

REPRESENTATION DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DECIMAUX
CHEZ DES ELEVES DE CM₂ ET DU COLLEGE

PAR MARIE-JEANNE PERRIN GLORIAN

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
24

REPRÉSENTATION DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DÉCIMAUX CHEZ DES ÉLÈVES DE CM₂ ET DU COLLÈGE

I. PRESENTATION DU TRAVAIL

Problématique

De nombreux travaux montrent que les élèves du collège font encore beaucoup d'erreurs sur les questions qui concernent l'ordre des nombres décimaux. Par exemple dans "Education et Formation" n°3 de 1983 qui donne les résultats d'une enquête du Ministère de l'Education Nationale, on peut lire que 53 % des élèves seulement savent comparer deux décimaux à l'entrée en 6ème. Quand il s'agit d'ordonner 5 ou 6 nombres décimaux les erreurs sont encore très nombreuses en 4ème et au-delà.

Plusieurs travaux ont déjà décrit ces erreurs et explicité des règles implicites qu'utilisent les élèves confrontés à un problème d'ordre sur les décimaux. En particulier C. Grisvard et F. Léonard [GL] ont repéré 3 règles utilisées par les élèves pour ordonner des nombres décimaux ayant même partie entière.

Il est à noter que l'application de ces règles peut produire de bonnes réponses dans un grand nombre de cas.

Règle 1 : Le nombre le plus grand est celui dont le nombre entier formé par les chiffres après la virgule est le plus grand.

Exemple $12,113 > 12,4$ car $113 > 4$
ou $12,04 > 12,3$ car $4 > 3$

Règle 2 : Le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit

Exemple $12,04 < 12,4$ ou $12,325 < 12,3$

Règle 3 : Elle apparaît quand il y a plus de 2 nombres à comparer et que l'un des nombres a un zéro pour première décimale. La règle 3 peut alors se formuler : le plus petit nombre est celui dont la première décimale est un 0. Ensuite on applique la règle 1.

La règle 3 est une amélioration de la règle 1.

La règle 1 est la plus fréquemment employée dans les mauvaises réponses, à égalité avec la règle 3 dans le cas où celle-ci peut s'appliquer.

L'application de la règle 2 est moins systématique : elle est rarement employée

seule et son emploi est partiellement recouvert par celui de la règle 3.

C. Grisvard et F. Léonard ont montré aussi que des élèves qui donnent une bonne réponse quand il s'agit de ranger un couple de décimaux, recourent aux règles décrites dans le cas où la situation est plus complexe (5 nombres à ordonner par exemple).

Dans le travail qui suit, nous nous sommes plus particulièrement intéressées à la période scolaire qui suit l'apprentissage des décimaux (CM₂ - 6ème) et à des classes comportant beaucoup d'élèves ayant une réussite scolaire très médiocre (pourcentage important d'élèves ayant au moins un an de retard).

Notre objectif était de cerner les difficultés rencontrées par ces élèves, les types d'erreur et de voir si un apprentissage différent pouvait agir sur les représentations des élèves et donc modifier les erreurs observées.

Nous nous sommes en particulier posé les questions suivantes :

- Quelles représentations les élèves se font-ils des petites fractions et des nombres décimaux ?
- Quelle pratique ont-ils de la graduation et de l'ordre sur les décimaux ?
- Y-a-t-il un rapport entre les conceptions formulées et les performances sur l'ordre des décimaux ?
- Les élèves sont-ils capables de résoudre des problèmes multiplicatifs simples comme ceux mis en œuvre dans la numération (problèmes de groupements) ou dans la composition d'applications ?
- Y-a-t-il un rapport entre la résolution de ces problèmes par les élèves et leur performance sur les décimaux ?
- Y-a-t-il une différence au niveau des conceptions pour les élèves qui ont au moins un an de retard scolaire ?
- Y-a-t-il des différences au niveau des résultats pour ces mêmes élèves ?
- Y-a-t-il des différences au niveau des représentations selon l'apprentissage ?
- Y-a-t-il des différences au niveau des résultats suivant l'apprentissage ?

Les questions posées sont nombreuses et nous ne pourrons pas y apporter de réponse générale. Nous espérons fournir quelques illustrations sur les conceptions et les erreurs des élèves à propos des nombres non entiers, et donner quelques précisions sur les questions formulées ci-dessus.

Méthodologie

a) Présentation des classes.

Au cours de l'année 1983-1984 nous avons travaillé avec deux classes de CM_2 d'une même école (désignées dans la suite CM_2 A - CM_2 B) et une classe de 6ème du même secteur scolaire (désignée 6ème A). Dans chacune de ces classes plus de la moitié des élèves avaient au moins un an de retard scolaire. La plupart des élèves étaient issus de milieu socio-culturel très modeste; il y avait également un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère (40 % dans les CM_2). Nous avons travaillé avec les maîtres de ces deux classes pendant l'année de CM_2 , préparant avec eux toutes les activités sur l'introduction des nombres décimaux et un certain nombre d'activités permettant de les utiliser, nous étions présentes dans la classe une fois tous les quinze jours (parfois moins). Les élèves avaient déjà vu des écritures à virgule dans des activités de changement d'unité. En CM_2 , nous avons commencé par un apprentissage sur les petites fractions dans des situations de mesure de longueur et les nombres décimaux sont apparus comme des nombres fractionnaires particuliers, plus commodes à manipuler dans certains cas, par exemple plus faciles à situer parmi les entiers. Les élèves ont travaillé sur la graduation d'une demi-droite et son affinement en demis, quarts, huitièmes ou en tiers et sixièmes, puis en dixièmes, centièmes, millièmes. Ce travail sur les écritures fractionnaires s'est étalé sur deux mois environ et l'écriture à virgule est apparue comme une convention et a été reliée au tableau de numération.

Dans la classe de 6ème A, nous avons organisé avec le Professeur une séance de travaux dirigés une fois par semaine au cours du premier trimestre avec comme objectif la distinction des notions de longueur et d'aire et l'utilisation des décimaux dans des situations d'approximation. Nous avons aussi repris les situations d'introduction des fractions du CM_2 dans le but de donner un sens aux dixièmes, centièmes que les élèves manipulaient de façon très formelle.

Au second trimestre nous avons interrogé tous les élèves, par groupes de 2 sur un des problèmes suivants :

1. Parmi les rectangles de périmètre X cm, y-en-a-t-il un d'aire $Y \text{ cm}^2$?
2. Peux-tu trouver deux nombres dont la somme est X et le produit Y ?

X et Y variaient suivant les équipes et étaient choisis de façon qu'il y ait une solution irrationnelle.

Au 3ème trimestre nous avons travaillé sur la mesure des aires.

Le reste du temps les élèves travaillaient normalement avec le Professeur sur le programme de 6ème de façon traditionnelle.

A chacune de ces 3 classes nous avons proposé un test écrit en décembre 83 ou janvier 84 puis en juin 84.

Nous avons proposé le même test à d'autres classes de CM_2 , 6ème, 5ème, 4ème désignées dans la suite CM_2C , 6ème B, 6ème C, 6ème D, 5ème, 4ème A, 4ème B.

La classe de CM_2C comportait également un fort pourcentage d'élèves d'origine étrangère et beaucoup d'élèves issus de milieu socio-culturel modeste. C'est une classe d'application de l'Ecole Normale. R. Douady a travaillé en mathématiques avec cette classe en CM_1 et CM_2 . L'apprentissage des décimaux s'est fait au cours de situations dont la plupart sont décrites dans une brochure de l'I.R.E.M. de Paris VII [DP] : l'ensemble des nombres connus (entiers) s'est enrichi de quelques fractions pour répondre à des problèmes de mesure de longueur. Les élèves ont travaillé sur la graduation d'une demi-droite et son affinement, les fractions décimales ont été privilégiées pour simplifier les calculs et la virgule est apparue comme une convention commode pour alléger l'écriture, au moment où les élèves avaient déjà mis en place toutes les techniques de calcul sur les écritures en fractions décimales. Le travail sur les écritures fractionnaires s'est étalé sur une année avant l'introduction de l'écriture à virgule.

Pour les autres classes, nous n'avons pas d'information sur l'apprentissage. Les classes de 6ème B et 6ème C sont deux classes de 6ème d'une ZEP de la banlieue Nord de Paris, avec un fort pourcentage d'élèves ayant au moins un an de retard scolaire.

Les classes 6ème D, 5ème, 4ème B sont 3 classes ordinaires d'un même établissement de Vélizy. Dans cette 4ème l'apprentissage sur les rationnels était commencé. La classe 4ème A est une classe de 4ème du lycée Victor Hugo à Paris. Le test a été passé avant l'apprentissage sur les rationnels.

Age des élèves

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
Avance	0	0	3	0	0	0	1	1	1	4
Normal	12	11	12	7	7	7	11	9	6	14
1 an retard	6	8	5	8	9	8	7	2	8	2
≥ 2 ans "	5	4	4	9	4	7	1		2	0
Effectif	23	23	26	24	21	22	26	23	19	22
% pour ≥ 1 an R	47,8	52,2	37,5	70,8	65	68,2	40		58,8	10
% ≥ 2	21,7	17,4	16,7	37,5	20	31,8	5		11,7	0
Non réponse	/	/	2	/	1	/	6	11	2	2

Pour les classes de 5ème et de 6ème D trop d'élèves ont omis de donner leur date de naissance pour qu'on puisse faire des pourcentages. Dans les autres classes les pourcentages n'ont qu'une valeur indicative.

Dans ce premier tableau nous avons compté les avances ou retards par rapport à l'année civile légale.

Dans le tableau ci-dessous nous classons les élèves qui ont du retard et qui sont nés en novembre/décembre avec ceux nés au cours de l'année civile suivante (cela diminue leur retard d'un an) et les élèves qui ont de l'avance et qui sont nés en janvier ou février avec ceux nés au cours de l'année civile précédente (cela diminue leur avance d'un an).

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
Avance	0	0	1	0	0	0	0		1	1
Normal	14	14	15	9	8	9	17	10	8	18
1 an retard	7	6	6	8	8	6	3	2	7	1
≥ 2 ans "	2	3	2	7	4	7	0	1	0	
% ≥ 1 an	39,1	39,1	33,3	62,5	60	59,1	15		47,1	5
% ≥ 2 ans et +	8,7	13	8,3	29,2	20	31,8	0		5,9	0

b) Présentation du test [voir annexe]

Il existe deux versions du test. Nous précisons plus loin les conditions de passage.

- * Pour tester les représentations des élèves sur les petites fractions, nous avons posé 3 questions :
 - . La première question est destinée à cerner la représentation que se font les élèves des petites fractions et des nombres décimaux. En demandant d'expliquer à un camarade de CE₂, on espère sortir du cadre purement scolaire et accéder aux conceptions spontanées des élèves, le CE₂ a été choisi parce que c'est la classe qui précède le premier apprentissage des nombres décimaux.
 - . La question sur les heures est destinée à vérifier si l'usage du quart d'heure est bien une pratique courante pour les élèves, si cette pratique est reliée à la notion de fraction, si l'élève peut l'utiliser pour évaluer des fractions d'heure qui ne sont pas d'usage courant ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ pour la première version, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ pour la deuxième version).
 - . La question sur la somme de fractions est destinée à déceler des modèles spontanés des élèves avant l'apprentissage systématique de la somme de 2 fractions (ou les déviations par rapport à l'apprentissage dans le cas où il y en a eu).
- * Sur l'ordre des décimaux nous avons posé deux questions :
 - intercalation de nombres entre deux autres.
 - ranger 9 nombres décimaux du plus petit au plus grand. Il y avait en fait 11 nombres proposés et parmi eux deux avaient une écriture fractionnaire. Les traitements de ces deux nombres ont été très divers et nous n'en avons pas tenu compte dans les résultats quantitatifs. Nous signalons seulement quelques exemples.
- * Une question sur la graduation : placer 8 nombres sur un axe où les graduations entières étaient marquées (5 cm pour 1 unité).
Cette question manquait dans la première version du test.
- * Un problème de numération : problème des oeufs.
- * Un problème de composition d'applications : problème des âges.
- * Dans la première version, il y avait aussi un problème sur la mesure de l'aire d'un rectangle (problème du carrelage). Quelques élèves avaient proposé $25 + 15 = 40$ ou $2 \times (15 + 25)$, mais il a été assez bien réussi et ce problème n'a pas été repris dans la deuxième version.

c) Conditions de passage du test

La première version a été passée en 6^eA en décembre 83, dans les trois CM₂ en janvier 84, en 4^eA, 6^eD, 5^e, 4^eB en janvier 84.

Pour les CM₂ A et B la passation s'est faite en une séance d'une heure un quart.

En CM₂C elle s'est faite en deux séances d'une heure.

Dans les trois classes de 6^e et la classe de 4^eA en une séance de 50 minutes, dans la classe de 5^e en 30 minutes et dans la classe de 4^eB en 15 minutes.

La première version ne comportait pas de question sur la graduation et était trop longue : beaucoup d'élèves en avaient laissé tomber une partie et en particulier, très peu avaient abordé le problème des œufs placé en dernière position.

La version 1 bis comporte une question sur la graduation, reprend le problème des œufs et les questions sur l'ordre des décimaux. Elle a été passée en mai 84 en 6^eA, en juin 84 en CM₂A et CM₂B.

La deuxième version du test comporte deux parties A et B. Les deux parties ont été proposées à deux jours d'intervalle fin juin 84 dans deux classes de 6^e : 6^eB et 6^eC.

II. RESULTATS AUX TROIS PREMIERES QUESTIONS (représentations, heures, sommes)

1) Représentations proposées

Dans les classes où l'apprentissage a été fait de façon classique, l'unique représentation proposée par les élèves pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ est en termes de partage de tartes, gâteaux, disques... regroupé sous le terme "galette". Quelques élèves proposent des rectangles, mais assez peu.

Une exception : la classe de 4^eB où des élèves proposent des représentations correctes en termes de longueurs (4 pour $\frac{1}{3}$, 3 pour $\frac{3}{4}$).

Pour 2,3 certains élèves restent fidèles aux représentations en termes de galette, toutes fausses. La plupart n'ont aucune réponse à fournir. Les seules représentations correctes fournies le sont en termes de cm et mm, sauf dans la classe de 4^eB où 5 élèves fournissent des représentations en termes de longueur, indépendamment des centimètres et millimètres.

Remarquons que la classe de 4^eB est celle qui a les conditions les plus favorables du point de vue âge des élèves (4 élèves en avance, deux avec un an de retard).

De plus, l'apprentissage sur les fractions était commencé dans cette classe. A noter quelques représentations non inscrites dans le tableau parce que peu nombreuses, en termes d'heures (encouragées par la question suivante) en termes d'opérateur ou en termes de division pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$. Quelques élèves de 6^e font une représentation discrète


 $\frac{1}{3}$

 $\frac{3}{4}$

Pour les classes de CM₂ où il y a eu un apprentissage sur les petites fractions à partir des longueurs, la représentation "baguettes" est partout présente. C'est particulièrement net pour la classe de CM₂C où ce sont presque les seules fournies (à part quelques rectangles). Dans la classe de CM₂B, il y a beaucoup de réponses sans dessin du type " $\frac{1}{3}$ c'est une unité partagée en 3" ou " $\frac{3}{4}$ c'est 3 fois $\frac{1}{4}$ " ou "2,3 c'est 2 entiers et 3 dixièmes" difficilement interprétables en termes de représentation.

Dans la classe de CM₂A les représentations "baguettes" et "galettes" sont à peu près équilibrées avec un léger avantage pour les galettes.

Notons qu'en CM₂C l'apprentissage sur les fractions à partir des mesures de longueur a été plus poussé et s'est étalé sur une plus longue période de temps.

		CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	total	% 6 ^e
Effectif		22 22	21 18	26 25	24 19	18 15	21 21	26 26	23 22	19 16	22 20	89 77	
baguettes	$\frac{1}{3}$	6	8	16	0	0	0	1	0	0	6	1	1,4
	$\frac{3}{4}$	11	4	15	0	0	0	1	0	0	4	1	1,5
	2,3	6	4	15	0	0	6	3	4	0	6	9	22
rectangles	$\frac{1}{3}$	0	1	5	2	0	0	4	3	0	1	6	8,2
	$\frac{3}{4}$	0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	5	7,4
	2,3	0	1	2	0	0	0	1	0	0	0	1	2,4
galettes	$\frac{1}{3}$	12	0	0	12	14	21	15	18	9	11	62	84,9
	$\frac{3}{4}$	10	0	0	8	13	21	16	16	12	9	58	85,3
	2,3	8	0	0	4	11	14	2	2	6	0	31	75,6
Réponses sans dessin	$\frac{1}{3}$	1	6	3	2	0	0	0	0	3	1	2	
	$\frac{3}{4}$	1	12	4	2	1	0	1	1	3	1	4	
	2,3	3	9	2	3	0	1	5	5	2	2	9	
Réponses fournies	$\frac{1}{3}$	19	15	24	16	14	21	24	21	12	19	75	84,3
	$\frac{3}{4}$	22	16	22	13	14	21	24	20	15	14	72	80,9
	2,3	17	14	20	8	11	18	13	10	8	8	50	56,2
Représentations correctes	$\frac{1}{3}$	12	7	17	7	5	12	16	17	3	15	40	53,3
	$\frac{3}{4}$	16	1	13	6	8	19	17	16	13	10	50	69,4
	2,3	3	3	12	0	0	6	4	4	0	6	10	20

Pour les représentations le pourcentage concernant l'ensemble des élèves de 6^e est calculé sur les réponses avec dessin.

Exemple : $\frac{\text{représentation "galette"}}{\text{réponses avec dessin}}$ 84,9% des élèves de 6^e ayant fourni un dessin pour 1/3 ont fait une représentation de type /galette.

Le pourcentage des représentations correctes est calculé sur les réponses fournies, toujours pour l'ensemble des élèves de 6^e; par exemple 20 % des élèves ayant fourni une réponse pour 2,3 ont fait une représentation correcte.

Le nombre de réponses fournies est indiqué pour chaque classe en italique dans la ligne effectif.

Le pourcentage des réponses fournies est calculé sur l'effectif : par exemple 80,9 % des élèves de 6^e ont fourni une réponse à la question concernant 3/4.

Tableau des % de représentations correctes sur les représentations fournies avec dessin.

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	6 ^e
1/3	66,7		81	50	35,7	57,1	76,2	81	33,3	83,3	54,8
3/4	76,2		72	54,5	61,5	90,5	80	84,2	100	76,9	73,5
2,3	21,4		66,7	0	0	33,3	57,1	66,7	0	100	21,7
Effectif total	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	89
Réponse avec dessin pour 2,3	14	5	18	5	11	17	8	5	6	6	46

Nous ne donnons pas les pourcentages en CM₂B. Ils n'auraient aucune signification puisqu'il y a trop peu d'élèves qui ont fourni des représentations (respectivement 9-4-5). Remarquons que la même réserve est à faire sur les pourcentages concernant 2,3 étant donné le faible pourcentage de réponse à cette question dans certaines classes, en particulier en 6^eA, 6^eD, 5^e, 4^eA, 4^eB où moins de la moitié des élèves ont répondu à cette question. Si on ne prend en compte que les réponses avec dessin les effectifs sont respectivement de 14 sur CM₂A, 18 en CM₂C, 5 en 6^eA, 11 en 6^eB, 17 en 6^eC, 8 en 6^eD, 5 en 5^e, 6 en 4^eA et 6 en 4^eB.

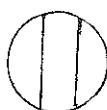
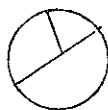
On peut cependant remarquer que sur les représentations fournies pour 2,3, elles ne sont majoritairement correctes que dans les classes de CM₂C, 6^eD, 5^e, 4^eB et pour les classes de 6^eD, 5^e, 4^eB les réponses correctes sont évaluées sur un très petit effectif (resp. 8,5,6). Dans les classes de 6^e les seules représentations correctes fournies sont celles de la règle avec cm et mm. Cette représentation resterait-elle efficace pour 2,3 ?

Erreurs rencontrées

Les erreurs ont été nombreuses et variées. On trouve cependant des régularités. Nous ne donnerons pas de résultats quantitatifs, mais une description qualitative des erreurs avec une simple indication de fréquence.

a) pour $\frac{1}{3}$

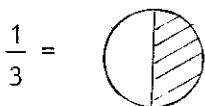
- Une erreur très fréquente est celle de l'inégalité des parts. Je n'en ai pas tenu compte quand elle était manifestement due à la maladresse. Mais certains élèves représentent $\frac{1}{3}$ par une petite part ou trois parts inégales



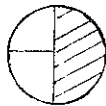
sans toujours dire quelle part ils choisissent.

- La confusion avec $\frac{1}{2}$ existe mais elle est assez rare

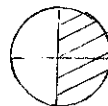
on trouve $\frac{1}{3} =$



ou



ou



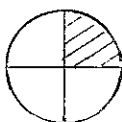
3 exemples vus en 6^e

Le 2^e exemple est sans doute à rapprocher des partages inégaux.

- Mais la confusion avec $\frac{1}{4}$ est assez répandue (14 fois).

Elle n'est pas toujours à rapprocher des partages inégaux car certains élèves

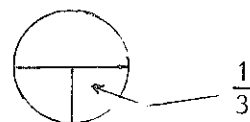
dessinent



D'autres commentent

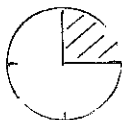
"il le coupe en demi et la moitié il la coupe en 2.

Une des parties sera le tiers" avec le dessin



Un élève de 4^e qui adopte le modèle "heures" précise 15 mn à côté d'un

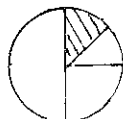
dessin



- Une autre confusion rencontrée 6 fois est la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$

parfois explicitée :

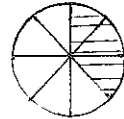
"c'est la moitié du quart"



- A noter aussi la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ (3 fois)

parfois exprimée $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

- entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{8}$: un élève de 6^e a dessiné très soigneusement

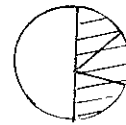


tiers

il a d'ailleurs écrit $\frac{1}{3}$ vaut $\frac{3}{4}$

et pour $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{4}$ vaut $\frac{1}{3}$!

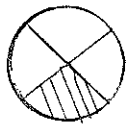
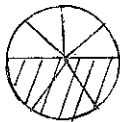
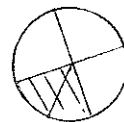
- Un élève de 6^e pour $\frac{1}{3}$ a dessiné 3 parts de gâteau :



- A noter aussi la confusion entre $\frac{1}{3}$ et 1,3 rencontrée quelquefois en CM₂ et en 6^e.

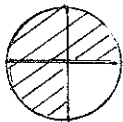
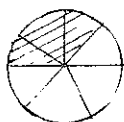
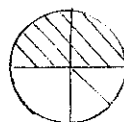
- Enfin des élèves de CM₂ et de 6^e ne voient dans les écritures $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ et 2,3 qu'un couple de 2 entiers.

Ainsi un élève de CM₂ dessine :

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$ 

2,3

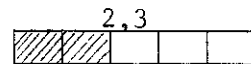
Un élève de 6^e dessine

 $\frac{1}{3}$  $\frac{3}{4}$ 

2,3

et un autre élève de CM₂ explique :

avec cinq bâtons de chocolat je dois donner

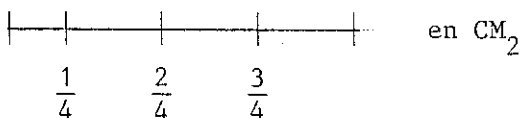


2,3

Dans chaque cas il y a séparation respectivement en une part et 3 parts, 3 parts et 4 parts, 2 parts et 3 parts sans qu'il y ait nécessairement souci d'égalité des parts. C'est une conception qu'on pourrait appeler "juxtaposition de 2 entiers".

b) pour $\frac{3}{4}$

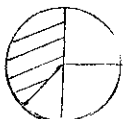
- Les partages inégaux sont plus rares. On les rencontre cependant avec la représentation "baguettes" - Par exemple

en CM₂ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

- Pour quelques élèves de 6^e $\frac{3}{4}$ c'est presque tout :



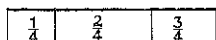
ou plus de la moitié. Par exemple un élève de CM₂

dessine  et écrit "j'ai colorié ce qu'il a mangé, il lui reste les $\frac{3}{4}$ (il a mangé le quart)".

- Pour d'autres élèves c'est 3 morceaux mais on ne précise pas toujours le tout. Par exemple



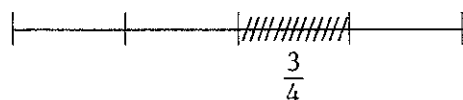
ou



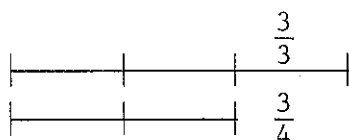
ou

je coupe les trois quarts
du gâteau

- Nous avons déjà signalé la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$, elle est peut-être à rapprocher de cette conception "3 morceaux".
- A noter aussi les élèves qui pour $\frac{3}{4}$ donnent la définition de $\frac{1}{4}$: c'est l'unité partagée en 4, ou tu partages le gâteau en 4 sans plus de précision.
- Une autre erreur que l'on rencontre plutôt chez les élèves qui ont adopté une représentation de type "baguette" c'est la confusion entre $\frac{3}{4}$ et "le 3^{ième} quart" :



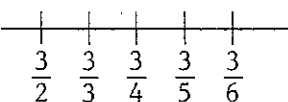
- Un élève de CM₂ écrit : pareil que pour $\frac{1}{3}$ mais je coupe en 4 et j'en prends 3 et dessine

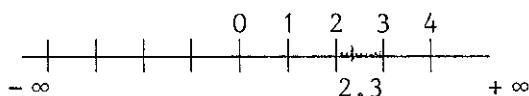


Confusion entre les tiers et les quarts ou entre les barres et les intervalles ?

Pour $\frac{1}{3}$ il avait dessiné  $\frac{1}{3}$ "je coupe en 3 parties égales et je prends un morceau du carré"

- Un élève de 4^eB a répondu  à la 1^e question

 à la 2^e question et correctement à la 3^e question :



- Deux élèves d'une classe de 6^e interprètent $\frac{3}{4}$ comme 3,5.

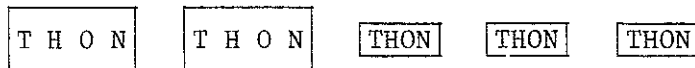
Rappelons les élèves qui ont développé la conception "juxtaposition de 2 entiers" pour les 3 exemples.

c) pour 2,3

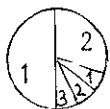
La confusion la plus fréquente est celle entre 2,3 et $\frac{2}{3}$ (16 fois) surtout dans les classes de CM₂ et de 6^e.

- Plusieurs élèves proposent $2 + \frac{1}{3}$: deux unités plus l'unité partagée en 3. Un élève propose $2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

- . Une autre représentation est celle par 2 gros bouts et 3 petits. Par exemple une élève de 6^e prend 2 grosses boîtes de thon et 3 petites

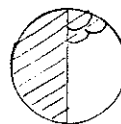


Une élève de CM₂ dessine

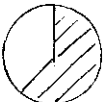


et écrit 2 entiers et 3 dixièmes.

- . Un élève de 6^e explique "j'ai une galette, je la coupe en 2 parties, j'en prends 1 part plus 3 petits morceaux" et dessine

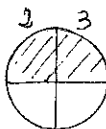


3 autres élèves ont des dessins du même type

- . Une élève de 6^e dessine  et commente "c'est la moitié d'une tarte avec une moitié d'un quart". Pour $\frac{1}{3}$ elle dessine  et écrit un quart

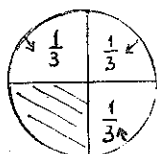
- . Certains élèves représentent 2,3 par la moitié ou un peu plus de la moitié  ou  sans commentaire. Faut-il les rapprocher de ceux qui confondent 2,3 et $\frac{2}{3}$ ou de ceux qui considèrent 2,3 comme la moitié plus quelque chose ?

- . Une élève fait ce dessin



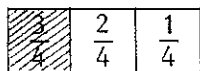
faut-il la rapprocher des élèves déjà signalés qui expriment la conception "2 entiers juxtaposés"; il s'agirait peut-être ici d'un aspect ordinal "le 2^e et le 3^e".

Pour les autres questions cette élève avait dessiné



$\frac{1}{3}$ enlevé

et



- . Enfin, beaucoup d'élèves ne font aucune représentation et se contentent de dire 2,3 c'est 2 entiers et 3 dixièmes ou c'est un nombre décimal, il y a une partie entière et une partie décimale. Un élève de 4^e écrit "c'est 2,30 c'est-à-dire 2 + , + 30"

2) Question sur les heuresa) réponses correctes

		CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
Effectif		22	21	26	24	18	21	26	23	19	22
$\frac{1}{4}$	correctes	13	13	22	18	12	19	25	23	13	19
	fournies	15	14	24	20	15	20	26	23	15	19
$\frac{1}{3}$	correctes	8	3	13	1			17	17	5	13
	fournies	10	8	23	13			23	21	9	15
$\frac{1}{5}$	correctes	7	1	15	1	1	5	12	18	4	9
	fournies	10	5	18	13	9	13	22	20	10	12
$\frac{1}{10}$	correctes					2	11				
	fournies					9	15				

Pourcentage des réponses correctes sur les réponses fournies

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
$\frac{1}{4}$	86,7	92,9	91,7	90	80	95	96,2	100	86,7	100
$\frac{1}{3}$	80	37,5	56,5	7,7			73,9	81	55,6	87,7
$\frac{1}{5}$	70	20	83,3	7,7	11,1	38,5	54,6	90	40	75
$\frac{1}{10}$					22,2	73,3				

Pourcentage des réponses correctes sur l'effectif

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
$\frac{1}{4}$	59,1	61,9	86,4	75	66,7	90,5	96,2	100	68,4	86,4
$\frac{1}{3}$	36,4	14,3	50	4,2			65,4	73,9	21,1	59,1
$\frac{1}{5}$	31,8	4,8	50,6	4,2	5,6	23,8	46,2	78,3	26,3	40,9
$\frac{1}{10}$					11,5	52,4				

Les réponses fournies pour $\frac{1}{4}$ sont souvent correctes (au moins 80 % des réponses fournies dans toutes les classes). Dans les classes de CM₂A et CM₂B beaucoup d'élèves n'ont pas du tout abordé la question (1/3 de l'effectif). Il y a également beaucoup de non réponse en 4^eB, surtout pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$. Peut-être est-ce dû pour cette classe au manque de temps (rappelons que dans cette classe les élèves n'ont disposé que de 15 minutes).

Pour les autres questions les réponses correctes sont majoritaires pour les classes de Vélizy (6^eD, 5^e, 4^eB) et pour les classes de CM₂ où il y a eu apprentissage sur les fractions (CM₂C et CM₂A dans une moindre mesure) et dans la classe de 6^eC pour $\frac{1}{10}$ (la réussite chute pour $\frac{1}{5}$ en particulier à cause des élèves qui pensent que $\frac{1}{5}$ est la moitié de $\frac{1}{10}$). Dans les autres cas, moins du quart des élèves donnent une réponse correcte pour $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ (26,3 % pour $\frac{1}{5}$ en 4^eA).

b) erreurs rencontrées sur cette question

pour $\frac{1}{4}$ h : 3 élèves répondent 45 minutes (dont 2 en 4^eA) confusion $\frac{1}{4}$
et moins $\frac{1}{4}$)

Effectif : 3 élèves répondent 40 minutes (appel du 4)
222 2 élèves répondent 900 minutes (15 x 60)
1 élève de 6^e répond $\frac{1}{4}$ h 14 mn $\frac{1}{3}$ h 13 mn $\frac{1}{5}$ h 15 mn
1 élève de CM₂ répond 840 mn (14 x 60)
1 élève de CM₂ répond 20 mn.

Toutes les erreurs sont en 6^e et CM₂ sauf les deux signalées en 4^e.

N.B. les élèves qui répondent 40 mn pour $\frac{1}{4}$ répondent respectivement
35 mn pour $\frac{1}{3}$ et 1 h 5 mn pour $\frac{1}{5}$; 30 mn pour $\frac{1}{3}$ 15 mn pour $\frac{1}{5}$;
30 mn pour $\frac{1}{5}$ h et 40 mn pour $\frac{1}{10}$.

pour $\frac{1}{3}$ h : Effectif 189.

- . 7 élèves répondent 30 minutes (appel du 3)
- . 7 élèves répondent 45 mn (cf la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4}$ ou la conception 3 parties, à la fois pour $\frac{1}{3}$ et pour $\frac{3}{4}$)
- . 5 élèves répondent 7 mn 30 (4) ou 8 mn (1) (à rapprocher de la confusion entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$).
- . 5 élèves répondent 10 minutes.
- . 4 élèves font des erreurs de calcul ou de dénombrement :
2 élèves répondent 2 minutes (dont une écrit 60 : 3 = 2)
et 2 élèves répondent 21 après avoir dessiné la pendule graduée en minutes (erreur borne-intervalle).

- . 3 élèves répondent 15 minutes (cf la confusion $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ ou la position du 3 sur la pendule)
- . 2 élèves répondent 13 minutes
+ un autre qui répond 690 minutes (60 x 13)
- . 1 élève répond $\frac{1}{4}$ h = 15 mn $\frac{1}{3}$ h = 14 mn $\frac{1}{5}$ h = 16 mn
- . on trouve encore les réponses 35 mn, 40 mn, 5 mn.

pour $\frac{1}{5}$ h : Effectif 222

- . 10 élèves répondent 5 mn + 1 répond 50 mn + 1 répond 300 mn (5 x 60) + 1 répond 50 s.
- . 4 élèves répondent 15 minutes + 1 élève répond 1 h 5 mn.
- . 9 élèves répondent 30 mn (confusion $\frac{1}{5}$ et 0,5 ?).
- . 5 élèves répondent 10 mn.
- . 4 élèves répondent 20 mn.
- . 4 élèves répondent 25 mn (position du 5 sur la pendule ? hypothèse plausible si on considère que 2 élèves ont fait cette réponse et n'avaient pas à répondre pour $\frac{1}{10}$ et que les 2 élèves qui ont fait cette réponse et qui devaient aussi répondre à la question $\frac{1}{10}$ h ont répondu 50 mn pour $\frac{1}{10}$ h. Remarquons que cette réponse est aussi cohérente avec l'idée que $\frac{1}{5}$ est la moitié de $\frac{1}{10}$ et la confusion entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5}$).
- . 2 élèves répondent 3mn (ils ont bien trouvé 6 minutes pour $\frac{1}{10}$ h et ont pris la moitié pour $\frac{1}{5}$).
- . 2 élèves de 4^eA ont répondu 75 mn (5 quarts d'heure).
- . Autres réponses recueillies une fois chacune,
60 mn ; 4 mn 30 ; 950 (900 = 15 x 60 ?) ; 16 mn
45 mn ; 2 mn 30 ; 300 mn ; 22 mn 30 ; 40 mn.

pour $\frac{1}{10}$ h : Effectif 39

- . 6 élèves répondent 10 minutes + 1 qui répond 600 mn (60 x 10).
- . 2 élèves répondent 50 mn (position du 10 sur la pendule ou - 10 ?)
- . 1 élève répond 30 mn, 1 élève répond 40 mn.

3) Question sur les sommes

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	6 ^e A,B,C	6 ^e
Effectif	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	63	89
Rép. fournies	22	18	25	14	14	20	21	20	19	22	48	69
Correct a b c d	0	0	8	1	0	0	0	0	3	12	1	1
Correct a b c	18 81.8	10 55.6	16 64	3 21.4	4 28.6	2 10	12 57.1	6 30	8 42	18 81.8	9 18.75	21 30.4
Correct $\frac{1}{2}$	22 100	13 72.2	22 88	3 21.4	5 35.7	6 30	15 71.4	8 40	9 47.5	21 95.5	14 29.2	29 42
modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$	0	1+(2)	2+(2)	4+(1)	2	9+(1)	4+(4)	6+(4)	1+(1) 10.5	(1)	17 35.4	25 36.2
modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	0	2+(1)	1+(1)	0	(1)	(3)	1+(2)	3	7+(3) 52.6	1	4 8.3	7 10.1
mélange des 2	0	0	0	1	0	5	1	0	3	0	6	7
somme des nombres	0	0	0	2	1	1+(2)	0	0	0	0	6	6
autres erreurs	0	3	0	4	7	2	6	3	0	6	13	19

A titre indicatif, pour faciliter les comparaisons, nous indiquons dans le bas de la case le pourcentage calculé sur le nombre de réponses fournies.

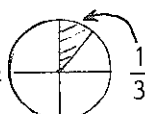
Nous disons que les élèves utilisent le modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ quand ils répondent systématiquement en ajoutant numérateur et dénominateur. Nous disons que les élèves utilisent le modèle $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ quand ils répondent systématiquement en gardant le numérateur 1 et en ajoutant les dénominateurs. Nous indiquons entre parenthèses le nombre d'élèves qui utilisent partiellement un des modèles. Certains utilisent tantôt un modèle tantôt l'autre.

Trois élèves de 6^e (2 en 6^eA et 1 en 6^eC) répondent en faisant systématiquement la somme des nombres figurant au numérateur et au dénominateur, par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 8$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 7$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 24$. Un élève de 6^eB que nous avons compté aussi dans la ligne "somme des nombres" fait un calcul légèrement différent et écrit :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \times (2+2) = 4 ; \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \times (3+3) = 6 ; \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 10 \times (1+3) = 40$$

Deux autres élèves de 6^eC, indiqués entre parenthèses, répondent correctement pour $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et font une réponse du même type que la précédente dans les autres cas : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 6$ et $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'un, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 12$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = 40$ pour l'autre.

Les autres erreurs consistent parfois en un oubli du dénominateur (par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2$, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$) ou des erreurs relevant de conceptions erronées : par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$ la moitié d'un gâteau, réponse cohérente avec le dessin fourni à la première question

ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ avec  $\frac{1}{3}$. Cette dernière réponse est fournie 4 fois.

Remarquons cependant que les réponses erronées à cette question ne sont pas toujours cohérentes avec les représentations fournies à la première question.

Certaines réponses peuvent correspondre à une évaluation du résultat : par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$ proposé par un élève de 6^e qui a répondu correctement aux autres questions.

Notons aussi la réponse $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ d'un élève de 5^e et 3 réponses $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (1 en 6^e et 2 en 4^e).

Remarquons que les élèves de CM₂ ont une meilleure performance que les élèves de 6^e, 5^e, 4^eA pour les questions $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$, $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$

Ce n'est pas étonnant puisque dans ces classes il y a eu un apprentissage sur les fractions et les élèves avaient été amenés à ajouter des fractions de même dénominateur. Pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, seuls les élèves de CM₂C avaient rencontré des problèmes analogues et plus de 30 % d'entre eux répondent correctement à la question.

Les élèves de 4^eB avaient commencé l'étude des fractions ce qui explique que plus de la moitié d'entre eux répondent correctement à la question, alors qu'aucun élève de 5^e du même établissement ne répond correctement à cette question.

Les élèves de 6^eB et 6^eC n'ont pas eu à donner $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. En revanche, on leur demandait $0,7 + 0,8$.

On a le tableau suivant :

	6 ^e B	6 ^e C	Total	%
Effectif	18	21	39	
Réponse fournie	12	16	28	
Réponse correcte	3	7	10	35.7
Réponse 0,15	5	8	13	46.4

Les autres réponses fournies sont :

1,6 (2 fois) 15 (1 fois)

"15 petits morceaux de tarte"

4,5 (il s'agit d'un enfant qui a appliqué le modèle "somme de tous les nombres" pour ajouter les fractions).

On voit qu'il y a plus de réponses 0,15 que de réponses 1,5. Mais cette erreur n'est pas significative : il y a des élèves qui ont répondu correctement aux questions plus difficiles et qui ont écrit $0,7 + 0,8 = 0,15$.

C'est une question piège, qui attire les erreurs des élèves, mais cette erreur n'est peut-être pas forcément signe d'une mauvaise conception.

moitié de $\frac{1}{100}$

	CM ² A	CM ² B	CM ² C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	6 ^e ABC	total 6 ^e
Effectif	22	21	26	24	18	21	26	23	19	22	63	89
Réponses fournies	18	11	23	19	15	21	20	19	18	19	55	75
Réponses correctes	1	0	5	1	3	5	7	5	3	7	9 16.4	16 21.3
Rép $\frac{1}{50}$	9	10	9	11	10	6	7	10	12 66.7	9 47.3	27 49.1	34 45.3
Rép $\frac{0,5}{50}$			4	4			2	4	1	2	4	6

Sur les 183 réponses fournies, 93 sont " $\frac{1}{50}$ ".

Plus de la moitié des élèves, tous niveaux confondus font cette réponse. En 4^eA, près des $\frac{2}{3}$ des élèves font cette réponse (12 sur 19); et même en 4^eB, où les résultats aux autres questions sont meilleurs, c'est la réponse de près de la moitié des élèves.

C'est manifestement une question piège. Les réponses $\frac{1}{50}$ ne sont sans doute pas forcément significatives de conceptions erronées.

Les autres réponses fausses sont

$\frac{5}{10}$ (5 fois + 1 fois 0,5) ; $\frac{0}{50}$ (4 fois) ; 50 (3 fois) ; $\frac{5}{100}$ (2 fois) ;

$\frac{50}{100}$ (2 fois) ; $\frac{1}{5}$ (2 fois) ; $\frac{2}{1000}$ (2 fois) et aussi $\frac{2}{200}$; $\frac{1}{1000}$; 0,01 ;

$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1}$; 10 ; $\frac{10}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{1,5}{100}$; 2,50 ; $\frac{1}{2} + 50$ et 64 minutes rencontrées une fois chacune.

Les réponses $\frac{0}{50}$ sont peut-être à rapprocher de $\frac{0,5}{50}$ (la moitié de 1, c'est 0). En effet sur les quatre élèves qui ont fait cette réponse, deux avaient aussi à donner le double de $\frac{1}{100}$ et ont proposé $\frac{2}{100}$, les deux autres n'avaient pas à répondre à cette question.

Dans deux autres classes ($6^e B$ et $6^e C$) les élèves ont également répondu aux questions "quel est le double de $\frac{1}{100}$? " "quelle est la moitié de 0,1 ? "

	Effectif	double de $\frac{1}{100}$				moitié de 0,1			
		Rép. fournies	Rép. correctes	$\frac{1}{200}$	$\frac{2}{200}$	Rép. fournies	Rép. correctes	0,01	0,5
$6^e B$	18	15	5	7		10	2	4	3
$6^e C$	21	21	4	5	5	20	9	1	4
Total	39	36	9 25	12 33.3	5 12.8	30	11 36.7	5 16.7	7 23.3

On a seulement $\frac{1}{4}$ de réponses correctes pour le double de $\frac{1}{100}$. La réponse la plus fréquente est $\frac{1}{200}$ ($\frac{1}{3}$ des élèves) ce qui est cohérent avec la réponse $\frac{1}{50}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$.

Le nombre des réponses correctes s'élève un peu quand la question est posée sous forme décimale, mais on n'arrive cependant qu'à 11 réponses correctes sur 30 fournies pour la moitié de 0,1. Remarquons un élève qui répond que la moitié de 0,1 est $0, \frac{1}{2}$ (les réponses pour la moitié et le double de $\frac{1}{100}$ sont correctes : $\frac{0,5}{100}$ et $\frac{2}{100}$).

Le fait de poser la question du double en même temps que celle de la moitié n'a pas beaucoup fait changer les points de vue.

Si on compare les réponses des 4 classes de 6^e , les réponses correctes et les réponses $\frac{1}{50}$ sont respectivement (par rapport aux réponses fournies)

	$6^e A$	$6^e B$	$6^e C$	$6^e D$	ou	$6^e A$	$6^e B$	$6^e C$	$6^e D$
correctes	1/19	3/15	5/21	7/20		5 %	20 %	23,8 %	35 %
$\frac{1}{50}$	11/19	10/15	6/21	7/20	en %	57,9 %	66,7 %	28,6 %	35 %

La proportion de réponses correctes est certes plus élevée en $6^e B$ et $6^e C$ qu'en $6^e A$, mais elle est un peu moins élevée qu'en $6^e D$. De toute façon la proportion de réponses $\frac{1}{50}$ est la plus élevée en $6^e B$ ($\frac{2}{3}$). Le fait de demander aussi le double de $\frac{1}{100}$ n'a pas aidé les élèves à trouver la moitié de $\frac{1}{100}$. D'ailleurs les réponses aux deux questions sont souvent cohérentes : les élèves appliquent souvent une règle

et son inverse pour les deux questions :

	6 ^e B	6 ^e C
moitié de $\frac{1}{100} = \frac{1}{50}$ et double de $\frac{1}{100} = \frac{1}{200}$	7	5
deux réponses correctes	3	3
moitié de $\frac{1}{100} = \frac{1}{50}$ double de $\frac{1}{100} = \frac{2}{100}$	2	0

4) Conclusions

- * Pour les fractions la référence spontanée majoritaire et presque unique est celle des parts de tarte.

Pour les nombres décimaux, il semble qu'aucune représentation correcte ne soit disponible, même en 4^e (à l'exception de quelques élèves de 4^eB), à part celle de la règle en cm et mm. Il faut de plus signaler que dans la classe de 6^eC où 6 élèves l'utilisent, elle a été suggérée par le professeur avant le passage du test.

Dans les classes de CM₂ où il y a eu un apprentissage sur les petites fractions, la référence est celle de l'apprentissage en CM₂C (cas d'un apprentissage sur une grande période de temps), les représentations "baguettes" et "parts de tarte" apparaissent à peu près également en CM₂A où l'apprentissage a été plus court.

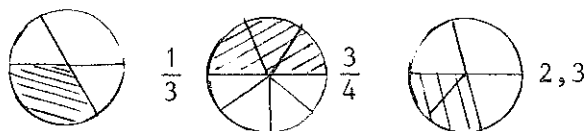
Pour le CM₂B, le grand nombre de réponses sans dessin ne permet pas de se prononcer.

Pour les heures, les réponses sont correctes pour ce qui relève de la pratique courante (plus de 80 % des réponses fournies sont justes dans toutes les classes pour 1/4 h.).

Pour les autres questions ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$) les réponses sont majoritairement correctes dans les 3 classes du collège de V. et dans les classes de CM₂ où il y a eu un apprentissage sur les fractions (exception faite du CM₂B). Notons que dans la classe de 6^eC, plus de la moitié des élèves répondent correctement pour $\frac{1}{10}$ h, mais la réussite retombe pour $\frac{1}{5}$ h parce que $\frac{1}{5}$ est vu comme la moitié de $\frac{1}{10}$.

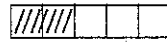
- * Il semble que pour beaucoup d'élèves, seuls les nombres entiers ont vraiment statut de nombre, ce qui fait que ces élèves essaient de se ramener aux entiers et à leurs opérations par des moyens divers.

- Au moment des représentations, certains élèves ne voient dans les fractions et les décimaux que des entiers juxtaposés. 3 élèves ont des réponses cohérentes dans ce sens :



L'élève qui a répondu pour 2,3

"avec 5 bâtons de chocolat je dois donner 2,3



avait écrit pour $\frac{3}{4}$ "avec 4 bâtons de chocolat" 

Peut-être la réponse de cet élève pour 2,3 est-elle le résultat de 2 confusions : la confusion entre 2,3 et $\frac{2}{3}$ (cf. ci-dessous) et celle entre "prendre 2 sur 3" et "prendre 2 laisser 3" ?

Les réponses du type "entiers juxtaposés" sont plus fréquentes pour 2,3. Parfois cette juxtaposition est améliorée : on voit 2,3 comme deux grosses unités et trois petites (exemple : 2 grosses boîtes de thon et 3 petites boîtes).

- On observe des confusions entre les codages : $\frac{1}{3}$ vu comme 1,3 et 2,3 comme $\frac{2}{3}$, plus fréquemment dans le deuxième sens que dans le premier, même dans les classes où on peut penser que l'apprentissage a été davantage centré sur les décimaux que sur les fractions.

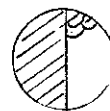
On peut se demander si cette confusion n'est pas due à la forme du test. En effet les questions sur les fractions sont en tête, il reste peu de place pour 2,3.

- Une autre erreur qui est peut-être à rapprocher de celle-là est la confusion entre $\frac{1}{5}$ et 0,5 : 9 élèves répondent que $\frac{1}{5}$ heure c'est 30 minutes. C'est peut-être aussi cette confusion qui explique les réponses $\frac{1}{5}$ pour la moitié de $\frac{1}{100}$ (avec en plus oubli du dénominateur).

- Il semble que pour certains des élèves, les écritures proposées ne soient pas des nombres mais des codages d'actions.

Par exemple pour 2,3 :

"je coupe en deux et j'ajoute 3 petits bouts"



Autre exemple : $\frac{1}{3}$ est confondu avec $\frac{1}{8}$ parce qu'on partage en deux 3 fois de suite

ou encore $\frac{1}{3}$ est bien un gâteau partagé en 3, mais on ne retient pas l'égalité des parts.

- Dans les représentations, l'erreur qui consiste à représenter $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ par 3 parts est assez peu fréquente (1 seule fois pour $\frac{1}{3}$) mais on retrouve cette erreur très présente quand il s'agit de quantités numériques :

pour $\frac{1}{5}$ h, 10 élèves répondent 5 mn, un autre 300 mn (5 x 60), 1 élève répond 50 mn, 1 autre 50 s, 4 élèves répondent 15 minutes et 1 élève répond 1 h 5 mn. ce qui fait 18 élèves qui donnent une réponse faisant intervenir 5, 15 ou 50.

pour $\frac{1}{3}$ h , 7 élèves répondent 30 minutes et 2 élèves répondent 13 minutes, plus un qui répond 690 minutes (60 x 13).

pour $\frac{1}{10}$ h , 6 élèves répondent 10 mn et 1 répond 600 minutes (60 x 10).

et même pour $\frac{1}{4}$ h , 3 élèves avaient répondu 40 mn, 1 élève avait répondu 14 mn (il avait répondu de façon cohérente : $\frac{1}{4}$ h : 14 mn, $\frac{1}{3}$ h : 13 mn, $\frac{1}{5}$: 15 mn) et 1 autre 840 mn (14 x 60).

* Ce désir de se ramener aux entiers et à leurs opérations est encore plus manifeste pour les sommes.

Ainsi la règle spontanée la plus utilisée par les élèves pour ajouter les fractions est d'ajouter les numérateurs d'une part et les dénominateurs de l'autre (plus du tiers des élèves de 6^e). A cet égard il n'y a pas de différence entre la 6^eD et les autres classes de 6^e.

Une autre règle utilisée dans le cas où on ajoute des fractions de numérateurs 1 est de garder ce numérateur 1 et d'ajouter les dénominateurs :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, peut-être pour rester dans l'ensemble des fractions de numérateur 1.

Elle est moins utilisée que l'autre sauf dans la classe de 4^eA où plus de la moitié des élèves l'utilisent au moins une fois.

III. QUESTIONS CONCERNANT L'ORDRE ET LA GRADUATION

1) Axe gradué

La question concernant l'axe gradué a été proposée en CM₂A, CM₂B, 6^eA, 6^eB, 6^eC en mai ou juin 1984.

L'unité choisie pour la graduation dessinée était de 5 cm



On demandait de placer 2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08

Les résultats ont été les suivants :

	CM ₂ A	CM ₂ B	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	Total 6 ^e
Effectif total	23	16	24	21	22	67
Ont abordé la question	21	13	23	20	15	58
Tous les points bien placés	1	1	1	0	2	3
Au moins 4 points bien placés	1	1	2	3	3	8
2,5 bien placé	9	3	5	10	5	20
Aucun point marqué	3	4	6	1	3	10
Ordre entièrement correct	4	1	3	1	2	6
Un oubli ou une erreur sur l'ordre	+4	0	+3	+2	+1	+6
Intervalles entiers non respectés	3	3	2	6	0	8
Utilisation des cm , mm	4	3	5	10	3	18

Très peu d'élèves placent correctement tous les points (2 en CM₂ et 3 en 6^e ; 8 élèves de 6^e placent correctement 4 des points). A peine plus du tiers des élèves de 6^e ayant abordé la question placent correctement 2,5 (20/58). Il y en a un peu plus en CM₂A, mais moins en CM₂B.

Certains élèves ne marquent aucun point sur la graduation et se contentent d'écrire les nombres sur l'axe en s'en servant comme d'une ligne, d'autres placent des points mais en ne souciant que de l'ordre. C'est pourquoi nous avons aussi examiné l'ordre proposé par les élèves indépendamment du placement sur la graduation. Cette fois encore les résultats sont meilleurs en CM₂A (8 élèves sur 21 font au plus une erreur) qu'en 6^e (12 sur 58) mais ils sont plus mauvais en CM₂B.

Certains élèves ne placent pas le nombre décimal entre les deux entiers qui conviennent. Cela vient parfois d'une référence abusive aux cm et mm : par exemple ils ont placé 0,62 à 6,2 cm de 0, donc entre 1 et 2.

En 6^e, surtout en 6^eB, un nombre important d'élèves essaie d'utiliser les cm et mm d'une manière ou d'une autre. Remarquons qu'en 6^eA la première réaction des élèves avait été la même, mais nous sommes intervenues le jour de la passation en faisant remarquer aux élèves qu'on ne parlait pas de cm dans le texte.

Les élèves ont plusieurs manières de se référer aux mm. Une première idée est de compter en mm la partie décimale du nombre. Mais ce n'est pas toujours possible (par exemple 2,87). Alors les élèves adaptent leur procédure de plusieurs manières :

- . on compte la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on prend tout le nombre en cm : par exemple 1,45 à 45 mm de 1 et 2,87 à 2,87 cm de 2.
- . on compte le tout en cm et mm. Par exemple 1,7 à 1,7 cm de 1. Dans ce cas certains élèves traitent de la même manière 1,7 et 1,08 comme s'il s'agissait de 1,8 ; d'autres élèves font un traitement différent : par exemple 1,08 à 8 mm de 1 et 1,7 à 1,7 cm de 1 (ou le contraire).
- . on prend la partie décimale en mm quand c'est possible, sinon on divise par 2. (ce qui fait que 0,62 et 2,87 sont bien placés à cause de l'échelle choisie mais que 1,7 ou 1,45 ne le sont pas).
- . on divise systématiquement la partie décimale par 2 :
une élève de 6^eB a placé 0,8 à 4 mm de 0, 0,62 à 3,1 cm de 0,
1,7 à 3,5 mm de 1, 1,08 à 4 mm de 1, 1,45 à 3,25 mm de 1,
2,5 à 2,5 mm de 2 et 2,87 à 4,35 cm de 2.

Avec cette procédure tous les nombres qui ont deux décimales sont bien placés mais ceux qui n'ont qu'une décimale sont mal placés.

Cette utilisation de la règle graduée explique peut-être le faible nombre d'élèves qui placent correctement 2,5.

Notons qu'une certaine utilisation de la règle graduée donne un placement correct de 2,5 (à 2,5 cm de 2) - D'ailleurs la classe qui a le plus de 2,5 bien placés (50 %) est aussi celle qui a le plus d'utilisation des cm et aussi celle qui a le plus d'intervalles entiers non respectés.

	CM ₂ A	CM ₂ B	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	Total 6 ^e
{ 1,08 après 1,7	7	1	5	8	7	20
{ 1,08 avant 1,7	8	5	11	5	5	21
{ 1,45 après 1,7	9	6	14	12	9	35
{ 1,45 avant 1,7	9	2	7	5	4	16
{ 0,62 après 0,8	10	8	15	6	9	20
{ 0,62 avant 0,8	9	1	7	7	3	17
1,08 remplacé par 1,8	3	4	3	5	0	8

Il semble bien que la règle qui consiste à comparer les décimaux qui ont même partie entière selon l'entier formé par leur partie décimale (règle 1 de C. Grisvard et F. Léonard) soit dominante. Elle révèle une conception des décimaux comme couple de 2 entiers. En 6^eA, nous pouvons remarquer l'amélioration de cette règle quand un des nombres a un zéro derrière la virgule (règle 3 de C. Grisvard et F. Léonard) : en 6^eA 1,08 est plus souvent placé avant 1,7 alors que 1,45 est après 1,7 et 0,62 après 0,8.

On trouve cependant aussi quelques élèves qui placent 1,08 après 1,45 (resp. 3, 1, 1, 3, 0) ou 2,5 après 2,87 (resp. 1, 1, 0, 1, 0).

2) Ordonner neuf nombres décimaux :

$4,12 - 43,25 - 4,54 - 4,02 - 4 + \frac{1}{2} - 4,45 - 40,2 - 4,2 - 40,12 - 43 + \frac{1}{4} - 4,325$

Il y avait en fait onze nombres à ranger dont deux donnés sous forme fractionnaire.

Nous ne tenons compte que du rangement des neuf nombres écrits avec une virgule.

Les élèves de CM₂A, CM₂B et 6^eA ont répondu deux fois à cette question (une première fois en décembre 83 ou janvier 84, la deuxième fois en mai ou juin 1984) - Les résultats sont notés avec un indice 1 pour le premier avec un indice 2 pour le 2^e.

La classe de CM₂C a répondu à la même question que les autres en janvier 84 et à une question du même type en juin 84 : il s'agissait d'ordonner 75,02 ; 74,378 ; 73,9 ; 74,4 ; 74,3807 ; 75 ; 74,5 ; 74,3078 ; 74,378002 ; 75,012 du plus petit au plus grand - Nous notons avec des indices 1 et 2 respectivement les réponses à ces deux questions.

Dans le tableau des résultats ci-dessous, nous distinguons les réponses entièrement correctes, les réponses correctes avec un oubli ou une erreur, les règles fausses utilisées : nous appelons "ordre b" le classement obtenu en comparant les parties décimales comme des entiers. Nous distinguons (quand cela est possible) l'ordre b₁ : (ordre b avec $4,02 < 4,2$), l'ordre b₂ (ordre b avec $4,02 > 4,2$), l'ordre b₃ (ordre b avec $4,02 = 4,2$).

Nous appelons "ordre c" le classement obtenu en appliquant la règle "plus la partie décimale est longue, plus le nombre est petit".

Nous appelons "mélange" le classement obtenu en appliquant l'ordre b pour les nombres ayant une ou deux décimales mais en plaçant 4,325 avant 4,54 : par exemple $4,02 < 4,2 < 4,12 < 4,325 < 4,45 < 4,54 < 40,2 < 40,12 < 43,25$, ou même 4,325 avant tous les autres.

Notons que certains élèves utilisent mal le signe $<$ et écrivent toutes leurs inégalités à l'envers, nous les avons classés dans la catégorie qui correspondrait à l'ordre inverse mais nous notons cette mauvaise utilisation.

	CM ₂ A ₁	CM ₂ A ₂	CM ₂ B ₁	CM ₂ B ₂	CM ₂ C ₁	CM ₂ C ₂	6 ^e A ₁	6 ^e A ₂	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	CM ₂	6 ^e A,B,C juin
Effectif	22	22	21	16	26	24	24	24	21	21	26	23	19	22	62	68
Réponses fournies	18	16	11	13	24	22	13	23	19	16	16	19	16	12	52	58
Réponses correctes	7	8	4	3	5	8	2	4	3	2	11	13	8	5	19	9
1 erreur	4	1	0	0	2	4	2	0	1	2	5	2	2	5	5	3
ordre b	5	2	4	6	13	8	6	16	13	10	0	2	5	1	16	39
ordre b ₁	3	0	3	1	5	/	6	13	4	5	0	1	4	1	/	22
ordre b ₂	2	2	1	5	6	/	0	3	3	2	0	1	1	0	/	8
ordre b ₃	0	0	0	0	1	/	0	0	5	3	0	0	0	0	/	8
ordre c	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	2	1
mélange	2	0	0	1	2	0	1	2	1	1	0	3	3	1	1	4
autres erreurs	3	3	3	3	4	1	1	0	1	2	0	0	1	1	7	3
non respect partie entière	3	0	0	3	3	2	1	0	4	3	0	0	0	0	5	7
4,02 = 4,02 (≠ 40,2)	0	0	0	0	1	/	0	0	1	0	0	0	0	0	/	1
4,02 = 4,2 = 40,2	0	0	0	0	0	/	0	0	4	2	0	0	0	0	/	6
fractions correctement placées	4	3	2	2	5	/	0	0	1	0	6	7	7	5	/	1
signes entre les n ^{bres}	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3	1
signes à l'envers	0	0	0	2	3	1	1	1	1	0	1	1	0	0	3	2
% au plus une erreur sur effectif	50	40.9	19	18.75	26.9	50	16.7	16.7	18.2	18.2	61.5	65.2	52.6	45.5	38.7	17.6
% ordre b	22.7	9.1	19	37.5	50	33.3	2.5	66.7	59.1	45.5	0	8.7	26.3	4.5	25.8	57.4

Certains élèves n'ont pas compris la question et mettent simplement des signes < ou > entre les nombres écrits sur la feuille dans l'ordre où ils se présentent. Parmi les autres erreurs rencontrées, certains élèves n'ont pas ordonné toute la suite mais ont fait des paquets avec des ordres partiels corrects. Par exemple : une élève a classé correctement séparément les nombres qui avaient une partie entière de l'ordre de 40 et ceux qui avaient une partie entière 4 et elle a inversé l'ordre des deux paquets ; d'autres élèves ont changé de façon de ranger en cours de classement.

Des élèves ont identifié 4,325 à 43,25 ; d'autres ont placé 4,325 à la fin sans commentaire ; un élève de 4^e a pris les tirets pour des soustractions et a comparé les nombres relatifs situés entre les virgules, deux autres élèves de 4^e ont pris les tirets pour des signes - et ont comparé des décimaux relatifs : (- 43,25 - 4,54 etc.). En CM₂ B₁ 3 élèves n'ont pas ordonné mais ont transformé les décimaux en écriture fractionnaire par exemple $4,12 = \frac{412}{100}$, ce qui était un exercice fait récemment en classe.

Dans les deux dernières lignes nous donnons le pourcentage d'élèves faisant au plus une erreur et le pourcentage d'élèves utilisant l'ordre b. Les calculs sont faits sur l'effectif total de la classe

Nous constatons une meilleure réussite et une plus faible utilisation de la règle b dans les classes témoin de Vélizy (6^eD, 5^e, 4^eB). En 4^eB le faible pourcentage de réussite est dû au nombre élevé de non réponse (10 sur 22) qui s'explique par le manque de temps (rappelons que les élèves ne disposaient que de 15 minutes).

On constate la progression des CM₂C entre janvier et juin (en janvier l'écriture à virgule venait d'être introduite dans la classe et n'avait pas été beaucoup utilisée). On retrouve la différence entre les CM₂A et les CM₂B déjà constatée sur d'autres questions. Les CM₂A et les CM₂C qui ont eu un apprentissage sur les petites fractions et sur la graduation ont une meilleure réussite que les élèves de 6^eA, 6^eB, 6^eC.

L'ordre c est très peu utilisé et quand il l'est, c'est souvent en cohabitation avec l'ordre b (mélange). L'ordre b est très utilisé, surtout dans les classes de 6^eA, 6^eB, 6^eC. Remarquons qu'il régresse entre janvier et juin dans les classes de CM₂A et CM₂C où la réussite est meilleure.

En ce qui concerne le traitement des fractions, nous nous contenterons de quelques remarques :

- . Un élève de CM₂C interprète $4 + \frac{1}{2}$ comme $4 + \frac{1}{2}$ dixième et $43 + \frac{1}{4}$ comme $43 + \frac{1}{4}$ dixième.
- . Une élève de CM₂ remplace $43 + \frac{1}{4}$ par 47 et un élève de 6^e remplace $43 + \frac{1}{4}$ par $\frac{1}{47}$ et $4 + \frac{1}{2}$ par $\frac{1}{6}$

- . Un élève de 4^e interprète $43 + \frac{1}{4}$ comme 11,25 (43 : 4 avec erreur de calcul ?) et $4 + \frac{1}{2}$ comme 2
- . Plusieurs élèves remplacent $4 + \frac{1}{2}$ par 4,12 et/ou $43 + \frac{1}{4}$ par 43,15
- . D'autres interprètent $43 + \frac{1}{4}$ comme 43,025 et $4 + \frac{1}{2}$ comme 4,05.

Est-ce l'une ou l'autre de ces interprétations qu'il faut faire pour les élèves qui placent $4 + \frac{1}{2}$ tout au début ou $43 + \frac{1}{4}$ avant 43,25 sans faire de commentaire ?

3) Intercalation

Dans cette question, il s'agit de fournir 3 nombres compris entre deux donnés. Dans la première version du test, il y avait deux questions avec des bornes entières, nous les avons supprimées dans la version suivante et nous n'avons pas tenu compte des réponses à ces questions : quand les bornes sont entières, beaucoup d'élèves comprennent la question "peux-tu citer 3 nombres entre 1 et 3" comme "peux-tu citer 3 nombres entiers entre 1 et 3". C'est sans doute le même phénomène lié au contrat didactique et aux habitudes qui explique en partie la réussite légèrement meilleure aux deux dernières questions (entre 1,5 et 1,6 ; entre 1 et 1,1) qu'aux deux premières (entre 1,8 et 2,1 ; entre 1,5 et 1,8) : les élèves sortent plus facilement des nombres à une décimale quand ils y sont obligés ; quand ils peuvent donner une réponse avec des nombres à une décimale certains élèves ne fournissent que ceux-là : entre 1,5 et 1,8 il y a 1,6 et 1,7.

D'autre part certains des types d'erreurs rencontrées expliquent une moins bonne performance pour la première question (erreur E_1) ou une meilleure performance à la quatrième question (erreur E_2)

Types d'erreurs rencontrées.

- E_1 : cette erreur résulte de la conception "2 entiers" des nombres décimaux et correspond au type d'ordre b vu à la question précédente : entre 1,8 et 2,1 on intercale 1,9 ; 1,10 ; 1,11... 1,78... Cette erreur est présente dans toutes les classes de CM₂ et 6^e
- E_2 : intercaler un zéro derrière la virgule pour rester proche d'un nombre donné : par exemple entre 1,3 et 1,4 il y a 1,03 ; 1,003 ou 1,04 ; 1,004... Cette erreur, que nous n'avions pas prévue, est présente dans toutes les classes et très importante dans certaines (6^eA)
- E_3 : ajouter un zéro à la fin : entre 1,6 et 1,8 il y a 1,7 ; 1,70 ; 1,700 avec la même idée d'avoir des nombres proches d'un nombre donné.

E_4 : rester dans les nombres à une décimale ou répondre que c'est impossible. Erreur présente dans toutes les classes; c'est la réponse majoritaire dans certaines.

Cette erreur ne signifie pas que l'élève ne connaît pas de nombres avec plusieurs chiffres derrière la virgule, mais il ne les mobilise pas dans ce contexte. Nous avons déjà signalé l'effet possible du contrat didactique : la question étant posée avec des nombres avec 1 chiffre derrière la virgule, des élèves ne trouvent pas licite de sortir de cette catégorie de nombres pour la réponse.

E_5 : "débordement proche" : on donne des valeurs proches mais du mauvais côté de l'intervalle : par exemple entre 1,6 et 1,8 il y a 1,87
entre 1 et 1,1 on a 1,11.

E_6 : erreur qu'on ne rencontre qu'entre 1 et 1,1 : oubli du zéro. Des élèves qui ont des réponses justes aux autres questions proposent 1,9 ; 1,8 ; 1,7 ou 1,99 ; 1,83 ; 1,85 entre 1 et 1,1. Quand les élèves proposent 1,12 ; 1,13 ou 1,2 ; 1,3... il n'est pas facile de savoir si c'est une erreur E_5 ou E_6 . Nous l'avons comptée E_5 dans le 1er cas, E_6 dans le 2e.

E_7 : oubli de la partie entière. Cette erreur se rencontre surtout en CM_2C pour les élèves qui ont répondu avec des fractions.

Signalons une autre erreur rencontrée quelquefois (4 élèves de 4 classes différentes) : les questions sur les décimaux ont été comprises comme deux questions sur les entiers : par exemple, une élève de 4^e répond :

entre 1,8 et 2,1 : oui 2,3,4 et non
entre 1,5 et 1,8 : oui 2,3,4 et oui 2,3,4
entre 1,5 et 1,6 : oui 2,3,4 et oui 2,3,4
entre 1 et 1,1 : non et non.

Les élèves de CM_2A , CM_2B , 6^eA ont répondu deux fois à la question à 5 mois d'intervalle ; nous notons les réponses successives avec un indice 1 ou 2.

Les élèves de CM_2C ont passé la 1ère version du test en janvier. En juin, ils ont répondu à une question différente portant sur le même sujet (voir texte en annexe). Nous notons avec un indice 2 le résultat à cette deuxième épreuve.

Nous n'avons pas tenu compte de la question "entre 74 et 75" pour les raisons signalées plus haut, même si les habitudes de la classe permettaient de penser que l'effet de contrat ne jouerait pas de la même manière; il y a cependant des élèves de cette classe qui ont répondu qu'il n'y avait aucun nombre entre 74 et 75 et qu'il y en avait plusieurs dans les autres cas. D'autre part on ne demandait pas de fournir 3 exemples; certains élèves n'en ont fourni qu'un ou même pas du tout. Les

réponses à ce questionnaire sont donc difficilement comparables aux autres et les types d'erreur ne sont pas toujours repérables.

Pour les réponses au premier test, dans cette classe, elles sont le plus souvent données sous forme de fractions et quelquefois avec un mélange des deux codages : par exemple entre 1,5 et 1,8 il y a $1,5 \frac{1}{2}$; $1,5 \frac{1}{4}$; 1,6 ... entre 1 et 1,1 il y a $1, \frac{1}{4}$; $1, \frac{2}{3}$... Ceci explique que les erreurs soient différentes.

Rappelons que ces élèves avaient beaucoup travaillé sur les fractions et que la notation à virgule était d'introduction très récente dans la classe.

	CM ₂ A ₁	CM ₂ A ₂	CM ₂ B ₁	CM ₂ B ₂	CM ₂ C ₁	CM ₂ C ₂	6 ^e A ₁	6 ^e A ₂	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	6 ^e A,B,C juin 84
Effectif	22	23	21	16	26	24	24	24	18	21	26	23	19	22	63
Réponses fournies	21	22	17	15	22	24	21	24	17	21	25	22	18	21	62
Tout correct	2	5	1	4	5	4	2	8	0	5	13	12+1	7+2	16+1	13
1 erreur	0	4	0	1	1		0	1	0	1	4	4	1	1	2
E ₁	5	4	3	4	4	4	8	7	3	3	1	0	1	0	13
E ₂	4	1	1	3	2	0	7	8	2	2+2	1	1	2	2	14
E ₃	6	3	2	2	1	0	3	3	5	3	1	0	0	0	11
E ₄	8	8	11	6	3	7	9	3	10	7	6	2	5	3	20
E ₅	3	1	1	1	1	2	0	2	1	2	2	2	0	0	3
Autres (*)	6	9	6	1	11	4	5	5	2	6	3	5	1	1	13
E ₁ seul	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E ₂ seul	2	1	1	2	0		2	3	1	1	0	1	2	1	5
E ₃ seul	0	0	0	0	0		1	0	1	1	0	0	0	0	2
E ₄ seul	1	3	5	2	1	5	4	0	6	5	4	2	4	2	11
Réponses sans erreur	a	5	9	1	5	8		5	14	3	10	18	19	11	19
	b	6	11	2	6	10		4	12	0	9	17	18	11	17
	c	12	15	2	7	9		7	12	0	12	18	18	10	18
	d	7	11	2	8	9		12	15	1	12	14	17	12	19

(*) il s'agit d'élèves ayant fait des erreurs autres que E₁, E₂, E₃, E₄, E₅

Dans les classes de 5^e et 4^e nous avons ajouté dans la ligne "tout correct" les élèves qui ont répondu à toutes les questions sans erreur mais en donnant moins de trois exemples, quelquefois un seul.

Nous comptons que les élèves ont fait une seule erreur quand ils ont fait un seul type d'erreur à une seule question.

En classe de 6^eC, deux élèves ont intercalé un 1 au lieu d'un 0 : entre 1,3 et 1,4 il y a 1,135 Nous les avons ajouté aux deux élèves qui font l'erreur E₂. L'erreur E₁, importante dans les classes de CM₂ et les classes de 6^eA, B, C, ne se trouve presque pas en 6^eD, 5^e, 4^e. Dans ces dernières classes, on ne trouve pratiquement pas l'erreur E₃ non plus; il en est de même en CM₂C.

L'erreur E₂ se trouve dans toutes les classes mais elle est surtout importante en 6^eA : peut-être y-a-t-il eu un phénomène de diffusion qui l'a aggravée dans cette classe.

L'erreur E₄ est présente dans toutes les classes; elle correspond à la difficulté des élèves à mobiliser des décimaux avec plus de décimales que ceux qui sont dans le texte (cf. [I]).

Les erreurs E₁ et E₃ semblent correspondre aux plus mauvaises représentations des décimaux : les élèves qui font ce type d'erreur en font en général un autre (aucun élève ne fait que l'erreur E₁) alors que ce n'est pas le cas pour E₂ et E₄. Les élèves de 5^e et 4^e qui font l'erreur E₂ ou E₄ ne font pour la plupart que celle-là. Plus de la moitié des élèves de 6^e qui font l'erreur E₄ ne font que celle-là.

Dans la dernière ligne nous donnons les réponses sans erreur fournies à chacune des questions. Nous comptons les réponses avec moins de trois exemples à condition que soient fournies des nombres à deux décimales pour au moins deux des cas. Par exemple, nous ne comptons pas comme réponse correcte en a : 1,9 ; 2 si en c et d on répond impossible, mais nous comptons cette même réponse correcte si en c et en d on fournit une réponse correcte.

Dans les deux CM₂ A et B les résultats s'améliorent entre les deux passations, avec toujours un retard pour le CM₂ B.

Les mauvais résultats de la classe de 6^eB s'expliquent par le grand nombre de réponses "impossible".

4) Cohérence entre les réponses sur l'ordre

Nous avons comparé les réponses des élèves aux questions portant sur l'ordre, l'intercalation, la graduation. Pour l'ordre et l'intercalation, nous ne tenons pas compte des classes de CM₂C (en janvier l'écriture à virgule n'était pas maîtrisée, en juin ce n'est pas la même épreuve) et de 4^eB (trop grand nombre d'absence de réponse à la question de l'ordre par manque de temps : les 11 élèves qui

ont répondu correctement à l'une seulement des deux questions sont tous des élèves qui n'ont pas du tout répondu à l'autre). Pour les autres CM_2 et la $6^e A$, ce sont les résultats de juin qui ont été pris en compte.

Nous notons 0 (resp I) les élèves qui n'ont fait aucune erreur sur l'ordre (resp. sur l'intercalation) $\bar{0}$ (resp. $\bar{I}$) les autres.

Par classe nous avons :

	$CM_2 A$	$CM_2 B$	$6^e A$	$6^e B$	$6^e C$	$6^e D$	5^e	$4^e A$	Total	$4^e B$
0 I	4	2	1	0	2	8	11	6	34	8
0 $\bar{I}$	4	1	3	3	0	3	2	2	18	1
$\bar{0}$ I	1	2	7	0	3	4	3	3	23	10
$\bar{0}$ $\bar{I}$	14	11	13	15	16	11	7	8	95	3

Soit

	0	$\bar{0}$
I	34	23
$\bar{I}$	18	95

Si l'on compte dans 0 et I les élèves ayant fait au plus une erreur, cela donne :

	0	$\bar{0}$
I	46	24
$\bar{I}$	19	81

On voit que la cohérence est surtout assurée par la négative (grand nombre d'élèves ne réussissant aucune des deux questions), et que la cohérence est meilleure dans les classes où les résultats sont meilleurs ($6^e D - 5^e - 4^e$). En $4^e B$ elle est totale pour les 11 élèves qui ont répondu aux deux questions (8 ont des réponses correctes aux deux questions, 3 font des erreurs aux deux questions).

Si l'on compare les résultats sur la graduation à ceux sur l'ordre et l'intercalation, on obtient, pour les 5 classes concernées ($CM_2 A$, $CM_2 B$, $6^e A$, $6^e B$, $6^e C$).

	G.O.	G. $\bar{O}$.	$\bar{G}$.O.	$\bar{G}$. $\bar{O}$.	G.I.	G. $\bar{I}$.	$\bar{G}$.I.	$\bar{G}$. $\bar{I}$.
CM ₂ A	1	0	7	15	0	1	5	17
CM ₂ B	1	0	2	13	1	0	3	12
6 ^e A	1	0	3	20	2	0	6	16
6 ^e B	2	1	2	16	0	3	0	15
6 ^e C	2	0	0	20	2	0	3	17
Total	7	1	14	84	5	4	17	77

où nous désignerons par G (resp. $\bar{O}$, resp. I) les élèves ayant placé correctement la plupart des nombres sur l'axe gradué (resp. n'ayant fait aucune erreur sur l'ordre, resp. sur l'intercalation)

ce qui donne au total

	G	$\bar{G}$
0	7	14
$\bar{O}$	1	84

	G	$\bar{G}$
I	5	17
$\bar{I}$	4	77

Là encore, la plupart des élèves font des erreurs dans les deux exercices. La tâche de graduation est très peu réussie et on aurait pu attendre que les élèves qui la réussissent aient de bons résultats sur l'ordre et l'intercalation.

Un seul élève (en 6^eB) réussit la graduation et pas l'ordre : il place à peu près correctement tous les points sauf 1,08 mis à la place de 1,8. Pour l'ordre il a écrit aussi 4,02 = 4,2 et utilisé l'ordre b (comparaison des parties décimales comme des entiers) mais en mettant 4,325 tout à la fin.

Quatre élèves réussissent la graduation et pas l'intercalation :

- un élève de CM₂A qui ne fait qu'une erreur sur la question concernant l'intercalation : entre 1,3 et 1,4 il propose 1,35 - 1,50 - 1,55 ; aux autres questions il avait répondu respectivement 2 - 1,9 - 1,95 ; 1,7 - 1,75 - 1,755 ; 1,05 - 1,06 - 1,08.
- trois élèves de 6^eB :
 - . celui qui a réussi la graduation et pas l'ordre
 - . un élève qui réussit graduation et ordre (y compris $4 + \frac{1}{2}$) mais répond impossible pour l'intercalation.
 - . un élève qui réussit la graduation et l'ordre (en oubliant toutefois 4,02) et qui fait l'erreur E₃ : ses réponses sont respectivement 1,9 - 1,90 - 2,00 ; 1,7 - 1,70 - 1,700 ; 1,30 - 1,300 - 1,3000 ; 1,0 - 1,00 - 1,000 aux quatre questions sur l'intercalation.

Un nombre assez important d'élèves réussit l'ordre ou l'intercalation sans réussir le placement sur l'axe gradué : il s'agit probablement d'élèves qui ont des règles de comparaison correctes pour les nombres décimaux, mais sans lien avec la mesure des longueurs.

Signalons un cas particulier : un élève de 6^eA, étranger nouvellement arrivé en France; il faisait partie de la classe d'initiation au Français et ne rejoignait la 6^eA que pour le cours de mathématiques. Cet élève a une bonne connaissance des fractions : ses réponses sur les fractions sont toutes correctes, y compris les sommes, mais ces connaissances ne sont pas reliées avec l'écriture à virgule des nombres décimaux. Sur la graduation, il place correctement 0,62 ; 1,45 ; 2,5 ; 2,87 mais il place 0,8 à 8mm de 0 ; 1,08 très près de 1 et 1,7 à 5mm de 1. Peut-être les placements corrects ne sont-ils qu'une adaptation de l'usage de la règle graduée comme cela est manifeste sur d'autres copies. Pour l'ordre il répond avec la règle b_1 (comparaison des parties décimales comme des entiers avec $4,02 < 4,2$). Il répond correctement à la question sur l'intercalation mais en mélangeant l'écriture à virgule et les fractions : par exemple $1,6 \frac{1}{2}$; 1,7 ; $1,7 \frac{1}{2}$ entre 1,6 et 1,8.

En tout 4 élèves sur 103 répondent correctement aux 3 questions graduation, ordre, intercalation : un élève de CM₂B qui n'a aucune erreur dans tout le test, un élève de 6^eA, 2 élèves de 6^eC.

5) Conclusion sur l'ordre

Nous retrouvons l'utilisation importante de la règle 1 de C. Grisvard et F. Léonard (ordre b), un peu la règle 3 (l'ordre b_1 est un peu plus utilisé que l'ordre b_2), mais pratiquement pas d'utilisation de la règle 2 (ordre c) sauf en cohabitation avec la règle 1 (mélange).

Nous retrouvons également la difficulté pour les élèves à produire des réponses avec des nombres ayant plus de décimales que ceux qui sont proposés dans le texte. Cette difficulté est repérée par M.L. Izorche chez des élèves de 2^eAB [I].

Les résultats sur les questions concernant l'ordre et l'intercalation sont meilleurs dans les classes témoin de Vélizy, mais ils sont aussi meilleurs dans les CM₂ A et C que dans les 6^e A, B, C. Il semble donc que le travail fait en CM₂ sur la mesure des longueurs et l'utilisation des fractions ait pu aider les élèves à se faire une représentation des nombres non entiers qui les aide dans les tâches de comparaison, et ceci bien que le placement de nombres sur un axe gradué soit encore très mal réussi.

Il semble que les élèves aient très peu de représentations disponibles, en particulier sur les nombres décimaux et qu'ils travaillent plutôt avec des règles de calcul purement numériques. Ces règles numériques peuvent être correctes et bien

fonctionner (voir les élèves qui réussissent l'ordre et l'intercalation et pas la droite graduée) mais avec des règles purement numériques les élèves ne disposent d'aucun moyen de contrôle, ce qui laisse place à des dérapages, par exemple retour aux règles utilisées dans les entiers en considérant le décimal comme un couple de deux entiers. La représentation par une règle graduée en cm et mm fonctionne pour des nombres qui ont un chiffre derrière la virgule mais les enfants ne savent pas l'adapter quand l'unité ne fait pas 1 cm. Il semble toutefois qu'un certain nombre d'élèves aient l'idée qu'on peut trouver des nombres décimaux proches d'un décimal donné mais avec une procédure inadaptée pour les produire (erreurs E_2 E_3).

IV Résolution des problèmes

1) problème des œufs

Ce problème a été posé sous différentes formes (voir textes en annexe). Dans la première version proposée aux 6^eA en décembre 83, les rangements pour la première question étaient par douze. Très peu d'élèves ont abordé le problème. Les calculs étaient un peu longs et dans les versions suivantes nous avons proposé des rangements par 6.

Dans les dernières versions (proposées en juin 84 aux CM₂A, CM₂B, 6^eA, 6^eB, 6^eC) nous avons adopté une présentation plus aérée qui sépare les deux questions du problème et nous avons modifié les valeurs numériques pour qu'il ne reste pas d'œufs isolés dans le rangement par boîtes de 10 de la deuxième question.

Ce problème comporte deux parties. Dans la première partie il s'agit d'un problème multiplicatif : on donne le nombre de caisses, cartons et boîtes remplis et on demande le nombre d'œufs emballés. Dans la deuxième partie, il s'agit de faire des groupements par dix à partir du nombre d'œufs trouvés à la première question : la connaissance de la numération en base 10 permet de donner la réponse sans calcul. Les questions ne sont pas indépendantes : un élève ne peut aborder la deuxième question s'il n'a pas un nombre d'œufs à proposer à la première. En revanche il peut répondre correctement à la deuxième question même si sa réponse à la première question est fautive : nous prenons comme donnée de la deuxième question le nombre d'œufs trouvé à la première.

Pour les classes à qui l'on a proposé deux fois ce problème (CM₂A, CM₂B, 6^eA), nous prenons les résultats de la deuxième passation : la première fois, très peu d'élèves avaient abordé ce problème placé en fin de test.

Pour traiter la première partie, deux procédures observées mènent au résultat correct :

- calcul du nombre d'œufs par boîte, carton, caisse, puis multiplications et additions nécessaires. Par exemple avec les dernières données (50 caisses, 3 cartons, 2 boîtes et rangement par 6), cela donne :
6 œufs par boîte, 36 œufs par carton, 216 œufs par caisse puis
 $(50 \times 216) + (3 \times 36) + (2 \times 6)$
- calcul du nombre d'œufs dans les boîtes, dans les cartons, dans les caisses avec, pour les caisses par exemple, un calcul du genre :

nombre de cartons :	$50 \times 6 =$	300
nombre de boîtes :	$300 \times 6 =$	1800
nombre d'œufs :	$1800 \times 6 =$	10800

puis addition finale.

Certains élèves, adoptant l'une ou l'autre de ces deux procédures ne terminent pas le problème, par exemple ils s'arrêtent avant l'addition finale ou ils ne comptent que les œufs dans les caisses.

Dans le tableau qui suit, nous appelons réussite partielle au I, une procédure correcte avec erreur(s) de calcul, ou une procédure correcte non terminée telle que nous venons de la décrire. Les autres procédures observées sont les suivantes :

(c) il manque des multiplications par 6 :

par exemple $(2 \times 6) + (3 \times 36) + (50 \times 6)$ ou $(2 \times 6) + (3 \times 6) + (50 \times 36)$
ou $(2 \times 6) + (3 \times 36) + (50 \times 36)$.

Parmi celles-là nous distinguons la procédure (c_2) où l'élève ne multiplie qu'une fois par 6 qu'il s'agisse de boîtes, de cartons ou de caisses : $(2 \times 6) + (3 \times 6) + (50 \times 6)$

(d) multiplications enchaînées : le plus souvent $6 \times 2 = 12$, $12 \times 3 = 36$,
 $36 \times 50 = 1800$.

On trouve aussi 2 boîtes : 12 œufs ; 3 cartons $3 \times 36 = 108$ œufs ; 50 caisses
 $50 \times 108 = 5400$, avec parfois une addition finale.

Certains élèves font d'autres calculs à partir des données ou donnent des réponses sans explication ; certains même donnent une réponse qui n'est pas un nombre d'œufs. Nous les regroupons dans la catégorie : autres réponses.

Pour la deuxième partie, à partir du nombre d'œufs trouvé à la première question, nous avons considéré comme correctes deux sortes de réponse : celle qui répond exactement à la question posée et celle qui est directement issue de la numération.

Par exemple, pour 1974 œufs nous avons considéré comme correctes :

réponse 1 : 1 caisse, 19 cartons, 197 boîtes (ou 198 boîtes)

réponse 2 : 1 caisse, 9 cartons, 7 boîtes (ou 8 boîtes).

	CM _{2A}	CM _{2B}	CM _{2C}	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	CM ₂	C ^e ABC	CM ₂ + 6 ^e ABC	6 ^e D + 5 ^e +4 ^e	total
Ont abordé le I	20	14	22	22	18	19	13	12	15	9	56	59	115	49	164
Réussité total au I	1	2	4	6	0	6	2	5	9	3	7	12	19	19	38
Réussite partielle* au I	3	5	9	11	7	9	10	8	12	6	17	27	44	36	80
Procédures c	10	6	7	4	10	5	1	1	1	0	23	19	42	3	45
Procédures c ₂	5	1	4	2	7	2	1	0	0	0	10	11	21	1	22
Procédures d	3	2	0	6	0	1	1	1	0	1	5	7	12	3	15
Autres réponses	6	1	6	1	1	5	1	2	1	2	13	7	20	6	26
Ont abordé le II	11	9	12	14	12	6	7	4	9	3	32	32	64	23	87
Réussite totale au II	0	1	0	6	1	3	7	1	7	2	1	10	11	17	28
Réussite partielle* au II	3	5	4	6	1	3	7	3	9	3	12	10	22	22	44
Procédures b	3	1	2	3	3	1	0	1	0	0	6	7	13	1	14
Autres réponses	4	3	6	4	8	2	0	0	0	0	13	14	27	0	27
Réussite I. II	0	0	1	2	1	1	5	1	6	2	1	4	5	14	19
% réussite totale I	5	14.3	18.2	27.3	0	31.6	15.4	41.7	60	33.3	12.5	20.3	16.5	38.8	23.2
% réussite partielle I	15	35.7	40.9	50	38.9	47.4	76.9	66.7	80	66.7	30.4	45.8	38.3	73.5	48.8
% réussite totale II	0	11.1	0	42.9	8.3	50	100	25	77.8	66.7	3.1	31.2	17.2	73.9	32.2
% réussite partielle II	27.3	55.6	33.3	42.9	8.3	50	100	75	100	100	37.5	31.2	34.3	95.6	50.6

* nous voulons dire réussite au moins partielle.

Pour la réussite I.II nous comptons les élèves qui ont réussi les deux questions jusqu'au bout avec éventuellement des erreurs de calcul.

Les réponses correctes des élèves ont le plus souvent été du deuxième type. Certains élèves qui donnent des réponses du premier type les donnent avec décimales.

Nous appelons réponses partiellement correctes celles qui ne donnent que le nombre de caisses ou celles qui font une erreur d'ordre de grandeur : par exemple pour 1974 oeufs on répond 19 caisses, 7 cartons, 4 boîtes. Certains élèves calculent le nombre d'oeufs par carton et par caisse et s'arrêtent (b). Les autres réponses mélangent parfois les deux parties du problème ou donnent un résultat faux sans justification, ou un résultat numérique sans précision, ou même un nombre d'oeufs.

Nous voyons qu'au niveau de la réussite au I, pour les élèves ayant abordé la question, il y a trois groupes : les CM_2 d'une part; les $6^e A, B, C$ d'autre part; les $6^e D, 5^e, 4^e$ enfin, avec, dans le groupe des CM_2 , une réussite plus faible pour le $CM_2 A$, dans le groupe des $6^e A, B, C$ une réussite plus faible pour la $6^e B$. Il semble que les procédures c soient d'autant moins nombreuses que la réussite de la classe est meilleure. Les procédures c et d disparaissent presque totalement à partir de la $6^e D$. Dans les classes de $6^e D, 5^e, 4^e B$, le problème n'a été abordé que par la moitié des élèves, moins en $4^e B$ (voir les conditions de passage). Il faut donc prendre avec prudence les meilleurs résultats de ces classes. En $4^e A$, la première partie a été traitée par 15 élèves sur 19 avec une réussite totale de 60 % d'entre eux et une réussite partielle de 80 %.

La deuxième partie a été peu abordée (au plus la moitié des élèves). Une des raisons est sans doute qu'il fallait partir des résultats obtenus à la question précédente. La différence de performance n'est pas grande entre les CM_2 et les $6^e A, B, C$; mais elle est grande avec les $6^e D, 5^e, 4^e$: dans ces classes presque toutes les réponses obtenues sont correctes, au moins partiellement. Il est vrai que seulement un quart des élèves de ces classes ont abordé cette question.

Sur les résultats globaux des classes, il semble toutefois qu'il puisse y avoir une corrélation entre la réussite aux questions sur les décimaux et la réussite à un problème de ce type.

Une analyse détaillée permettrait de voir si ce sont bien les mêmes élèves qui réussissent les questions sur l'ordre des décimaux par exemple et le problème sur les oeufs.

2) Problème des âges

Dans la première version du test, ce problème était donné en deux temps : au recto de la feuille la première partie du texte, sans donnée d'âge; au verso la donnée de l'âge du père.

Nous espérions de cette façon distinguer entre les élèves qui répondent à la première partie de la question sans connaître les âges et ceux qui ne peuvent répondre qu'en calculant les âges. Dans la plupart des cas nous avons en effet pu reconstituer la procédure des élèves, soit grâce à leurs explications, soit par l'ordre des réponses : calcul d'âges d'abord, réponse à la première question ensuite, et la position de cette réponse (au verso). Toutefois, dans neuf cas, nous n'avons aucun renseignement sur la procédure qui a pu amener la réponse correcte. De plus, les calculs entrepris à partir des valeurs numériques fournies sont le plus souvent corrects. C'est pourquoi, dans la deuxième version du test proposée en 6^eB et 6^eC, nous n'avons gardé que la première partie du texte, sans valeur numérique.

Les élèves de CM₂C ont eu la première version en deux temps : le recto un jour et le verso le lendemain. Ils se sont donc trouvés dans la même situation que les 6^eB et 6^eC.

Certains élèves ne répondent pas à la question posée et ne font que des calculs d'âge, même dans le cas où aucun âge n'était donné : ils font alors une hypothèse sur l'âge de Martine.

Quatre élèves (2 en CM₂, 1 en 6^e, 1 en 4^e) ne comprennent pas la question posée et répondent par une différence d'âge : "le grand père a 54 ans de plus que le petit frère".

Parmi les réponses erronées, la plus fréquente est "6 fois" : 11 élèves font cette réponse (3 en CM₂, 7 en 6^e, 1 en 5^e). On rencontre aussi "5,5 fois" (2 élèves) "7 fois : 5 + 2" (2 élèves) "9 fois : 5 + 3 + 1" (2 élèves) et 7 autres réponses variées.

Parmi les procédures adoptées, nous pouvons en distinguer 3 :

- une procédure que nous qualifions d'algébrique qui peut être explicite (pour 6 élèves de 4^eB et un de 5^e), avec emploi de lettres, par exemple

$$m = 2 f \quad gp = 5 m \quad gp = 10 f.$$

ou implicite : "il faut multiplier 5 fois par 2".

- essai de valeurs numériques : on fait une hypothèse sur l'âge de Martine et on calcule les autres âges.
- utilisation des valeurs numériques données. Cette procédure ne peut pas apparaître en CM₂C, 6^eB, 6^eC.

Quelques élèves de 6^e donnent des âges plausibles sans rapport avec les renseignements fournis. Un élève de 6^eC avait fourni la réponse correcte avec calcul d'âges

en supposant que Martine avait 10 ans. Il a barré, choisi d'autres âges (M : 14 ans, F : 12 ans, P : 42 ans, G.P. : 70 ans) en faisant 2 ans de moins pour le frère et a conclu "6 fois".

	CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B	Total
Pb. abordé	18	12	17+4	23	14	16	24	19	18	20	185
Calcul âges seul	9	4	1	3	2	1	3	1	2	2	28
Rép. correctes	5	6	13+2	11	8	8	19	16	13	16	117
"6 fois"	1	0	2	4	1	1	1	1	0	0	11
Proc. algébrique	1	2	7	1	3	0	7	7	6	10	44
Essai valeurs	1	0	10	0	8	5	1	1	1	2	26
Valeurs données	5	4	/	9	/	/	9	9	8	4	48
Âges corrects	10	7	15	13	/	/	22	17	13	18	115
% rép. correctes	27.8	50	71.4	47.8	57.1	50	79.2	84.2	72.2	80	63.2
% proc. alg.	5.6	16.7	33.3	4.3	21.4	0	29.2	36.8	33.3	50	23.8
calcul d'âge corr. ou réponse correc.	77.8	83.3	76.2	60.9	71.4	56.25	91.7	89.5	83.3	90	78.4

Ces pourcentages sont calculés sur le nombre d'élèves ayant abordé le problème.

Les procédures par hypothèse sur l'âge de Martine sont plus nombreuses dans les classes où les valeurs numériques n'étaient pas fournies (23 pour CM₂C, 6^eB, 6^eC) que dans les autres (6 pour les 7 autres classes). Dans ces autres classes on utilise les valeurs numériques fournies (48 élèves).

Les procédures algébriques sont plus nombreuses en 4^e, 5^e et en 6^eD, CM₂C. Elles ne sont explicites avec utilisation de lettres que pour 7 élèves (6 en 4^eB et un en 5^e).

Dans toutes les classes, sauf en CM₂A, plus de la moitié des élèves qui ont abordé le problème ont fourni une réponse correcte. En CM₂A beaucoup d'élèves ont calculé correctement les âges sans conclure. Si on regroupe ces élèves avec ceux qui ont fourni une réponse correcte on a dans presque toutes les classes un pourcentage de réussite supérieur à 75 % (60.9 en 6^eA, 71.4 en 6^eB, 56.25 en 6^eC). Rappelons que dans ces deux dernières classes l'âge du père n'était pas fourni.

La réussite est un peu moindre en 6^eA mais dans cette classe tous les élèves, sauf un, ont abordé la question, alors qu'il y a plus de non-réponse dans les autres classes.

Mais si l'on regarde les procédures utilisées, on s'aperçoit que les élèves qui utilisent une procédure algébrique, c'est-à-dire qui sont capables de composer les rapports sans disposer des valeurs numériques sont beaucoup plus nombreux en CM₂C, 6^eD, 5^e, 4^eA et 4^eB que dans les autres classes : si l'on calcule le pourcentage d'élèves utilisant une procédure algébrique, par rapport aux présents le jour de passage du test, on a respectivement :

CM ₂ A	CM ₂ B	CM ₂ C	6 ^e A	6 ^e B	6 ^e C	6 ^e D	5 ^e	4 ^e A	4 ^e B
4.5	9.1	26.9	4.2	16.7	0	26.9	30.4	31.6	45.5

Une élève de CM₂B a représenté les âges par des baguettes de longueurs proportionnelles aux âges, en prenant 2 cm pour l'âge de Martine

Martine	
Frère	
Père	
Grand Père 5 fois plus que toi	
Grand Père 10 fois plus que toi	

D'autres élèves de la même classe ont fait des dessins de bonshommes respectant l'ordre des âges.

La faible utilisation des procédures algébriques ne nous étonne pas :

G. Vergnaud [V] a souligné la difficulté des élèves à travailler sur des opérateurs quand ils ne disposent pas d'information sur les états.

Le lien entre la réussite à ce problème et les performances sur les décimaux n'est pas évident. Il faudrait une analyse plus fine pour en décider.

V - Conclusion

- . Il semble que les élèves interrogés aient peu de représentations disponibles pour les petites fractions ni surtout pour les nombres décimaux. (cf. les mauvais résultats pour 2,3). La représentation sous forme de longueurs n'est pas spontanée et elle n'apparaît que dans les classes où il y a eu un apprentissage spécifique. Les élèves ont beaucoup de mal à représenter les nombres décimaux sur un axe gradué quand l'unité ne fait pas 1cm, et ceci même pour les nombres qui n'ont qu'une décimale.

- . Il semble que les élèves travaillent plutôt avec des règles de calcul purement numériques, en essayant de se ramener aux calculs connus sur les entiers. Ces règles numériques peuvent être correctes et bien fonctionner dans certains cas, mais peuvent donner lieu à des dérapages quand la situation est plus complexe (rangement d'une dizaine de nombres) ou dans une situation qui n'est pas encore algorithmisée (somme de deux fractions, moitié de $\frac{1}{100}$).
- . Il semble que peu d'élèves mettent en place un nouveau modèle; le modèle de référence reste le modèle discret des entiers naturels et on essaie de faire entrer les nouveaux nombres dans ce cadre, avec cependant quelquefois des théorèmes implicites comme "il y a des nombres décimaux entre deux autres" qui ne sont pas toujours cohérents avec le reste ou qui sont mis en oeuvre de manière inadaptée (cf. erreur E_2 pour l'intercalation).
- . Pour comparer des nombres décimaux de même partie entière beaucoup d'élèves comparent les parties décimales comme des entiers, c'est-à-dire que nous retrouvons une utilisation importante de la règle 1 de C. Grisvard et F. Léonard [GL] et dans une moindre mesure celle de la règle 3 à partir de la 6^e ($4,02$ est plus souvent considéré inférieur à $4,2$ que supérieur ou égal, du moins dans les classes du collège. En CM_2 c'est plutôt l'inverse qui se vérifie).
- . Les classes qui ont les meilleurs résultats pour l'ordre et l'intercalation (CM_2A , CM_2C , 6^eD , 5^e , 4^eA , 4^eB) sont aussi celles qui ont le plus de représentations correctes pour $\frac{1}{3}$, à l'exception de la 6^eC qui a un bon score sur cette question et un mauvais sur l'ordre.
Les questions posées ne permettent sans doute pas de cerner suffisamment les représentations mentales des élèves ni leur disponibilité pour se prononcer sur un lien entre ces représentations et les performances sur l'ordre. Ce lien est d'autant plus difficile à établir qu'il nous semble que les élèves mobilisent plutôt des règles que des images pour traiter une question sur l'ordre.
- . Les CM_2A et les CM_2C ont des meilleurs résultats sur l'ordre que les 6^eA , B , C . Ce n'est pas le cas des CM_2B mais nous ne chercherons pas à analyser cette différence ici d'autant plus que le fort pourcentage de non-réponse dans cette classe incite à considérer ces résultats avec prudence.
- . Les mauvais résultats au problème sur la numération semble aller de pair avec les mauvais résultats sur l'ordre. Cependant, les classes de 6^e ont de meilleurs résultats sur le problème des oeufs que les classes de CM_2 , alors que c'était l'inverse pour les questions concernant l'ordre des décimaux. Une analyse plus fine nous permettra de voir combien d'élèves réussissent une des questions et pas l'autre. Une absence de lien entre ces deux questions ne serait pas étonnante dans le cas où les élèves rangent les nombres décimaux en appliquant des règles purement numériques.

. La faible utilisation des procédures que nous avons qualifiées d'algébriques pour résoudre le problème des âges nous semble encore un indice de la difficulté des élèves à se représenter un problème : cette utilisation est beaucoup plus faible dans les classes de CM_2A , CM_2B , 6^eA , 6^eB , 6^eC qui sont essentiellement constituées d'élèves issus de milieu socio-culturel modeste. En CM_2C , beaucoup d'élèves sont aussi issus de milieu modeste et l'utilisation des procédures algébriques est du même ordre que dans les classes de 6^e et 5^e de Vélizy : on peut y voir un effet de l'apprentissage qui au cours des deux années de cours moyen a insisté sur la représentation algébrique des problèmes.

Une analyse plus fine des résultats nous permettra peut-être de voir s'il y a un lien entre l'âge des élèves et les conceptions ou les résultats.

Nous avons déjà signalé que les représentations fournies nous paraissent donner trop peu de renseignements pour une approche des différences de conception.

Nous pourrions peut-être faire ce travail pour les classes où nous disposons d'autres informations.

Au niveau des résultats, nous devrions être en mesure de voir s'il y a ou non une différence.

Nous ne disposons pas de toutes les informations sur le milieu social des enfants interrogés. L'analyse de ce point de vue ne pourra être que limitée.

Bibliographie

G. Brousseau
Problèmes de l'enseignement des décimaux
Recherches en Didactique des Mathématiques
N° 1.1. (1980). La pensée sauvage.

G. Brousseau
Problèmes de didactique des décimaux
Recherches en didactique des Mathématiques
N° 2.1. (1981) La Pensée sauvage

- [D] R. Douady
Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.
Thèse de Doctorat d'état oct. 1984
- [DP] R. Douady et M-J Perrin Glorian
Liaison Ecole-Collège - Nombres décimaux
Brochure de l'I.R.E.M de Paris VII (à paraître octobre 1985)
- [EF] Education et Formation N° 3, 1983
Ministère de l'Education Nationale SIGES
- [GL] C. Grisvard et F. Léonard
Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs. Bull. APMEP N° 327, fév. 1981
Résurgence de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux. Bull. APMEP N° 340 Sept. 1983.
- [I] M.L Izorche
"Les réels en classe de seconde"
Mémoire de D.E.A. I.R.E.M de Bordeaux Nov. 1977
- A. Rouchier
Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs.
Recherches en Didactique des Mathématiques N° 1.2. (1980)
- [V] G. Vergnaud
Multiplicative structures in Lesh R. Landau M. Acquisition of mathematics Concepts and Processus. Academic Press 1985

Nom
date de naissance

Prénom

Classe

1 - Si tu devais expliquer à un camarade du CE₂ ce qu' est $\frac{1}{3}$, que lui dirais-tu?
quels dessins ferais-tu?

Et pour $\frac{3}{4}$?

Et pour 2,3 ?

2- Combien y-a-t-il de minutes dans $\frac{1}{4}$ heure ? dans $\frac{1}{3}$ heure ? dans $\frac{1}{5}$ heure ?

3- Que vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$?

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$?

Que vaut $\frac{1}{10} + \frac{1}{10}$?

Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$?

Quelle est la moitié de $\frac{1}{100}$?

4 - Peux-tu citer trois nombres compris

entre 1 et 5 ?

entre 1 et 3 ?

entre 1,8 et 2,1 ?

entre 1,5 et 1,8 ?

entre 1,5 et 1,6 ?

entre 1 et 1,1 ?

5- Martine dit : " C'est drôle, dans ma famille, mon petit frère a la moitié de mon âge, mon père a le triple de mon âge et mon grand-père a 5 fois mon âge. Devine combien de fois mon grand-père a l' âge de mon petit frère ?
Explique comment tu as trouve. "

QUESTION 1

" Mon père a 36 ans. Devine les âges des autres membres de ma famille.
(Ma mère a 2ans de moins que mon père) .

6 - Compare les nombres :

$4,12 - 43,25 - 4,54 - 4,02 - 4 + \frac{1}{2} - 4,45 - 40,2 - 4,2 - 40,12 - 43 + \frac{1}{4} - 4,325$

7 - Un carreleur utilise des carreaux rectangulaires pour carreler le sol d'une pièce rectangulaire. Il constate qu' il peut reporter exactement 25 fois la longueur du carreau dans la longueur de la pièce et exactement 15 fois la largeur du carreau dans la largeur de la pièce. De combien de carreaux aura-t-il besoin pour carreler la pièce ?

8 - Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes. On met 6 oeufs dans chaque boîte; quand on a 6 boîtes, on les range dans un carton; et on range 6 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, 4 cartons, et 5 boîtes. Combien d'oeufs ont été emballés?
Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse . De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs ?

classe de 6^eA:

8 - Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes. On met ~~12~~ 12 oeufs dans chaque boîte; quand on a ~~12~~ 12 boîtes, on les range dans un carton; et on range ~~12~~ 12 cartons dans une caisse. Ce jour là, on a rempli 50 caisses, ~~8~~ 8 cartons, et ~~10~~ 10 boîtes. Combien d'oeufs ont été emballés?
Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10, on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse . De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs ?

Date :

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Classe :

1- Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.

On met 6 oeufs dans chaque boîte.

On met 6 boîtes dans chaque carton.

On met 6 cartons dans chaque caisse.

Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.

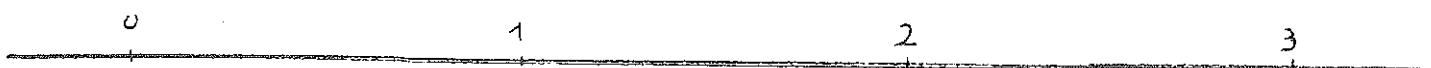
Combien d'oeufs ont été emballés?

Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10 ; on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse.

De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs? (c'est à dire le nombre d'oeufs que tu as trouvé à la première question)

2- Voici un morceau d'axe gradué . Peux-tu placer les nombres suivants sur cet axe

2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08



3- Range les nombres suivants du plus petit au plus grand en utilisant le signe $<$ ou le signe $=$ suivant le cas.

4,12 43,25 4,54 4,02 $4\frac{1}{2}$ 4,45 40,2 4,2 40,12

$43 + \frac{1}{4}$ 4,325

4- Cite, si c'est possible, trois nombres strictement compris

entre 1,8 et 2,1

entre 1,6 et 1,8

entre 1,3 et 1,4

entre 1 et 1,1

Date :

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Classe :

1- Dans une entreprise, on range les oeufs dans des boîtes, des cartons, des caisses.

On met 6 oeufs dans chaque boîte.

On met 6 boîtes dans chaque carton.

On met 6 cartons dans chaque caisse.

Aujourd'hui, on a rempli 50 caisses, 3 cartons et 2 boîtes.

Combien d'oeufs ont été emballés?

Dans une autre entreprise, on emballe les oeufs par boîtes de 10 ; on met 10 boîtes dans un carton et 10 cartons dans une caisse.

De combien de boîtes, cartons et caisses aurait-on besoin dans cette deuxième entreprise pour emballer le même nombre d'oeufs? (c'est à dire le nombre d'oeufs que tu as trouvé à la première question)

2- Voici un morceau d'axe gradué . Peux-tu placer les nombres suivants sur cet axe

2,5 0,8 1,45 1,7 0,62 2,87 1,08



3- Range les nombres suivants du plus petit au plus grand ; tu précises s'il y a égalité :

4,12 43,25 4,54 4,02 $4 + \frac{1}{2}$ 4,45 40,2 4,2 40,12

$43 + \frac{1}{4}$ 4,325

4- Dans un magasin on vend 3 tablettes de chocolat pour 8,50 F ; dans un autre magasin on vend 5 tablettes du même chocolat pour 14,50 F . Dans lequel des deux magasins le chocolat est-il le moins cher ?

Date :

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Classe :

1- Si tu devais expliquer à un camarade du CE₂ ce qu'est $\frac{1}{3}$ (un tiers) , que lui dirais-tu, quels dessins ferais-tu ?

Et pour $\frac{3}{4}$ (trois quarts) ?

Et pour 2,3 ?

2- Combien y-a-t-il de minutes dans un quart d'heure ? dans un dixième d'heure, dans un cinquième d'heure ?

3- Que vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10}$$

$$0,7 + 0,8$$

B

4- Quelle est la moitié de $\frac{1}{100}$?

Quel est le double de $\frac{1}{100}$?

Quelle est la moitié de 0,1 ?

5- Cite, si c'est possible , trois nombres compris

entre 1,8 et 2,1

entre 1,6 et 1,8

entre 1,3 et 1,4

entre 1 et 1,1

Attention, donne des nombres différents de ceux qui sont donnés.

6- Martine dit : " C'est drôle, dans ma famille, mon petit frère a la moitié de mon âge, mon père a le triple de mon âge et mon grand-père a 5 fois mon âge. Devine combien de fois mon grand-père a l'âge de mon petit frère ? Explique comment tu as trouvé. "