairement un axe de symétrie.

L'ensemble des axes de symétrie sera, pour ces élèves, étroitement dépendant de la manipulation qui aura permis de les obtenir et l'ensemble associé à l'itération du pliage correspondra à un équilibre.

3) Les rapports entre rayons et diamètres ne sont pas aussi simples pour l'enfant qu'ils le sont pour nous mathématiciens, même s'il est reconnu que les diamètres passent par le centre du cercle. Nous serions tentées d'expliquer la nécessité qu'éprouvent de nombreux élèves dans leurs messages décrivant des cercles, au CE_2 comme au CM_1, de préciser à la fois la mesure du rayon et celle du diamètre, le fait que souvent la mesure du diamètre fournie n'est pas le double de celle du rayon, par le fait que ces deux notions jouent, vis à vis du cercle, pour l'enfant, des rôles différents. Le diamètre donne la taille globale du cercle. S'il est vrai qu'il passe par le milieu, sa qualité première est de partager le cercle en deux parties égales. Le milieu n'intervient là qu'à postériori, lorsqu'il est matérialisé comme intersection des deux diamètres privilégiés.

Le rayon, lui, mesure la distance du centre du cercle au bord du cercle et peut donc avoir, dans un premier temps, un statut en quelque sorte indépendant de celui du diamètre.

Au test suivant l'expérimentation, la propriété "D = 2R" correspondra à une conviction très solide chez les élèves. Y-a-t-il contradiction ? A notre avis, non, et c'est la recherche du poids de ce théorème dans l'institutionnalisation du savoir qui permettra de conclure.

4) Enfin, il nous semble également, à l'issue de la pré-expérimentation, que le fait que le diamètre soit une corde maximale ne corresponde pas à une des convictions les plus précoces chez l'enfant.

Au cours de cette pré-expérimentation, le cercle n'est jamais apparu comme une figure de courbure algébrique constante. Est-ce simplement parce que les situations proposées ne favorisaient pas une telle modélisation ou y-a-t-il à cela des raisons plus profondes ? Pour tenter de répondre à cette question, on peut envisager de privilégier la courbure dans des situations de type statique ou dynamique.

Précisons ceci :

- Trier des morceaux de couronnes circulaires de même épaisseur est une activité qui, même si elle peut être résolue autrement que par l'utilisation de la constance de la courbure, privilégie cette conception. C'est d'autre part une situation de type statique.

- Etudier la trajectoire d'une petite voiture électrique dont la direction a été bloquée, est une activité de type dynamique privilégiant, nous semble-t-il, elle-aussi, cette conception. Elle se distingue fondamentalement des situations dynamiques de la pré-expérimentation (trajectoire de l'extrémité de la porte ou du pendule); en effet, le centre de la trajectoire n'y est pas doté d'une importance particulière comme c'était le cas pour la porte ou le pendule (point d'attache du pendule, coin de la porte) il n'est même pas matérialisé.

C'est pour tenter de confirmer ou démentir ces hypothèses, apporter des réponses à toutes les questions posées ci-dessus qu'a été élaborée l'expérimentation.

III - LA SEQUENCE DIDACTIQUE

Comme cela vient d'être rappelé, la propriété "La courbure du cercle est constante" n'avait pas été très bien exploitée dans la préexpérimentation. Nous avons décidé d'étudier ce point dans la séquence didactique, et nous avons construit trois situations dans lesquelles cette propriété peut être utilisée par les enfants, plus ou moins concurremment avec d'autres propriétés.
Ces trois situations sont de type statique, en effet, elles sont matériellement plus faciles à construire que les situations privilégiant la même propriété mais de type dynamique.

Ensuite pour ne pas négliger tout aspect dynamique, une situation de trajectoire circulaire est présentée aux enfants, mais cette situation ne préviligie pas l'aspect "courbure constante" du cercle.

Enfin, les enfants ont été placés dans une situation de construction géométrique, puis dans une situation de formulation.

I - PROPRIETE "COURBURE CONSTANTE"

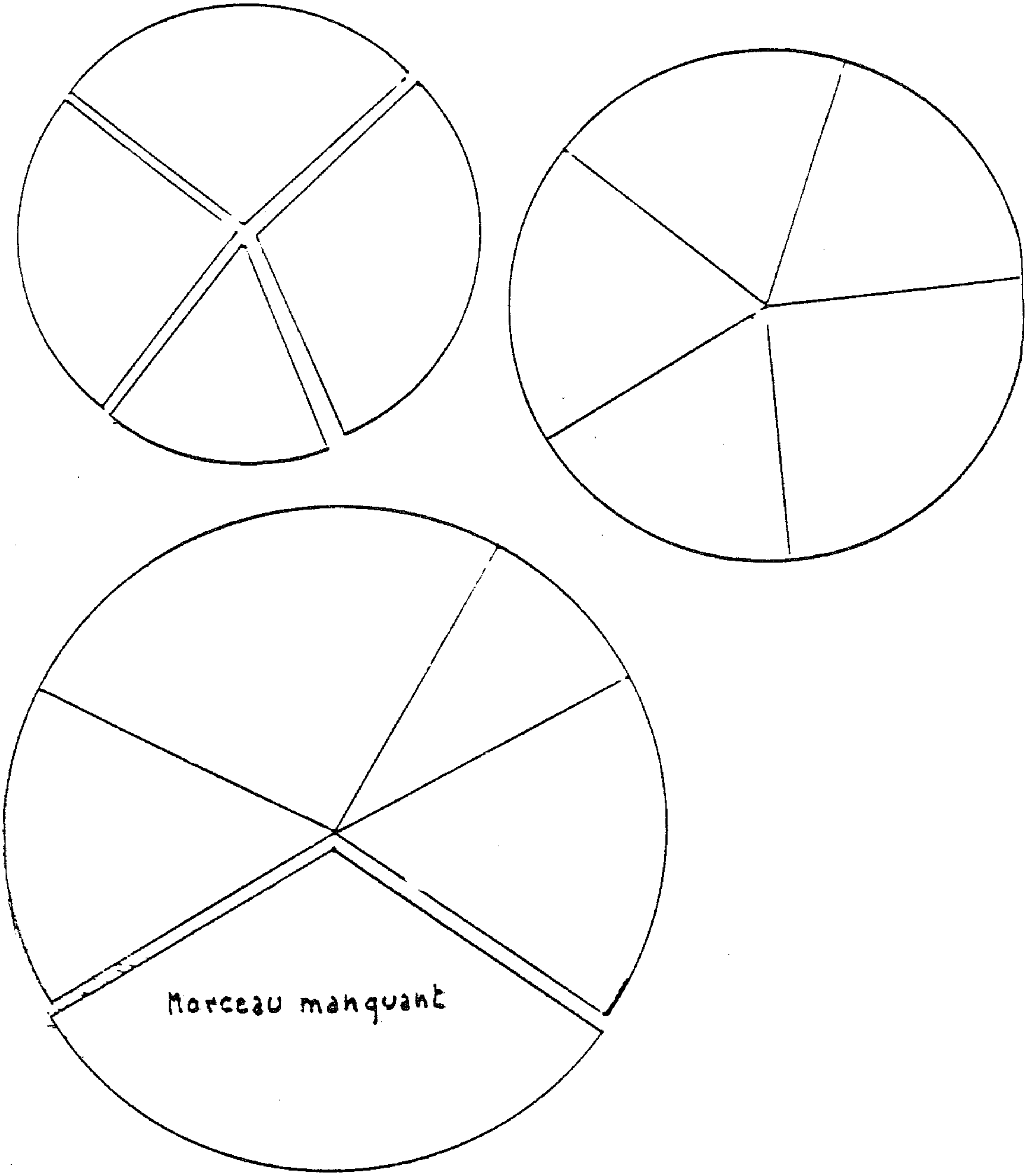
A - Présentation des situations

Première situation : les disques

Nous avons distribué, à chaque enfant, une enveloppe dans laquelle il y avait 3 ou 4 disque découpés selon les rayons. Ces disques étaient tous de rayons différents et l'un d'eux était incomplet.

Le secteur manquant était d'ouverture plus grande que celle de tous les secteurs existants et n'était pas la réunion de plusieurs d'entre eux.
(voir dessin page suivante)

LES DISQUES (échelle 1)



<u>1ère consigne</u> : Nous avons découpé des disques différents, les morceaux se sont mélangés, pouvez-vous reconstituer les disques?

<u>2ème consigne</u> : Nous avons égaré un morceau d'un disque. Voici du carton, pouvez-vous fabriquer le morceau manquant ?

Remarque 1

Ceci était les consignes prévues. En fait, il était entendu, avec les maîtres, qu'elles devaient présenter le matériel et ensuite seulement, présenter la consigne, en utilisant les mots spontanément introduits par les enfants.

Ainsi, à Montrouge, les enfants ont tout de suite parlé de parts de galettes; la maîtresse a donc remplacé le mot "disque" par le mot "galette" et le mot "morceau" par le mot "part".

Remarque 2

- Le secteur manquant était choisi de façon à ce qu'il ne soit pas simple de "boucher le trou" : on ne peut pas le boucher avec 2 ou 3 morceaux déjà existants, et il est plus grand que tous les secteurs existants.

- Le carton dans lequel le secteur manquant devra être taillé est petit. Il n'est pas possible d'y décalquer le contour entier du disque. Cela pour ne pas privilégier l'invariance du disque par rotation autour de son centre.

Analyse Nous avions introduit la première consigne pour familiariser les enfants avec le matériel. Les enfants, ayant une très bonne perception du cercle, devaient pouvoir reconstituer les disques "à l'oeil". Le nombre de morceaux était suffisamment grand (11 ou 15) pour qu'il soit économique de faire un tri préalable en utilisant la longueur du rayon.

La deuxième partie devait favoriser, du moins le pensions-nous, l'émergence de deux propriétés:

- la courbure du cercle est constante
- la distanceau centre est connue et constante

Nous avions pensé que la taille du carton, dans lequel devait être taillé le secteur manquant, allait gêner l'apparition de la propriété :

- le cercle est invariant dans une rotation autour de son centre

D'un point de vue strictement technologique, il est plus aisé d'utiliser la constance de la courbure que la distance au centre. En effet, il suffit de décalquer le bord existant du disque pour résoudre le problème; par contre, pour utiliser le rayon (sans se servir du compas), on est obligé de faire un tracé point par point, procédé assez long et qui ne donne pas un tracé lisse.

La deuxième partie ne peut pas se restreindre à une activité purement perceptive du type "puzzle"; en effet, pour "boucher le trou", il ne suffit pas d'assembler des morceaux existants, il faut soit faire des combinaisons astucieuses (coûteuses en imagination) soit utiliser un autre procédé.

Les enfants étaient seuls juges de leur réussite ou de leur échec. Nous avions pensé que cela était suffisant comme feed-back. En cela, nous avions fait confiance à deux choses :

- d'une part, à la maladresse des enfants (ils ne sont pas capables de compléter un cercle à la main de façon acceptable pour eux)

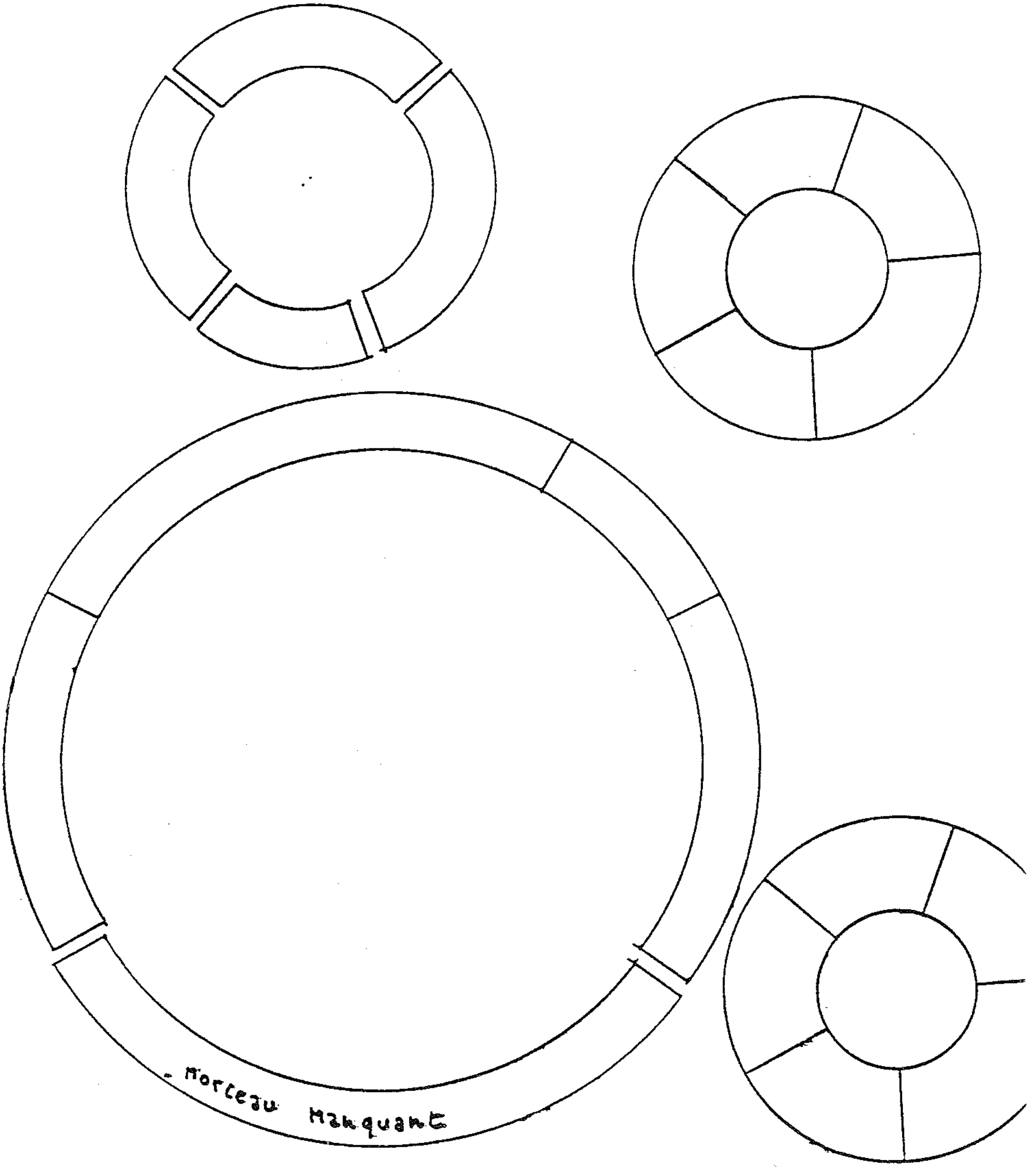
- d'autre part, à leur excellente perception du cercle (si le morceau manquant est mal construit, le disque n'aura pas l'air "bien rond").

Le comportement des enfants, pendant cette séance, nous a prouvé que nous avions raison sur ces points.

Deuxième situation : les couronnes

Nous avons distribué, à chaque enfant, une enveloppe contenant 3 ou 4 couronnes circulaires découpées en morceaux le long de rayons. Ces couronnes étaient, soit de rayons différents, soit de mêmes rayons mais d'épaisseurs différentes; l'une d'elles était incomplète. Le secteur manquant était d'ouverture plus grande que tous les secteurs existants et n'était pas la réunion de plusieurs d'entre eux. (voir dessin page suivante).

LES COURONNES (Echelle 1)



<u>Première consigne</u> : Nous avons découpé des couronnes différentes, les morceaux se sont mélangés, pouvez-vous reconstituer les couronnes ?

<u>Deuxième consigne</u> : Nous avons égaré un morceau d'une des couronnes, voici du carton, pouvez-vous fabriquer le morceau manquant ?

Remarque 1

Les consignes ont été dites exactement comme c'était prévu, les enfants ayant spontanément parlé de couronnes et de morceaux de couronnes.

Remarque 2

Les mêmes précautions que pour les disques ont été prises, pour la taille du morceau manquant et pour la taille du carton, et cela, pour les mêmes raisons.

Analyse Cette situation ressemble fort à celle des disques, mais elle en diffère parce que le centre et le rayon du disque extérieur (resp. du disque intérieur) ne sont plus matérialisés. Ceci a pour but d'essayer de faire diminuer le nombre des procédures utilisant le centre ou les rayons. En effet, le centre n'existant plus, ne peut plus être utilisé et sa construction n'est pas évidente. Quant aux rayons, ils peuvent, bien entendu, être obtenus en prolongeant les morceaux de rayons existants, mais cela demande une excellente maîtrise de l'objet "rayon" que les enfants viennent seulement de découvrir.

Cette situation privilégie, donc, la propriété "courbure constante", mais il ne faut pas oublier que des procédures "centre-rayon" ou "invariance par rotation" peuvent être efficaces. Cependant l'utilisation de la courbure constante est d'une technologie très simple (décalque des courbes existantes alors que l'utilisation du centre ou des rayons passent pas des constructions qui paraissent coûteuses).

Comme pour les disques, la première partie est destinée d'une part à familiariser les enfants avec le matériel, d'autre part à leur permettre, éventuellement, de mettre en oeuvre des stratégies de tri destinées à rendre la reconstitution des couronnes plus aisée. Ici le tri ne peut plus se faire à l'aide de la longueur des rayons. Les enfants vont devoir utiliser d'autres invariants : la courbure et l'épaisseur (aucune des deux ne pouvant servir à elle seule pour le tri).

Troisième situation : les arcs de cercle

Nous avons distribué à chaque enfant une feuille de papier calque, sur laquelle étaient dessinés 14 arcs de cercle, ayant 4 rayons différents (voir dessin p. suivante).

Chaque enfant avait à sa disposition, du papier calque vierge, du papier blanc et des ciseaux.

Consigne : Les "arcs de cercle" sont des portions de cercles différents. Pourriez-vous reconstituer les cercles dont ils proviennent ? Vous ne devez pas découper la feuille de papier calque où sont dessinés les arcs, mais vous pouvez découper et décalquer tout ce que vous voulez.

Remarque

Ce n'est pas le mot "arc de cercle" qui a été employé dans les classes, mais le mot "courbure" à Melun et les mots "ligne courbe" à Montrouge.

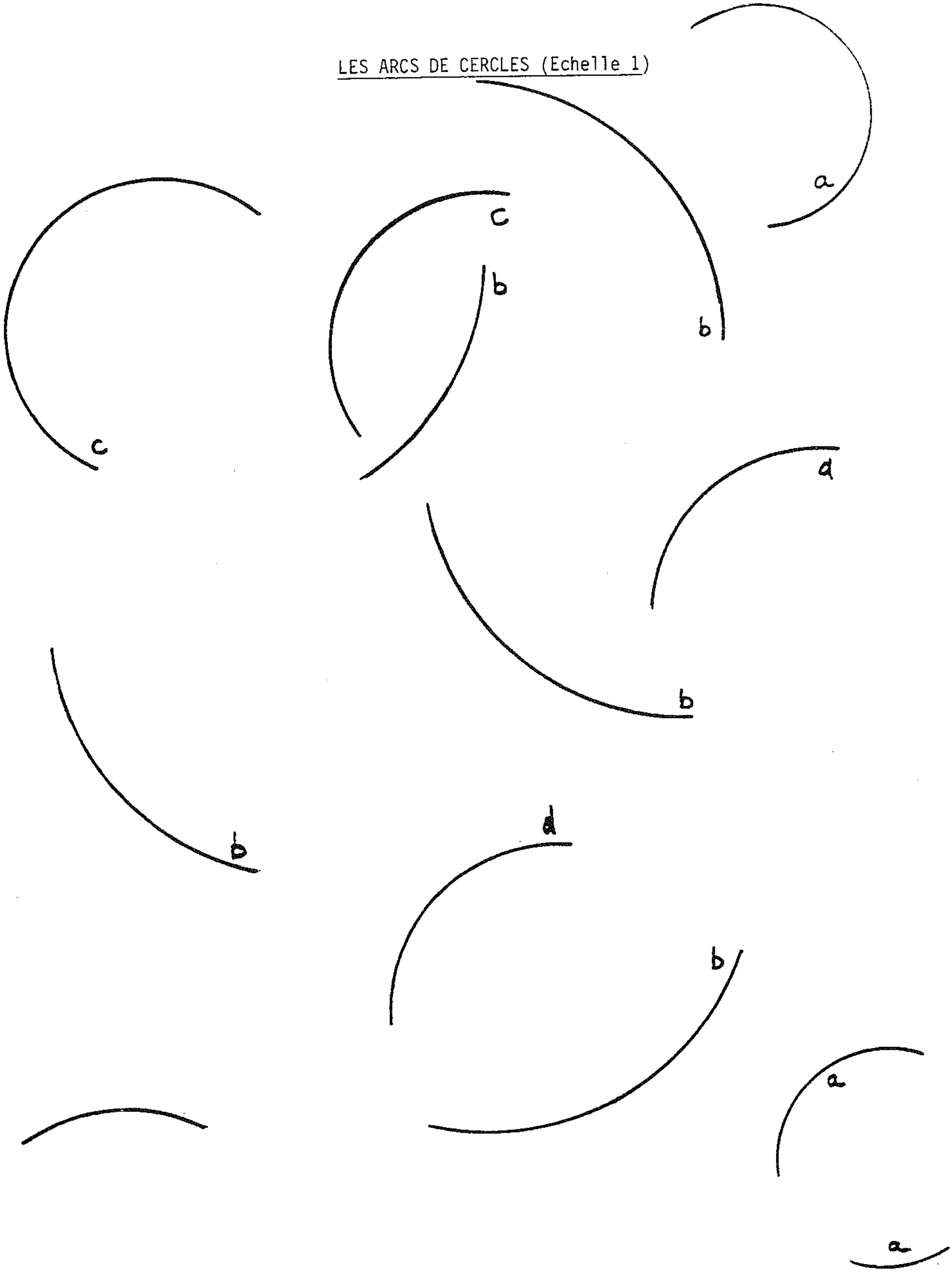
Analyse

Cette situation est destinée à favoriser l'utilisation de la constance de la courbure encore plus que les deux situations précédentes. En effet, il n'est plus possible de construire les rayons par simple prolongement de morceaux de rayons existants. Il ne sera pas simple de construire le centre. Si on veut utiliser une telle procédure pour résoudre le problème. On est conduit à construire les centres de tous les arcs de cercle, puis à mesurer tous les rayons et à classer les arcs par longueur de rayon. La reconstitution des cercles entiers peut se faire alors par superposition des centres de chaque arc.

Cette dernière procédure nous paraissait extrêmement coûteuse - C'est une des deux raisons qui nous avait fait choisir de placer cette situation en fin de séquence (dernière séance à Montrouge, avant dernière séance à Melun). En effet, durant la séquence, il était prévu de faire construire aux enfants le centre d'un cercle (mais pas d'un arc de cercle), et nous avons pensé que certains enfants pourraient avoir l'idée d'adapter cette construction pour résoudre le problème.

L'autre raison était plus terre à terre, nous ne voulions pas présenter à la suite trois situations très ressemblantes aux enfants, nous avions peur que de la monotonie naisse l'ennui.

LES ARCS DE CERCLES (Echelle 1)



L'utilisation de l'invariance de la courbure paraissait assez aisée : on pouvait trier les arcs en les superposant et ensuite reconstituer les cercles en les mettant bout à bout.

Nous étions conscientes du fait que nous avions introduit une diffifulté supplémentaire en interdisant de découper la feuille de référence (c'était une précaution, en effet la feuille aurait pu être détruite par un découpage anarchique et nous n'avions qu'une feuille par enfant). Cette contrainte va obliger les enfants à construire des intermédiaires pour représenter des arcs et à inventer un codage pour repérer l'arc auquel correspond tel ou tel intermédiaire.

En définitive, il nous semblait que cette situation favorisait presque exclusivement la courbure, mais elle superpose au problème de l'utilisation de l'invariance de la courbure, celui des capacités d'organisation, voire de codage symbolique.

B - PROCEDURES EFFECTIVEMENT UTILISEES

Durant la séquence, il y a eu 19 ou 20 enfants dans la classe de Montrouge et 19 à 20 enfants dans la classe de Melun.

LES DISQUES

1 - Reconstitution des disques complets

Une dizaine d'enfants ont reconstitué les disques à l'oeil, les autres ont opéré un tri préalable parmi les morceaux en comparant les longueurs des rayons (appelés "bouts droits" à Montrouge), ils ont reconstitué les disques ensuite.

Chaque maîtresse a profité du moment où les enfants ont exposé leurs travaux, pour insister sur le fait que les morceaux proviennent du même disque si et seulement si ils ont la même longueur de "bords droits".
A Montrouge, la maîtresse a insisté un peu plus; avant la phase suivante, elle a fait construire un secteur circulaire au tableau, et a fait dessiner une grande quantité de rayons; elle a alors fait répéter plusieurs fois que tous les "bords droits" ont même mesure. Cela peut laisser supposer qu'elle pensait que ce serait cette propriété des rayons qui permettait aux enfants de résoudre le problème suivant.

2 - Fabrication du morceau manquant

Dans un premier temps, tous les enfants, sauf deux, ont procédé de la même façon. Ils ont reconstitué le disque incomplet, et l'ont posé sur leur feuille de carton (voir dessin p. 64). Ensuite ils ont tracé les deux rayons, délimitant le secteur manquant, ils ont placé dans l'ouverture le plus grand des secteurs qu'ils avaient et en ont décalqué le contour circulaire à la main. Il manquait encore un morceau de cercle qu'ils ont complété à main levée. Nathalie et Stéphane, à Montrouge, ont procédé autrement, ils ont, eux aussi, commencé par dessiner les deux rayons délimitant le secteur manquant. Puis Nathalie, a tracé un grand nombre de rayons entre ces deux-là (dessin n° 4 p. 64), ce qui lui a donné un tracé point par point du secteur manquant. Stéphane a placé dans l'ouverture des rayons le plus grand secteur existant, puis il a décalqué son bord circulaire, il a finalement complété le cercle en faisant tourner le secteur autour du centre du cercle.

Tous les enfants, sauf Nathalie, ne sont pas très satisfaits, car la partie dessinée à la main est vraiment très plate (parfois même tracée à la règle), aucun d'eux n'estime avoir réussi.

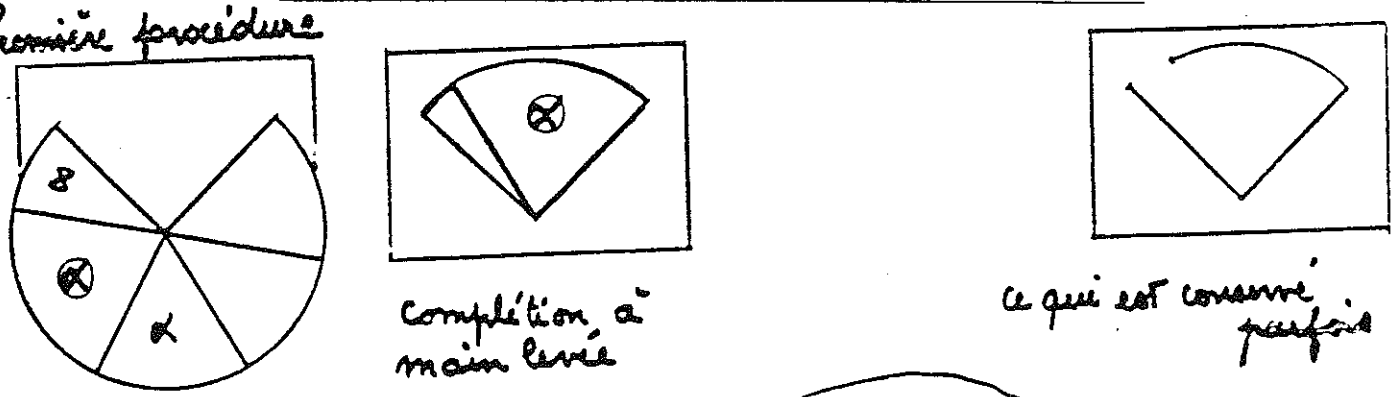
A Montrouge, la maîtresse a arrêté les enfants et elle leur a proposé d'exposer leurs difficultés. Les enfants se sont plaints du fait qu'il y avait une partie "trop plate", sans trop savoir analyser pourquoi elle était trop plate. La maîtresse a fait exposer la méthode de Nathalie, mais les enfants ont beaucoup de mal à exprimer le fait que les "rayons" correspondant à la partie plate n'ont pas la même mesure que les autres. Stéphane a exposé son procédé mais il n'est pas repris par la maîtresse et il est dévalorisé par le manque de soin du tracé. Dans les deux classes, après la première phase de complétion à la main, tous les enfants se lancent dans de nouvelles recherches et quelques-uns trouvent des procédures satisfaisantes (8 enfants en comptant Nathalie et Stéphane) :

- Deux enfants fabriquent un secteur trop grand en mettant bout à bout deux secteurs existants, puis le réduisent aux bonnes dimensions, en le posant sur le disque incomplet.

- Deux enfants ont mesuré les cordes de tous les secteurs, et du secteur manquant. Ils ont ainsi trouvé que la longueur de la corde du secteur manquant est égale à la longueur de la corde du plus grand secteur plus la moitié de la longueur du plus petit secteur. Ils fabriquent le secteur manquant en juxtaposant le grand secteur et le petit secteur plié en deux (ils commettent ainsi une légère erreur, mais négligeable quand on considère la précision du tracé).

PROCEDURES DE CONSTRUCTION DU MORCEAU MANQUANT - DISQUES

Première procédure

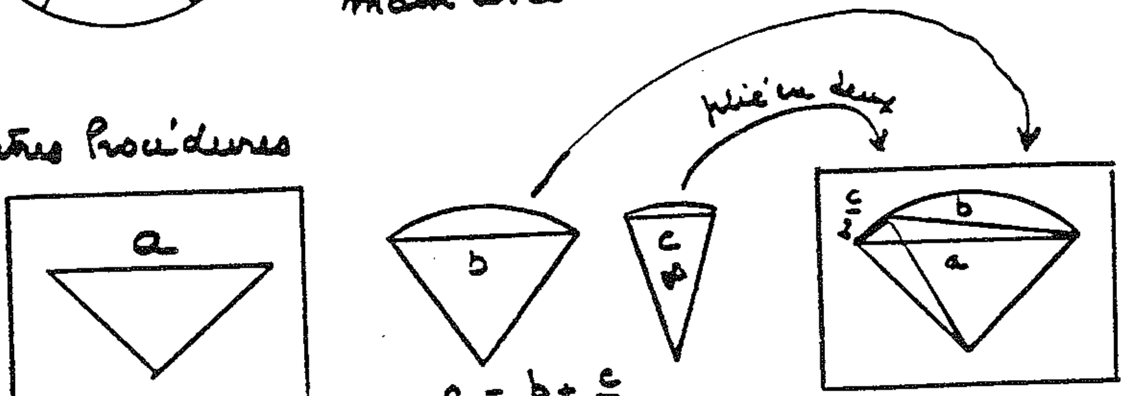


complétion à main levée

ce qui est conservé parfois

Autres Procédures

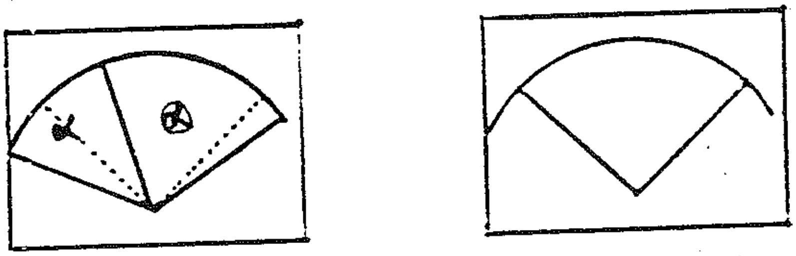
1



$a = b + \frac{c}{2}$

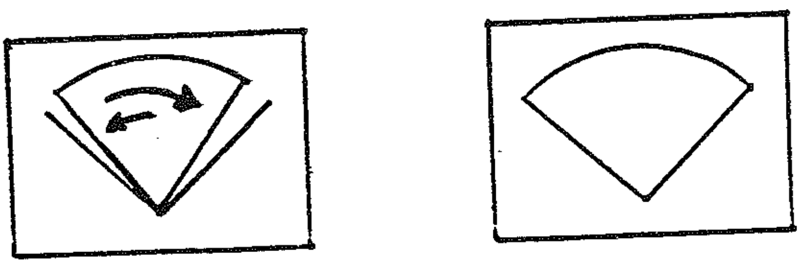
en fait $a \neq b + \frac{c}{2}$

2



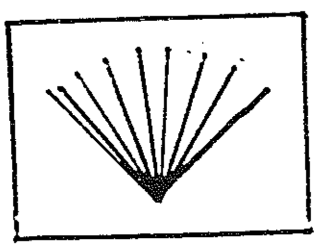
Procédure par mise côte à côte de secteurs.

3



Procédure par rotation d'un secteur. (majoritaire)

4



Procédure par construction des rayons.

- Un enfant de Melun invente le même procédé que Stéphane.
- Un enfant de Montrouge utilise le procédé exposé par Nathalie (cette procédure n'est pas apparue à Melun).

Quand les maîtresses se sont apercues que les enfants, qui ne trouvaient pas, commençaient à se désintéresser du problème, elles ont arrêté les recherches et demandé aux enfants d'exposer leurs travaux, ce qu'ils ont fait (tous les procédés ont été exposés). Tous les enfants ont été ensuite invités à choisir l'un des procédés exposés pour construire le secteur manquant. Tous les enfants, qui n'avaient pas eux-mêmes inventé une technique, ont opté pour la rotation du secteur, après avoir quelquefois commencé par un tracé point par point rapidement abandonné.

Confrontons maintenant les procédures effectivement utilisées avec nos prévisions :

- La fabrication d'un grand secteur qu'on réduit aux bonnes dimensions est, à notre avis, une utilisation du fait que la courbure est constante.
- La construction point par point est, à l'évidence, une utilisation du fait que la distance au centre est invariante.
- La construction des secteurs manquant par rotation d'un secteur utilise, elle, deux propriétés : la constance de la courbure pour le tracé, et l'invariance de la courbe par rotation autour du centre.

Nous voyons que l'invariance du cercle par rotation autour de son centre est utilisée bien que l'on ait choisi la taille du carton de façon à ce que tout le cercle ne puisse tourner. Les enfants ont contourné la difficulté en faisant tourner un secteur.

On peut noter que le problème posé était difficile, puisque seulement 8 enfants sur 37 ont "inventé" une technique de construction. Il est donc d'une nature bien différente du problème du type puzzle qu'était la reconstitution des disques.

La procédure majoritairement adoptée par les enfants est celle de la rotation du secteur, la situation paraît donc privilégier plus l'aspect "invariant par rotation" du cercle que son aspect "courbure constante".

En séance collective à Montrouge, un enfant, très aidé par la maîtresse, réussit à montrer que la rotation du secteur et la construction point par point utilisent toutes les deux l'invariance de la distance au centre, mais cette explication est tellement pénible à venir qu'elle tend à montrer qu'il n'y a pas un passage facile d'une propriété à l'autre.

LES COURONNES

1) Reconstitution des couronnes complètes

Les uns ont reconstitué les couronnes à l'oeil ou en tâtonnant, les autres ont opéré un tri préalable parmi les morceaux en les superposant. Ce procédé leur montre si les morceaux ont même courbure et même épaisseur.

Chaque maîtresse a profité du moment où les enfants ont exposé leurs travaux pour insister sur le fait que deux morceaux proviennent bien de la même couronne si et seulement si ils se recouvrent bien par superposition (donc s'ils diffèrent seulement par leur longueur). Il y a d'ailleurs, lors de cette phase, des quiproquos des enfants qualifiant de "plus gros" un morceau de rayon plus grand, ou un morceau plus épais, ou un morceau plus long et cela sans préciser.

2) Construction du morceau manquant

Dans un premier temps, les enfants soit n'ont rien fait, soit ont posé leur couronne incomplète sur le carton, ont dessiné les deux bouts de rayons délimitant le secteur manquant, ont posé leur plus grand morceau, en ont décalqué les deux bords circulaires puis ont terminé les deux morceaux de cercles manquant à main levée.

Ils ont donc réagi exactement comme au début de la séance des disques et bien qu'ils aient reconnu dans cette situation, une situation analogue à celle des disques.

Cependant cette phase est beaucoup plus vite dépassée que pour la situation des disques et sans l'intervention des maîtresses, les enfants se lancent dans la fabrication de nouveaux procédés :

- Certains fabriquent un morceau plus grand que nécessaire en mettant bout à bout deux morceaux, puis ils posent dessus la couronne incomplète ce qui leur permet de réduire le grand morceau aux bonnes dimensions.
- D'autres bouchent le trou avec un grand morceau et un petit morceau qu'ils plient et replient jusqu'à ce qu'il bouche exactement (à la précision du tracé près) le trou restant.

- Un enfant fabrique le patron de la couronne en faisant glisser petit à petit les morceaux assemblés. Une fois qu'il a le patron, il ne lui reste plus qu'à poser dessus sa couronne incomplète et à découper le morceau manquant.
  Son carton était trop petit pour faire cela, mais il a utilisé une feuille blanche en intermédiaire.

  Deux enfants essaient de trouver le centre du grand cercle, mais ils sont placés devant le dilemme suivant : d'une part, ils veulent déterminer le centre pour compléter le cercle, d'autre part, ils ne savent pas trouver le centre d'un cercle incomplet (du moins le prétendent-ils, et nous ne sommes pas sûres qu'ils sauraient trouver le centre d'un cercle complet) Ils essaient bien de placer le centre à l'oeil, mais quelques mesures de rayons ont vite fait de leur prouver qu'il est mal placé.

Il est plus difficile que pour les disques, de savoir exactement quels sont les inventeurs de telle ou telle procédure. En effet, la phase "essai de complétion à la main" a été beaucoup plus courte et les procédures efficaces sont apparues plutôt, elles ont donc eu plus de temps pour diffuser. De plus, l'expérience des disques a permis aux enfants, qui n'ont pas eux-mêmes "inventés" de procédure, de repérer dans les travaux des autres ce qui pourrait être utilisé.

C'est la mise bout à bout de deux morceaux, puis la réduction à la bonne dimension qui a été la procédure majoritairement employée et à la fin de la séance tous les enfants ont fabriqué le morceau manquant.

La première chose frappante dans cette situation, c'est que les enfants n'ont pas d'emblée adapté les procédés performants inventés pour les disques, au problème des couronnes. Ils sont encore passés par une phase de complétion à la main.

Une analyse, a posteriori, tend à montrer que cela n'a rien de très étonnant. En effet, la procédure la plus répandue pour les disques (rotation d'un secteur) utilisait le centre du disque. Pour les couronnes, le centre n'est plus matérialisé, il est donc plus difficile d'utiliser l'invariance du cercle dans la rotation autour de son centre. Les enfants ont donc le choix : soit adapter la rotation du secteur, soit utiliser une procédure ne se servant pas du centre; mais si tous les enfants ont entendu décrire, à propos des disques, une procédure n'utilisant que la courbure, ils n'avaient pas, à ce moment-là, de raison spéciale pour s'y intéresser (il est à noter que les deux enfants qui avaient mis pour les disques deux secteurs côte à côte qu'ils avaient ensuite réduit à la bonne dimension, ont réutilisé la même procédure pour les couronnes). Mais beaucoup d'enfants se sont trouvés devant un problème nouveau qu'ils ont d'abord essayé de résoudre par le procédé le moins coûteux, à savoir la complétion à la main.

Nos prévisions quant aux conceptions du cercle pouvant apparaître dans cette situation se sont révélées à peu près exactes :

- La mise bout à bout de morceaux, pour fabriquer un morceau trop grand que l'on réduit à la bonne dimension est une technologie qui, à notre avis, met en oeuvre la propriété "courbure constante". C'est la procédure la plus utilisée (tous les enfants sauf quatre).

- La procédure consistant à faire tourner en se chevauchant les morceaux de la couronne est l'adaptation aux couronnes de la rotation du secteur pour le disque. C'est une utilisation de l'invariance du cercle par rotation autour de son centre. Elle est inventée par un seul enfant (elle nécessite l'emploi d'une feuille blanche en intermédiaire, elle est donc coûteuse en imagination et en manipulation) et reprise seulement par 3 enfants.

- L'essai de construction du centre est peut-être une tentative d'utilisation de l'invariance de la longueur du rayon, mais cette procédure aboutit à un échec. Les deux enfants, qui l'ont tentée, se sont ralliés à la procédure majoritaire.

Les enfants auraient pu construire le centre en prolongeant les rayons, mais aucun ne l'a fait. Cette activité n'est peut-être pas conceptuellement aussi simple que nous le pensions (nous verrons, par la suite, les enfants en difficulté devant un problème de prolongement de rayons).

En définitive, on peut noter que la disposition du centre fait que la situation privilégie plus nettement la propriété "courbure constante" sans éliminer totalement l'invariance par rotation qui peut être utilisée sans construction du centre.

LES ARCS DE CERCLE

Nous rappelons que cette situation a été, dans l'ordre chronologique, la 6ème situation à Montrouge et la 5ème situation à Melun. A Melun les enfants ont fait comme 6ème et dernière séance la situation "message pour décrire un cercle".

Première phase

Les enfants se sont lancés directement dans l'action et ils ont presque tous agi de la même manière : ils ont décalqué un arc, en ont cherché un qui, à l'oeil, paraissait provenir du même cercle, l'ont décalqué bout à bout avec le premier, et ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe soit refermée. Tout au long de la séquence, les enfants ont échoué lorsqu'ils ont essayé d'utiliser seulement leur perception; mais même à la fin de la séquence, ils font encore tellement confiance à leur perception qu'ils essaient toujours de n'utiliser qu'elle.

Pas un enfant n'oserait prétendre qu'il a obtenu un cercle et c'est surtout la présence de points anguleux qui les chagrine. Devant le découragement manifeste des enfants, les maîtresses interrompent la phase de recherche et proposent aux enfants d'exposer leurs difficultés. Cette phase collective amène les enfants aux conclusions suivantes : il faut trier les arcs et il faut donner un même nom à ceux qui proviennent d'un même cercle.

Deuxième phase

Quelques procédures se dégagent alors :

- Certains enfants trient les arcs en superposant les arcs décalqués. Ensuite ils reconstituent les cercles en plaçant les arcs bout à bout. Ils ont beaucoup de mal à ne pas avoir de points anguleux aux raccords, or ils sont très sensibles à l'aspect lisse du cercle, aussi ne sont-ils pas complètement satisfaits par leur méthode.

Pourtant c'est cette procédure qui va être adoptée par les enfants qui n'ont rien trouvé; comme elle a diffusé très vite, nous n'avons pas pu relever précisément le nombre d'"inventeurs" de ce procédé.

- Cinq enfants essaient de trouver le centre de chaque arc à l'oeil. Ils écartent alors leur compas pour avoir la longueur du rayon et ils essaient ainsi de trier les arcs. Ils finissent par abandonner et par se rallier à la procédure majoritaire, (deux enfants ont réussi, car ils ont repéré que la pointe du compas avait laissé un petit trou sur le calque).

- Deux ou trois enfants améliorent la procédure majoritaire en faisant se chevaucher les arcs d'un même cercle, cela leur permet de lisser le tracé.

Nous avons pu constater, à propos de cette situation, que les enfants n'ont pas été capables de s'organiser individuellement pour résoudre le problème; mais ce handicap a été aisément surmonté en phase collective avec l'intervention des maîtresses.

Une fois le problème d'organisation résolu, les procédures utilisées par les enfants sont bien celles que l'on attendait:

- La mise bout à bout des arcs est une utilisation de la constance de la courbure (le tri par superposition aussi, bien entendu).

Le fait que tous les enfants n'aient pas utilisé le chevauchement des arcs pour lisser le tracé peut avoir deux origines :

. d'une part, les enfants ont pensé que le cercle était exactement découpé et que s'ils faisaient se chevaucher les arcs, ils auraient un cercle incomplet (en fait personne ne leur interdisait de décalquer autant de fois qu'ils le voulaient chacun des arcs pour compléter).

. d'autre part, les inventeurs du chevauchement sont les champions de la rotation dans les deux premières séances. Ce qui tendrait à montrer que l'utilisation du chevauchement est l'indice d'une conception plus large du cercle (constance de la courbure et invariance de la figure par rotation).

- La recherche du centre était bien une procédure que nous avions prévue, et nous pensons que les enfants en sont restés à une recherche du centre à l'oeil parce qu'une construction aurait dû être répétée quatorze fois ce qui aurait été beaucoup trop long.

En conclusion, le fait que la situation soit plus complexe a amené des problèmes d'organisation, mais les conceptions du cercle sont malgré tout apparues, et il n'y a pas à ce niveau, de grandes différences entre les trois situations. La disparition du centre est ce qui les discrimine le plus. La courbure est toujours utilisée, mais pour les disques c'est de manière plus perceptive que pour les deux autres situations où elle est utilisée de manière constructive. Par contre, l'invariance par rotation a l'air d'être nettement favorisée lorsque le centre est matérialisé.

II - PROPRIETE : TRAJECTOIRE CIRCULAIRE

La situation des portes

Nous avions préexpérimenté cette situation dans une classe de CE_2 (cf. Chapitre II préexpérimentation, III situation n° 3). Nous l'avons relatée aux deux maîtresses et nous avons construit avec elles la situation suivante :

Les enfants travaillent en équipes de 3 ou de 4; chaque équipe est chargée d'une porte. Sous chaque porte est glissée une grande feuille de papier scotchée au sol. Les enfants ouvrent et ferment la porte, on les encourage à bien observer où passe le coin de la porte, puis on leur donne la consigne suivante:

Consigne : Pouvez-vous dessiner la trajectoire du coin de la porte, en laissant la porte fermée ? Vous avez le droit d'ouvrir la porte pour vérifier votre tracé. Si vous le modifiez (ce que vous ne pouvez faire que la porte fermée), vous utilisez un crayon d'une autre couleur.

Une deuxième consigne était prévue, c'était : Pouvez-vous dessiner la trajectoire du coin de la porte, en ayant votre feuille placée n'importe où ?

A Montrouge

Les enfants ont eu beaucoup de difficultés. Dans deux équipes, ils ont essayé de dessiner le trajet de l'ombre, mais cela ne les a pas satisfaits. Dans les autres équipes, les enfants avaient coché sur la feuille le point de départ et le point d'arrivée et ils avaient joint à la main, mais cela ne les satisfaisait pas non plus. Les enfants ont commencé à se désintéresser d'un problème pour lequel ils n'entrevoyaient pas de solution.

La maîtresse, que l'état de sa classe commençait à inquiéter, est passée dans les diverses équipes où elle a posé les questions suivantes :

- "c'est quoi la trajectoire ?"

- "Une ligne courbe" répondait un des enfants du groupe

(ligne courbe était un des mots qui désignait un arc de cercle dans le langage de la classe)

- "Alors où est le centre?"

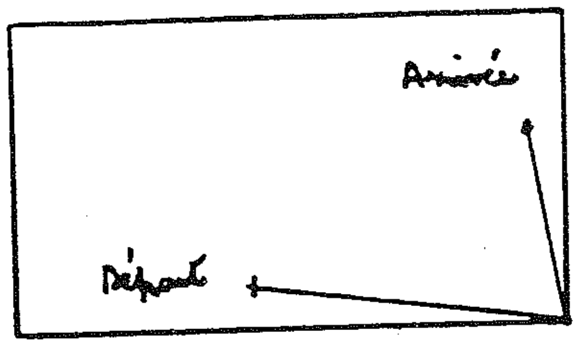
Dans deux équipes, les enfants se sont mis alors à la recherche du centre. Ils ont d'abord pensé que ce centre était le coin de la feuille (voir dessin 1 page 72). Mais ils se sont rapidement rendus compte que les rayons, qui joignaient le pseudo-centre aux points de départ et d'arrivée, n'avaient pas la même longueur.

Et puis, Stéphane dans une équipe, Odette dans une autre, Laurent et Sabine dans une troisième, ont eu l'idée que le centre était à l'aplomb du gond. L'équipe de Stéphane a alors tracé la trajectoire de la porte avec une ficelle punaisée à l'aplomb du gond, l'équipe de Laurent avec une règle scotchée sous le gond, et l'équipe d'Odette avec une règle, maintenue à l'emplacement du gond.

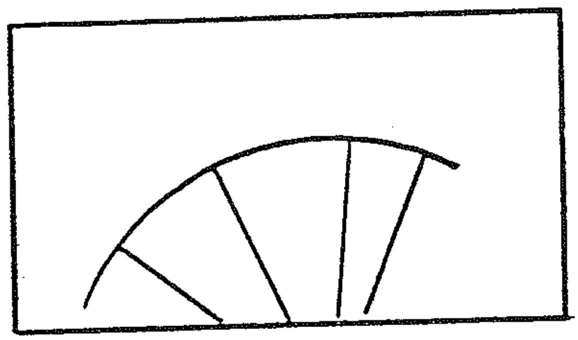
Au cours de la séance collective récapitulative, la maîtresse a fait insister les enfants sur le fait que la trajectoire de la porte était une ligne courbe dont le centre était à l'aplomb du gond et dont le rayon avait la longueur du bas de la porte.

La maîtresse pose alors la deuxième consigne, et les enfants résolvent le problème sans difficulté.

1

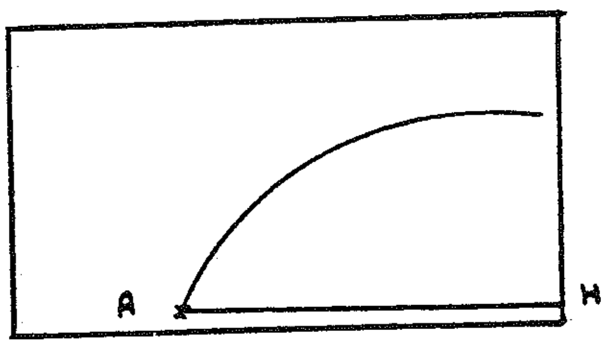


2



Equipe d'Armelle

3



Equipe de Franck

<u>A Melun</u>

Les enfants ont aussi beaucoup de difficultés, ils tracent des trajectoires à la main qui se révèlent très inexactes. Au bout d'un moment, les enfants sont découragés. La maîtresse a mis à leur disposition ficelle, règle, bâton et ils essayent de s'en servir.

Pour cela, ils commencent par scotcher qui un crayon, qui un bout de craie sur les règles à la longueur du bas de la porte. En fait, ils ont mis la craie ou le crayon sur la règle, parce que la maîtresse avait interdit de les attacher au coin de la porte, mais ils n'ont pas pour autant de projet précis pour tracer la trajectoire. Ils finissent par placer la règle devant la porte, puis ils ouvrent la porte, ce qui trace une magnifique trajectoire. La maîtresse, soulagée de les voir enfin réussir quelque chose, n'intervient pas pour leur faire remarquer qu'ils n'ont pas respecté la consigne.

Les enfants exposent leurs méthodes, parlent des trajectoires en les nommant "courbures" (mot qui dans la classe servait à désigner les arcs de cercle).

La maîtresse pose alors la deuxième consigne. Les enfants sont effarés, ils ont l'impression d'un problème impossible à résoudre et protestent. La maîtresse revient alors aux dessins des trajectoires, fait préciser aux enfants qu'il s'agit bien de "courbures"; elle leur demande alors ce qu'il faut connaître pour pouvoir tracer une "courbure". Après un léger flottement, les enfants disent qu'il faut connaître le centre et le rayon.

Le vrai problème posé alors par la maîtresse est le suivant : les enfants ont un arc de cercle tracé sur une feuille, ils doivent en déterminer le centre et le rayon. La maîtresse s'aperçoit que les enfants n'ont aucune idée, alors elle les renvoie près de leurs portes respectives.

L'équipe de Frédéric, Armelle, Stéphane va près de sa porte, des enfants essayent de placer la feuille sous la porte pour que le tracé coïncide avec la trajectoire de la porte. Cela ne va pas sans mal, alors ils abandonnent, de toutes façons ils pensent que ce n'est pas cela qui va les aider à trouver le centre. Armelle a alors l'idée de plier la feuille pour trouver le centre; ce qu'elle fait en pliant la feuille bord à bord; Stéphane se récrie et lui conseille de découper pour plier la "courbure" bord à bord. Armelle le fait,plie en quatre et obtient des "rayons" qui ne concourent pas dans la feuille (voir dessin page 72).
Les enfants sont très déçus et abandonnent l'idée d'Armelle. Frédéric déclare alors que le centre est à l'aplomb du gond et que le rayon est de 72 cm (la longueur du bas de la porte). Les autres enfants approuvent, ils se mettent en quête d'une grande feuille blanche qu'ils collent pour agrandir la leur. Puis ils prolongent un "rayon" jusqu'à 72 cm et affirment que c'est le centre, mais c'est grossièrement faux et ils s'en aperçoivent. En fait, c'est Frédéric qui a prolongé le "rayon" et au lieu de prolonger un des plis tracés par Armelle, il a prolongé un des bords de la feuille. Les enfants corrigent rapidement l'erreur; ils prolongent un des plis tracés par Armelle et coche à 72 cm; Stéphane prolonge alors un autre pli tracé, mais les rayons ne se coupent pas au point coché mais à 82 cm. Frédéric est

stupéfait, il remesure la porte, c'est bien 72 cms. Il est un instant silencieux, puis il s'écrie : "mais ce n'est pas notre porte, on n'était pas là, la dernière fois!". Il s'empresse d'aller mesurer l'autre porte, et il est complètement satisfait lorsqu'il trouve 82 cms.

L'équipe de Franck est perplexe, la maîtresse leur propose de mesurer le bas de la porte ce qu'ils font, mais ils ne savent quoi faire de cette mesure. Ils reprennent leur règle et mesurent AH (voir dessin page 72), ils décident que le centre est au milieu de AH. A partir du speudo centre, ils mesurent des rayons et se persuadent rapidement qu'il n'est pas bien placé. Ils essaient alors d'autres emplacements, mais toujours dans la feuille et aucun ne convient.

La maîtresse intervient pour leur faire dire qu'il est important de savoir où est le centre pour tracer un cercle, mais que cela n'est pas suffisant, Franck alors affirme qu'il faut connaître la longueur du diamètre car en prenant la moitié on a la longueur du rayon. Les enfants remesurent la porte, prennent la moitié de cette mesure et décident que c'est le rayon. Ils tracent un cercle ayant ce rayon et constate qu'il ne ressemble pas à la trajectoire de la porte.

La maîtresse demande : "Qu'est-ce qui ne bouge pas, quand on ouvre la porte ?". La question reste sans réponse, mais au bout d'un moment, Nathalie dit : "le centre est là (en montrant l'aplomb du gond) et le rayon mesure 33 cms (la largeur de la porte)". Les enfants dessinent des rayons à partir de l'aplomb du gond et ils n'ont pas tous la même longueur, ils mettent en doute la parole de Nathalie. Celle-ci se défend, prétend que la trajectoire est mal tracée et demande qu'on la retrace. Les enfants le font, puis tracent des rayons et constatent que Nathalie a bien raison.

Les autres équipes soit, ont eu des comportements similaires, soit n'ont rien fait.

Notre but en présentant cette situation était le suivant :

- Les enfants devraient dans un premier temps construire la trajectoire par essai-erreur, ce qui, à notre avis, devait les amener à se forger certaines convictions : par exemple que la trajectoire était un arc de cercle

- Ensuite la deuxième consigne leur interdisait de procéder par essai-erreur ils devaient donc expliciter un modèle du genre : tous les points de la trajectoire sont à égale distance de l'axe de la porte.

C'est ce qui s'était à peu près passé lors de la préexpérimentation. En fait, pas tout à fait, puisque les enfants avaient explicité un modèle sans que l'on pose la deuxième consigne. Seulement nous avions remarqué que c'était le fait d'un très petit nombre d'enfants, nous avions alors craint que dans les groupes de 3 ou 4 enfants, il n'y ait pas d'enfant qui pense à mettre en oeuvre une procédure. Nous avons donc posé la deuxième consigne pour les y contraindre.

Nous avons constaté que cette démarche n'était apparue ni à Melun, ni à Montrouge. Dans les deux classes, les enfants n'ont jamais eu l'espoir de résoudre le problème par essai-erreur et ils se sont trouvés en situation d'échec. Qu'est-ce qui a amené ce comportement qui n'était pas apparu lors de la préexpérimentation ? Après étude des différents comportements des enfants, il nous a semblé que nous avions considérablement changé la nature du problème en leur demandant de prévoir globalement la trajectoire. En effet, les enfants n'ont jamais eu l'idée de la corriger point par point; alors que dans la préexpérimentation, les enfants ne traçaient que quelques points, les vérifiaient un par un et les amélioraient un par un. Nous pensons nous être heurtées ici à la difficulté qu'ont les enfants pour concevoir une ligne comme un ensemble de points (phénomène que Piaget l'a déjà signalé à propos de la droite [8]). Nous sommes à peu près certaines que d'avoir demandé aux enfants de prévoir une trajectoire et non quelques points est la cause principale de leur mise en échec.

Une fois cette analyse faite, il est intéressant de se pencher sur les prises de décision des maîtresses. En effet, elles se sont trouvées toutes les deux devant le même problème, leur classe était en échec, elles devaient aider les enfants à lever cet échec. Certaines décisions ont été prises par les deux maîtresses, d'autres non.

Dans les deux classes, les maîtresses ont posé des questions sur la nature de la trajectoire. Les enfants ont répondu en utilisant les mots "ligne courbe", ou "courbure" qui avaient déjà été employés pour désigner des arcs de cercle. Aucune des deux maîtresses ne s'est posée la question de savoir si les enfants utilisaient ce langage pour désigner présicément un arc de cercle, ou s'ils parlaient ainsi parce qu'ils voulaient montrer qu'ils pensaient que cette trajectoire avait l'air bien ronde. Elles ont, toutes les deux, pensé que les enfants désignaient de façon précise des arcs de cercle, elles ont donc posé des questions concernant les centres et les rayons. Or dans les deux classes, aucun enfant n'a parlé de centre ou de rayon pour les trajectoires avant que les maîtresses n'y fassent allusion.

De toutes façons, les questions des maîtresses ont suffi pour convaincre les enfants du fait que les trajectoires n'étaient pas vaguement rondes mais qu'il s'agissait bien d'arcs de cercle; et cela, d'autant plus facilement, que cela faisait dix jours qu'ils travaillaient sur des cercles.

Cette possible méprise sur le sens des mots explique,en partie, que les enfants aient cherché le centre à des endroits privilégiés de la feuille (coin-centre) n'ayant aucun rapport avec la porte. En effet, la maîtresse a confirmé qu'il s'agit bien d'un cercle, et elle sous-entend par ses questions qu'ils sont capables d'en trouver le centre. Ils font donc l'hypothèse, pas idiote et en tout cas économique, que le centre est un point privilégié de la feuille.

Ensuite les prises de décision des maîtresses vont diverger.

A Montrouge, la maîtresse choisit de poser dans chaque équipe, des questions destinées à aider les enfants. Ces questions tendent à confirmer aux enfants le fait que la trajectoire est bien un cercle et elles leur laissent supposer qu'ils sont en mesure d'en trouver le centre et le rayon. Quatre enfants réussissent à utiliser les renseignements ainsi fournis par la maîtresse et ainsi trois équipes résoudront le problème.

La deuxième consigne est alors inutile, puisque dans la séance de récapitulation, les enfants ont explicité un modèle leur fournissant des techniques pour tracer la trajectoire.

A Melun, la maîtresse n'a pas tout de suite posé des questions sur la nature de la trajectoire. Elle a attendu que les enfants aient construit cette trajectoire; comme ils n'arrivaient pas à la tracer, elle les a laissés tricher. La seule condition, à ce que l'on puisse continuer, était en effet que les enfants aient tracé une trajectoire.

C'est alors seulement qu'elle a posé des questions sur la trajectoire les confortant ainsi dans l'idée qu'il s'agissait bien d'arcs de cercle. Puis elle a posé la deuxième consigne. Seulement les enfants n'avaient fait aucun effort ni de construction, ni d'invention pour le tracé de la trajectoire, ils n'ont donc que peu de familiarité avec la situation et ils n'ont donc aucune raison d'en avoir tiré un modèle (même implicite). La deuxième question leur apparaît alors comme un problème classique de géométrie : "Etant donné un arc de cercle, construire son centre et trouver son rayon". C'est bien ainsi que le comprend Armelle qui résoudrait aisément le problème si ses convictions sur les diamètres comme axes de symétrie étaient plus fortes. La seule indication qui permet aux enfants de penser qu'il s'agit d'autre chose que du problème de géométrie est que la maîtresse les renvoie auprès des portes.

Cette situation avait été construite pour privilégier la conception du cercle comme trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe et en rotation autour de ce point fixe. La première consigne était destinée à leur faire prendre conscience de certains invariants :

- L'axe de la porte est fixe dans la rotation
- Tous les points de la trajectoire sont à égale distance le l'axe de la porte

La deuxième consigne devait leur permettre d'inventer une procédure qui mettrait en oeuvre la conception qu'ils se seraient forgés lors de la manipulation.

Il n'en a pas été ainsi à cause d'une analyse insuffisante des paramètres de la situation. Mais cela nous a quand même permis d'étudier comment les maîtresses conduisaient leurs classes et ce qui en résultait comme conséquence sur le comportement des enfants.

Nous avons remarqué au cours de cette séquence, que les enfants ont du mal à concevoir le cercle comme ensemble de points. La situation n'était pas prévue spécialement pour cela. Cependant il faudrait peut-être considérer de plus près cette question, d'autant que la plupart des définitions du cercle dans les manuels actuels font allusion au cercle "ensemble de points" (cf. chapitre I le cercle dans la littérature mathématique). Si les enfants ont un peu de mal à concevoir le cercle comme "ensemble de points", il serait normal que les manuels prennent ce fait en compte pour choisir les définitions du cercle convenant le mieux aux enfants.

III - PROPRIETES DES "CENTRE-RAYONS-DIAMETRES"

A - Présentation des situations

Première situation : construction du centre d'un disque

Dans l'ordre chronologique, cette situation a été présentée après la construction du morceau manquant pour les couronnes. Au cours des séances collectives, les enfants ont fait allusion au fait que le trou de la couronne était un "disque" (en fait, ils ont dit "galette" ou d'autres mots dont nous avons pensé qu'ils recouvraient la notion de disque)

Première consigne : Pouvez-vous fabriquer dans du carton le disque permettant de boucher le trou intérieur de la couronne.

Deuxième consigne : Pouvez-vous trouver le centre et la longueur des rayons de ce disque

Remarque - On emploie à la place du mot "disque" le mot utilisé par les enfants

La première consigne n'est destinée qu'à faire construire un disque aux enfants, un simple décalque suffit

La deuxième consigne pose un problème et les résultats obtenus lors de la préexpérimentation nous conduisent à penser que les enfants vont utiliser certaines propriétés du centre :

- le centre est centre de symétrie (double pliage)
- le centre est l'intersection des deux diamètres horizontal et vertical
- le centre est le milieu des cordes de la longueur maximale

Dans cette situation, le feed back est induit par les résultats établis dans le départ de la séquence. En effet, lors des deux situations précédentes, une propriété a été explicitement établie dans les deux classes : les rayons ont tous la même longueur. Cette propriété permettra aux enfants de contrôler si leur construction est correcte ou non. On peut noter là une grande différence avec la préexpérimentation où les enfants ont été amenés à construire le centre d'un cercle avant tout apprentissage. Nous verrons si cela induit ou non un comportement différent chez les enfants.

Deuxième situation : Message téléphonique

Les enfants ont à leur disposition des feuilles de papier, des ficelles, des punaises, des compas, des bandes de papier, du ruban collant, etc...

Consigne : Tracez un cercle puis faites un message pour que le récepteur du message fasse un cercle exactement superposable au vôtre.
La transmission du message sera faite par téléphone

Remarque - A la place du mot "cercle", on utilise le mot employé par les enfants

Cette situation est une version très simplifiée de la situation n° 1 décrite dans la préexpérimentation. Nous l'avons placée en fin de séquence, comme cela nous pouvons voir si la séquence didactique a un effet sur les messages produits par les enfants en comparant ces messages avec ceux de la préexpérimentation. Cette situation est destinée à vérifier si les enfants ont acquis une conception du cercle qui leur permet de dégager les éléments nécessaires à la reproduction d'un cercle construit par eux.

B - Procédures effectivement utilisées

Construction du centre

Les enfants fabriquent aisément le disque intérieur, en décalquant le bord intérieur de la couronne. Ils reconnaissent un cercle et se lancent dans la construction du centre, plusieurs procédures sont alors mises en oeuvre:

- Tous les enfants tracent à l'oeil une corde horizontale qui partage à peu près le disque en deux moitiés égales, puis toujours à l'oeil une corde verticale qui partage à peu près le disque en deux moitiés égales (2 mm d'écart entre les longueurs des "rayons" dans le meilleur dessin). Seulement trois d'entre eux s'estiment à peu près satisfaits, les autres abandonnent rapidement cette méthode.

- Six enfants dessinent des cordes parallèles (horizontales ou verticales) et les mesurent. Ils s'arrêtent sur la corde la plus longue et en construisent le milieu. Ensuite ils tracent des "rayons", mais même chez les enfants très soigneux, on trouve jusqu'à 2 mm d'écart entre les longueurs des différents rayons.

- huit enfants ont plié bord à bord le cercle en quatre et ils ont placé le centre au croisement des deux plis. Cela donne de légères différences dans les longueurs des "rayons" et quand on demande aux enfants ce qu'ils en pensent, ils répondent : "si c'était un vrai cercle, tous les rayons mesureraient pareils, mais c'est que je n'ai pas bien découpé".

A Melun, la procédure par pliage est très vite découverte par un des leaders de la classe et elle est immédiatement adoptée par tous les enfants qui utilisaient un tracé à l'oeil.

A Montrouge, les enfants ne pensaient pas au pliage. Pierre pensait qu'il fallait partager le disque en deux, mais ne savait comment s'y prendre; et cela jusqu'à ce que la maîtresse saisisse son disque entre les doigts, le secoue et dise : "tu ne sais plus faire la moitié" et Pierre alors se met à plier.
Tous les enfants de la classe se rallient à cette procédure, sauf les six partisans des cordes parallèles.

La technique par pliage est préférée par les enfants parce qu'elle est "exacte", il n'y a ni approximation, ni tatônnement; d'ailleurs, dans la plupart des cas, les enfants ne vérifient même pas que tous les rayons ont même longueur, ils en sont sûrs. Nous avons vérifié sur leurs dessins qu'elle n'était pas précise dans tous les cas, et quand le pliage n'était pas soigneusement fait, on retrouvait des écarts de 2 mm comparables à ceux donnés par les méthodes à l'oeil. Mais une remarque sur ce fait faisait douter les enfants du fait que le cercle soit un "vrai" cercle, ou du fait que le pliage soit bien fait, mais ils ne doutaient jamais de la "justesse" de la procédure.

Nous pensons pouvoir rattacher les procédures apparues à des conceptions différentes du centre du cercle :

- La technique de pliage et celle consistant à tracer à l'oeil le diamètre horizontal et le diamètre vertical proviennent de la même conception du centre. Le centre est au milieu, on l'obtient donc en partageant deux fois le disque en deux parties isométriques et cela, le long de deux directions privilégiées, l'horizontale et la verticale.

L'enthousiasme pour le pliage manifesté par les enfants qui traçaient les deux diamètres à l'oeil, nous prouve, si besoin en était, que ces deux procédures proviennent de la même conception. La technique par pliage est seulement plus "sûre".

- La construction des cordes parallèles provient d'une certaine conception du diamètre qui serait plutôt une conception ensembliste : c'est la corde de longueur maximale dans une direction donnée. Ensuite le centre est reconnu comme milieu des diamètres.

Bien que cette conception ne puisse pas déboucher sur une technique aussi rapide et performante que le pliage, cela n'a pas empêché ses six adeptes de s'y accrocher. Cela tendrait à prouver que les deux conceptions, sous-jacentes aux techniques mises en oeuvre, sont de nature différente et qu'il n'est pas aisé pour les enfants de passer de l'une à l'autre.

Remarque - Il y a moins de constructions à l'oeil lors de la séquence que lors de la préexpérimentation. On peut attribuer cela à deux causes. La première est que lors de la préexpérimentation, les enfants vérifiaient leur construction en mesurant les diamètres. Or si on trace des cordes par un point proche du centre, leurs longueurs sont très voisines. Ce n'est plus du tout le cas si on mesure les"rayons" procédure beaucoup plus "exigeante" utilisée lors de la séquence. La deuxième est que lors de la séquence, les enfants avaient affaire à une figure découpée qu'il est beaucoup plus facile de plier qu'une feuille comportant plusieurs dessins.

Il est amusant de remarquer que les maîtresses des deux classes ont, toutes les deux, profité de cette séance pour introduire le concept de diamètre et pourtant cela n'avait pas été prévu lors de la préparation de la séance.

Message téléphonique

Première phase : le dessin du cercle

Bien que tous les enfants aient des compas à leur disposition, ils ont utilisé des technologies très diverses pour construire leurs cercles :

- deux enfants ont utilisé l'empreinte du couvercle d'une boite cylindrique? Ils ont ensuite découpé le disque obtenu, puis l'ont plié pour obtenir le centre. Ils ont alors mesuré les rayons.

- quatre enfants dessinent des segments d'égales longueurs ayant une extrémité commune. Cela leur donne un tracé du cercle point par point

- un enfant a utilisé cette technique pour dessiner un secteur. Il a ensuite découpé ce secteur et l'a fait tourner autour de son centre pour tracer un cercle.

- deux enfants ont tracé les deux diamètres horizontal et vertical et essaient de dessiner le cercle à la main.

- six enfants font tourner une règle, ou une bande de papier ou une ficelle, punaisés au centre.

- Les autres enfants dessinent un cercle au compas.

Ce qui est très surprenant, c'est que quelque soit le procédé de construction employé, les enfants découpent le cercle et le plient en quatre pour avoir le centre et ils mesurent ensuite les rayons ainsi matérialisés.

Un autre fait surprenant est que peu d'enfants utilisent le compas (50%) pour tracer le cercle, mais cela peut provenir du fait qu'avant cette séance, les enfants ne s'étaient pas servis du compas et ils ont pu penser que c'était toujours la même règle : on doit se débrouiller sans compas.

Deuxième phase : les messages

Un malheureux contre temps nous a privées des messages des enfants à Montrouge, mais ils différaient très peu de ceux des enfants de Melun qui sont donc suffisamment représentatifs

Nous allons classer les messages des enfants en utilisant les mêmes catégories que lors de la préexpérimentation. 20 enfants ont fait un premier message, 4 en ont refait un deuxième car le récepteur n'acceptait pas le message et 1 a raccourci son message à la demande de la maîtresse.

La catégorie I est vide, en effet tous les enfants ont indiqué une mesure en moins.

La catégorie II est vide, aucun enfant ne fait allusion au compas.

La catégorie III contient 3 messages, en effet 3 enfants ont fait un message contenant une indication de mesure mais sans préciser s'il s'agit du rayon ou du diamètre:

Par exemple "J'ai plié, il mesure 11 cm, il est moyen"

La catégorie IV est vide, aucun enfant ne fait attention à la longueur et à la largeur du cercle.

La catégorie V est divisée en 3 parties :

V_a . les messages qui ne contiennent que la mesure du diamètre, il y en a 4
V_b . les messages qui ne contiennent que la mesure du rayon, il y en a 1
V_c . les messages qui contiennent les mesures du rayon et du diamètre, il y en a 16

Les messages de la catégorie III n'ont pas tous le même sort, deux sont rejetés (5,7cm et 5 cm), un est accepté (11 cm), c'est logique, la feuille était trop petite pour faire facilement un cercle de rayon 11 cm.

Les deux messages rejetés sont correctement corrigés, par précision du diamètre ou du rayon.

Dans la catégorie V, il y a deux messages qui ne respectent pas la formule 2 R = D, un est accepté (5, et 10,5) et il est décodé en 5 cm de rayon. Un est rejeté, il était D = 15,8 et R = 8,2, il est refusé, l'émetteur corrige le message en D = 16,4 et R = 8,2 (c'est assez amusant, car son cercle mesure réellement D = 15,8 et R = 7,9)

Si on compare ces messages avec ceux de la préexpérimentation on constate une très nette différence :

./...

	Cat. I	Cat. II	Cat. III	Cat. IV	Cat. Va	Cat. Vb	Cat. Vc
Préexpérimentation	21%	8%	37%	5%	3%	8%	18%
						29%	
Après séquence	0%	0%	13%	0%	16%	4%	67%
						87%	

Après la séquence, la relation D = 2 R n'est pas respectée par 2 enfants sur les 20, dans la préexpérimentation, elle est n'est pas respectée par 5 enfants sur 7.

Au cours de la séquence, les enfants ont presque tous pris conscience du fait qu'un cercle est caractérisé par la longueur de son diamètre ou de son rayon (87%). Ils donnent le plus souvent (67%) les deux mesures, mais nous n'avions pas valorisé la briéveté du message; cela aurait sans doute changé si nous l'avions fait.

Tous les enfants décodent en utilisant le compas, on ne retrouve donc pas les procédures de constructions du cercle utilisées lors du codage. Cela tient sans doute, au fait, que les enfants se sont rendus compte que nous ne dévalorisions pas l'usage du compas et que par conséquent on "pouvait s'en servir". Ils tracent un segment de la longueur du rayon, ils plantent le compas à une extrémité, l'ouvrent jusqu'à l'autre extrémité et dessinent le cercle. Certains font la même chose mais avec un segment ayant la longueur du diamètre, quand ils constatent leur erreur (comparaison avec le cercle tracé par le codeur) ils mesurent la longueur du rayon et refont une construction correcte.

Les diverses procédures utilisées reflètent toutes les conceptions apparues au cours de la séquence :

- Le décalque du couvercle de boîte cylindrique est une utilisation, à notre avis, de la constance de la courbure, mais sur un plan essentiellement perceptif.

- Le tracé point par point est une utilisation de l'invariance de la longueur des rayons.

- Le tracé par rotation du secteur construit point par point est une procédure mixte; elle utilise à la fois l'invariance de la longueur des rayons et l'invariance de la figure par rotation.

- Le tracé par rotation de bande de papier, (ou ficelle, ou baguette) utilise la conception du cercle comme trajectoire circulaire. Il en est de même pour le tracé au compas.

Il faut noter que les enfants savent que par cette procédure ils obtiennent bien un cercle, mais ils n'ont pas relié cette conception avec celle du cercle ensemble des points équidistants du centre, puisque pour trouver le centre et le rayon de leur cercle, ils sont obligés de le plier pour matérialiser centre et rayon.

Cela est encore sensible lors du décodage, lorsque les enfants se servent du compas, ils matérialisent centre et rayon (par un trait) avant de tracer leur cercle.

IV - CONCLUSION

Nous pouvons affirmer, que les enfants sont capables de mettre en oeuvre plusieurs propriétés du cercle, si on leur fournit la situation appropriée. Les propriétés dont les enfants se sont servis lors de leur séquence sont :

- le cercle a une courbure constante
- le cercle est une courbe invariante par rotation
- le cercle est l'ensemble des points situés à une distance R d'un point O
- le cercle est la trajectoire d'un point en rotation autour d'un point O, restant à une distance R de ce point
- le centre d'un cercle est son centre de symétrie
- les diamètres sont des axes de symétrie
- les rayons et les diamètres ont tous la même longueur et 2 R = D

A la fin de cette séquence, nous avons plus que jamais l'impression que les enfants ont plusieurs conceptions du cercle, mais parcellaires, peu concomittantes et difficilement équivalentes. Ces conceptions restent dans tous les cas intimement liées aux situations qui les ont fait naître. Sans avoir l'ambition d'avoir obtenu que les enfants "comprennent l'infinie multitude des propriétés du cercle par simple conception de sa nature", aptitude que Galilée attribuait à Dieu, nous avons quand même fait progresser les enfants dans leur construction de la notion de cercle, il suffit pour s'en convaincre de comparer les résultats de ces enfants et ceux de la préexpérimentation.

IV - LES TESTS DE CONTROLE

Nous avions prévu de faire passer aux enfants des tests individuels de contrôle, en effet, nous voulions rapprocher les réponses de ces enfants de celles des enfants lors de la préexpérimentation. De plus, les modèles du cercle, mis en jeu, étaient à chaque situation, découverts par un nombre restreint d'enfants, les autres s'en emparant par la suite; il nous a donc semblé important de contrôler que ces modèles pouvaient être mis en oeuvre par la majorité des enfants

Les enfants ont été questionnés individuellement, leurs propos étaient enregistrés au magnétophone, tandis que l'interrogateur prenaient des notes sur le travail des enfants.

Notre questionnaire comprend six volets :

- <u>Un test de perception</u>

On présente à l'enfant un cercle, une ellipse et deux cercles accolés (voir dessin p. 86) . On lui demande "parmi ces trois figures, y a-t-il des cercles ? si oui lesquels et pourquoi ?"

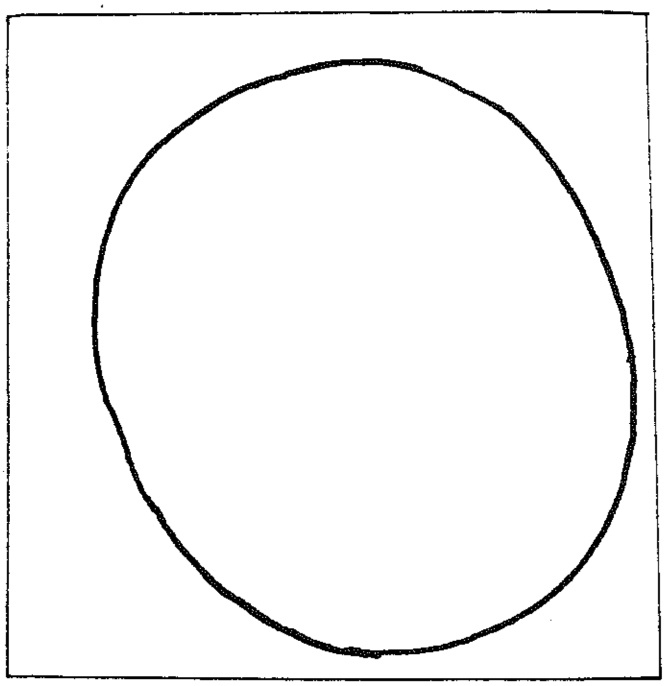
L'enfant peut répondre à la question en utilisant uniquement sa perception et nous pourrons ainsi contrôler qu'elle est bien aussi bonne que nous l'avions prévue.

Ensuite nous avions envie de savoir si les preuves que donneraient les enfants différeraient ou non de celles données par les enfants lors de la préexpérimentation. Si l'enfant ne donnait pas spontanément de preuves, l'interrogateur les sollicitait en disant :

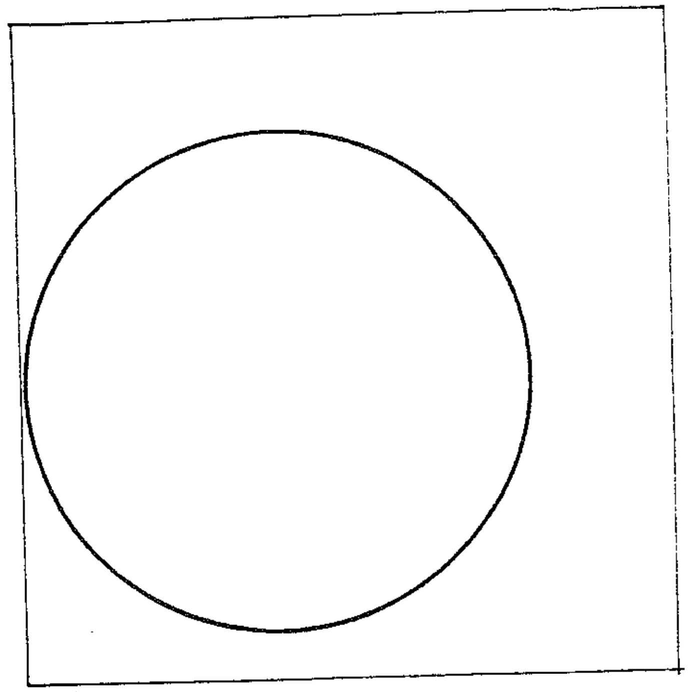
"es-tu sûr ?", "pourquoi?" etc....

TEST DE PERCEPTION

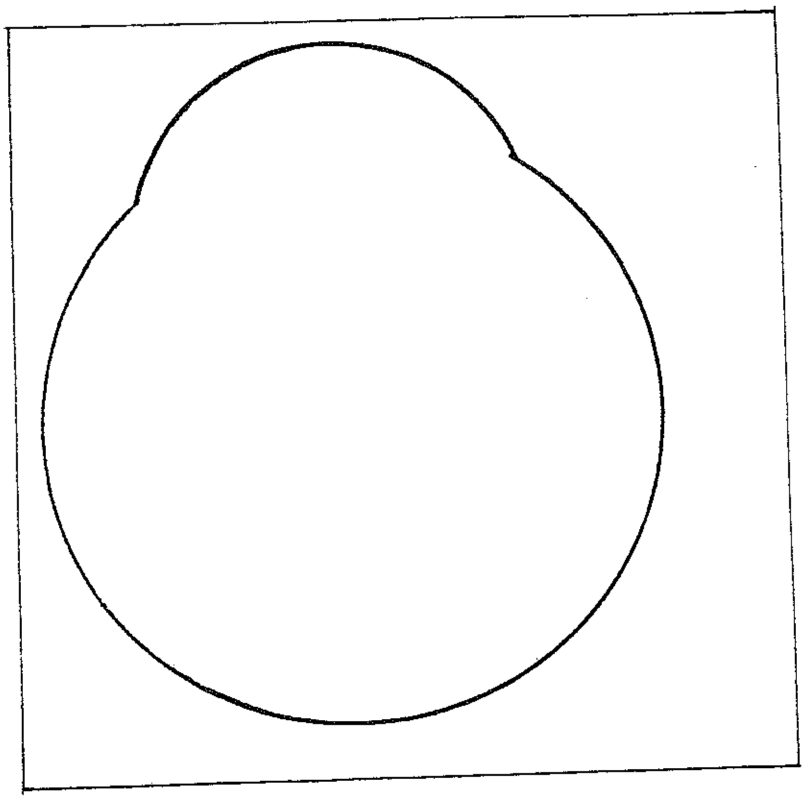
Parmi ces trois figures, y-a-t-il des cercles? Si oui lesquelles et pourquoi ?



R_1



R_2



R_3

Les figures sont présentées aux enfants dessinées dans les rectangles R_1,R_2,R_3 découpés

- Un test sur la symétrie

On présente toujours les mêmes figures (ellipses, cercle, cercles accolés) et on demande aux enfants : "Ces figures ont-elles des axes de symétrie, si oui trace-les".

Les figures sont dessinées sur des petits rectangles de papier, les bords du rectangle de papier n'étant pas parallèles aux éventuels axes de symétrie (sauf pour le cercle bien sûr) et le centre du rectangle n'étant le centre d'aucune des 3 figures.

A Montrouge, les enfants avaient auparavant travaillé sur la symétrie et ils connaissaient le mot "axe de symétrie", s'ils ne le connaissaient pas on faisait allusion à "l'endroit où on peut placer le miroir pour voir la figure" et cela était destiné à les ramener à la situation dans laquelle ils avaient introduit la notion d'axe de symétrie.

A Melun, les enfants avaient travaillé sur la symétrie en CE, mais le mot "axe de symétrie" n'avait pas été introduit. Nous avons alors demandé aux enfants : "est-il possible de plier la figure de façon à ce que les bords soient confondus en transparence, si oui fais le pliage".

Ces questions de symétrie avaient été posées aux enfants au cours de l'activité "Reconnaissance de formes" lors de la préexpérimentation et nous verrons que nous retrouverons quelques comportements très comparables.

- Un test de construction

On demande aux enfants de compléter le plus grand des deux cercles accolés

On ne pose cette question, qu'après s'être assuré, que l'enfant ait bien reconnu qu'il s'agirait d'un cercle à compléter.

Si on se refère aux techniques utilisées lors de la séquence didactique, on peut penser que les enfants ont deux procédures possibles pour la construction de l'arc manquant:

- Ils peuvent plier le plus grand des deux cercles bord à bord et compléter l'arc par transparence

- Ils peuvent par un procédé quelconque construire le centre du cercle et le compléter avec un compas.

- Deux tests sur "centre, rayons, diamètres"

(1) On donne une figure à l'enfant, on vérifie qu'il est d'accord sur le fait qu'il s'agit bien d'un cercle. On lui suggère alors d'en construire le centre, les rayons, les diamètres et on lui demande alors de donner les mesures des rayons et des diamètres.

(2) On demande à l'enfant de construire:

- un cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm
- un cercle de diamètre 10 cm et de rayon 6 cm
- un cercle de diamètre 11 cm

Ces deux tests visaient directement les concepts introduits par les maîtresses lors de la séquence didactique : centre, rayon, diamètre. Ils visaient aussi les techniques de construction introduites lors de la séquence.

La question sur le cercle de diamètre 10 cm et de rayon 6 cm veut tester la connaissance (ou non) de la relation entre longueur du diamètre et du rayon.

En fait, la consigne est longue, il faut donc que l'enfant entende la consigne jusqu'au bout et qu'ensuite il interpréte correctement le sens logique du "et". Il ne faudra donc pas conclure trop hâtivement à la non connaissance de la relation $r = \frac{d}{2}$ de la réponse au test.

Nous avions proposé un diamètre de 11 cm, pour savoir si les enfants continueraient à penser que la longueur du rayon est la moitié de celle du diamètre, lorsque cette moitié n'est pas facile à calculer.

- Un test de construction géométrique

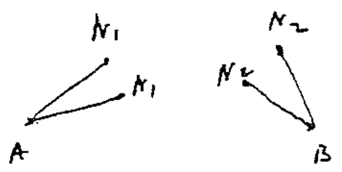
On donne une feuille blanche aux enfants, sur laquelle sont dessinés deux points A et B distants de 8 cm. On demande aux enfants :

1 "Construis un point M à 6 cm du point A et à 5 cm du point B"

2 "Construis un point N à 3 cm du point A et à 4 cm du point B"

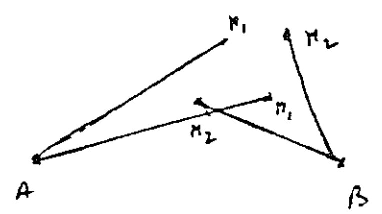
La première chose que nous devons signaler, c'est que l'on peut résoudre ces problèmes sans utiliser de cercles. En effet, il est relativement aisé de construire le point M par approximations successives et de montrer que le point N n'existe pas.

Le problème 2 est d'ailleurs plus facile à résoudre:



On voit assez vite comment minimiser la distance entre N_1 et N_2

Dans le problème 1 c'est un peu moins facile :



On ne voit pas, de façon évidente, quelle stratégie mettre en oeuvre pour minimiser d (M_1,M_2).

Lorsque les enfants n'arrivaient pas ainsi à la solution, nous leur proposions de prendre un compas, voulant suggérer par là que le tracé de certains cercles pourrait les aider.

Pour que cette suggestion soit utilisable, il était nécessaire qu'ils trouvent de quels cercles il s'agissait. La suggestion n'était faite que lorsque les enfants avaient déjà tâtonné, et qu'ils avaient éventuellement tracé quelques points à 6 cm de A; si l'enfant considérait le cercle de centre A et de rayon 6 cm comme l'ensemble des points à 6 cm de A, son problème était résolu; mais on se souvient que dans la séance des portes les enfants avaient du mal à reconnaître le cercle comme ensemble de points.

Nous avions pensé à cette difficulté et nous avions envie de savoir si, individuellement et en fin d'apprentissage, elle avait disparu, ou si elle persistait encore.

Les résultats aux tests ne nous permettront pas forcément de répondre à cette question parce que la tâche était très complexe et l'échec peut être dû à cette complexité:

- il fallait penser à construire le cercle de centre A et de rayon 6
- il fallait comprendre la signification du "et" logique de "un point à 6 cm de A et à 5 cm de B"
- il fallait trouver un point du cercle de centre A et de rayon 6 à 5 cm de B

En définitive, ce dernier test devait révéler chez les enfants une aptitude à introduire les cercles comme outils dans une situation où il n'est pas, a priori, question de cercles (cf. construction des triangles équilatéraux dans la préexpérimentation). Nous pensons qu'une réussite à ce test est l'indice d'une conception du cercle plus élaborée qu'une réussite aux autres tests.

RESULTATS AUX TESTS

Trente six enfants ont été interrogés
Pour faciliter la rédaction nous noterons :

- H et V les diamètres horizontal et vertical du cercle
- Cer (A, r) le cercle de centre A et de rayon r
- d et r les longueurs des diamètres et des rayons.

Test de Perception

1 Le cercle

Tous les enfants ont dit qu'il s'agissait bien d'un cercle

- 5 enfants n'ont pas voulu donner de preuve
- 16 enfants ont donné comme première preuve: "c'est un cercle, parce que c'est rond"
  - . 6 enfants en sont restés là, 10 ont donné une autre réponse
- 25 enfants ont fourni une autre preuve :
  - . 8 ont construit le centre à l'oeil:
    - 2 ont construit des rayons et les ont mesurés
    - 6 ont tracé le cercle au compas.
  - . 9 ont construit H et V à l'oeil et les ont mesurés
  - . 8 ont construit H et V par pliage : 4 les ont mesurés
    - 4 ont tracé le cercle au compas

A part les 8 enfants qui ont construit H et V par pliage, les autres ont une construction à l'oeil, ils n'ont donc ni égalité des longueurs des rayons ni égalité des longueurs de diamètre, ni coïncidence du tracé au compas avec la figure initiale. Cela ne les fait absolument pas douter du fait que la figure est un cercle, mais ils mettent en cause la précision de leur construction - cela prouve deux choses :

- ils sont beaucoup plus convaincus par leur perception, que par leurs essai de preuves.

- exhiber une preuve a, pour eux, un caractère gratuit (puisqu'ils sont déjà sûrs), aussi ne sont-ils pas très acharnés à trouver une preuve "exacte".

Si on compare à la préexpérimentation, on peut constater des points communs :

- il y a beaucoup de constructions à l'oeil
- 17 construisent les deux diamètres H et V et 13 les mesurent

On peut aussi constater des différences :

- il y a construction et mesure de rayons
- il y a 8 procédures "exactes" (sans tâtonnement, ni approximation)
- il y a utilisation du compas pour comparer la figure initiale et le tracé au compas.

L'effet de la séquence didactique est sensible, puisque les procédures utilisées par les enfants sont beaucoup plus diverses et puisqu'il apparaît des procédures "exactes".

(2) Ellipse

- 19 enfants ont affirmé spontanément que ce n'était pas un cercle. 3 en sont restés là
- 13 enfants ont dit : "c'est rond" ou "c'est une ligne courbe" .... puis 7 sur ces 13 ont affirmé que ce n'était pas un cercle.
- 20 enfants ont trouvé une preuve:
  - 6 ont dit : "c'est allongé", c'est "ovale" ....
  - 14 ont essayé de construire le petit axe et le grand axe (soit par pliage, soit à l'oeil) puis les ont mesurés.

Que les constructions soient correctes ou non, la différence de longueur entre les "rayons" a conforté les enfants dans l'idée que ce n'était pas un cercle. Alors que dans le cas du cercle, une différence de longueur entre les "rayons" ne les avaient pas fait douter du fait qu'il s'agissait bien d'un cercle.

On retrouve un comportement très voisin de celui de la préexpérimentation, la seule différence résidant dans le fait que les uns mesurent les "rayons" et les autres les "diamètres".

Les enfants se fient à leur perception plus qu'à toute autre chose pour distinguer un cercle d'une ellipse (même relativement ronde). C'est bien normal, puisque Piaget a montré que les enfants différenciaient cercles et ellipses dès l'âge de 4 ans [7] (Cinq enfants seulement ont utilisé le pliage pour construire les "diamètres H et V de l'ellipse", alors qu'il y en avait 8 pour le cercle, cela tient au fait que les enfants cherchaient en horizontal et en vertical et ne trouvaient pas les axes).

Cercles accolés

Tous les enfants ont affirmé : "ce n'est pas un cercle, parce qu'il y a une bosse". Ils ont amélioré en : "c'est un cercle qui a une bosse"

Aucun ne ressent la nécessité de prouver quoi que ce soit.

Ce test nous a permis a postériori, un retour sur la séquence didactique. En effet, pour les trois premières situations décrites, nous avions fait confiance à la perception des enfants. Les résultats à ce test prouvent que nous avions raison; les enfants ont une excellente perception du cercle, ils se fient entièrement à leur perception pour déterminer si une figure est un cercle; et cela, bien qu'ils connaissent des techniques pour vérifier si une figure est ou non un cercle.

Pour la situation des portes, les enfants avaient dit en parlant de la trajectoire du coin de la porte : "c'est une ligne courbe", ou "c'est une courbure", or pour l'ellipse, certains ont dit des choses tout à fait analogues et nous avons la preuve qu'ils ne voulaient pas dire qu'il s'agissait d'un cercle, mais qu'il s'agissait d'une figure régulièrement arrondie. Donc il n'est pas du tout sûr que les enfants parlaient de cercle pour la trajectoire du coin de la porte. Ce sont les maîtresses qui ont dévoilé prématurément que c'était un "vrai cercle", changeant du même coup la nature de la situation.

Test sur la symétrie

(1) Cercle

- Quatre enfants commencent par un pliage bord à bord du rectangle contenant le cercle :
  . 3 rectifient et plient le long de H et de V
  . 1 en reste là

- Trois enfants commencent par une construction par tâtonnements du centre du cercle :
  . 1 abandonne et plie le long de H et de V
  . 2 persistent et tracent des "diamètres".

- Vingt-neuf enfants plient le long de H et de V :
  . 10 affirment qu'il n'y a pas d'autres axes de symétrie
  . 1 affirme que toute corde (diamètre) passant par l'intersection de H et de V (le centre) est axe de symétrie
  . 18 ont plié le long de H et de V mais aussi le long d'autres diamètres :
    - 10 affirment que les plis sont les seuls axes de symétrie
    - 8 affirment que tout diamètre est axe de symétrie

A Melun, les enfants ont tous plié, puisque la question était formulée à l'aide de pliage, il y a quand même quatre enfants qui ont précisé que tout diamètre pouvait être un "pli" donc un axe de symétrie.

La tendance première de tous les enfants est de ne chercher d'axes de symétrie que dans les directions horizontales et verticales. Presque tous en seraient restés là si nous n'avions pas posé des questions du genre : "c'est tout ? , il n'y en a pas d'autres ?" etc.....

C'est un comportement que l'on a rencontré dans la préexpérimentation et dans la séquence, ces axes horizontaux et verticaux sont des axes très différents des autres; on peut trouver cette même constatation dans les oeuvres de Piaget [7et8].

Remarque : Dans cet exercice, l'horizontale et la verticale étaient données par les bords du petit rectangle sur lequel était dessinée la figure.

(2) Ellipse

- Six enfants plient la feuille bord à bord et en concluent que l'ellipse n'a pas d'axes de symétrie

- Vingt-quatre enfants essaient de trouver un axe de symétrie verticale:

  - 13 n'y arrivent pas : . 8 concluent qu'il n'y a pas d'axe de symétrie, 4 essaient de trouver un axe de symétrie horizontale, 3 échouent et concluent que l'ellipse n'a pas d'axe de symétrie, 1 seul en tâtonnant réussit à trouver le petit axe de l'ellipse

  - 11 finissent en tâtonnant à partir de la verticale à trouver le grand axe de l'ellipse : 10 cherchent alors à partir de l'horizontale, parmi ceux-là 6 trouvent le petit axe de l'ellipse. Un seul enfant commence à chercher à partir de l'horizontale, en tâtonnant, il finit par trouver le petit arc et s'arrête là

- Vingt et un enfants sont persuadés après ces manipulations que l'ellipse n'a pas d'axe de symétrie (5 enfants n'ont rien fait).

On retrouve ici des phénomènes très comparables à ceux que l'on avait observés dans la préexpérimentation (Activité 2 : reconnaissance de formes).

Les enfants essaient de trouver des axes de symétrie horizontal ou vertical , s'ils n'y arrivent pas, ils sont vite désorientés et ils ont tendance à penser qu'il n'y a pas d'axes de symétrie. Lorsqu'on les questionne pour les faire douter, certains essaient d'autres pliages, et il est amusant de constater que, parfois, au hasard de leurs pliages ils trouvent un axe de symétrie et qu'alors ils sont étonnés.

Devant notre insistance certains essaient d'autres pliages, mais avec un tel manque d'empressement que l'on voit bien qu'ils sont persuadés de ne rien trouver.

On peut se demander si le fait, d'avoir trouvé des axes de symétrie autres que H et V pour le cercle, a aidé ou non les enfants pour les axes de l'ellipse :

. Parmi les 11 enfants qui n'avaient trouvé que H et V pour axes de symétrie du cercle, 10 n'ont pas trouvé d'axe de symétrie pour l'ellipse.

. Parmi les 21 enfants qui avaient trouvé d'autres axes de symétrie que H et V :

- 12 ont trouvé au moins un axe de l'ellipse
- 1 n'en a pas trouvé mais dit qu'il y en a peut-être
- 8 ont pensé que l'ellipse n'avait pas d'axes

Au vu de ces chiffres, on peut conclure que si pour le cercle, les enfants n'ont pas trouvé autre chose que H et V, alors ils n'ont pas trouvé d'axes pour l'ellipse; mais s'ils ont trouvé autre chose que H et V pour le cercle, cela n'est pas suffisant pour qu'ils aient trouvé les axes de l'ellipse. La difficulté de trouver les axes de l'ellipse était suffisante pour leur faire penser que si H et V n'étaient pas axes de symétrie, alors l'ellipse n'avait pas d'axes.

3 Cercles accolés

- Quatre enfants plient la feuille bord à bord :
  - 3 rectifient et trouvent l'axe de symétrie par pliage
  - 1 affirme qu'il n'y a pas d'axe de symétrie
- Huit enfants essaient de construire l'axe de symétrie par une construction géométrique :
  - 2 échouent et concluent qu'il n'y a pas d'axe de symétrie
  - 4 trouvent l'axe par pliage
  - 2 réussissent
- Vingt-deux enfants commencent à plier dans la direction verticale (très proche de la direction de l'axe de symétrie) :
  - 2 échouent et concluent qu'il n'y a pas d'axe de symétrie
  - 20 tâtonnant à partir de la verticale trouvent l'axe de symétrie.
- Douze enfants commencent à plier dans la direction horizontale et concluent qu'il n'y a pas d'axe dans cette direction
  - 2 enfants n'ont rien fait.

On peut encore ici constater la puissance de l'idée qu'il y a des axes de symétrie dans les directions H et V puisque douze enfants essaient la direction H alors que leur perception tend à leur prouver qu'il n'y en a pas dans cette direction. Leur perception doit les aider plus que pour l'ellipse puisque sur les 4 qui plient bord à bord un seul persiste, alors que les 6 qui plient bord à bord pour l'ellipse, persistent, ils sont donc persuadés d'avance qu'ils ne trouveront pas d'axe de symétrie donc une preuve, même fausse, leur suffit.

Test de construction

Deux enfants seulement n'ont pas su quoi faire, tous les autres ont mis en oeuvre une conception ou une autre :

. 14 enfants ont complété le cercle en plantant le compas à peu près au centre, et en rectifiant par approximations successives.

. 3 enfants ont plié le long de H et ont planté leur compas au milieu de H

. 12 enfants ont plié le long de H et de V et ont planté leur compas au point de rencontre de H et de V

. 5 enfants ont plié et décalqué l'arc manquant par transparence

Les enfants ont utilisé des conceptions très diverses pour résoudre leur problème :

- Les enfants, qui ont utilisé le compas planté à peu près au centre, ont utilisé l'invariance de la courbe par rotation et l'aspect trajectoire circulaire du cercle.
- Les enfants, qui ont tracé par transparence ont utilisé la constance de la courbure
- Les autres ont d'abord construit le centre comme centre de symétrie, puis ont utilisé le compas donc l'invariance par rotation et l'aspect trajectoire circulaire.

Test de connaissance

Construction du centre

- Douze enfants ont commencé par tâtonner avec la pointe du compas pour trouver le centre: 6 en sont restés là, 6 ont ensuite plié le long de H et V.
- Vingt deux enfants ont tout de suite plié le long de H et V pour construire le centre
- Deux enfants plient la feuille bord à bord. L'un persiste, l'autre plie le long de H et V

On peut être un peu étonné du fait que douze enfants commencent par tâtonner alors qu'ils ont,peu de temps avant, construit les axes de symétrie. Il faut croire que cette propriété du centre n'est pas mobilisée très facilement chez eux et il faut que les enfants se heurtent à l'imprécision d'un procédé à l'oeil, pour la mobiliser.

C'est quand même la construction du centre, comme centre de symétrie qui prévaut; on avait déjà vu cette préférence, bien normale, dans la séquence didactique et on l'attendait d'autant plus qu'on avait fait construire des axes de symétrie peu de temps avant.

Construction et mesure des rayons et diamètres

- 28 enfants donnent une définition correcte du diamètre
- 26 enfants donnent une définition correcte du rayon
- 5 enfants pensent que tous les diamètres n'ont pas même mesure, 2 enfants se corrigent après mesure effective
- 5 enfants ne sont pas gênés de trouver $d \neq 2\ r$

Seuls deux enfants ne savent pas tracer des diamètres ou des rayons. Nathalie appelle diamètres des cordes parallèles et Mezziane ne fait rien. Tous les autres savent en tracer, même s'ils ne savent pas en donner une définition correcte.

C'est une acquisition certaine des enfants puisqu'avant la séquence didactique, ils ne savaient rien sur rayons et diamètres.

Cinq enfants n'ont pas été gênés de trouver $d \neq 2\ r$, mais on ne peut pas en conclure qu'ils ne connaisssent pas la relation. En effet r et d étaient donnés en "cm et mm" et il n'était pas évident de calculer le double ou la moitié (les enfants ont 8-9 ans).

Construction du cercle $d = 8$ cm $r = 4$ cm

- 27 enfants tracent le cercle immédiatement correct
- 8 cemmencent par tracer le cercle $r = 8$ cm mais se corrigent
- 1 enfant ne sait pas quoi faire

Les enfants de Montrouge ont appris en dessin la technique du compas, aussi ouvrent-ils directement leur compas à 4 cm en se servant de leur règle. Les enfants de Melun n'ont eu aucun apprentissage de la technique du compas, ils tracent H de 8 cm puis au milieu de H, V = 8 cm (l'orthogonalité est à l'oeil), puis ils plantent leur compas à l'intersection de H et de V et tracent le cercle. Ils reviennent à l'utilisation du centre comme intersection de H et V

Construction du cercle d = 10 cm r = 6 cm

. 27 enfants répondent immédiatement que c'est impossible

. 8 enfants ont tracé un cercle d = 10 cm

5 enfants ont relevé le fait que $r \neq 6$ cm

3 enfants n'ont pas vu de contradiction

. La question n'a pas été posée à un enfant (celui qui ne savait quoi faire).

Parmi les 3 enfants qui n'ont pas vu de contradiction, un au moins avait utilisé auparavant la relation d = 2 r, les 2 autres au contraire ne la connaissaient manifestement pas. Les 6 enfants, qui ont tracé leur cercle, n'ont, soit qu'écouté le débur de la consigne, soit ont du mal à interprêter le "et" logique de d = 10 cm et r = 6 cm.

Construction du cercle d = 11 cm

. 21 enfants ont tracé immédiatement le cercle

. 12 enfants ont dit que c'était impossible, mais ont changé d'avis lorsqu'ils ont su que 11 : 2 = 5,5

. 2 enfants ont dit que c'était impossible et n'ont pas changé d'avis. La question n'a pas été posée à 1 enfant.

Seuls deux enfants ont été longuement perturbés par cette question, tous les autres se sont très rapidement corrigés, leurs convictions n'étaient donc pas très fortement ébranlées.

En conclusion, les notions de centre, de diamètre, de rayon se sont améliorés chez les enfants; il faut dire que ce sont ces notions qui ont fait l'objet de la plus forte institutionnalisation de la part des maîtresses, cela a sans doute son importance.

Test de construction géométrique

Construction de M

. 3 enfants n'ont rien fait, soit qu'ils n'aient rien trouvé, soit qu'on ne leur ait pas posé la question

. 6 enfants trouvent M par approximations successives et, n'ayant pas été sollicités pour construire des cercles, en restent là.

. 2 enfants échouent par approximations. On leur suggère d'utiliser des cercles, mais la suggestion ne leur ait d'aucune utilité, ils en restent là.

. 1 enfant trace directement Cer (A,6) et cherche à la règle un point de ce cercle à 5 cm de B. Il le trouve.

. 2 enfants utilisent ce même procédé, mais après des essais par approximations et sans suggestion de l'interviewer

. 2 enfants, après quelques essais par approximations, mais sans aucune suggestion, tracent Cer (A,6) et Cer (B,5) et trouvent M (et même M' le symétrique de M).

. 6 enfants, après quelques essais pour approximations, et après suggestion d'utiliser un compas tracent Cer (A,6).

  5 alors tracent Cer (B,5) et trouvent M (et même M')

  1 cherche à la règle le point de Cer (A,6) à 5 cm de B et le trouve

. 7 enfants, après quelques essais par approximations, et après suggestion d'utiliser un compas, tracent Cer (A,6), mais après avoir tracé d'autres cercles aberrants (par exemple un cercle centré à 6 cm de A et passant par A. Ils tracent aussi Cer (B,5) mais ne trouvent pas M.

. 7 enfants ne trouvent pas par approximations et l'interviewer ne leur suggère pas de prendre un compas.

. 1 enfant trouve par approximation, et en reste là après suggestion d'utiliser un compas.

<u>Remarque</u>

8 enfants pensent avoir résolu le problème en ayant dessiné un point à 6 cm de A et un point à 5 cm de B. Il faut l'objection de l'interviewer pour qu'ils cherchent autre chose. On constate encore ici une difficulté au niveau du "et" logique : à 6 cm de A <u>et</u> à 5 cm de B

Les enfants ne pensent pas automatiquement qu'il y a un lien entre ce test et les autres, puisqu'un seul enfant songe tout de suite à tracer des cercles. Quatre autres enfants dessinent spontanément des cercles, mais ils avaient auparavant tenté de trouver M par approximations.

Pour cinq enfants seulement, le cercle est devenu un outil capable de les aider dans un problème où il n'est pas question de cercle.

Parmi les seize enfants qui ont été sollicités pour utiliser le compas, tous avaient plus ou moins tenter de trouver le point M par approximations, mais ils n'en étaient pas tous au même point pour la notion de cercle, car seulement 6 trouveront le point M. Les autres tracent des cercles par ce qu'on leur suggère, mais sans du tout voir en quoi cela pourrait les aider à résoudre leur problème.

Ils trouvent, par exemple, un point appartenant à la fois à Cer (A,6) et Cer (B,5) et ils doivent mesurer pour trouver les distances de ce point à A et à B. Tout ce passe comme s'il n'y avait pas équivalence entre le cercle de centre A et de rayon 6 cm et l'ensemble des points qui sont à 6 cm de A.

Il semble aussi que l'on retrouve ici le même phénomène que dans la trajectoire de la porte : le tracé de quelques points a un effet bénéfique sur la modélisation de la situation (10 enfants sur 18 réussissent). En fin de compte 17 enfants seulement ont construit le point M, mais on ne pouvait pas attendre de ce test un résultat analogue à celui du test sur rayon, diamètre, centre. En effet, c'était un problème complètement nouveau dans lequel le cercle n'intervenait plus en tant que tel, mais en tant qu'instrument, la situation était donc beaucoup plus complexe (cf situation n° 6 de la préexpérimentation).

Construction de N

- 4 enfants démontrent la non existence de N en utilisant l'inégalité triangulaire.
- 4 enfants affirment, en se fondant sur leur perception, étayée par quelques essais par approximations, la non existence de N
- Parmi les 5 enfants, qui avaient tracé des cercles sans sollicitation spéciale pour construire M
  - 3 tracent Cer(A,3) et Cer (B,4) pour prouver la non existence de N
  - 1 utilise l'inégalité triangulaire
  - 1 trace Cer (A,3) et montre que la distance à B est toujours supérieure à 4 cm
- 9 enfants, après suggestion de prendre un compas, tracent Cer (A,3) et Cer (B,4) et concluent à la non existence de N
- 6 enfants, après suggestion de prendre un compas, tracent Cer (A,3) et Cer (B,4) et ne savent pas qu'en conclure.
- 8 enfants n'ont rien fait, soit que l'interviewer ait renoncé à présenter la situation, soit qu'ils n'aient pas su quoi faire

On peut remarquer qu'il était plus facile de conclure à la non existence de N que de construire M (ce que nous avions prévu), en effet, 27 enfants ont réussi pour N et seulement 19 pour M.

Seuls les enfants qui avaient utilisé d'eux-mêmes les cercles pour M les réutilisent spontanément pour N. Pour les autres, il faut, de nouveau, une sollicitation de l'intervewer, mais cela a plus de succès, puisque 9 enfants sur 15 réussissent pour N (6 enfants sur 16 seulement pour M). Il était donc plus facile de conclure à la non existence de N "en voyant" les deux cercles, que de trouver M comme intersection des deux cercles. Peut-être est-ce encore une conséquence du fait que les enfants ont tendance à utiliser les cercles globalement et donc à ne pas en individualiser les points.

En conclusion, ces tests nous ont permis de mettre en évidence certaines stabilités liées à la notion de cercle chez l'enfant :

- la perception est plus sûre qu'une construction
- H et V sont des diamètres privilégiés
- le cercle n'est pas facilement conçu comme "ensemble de points"

Ils nous ont permis aussi de constater l'effet bénéfique de l'institutionnalisation des notions telles que rayons et diamètres.

Enfin, ils ont montré que peu d'enfants étaient en mesure de se servir du cercle comme d'un outil pour résoudre un problème

V - PHASES DE RAPPEL - INSTITUTIONNALISATION DU SAVOIR

Nous avons souligné dans le chapitre introductif que l'étude détaillée des phases de rappel nous paraissait susceptible de fournir des informations dans deux directions :

- les effets de l'apprentissage tels que l'on pouvait les appréhender de l'intérieur de la classe
- la façon dont le maître concevait cet apprentissage

Nous devons préciser que Madame Latour, maîtresse du CE_2 de Montrouge travaillait depuis cinq ans avec Madame Douady, animatrice de l'IREM. Au début de leur collaboration, les rappels jouaient dans la classe de Madame Latour un rôle très classique de remise en train. Mais, au cours de ces cinq années, elles décidèrent progressivement de leur accorder un rôle plus important. Ainsi, nombre de faits rapportés dans ce chapître, concernent, en particulier, la structure des rappels :

- le fait que les rappels ne prennent pas en compte la ou les deux séances qui précèdent mais toute une unité d'enseignement,
- le fait que l'accroissement du nombre d'activités à relater dans le même laps de temps oblige à des synthèses, par exemple, ne sont pas le fruit du hasard ou d'une organisation inconsciente mais bien d'une intention délibérée. Nous regrettons de ne pas avoir pu disposer d'informations suffisamment précises sur les rappels de la classe de Melun pour mener une étude comparative qui n'aurait sans doute pas manqué d'apporter des informations intéressantes.

I - METHODOLOGIE

Dans un premier temps, nous avons relu tous les décryptages sommaires des séances. Ceci nous a confirmé dans nos convictions concernant l'intérêt des rappels et permis de remarquer qu'ils semblaient obéir à une struture commune.

Nous avons alors repris systématiquement toutes les bandes magnétoscopées en vue de nous assurer que les notes dont nous disposions, à cause de leur manque de précision, ne nous conduisaient pas à formuler des hypothèses erronées, en particulier, en ce qui concernait la structure des rappels.

Ensuite, nous avons décrypté exactement :

- tous les rappels relatifs à une même situation pour étudier leur évolution (nous avons choisi la situation des couronnes)
- tout ce qui dans les rappels concernait les phases d'institutionnalisation
- le rappel de la séance du 2 Février qui nous a paru particulièrement intéressant par sa durée (environ une demi-heure), sa position dans la suite des séquences. Le fait qu'il reprenait toutes les activités depuis le début.

Nous allons essayer de présenter maintenant assez brièvement les faits marquants qui sont ressortis de cette étude.

II - STRUCTURE DES RAPPELS

Les rappels n'apparaissent pas simplement comme des moments destinés à rafraîchir la mémoire des élèves et relancer leur activité intellectuelle. Contrairement à ce qui se passe dans la plupart des classes que nous avons observées, ils ne se bornent pas à résumer les activités de la séance qui précède mais prennent le plus souvent en compte toute une succession de séances (5 rappels sur 7 reprennent ici, de façon plus ou moins détaillée tout ce qui a été fait depuis le début).

19 janvier	Rappel de la première séance
23 janvier	Rappel général
26 janvier	Rappel sur les couronnes
30 janvier	Rappel général
2 février	Rappel général
6 février	Rappel sur les portes
16 février	Rappel général très synthétique

Donc, nécessairement, au fur et à mesure que s'accumulent les activités, le récit s'épure, s'affine, pour ne conserver que les temps forts de la conquête et ce qu'il faut en retenir. Il est parfois aussi l'occasion d'un approfondissement de la réflexion sur les activités passées, preuve qu'il a son rôle à jouer dans la constitution du savoir.

Nous allons illustrer ceci par les rappels concernant les couronnes.

A - Evolution des rappels sur les couronnes

Au cours de la séance du 23 janvier, les élèves reconstituent les couronnes à partir des morceaux trouvés dans les enveloppes. Suit une phase collective où ils présentent leurs procédures de reconstitution. La séance se termine par la construction par équipes, du morceau manquant.

Au cours de la phase collective, les enfants parlent de courbure, d'épaisseur, mais il y a sans cesse des quiproquos, l'expression "plus gros" faisant tantôt référence à la taille du cercle extérieur de la couronne, tantôt à l'épaisseur. L'épaisseur elle-même n'est pas vraiment définie. Il semble implicitement admis que c'est l'épaisseur au bord et qu'elle se retrouve partout à l'intérieur du morceau.

Florence : "j'ai pris un morceau Z et un morceau A. Au début çà commencait bien

La Maîtresse : Qu'est-ce que tu as fait ? Tu les a mis

F. : L'un sur l'autre, au début çà commençait bien mais, à la fin, çà commençait un peu à descendre.

M. : Pourquoi ? Qu'est-ce qui commençait à descendre?

F. : Le bout A commençait à descendre

M. : Non! La cour

F. : La courbure A tandis que la courbure Z commençait à monter. Comme la couronne A descendait, donc çà devait faire un rond plus petit. Comme la couronne Z remontait, elle était plus grosse. Elle n'avait pas la même épaisseur que la couronne A. Donc elle était plus grosse et elle faisait un cercle plus gros.

M. : Ne mélange pas tout. Il y a une couronne A et une couronne Z. Tu as pris un morceau de A et un morceau de Z. Tu as regardé la ligne courbe et tu as remarqué qu'au début c'était

F. : Au début çà allait bien

M. : Mais à un moment donné, la ligne

E. : <u>Courbe de A descendait</u>

M. : La ligne

E. : <u>Courbe de Z montait</u>

M. : Qu'est-ce que tu en as déduit ?

F. : Que quand la courbe Z montait, elle était plus grosse que la couronne A. La couronne Z était plus grosse, çà faisait un cercle plus gros.

M. : Un cercle plus grand, oui, un cercle plus grand.

Les enfants vont écrire au tableau

$$A < Z$$

Mais, juste après, quand il s'agit de comparer aux précédents un morceau de la couronne V, plus épaisse mais de courbure extérieure moindre, ils

ils continuent :

$$A < Z < V$$

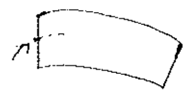
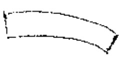
ce qui ne fait pas l'affaire de la maîtresse qui croyait la comparaison basée sur la courbure extérieure.

M. : Tu es sûre que la couronne V est la plus grande ?

Pierre : Oui, elle est encore plus épaisse que les autres!

La discussion se poursuit ainsi un bon moment, les élèves n'arrivant pas à envisager courbure extérieure et épaisseur comme deux variables indépendantes. Sylvie et Pierre débloqueront la situation :

Sylvie : "Ils peuvent avoir la même courbure, s'il y en a un plus gros que l'autre alors, çà ne peut pas marcher"

Pierre : "Si on repère les couronnes, si tu mets ce morceau  avec celui-ci  il arrivera ici. Il faut voir les deux".

La maîtresse souligne cette phrase : "Ah! il fallait voir les deux" mais n'insiste pas plus et les élèves se lancent dans la construction du morceau manquant.

Dès le rappel du 26 février (séance suivante), les difficultés du 23 semblent avoir disparu. Bérangère souligne tout d'abord le rôle de l'épaisseur. La maîtresse reprend son explication puis met tout de suite l'accent sur l'importance de ce qui a été trouvé :

M. : "Voilà, vous voyez ce qu'elle a fait, elle a pris ses morceaux de couronne, elle les a mis les uns sur les autres et elle a dit : voilà, il faut que mon épaisseur de couronne soit la même pour qu'ils appartiennent

E. : A la même couronne

M. : Est-ce que çà suffisait aussi la même épaisseur ?

Pierre : Et la même courbure!

M. : Ah! et la même courbure! d'accord. Là, nous sommes bien renseignés, nous avons des renseignements très importants. Qu'est-ce qu'il faut pour que les morceaux appartiennent à la même couronne ? Quels sont les renseignements indispensables pourque Sabine (absente le 23) puisse faire sa couronne?

Sabine : Il faut que la courbe soit la même et il faut que l'épaisseur aussi soit de la même grosseur".

Note : Dans les citations, les parties soulignées sont prononcées simultanément par un grand nombre d'élèves. C'est ce que nous nommerons les phrases de choeur.

Tout ceci est repris encore une fois, puis les élèves finissent la construction du morceau manquant, tracent le disque intérieur et en cherchent le centre.

Le 30 janvier, la comparaison des morceaux est traitée dans le rappel plus rapidement mais pratiquement dans les mêmes termes. Par contre, à la faveur du récit de la construction du morceau manquant, une troisième variable apparaît : la courbure du cercle intérieur.

Franck : "J'ai tracé les deux traits
M. : Lesquels ?
F. : Celui de la courbure et celui du dessous
M. : Alors, celui du dessus et celui du dessous. Celui du dessus, comment l'appelle-t-on ?
E. : l'extérieur
M. : Et celui du dessous c'est
E. : l'intérieur

Ceci sera repris par d'autres élèves racontant à leur tour leur construction.

Exemple : "J'ai tracé la courbe intérieure et extérieure"

Mais pour l'instant, les trois variables : courbure intérieure, courbure extérieure et épaisseur ne sont pas reliées. Ceci sera amorcé dans la partie du rappel du 2 février consacrée à la comparaison des morceaux :

Pierre : "Et j'avais dit que si la largeur de la courbure est pas la même
M. : Si la largeur de la couronne
P. : De la couronne n'est pas la même, çà peut pas faire une galette, parce que s'il y a un morceau tout fin qui a la même courbure qu'un morceau, qu'un morceau très gros, çà vient pas de la même galette.
M. : Cà venait pas de la même galette. Est-ce qu'ils pouvaient avoir la même courbure ? Est-ce qu'un morceau fin peut avoir la même courbure qu'un morceau large ?
E. : Oui
E. : Un morceau moins large, l'extérieur
E. : Oui, celle de l'extérieur mais pas de l'intérieur
M. : Voilà, très bien, oui, celle de l'extérieur d'accord mais pas
E. : Celle de l'intérieur
M. : Ou celle de
E. : L'intérieur

M. : et pas celle de
E. : l'extérieur
M. : Y en a qu'une sur les deux mais pas les deux. Alors, là, qu'est-ce que nous avions bien remarqué? Pour que ces morceaux de couronne appartiennent à la même couronne, qu'est-ce qu'il fallait ?
E. : Que la courbure soit la même et la largeur soit la même
M. : Voilà, que la courbure soit la même, que la largeur soit la même, d'accord."

Dans la partie consacrée à la construction du disque manquant, les rayons des cercles intérieurs et extérieurs de la couronne vont à leur tour intervenir et la relation les reliant à l'épaisseur sera laborieusement explicitée

M. : "Est-ce que le rayon du cercle extérieur et le rayon du cercle intérieur c'était la même ?
Stéphane : Non
M. : Non ?
S. : Le rayon du cercle extérieur est plus grand que celui du cercle intérieur
M. : Ah! Bon! de combien ?
S. : Je sais pas
M. : Tu sais pas ?
Un long silence dans la classe puis Bérangère dit d'un ton hésitant: "De la largeur de la couronne"
M. : De la largeur de la couronne. Bon c'est bien!"

Après cette parenthèse, venons-en à la structure même des rappels, nous allons la décrire en explicitant les règles auxquelles les rappels semblent soumis.

B - Structure d'un rappel

REGLE 1 : Les activités sont reprises dans leur ordre chronologique
REGLE 2 : Chaque activité est découpée en épisodes respectant eux aussi le déroulement chronologique.

Par exemple, tout rappel sur les couronnes sera formé de trois épisodes :
- comparaison des morceaux
- construction du morceau manquant
- construction du centre du disque

REGLE 3 : Chaque épisode est lui-même presque toujours formé de deux parties.

★ Dans la première, la maîtresse interroge les élèves pour leur faire expliciter :

- l'objet de l'épisode
- les consignes
- ce qu'ils ont fait eux pour résoudre le problème posé.

Lors de cette phase, elle interroge, surtout dans les premiers rappels qui suivent une activité, un grand nombre d'enfants. Elle choisit les élèves et oriente le questionnement de manière à obtenir un panorama complet des procédures employées, des obstacles rencontrés, des moyens successifs mis en oeuvre pour les surmonter. Les auteurs des découvertes sont très souvent personnellement interviewés. Même si ce n'est pas le cas, leurs découvertes sont soulignées par des phrases comme : "Alors vous avez eu l'idée géniale ....", "Tu as perfectionné ce brevet ...", Prenons l'exemple de la recherche du centre du disque intérieur des couronnes :

La maîtresse interroge successivement :

- Nathalie, qui a commencé par tracer à l'oeil un diamètre vertical et un diamètre horizontal qui devaient donner quatre rayons de même mesure (en fait 7,7cm et 8cm).

- Pierre, qui a commencé à faire la même chose, mais de façon si maladroite, qu'à l'oeil, comme il dit, on voyait que ses diamètres ne partageaient pas le cercle en quatre parts égales. Pierre veut directement raconter comment il a plié mais elle l'en empêche et l'oblige à raconter ses premières tentatives.

- Cynthia, qui traçait des cordes verticales et cherchait la plus grande.

Après la narration de toutes ces tentatives dont aucune n'a mené à la réussite, des difficultés techniques rencontrées, apparaît le pliage qui a permis d'aboutir.

La maîtresse interroge :

- Sabine, qui, dès le début, avait plié la couronne préalablement collée sur une feuille blanche (mais il n'y avait pas eu de contagion).

- Pierre, qui, lorsqu'elle lui a suggéré de prendre la feuille dans ses mains au lieu de la laisser posée sur la table, a tout de suite pensé à plier et qui a été très rapidement imité.

D'autres enfants interviennent : Sylvie, Stéphane, Odette pour dire qu'ils ont plié eux aussi.

*Dans la seconde partie de l'épisode qui sert de conclusion, il s'agit d'expliciter ce qui est à retenir. Cette partie de synthèse et d'institutionnalisation, sur laquelle on reviendra plus en détail dans la suite, est annoncée dans le discours de la maîtresse par des indicateurs comme :

"On avait déjà, on avait déjà trouvé tout çà"
"On avait donc, on avait donc fait cette remarque"
"Qu'est-ce qu'on avait encore vu pour le cercle ?"
"Alors là, qu'est-ce que nous avions bien remarqué, qu'est-ce que vous aviez bien remarqué ?"
"Alors maintenant on sait, on connaît, dans un cercle on connaît ..."
"Mettez-vous çà dans un petit coin de la tête, çà y est, c'est bien mis?"
"Bon! On ne va pas tout raconter en détail mais qu'est-ce qu'il y a d'important jusque là ?"

Ces phrases de synthèse présentent aussi la caractéristique d'être les moments où apparaissent de façon privilégiée des phénomènes de choeur. La maîtresse, en général, pose alors les questions à l'ensemble de la classe et non plus à un élève particulier (cf. L'emploi du "vous" et du "on" dans les indicateurs cités plus haut) ou laisse sa phrase en suspens. Les élèves répondent à la question ou continuent la phrase en choeur.

Exemple, cette phrase qui se situe dans le rappel du 2 février à la fin de l'activité "secteurs" :

M. : "Qu'est-ce que c'est alors que le rayon ? Y en a deux rayons ?
E. : C'est le côté droit
M. : D'où part-il le côté droit ?
E. : Du centre
M. : Ah! Du centre jusqu'
E. : <u>à la ligne courbe</u>
M. : Voilà! Et qu'est-ce qu'on a vu, que, dans un cercle,
E. : Y avait beaucoup, beaucoup de rayons
M. : Y avait beaucoup, beaucoup de rayons et que tous les
E. : <u>rayons avaient la même, la même mesure</u>
M. : Alors çà, maintenant
Sabine : Ils partent du centre de la courbe
M. : A la ligne courbe, ils partent du centre à la ligne courbe et ils ont
E. : <u>La même grandeur et la même mesure</u>
E. : La même hauteur

M. : Bon! La même, la même mesure. C'est bien après ?
Sabine : Ils sont grands pareil
M. : Oui, ils sont grands pareil. Cã y est, mettez-vous çã dans un coin de la tête. Cã y est, c'est bien mis ? Bon!"

La maîtresse est coupée par Sabine lorsqu'elle dit : "Alors çã, maintenant", mais l'on peut prévoir que la fin de la phrase aurait été dans le style : "On le sait bien".

Ces phrases de synthèse, par la façon dont elles sont menées et les phénomènes de choeur qui les accompagnent contribuent à donner l'impression d'une classe homogène, tendent à laisser penser que, si au moment de la résolution des problèmes il y a eu des différences inter-individuelles, on a rencontré des obstacles, maintenant tout est définitivement rentré dans l'ordre; toute la classe a su profiter des découvertes de quelques-uns, en tirer la substantifique moëlle et il y a, dans une certaine mesure bien sûr, homogénéité du savoir.

C - Rôle des différents élèves

Au cours de la séance de rappel du 2 février, la maîtresse interroge nominalement 15 élèves dont 8 à deux reprises. Une élève, Bérangère, prend d'autre part la parole à plusieurs reprises sans être jamais personnellement interrogée. Donc 16 élèves interviennent sur les 20 que compte la classe. Mais il ne faut pas croire que ces élèves aient tous, dans leurs interventions, le même statut. On peut les partager grossièrement en deux groupes :

- Le premier, constitué de ceux qu'elle interroge pour qu'ils racontent ce qu'ils ont fait, ou, quand elle veut tester si telle ou telle connaissance est bien passée. Cynthia est, dans ce dernier cas, très souvent sollicitée.
- Le deuxième, formé d'enfants qui interviennent spontanément au milieu des dialogues précédents, souvent pour raconter ce qu'ils ont fait, souvent aussi pour faire des commentaires ou des remarques plus générales, en quelque sorte énoncer des théorèmes.

Exemples : - Pierre dans la construction du morceau manquant de galette : "Moi çã m'a donné une idée"
- Pierre dans la comparaison des morceaux de couronne : "Et j'avais dit que si la largeur de la courbure est pas la même ?"

M. : "si la largeur de la couronne"

P. : "de la couronne n'est pas la même, çà peut pas faire une galette parce qu'il y a un morceau tout fin qui à la même courbure qu'un morceau très gros, çà vient pas de la même galette"

- Stéphane dans la recherche du centre des couronnes :
  "Comment tu pouvais savoir ? si tu l'avais pas bien mis le côté du haut, c'était pas le rayon!"
- Bérangère, dans la même situation :
  "le plus grand rayon de toute la galette, çà s'appelle le diamètre .."
- Bérangère encore :
  "Si l'on trouvait le plus grand diamètre, euh! la ligne la plus grande verticale et horizontale, c'était le croisement des deux lignes".

Souvent dans de telles interventions, les théorèmes sont énoncés au présent, ce qui les fait contraster avec le temps passé du récit.

Ce sont aussi ces élèves que l'on retrouve beaucoup plus souvent que les autres lorsque la maîtresse pose ses questions à l'ensemble de la classe, ou comme solistes dans les phases de choeur. Au cours de la séance de rappel du 2 février, 5 élèves se manifestent ainsi principalement :

Reine - Bérangère - Stéphane - Florence - Sabine

Ce moyen semble varier très peu d'une séance à l'autre.

A notre avis, le rôle spécial joué par ces élèves peut contribuer à créer des illusions pédagogiques non plus collectives mais individuelles : à les voir ponctuer, commenter comme ils le font les interventions des autres élèves dans les séances de rappel, apparaître de façon privilégiée dans les questions posées à la classe, on peut avoir l'illusion d'une intégration des connaissances particulièrement réussie ou au moins minimiser les difficultés qu'ont pu éprouver ces élèves lors de la résolution du problème posé.

III - SYNTHESE ET TRAJECTOIRE DE L'EXTREMITE DE LA PORTE

La situation de la trajectoire de l'extrémité de la porte se distingue dans le rappel du 2 février des autres situations par le fait qu'elle ne donne lieu à aucune synthèse du type défini précédemment. On pourrait attribuer ceci au fait qu'il s'agit de la dernière activité en date, mais ce ne peut être considéré comme une raison valable. En effet, comme on le verra au paragraphe IV, les situations suivantes (messages pour la construction d'un cercle - arcs de cercles) donneront, elles, immédiatement lieu à synthèse alors qu'il faudra attendre le 16 février pour assister à une synthèse sur les portes.

S'il n'y a pas synthèse, il ressort néanmoins clairement du questionnement de la maîtresse qu'elle aimerait voir expliciter par les enfants les deux faits suivants :

- On sait tout de la trajectoire quand on en connaît le centre et le rayon,
- Le rayon c'est la largeur de la porte (le rayon étant pris ici non seulement au sens mesure mais aussi au sens géométrique, ce qui fait que la connaissance du rayon implique celle du centre qui en est une extrémité).

Elle valorise le fait que Stéphane se soit demandé où se trouvait le centre :

"oui, vous vous êtes dits : si on connaît le centre"
Stéphane : "On connaît le rayon"
La Maîtresse : "on connaîtra le rayon .... et on pourra ouvrir avec le centre"

Mais il faut noter là une sorte de quiproquo car Stéphane avait assez vite trouvé que le rayon était la largeur de la porte, mais cela n'avait pas suffi à lui faire connaître la position du centre :

Stéphane : "Le rayon, c'était euh! l'ouverture de la porte"
La Maîtresse : " Ah! le rayon, vous l'avez vu c'était l'ouverture de la porte"
Stéphane : "Et puis, pour le centre, on avait cru que c'était le bout de la feuille".

De même, elle valorise Odette (tout spécialement parce que c'est une élève faible.

M. : "Odette va expliquer. C'était génial. Allez, va-y Odette!"
O. : "Moi j'ai pris la règle de la classe. J'ai mesuré le rayon"
M. : "Le rayon! Elle, elle a dit, le centre, elle a trouvé tout de suite. Où est-il le centre ?"
O. : "Ici"
M. : "Là-bas, au coin, à l'ouverture".

Pour renforcer ceci, elle demande aux enfants s'ils pourraient tracer la trajectoire à partir d'un centre situé n'importe où :

Cynthia : "On peut prendre le centre en dehors de la feuille, çà n'a pas d'importance"
M. : "Oui, çà n'avait plus d'importance"

C. : "Du moment que le rayon partait du centre et qu'on connaissait la mesure du rayon; il pouvait être n'importe où le centre!"

M. : "On peut le mettre n'importe où. Vous sauriez maintenant sans regarder la porte ?. Vous sauriez refaire le chemin de la porte"

Mais, après que les élèves aient tous retracé la trajectoire de leur porte, l'activité sera conclue rapidement par :

M. : "Vous êtes sûrs qu'en faisant tourner la porte vous aurez votre trajet ?"

E. : "oui"

M. : "Pourquoi?"

E. : "C'est le rayon de la porte"

E. : "On a le centre et le rayon, alors !"

M. : "On a le centre et le rayon. Bon!"

Quant à la synthèse du 16 février, elle se fera ainsi :

M. : "Comment il était ce chemin ? Qu'est-ce qu'il dessinait ?"

E. : "Une ligne courbe"

M. : "Une ligne courbe aussi et pour bien la dessiner qu'est-ce qu'il était important de savoir ?"

E. : "Il fallait trouver le rayon"

M. : "Le rayon et le rayon part toujours du

E. : "Centre"

M. : "Et quand on avait le centre et le rayon, le rayon c'était quoi ?"

Sabine : "Du bout du centre à la fin de la porte"

M. : "C'était quoi ?"

Stéphane : "C'était la porte"

M. : "C'était la porte, la largeur de la porte"

En fait, il semble que la maîtresse ait du mal à assimiler cette situation à l'apprentissage sur le cercle et que cette assimilation ne puisse finalement s'effectuer qu'au prix de la réduction du problème dynamique en un problème statique. Il n'y a jamais tentative d'explicitation des raisons pour lesquelles la trajectoire est un arc de cercle. Le fait qu'il existe un mot pour désigner les arcs de cercle extrêmement vague "ligne courbe" n'oblige pas la maîtresse à faire prouver qu'il ne s'agit pas d'un arrondi quelconque (ceci a été souligné dans le chapitre III). De ce fait, le centre n'apparaît jamais comme un point privilégié dans le mouvement de rotation: le point fixe mais simplement comme l'extrémité du rayon.

IV - LES SYNTHESES ET L'INSTITUTIONNALISATION DU SAVOIR

Nous avons étudié les phases d'institutionnalisation en faisant la liste, séance par séance des énoncés relatifs aux situations ou aux cercles qu'elles faisaient intervenir. Dans les dernières séances, il y a un institutionnalisation non seulement pendant les rappels mais aussi pendant les bilans, nous en avons bien sûr tenu compte.

Nous avons classé les énoncés relevés en :

1) énoncés relatifs aux situations
2) énoncés d'ordre général

D'où les deux tableaux suivants

TABLEAU 1 : ENONCES RELATIFS AUX SITUATIONS

Situations	Disques		Couronnes		Portes	Messages		Arcs
Date des séances	16-1	19-1	23-1	26-1	30-1	2-2	6-2	16-2
Secteurs								
Si le côté droit est plus grand la galette est plus grande.	1					1		
Deux morceaux sont de la même galette s'ils ont le même côté droit.		1				1		
Couronnes								
Deux morceaux sont de la même couronne s'ils ont la même épaisseur et la même courbure.				1	1	1		
Portes								
La trajectoire est une ligne courbe.								1
Pour tracer la trajectoire, il est important de trouver le rayon et le rayon part du centre.								1
Le rayon c'est la largeur de la porte.								1
Messages								
Il suffit de donner la mesure du rayon.							1	1
Quand on a la mesure du diamètre, on prend la moitié pour trouver le rayon.							1	1
Arcs								
Deux arcs sont du même cercle s'ils ont la même courbure.								1

TABLEAU 2 : ENONCES GENERAUX

Situations	Disques		Couronnes		Portes Messages			Arcs
Date des séances	16-1	19-1	23-1	26-1	30-1	2-2	6-2	16-2
- Le rayon va du centre à la ligne courbe.		1			1	2		1
- Tous les rayons ont même mesure.		1			1	1		
- Il y a beaucoup de rayons.		1			1	2		
- La ligne courbe est toujours à la distance "a" du centre.		1						
- Dans un cercle l'important c'est le rayon.								1
- Le diamètre est une ligne droite qui va d'une ligne courbe à l'autre en passant par le centre.				2	1		1	1
- Le diamètre, c'est deux rayons en ligne droite.				1	1	1		1
- Il y a beaucoup de diamètres.				1		1		
- Le diamètre c'est la plus longue ligne qui va d'une ligne courbe à l'autre.				1	1	1		
- Tous les diamètres ont même mesure.				1			1	
- Les diamètres passent par le centre.						1	1	1
- Les diamètres partagent le cercle en deux moitiés.				1		1	1	

Nous n'avons retenu dans ces tableaux que les énoncés prononcés pendant les phases que nous pourrions qualifier d'institutionnalisation forte, c'est-à-dire précédées ou conclues par des indicateurs comme ceux déjà cités. Le chiffre 2 indique que le même énoncé a été repris dans deux phases distinctes de la séance.

De l'étude faite, il ressort que

a) Les énoncés généraux comme ceux relatifs aux situations sont d'une forme et d'un contenu stables au cours du temps

C'est ainsi que le 2 février, alors que le terme "rayon" est utilisé depuis plusieurs séances, la synthèse sur les disques sera lancée par la maîtresse en terme de "bouts droits" :

Pierre : "Si les morceaux étaient plus grands entre la courbure et le rayon, toute la galette devenait plus grande"
La maîtresse : "Ah! voilà! plus le côté droit était"
E. : "grand"
M. : "plus le côté droit était grand"
E. : "plus la galette était grande"
M. : "On avait déjà trouvé, on avait déjà trouvé tout çà"

Les nouveautés intervenant au cours des rappels successifs pour une même situation ne sont pas nécessairement pris en compte

Par exemple, pour les couronnes, le 30 Janvier la courbure intérieure et la courbure extérieure sont distinguées, le 2 Février interviennent les rayons des cercles intérieurs et extérieurs et le fait que l'épaisseur de la galette n'est autre que la différence des deux rayons, [comme nous l'avons déjà signalé p. 107]. Ceci n'est pas intégré aux institutionnalisations successives qui se répètent exactement sous la même forme.

b) Tous les énoncés sont des énoncés affirmatifs

Il est alors intéressant de comparer les énoncés des synthèses aux énoncés émis spontanément par les élèves lors des bilans et des rappels, lorsqu'ils ont à justifier leurs procédures, convaincre leurs camarades ou simplement raconter leur démarche. On s'aperçoit tout de suite qu'ils sont d'une forme et d'un contenu plus ouverts. Citons juste quelques exemples :

- Pour la construction du secteur manquant :

"On fait tourner les morceaux de galette autour du centre.
Le centre doit rester bien fixe"

- De nombreuses phrases négatives comme :

  "Câ pouvait pas être le milieu parce que d'un côté le rayon était long, de l'autre côté il était petit ... C'était pas le centre".

Les énoncés font jouer un rôle privilégié aux rayons et aux diamètres : ils sont tous formulés de façon globale et statique.

- La lecture du tableau 2 qui concerne les énoncés généraux montre que ces derniers se divisent en deux catégories : ceux qui ont trait aux rayons et ceux qui ont trait aux diamètres. Si le centre intervient, c'est uniquement parce qu'il est l'extrémité du rayon ou le point de concours des diamètres.

- Dès l'introduction des termes, toutes les propriétés que l'enseignement désire prendre en compte dans l'institutionnalisation sont formulées et dans les rappels successifs on observe une réduction progressive de l'éventail des énoncés. Par exemple, le 6 et le 16 février, aucune des synthèses ne fait référence à des propriétés précises des rayons (sans doute sont-elles considérées acquises), mais le renforcement sur les diamètres continue.

En ce qui concerne les diamètres, les principales propriétés sont citées : les diamètres sont des cordes passant par le centre, ils ont tous même mesure, ils sont cordes maximales et axes de symétrie. Les rapports entre rayons et diamètres sont précisés. Il faut noter que la notion de symétrie est formulée comme "partage en deux moitiés" (ce qui est à rapprocher des conclusions de la préexpérimentation) et non dans le langage introduit lors de l'enseignement sur les symétries axiales (les élèves parlaient alors de "miroirs" ou "d'axes de symétries").

- Tous les énoncés sont sous forme directe : il y a beaucoup de diamètres et les diamètres passent par le centre mais il n'est pas dit explicitement que tout axe de symétrie ou toute corde passant par le centre sont nécessairement des diamètres.

- Toutes les propriétés sont formulées de manière globale. Ainsi, le rayon (segment) ne joint pas le centre à un point du cercle mais "va du centre à la ligne courbe". De même, le rayon (mesure) donne la distance du centre à la ligne courbe. Un diamètre ne joint pas deux points opposés du cercle mais "va d'une ligne courbe à l'autre". A aucun moment le cercle n'apparaît comme un ensemble de points. D'ailleurs, à aucun moment, il n'est question de définir le cercle et les indicateurs d'institutionnalisation sont, à plusieurs reprises, : "On sait maintenant ce qu'est un cercle, ce qu'est le centre". C'est sur le reste, à savoir rayons et diamètres, que porte l'institutionnalisation.

Le fait que le cercle soit exclusivement considéré comme une courbe contribue à ce que certaines propriétés n'ont jamais l'occasion d'être nettement institutionnalisées.

Par exemple, la propriété suivante :

★ Si un point est sur le cercle de centre O et de rayon R, il est à la distance R de O, et la réciproque surtout :

★ Si un point est à la distance R de O, il est sur le cercle de centre O et de rayon R.

Dans les énoncés relatifs aux situations, on retrouve les mêmes tendances, avec en plus l'intervention de la courbure, ce qui est normal vu le choix des situations. La situation des portes occupait une place particulière : contrairement aux trois situations analysées dans le paragraphe III, elle privilégiait la conception du cercle comme trajectoire d'un point rigidement lié à un point fixe, donc une conception essentiellement ponctuelle et dynamique. L'observation dans les classes a montré que sa maîtrise passait par la reconnaissance du point fixe de la rotation (aplomb de l'axe) comme centre de la trajectoire. C'était donc une situation dans laquelle le centre du cercle jouait un rôle essentiel. On constate que, d'une part, il n'y a pas institutionnalisation proprement dite avant la dernière séance de l'expérimentation, que d'autre part, elle se fait alors de façon globale et statique. Le centre de plus apparaît surtout comme l'extrémité du rayon matériel.

V - CONCLUSION

Le travail relaté dans ce chapitre, le lecteur n'aura pas manqué de le constater, est empreint d'un certain empirisme. Nous avons voulu nous intéresser à un aspect que les recherches en didactique ont le plus souvent négligé: l'institutionnalisation du savoir. Non pas l'institutionnalisation telle que l'on peut l'appréhender à travers l'étude des manuels, des exercices et problèmes qu'ils proposent, des sujets d'examens (comme l'ont fait Odile Schneider et J. Tonnelle [8] et [11] par exemple à propos des identités remarquables et des équations paramétriques), mais plus précisément les phases d'institutionnalisation du savoir à l'intérieur d'une séquence didactique.

Nous avons isolé dans le temps didactique ce que nous reconnaissions être des phases d'institutionnalisation. Nous ne prétendons pas rendre compte ainsi de tout ce qui, dans l'enseignement, vise de près ou de loin l'institutionnalisation. Disons plutôt que ces phases constituent des moments où elle se fait particulièrement explicite. Dans notre cas, ces phases se situaient pour la plupart pendant les rappels que l'enseignante ne considérait pas comme une simple activité de remémoration voire de remise en train cérébrale (Notons que ce dernier rôle semblait attribué au calcul mental qui préludait à chaque séance).

Ceci nous a conduites à étudier plus systématiquement les phases de rappel et l'image de la classe, de son organisation, des effets de l'apprentissage qu'elles tendaient à imposer à l'observateur par leur structure, le rôle qu'y jouaient les différents élèves, la place de l'institutionnalisation, la façon dont elle était menée, les énoncés sur lesquels elle portait.

Cette étude montre que leur majeure partie (36/15) est constituée d'énoncés de caractère général. Ces énoncés concernent principalement rayons et diamètres et sont formulés de façon globale. De plus, ils sont pour une même notion introduits tous simultanément et se répètent ensuite au cours des séances exactement sous la même forme. Il est sûr que, même si cela ne relève pas de processus conscients chez la maîtresse, ce n'est pas neutre. L'institutionnalisation vise la reconnaissance de ce qu'il faut retenir. Dans l'enseignement, les énoncés à retenir sont presque toujours mis sous forme affirmative. D'autre part, la répétition sous la même forme favorise la mémorisation. Il n'est pas douteux non plus qu'une forme stéréotypée ne favorise les phénomènes de choeur déjà cités. Par contre, il nous semble qu'elle peut contribuer à véhiculer l'image d'un savoir rigide que l'on peut aisément circonscrire dans une dizaine d'énoncés et qu'en ce sens elle ne soit pas exempte de danger.

Mais il faudrait se garder de voir dans cette institutionnalisation le reflet fidèle de la réalité de la classe. Comme on l'a indiqué, les énoncés hors synthèses ont une forme et un contenu beaucoup plus ouverts. Des conceptions ponctuelles du cercle sont apparues, par exemple, avec la procédure de Nathalie dans la construction du secteur manquant. Cette procédure, remarquons-le, fut alors fortement valorisée par la maîtresse. Mais au niveau de l'institutionnalisation, il semble que l'on trie pour ne conserver que ce qui paraît essentiel dans l'enseignement. De plus, on le présente sous une forme adaptée à la mémorisation.

De même, il faut se garder d'interpréter trop rapidement le fait que toutes les formulations retenues soient globales :

- d'une part, la majorité des situations proposées au cours de l'expérimentation contribuent par leurs caractéristiques propres, à véhiculer des conceptions globales du cercle.

- d'autre part, dans la classe observée ici, la maîtresse laisse beaucoup de liberté aux élèves dans l'élaboration du langage mathématique. Par exemple, excepté si elles sont incorrectes, elle reprend les définitions qu'ils proposent sans en modifier les termes.

C'est pourquoi nous pensons qu'il vaut voir avant tout dans la formulation globale des énoncés le reflet des conceptions essentiellement globales des élèves (ce qui confirme les hypothèses faites dans le paragraphe II).
Mais cette étude montre tout de même que la maîtresse n'a pas cherché dans son enseignement à introduire ou renforcer tout spécialement des conceptions ponctuelles du cercle.

Il n'est bien sûr pas question de généraliser brutalement à d'autres classes ce qui a été trouvé ici. Mais cette partie de la recherche apporte des informations qui, d'une part, en font un élément indispensable, dans une perspective didactique, de l'analyse des situations, d'autre part, conduisent à souhaiter des recherches plus approfondies dans ce domaine.

VI - ETUDE DE CAS - ELEVES : PIERRE - STEPHANE

Nous avions annoncé notre intention dans la présentation de la recherche de croiser les résultats d'une évaluation "externe" (entretiens individuels) avec une évaluation interne. Nous avons choisi d'aborder ce problème de manière qualitative par une étude de cas.

Nous avons choisi deux élèves de la classe de Montrouge, Pierre et Stéphane, memebres de la même équipe. Ce sont deux des ténors de la classe et nous disposons donc de nombreuses données concernant non seulement leur travail individuel ou en équipes, mais aussi leur rôle dans les phases collectives.
Si Stéphane nous a paru, au cours des séances, être plus que Pierre le moteur des succès de l'équipe, la façon dont Pierre rendait compte ensuite des obstacles rencontrés, des découvertes qui avaient permis de les surmonter nous portaient à croire qu'il les avait pleinement intégrés. Y avait-il illusion pédagogique ?

Pour ne pas alourdir démesurément ce rapport, nous présentons les textes qui suivent sans le moindre commentaire. Nous pensons que le lecteur, s'il nous a suivi jusque là sera à même de les rétablir.

I - LA SEQUENCE DIDACTIQUE

19 janvier : Construction du secteur manquant

Travail en équipes

Pierre trace les deux rayons bordant le trou, joint leurs extrémités par une ligne courbe. Cette ligne courbe lui paraît trop plate. Il essaie sans succès de la rectifier à l'oeil. Il ne s' intéresse pas au travail de Stéphane

Stéphane trace les deux rayons bordant le trou, bouche le trou en partie avec un grand secteur. Il dessine le contour du secteur posé puis complète le tracé en faisant tourner le secteur autour du centre. Exécution maladroite.

Phase collective

Au cours de cette phase, la maîtresse demande pourquoi un tracé comme celui de Pierre n'est pas bon. Stéphane et Pierre interviennent.

Stéphane : "Si on faisait le vrai rond, on verrait que çà va pas, que celle-ci, à un endroit, elle est plus plate".

Pierre : "Là, ce n'est pas assez pointu".

Malgré les sollicitations de la maîtresse, ils ne donneront pas de raison plus précise. C'est Nathalie qui, ensuite, expliquera que ce n'est pas bon parce que Pierre n'a pas reporté partout la mesure "a" du bord droit (Nathalie a fait, elle, une construction point par point).

Stéphane expose sa méthode en insistant sur ses difficultés de tracé: "Pour la courbure, j'ai pris un grand et je tournais mais je tremblais...."

Ceci n'est pas repris par la maîtresse qui, par ailleurs, a fait un large écho à la méthode de Nathalie.

<u>Travail en équipes</u>

Pierre trace point par point en suivant la méthode de Nathalie. Le résultat n'est pas convaincant (la courbe n'est pas lisse). Il recommence puis utilise un morceau qu'il fait tourner	Stéphane reprend sa méthode.

<u>Phase collective</u>

Pierre raconte : "Au lieu de mettre des points, j'ai tiré un trait et quand c'était plus loin, j'ai tiré un autre trait".

C'est lui aussi qui parvient à expliciter l'équivalence des deux procédés : "Oui, parce que je fais tourner du centre. C'est comme si je faisais un petit trait à chaque fois; mais je mets un grand trait".

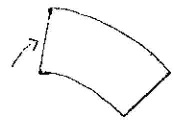
Par la suite, cette invention lui sera systématiquement attribuée:
"Pierre a amélioré la technique ..." (Rappel du 23 janvier)
"Tu as perfectionné ce brevet ....(Rappel du 2 février)

<u>23 janvier</u> : <u>Comparaison des morceaux de couronne - construction du morceau manquant</u>

<u>Phase collective</u>

C'est Pierre qui, avec Sylvie, débloque la situation de comparaison des morceaux de couronne. En effet, les enfants parlent de courbure et d'épaisseur, mais il y a sans cesse des quiproquos, l'expression "plus gros" faisant tantôt référence à la taille du cercle extérieur de la couronne, tantôt à son épaisseur.

Sylvie : "Ils peuvent avoir la même courbure, s'il y en a un plus gros que l'autre çà peut pas marcher".

Pierre : "Si on repère les couronnes, si tu mets ce morceau  avec celui-ci  , il arrivera ici; il faut avoir les deux". ("Il faut avoir les deux" signifiant : il faut avoir à la fois même courbure et même épaisseur).

Travail en équipes

Pierre et Stéphane travaillent ensemble. Ils font le patron de la couronne sur une feuille blanche en faisant tourner les pièces. Ceci leur permet d'avoir l'empreinte du morceau manquant qu'ils découpent ensuite dans du carton.

26 janvier : Construction du disque et du centre du disque

Travail en équipes

Pierre trace un diamètre vertical et un horizontal à l'oeil pour trouver le centre du disque. Ensuite, il mesure les 4 rayons pour vérifier. Ils n'ont pas même mesure. Il déplace les deux diamètres parallèlement à eux-mêmes, sans succès. La maîtresse lui demande "Que veux-tu faire ?".

Pierre : "Prendre la moitié"
La maîtresse : "Tu ne sais plus faire la moitié? Tu n'es pas obligé de laisser la feuille là!" Elle la soulève. Immédiatement, Pierre plie sa feuille en 4

Stéphane place le centre du cercle à l'oeil. Pour vérifier, il trace et mesure plusieurs rayons. Ils n'ont pas tous même mesure. Stéphane déplace le centre. C'est la même chose.

Il voit Pierre plier, adopte le procédé aussitôt et n'éprouve ensuite aucun besoin de vérifier

Phase collective

Florence introduit le mot "diamètre". Pierre le définit :
"C'est une ligne droite qui passe d'une courbure à l'autre en passant par le centre".

Stéphane précise :
"Elle est égale à deux rayons sur une même ligne".

A la fin de cette phase, Stéphane exprime sa gêne : en mesurant deux diamètres de son disque, il a trouvé 15,4 et 15,2. La maîtresse demande:

"Alors des diamètres, y en a qui sont plus grands que les autres ?"

Stéphane : "Moi j'en ai un plus grand que l'autre"

La maîtresse : "Montre-les moi! Est-ce qu'il est bien fait ton cercle ?"

Stéphane : "Cà fait un rond"

La maîtresse tranche : "Ton cercle est pas bon"

Stéphane ne semble pas convaincu. Il répète: "Moi, j'en ai un".

30 janvier : Trajectoire de l'extrémité de la porte

Pierre raconte sa procédure de construction du secteur manquant, la réalisation du patron de la couronne, le pliage pour obtenir le centre du disque, au cours du long rappel du début de séance. Stéphane intervient peu.

Travail en équipes

Pierre et Stéphane travaillent ensemble avec Florence et Frédéric. Au début, ils utilisent l'ombre de la porte pour faire le tracé de la trajectoire. En vérifiant, ils s'aperçoivent de leur erreur; ils essaient de rectifier à l'oeil le tracé effectué à partir de l'ombre. C'est un échec. Ils essaient ensuite de faire un arrondi entre le point de départ et le point d'arrivée, toujours à l'oeil. Echec. Stéphane a l'idée de prendre une punaise et de la ficelle dans le placard. Il punaise la ficelle au coin de la feuille. Echec. Florence fait remarquer que le coin de la feuille ne peut être le centre car il n'est pas à la même distance du point de départ et du point d'arrivée de la porte :

"Cà peut pas être le centre, il y a un grand rayon et un petit!"

Les élèves cherchent où peut bien se trouver alors le centre. C'est Stéphane qui trouve le premier. Ils font alors le tracé demandé. Pierre tenant la punaise et Stéphane le crayon.

Phase collective

Pierre et Stéphane racontent toute leur démarche, mais la fin est floue :

Stéphane : "Cà je croyais que c'était le centre mais c'était pas le centre ..... C'est pas le rayon de la feuille, c'est le rayon de la porte".

Stéphane : "J'ai planté une punaise, j'ai mis le fil autour et c'est comme çà que Pierre et moi on a réussi à faire la courbe".

2 février : Fin des trajectoires de portes

Pierre, dans le rappel, raconte une fois de plus la première construction. Stéphane introduit les rayons des cercles intérieurs et extérieurs de la couronne mais ne sait dire de combien ils diffèrent. Pierre raconte le pliage du disque. Tous deux prennent une part active à l'institutionnalisation des connaissances relatives aux rayons et aux diamètres. Ensuite ils racontent les portes. On note une évolution sensible du récit par rapport au bilan de la séance précédente :

Pierre : "Le rayon on l'avait : c'était l'ouverture de la porte mais le centre on croyait que c'était le bout de la ficelle".

Stéphane dit qu'il a trouvé le centre. Pierre commente :

Pierre : "Oui, mais moi je n'avais pas compris ce qu'il voulait dire et après, j'ai compris que çà pouvait être qu'ici le rayon (il montre l'aplomb de la charnière)".

La maîtresse : "Le centre"

Pierre : "C'est ici que la porte commence, alors!"

6 février : Messages

Travail en équipes

Pierre utilise la boîte de l'éponge pour tracer le cercle. Ensuite, il le découpe et le plie en quatre pour trouver le centre. Il envoie un message en indiquant le rayon.

Il reçoit un message lui demandant de construire un cercle de 6 cm de rayon. Bien qu'il y ait un compas sur la table il hésite à s'en servir. Il ne voit pas, dit-il, comment avec cet instrument il va pouvoir faire juste 6 cm de rayon.

Stéphane place avec la règle des points à une distance fixe d'un point marqué. Il essaie de tracer un cercle en joignant les points. Le résultat n'est pas bon (cercle non lisse).

Il prend alors une ficelle et une punaise.

Il trace un cercle puis envoie le message.
"Le rond à 3 cm" (Il s'agit du rayon).

16 février : Arcs de cercles

Travail en équipes

Pierre décalque des morceaux en les choisissant à l'oeil, puis il les met bout à bout. Il numérote les arcs au fur et à mesure de leur utilisation. Il obtient ainsi un ovale légèrement anguleux par endroits.

Stéphane conteste le travail de Pierre.
Il prend le compas pour vérifier le cercle tracé par ce dernier.

Ne sachant où est le centre, Pierre et Stéphane décident d'utiliser l'ouverture du compas pour mesurer des diamètres. Ils sont très rapidement convaincus que le cercle de Pierre n'en est pas un.

Phase collective

A la fin de la discussion, Pierre et Stéphane soulignent qu'il faut que les morceaux aient la même courbure pour appartenir au même cercle ("Il faut qu'ils soient ronds pareil" dit Stéphane) et ils proposent de les trier.

Travail en équipes

Pierre trie par superposition et assemble les morceaux en les plaçant bout à bout et en essayant d'éviter les points anguleux.

Au bout d'un moment, il affirme qu'il a trouvé un arc qui convient à deux cercles de tailles différentes. L'air étonné de l'observateur jette le doute dans son esprit :
"Cà devrait pas être comme çà, y en a un qu'est plus petit que l'autre (il parle des deux cercles). Oh! j'en sais rien".

Il revérifie et s'aperçoit que l'arc ne convient pas tout à fait bien à l'un des cercles.

Stéphane repère les marques des centres des arcs de cercles sur la feuille et les utilise pour trier les arcs.

Ensuite il assemble les arcs en les plaçant bout à bout.

Il exprimera tout ceci très clairement lors de la phase collective qui termine la séance.

II - LES TESTS

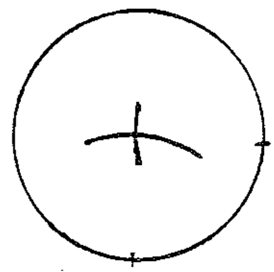
Stéphane

Question 1 :

Il voit un cercle, un ovale et deux ronds mis ensemble.

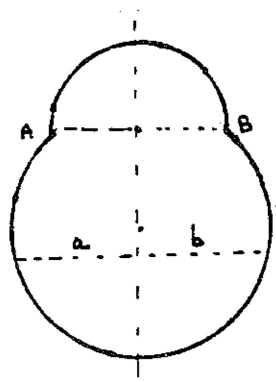
Preuve : "Pour le cercle, à partir du milieu, le rayon est toujours le même; pour l'ovale, le rayon varie".

Il mesure le diamètre vertical, à l'oeil, et calcule la mesure du rayon. Ensuite il trace deux arcs de cercle du rayon trouvé à partir de deux points qu'il a choisi sur la verticale et sur l'horizontale dit-il, comme ci-dessous. Le centre est le point d'intersection des deux arcs.



Question 2 :

Pour les cercles accolés, il place deux points: le premier au milieu de AB, le second en relevant à l'oeil le premier point vers le haut. (voir figure ci-contre)



Ensuite, il trace la droite déterminée par ces deux points. Il vérifie à divers niveaux, que les distances "a" et "b" mesurées perpendiculairement à la droite sont égales. Il conclut que la droite tracée est l'axe de symétrie de la figure.

Pour le cercle, d'emblée il affirme :

"Le diamètre c'est l'axe de symétrie, des diamètres y en a jusqu'à l'infini, des axes de symétrie autant qu'on veut"

Pour l' ellipse : "Il y en a, ils passent par le milieu"

Il repère à l'oeil le grand axe, mesure sa longueur et marque son milieu. Il cherche à vérifier, en traçant d'autres cordes, que c'est bien le milieu de l'ellipse. Ce n'est pas le cas. Il essaie de rectifier par approximations successives sa construction du milieu. L'interrogateur lui suggère d'essayer de déterminer les axes de symétrie par une autre méthode. Il persiste dans la sienne.

Question 3 :

Il cherche en tâtonnant la position du centre sur l'axe de symétrie qu'il a tracé et réussit.

Question 4 :

- Recherche du centre : Il trace à l'oeil un diamètre vertical en disant: "Je corrigerai après mon erreur".

Il déplace parallèlement à lui-même son trait en disant : "J'ai laissé une trop grande partie là" (demi-disque)

Ensuite il fait de même horizontalement et vérifie qu'il a bien le centre en mesurant les quatre rayons.

- Tracé des diamètres : Il repasse les deux déjà tracés. L'interrogateur lui demande :
"Peux-tu en tracer d'autres ?"
Stéphane hésite un peu puis dit :
"Oui, cette droite peut tourner (il montre un diamètre)"

Il trace plusieurs couples de diamètres perpendiculaires.

- Tracé de rayons : "C'est des demi-diamètres c'est inutile d'en tracer d'autres".

Il mesure un diamètre, affirme que tous mesurent pareil et calcule la mesure du rayon.

Question 5 :

- Cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm : Il répond "oui". Il mesure 8 cm et trace un cercle de 8 cm de rayon. Il en mesure le diamètre, trouve 16 cm et rectifie son tracé.

- Cercle de diamètre 10 cm et de rayon 6 cm : Il répond : "Non, le diamètre c'est le double du rayon".

- Cercle de 11 cm de diamètre : Il répond : "Oui", commence à écarter le compas de 11 cm puis rectifie son erreur avant d'avoir tracé.

Question 6 :

- Point à 6 cm de A et 5 cm de B : Il répond : "Oui, il serait quelque part par là" (il indique un point en dehors du segment AB plus près de B que de A).
Il essaie par approximations successives puis dit:
"Il faudrait que je me trace un cercle de 6 cm à partir de A .... Il me faut un cercle de 5 cm à partir de B".

En fait, il trace le cercle centré en A, puis cherche à la règle un point du cercle à 5 cm de B. L'interrogateur lui demande :
"Y a-t-il un autre ?"

Stéphane : "Oui, le symétrique par rapport à AB"

- point à 4 cm de A et 3 cm de B : Il trace le cercle de centre B puis dit :
"4 plus 3, çà fait 7; il y a 8 cm donc c'est impossible".

Pierre

Question 1 :

"Il y en a une seule qui est un cercle; celui-là est un peu ovale, celui-là est pas du tout rond, il a une bosse".

Preuve : Pour le cercle, il propose de chercher le centre puis de faire un tracé au compas. Pour trouver le centre, il trace à l'oeil un diamètre vertical et un diamètre horizontal, les mesure et s'estime satisfait :
"Ah! Oui, c'est vraiment un rond parce que là je trouve 7 plus un demi et là je trouve 7 plus un demi. Des deux côtés, c'est obligé que ce soit un rond, des deux côtés çà a la même mesure".

Il plante la pointe du compas à l'intersection des deux diamètres et trace.

Echec. Cela ne donne pas le même cercle. Pierre réfléchit puis dit :
"Il est mal tracé mon trait".
L'interrogateur : "Pourquoi?"

Pierre : "Là (il indique la surface hachurée ici ) il n'y a pas la même mesure que là (il indique ). Il faut tracer des traits, çà va être dur. Il faut trouver le centre, pour çà il faut tracer des traits".

Pour mieux placer le diamètre vertical, il change de stratégie et cherche la corde verticale maximale. Quand il pense l'avoir trouvée, il vérifie qu'elle détermine deux segments de même mesure sur l'ancien diamètre horizontal. Ce n'est pas le cas, l'un mesure 3,5 cm, l'autre 3,9 cm.

Pierre : "Alors mon trait est mal tiré; le centre il faut qu'il soit au milieu". Il cherchera encore quelque temps dans ce sens, sans parvenir à une solution, insistant sur le fait qu'il doit tracer des traits mais pas au hasard et prendre le milieu. Finalement il abandonne.

Pour l'ellipse : il mesure dans deux directions correspondant approximativement aux axes et conclut :
"Regarde, ici çà fait 7 cm, là, il en fait 9,5".

Cela lui semble suffisant.

Question 2 :

A priori, pour lui, seul le cercle aura des axes de symétrie :
"Les ronds, c'est tout".

L'interrogateur : "Ah! Bon! Il n'y a que les ronds qui ont des axes de symétrie ?"

Pierre : "Non, les carrés aussi, mais il faut que de chaque côté il y ait la même mesure. Si d'un côté il y a 3 cm et de l'autre 4, on ne peut pas couper en deux".

Pour lui, le cercle avec bosse, tel que, n'a pas d'axe de symétrie. Il propose de l'arranger en reproduisant la bosse en haut, par symétrie. Mais, même là, il reste dubitatif; il préfère enlever finalement la bosse en pliant horizontalement puis en reconstituant par transparence le cercle incomplet.

L'interrogateur insiste :
"Bon, mais cette figure telle que je te l'ai donnée, tu ne trouves pas qu'elle a un axe de symétrie ?"

Pierre : "Non, avec la bosse, il n'y a pas d'axe".

Le cercle : Il plie en disant : "Si j'arrive à faire la symétrie, j'aurai le centre". Il termine le pliage en quatre et trace le cercle au compas à partir du centre qu'il vient de trouver, revenant donc spontanément à la question précédente. Ca marche.

L'interrogateur : "Tout à l'heure, tu n'avais pas pensé à plier"

Pierre : "Non, mais quand tu as dit "l'axe de symétrie", j'ai pensé à plier".

Pierre passe à l'ellipse sans que l'interrogateur ait pensé à lui demander quels sont exactement les axes de symétrie du cercle.

- L'ellipse : A priori, il pense que cette figure n'a pas d'axes de symétrie car elle n'a pas de centre. Encore une fois, il propose de modifier la figure.

L'interrogateur : "Comme çà, en le voyant, tu n'as pas l'impression qu'il y a un axe de symétrie?"

Pierre : "Ah! Non! Comme çà je suis sûr qu'il n'y en a pas! Ah si! Je crois qu'il y en a un comme çà dans le miroir x (terminologie adoptée en classe lors du travail sur les symétries)".

Il plie avec difficultés, comme tous les élèves, les axes étant obliques, mais y parvient. Ensuite, il cherche le milieu de l'axe : pour trouver le centre, dit-il

Pierre : "C'est drôle quand même qu'il y ait un centre. S'il y a une symétrie, il y a un centre".

Il reprend les deux cercles accolés, regarde la figure avec attention et trouve l'axe :
"Donc y a pas de centre mais une symétrie. C'est drôle; pas de centre mais une symétrie. Là il y a un centre et une symétrie (le cercle), là aussi (l'ellipse)".

Question 3 :

Elle a été faite en même temps que la 2 (pliage et reconstitution par transparence).

Question 4 :

Pierre trouve le centre par pliage, trace des diamètres et des rayons, mesure un diamètre.

L'interrogateur : "Peux-tu me dire combien mesurent les diamètres ?"

Pierre : "Ben, tous 7 cm plus 5 mm".

L'interrogateur : "Bon, ils ont tous la même longueur?"

Pierre : "Non, je ne crois pas, je vais en tracer un, je ne crois pas qu'il ait la même mesure".

Il trace une corde qui ne passe pas par le centre.

L'interrogateur : "Est-ce que c'est un diamètre çà ?"

Pierre : "Non!"

L'interrogateur : "C'est quoi un diamètre ?"

Pierre : "Un diamètre c'est une droite qui va d'une courbe à une autre courbe en passant par le centre".

L'interrogateur : "Ah, bon!"

Pierre : "Et un rayon, c'est çui-là qui va d'une courbe au centre. Dans un diamètre il y a deux rayons".

L'interrogateur : "Tu penses qu'il y a des diamètres qui sont plus courts que d'autres?"

Pierre : "Non!"

Il explique que si tous les diamètres ne faisaient pas la même grandeur, le rond ne serait pas un rond. Il reprend l'ellipse alors spontanément, trace des cordes passant par le centre, les mesure et conclut :

"Cã ne fait pas la même chose du tout. Celui-là, il fait 8 cm, celui-là 7 cm et 1 mm. Donc il n'est pas vraiment un rond".

Il revient au cercle, visiblement satisfait, propose de calculer la mesure des rayons à partir de celle des diamètres, puis mesure car le calcul de la moitié de 7,5 cm le rebute et qu'il préfère dans ces conditions procéder à l'envers.

Question 5 :

- Cercle de diamètre 8 cm et de rayon 4 cm : Il répond : "Oui, trace un cercle de 8 cm de rayon."
"Voilà, le centre il est là, maintenant je vais faire le diamètre.... Tiens, un diamètre c'est 16! je me suis trompé".

L'interrogateur : "Tu t'es trompé pourquoi ?"

Pierre : "Parce qu'au lieu de mettre 4 j'ai mis 8, alors le diamètre il a 16".

Il réfléchit un peu, puis :
"Et pourtant, je ne comprends pas"

L'interrogateur : "Qu'est-ce que tu ne comprends pas ?"

Pierre : "Le diamètre c'est 8. Pourtant j'ai fait comme çà (il indique que l'écartement du compas mesure 8 cm sur la règle). C'est le diamètre et comme le diamètre c'est partout la même chose ..."

Il réfléchit, se répète.

L'interrogateur : "Si le rayon, c'est pas partout la même chose ?"

Pierre : "Oui, mais le diamètre, il va de là jusqu'à là. Si je fais le diamètre 8 le point sur une feuille blanche, je le mets où je veux et comme ce sera .... Ah, non! il fallait prendre la mesure du rayon, parce que, ah oui! quand je fais tourner, j'ai la mesure du rayon. C'est pour çà que je me suis trompé.Ah! Cà y est, j'ai compris, parce que j'ai cru que le centre c'était ici pour moi (il indique l'extrémité d'un diamètre)".

- Cercle de 10 cm de diamètre et de 6 cm de rayon :
"Ah! Ah! Ah! Non! Le diamètre il doit faire 12".

- Cercle de 11 cm de diamètre : Il répond : "Oui" puis "Non". L'interrogateur répète la question.

Pierre : "Un diamètre de 11 cm .... Cà fera 5 cm plus 1/2 mm. Il a quelques problèmes à calculer la moitié de 11 cm. L'interrogateur l'aide.

Question 6 :

- Point à 6 cm de A et à 5 cm de B : "Il sera au milieu, c'est impossible"

Ensuite, il place sur AB deux points : l'un à 6 cm de A, l'autre à 5 cm de B.

Pierre : "B, il veut que ce soit ici, A, il veut que ce soit ici". (il montre successivement les deux points)

L'interrogateur : "Tu sais, on n'est pas obligé de le prendre juste sur la ligne entre A et B".

Il fait plusieurs essais ailleurs dans la feuille, mais en plaçant toujours deux points.

Pierre : "Des deux côtés il y a deux points".

L'interrogateur : "Tu ne peux pas t'arranger pour que ce soit le même ?"

Pierre : "Ah! Ben non! Ah si! On peut peut-être mesurer çà (la distance entre deux des points marqués) Non, 1 cm, on peut rien faire .... C'est normal que çà fasse 1 cm la différence entre A et B c'est 1 cm. C'est pas possible de trouver un point que de B il soit à 5 cm, de A à 6 cm".

L'interrogateur : "Et si je te demande que de A il soit à 3 cm et de B à 4 cm?"

Pierre : "C'est pas possible, c'est la même chose, il y a toujours 1 cm de moins".

L'interrogateur lui fait vérifier s'il y a bien 1 cm d'écart entre tous les couples de points qu'il a marqués. Ce n'est pas le cas. Pierre constate que son théorème est faux mais il ne parviendra pas néanmoins à progresser vers la solution.

VII - CONCLUSION

Les questions que nous nous étions posées au début de cette recherche étaient les suivantes :

- Quelles sont les conceptions du cercle mobilisables chez les enfants de 7 - 10 ans ?
- Comment fonctionnent-elles les unes par rapport aux autres suivant les situations proposées ? Quel est leur degré de mobilité ?
- Qu'est-on en droit d'attendre d'un apprentissage dans ce domaine, à ce niveau ?

La pré-expérimentation nous a permis, d'une part de préciser ces questions, d'autre part de formuler à leur sujet un certain nombre d'hypothèses. L'expérimentation et les entretiens individuels, tout en confirmant la majeure partie de ces hypothèses, nous ont permis d'affiner l'analyse.

Essayons d'en énoncer les principaux résultats :

- La recherche a montré que, confrontés à des situations adéquates, les enfants de cet âge étaient capables de mettre en oeuvre de façon opératoire diverses conceptions du cercle. Certaines étaient apparues dès la pré-expérimentation :

★cercle comme figure ayant même "mesure" dans toutes les directions du plan (situation de reconnaissance de formes)

★cercle comme trajectoire d'un point animé d'un mouvement de rotation plane (trajectoire de l'extrémité de la porte, du pendule).

★cercle comme ensemble des points à distance donnée d'un point donné (construction des triangles équilatéraux).

D'autres sont apparues au cours de l'expérimentation :

★cercle comme figure de courbure constante (situations des couronnes, des arcs de cercles).

★cercle comme figure invariante par rotation autour de son centre (situation des disques).

★cercle comme figure invariante par glissement sur elle-même (situation des couronnes)

De même, diamètres et rayons sont dotables, à cet âge, de leurs principales propriétés :

Par exemple, les diamètres ont été utilisés comme :

*cordes partageant le cercle en 2 moitiés (recherche du centre du disque ...)
*cordes de longueur maximale (recherche du centre du disque)
*cordes passant par le centre (reconnaissance de formes ....)

et le fait qu'ils aient tous même mesure a constitué une caractérisation du cercle.

Mais, conceptions, éléments géométriques associés, relations et invariants sont étroitement dépendants des situations proposées. Il n'est pas question d'en parler dans l'absolu.

De plus, si ces conceptions sont théoriquement mobilisables, leur mise en oeuvre opératoire effective et réussie dans les situations proposées ici ne va pas de soi. Dans chaque situation de l'expérimentation, on enregistre de nombreux échecs : les solutions sont trouvées par une minorité d'enfants et reprises ensuite par l'ensemble de la classe. L'adaptation d'une stratégie à une situation voisine s'avère difficile (par exemple, le passage de la situation des disques à celle des couronnes, alors que la procédure majoritaire mise au point pour la construction du secteur manquant utilisait déjà partiellement la constance de la courbure).

A ceci, s'ajoute le fait que les enfants se dégagent très difficilement des procédures "à l'oeil", même lorsqu'ils constatent qu'elles ne permettent pas la réussite. C'est le cas tout au long de l'expérimentation et, dans la situation des arcs, la dernière, presque tous les enfants, dans un premier temps assemblent des arcs triés à l'oeil pour construire les cercles.

Dans la recherche du centre du disque, presque tous les élèves commencent par tracer à l'oeil un diamètre vertical et un diamètre horizontal. Quand le pliage est découvert par Pierre, il est repris quasiment instantanément par les autres et fortement valorisé : c'est la procédure "exacte" qui permet de réaliser le partage en deux moitiés que les élèves essayaient de faire à l'oeil.

Au cours des entretiens individuels :

- pour prouver dans la question 1 que la première figure est un cercle, sur les 25 élèves qui construisent le centre, 16 le font à l'oeil, 8 seulement utilisent le pliage. Parmi ces 16, plusieurs sont conscients de leur échec comme Pierre, mais cela ne suffit pas à mobiliser le pliage. Le cas de Pierre est d'autant plus étonnant que c'était lui l'inventeur.

- Par contre, dans la question 4, le pliage réactivé par la recherche des axes de symétrie de la question 2 redevient majoritaire.

Cet obstacle est sans doute propre à la géométrie. L'enfant fait confiance à sa perception. Il ne lui viendrait certainement pas à l'idée de faire une multiplication à l'oeil, par contre, il est persuadé qu'en se fiant à sa perception, il arrivera à trouver le centre d'un cercle. Tout au plus devra-t-il tâtonner un peu. Il est d'autant plus difficile de lutter contre cette tendance que les tracés et les mesures effectués à cet âge sont souvent très approchés. Il s'avère parfois qu'une méthode que nous pourrions qualifier d'exacte donne de plus mauvais résultats ou au moins d'aussi mauvais résultats qu'un tracé à l'oeil :

Ainsi, dans la première situation, le tracé de Stéphane qui utilise la rotation d'un secteur autour du centre est, dans un premier temps, aussi peu circulaire que celui à l'oeil fait par Pierre. Quand Pierre, adoptant la méthode de Nathalie, se lance dans un tracé point par point, il n'arrive pas à obtenir une courbe lisse.

Le débat sur le caractère approché des tracés géométriques est, à notre avis, un débat important que l'enseignement ne doit pas évacuer.

Il doit permettre de prendre conscience que, si l'on considère la géométrie comme une théorie physique modélisant certains aspects du monde qui nous entoure, on doit distinguer dans les activités géométriques trois niveaux:

- Celui du monde "réel" (le monde des roues, des portes, des pendules, des ficelles...). Ce sont les questions que l'on se posera à propos de cette réalité qui seront le point de départ des activités géométriques.
- Celui du modèle mathématique, essentiellement abstrait (celui des cercles, angles, droites et points).
- Celui des représentations du modèle, seul moyen d'appréhender le modèle en dehors du pur raisonnement déductif (figures géométriques tracées sur une feuille ...).

Il faut d'autre part noter que rien dans le langage ne distingue ces deux derniers niveaux. On demande, par exemple, à l'élève de tracer le cercle de centre O et de rayon 2 cm.

Il semble que les élèves se montrent capables, dès cet âge, de distinguer différents niveaux : Au CE_2, lors de la première séance de la pré-expérimentation, un élève trace au tableau un cercle avec une ficelle. Les autres, après vérifications, déclarent qu'il ne s'agit pas d'un cercle car il ne mesure pas pareil dans toutes les directions. Les écarts enregistrés sont de plusieurs centimètres. Par contre, celui tracé ensuite par le maître pour lequel les écarts ne dépassent pas 1 cm (le diamètre étant voisin de 80 cm) sera, après vérifications, accepté comme cercle. De même, lors de la première séance sur les positions relatives de deux cercles, une équipe, dans un cas de tangence, affirme que ses cercles ne se touchaient pas mais qu'ils auraient dû se toucher.

Cette confiance dans la perception s'oppose aussi à la production de preuves, à la validation des procédures. Si l'on "voit" que çà marche, toute exigence supplémentaire apparaît comme gratuite. Y répondre, c'est répondre au seul désir du maître ou de l'interrogateur. Il faut en être conscient si l'on désire construire des séances didactiques dans ce domaine*

Nous voudrions souligner un autre fait qui s'est révélé important dans cette recherche, et qui dépasse largement le cadre de notre étude particulière : le rôle privilégié que jouent les directions horizontales et verticales.

La prédominance de ces directions se manifeste dès la pré-expérimentation; elle se confirme lors de l'expérimentation, par exemple, dans la recherche du centre du disque. Au niveau des tests, le choix des épreuves rend l'effet encore plus flagrant et la perturbation créée par l'existence de ces deux directions semble, en quelque sorte, restreindre le champ de validité de certains problèmes:

Ainsi, dans la question 2 (recherche des axes de symétrie), sur les 29 élèves qui ont plié dans ces deux directions pour trouver les axes de symétrie du cercle, 10 affirment qu'il n'y en a pas d'autres, comme si la situation correspondait à un équilibre dont on pouvait se satisfaire : les deux directions privilégiées sont axes de symétrie, pourquoi en chercher d'autres ?

Une autre situation d'équilibre, nous l'avions déjà signalé dans la conclusion de la pré-expérimentation, semble résider dans la famille des axes correspondant à une itération du pliage, en particulier le pliage suivant H, V et les deux bissectrices. Pour l'ellipse, l'absence d'axes parallèles aux bords du rectangle sur lequel est dessinée la figure, conduit la majorité des élèves à nier pour elle la possibilité d'avoir des axes de symétrie.

*Note : Il ne faudrait pas comprendre ce qui précède comme un parti pris de rejet de l'aide perceptive en géométrie. Mais estimant avec R. Douady [5] qu'un concept prend son sens, dans le type de problèmes qu'il permet de résoudre, nous voulons souligner que la perception qui constitue une aide précieuse peut aussi à certains moments se révéler un obstacle à l'apprentissage visé.

D'autres causes de perturbations sont apparues dans la pré-expérimentation (reconnaissance de formes, fabrication des loteries) et au cours de l'expérimentation. Sans les rappeler toutes, citons celles relatives à la situation des portes qui pourraient très bien jouer dans un autre contexte : à Melun, certains élèves se trouvent bloqués car ils ne peuvent envisager de prolonger les bouts de rayons tracés au delà de la feuille de papier pour trouver le centre du cercle : à Melun et à Montrouge, d'autres élèves pensent que le centre de la trajectoire sera un point particulier de la feuille (coin, milieu).

Enfin, certaines des difficultés rencontrées par les élèves nous ont paru liées à une conception exclusivement globale du cercle, à la difficulté donc de le concevoir comme un ensemble de points (situation des portes, dernière question des tests).

Ceci a été souligné par d'autres auteurs, en particulier J. Piaget en ce qui concerne la droite. Ces constatations recoupent aussi des résultats obtenus récemment par M. Guillerault et C. Laborde (4)

L'existence de ces obstacles à l'apprentissage étant soulignée, il n'en reste pas moins qu'il y a eu dans les deux classes apprentissage à l'issue de l'expérimentation. Les résultats aux tests en témoignent, en particulier, le très fort pourcentage de réussite aux questions 3, 4 et 5.

Par contre, dans la dernière question, la faiblesse des résultats ne peut être simplement attribuée à la complexité de la tâche que nous avons soulignée par ailleurs. Il est frappant de constater que 7 élèves ayant, sur suggestion de l'interrogateur, utilisé le compas et tracé les deux cercles : Cer (A,6) et Cer (B,5), pour déterminer la position de M, ne savent pas conclure et reconnaître les points d'intersection de ces deux cercles comme des points à 6 cm de A et à 5 cm de B. Certains admettent visiblement la possibilité de trouver des points à 6 cm de A à l'extérieur du cercle de centre A, d'autres sont obligés de remesurer pour donner la distance à A d'un point quelconque de ce cercle. Il est clair que le cercle de centre A qu'ils viennent de tracer avec leur compas n'est pas pour eux le lieu des points à 6 cm de A.

Il est intéressant de confronter les résultats des tests à l'étude des phases de rappel et des synthèses. On s'aperçoit alors que les questions 4 et 5 correspondent à ce qui, dans l'enseignement, a fait l'objet de la plus forte institutionnalisation. En effet, comme on l'a déjà souligné, les énoncés généraux sur lesquels a porté l'institutionnalisation, traitent presque uniquement des propriétés des rayons et des diamètres, des relations qui les lient.

Nous voudrions conclure en insistant sur la nécessité, à l'école élémentaire, d'un enseignement sur le cercle qui ne se limite pas à l'apprentissage du maniement du compas et à la mémorisation de quelques formules. Tout ce qui précède tend à prouver que les choses ne sont pas si simples que l'on pourrait naïvement le croire, qu'il est difficile, en particulier, de déterminer de quel sens l'élève charge l'utilisation du compas. Dans la pré-expérimentation, nous avions fourni des compas dès les premières séances. Dans l'expérimentation, nous méfiant des erreurs d'analyse que son utilisation pourrait entraîner, nous avons choisi de le faire intervenir assez tard dans la séquence, en le faisant apparaître comme un perfectionnement technologique par rapport à d'autres méthodes de tracé.

Lorsqu'il est introduit, dans la séance des messages, beaucoup d'élèves éprouvent quelques réticences à l'utiliser. Il y a sans doute là un problème de contrat didactique (les compas n'ont pas eu droit de cité jusqu'alors) mais à notre avis il ne suffit pas à expliquer de façon satisfaisante le comportement des élèves puisque, même ceux à qui la maîtresse les propose explicitement, hésitent à s'en servir dans plusieurs cas. Les élèves, à ce moment de l'apprentissage, disposent de divers moyens pour tracer des cercles. Le compas est assurément plus pratique, encore faut-il en maîtriser parfaitement l'usage. Comme dit Pierre : "Comment faire avec le compas un cercle qui fasse exactement 6 cm de rayon ?" Il est sûr que cet obstacle sera rapidement dépassé, mais il est à nos yeux significatif.

Au niveau des tests d'ailleurs, 8 élèves tracent un cercle de 8 cm de rayon en voulant tracer un cercle de 8 cm de diamètre. Pierre est dans ce cas et exprime son point de vue avec beaucoup de clarté : il a pris 8 cm comme écartement du compas et l'invariant du cercle c'est bien le diamètre donc 8 cm, pourquoi donc n'obtient-il pas un cercle de 8 cm de diamètre ?

Nous ne pouvons bien sûr par prétendre que ce que nous avons observé, trouvé, à valeur de généralité. La pré-expérimentation porte sur une cinquantaine d'élèves, l'expérimentation sur une quarantaine. Cette petite centaine d'enfants ne provient que de 4 classes différentes.

Nous ne pensons pas non plus que ce qui a été observé, trouvé ici, n'a qu'une valeur anecdotique; et ce qui fonde en grande partie notre conviction, c'est le repèrage, en dépit de trajectoires différentes, et pour les élèves et pour les classes, d'un certain nombre de régularités, régularités suffisamment puissantes pour que les comportements associés persistent tout au long de la séquence didactique et réapparaissent au cours des tests, même si l'enseignement dispensé ici a cherché à les dépasser voire même à les contrer. L'importance pour la recherche de la découverte de telles régularités a été soulignée par différents auteurs (Rouchier [10], Vergnaud [15]).

Nous ne voudrions pas terminer cette étude sans aborder une question qui n'était pas centrale ici mais nous paraît fondamentale, les situations - problèmes de l'expérimentation ont été conçues pour répondre aux questions posées concernant les conceptions du cercle. Elles ont permis un apprentissage et nous pensons qu'effectivement elles réalisent, toutes, les caractéristiques que l'on est en droit d'attendre de situations d'apprentissage (Douady [5]). Mais nous ne considérons pas pour autant cette séquence comme une méthode à proposer aux enseignants. A cela s'opposent des raisons de nature diverse :

- Nous ne pouvons raisonnablement soutenir, par exemple, que la construction du concept de cercle puisse s'effectuer à travers une suite de situations dont aucune ne mettrait en oeuvre de façon opératoire et non seulement perspective des courbes fermées non circulaires (ce qui est le cas ici).

- Il n'y a pas suffisamment de situations privilégiant des conceptions ponctuelles du cercle. Or à l'issue de cette recherche, il semble que l'un des buts qu'ait à viser l'enseignement soit le développement de telles conceptions et leur intégration aux conceptions essentiellement globales qui préexistent à l'enseignement.

- A un tout autre niveau, nous devrions au préalable, nous assurer de la reproductibilité de ces situations (Brousseau [4]). Ceci suppose que l'on soit capable de déterminer pour chaque situation, quelles sont les variables de commande, quel est le champ des possibles, quel jeu vont jouer et le maître et l'élève. Ceci suppose en outre, à notre avis, que les situations satisfassent certains critères de stabilité, à savoir que des modifications faibles des variables du système, à un instant quelconque donné, ne conduisent pas, de façon non prévisible, à des trajectoires fondamentalement divergentes. Nous ne pouvons l'affirmer pour les situations proposées ici. De plus l'expérimentation a montré que les conduites des élèves avaient été à plusieurs reprises déterminées en grande partie par des variables dont nous avions sous-estimé l'importance.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] G. BROUSSEAU : "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques"
Compte rendu CIAEEM Louvain-la-Neuve Belgique - 1976

[2] G. BROUSSEAU : "L'étude des processus d'apprentissage en situation scolaire"
Center for studies in Sciences of Education - Leeds 1975.

[3] G. BROUSSEAU : "L'observation des activités didactiques"
Revue française de Pédagogie n° 45 - 1978.

[4] G. BROUSSEAU : "Problèmes de didactique des décimaux"
Recherche en didactique des mathématiques n° 2.1 - 1981.

[5] R. DOUADY : "Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire"
Recherche en didactique des mathématiques n° 1.1 - 1980

[6] M. GUILLERAULT et C. LABORDE : "Une situation de communication en géométrie"
Publications IMAG - Grenoble 1981.

[7] J. PIAGET et B. INHELDER : "La représentation de l'espace chez l'enfant"
Paris - PUF 1947 - 1977

[8] J. PIAGET, B.INHELDER et A.SZEMINSKA : "La géométrie spontanée chez l'enfant"
Paris P.U.F. 1947, 1977.

[9] J. PIAGET et B. INHELDER : "L'image mentale chez l'enfant"
Paris P.U.F. 1948, 1973.

[10] A.ROUCHIER : Communication au congrès ICME IV - Berkeley 1980.

[11] O. SCHNEIDER : "Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de Seconde"
D.E.A. Bordeaux 1978.

[12] H. SINCLAIR : "Acquisition du langage et développement de la pensée"
Dunod 1973.

[13] D. O.TALL et S. VINNER : "Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and contimity
E.S. Mai 1981.

[14] J. TONNELLE : "Le monde clos de la factorisation au premier cycle"
D.E.A. Bordeaux 1978.

[15] G. VERGNAUD : "Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques".
Communication au Congrès de P.M.E. - Grenoble 1981.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Conception du cercle chez les élèves de l'école élémentaire

AUTEUR (S) :

Artigue Michèle
Robinet Jacqueline

RESUME :

Cette brochure présente une recherche sur les conceptions du cercle menée à l'école élémentaire aux niveaux CE2 et CM1. Dans une phase de pré-expérimentation, des élèves de ces niveaux ont été confrontés à des tâches variées mettant en jeu le cercle. L'analyse des données recueillies a conduit à la définition de différentes conceptions du cercle, se différenciant par les éléments géométriques et les propriétés pris en compte. La disponibilité de ces différentes conceptions selon les contextes a été ensuite étudiée à partir de l'expérimentation, dans deux classes de CE2, de cinq situations problèmes les privilégiant plus ou moins a priori. Après une présentation brève de la recherche, la brochure est constituée de trois parties principales consacrées respectivement à l'analyse de différentes définitions du cercle, à la pré-expérimentation et à l'expérimentation. L'analyse de cette dernière s'efffectue selon trois dimensions : conceptions du cercle mises en oeuvre par les élèves, effets de l'apprentissage, gestion de la classe, avec notamment l'analyse des phases de rappel et des processus d'institutionnalisation

MOTS CLES :

didactique, mathématiques, géométrie, cercle, école élémentaire,
conceptions, institutionnalisation, situations didactiques.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05
Dépôt légal : 1986
ISBN : 2-86612-142-2