I.R.E.M.
UNIVERSITE PARIS VII

COMMENT FAIRE DU NEUF AVEC DU VIEUX ?
TRACES DE COURBES EN LOGO

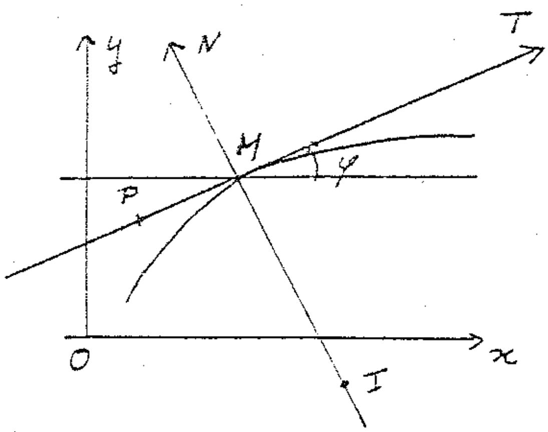
PAR P. JARRAUD

cahier de didactique des mathématiques
numéro 23

Tracés de courbes en LOGO

I - Courbes données par leur équation intrinsèque

1) Equation intrinsèque



Soit C un arc de courbe de classe C^2, il est rectifiable et on définit le rayon de courbure R . Si M est le point courant, $\vec{T}$ le vecteur tangent (unitaire) en M , φ l'angle $(Ox, \vec{T})$ et s l'abscisse curviligne R est donné par

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

et l'équation intrinsèque de C est l'équation

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = f(s)$$

qu'on pourra utiliser aussi sous les formes (au moins localement équivalentes)

$$\frac{ds}{d\varphi} = g(\varphi)$$

où $\qquad ds = a(t)\, dt$

$\qquad d\varphi = b(t)\, dt$

où t est un paramètre.

Le procédé habituel de construction de telles courbes est de se ramener à des courbes en coordonnées classiques ($dx = ds \cos\varphi = g(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi$ et on intègre...)

<u>Développante</u> : c'est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{PM} = s.\vec{T}$

Développée :

. C'est l'enveloppe des normales à la courbe.

. C'est aussi l'ensemble des centres de courbure de la courbe (c'est-à-dire l'ensemble des points I tels que $\vec{MI} = R.\vec{N}$ où $\vec{N}$ est le vecteur normal unitaire à la courbe C orienté par $(\vec{T}, \vec{N}) = +\pi/2$).

2) La géométrie de la tortue

Les instructions que l'on peut donner à la tortue sont les suivantes :

. à un moment donné la tortue est à un endroit donné du plan où elle peut se déplacer et elle regarde dans une direction. On peut lui commander :

. de se déplacer en avant (FORWARD ou AVANCE selon la nationalité de la tortue) ou en arrière (BACK ou RECULE) d'un certain nombre de pas dans la direction où elle regarde.

. de modifier la direction de son regard en tournant vers la gauche (LEFT TURN ou GAUCHE) ou vers la droite (RIGHT TURN ou DROITE).

Autrement dit à chaque moment on indique à la tortue d'avancer de Δs et de tourner de $\Delta \varphi$.

On remplace donc la résolution de

$$ds = g(\varphi).d\varphi$$

par une itération de constructions discrètes.

C'est ce que l'on fait notamment dans le cas $g(\varphi) = R = C^{te}$ d'un cercle que l'on trace par

REPETE n [AVANCE S DROITE 360/n]

Développante : sur la tangente on recule de s pour avoir P et on avance pour revenir en M .

Développée :

. on obtient la normale en tournant de 90 degrés par rapport à la tangente

. si on veut le centre de courbure il suffit d'avancer sur la normale de R (en faisant attention que d φ est en degrés et non en radians et qu'il y a un facteur de conversion de $\frac{180}{3,1416} \simeq 57,3$).

La géométrie de la tortue est notamment celle utilisée en LOGO mais on la trouve aussi dans d'autres langages (certains "Pascal" notamment)

3) Réalisation pratique en LOGO

J'ai utilisé un LOGO Sinclair sur Sinclair Spectrum, en anglais et assez standard.

L'écran affiche 256 points horizontalement sur 178 verticalement mais une option WINDOW permet à la tortue de se déplacer sur un espace 32 000 sur 32 000 (très pratique pour les asymptotes ou les spirales le programme ne se bloque pas bêtement quand la tortue atteint les bords de l'écran).

Une commande SCRUNCH ou ECHELLE permet de modifier l'échelle de l'affichage et soit d'agrandir au détail soit au contraire de voir une plus grande partie du plan de la tortue.

Les notations ne sont pas très scientifiques : angles en degrés, cap (i.e. angle de Oy avec la direction de la tortue) mesuré positivement dans le sens inverse.

Enfin il est bon de cacher (HIDETURTLE) la tortue pour accélerer la vitesse d'exécution.

Le programme (en général très court) se compose

- d'une procédure C qui donne les conditions initiales de la tortue et appelle (avec la valeur initiale θ_0) la procédure CR .

- d'une procédure CR qui indique à la tortue ce qu'elle doit faire pour la valeur du paramètre (Δs, $\Delta\varphi$ etc...) et appelle CR $\theta + \Delta$ pour le pas suivant.

- arrêt : soit avec un test sur le paramètre (si on connait leur intervalle de variation) soit en surveillant ce qui se passe sur l'écran

- si on veut avoir des valeurs de paramètres de la courbe on les met en paramètres dans CR : ex CR t s appelant CR $t + \Delta t$ $s + \Delta s$

permet de disposer à tout moment de s .

Pour un "beau" dessin le choix des paramètres demande évidemment quelques tatonnements. Le plus surprenant est que les courbes tracées par ce procédé assez grossier ont le plus souvent une allure 'raisonnable'.

Le tracé sur papier se fait par recopie d'écran.

On trouvera dans ce qui suit beaucoup de courbes cycloidales car la forme générale de leur équation intrinsèque est

$$ds = k \sin a\varphi \, d\varphi$$

(oû k et a sont des constantes)
qui se prête bien à l'utilisation de la méthode précédente (si s est un polynôme en φ on obtient des spirales qui sortent très vite de l'écran et le LOGO ne connaît ni exponentielle ni fonctions hyperboliques).

II

Courbes en coordonnées polaires et équation d'Euler

La géométrie du Logo se prête bien sûr aussi à la construction de courbes en coordonnées polaires (on tourne de θ et on avance de $\rho(\theta)$ dans la direction indiquée).

<u>Remarque</u> : Le logo du Spectrum présente le défaut inattendu que Gauche 400 se traduit par Droite 40 et non Gauche 40 mais Fixe cap fonctionnne correctement.

Une application plus amusante est le tracé d'une courbe donnée comme enveloppe d'une famille de droites données sur la forme (d'Euler) $x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$: cela revient à tracer le vecteur OM d'angle polaire θ et de longueur p et à tracer la perpendiculaire en M à OM, ce qui se fait très facilement en LOGO.

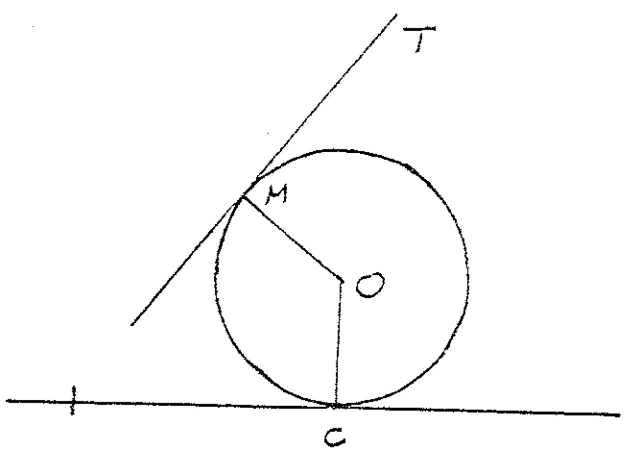
III

Constructions géométriques

On peut donner directement des ordres à la tortue.

1) Construction de l'hypocycloide.

On considère un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur une droite un point attaché au cercle décrit une hypocycloide.



La tortue trace la cycloide en exécutant

- le mouvement de translation du disque
- le mouvement de rotation du disque.

Mieux si on trace la tangente T en M au cercle on voit apparaître l'enveloppe de la tangente qui est une roulante.

2) Courbe du chien

Un marcheur se déplace (à vitesse constante V) sur une droite, son chien vient le rejoindre (à la même vitesse V) en se dirigeant vers lui :

Une commande du Logo permet à priori de tracer en Logo cette courbe c'est VERS (ou TOWARDS) qui indique la direction à prendre mais dans le cas du Logo Sinclair Towards n'admet que des nombres (et non des variables) comme paramètres et cette commande est inutilisable pour cette application.

IV

Courbes récursives

On peut appeler ainsi des courbes, souvent pathologiques, que l'on rencontre notamment comme exemples ou contre-exemples en topologie ou en calcul différentiel et qui sont définies comme limites de courbes C_n plus simples et effectivement constructibles.

Le LOGO langage récursif permet de tracer des courbes où C_n se déduit de C_{n-1} par le même procédé que C_{n-1} se déduit de C_{n-2} . On peut espérer que la visualisation obtenue aide l'intuition à comprendre la limite.

V

Quelques limites et avantages

La faible résolution de l'affichage limite la finesse des tracés. Il faut aussi trouver un compromis entre rapidité d'éxécution (donc un faible nombre d'itérations) finesse du tracé (donc une faible incrémentation du paramètre) et lisibilité (en particulier pour les enveloppes).

Le LOGO (du moins ceux que je connais) ne permet pas de tracer des courbes en coordonnées cartésiennes, mais d'autres langages le font (et très vite).

Le LOGO ne permet pas (ou mal) la représentation des courbes utilisent parentielles, logarithmes, etc... Les courbes qui s'éloignent rapidement de l'origine sont difficiles à représenter.

Par contre le procédé assez géométrique de construction des courbes peut aider les étudiants en les motivant sur un sujet qui depuis des générations n'est pas l'un des plus excitants du premier cycle de mathématiques.

L'apparition des courbes (des enveloppes surtout) sur l'écran est assez fascinante ; une petite recopie d'écran sur papier ne rend pas cet aspect.

Un matériel simple et bon marché (comme celui dont je me suis servi, il y a plusieurs micro ordinateurs équivalents pour moins de 5000F) permet déja de faire un certain nombre de choses.

Enfin des exemples plus élaborés sont possibles mais je me suis volontairement borné à des exemples classiques et connus pour mieux juger du rendu des tracés et pour avoir des applications pédagogiques (du genre fournir à des étudiants tracé et équation et leur demander de justifier ce qu'ils voient sur le tracé).

VI

En guise de référence

. pour la partie géométrique : le livre de géométrie 1er cycle ou Spéciales que le lecteur préfère

. pour la programmation en LOGO (élémentaire dans les exemples qui suivent) consulter par exemple

G. Weidenfeld F Mathieu Y.D. Perolat
LOGO (ed : Eyrolles)

. enfin pour des idées de tous niveaux et toutes directions

Abelson Di Sessa : Turtle Geometry

Petit lexique pour lire les procédures

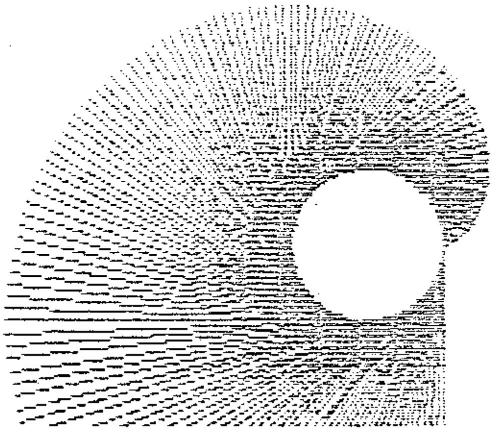
Abréviation	Anglais	Français
	TO	POUR
	END	FIN
	IF	SI
RT	RIGHT TURN	DROITE
LT	LEFT TURN	GAUCHE
FD	FORWARD	AVANCE
BK	BACK	RECULE
	HOME	CENTRE (1)
	HEADING	CAP (2)
SETH	SETHEADING	FIXECAP
CS	CLEARSCREEN	VIDE ECRAN
PU	PENUP	LEVE CRAYON (4)
PD	PEN DOWN	BAISSE CRAYON (3)
SQRT	SQUAREROOT	RACINE CARREE
	STOP	STOP
HT	HIDETURTLE	CACHE TORTUE
	SETSCRUNCH	FIXE ECHELLE
PR	PRINT	ECRIS
	WINDOW	FENETRE

(1) retour au centre de l'écran, tête vers le Nord (haut)

(2) angle avec le nord

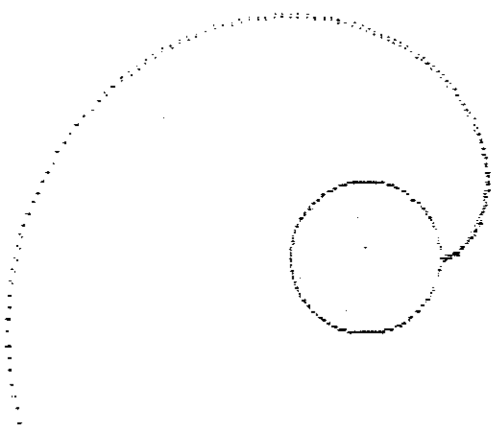
(3) la tortue laisse une trace sur l'écran

(4) la tortue ne laisse pas de trace sur l'écran



DEV

```
?
TO DEV
CS
HT WINDOW
PU BK 30 RT 90 FD 60 LT 90 PD
DEVR 0
END

TO DEVR :X
BK :X
FD :X + 1
LT 2
DEVR :X + 1
END

?
```



```
TO DEV1
CS
PU BK 30 RT 90 FD 60 LT 90 PD
HT WINDOW
DEV1R 0
END

TO DEV1R :X
PU BK :X
PD BK 1 PU
FD :X + 1
PD FD 1
LT 2
DEV1R :X + 1
END

?
```

Equations intrinsèques

Cercle et sa développante

DEV

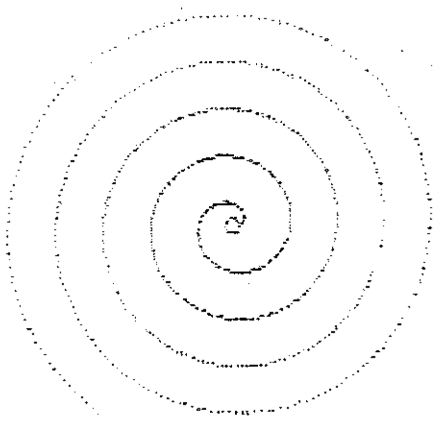
On trace un cercle de longueur 180 donc de diamètre $\frac{180}{3,14} \sim 57$ et on obtient la développante en reculant de l'abscisse curviligne (x) crayon baissé : on obtient une courbe "pleine".

DEV 1

Le programme est le même sauf que le déplacement sur la tangente a lieu crayon levé pour obtenir les deux courbes séparées.

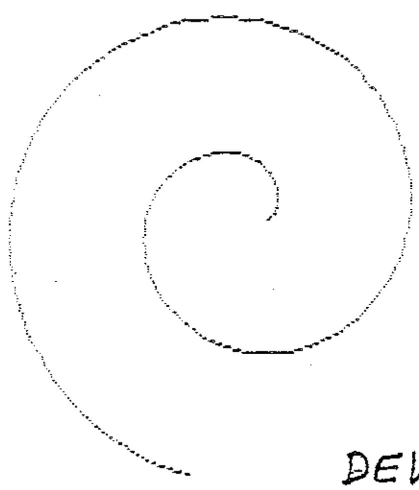
Le Logo du Spectrum ne permet pas de laisser un point à un endroit alors on triche en utilisant FD (avance) 1.

(équations intrinsèques
cercle et sa développante)



DEV1

même programme que le précédent (aucun changement) mais avec une échelle 1/10 qui permet de voir plusieurs spires.



DEV2

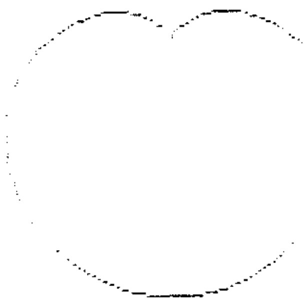
```
TO DEV2
HT PD RT 90
DEV2R 0
END

TO DEV2R :P
FD 0.1 * :P
LT 1
DEV2R :P + 1
END

?
```

DEV2

c'est la courbe d'équation caractéristique

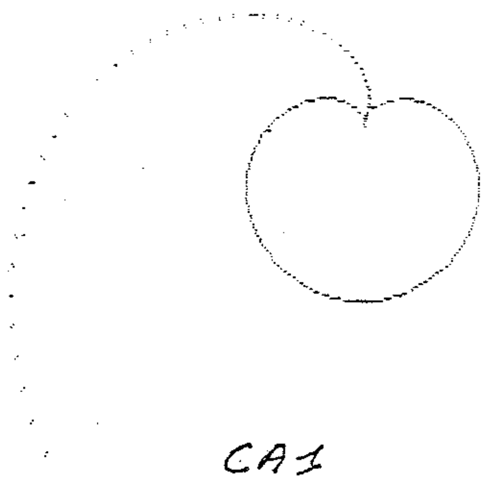
$$ds = a\varphi \cdot d\varphi$$

(tracé aussi à l'échelle 1/10)
c'est une développante de cercle.



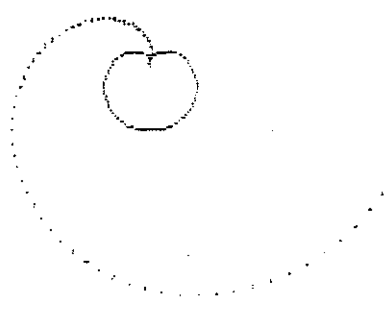
CA

```
TO CA
HT
PU FD 40 PD
CAR 0
END

TO CAR :n
FD 4 *     SIN ( 1 / 3 * :n )
LT 5
IF :n > 540 [STOP]
CAR :n + 5
END

?
```



CA1

```
TO CA1
WINDOW HT
PU FD 40 RT 90 FD 50 LT 90 PD
CA1R 0 0
END

TO CA1R :n :s
FD ( 4 * SIN ( 1 / 3 * :n ) )
PU BK :s PD BK 1 PU FD :s + 1
PD LT 5
CA1R :n + 5 :s + 4 * SIN ( 1 / 3
 * :n )
END
```



CA 1 bis

Equations intrinsèques

Cardioïde

La cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 - \cos\theta)$ (représentée ici avec Ox vertical) a pour équation caractéristique

$$ds = k \sin \frac{\varphi}{3} \, d\varphi$$

CA

est le tracé d'une cardioïde (échelle supérieure à 1)

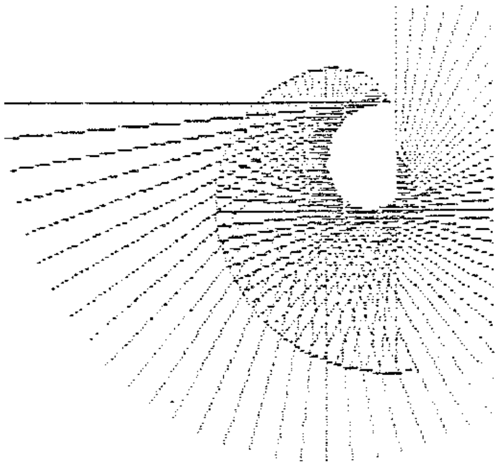
CA 1

est le tracé de la développante de la cardioïde précédente à l'échelle 1.

CA 1 bis

c'est la même courbe à l'échelle 0,4.

Equations intrinsèques
cardioïde

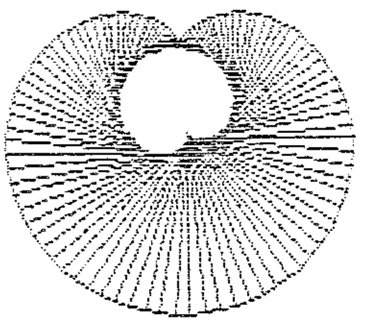


CA 2

```
TO CA2
WINDOW
PU FD 40 RT 90 FD 50 LT 90 PD
CA2R 0
END

TO CA2R :n
FD ( 4 * SIN ( 1 / 3 * :n ) )
LT 90 FD 100 BK 100 RT 90
LT 5
CA2R :n + 5
END
```

CA 2

On trace la développée de la cardioïde comme enveloppe des normales : on obtient une autre cardioïde (le résultat est bien connu : la développée d'une courbe cycloï-dale est une courbe semblable).



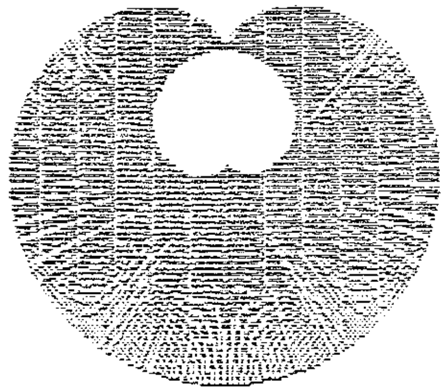
CA 3

```
?
TO CA3
WINDOW
PU FD 40 RT 90 FD 50 LT 90 PD
CA3R 0
END

TO CA3R :n
FD ( 4 * SIN ( 1 / 3 * :n ) )
LT 90 FD 46 * SIN ( 1 / 3 * :n )
 BK 46 * SIN ( 1 / 3 * :n )
RT 90
LT 5
CA3R :n + 5
END

?
```

CA 3

On trace encore la développée mais en s'arrêtant au centre de courbure (le 46 tient compte de la conversion degrés/radians)

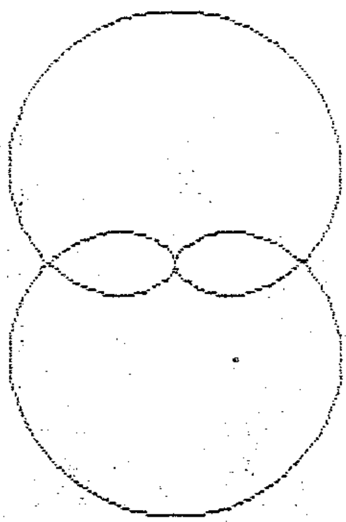
L'incrémentation importante (5 degrés) de l'angle ne donne pas un tracé très satisfaisant.



CA 3 bis

```
TO CA3
HT PU FD 40
PD CA3R 0
END

PD doesn't like CA3R5 as input
?
TO CA3R :n
FD SIN ( 1 / 3 * :n )
LT 90 FD 57 * SIN ( 1 / 3 * :n )
BK 57 * SIN ( 1 / 3 * :n )
RT 90
LT 1
CA3R :n + 1
END
```

?



?

CA bis

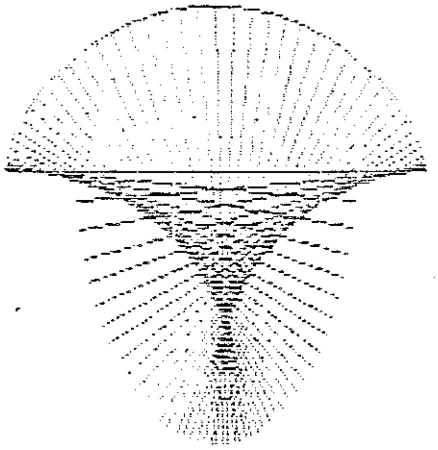
Equations caractéristiques - cardioïde

CA 3 bis

Même procédure qu'avant mais l'angle n'est incrémenté que de 1 au lieu de 5 pour améliorer la précision (mais le temps d'exécution est multiplié par 5).

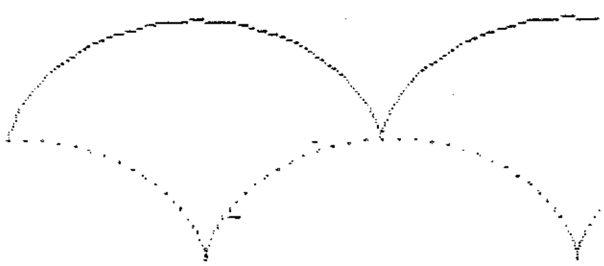
CA bis

C'est la procédure CA mais on remplace $\sin \varphi/3$ par $|\sin \varphi/3|$ et on laisse tourner jusqu'à $\varphi = 6\pi$ rad $= 1080$ degrés on obtient la cardioïde de départ et la symétrique par rapport au point de rebroussement (cf les problèmes de choix de signe du ds dans tous les ouvrages de 1e cycle).



CYC 1

```
?
TO CYC1
HT SETSCRUNCH [100 100] WINDOW
PU FD 20 LT 90 FD 130 RT 90 PD
CYC1R 0
END

TO CYC1R :U
FD 8 * SIN :U
RT 90 FD 150 BK 150 LT 90
RT 4
CYC1R :U + 4
END

?
```



CYC 3

```
?
TO CYC3
CS HT WINDOW
PU FD 20 LT 90 FD 140 RT 90 PD
CYC3R 0
END

TO CYC3R :X
FD 8 * SIN :X
RT 90 PU FD 115 * SIN :X PD
BK 1 FD 1 PU BK 115 * SIN :X
PD LT 90
RT 4
CYC3R :X + 4
END

?
```

Equations intrinsèques

Cycloïde

CYC 1

On trace la cycloïde d'équation intrinsèque

$$ds = -a \sin\varphi \, d\varphi$$

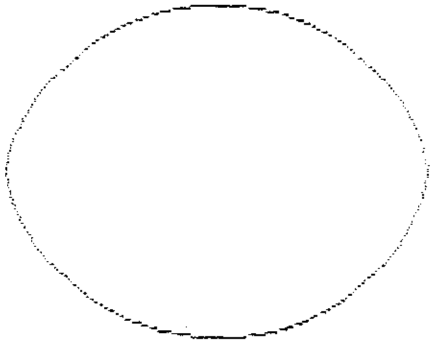
et l'enveloppe des normales (i.e. la développée) qui est une cycloïde égale. (Le - n'apparaît pas dans le programme car on tourne à droite, donc $d\varphi < 0$).

CYC 3

On trace la même cycloïde par le même procédé mais on obtient la développée comme ensemble des centres de courbure (et on peut ainsi avoir plus d'une arche)

L'échelle est légèrement différente.

?



CYC 2

```
?
TO CYC2
HT SETSCRUNCH [100 100] WINDOW
PU FD 20 LT 90 FD 120 RT 90 PD
CYC2R 0
END

TO CYC2R :U
FD ABS ( 8 * SIN :U )
RT 4
CYC2R :U + 4
END

?
```

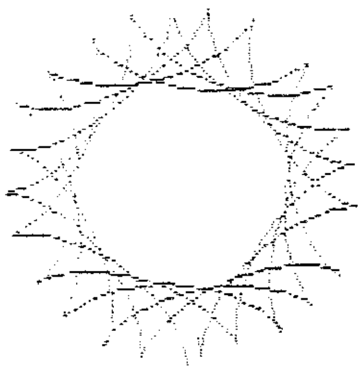
Equations intrinsèques cycloïde

CYC 2

C'est la cycloïde de CYC1 et l'axe symétrique : on a remplacé

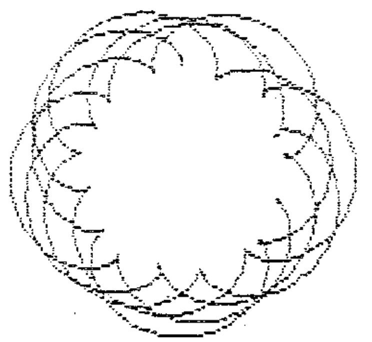
$$ds = a \sin\varphi \, d\varphi$$

par $$ds = a\, |\sin\varphi|\, d\varphi.$$



CYC 2

```
TO CYC2
HT CS
PU BK 80 PD
CYC2R 0
END

TO CYC2R :P
FD 1 * SIN 1.71 * :P
LT 3
CYC2R :P + 3
END

?
```



CYC 4

```
TO CYC4
CS HT WINDOW
PU FD 30 PD
CYC4R 0
END

TO CYC4R :X
FD 2 * SIN 0.63 * :X
LT 4
CYC4R :X + 4
END

?
```

Équations intrinsèques : courbes cycloïdales

Elles représentent la trajectoire d'un point lié à un cercle de rayon $|r|$ roulant sans glisser sur un cercle fixe de rayon R (pour une *épicycloïde*, $r>0$ et pour une *hypocycloïde*, $0>r>-R$)

L'équation intrinsèque est :

$$ds = a \sin \frac{R}{R+2r} \varphi \cdot d\varphi$$

et le nombre de points de rebroussements est

$$n_0 = \inf \left(n \in \mathbb{N}^*,\ n \frac{r}{R} \in \mathbb{Z}\right)$$

qui est fini si et seulement si $\frac{r}{R} \in \mathbb{Q}$ (ce qui est le cas de tous les nombres utilisés par un ordinateur)

CYC 2

épicycloïde d'équation

$$ds = a \sin \frac{171}{100} \varphi \, d\varphi$$

doit donc avoir 342 rebroussements

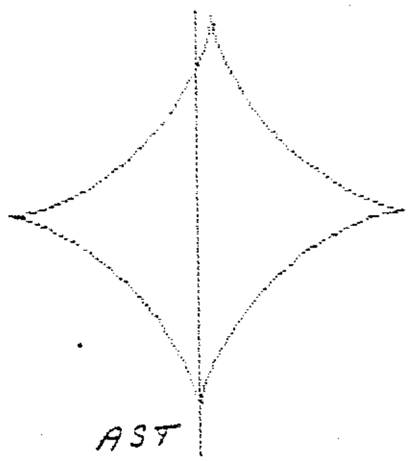
CYC 4

hypocycloïde d'équation

$$ds = a \sin \frac{63}{100} \varphi \cdot d\varphi$$

doit donc avoir 326 rebroussements (mais j'ai arrêté la machine avant la fin du tracé).

Equations intrinsèques : de "mauvais" exemples



AST

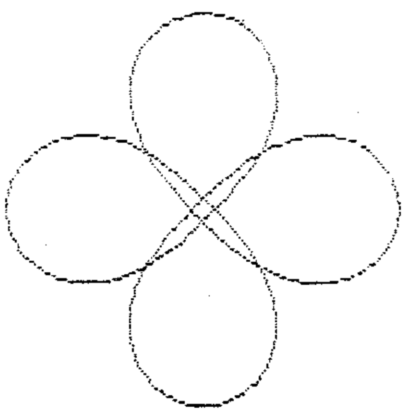
```
TO AST
PU BK 70
PD
HT
AS 0
END

TO AS :x
RT 1
FD 2 * SINE ( 2 * :x )
AS :x + 1
END

?
```

AST

Il s'agit d'une astroïde (hypocycloïde à 4 rebroussements) d'équation :

$$ds = a \sin 2\varphi \, d\varphi$$

La courbe se referme bien mais la symétrie par rapport à l'axe vertical n'est pas évidente.



LEM 1

```
TO LEM1
HT WINDOW
RT 135 PD
LEM1R -29.5
END

TO LEM1R :x
FD 2 / SQRT ABS COS :x - 90
LT 3
LEM1R :x + 2
END

TO ABS :n
IF :n < 0 [output - :n] [output
:n]
END
```

LEM 1

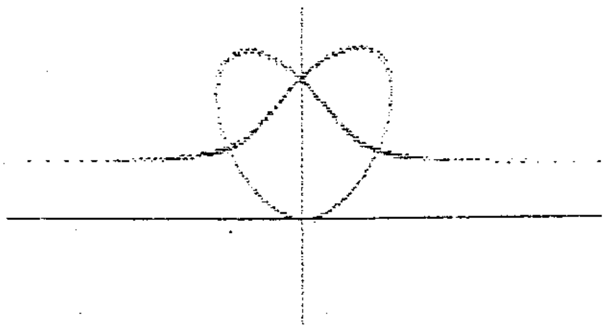
Il s'agit d'une lemniscate de Bernoulli et de sa symétrique par rapport aux bissectrices, d'équation

$$ds = a \Big/ \sqrt{\left|\cos \tfrac{2}{3}\left(\varphi - \tfrac{\pi}{2}\right)\right|} \, d\varphi$$

La courbe est en principe tangente à l'origine aux bissectrices.

Remarque : La valeur de départ est $-29°5$ et non -30 pour éviter la nullité du dénominateur.

Courbes en coordonnées polaires



C2

```
?
?
TO C2
PD
FD 60 BK 90 FD 30 RT 90 FD 100 B
K 200 HOME
RT 90
HT WINDOW
C2R 0.5
END

TO C2R :x
IF :x > 359 [stop]
LT :x PU FD 40 * ( SIN :x ) / (
1 + ( COS :x ) * COS 2 * :x )
PD FD 1 PU
HOME RT-90
C2R :x + 1
END
```

C2

Courbe d'équation

$$\rho = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta \cdot \cos 2\theta}$$

(en partant de $\theta_0 = 0{,}5$ degré pour éviter un dénominateur nul).

Un test permet l'arrêt automatique.

JOLI

```
?
L'aire est
0.39473585
?
TO JOLI
HT WINDOW RT 90 PD
JOLIR 0 0
END
```

```
TO JOLIR :x :y
LT :x
FD 110 * ( COS :x ) * COS 2 * :x
HOME RT 90
IF :x > 179 [pr [L'aire est] PR
:y / 114 STOP]
JOLIR :x + 1 :y + SQR ( COS :x )
 * COS 2 * :x
END

?
```

JOLI

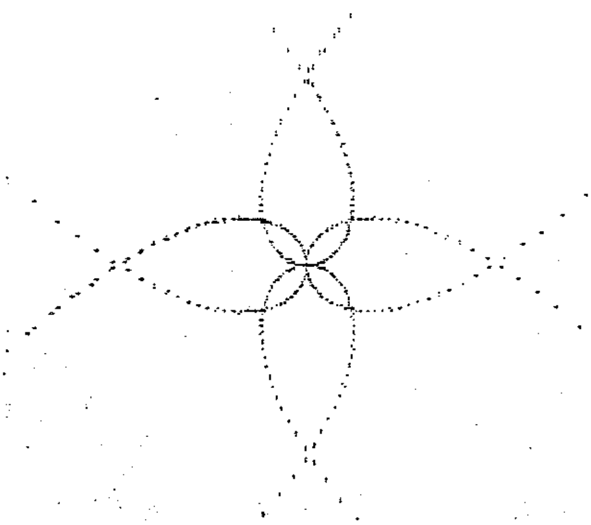
$$\rho = \cos\theta \cos 2\theta$$

Le deuxième paramètre (y.) vaut $\Sigma \rho^2 d\theta$. Il est imprimé à la fin après correction du facteur $\frac{\pi}{2 \times 180}$: c'est l'aire (en excellent accord avec la valeur exacte).

POL 1

```
TO POL1
CS HT WINDOW
POL1R 0
END

TO POL1R :X
PU FD 20 * :X / ( :X - 57.3 )
PD FD 1 PU
BK 20 * :X / ( :X - 57.3 ) + 1
LT 2
POL1R :X + 2
END

?
```

?



POL2

```
TO POL2
CS WINDOW
POL2R 1
END

TO POL2R :X
SETH - :X PU
FD 60 * TAN 2 * :X / 3 PD
FD 1 PU
HOME
POL2R :X + 3
END

?
```

Courbes en coordonnées polaires

POL 1

Courbe d'équation

$$\rho = \frac{\theta}{\theta - 1}$$

(avec 1 radian = 57,3 degrés) à partir de $\theta = 0$

On voit assez bien le cercle asymptote.

La procédure n'utilise pas HOME.

POL 2

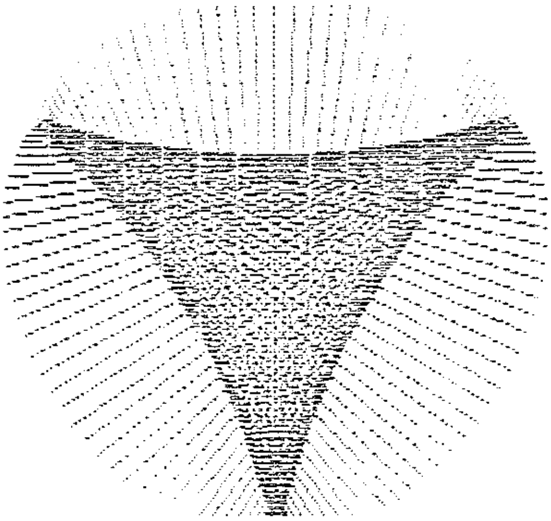
Courbe d'équation

$$\rho = tg\,\frac{2\theta}{3}$$

partant de $\theta = \frac{1}{3}$ de degré ($x = \theta/3$ pour faciliter l'écriture)

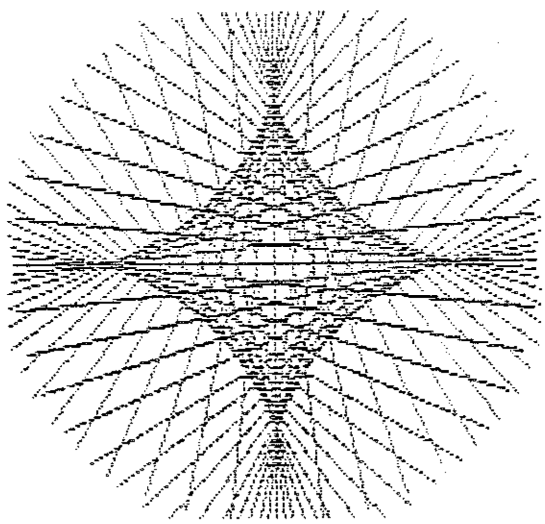
La procédure utilise SETH au lieu de LT pour éviter l'erreur sur LT x quand $x > 360$.

Equations d'Euler



EULER

```
?
TO EULER
WINDOW
HT
PU
EUL 0
END

TO EUL :n
RT :n
PU FD 40 * COS ( 3 * :n ) PD
RT 90 BK 100 FD 200
PU HOME
EUL :n + 8
END
```



EULER 1

```
?
TO EULER1
WINDOW
HT
PU
EUL1 0
END

TO EUL1 :n
RT :n
PU FD 70 * ( COS :n ) * SIN :n P
D
RT 90 BK 100 FD 200
PU HOME
EUL1 :n + 6
END
```

On regarde l'enveloppe des droites $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$ pour θ variable.

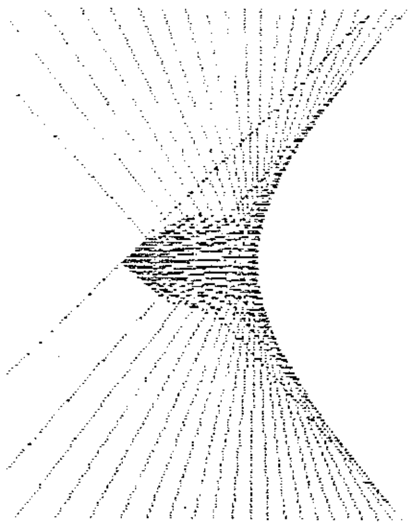
Pour cela on "trace" $\rho = p(\theta)$ en coordonnées polaires et pour chaque θ on tourne de 90° pour tracer la droite perpendiculaire.

EULER

C'est la courbe d'équation d'Euler $p(\theta) = \cos 3\theta$ c'est une hypocycloïde à 3 rebroussements.

EULER1

On prend comme équation $p(\theta) = \sin\theta \cos\theta$ (i.e. $\frac{x}{\sin\theta} + \frac{y}{\cos\theta} = 1$) : on prend l'enveloppe d'un segment de longueur constante s'appuyant sur les axes : c'est une astroïde



POD

```
TO POD
CS
PU SETPOS [-80 0] PD
RT 135 PODR -90
END

TO PODR :X
IF :X > 90 [stop]
FD 40 * SQRT COS :X RT 90
PU FD 150 PD BK 300 PU
FD 150 PD LT 90
BK 40 * SQRT COS :X LT 4
PODR :X + 8
END

?
```

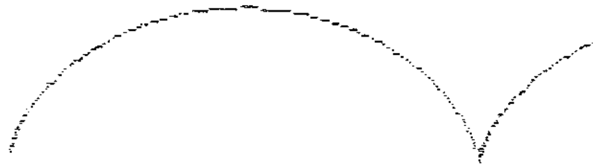
Antipodaire d'une lemniscate de Bernoulli.

POD

On trace en coordonnées polaires, en trait plein, la lemniscate $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, pour chaque θ on trace la normale au rayon vecteur au point (ρ, θ), l'enveloppe de ces normales est un arc d'hyperbole équilatère (inverse de l'arc de lemniscate).

Cela revient à construire la courbe d'équation d'Euler

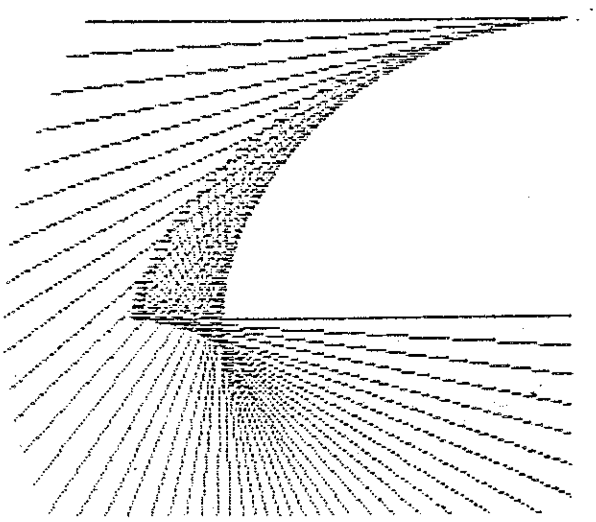
$$x \cos\theta + y \sin\theta = \sqrt{\cos 2\theta}$$



CYC

```
TO CYC
PU SETPOS [-180 -40] PD
HT CYCR - 90
END

TO CYCR :c
SETH 90 FD 1
SETH :c FD 1 RT 2
CYCR HEADING
END
```

?



?

CYCLO

```
?
TO CYCLOIDE :c
SETH 90 FD 2
SETH :c FD 2 BK 100 FD 100 RT 4
CYCLOIDE HEADING
END

TO CYCLO
PU SETPOS [-80 -20] PD
HT CYCLOIDE - 90
END
```

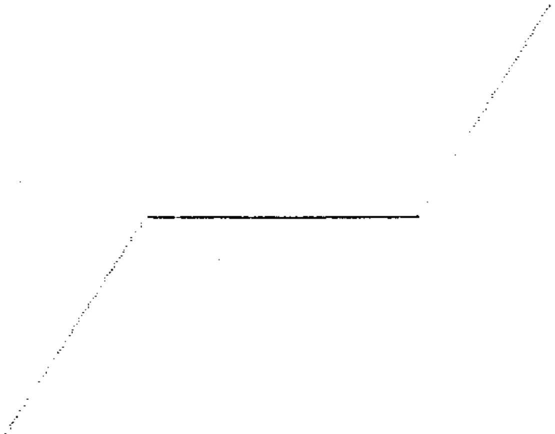
CYC

On utilise la définition cinématique de la cycloïde qu'on traduit en logo (un mouvement de translation plus un mouvement de rotation).

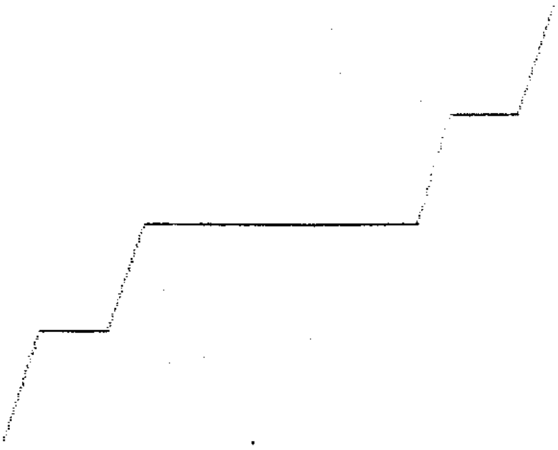
CYCLO.

On profite de la présence dans le programme précédent de la tangente au cercle qui roule pour en prendre l'enveloppe : on obtient une roulante.

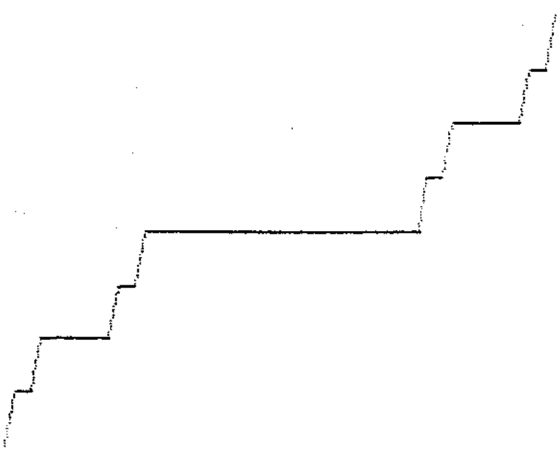
"Cantor"



CANT 0



CANT 1



CANT 2

On construit des fonctions

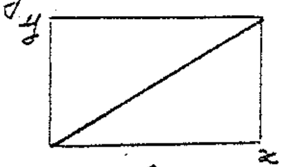
$f_n \quad [0\,1] \longrightarrow [0\,1]$

(continues croissantes surjectives)
convergeant vers une fonction

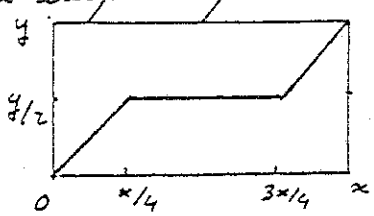
$f \quad [0\,1] \longrightarrow [0\,1]$

continue croissante surjective
dérivable (de dérivée nulle)
partout sauf sur un ensemble
de mesure (de Lebesgue) nulle

principe: les f_n sont linéaires par morceaux et si on a un segment :



on le remplace par



On part de la diagonale

$x = y = 1$

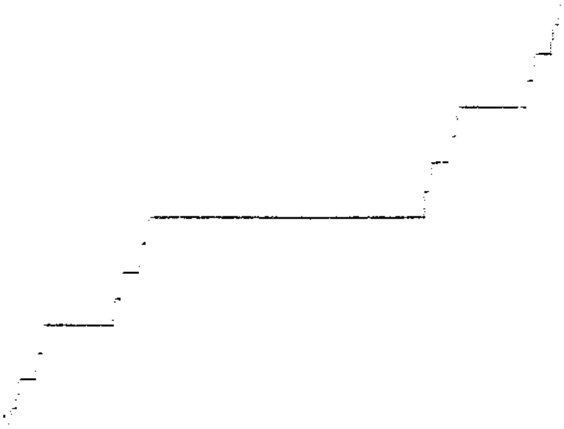
on divise x par 4 à chaque itération : ainsi $y = \sqrt{x}$.

f_n a une dérivée nulle sur un ouvert U_n de longueur

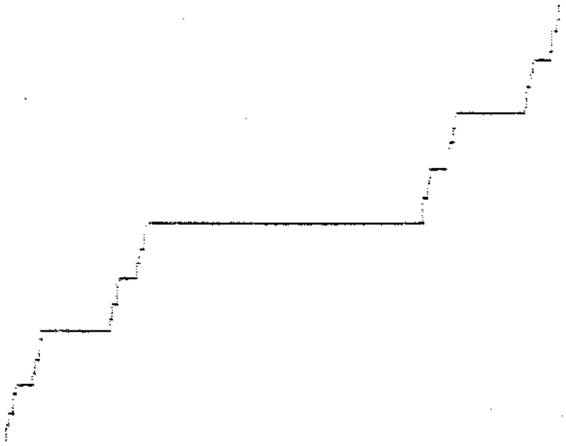
$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

f est dérivable de dérivée nulle sur $U = \cup\, U_n$

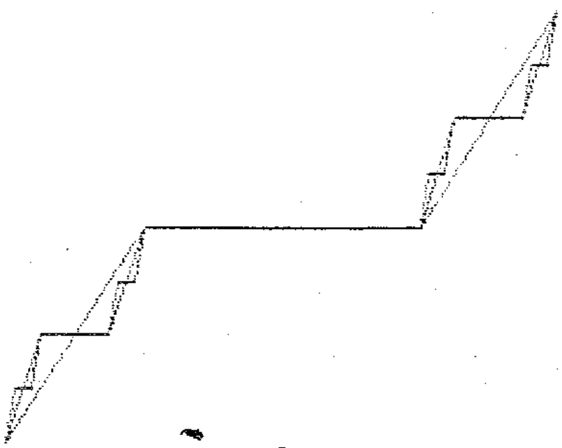
" Cantor "



CANT 3



CANT 4

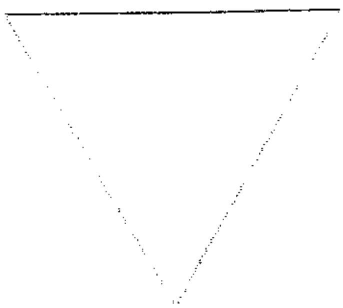


CANT 0 1 2

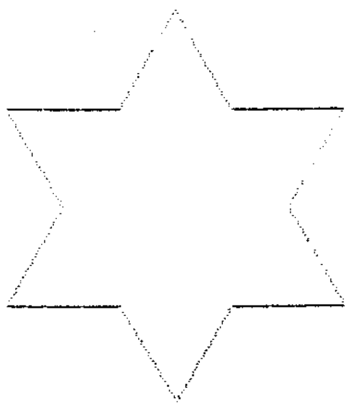
```
?
?
TO CANT :c
PU SETPOS [-120 -85] PD
CANTR 1 :c
END

TO CANTR :x :c
IF :c = 0 [rt arctan sqrt :x fd
150 * sqrt ( :x * ( :x + 1 ) ) r
t 90 + arctan sqrt :x fd 300 * :
x lt 90 - arctan sqrt :x fd 150
* sqrt ( :x * ( :x + 1 ) ) lt ar
ctan sqrt :x stop]
CANTR :x / 4 :c - 1
RT 90 FD :x * 300 LT 90
CANTR :x / 4 :c - 1
END
```

$K = [0\ 1] - U$ est un compact de mesure nulle (de type Cantor d'où le titre) qu'on peut caractériser comme l'ensemble des $\sum_{i=1}^{\infty} a_i 4^{-i}$ avec $a_i = 0$ ou 3 (donc dont le développement tétraadique s'écrit sans 1 ni 2).

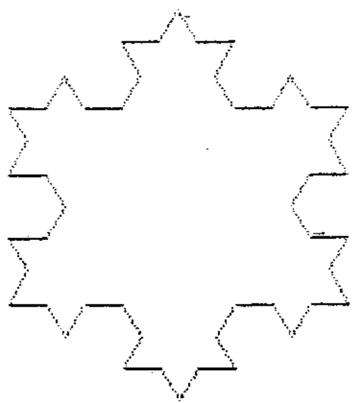
Van Koch



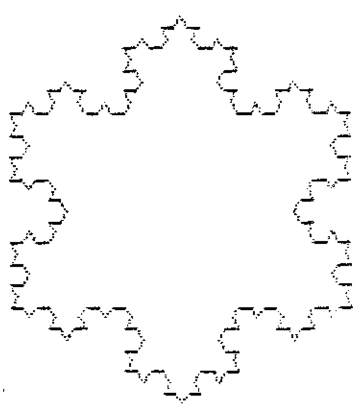
KOCH 130 0



KOCH 130 1



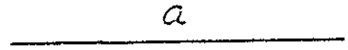
KOCH 130 2



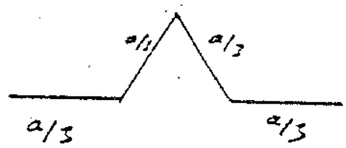
KOCH 130 3

Exemple de <u>courbe "fractale"</u> (dimension 4/3) :

on part d'un segment de longueur a



et on le remplace par



ligne brisée de longueur $4a/3$

puis on itère le procédé.

(ici on part d'un triangle équilatéral)

<u>paramètres</u> :
x : coté du triangle
a : profondeur de récursivité.

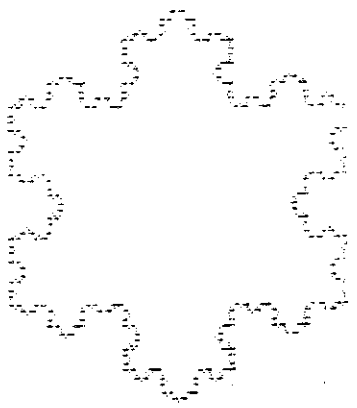
KOCH a n

est de longueur

$$\ell_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n a$$

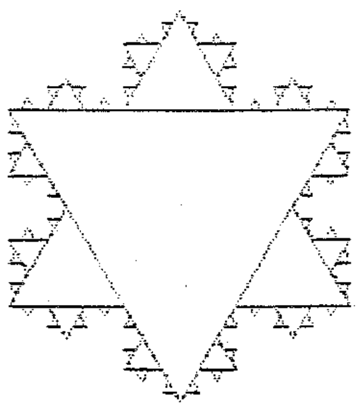
et $\ell_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

"Von Koch"



KOCH 130 . 4

```
?
TO KOCH :X :A
PU SETPOS [-80 20] PD
RT 90
REPEAT 3 [ko :x :a rt 120]
SETH 0
END

TO KO :X :A
IF :A = 0 [fd :x stop]
KO :X / 3 :A - 1 LT 60
KO :X / 3 :A - 1 RT 120
KO :X / 3 :A - 1 LT 60
KO :X / 3 :A - 1
END
```

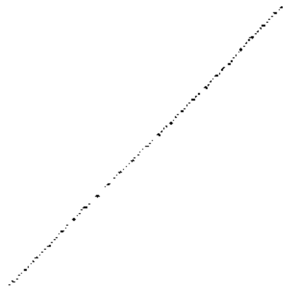


KOCH 130 0 1 2 3

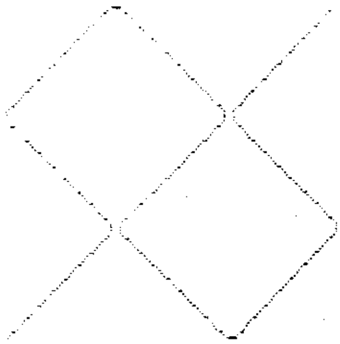
En passant à la limite on obtient une courbe dite de von Koch de "longueur" infinie, continue, contenue dans un compact.

Koch 130 0 1 2 3

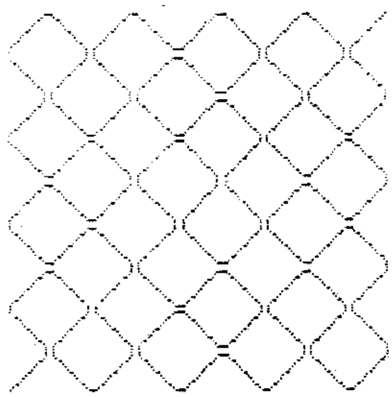
sur le même écran pour mieux suivre l'évolution de la courbe



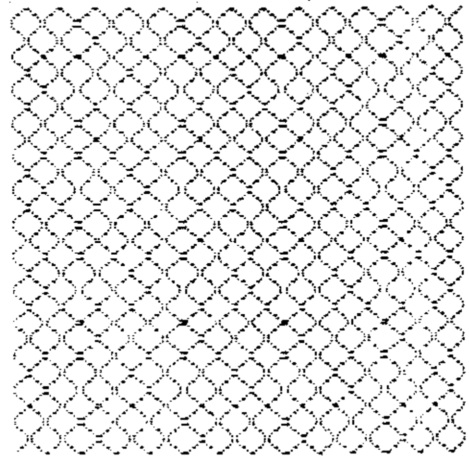
peano 140.3 0



PEANO 150 1 4



PENO 150 2 2



PEANO 150 3 1

Courbe de Peano

On construit par récurrence une suite de fonctions

$f_n \quad [0\,1] \longrightarrow [0\,1] \times [0\,1]$

continues, convergeant uniformément vers une fonction

$f \quad [0\,1] \longrightarrow [0\,1] \times [0\,1]$

continue surjective

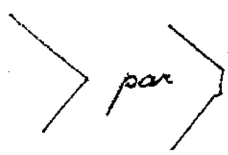
On part de la diagonale (1e figure) qu'on remplace par la ligne brisée de la 2e figure. On remplace alors chaque segment de droite par une ligne brisée du type précédent. La récursivité du Logo permet très facilement d'itérer le procédé.

paramètres:

a : longueur de la diagonale

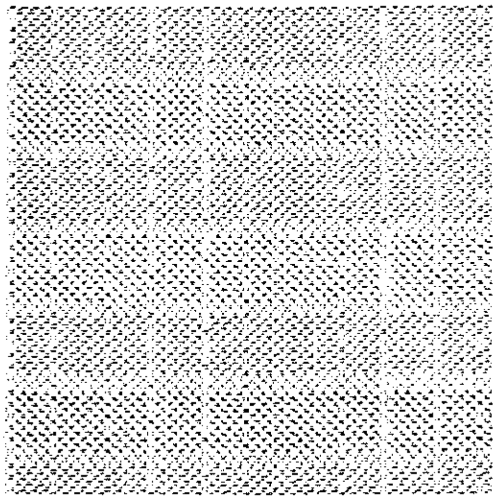
p : profondeur de la récursivité

x : on rend les f_n injectives en remplaçant



Remarque:

$f = \lim f_n$ n'est pas pourtant bijective (un segment n'est pas homéomorphe



PEANO 150 4 1

```
TO PEANO :a :p :x
PU SETPOS [-100 -80] PD
RT 45 HT
ANO :a :p :x
END

TO ANO :a :p :x
IF :p = 0 [fd :a stop]
ANO :a / 3 :p - 1 :x LT 45 FD :x
 LT 45
REPEAT 3 [ano :a / 3 :p - 1 :x r
t 45 fd :x rt 45]
REPEAT 3 [ano :a / 3 :p - 1 :x l
t 45 fd :x lt 45]
ANO :a / 3 :p - 1 :x RT 45 FD :x
 RT 45
ANO :a / 3 :p - 1 :x
END
```

à un carré)

Le temps mis pour tracer la courbe augmente très vite avec p (comme 9^p) et la résolution ne permet pas de tracer mieux que p = 4.

Hilbert aussi a fourni des exemples de courbes continues remplissant le carré. Leur programmation est plus longue. On en trouve un exemple dans

Abelson, di Sessa *Turtle Geometry*

ou

F.X Testard J.P Regourd *Programmer en Logo* (ed PSI)

Remarque : la fonction ci-dessus composée avec la fonction "de Cantor" (page 15) fournit une application

φ $[0\,1] \to [0\,1] \times [0\,1]$

continue, surjective, dérivable (de dérivée nulle) sauf sur un ensemble de mesure nulle.