i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

UNE SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT
SUR L'INTEGRALE EN DEUG A 1ère année

Par D. GRENIER
M. LEGRAND
F. RICHARD
(Grenoble)

cahier de didactique des mathematiques

numéro 22

UNE SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT SUR L'INTEGRALE EN DEUG A 1ERE ANNEE

Denise Grenier Marc Legrand Françoise Richard
Equipe de didactique des mathématiques
USMG-GRENOBLE

LA PROBLEMATIQUE

Un état de fait:

Lorsqu'un enseignant veut aborder le concept d' intégrale au premier cycle d'université, il se trouve face à des étudiants

- qui manipulent dérivées et primitives depuis plusieurs années
- qui ont calculé par ce procédé des aires et des volumes
- qui ont, à propos des primitives, utilisé systématiquement le symbolisme et les notations intégrales
- qui ont à maintes reprises rencontré cet objet en physique, lequel a mystérieusement résolu de nombreux problèmes et a servi parfois de point de départ ou de définition à de nouvelles grandeurs physiques : travail, centre de gravité, flux, etc etc ....

En un mot ces étudiants n'ont, sauf exceptions, **jamais "fait d'intégration" et paradoxalement croient la connaitre**, car pour eux il y a identité entre intégrale et recherche de primitives !

Traditionnellement, l'enseignant de mathématiques fait abstraction de ce passé gênant et se lance courageusement dans la construction besogneuse d' une théorie de l'intégrale: somme de Darboux, limite uniforme de fonctions en escalier, etc ... La majorité des étudiants suivent sans enthousiasme ces développements dont ils ne voient pas très précisément l'objet. L'étonnement en arrive à son comble quand on "démontre avec quelque solennité "le théorème fondamental":

toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle et l'intégrale dépendant de la borne supérieure en fournit précisément une.

En effet, pour la majorité d'entre eux, la première partie de ce théorème est **sans objet et la seconde est la définition de l'intégrale !**

En fait pour beaucoup d'étudiants on vient de faire un immense détour pour prouver "ce qu'on savait depuis bien longtemps!" . L'enseignant peut aisément s'en rendre compte, car il semble que le cours ne reprenne véritablement du sens (certains étudiants reviennent alors en cours, alertés par quelque camarade) que lorsqu'arrive enfin l'algorithmisation: calcul des primitives.

Tout l'effort de construction est alors immédiatement et bien souvent définitivement abandonné au profit du calcul et bien entendu aucun réinvestissement n'apparait à propos de la mise en équation de problèmes de physique. En d'autres termes, si l'énoncé du problème ne l'indique pas très clairement, **l'étudiant ne reconnait absolument pas le concept d'intégrale là où le traitement du problème physique l'impose !**

Nous pensons que ceci est bien entendu très regrettable, mais pas du tout étonnant, puisque pour lui l' intégration se réduit le plus souvent à l'antidérivation .

Notre démarche et ses objectifs

Partant de cette situation de fait, nous avons réalisé une séquence d'enseignement sur 12 séances de 2 heures, dont les objectifs et la démarche sont approximativement les suivants:

1) Dégager des **idées directrices** donnant une signification propre au concept d'intégrale;

2) Placer l'étudiant face à des **situations-problèmes constitutives** du concept d'intégrale i.e. permettant l'émergence de ces idées directrices;

3) Faire en sorte que ce concept d'intégrale n'arrive pas en contradiction, en superposition, en remplacement des concepts existants, mais en complément et en **confrontation**, de telle sorte qu'il n'y ait pas suivant les cas expulsion des connaissances antérieures par le nouveau concept ou au contraire effondrement du nouveau concept à la première difficulté.

Pour réaliser cet objectif, nous adoptons la technique du " **débat scientifique**" (voir page 8).

4) Rendre opérationnel le concept introduit par une **algorithmisation modérée** en confrontation la plus fréquente possible avec des situations-problèmes qui obligent à revenir au sens de l'intégrale, de sorte que les calculs ne se substituent pas insensiblement au concept lui- même.

Les idées directrices du concept "intégrale"

Le contexte mathématique:

On considère un **problème** P donnant lieu à un **résultat numérique** R correspondant à ce qui se passe sur un certain **domaine O : R = R(O)**, (O partie simple de la droite du plan ou de l'espace : intervalle, rectangle , cube, etc., pour laquelle la notion de mesure ne pose aucun problème). On suppose que ce **problème est héréditaire,** i.e. qu'il donne automatiquement lieu à un **résultat partiel Ri=R(Oi)** quand on restreint le problème global à un sous-domaine simple Oi de O .

Dans ce contexte nous dirons que la résolution mathématique de ce problème relève de la procédure intégrale, si les trois principes suivants sont réalisés:

1) DECOUPAGE ET ADDITIVITE:

Si on partage le domaine Ω en sous-domaines disjoints Ωi, le résultat global $R(\Omega)$ est la somme des résultats partiels $R(\Omega i)$:

$$R(\Omega)=\Sigma R(\Omega i), \text{ si } \Omega=\cup\Omega_i .$$

2) ENCADREMENT:

Il apparait que le résultat R dépend d'un certain phénomène numérique f (f: fonction numérique définie sur Ω) et que l'on a, pour chaque partie simple Ωi de Ω, l'encadrement :

$$f_i^- . \mathrm{mes}(\Omega i) \leq R(f,\Omega i) \leq f_i^+ . \mathrm{mes}(\Omega i)$$

où - $\mathrm{mes}(\Omega i)$ désigne la longueur, l'aire, le volume de Ωi

- f_i^+ est un majorant de f sur Ωi, par ex: $f_i^+=\sup(f(t)), t\in\Omega i$

- f_i^- est un minorant de f sur Ωi , par ex : $f_i^-=\inf(f(t)), t\in\Omega i$.

3) PASSAGE A LA LIMITE:

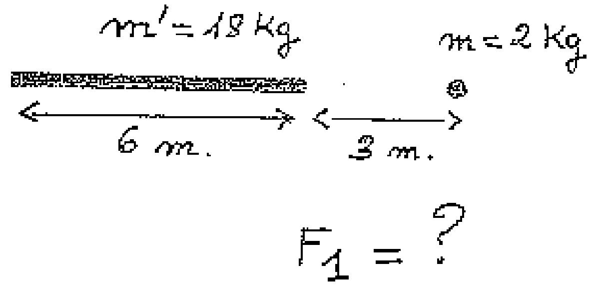
Lorsque le découpage de Ω devient de plus en plus fin, l'écart entre la somme des encadrements supérieurs $\Sigma f_i^+.\mathrm{mes}(\Omega i)$ et la somme des encadrements inférieurs $\Sigma f_i^-.\mathrm{mes}(\Omega i)$ devenant infiniment petit, ce processus détermine un unique réel : l'intégrale de f sur Ω, nombre majorant tous les encadrements inférieurs et minorant tous les encadrements supérieurs; il fournit le résultat numérique R recherché.

les situations-problèmes constitutives et leurs intentions didactiques

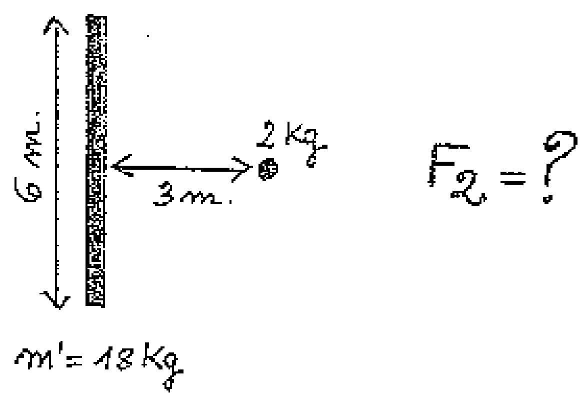
A) 1ère situation-problème proposée : FORCE GRAVITATIONNELLE

Connaissant la loi d'attraction de deux masses ponctuelles m et m' : $F=g.m.m'/r^2$, déterminer la force F_1 d'attraction entre une masse ponctuelle m de 2 kg et une barre fine de 6m. de long et de masse m' égale à 18kg dans les deux dispositions suivantes:

situation A1:



situation A2:

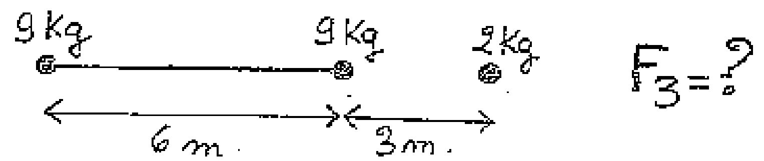


L'objectif de la situation A_1 est de placer l'étudiant devant une situation physiquement très simple, où la formule ponctuelle est néanmoins très difficile à mettre en oeuvre, car la force "change tout le temps". On pense que face à cette difficulté, la tendance générale sera de proposer un artifice très fréquent en physique : le recours au "**centre de gravité**"; la force serait alors égale à g.2.18/36 = g (unités de force), ce qui parait tout à fait raisonnable, puisqu'il y a une sorte de compensation entre les forces qui s'exercent à droite du centre et qui sont plus fortes, et celles qui s'exercent à gauche et qui sont par contre plus faibles!

C'est la raison pour laquelle nous proposons la situation A_2 : dans ce cas, si on concentre la masse au centre, on augmente certainement la force résultante, car les forces de remplacement augmentent en modules et en projections. La force 4g que l'on obtiendrait par ce procédé serait un majorant strict de la force recherchée !

Dans le cas où les arguments qualitatifs précédents ne seraient pas suffisants pour convaincre certains étudiants de l'inadéquation de cette règle du centre de gravité pour résoudre ce type de problème, nous avons envisagé une troisième situation dans laquelle les calculs peuvent être menés jusqu'au bout et peuvent enfin pour ces étudiants disqualifier définitivement cette méthode du centre de gravité.

situation A3:



Ici la force F_3 = g.2.9/9 + g.2.9/81 = 20/9.g (unités de force) est plus de deux fois plus grande que le résultat obtenu par la règle du centre de gravité !

Nous espérons alors avoir placé l'étudiant devant la NECESSITE de trouver une procédure plus élaborée pour résoudre ce problème .

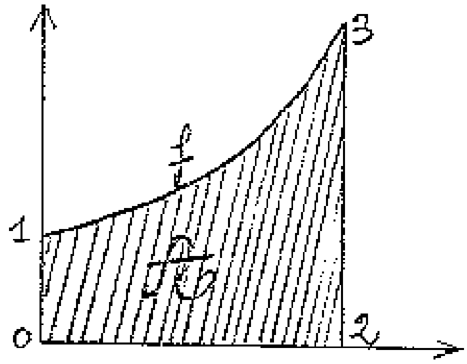
La résolution du problème A_1 passe par la mise en oeuvre explicite par les étudiants des deux idées directrices fondamentales de ce concept: **découpage et encadrement**. En ce sens, nous pensons que la situation A1 est **réellement constitutive du concept intégrale**.

Ce qui se passerait si on "poussait plus loin "ce découpage n'est pas très simple à voir sur le plan numérique, car la fonction que l'on "intègre" n'est pas explicite. C'est la raison pour laquelle nous ne souhaitons pas dans un premier temps exploiter cette situation-problème à fond et préférons passer à une autre situation-problème qui mettra mieux en évidence le lien **découpage-encadrement-passage à la limite !**

B)2ème situation-problème proposée: AIRE DELIMITEE PAR UNE PORTION DE COURBE

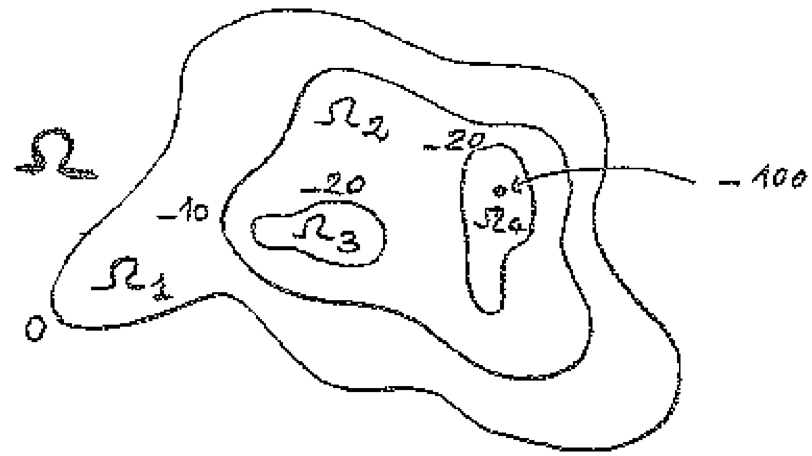
$f(x) = \sqrt{1+x^3}$

$\mathcal{A} = ?$



Ici l'outil "calcul de primitive" ne fonctionnant pas, l'étudiant est très fortement incité par la situation à **réinvestir l'idée "découpage et encadrement"** . La fonction à intégrer étant explicite et de plus monotone, des encadrements très simples peuvent être donnés sur chaque sous-intervalle . L'idée vient alors d'effectuer des découpages en 2,4,10 et, à l'aide d'une calculette programmable, en 100 ou en1000 etc., car par sommation des encadrements, on peut très naturellement obtenir un encadrement global avec majoration de l'erreur commise de la forme E/2, E/4 , E/10, E/100, E/1000 etc.. montrant que le procédé est convergent .

C) 3ème situation-problème proposée :VOLUME D'UN ETANG DONNE SUR UNE CARTE INDIQUANT LES LIGNES DE NIVEAU



L'objectif de la situation de l'etang est triple :

1)renforcer la procédure "découpage et encadrement"

2)montrer que l'intégrale n'est pas indissociable de la variable réelle(cas des deux exemples précédents)

3)**préparer le terrain** par des notations et un vocabulaire adapté pour une **première modélisation du problème** : nous avons remarqué dans des expérimentations antérieures qu'**il y a le plus souvent rupture sans réinvestissement**,lorsque l'on passe des quelques exemples introductifs à la définition mathématique de l'intégrale ; la situation de l'étang a donc pour objet d'**éviter cette rupture.**

Modélisation des situations A, B ,C : Définition méta-mathématique de la procédure intégrale

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$et $f : \Omega \dashrightarrow \mathbb{R}$ un phénomène qui produit un résultat numérique $R=R(\Omega,f)$, satisfaisant aux deux conditions suivantes:

1) ADDITIVITE:

Si on opére une subdivision Δ de Ω, $\Delta=(\Omega_1,\Omega_2,\ldots\ldots\Omega_n)$, $\Omega=\cup\Omega_n$, le résultat global R est la somme des résultats partiels R_i :

$$R(f,\Omega)=\Sigma R(f,\Omega_i)$$

2) ENCADREMENT:

Sur chaque sous-région Ω_a on a l'encadrement:

$$\mathrm{mes}(\Omega_a).f_a^- \leq R(f,\Omega_a) \leq \mathrm{mes}(\Omega_a).f_a^+$$

où : f_a^+ est un majorant de f sur Ω_a

f_a^- un minorant de f sur Ω_a,

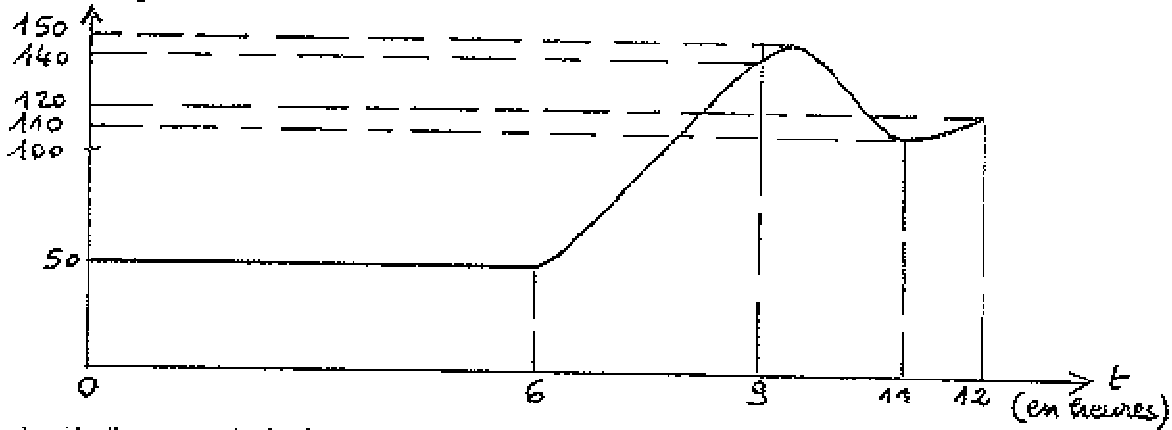
$\mathrm{mes}(\Omega_a)$ est suivant les cas la longueur, l'aire, le volume de Ω_a ,

alors, "dans la majorité des cas ", **les mathématiciens peuvent prolonger cette procédure de découpage et d'encadrement et, par un passage à la limite, déterminer un unique nombre réel appelé intégrale de f sur Ω, noté $\int_\Omega f$, satisfaisant tout encadrement issu d'une subdivision Δ et fournissant par conséquent le résultat R** recherché.

A partir de cette première modélisation, nous proposons encore deux situations-problèmes :consommation de courant et l'écluse.

D) 4ème situation-problème proposée :CONSOMMATION DE COURANT

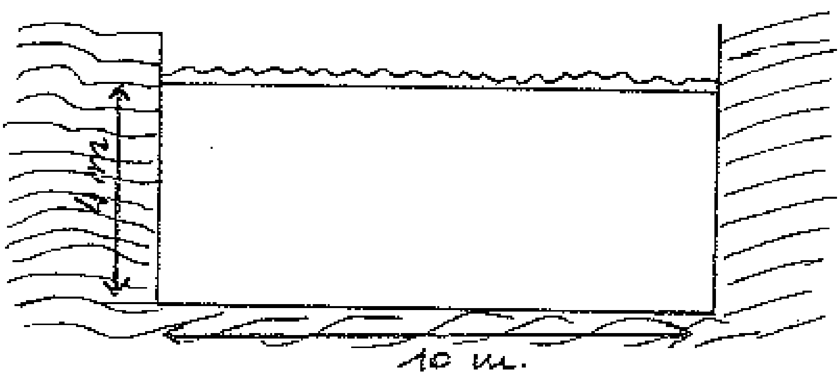
Question :Quelle est la consommation de courant d'un groupe de maisons desservies par le réseau sous 220 V et dont l'intensité entre 0 et 12h est donné par le diagramme suivant?



Il s'agit d'une part de faire fonctionner la modélisation précédente dans une situation particulièrement simple, et d'autre part de détacher l'intégrale des situations spatiales dans lesquelles sont placés les exemples précédents, afin de la considérer dans une de ses utilisations les plus fréquentes : l'évaluation de phénomène variable au cours du temps. .

E) 5ème situation-problème proposée :L'ECLUSE

Question: quelle est la force exercée par la pression de l'eau sur cette écluse verticale rectangulaire de 10 m. de base et de 4 m. de hauteur d'eau ?



Il s'agit de donner une première justification à la pratique suivante : même si dans sa signification profonde l'intégrale se conçoit mieux sur $\mathbb{R}^2$, on cherche néanmoins le plus possible à se ramener (parce que c'est techniquement plus facile) à l'étude et au calcul d'intégrales de fonctions de variable réelle. De plus nous pensons que la **méthode du physicien.** qui consiste à choisir le mieux possible ses variables de façon à se ramener à chaque fois qu'il le peut à des intégrales simples,**est très fortement productrice de sens** sur ce que représente la procédure intégrale .

Une fois présentées ces cinq situations constitutives et leur modélisation, nous demandons aux étudiants de reprendre la première situation :"**force d'attraction**" et de la **confronter au modèle** par le questionnement suivant:

-quel est le domaine Ω ?

-quel est le phénomène "densité de force" que l'on "intègre"?

-les encadrements que nous avions effectués en concentrant la masse à une extrémité ou à une autre correspondent-ils aux encadrements du modèle ?

Ces confrontations entre le début de modélisation et les situations constitutives nous sont apparues comme indispensables pour éviter la rupture qui se produit habituellement auprès de la majorité des étudiants lorsqu'on passe des situations concrètes d'introduction de l'intégrale à la théorie mathématique.

Nous pouvons affirmer que cette confrontation a été payante, en ce sens que (contrairement à des expérimentations antérieures ayant voulu faire l'économie de ces retours en arrière) le "**système didactique amphi**" i.e. "**le système dynamique enseignant-étudiants en situation de recherche et de débat**" est arrivé assez naturellement à la définition suivante de l'intégrale:

DEFINITION DE L'INTEGRALE DES FONCTIONS BORNEES SUR UN INTERVALLE BORNE DE IR

Soit Δ une subdivision de $\Omega=(a,b)$: $\Delta=(x_0=a\leq x_1\leq x_2 ......\leq x_n=b)$,on appelle **sur-évaluation de l'intégrale** (potentielle)de $f:\Omega$----->R,toute quantité de la forme: $S^+_{f,\Delta}=\Sigma_j f^+_j.|U_j|$

dans laquelle f^+_j est un majorant de f sur l'intervalle $U=[x_{j-1},x_j]$;

et de même pour les sous-évaluations $S^-_{f,\Delta}$..........

On note $\int^+_{f,\Omega}$ l'ensemble de toutes les sur-évaluations de l'intégrale de f sur Ω ,et $\int^-_{f,\Omega}$..............

On remarque que ces deux sous-ensembles de R ont la disposition suivante:

$\int^-_{f,\Omega}$ Intégrale potentielle $\int^+_{f,\Omega}$

On déclare que **f est intégrable sur Ω** si et seulement si les deux ensembles $\int^-_{f,\Omega}$ **et** $\int^+_{f,\Omega}$ **sont "infiniment proches"**

On appelle intégrale de f sur Ω l'unique nombre réel ∂ vérifiant :

$\int^-_{f,\Omega} << \{\partial\} << \int^+_{f,\Omega}$, on la note $\partial=\int_\Omega f(x)\, d\Omega(x)$.

LE CONTRAT DIDACTIQUE EN VIGUEUR AU COURS DE CES SEQUENCES

Les séquences que nous vous présentons ci-après se sont déroulées dans un amphi de deug a1 d'une centaine de personnes ayant explicitement passé le contrat que l'on pourrait appeler "**transposition du débat scientifique** "et dont les principales modalités sont les suivantes:

-l'enseignant pose au tableau des problèmes que les étudiants **peuvent aborder avec leurs seules connaissances antérieures, mais ne peuvent résoudre complètement,**

-après un temps important de recherches individuelles ou par petits groupes , les étudiants sont invités à formuler les **conjectures** que la situation leur suggère;

-ces conjectures sont écrites telles quelles au tableau par **l'enseignant qui s'interdit de porter un quelqonque jugement sur l'intérêt ou la validité de ces propositions et fait très attention pour ne rien laisser paraitre,**

-lorsque **l'enseignant** estime l'ensemble des conjectures proposées suffisamment riche , il **organise le débat** à leur sujet:

quelles sont les conjectures qui vous semblent exactes, fausses, hors sujet, quelles sont celles qui vous paraissent les plus intéressantes ? etc. etc.

-pour chaque question importante, **les étudiants sont invités à prendre parti** par le biais d'un vote; les résultats du vote sont écrits à côté des conjectures, les voix de ceux qui n'arrivent pas à prendre parti sont répertoriées dans la rubrique : " n'arrivent pas à prendre une décision sur cette assertion",

-l'obligation qu'ont les étudiants de prendre parti est tout à fait fondamentale,

-pendant tout un temps l'enseignant se borne à recentrer le problème et à officialiser les propositions des étudiants, i.e. **écrire au tableau les éléments de preuve ou les contre-exemples,** de façon à ce que la discussion ne se déroule pas dans le vide, en aparté ou confidentiellement entre le professeur et les deux premiers rangs.

Tout en veillant à ce que le débat ne parte pas dans toutes les directions, **l'enseignant accepte que son plan soit fortement modifié** par l'étude d'une question qui surgit de la discussion et s'impose avec force.

-A terme l'enseignant effectue la synthèse des résultats obtenus ou des démarches de raisonnement; il **institutionnalise** les résultats à retenir, mais il n'adopte cette attitude qu'après une importante période de recherche et de propositions de la part des étudiants, ceci de façon à éviter **la fausse dévolution classique du problème**, dévolution dans laquelle le maître pose des questions très ouvertes, questions auxquelles personne ne répond ,car chacun sait qu'avant même d'avoir pu réaliser pleinement de quoi il s'agit, il (le maître) apportera une réponse achevée .

Les étudiants doivent savoir que la résolution du problème est à leur charge et que **leurs propositions exactes ou inexactes** sont les ingrédients **nécessaires** sans lesquels "l'amphi" (système dynamique enseignant-étudiants en situation de recherche et de débat) ne peut **provoquer des apprentissages** .

-Dans cette démarche, l'enchaînement des propositions habituellement dominé par la logique et la cohérence de la mathématique est ici structuré par une sorte de **logique et de cohérence épistémologiques**: les dificultés n'apparaissent pas toujours aux endroits et de la façon que l'on pourrait raisonnablement souhaiter, mais là où "l'**amphi de ce jour**" les ressent. Il s'avère qu'avec un cheminement parfois surprenant, la majorité des propriétés vraies ou fausses arrivent au bout du compte à être discutées, et que les **problèmes fondamentaux sont toujours franchements abordés**.

Cette procédure n'est **lente qu'en apparence**, car elle permet à propos de l'introduction d'un concept d'en remettre en cause beaucoup d'autres et par là de provoquer approfondissement et stabilisation des connaissances antérieures .

C'est **dans l'optique de ce contrat que doivent s'interpréter les notes qui suivent**. Ces notes, prises pendant les six premières séances de cours par un membre du groupe de recherche, donnent un bon aperçu de la pratique de ce débat scientifique, même si parfois il est difficile de comprendre ce qui se passe exactement car certaines interventions ou un certain climat n'ont pu être totalement retranscrits par cette prise de notes sur le vif. C'est la raison pour laquelle nous complétons ici ou là par quelques commentaires a posteriori dans le but d'aider le lecteur-observateur à mieux situer les enjeux du moment .

Nous nous sommes principalement attachés à l'élaboration et à la réalisation des premières séquences qui portaient sur l'émergence des idées directrices du concept d'intégrale,par et dans les situations constitutives. Nous nous proposons donc maintenant de faire un "zoom" sur la première séance, capitale à cet égard.

I - Nous développons d'abord la stratégie mise en place à priori.

II-Puis nous rapportons le déroulement in vivo de cette séance pour lequel nous proposons préalablement une lecture orientée (mettant en lumière les faits qui nous intéressent),laissant ensuite le lecteur se faire sa propre opinion sur le script de la séance soumis toutefois ,pour plus de lisibilité, à une grille simple d'analyse.

III-Enfin nous confrontons le déroulement effectif à la stratégie a priori , et concluons sur les liens entre:

-les situations proposées
-les idées directrices de découpage, encadrement, passage à la limite
-les modalités du débat scientifique.

I LA STRATEGIE A PRIORI

Le plan succint, donné plus loin, de cette stratégie met en regard les situations A_1, A_2, A_3, B déjà décrites avec l'objectif didactique principal assigné, ainsi que les différentes réponses attendues.

On peut voir dans ce plan, que les situations A_1, A_2, A_3 doivent aboutir dans un premier temps, au rejet d'une procédure séduisante par sa simplicité mais inadéquate (le recours au centre de gravité) et poser le problème d'utilisation d'une formule ponctuelle à des éléments non ponctuels. Nous varions les approches de la situation-mère pour un rejet tant qualitatif que quantitatif.

Dans un second temps, l'espoir de trouver F_1 exactement et rapidement par la formule étant abandonné, le problème ne l'est pas pour autant. Entre le tout (la valeur exacte, $F_1 =$) et le rien (F_1 inconnue), réside un moyen terme : un ensemble de possibles pour la valeur F_1 ($F_1 \in I$,intervalle de IR)

En A'_1 l'enseignant relance la recherche et l'étude de F_1 par la question: "Peut-on avoir une idée approximative ou encore un ordre de grandeur de F_1?". Les mots "encadrements", "majoration", "minoration",sont bannis de la consigne car nous voulons laisser aux étudiants l'initiative du recours aux idées directrices

En A''_1 la tâche soumise, trouver un meilleur encadrement, nécessite chez l'étudiant pour sa réalisation

1) de concevoir le principe de découpage
2) de l'articuler avec celui de l'encadrement.

En A'''_1 la dernière question : "peut-on obtenir un encadrement encore meilleur?" vise à introduire, non une tâche numérique, mais un débat qualitatif et anticipatif sur les conséquences pour la connaissance de F_1,du découpage réitéré et de l'encadrement associé.

Nous tenons expressement dans la situation A, à évincer toute tâche algorithmique au profit d'une compréhension qualitative des idées directrices de découpage et d'encadrement.

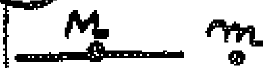
Nous désirons individualiser nettement les différentes idées directrices du concept d'intégrale et pour cela mettre en évidence le découpage et l'encadrement en repoussant momentanément le passage à la limite.

Par la situation B nous voulons simplement à partir de la mise en échec du recours à une primitive, susciter le réinvestissement des idées de découpage et d'encadrement avec une réalisation numérique à faire chez soi pour la seconde séance.

$\vec{F} = -G \dfrac{mM}{r^2} \vec{u}$

Soulever le pb de l'utilisation d'une formule

(A1)

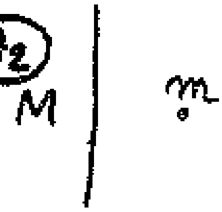


$F_1 = ?$

- recours au centre de gravité $F_{1G} = G$
- on ne peut pas faire $r = ?$
- intégrale $F_1 = 4/3\, G$

Rejeter qualitativement le principe du centre de gravité

(A2)



$F_2 = ?$

- recours au centre de gravité $F_{2G} = G$
- adaptation du centre de gravité
- rejet du centre de gravité $F < F_G$
  car 1) On minimise r
  2) On équipollise les forces

Rejeter quantitativement le principe du centre de G.

(A3)

$F_3 = ?$

- recours au centre de Gravité F_{3G}
- $F = F_1 + F_2 \neq F_{3G}$
  $= 20/3\, G$

→ rejet du centre de gravité sur A_3
sur A_1

Institutionnaliser la défaite du principe du centre de Gravité

(A'_1) Ordre de grandeur de F_1 ?

Susciter des encadrements (mot banni dans la consigne)

- F_{1G}
- $F_1^- < F_1 < F_1^+$

(A''_1) meilleur encadrement ?

Susciter des découpages

- $F_1^- + F_2^- < F < F_1^+ + F_2^+$

(A'''_1) encore mieux ?

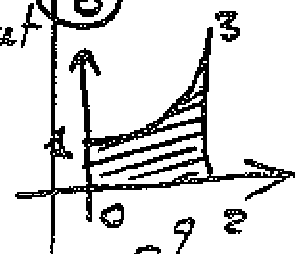
Réitération du découpage et interaction découpage - encadrement

débat qualitatif

Découvrir les limites d'utilisation du calcul des primitives

(B)

- recherche de primitives fausses ou sans aboutissement
- retour au principes d'encadrement et de découpages



S ?

Notons d'abord que la situation A_1 a eu une importance prépondérante et a suscité par elle même, avant l'introduction de A_2, A_3, A'_1, A''_1, un intense débat gravitant autour

- de l'utilisation de la formule
- de la règle du centre de gravité
- des idées de découpage, d'encadrement et de passage à la limite.

Pour cette raison, nous focalisons encore notre regard et notre analyse sur ce seul moment, en renvoyant pour le déroulement entier de la première séance aux notes complètes figurant en annexe.

A/ LECTURE ORIENTEE DU DEROULEMENT

Le débat créé sur la situation A1 révèle différentes conceptions initiales d'étudiants qui interagissent et évoluent vers un consensus final.

Les conceptions initiales

Nous distinguons quatre types de réponses pour traiter le problème non ponctuel de la tige au moyen de la formule ponctuelle :

celle des **Réducteurs** où il va de soi que l'équivalent ponctuel de la tige, c'est la masse totale concentrée au centre de gravité

celle des **Analyseurs** qui pointent le problème:

"la force dépend de la distance"
"on ne peut pas la calculer précisément"
"la barre n'est pas ponctuelle"

celle des **Cultivés** utilisant une primitive pour donner le résultat exact 4/3G. Cette résolution s'appuie sur

a) le principe de découpage $F = \Sigma\ F_i$

b) un postulat de validité de la formule pour deux objets dont le diamètre est négligeable devant leur distance

c) une formule primitive:

$$\Sigma h(\xi)(x_i - x_{i-1}) = H(b) - H(a) \quad \text{pour n assez grand}$$

et fait donc l'économie du concept de limite et d'encadrement.

Ces modalités se trouvent dans des explications telles que:

"si on considère la barre comme une suite de tranches et si on met une masse sur chaque tranches ... en nombre suffisamment grand... on trouve 4/3G"

"4/3G , c'est le résultat de $\Sigma\ F_i$"

"il faut diviser la barre en morceaux suffisamment petits pour que la longueur soit très petite devant la distance" les résultats aberrants ou qui nous semblent tels: 24G , 8G

Les interactions entre les conceptions initiales

Le principe du découpage $F = \Sigma F_i$ est réutilisé sous une forme minimum, découpage en deux , pour invalider la régle du centre de gravité.

Cette invalidation est suspecte aux yeux des Cultivés tenants du découpage en n, n suffisamment grand, suspecte d'ailleurs à double titre :

_le découpage en n semble inséparable chez eux de "n suffisamment grand"

_ils sont davantages axés sur la validité du résultat numérique F_1=G que sur la validité de la règle centre de gravité dont il découle.

Le principe du centre de gravité, devant les contradictions internes que lui oppose le principe du découpage, plie mais ne rompt pas. Tel un boa il absorbe et digère même son contradicteur:

_la valeur qu'il fournit n'est peut-être pas exacte mais c'est une approximation...

_cette approximation est susceptible de s'améliorer avec un découpage...

_le découpage réitéré donne naissance à une suite d'approximations de plus en plus fiables...

...susceptibles même d'atteindre la valeur exacte à la limite.

Enfin, c'est la nécessité de rejeter certaines valeurs parmi les nombreuses proposées qui permet l'émergence du principe d'encadrement:

_"8G c'est faux; si les 18kg sont à 3 mètres de la masse de 2 kg , la force est alors 4G. Donc la force que l'on cherche est strictement inférieur à 4 kg".

Le consensus final

Le terme employé est peut-être trop fort, car il ne s'agit pas d'un consensus affirmé comme tel mais simplement d'éléments que nous décelons dans l'analyse postérieure au débat.

Cette réserve étant faite, nous notons qu'un accord se dégage au terme des interactions autour:

_des deux idées directrices de la procédure intégrale:

découpage
encadrement

_d'une nouvelle méthode: suite d'approximations, par fusion:

du principe de découpage
et de la règle du centre de gravité.

B/ SCRIPT ET GRILLE D'ANALYSE

Nous avons retranscrit les notes prises sur le vif dans une grille ayant principalement deux volets en regard: le script et son analyse.

Chaque volet occupe une moitié, gauche ou droite, de la page.

La partie droite réservée à l'analyse comporte plusieurs colonnes:

_la dernière, très large, est relative au "débat scientifique".Nous y notons sans grande codification pour l'instant, les éléments intéressant le fonctionnement du débat.

_les six autres colonnes sont relatives aux conceptions concernant:

soit les principes de la procédure intégrale

colonne 1 : découpage
colonne 2 : encadrement
colonne 3 : limite

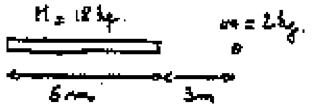
soit l'application de la formule ponctuelle:

colonne 4 : il y a un problème !
colonne 5 : prendre le centre de gravité
colonne 6 : la formule est valide si le diamètre est négligeable devant la distance

Nous signalons par une croix dans la colonne correspondante la présence dans le script de l'une ou l'autre de ces conceptions.

Voici donc la grille appliquée à la situation A1.

1)

		Découpage	Encadrement	Limite	Formule: ge dipôle	Formule: C. de quantité	Formule: Σ G x	Débat Scientifique.
M	On va voir sur cette formule. $\vec{F} = \frac{G m M \vec{u}}{r^2}$							
	On va partir sur un problème.							
	On se donne une tige de métal qui fait 6 mètres de long et pèse 18 kg. Quelle force s'exerce entre cette tige et une masse ponctuelle m de 2 kg à 3 mètres de l'extrémité de la tige et dans son prolongement.							
	il donne au tableau.  $\vec{F}$?							
X	On peut supposer la masse de la tige ponctuelle en la plaçant au milieu					X		
M	Comme vous voulez, vous avez 5 mn de réflexion.							organisation et dévolution
M	Ceux qui peuvent avoir déjà résolu le problème, vous essayez de bien réfléchir à l'argumentation							centration sur une argumentation
M.	Quelles sont les réponses proposées pour $\vec{F}$?							
X	– G, non ça c'est la norme ; – G $\vec{u}$							
M	d'autres ?							
X	– 8 G $\vec{u}$							
X	– G/6							
G	on ne peut pas le calculer précisément.				X			
X	vous avez écrit $F = \frac{G m M \vec{u}}{r^2}$ donc ça ne fait 8 G ou 8 G $\vec{u}$.							
M	On va régler tout de suite le problème de $\vec{u}$; la force s'exerce dans le prolongement de la droite on va faire la discussion sur le module de $\vec{F}$ et écrit: $\lvert\vec{F}\rvert$ | G | 6G | G/6 | On ne peut pas calculer précisément.							régler les problèmes secondaires pour centrer le débat
X	Ce qui me gêne c'est le "précisément."							demande d'éclaircissement
G	On ne peut pas le dire car la force dépend de la distance et elle est beaucoup plus faible à l'autre bout.				X			
X	Pour la masse de 2 kg elle est parfaitement définie, pour la barre ce n'est pas ponctuel.				X			
ch.	Si on considère la barre comme une suite de tranches et si on met une masse sur chaque tranche...	X						
M.	répond en coupant : l'idée c'est de sectionner la barre..							
ch.	on en connaît suffisamment quand pour que...	X						
M.	avant d'aller plus loin .. y a-t-il d'autres propositions numériques ?							suspension momentanée du débat pour obtenir toutes les propositions possibles y compris les valeurs "aberrantes" pour avoir le maximum d'étudiants
X	24 G							

		Découpage	Encadrement	Limite	somme : Σ à 1 pt	[illegible]	G à x	Débat scientifique.
4) M	Qui adhère à la proportion. G 8G 9G 24G ne se sait pas .... ~10 ~8 ~1 ~3 ~10.							sondage : technique d'explication assurer le + de monde possible à ce qui se passe
X	On a trouvé 4/3 G							
M	Qui adhère à 4/3 G ? ~10							
M	Ça ne fait pas le total							
X	Une autre solution a été proposée. $\lvert\vec{F}\rvert = \sum_{i=1} \lvert\vec{F_i}\rvert$	X						
M.	qui y adhère ? ~50.							
M.	Réfléchissez à celles que l'on peut rejeter immédiat.							organisation du débat : interaction
X	La somme $\Sigma\lvert F_i\rvert$ je ne la mettrait pas dans le tableau : c'est une méthode pas un calcul.							
X	Mais nous, on dit que 4/3 G c'est le résultat de $\Sigma\lvert F_i\rvert$.	X						
	Il faut diviser la barre en morceaux suffisamment petits pour que la longueur soit très petite devant la distance.	X					X	
M	Vous proposez "pour n suffisamment grand". Sur les réponses numériques, quelles sont celles que l'on peut rejeter ? 2 mn de réflexion.							organisation du débat : interaction
X_2	Pour obtenir G, il faut prendre le centre de la barre. Si on imagine qu'on coupe la barre en 2 et qu'on prend les centres de masse de chaque barre et qu'on calcule les forces sur chacune des deux avec la même méthode alors si on ajoute les 2 forces on n'obtient pas du tout le même nombre... la somme des 2 n'est pas égale à G	X				X		réfutation d'une méthode
M	Qu'en pensez-vous. (Il reprend rapidement les arguments)							dévolution
X	Bravo, ça permet de dire que G n'est pas bon							appréciation de la réfutation
X	Ça dépend							réticences.
X	Pour montrer que la méthode est fausse on l'utilise et on dit qu'elle est fausse.							valeur d'un raisonnement.
X	Ça revient à $\Sigma\lvert F_i\rvert$ avec n=2 c'est un peu pareil.							réticences.
X	C'est pas en calculant avec 2 qu'on montre que G est faux. Il ne découpe pas suffisamment.	X						
X_2	Justement c'est une démonstration par l'absurde.							valeur d'un raisonnement.
X	Pour répondre à la question il suffit de démontrer que le centre de gravité des masses M_1 et M_2 est celui du [illegible]. Partant de là les résultats sont différents d'où absurdité	X			X			reprise explicative de la réfutation : centre de gravité

3|

		Découpage	Encadrement	Limite	Formule: 1 pt	Formule: C. de g.	Formule: [illegible]	
M	Qui est d'accord pour dire que G est aussi faux !							Débat scientifique. demande prématurée de se prononcer : le débat est en cours
X	En divisant la barre en 3 ou 4 on aurait trouvé des valeurs différentes. On va faire une meilleure approximation.	X						le débat continue
X	La limite aura de fortes chances d'être la bonne valeur			X				
M	Donc en appliquant cette règle du centre de gravité et en la poursuivant .. on obtient un meilleur résultat ?							
X	Si on prend n grand.	X						
M	Pour G on met un point d'interrogation !							
X	C'est faux la dimension de la barre n'est pas négligeable par rapport à la distance.						X	
M	L'argument est plutôt philosophique .. Qui adhère à $\boxed{G\ ?}$ contre. ≈ 50 quelques uns							
X	propose un procédé qui montre qu'en itérant cette règle, la suite est croissante et on dépasse G	X		X		X		
M	C'est curieux de prendre quelque chose de faux pour montrer que quelque chose est faux							interprétation ≠ enseignant/étudiant
X	Les résultats sont vrais ou faux... tous							relance du débat sur les résultats numériques.
X	8G c'est faux. Si les 18 kg sont à 3 m de la masse de 1 kg, la force est alors 4G		X					
M.	Ça revient à concentrer toute la masse à une extrémité							
X	Donc la force que l'on cherche est strictement inférieure à 4G							
M	écrit $\lvert\vec{F}\rvert < F^{+} = 4G$							
X	Et on trouve un minorant en concentrant de l'autre côté .... ça n'exclut pas G		X					
M	écrit $\lvert\vec{F}\rvert > F^{-} = 4/9\,G$							
M	On considère que nous sommes d'accord sur ces points. Cela permet d'éliminer 24G et G/6 [illegible] 4/36							organisation : nettoyage
	Que pensent ceux qui ont dit "on ne peut calculer précisément" ?							organisation : dévolution
X	Il faut trouver que la suite a une limite			X				
X	On peut la mesurer. (la force)							retour au contexte physique
I	On mesure avec des masses si faibles que ça. On a des précisions relatives de 10^{-10}							
M	Cette force existe. Le problème de I est de trouver un dispositif pour la mesurer, celui des maths est de donner un modèle							
	On peut passer par le calcul direct. On va voir le modèle intégrale plus pratique que la suite							

3_ CONFRONTATION ENTRE LA STRATEGIE A PRIORI ET LE DEROULEMENT

Globalement les situations A et B ont bien suscité auprès des étudiants la mise en oeuvre des principes retenus:

_interrogation sur l'utilisation d'une formule

_règle du centre de gravité

_principe de découpage et d'encadrement

Ces principes sont apparus précocément au cours du débat engagé dans la situation A_1 qui d'une certaine façon a rendu caduques les situations A_2, A_3, A'_1, A''_1 qui étaient un peu les "forceps" de leur émergence.

La mise en oeuvre de ces principes par le débat a indiscutablement donné du poids à ces principes par les rôles diverses qu'ils y ont joué et leur interaction:

A/ Pour les principes que la stratégie de la séance visait à promouvoir.

Le principe du découpage

_apparu sous une forme complexe, "n assez grand", et étroitement lié à la procédure primitive

_est ensuite détaché de cette procédure, récupéré et simplifié, découpage en deux, pour une réfutation de la règle du centre de gravité

_puis fusionné à cette même règle pour donner la méthode d'une suite d'approximations

Le principe d'encadrement

_apparait pour rejeter des valeurs aberrantes

_et non pour satisfaire à une question de l'enseignant: A'_1

B/ Pour la règle du centre de gravité que la stratégie visait à démolir

_certes il est démoli du fait de son incompatibilité avec le découpage

_mais il résiste et s'intègre à sa propre réfutation pour donner une méthode pertinente d'approche de F_1

Ainsi la logique de la stratégie a priori qui consacrait la défaite du centre de gravité avant de promouvoir le découpage et l'encadrement a été battu en brèche par le déroulement réel. La stratégie a priori n'a pas suffisament compte de la dynamique d'un débat.

CONCLUSION PROVISOIRE

Nous retenons les trois faits saillants :

1/ L'émergence des idées directrices, découpage et encadrement, a été redevable du "débat scientifique" sur la seule situation A_1 et elles y ont gagné un relief certain.

2/ La consécration des idées directrices ne s'est pas faite sur l'exclusion de la règle du centre de gravité mais au contraire , c'est la combinaison du découpage et du centre de gravité qui en créant une suite d'approximations risque d'exclure le principe d'encadrement, ou tout au moins la combinaison du découpage et de l'encadrement.

3/ Pour recentrer le débat sur la combinaison recherchée du découpage et de l'encadrement, il faut l'intervention de l'enseignant et le recours au "forceps" A''_1: comment obtenir un meilleur encadrement ? qui replace au coeur de la préocupation commune les principes "élus". Ils réapparaissent de ce fait immédiatement dans la situation B qui conclue la séance.

ANNEXES

Voici d'abord en résumé l'essentiel des contenus mathématiques abordés au cours de ces douze séances :

1) Introduction de la procédure intégrale comme **modélisation de situations physiques** (leçons 1 et 2).

2) Définition simple mais rigoureuse de l'**intégrale de Riemann** (leçons 3, 4 et 5) :

- les grandes classes de fonctions intégrables: fonctions en **escaliers, monotones, fonctions regulières;**

- le problème des fonctions continues qui sont intégrables pour une raison qui échappe un peu aux étudiants de ce niveau (uniforme continuité);

-le problème du "**presque partout**" i.e : vrai en dehors d'un ensemble fini, et le fait que toute fonction bornée n'est pas forcément intégrable.

3) L'algèbre des fonctions intégrables sur un intervalle borné de IR et **l'inégalité fondamentale** : $\int_D f \leq mes(D).Sup_D|f|$ sur la forme linéaire $f \dashrightarrow \int D f$ (leçons 7, 8 et 9).

4) Les propriétés fondamentales de **la fonction intégrale dépendant de la borne supérieure** : croissance, continuité, régularité, dérivabilité, le théorème fondamental (leçons 7, 8, 9).

5) Quelques **compléments donnant du sens au concept d'intégrale** : intégrales-limites, séries et intégrales, stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur un domaine D de mesure non nulle, etc.

1e Leçon . 1

14.01.85 (1ère séquence)

Introduction par un physicien, Bonfaillard

Etude de modèles math pour la mise en équation de certains pb.

Notions sur la gravitation

- Copernic
- Kepler
- Newton $F = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}$ $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI

Cavendish 1798.

Marc L. G est suffisamment petit pour que lorsqu'on pose 2 objets sur la table, il n'y a pas de...
Ce qu'on peut repérer si r diminue de moitié, la force est x par 4.

On va rester sur cette formule $\vec{F} = G\frac{mM}{r^2}\vec{u}$

On va partir sur 1 pb. :

Question : on se donne une tige de métal qui fait 6 m. de long pèse 18 Kg
Quelle force s'exerce entre cette tige et une masse ponctuelle m de 2 Kgs à 3 mètres de l'extr. de la tige ds son prolongement.
Quelle est la force F qui s'exerce

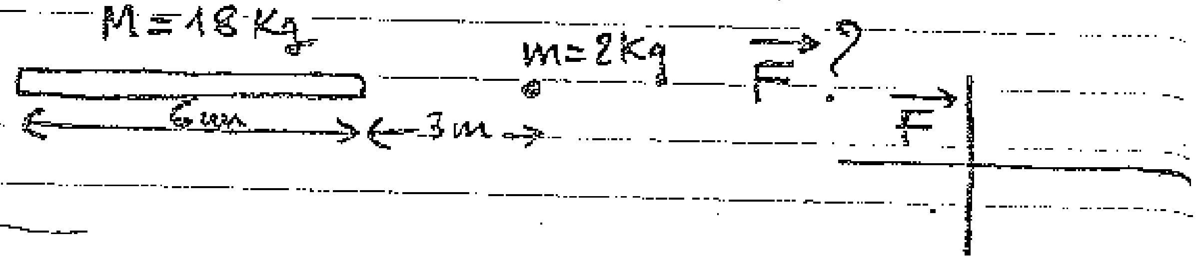
X_1 : on peut supposer que la barre on prend une masse ponctuelle qu'on place au milieu

M. Comme vous voulez 5mn de réflexion.

a) Il s'agit là d'une pratique nécessaire au débat scientifique ne pas laisser se développer trop précocement une argumentation ou un début de solution, faute de quoi la majorité des étudiants ne peuvent jamais se saisir des problèmes puisqu'ils savent qu'il y aura toujours quelqu'un de plus rapide pour apporter une solution avant eux!

Pour faire respecter cette règle, "m." quitte le devant de la scène et circule dans l'amphi pour stimuler les recherches individuelles ou par petits groupes, mais là encore il s'interdit de regarder de trop prés ce qui se passe car sinon son avis, voire son arbitrage, risque d'etre sollicité et, s'il commence à rentrer dans une discussion de petit groupe, cela va casser immediatement la dynamique de recherche auprés des étudiants qui n'ont pas encore veritablement trouver de solution, parcequ'ils vont avoir l'impression que la solution est en train de se construire en dehors d'eux (au tableau est écrit) (1e leçon 2)

$$\vec{F} = G\,\frac{m.M}{r^2}\,\vec{u}$$



M. ceux qui pensent avoir déjà résolu le pb, vous essayez de bien réfléchir à une argumentation.
(qqs mns)
Quelles sont les réponses proposées pour $\vec{F}$

Ha : – G, non ça c'est la norme : – $G\vec{u}$

M. autre ?

* – $8G\vec{u}$

– $G/6$

G1 * – on ne peut pas la calculer précisément

G'1 * vous avez écrit – G m... (montre la formule), donc 8G ou $8G\vec{u}$

M. on va régler tout de suite le pb de $\vec{u}$, la force s'exerce ds le prolongt de la droite – on va faire la discussion sur le module de F
efface un peu et écrit

$\lvert\vec{F}\rvert$	G	8 G	G/6	on ne peut pas calculer précisément

X ce qui me gêne c'est le "précisément"

G1 on ne peut pas dire car la force dépend de la distance et elle est beaucoup plus faible à l'autre bout.

X pour la masse de 2Kg elle est parfaitement définie, pour la barre, ce n'est pas ponctuel.

Ch – si on considère la barre comme une suite de tranches et on met une masse sur chaque tranche

M- reprend en redisant : l'idée c'est de sectionner la barre

Ch – en un nbre suffisamment grand pour que...

(1e leçon 3)

M. avant d'aller plus loin, y a t'il d'autres propositions numériques ?

b)Toujours dans le sens indiqué en a) il s'agit d'une technique nécessaire pour entretenir la dynamique et la richesse du débat et pour éviter qu'il ne se concentre sur quelques étudiants :faire attendre les propositions de démonstrations tant que n'ont pas été collectés tous les résultats.

Il est bien évident qu'un résultat exact suivi d'une argumentation sérieuse coupe court à toute possibilité de voir apparaitre les solutions "aberrantes" dont la discussion est néanmoins extremement fructueuse car c'est elle qui permet de chasser les idées fausses sur la question!

X. 24 G -

M. Qui adhère à la proposition G ~ 20   24 G 3

8 G ~ 8

G/6   1

on ne peut   10

G1 on a trouvé 4/3 G (autre proposition)

M qui adhère à $\frac{4}{3}$ G ~ 10 (dont des bons du groupe)

Ça ne fait pas le total.

X - une autre solution a été proposée $|\vec{F}| = \sum_{i=1}^{m} |F_i|$

M - qui adhère ~ 50.

réfléchissez à celles que l'on peut rejeter immédiatement

X - la somme $\sum |F_i|$, je ne la mettrais pas ds le tableau c'est une méthode, par un calcul.

G1 - mais nous on dit que $\frac{4}{3}$ G c'est le résultat de $\sum |F_i|$

X - il faut diviser la barre en morceaux suffisamment petits pour que la longueur soit très petite devant la distance.

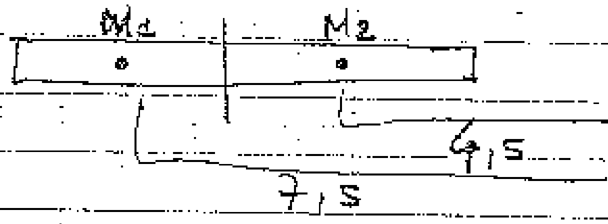
M - Vous proposez "pour n suffisamment grand".

Sur les réponses numériques, quelles sont celles qu'on peut rejeter?

1 mn de réflexion.

X_1 - pour obtenir G, il faut prendre le centre de la barre si on imagine qu'on coupe la barre en 2, pour des raisons de symétrie et on prend les 2 centres de masse de chaque barre et on calcule les forces sur chacune des 2 avec la même méthode -.

M - dessine et écrit



X_1 - alors si on ajoute les 2 forces, on n'obtient pas du tout le même nombre la somme des 2 n'est pas égale à G.

M - Qu'en pensez-vous ? (reprend oralement les arguments)

X - Bravo, ça permet de dire que G n'est pas bon

X' - ça dépend

X'' - pour montrer que la méthode est fausse on l'utilise et on dit qu'elle est fausse !

Br - ça revient à $\Sigma(F_i)$ avec $n = 2$, c'est un peu grossier.

Ch - C'est pas en calculant avec 2 qu'on montre que G est faux

X_1 - justement, c'est une démonstration par l'absurde.

X - Pour résoudre la question, il suffit de démontrer que le centre de gravité des M_1 et M_2 est celui du départ partant de là, les résultats st $\neq$ $\Rightarrow$ absurdité

M - Qui est d'accord pour dire que G est sûrement faux

G - en divisant la barre en 3, 4, on aurait trouvé des valeurs différentes.

M - donc en appliquant cette règle du C de G et en la poussant .. on obtient un meilleur de résultat

Ch - si on prend n grand ...

M - G on met un point ?

(AE Lecon 5)

X - c'est faux, la dimension de la barre n'est pas négligeable / à la distance

M - argument plutôt philosophique
Qui adhère à (G?) ~ 50

contre cette proposition : quelques-uns

X - propose un procédé qui montre qu'en itérant cette règle, la suite est croissante et on dépasse G

M - C'est vicieux de prendre qqchose de faux pour montrer que ce qqchose est faux.

c)à ce niveau il semble bien que "m." n'a pas très envie de donner toute la place qui convient au raisonnement précédent, la raison en est la suivante : lors de la préparation de la séquence didactique les situations A2 et A3 ont été prévues comme nécessaires pour combattre la règle du centre de gravité "m. "veut donc les placer et par suite a tendance à repousser une argumentation quiles rendraient caduques .
En ce sens on peut dire que "m. " ne respecte pas une des règles fondamentales du contrat à savoir : accepter que son plan soit profondément modifié par la force du débat!!!

ch - les résultats sont V ou F tous

G X - 8G, c'est faux $\underset{18\,Kg}{\times}\xleftrightarrow{3m}\underset{2\,Kg}{\times}$ $F = 4G$

M - ce qui revient à concentrer tte la masse à 1 extrémité

Gx - donc la force que l'on cherche est strictement inférieure à 4G

M écrit $|\vec{F}| \leq F^+ = 4G$

GX - et on trouve un minorant en concentrant de l'autre côté

M écrit $|\vec{F}| \geq F^- = \frac{4}{9}G$

on considère que nous sommes d'accord sur ces pts
⇒ cela permet d'éliminer 24G, G/6
il reste $\frac{4}{3}G$

Que pensent ceux qui ont dit "on ne peut calculer précisément ?"

X - il faut prouver que la suite (des subdivisions) a une limite

X' - on peut la mesurer

Dufaillard - oui même avec des masses si faibles que ça - on a des précisions relatives de 10^{-10}.

M - on peut dire que cette force existe le pb. du physicien est de trouver un dispositif pour la mesurer.
le pb. du matheux est de donner un modèle qui permet de satisfaire à la demande

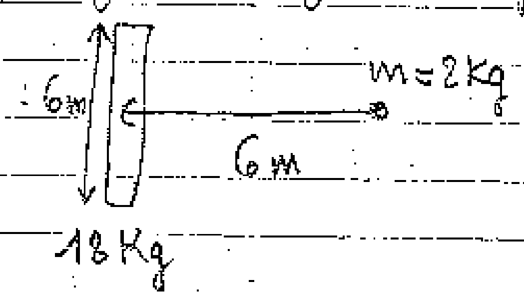
Ch - on peut passer par le calcul direct. On va vers un modèle intégral, plus pratique que la suite.

M - On va arrêter un instant sur cette situation - pb et faire tourner la barre.

d) Visiblement "m." sent de plus en plus les situations A2 et A3 devenir caduques et il précipite leur mise en oeuvre .

La 2° question qu'on se pose :

M dessine au tableau



M - la nouvelle question posée : peut-on évaluer cette 2° force ? $\vec{F_2} = ?$
2 mn.
Quelles sont les propositions numériques ?

G

M. Quelle est la direction de la force ?

X. toujours la même chose

M - raisons de symétrie. D'autres propositions ?

X - encadrement de F_2 : $\frac{1}{4} G \leq |\vec{F_2}| \leq 4G$

X' - $\frac{4}{5} G \leq |\vec{F_2}| \leq G$.

M - ce qui est un encadrement très fin !
est-ce que G est contesté ?
Plus personne ne conteste G.

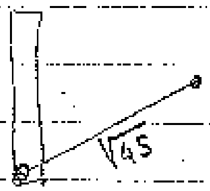
X - pour le 2° encadrement G on l'obtient en concentrant la masse au centre de la barre.

M. écrit $F_2^{+} = \frac{2 \times 18}{6^2} G = G$

Êtes-vous certains de faire une majoration ?

X et M)  la force n'est plus horizontale
on utilise la projection horiz.
et par symétrie, il y a compensation des projections verticales.

X - $\frac{4}{5}$ G n'est pas bon car on avait concentré la masse à une des extrémités.

M -  on obtient alors

$$G \frac{2 \times 18}{45} = \frac{36}{45} G = \frac{4}{5} G$$

Est-ce $\frac{4}{5}$ G est une minoration ?

X - Oui, car si on prend les 2 masses aux extrémités, on trouve exactement $\frac{4}{5}$.

M - en tenant compte des projections ?

X - oui !

M - est-ce que $|\vec{F_2}| \geq \frac{4}{5} G$? le pb est soulevé, non résolu.

On s'arrête 5 mn.

a) Finalement le non respect de la règle "laisser modifier le plan par la force du débat " n'a pas été payant ,l'"amphi" s'est fatigué pendant plus d'une demi-heure sur la situation A2 et finalement "m. s'est retrouvé seul pour mener la discussion!

M. synthèse de ce qui a été introduit.
loi pour des objets ponctuels - on essaie de l'appliquer à des objets qui ne s't pas de taille négligeable / distance.
On a essayé d'encadrer. G est une bonne majoration qui exclue le centre de gravité.
$\frac{4}{5}$ G n'est pas une minoration sûre.
pour se mettre d'accord, 3° situation pb : on remplace par 2 boules reliées par 1 tige sans masse (masses ponctuelles) même si elles n'existent pas vraiment)

9Kg o————o 9Kg o 2Kg
6m 3m

$|\vec{F_3}|$?

2 mn.

M. Quels sont ceux qui pensent "on ne peut calculer précisément" (qui voulait dire "il n'existe pas de procédé simple qui va donner le résultat".)

X. aucun

M. propositions ?

X. $\frac{20}{9}$ G

rien d'autre

M et X. obtenu en sommant les forces sur les 2 masses de 9 Kg.

M. Que devient le C de G. ici, si on l'applique.

X. G

M. c'est plus du double de G $\Rightarrow$ ceci remet en doute la 1° proposition (pour F_1) : $F_1 = G$
la règle du C. et G. est fausse ici.
est-ce que maintenant, pour F_1, vous pouvez me donner un meilleur encadrement (qui ne soit pas ds le rapport 1 à 9. $\frac{4}{9} G \leq F_1 \leq 4\,G$)

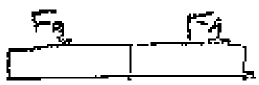
2 mn.

X. $G \leq F_1 \leq 4G$

M. donner une justification

X - On coupe la barre en 2 et on refait des majorations et minorations -

f) Enfin la machine se remet en route, malheureusement on a perdu du temps et des énergies sur A2 et A3, du coup il va falloir bousculer et même étouffer un débat qui démarrait bien pour ne pas dépasser les douze coups fatidiques de midi!



M - $F = F_1 + F_2$ avec $F_1 \leq F_1^+ = G \times \frac{2 \times 9}{9}$

$F_2 \leq F_2^+ = G \times \frac{2 \times 9}{36}$

$F_1^- + F_2^- \leq |F| \leq F_1^+ + F_2^+$

$G\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\right) \leq |F| \leq G\left(2 + \frac{1}{2}\right)$

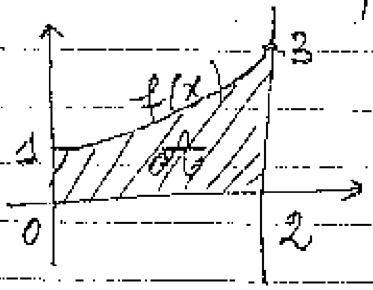
On a un encadrement bien meilleur. on a doublé notre approximation.

Je vous lis le pb suivant :

à faire pour le prochain cours:
- ceux à droite, faites un encadrement de F correspondant à 1 découpage en 4.
- au centre, découpage en 8 (proposé par 1 étudiant)
- à gauche, en 6.

On y reviendra Lundi - exercice à faire maintenant :
Déterminer l'aire correspondant (au dessin) ~~fait~~ : à la surface hâchurée

$f(x) = \sqrt{1 + x^3}$



X - il faut faire une approximation - on obtient $S \leq \sqrt{2} + 6$

X' - je peux critiquer cette solution.

M - plus tard

(1re leçon ...)

X'' – S < 6

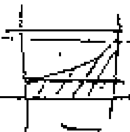
GX''' – S minorée par 2

X – j'ai fait une erreur ce n'est pas $\sqrt{2}+6$ mais $\sqrt{2}+3$

X' – $S > 1+\sqrt{2}$

M – on discute un peu et je renvoie le pb. à la maison

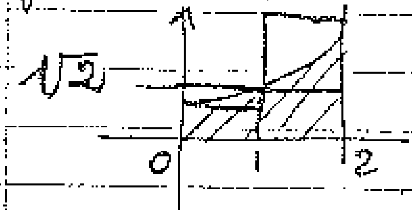
Br – $2 < S \leq 6$ est juste on prend les rectangles



Ch – à condition que vous ayez bien représenté la courbe (si f ↗)

M – les 2 extrêmes, d'où ils viennent ?

X – j'ai découpé en 2 et pris les 2 rectangles



⇒ majoré par $3+\sqrt{2}$

minoré par $1+\sqrt{2}$

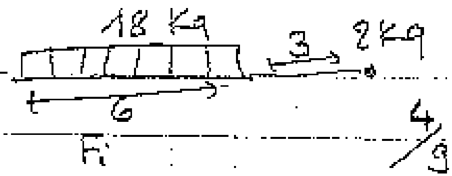
$\Rightarrow 1+\sqrt{2} < S < 2+\sqrt{2}$

M – encadrement bien meilleur

découpage en 4, 10 et 100 à faire à la maison

Cours du Jeudi 17 Janvier 1985. (2e séquence) (2e leçon 1)

M écrit au tableau



$\vec{F}$?

$\frac{4}{3} G \leq |F| \leq 4 G$

F_i

$F = G \frac{mM}{r^2}$ Subdivision de la barre $F = \sum F_i$

$F_i^- \leq F_i \leq F_i^+$

	Subdivision Δ	$\sum F_i^-$	$\sum F_i$	$\sum F_i^+$
en 4 parties égales	→	~~$\frac{57}{10}$ G~~ / 0,96 G	?	1,85 G.
en 6	→	1,07 G	?	1,66 G / 2,6 G
en 8	→	1,1 G	?	1,5 G

M – la somme des forces ? qu'est-ce que vous en pensez ?

X –

M – $\frac{57}{10}$ G ne peut être exact – l'évaluation exacte ?

X – on ne peut pas

M – sur évaluation ?

GX – 1,85 G

M – on considère que les calculs du tableau sont exacts – 1ère analyse des chiffres ?

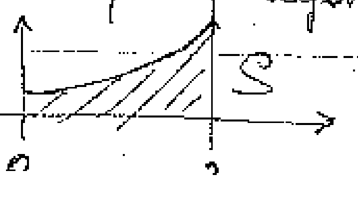
X – l'évolution est logique

M – càd ?

X et M – il y a un resserrement ... on va vers qqchose de plus en plus satisfaisant.

M – les sous-évaluations sont ↗ et les sur-évaluations sont ↘. Je ne vais pas plus loin dans cette analyse – elle rejoint ce que certains avaient dit : si on découpe en n de + en + gd, ça a l'air d'aller dans le bon sens.

La 2e situation pb : regarder la surface comprise entre



$y(x) = \sqrt{1 + x^3}$

(2e leçon 2)

M. on avait obtenu $2\times 1 \leq \mathcal{S} \leq 2\times 3$
une 2e avait été évoquée en coupant l'intervalle en 2. On obtenait :

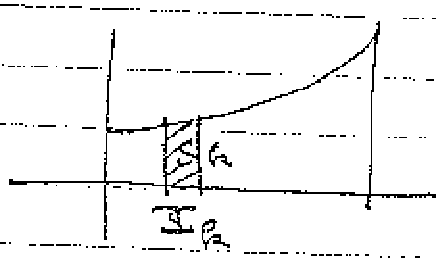
GX. $1+\sqrt{2} \leq \mathcal{S} \leq 3+\sqrt{2}$

M. on était revenu à la question : découper en subdivisions pour obtenir un encadrement de $\mathcal{S}$

subdiv.	minoration $\mathcal{S}$	S	majoration $\mathcal{S}$
4 parties	2,78		3,78
10 "	3,05		3,45
1000 "	3,239		3,2433

? X. quand vous dites 1000 c'est ds [0,2] ou c'est partout ?

M. parle de I_k, S_k



on remplit le tableau

M. est-ce que quelqu'un a à proposer une valeur exacte ?

GX (murmure) 3,24. ((non repris dans la salle))

M. en 10 parties ?

X. 3,05 et 3,45

M. ..

X. en 500, ça fait 3,24

M. qu'est ce que vous obtenez comme ss évaluation

X. je ne l'ai pas fait

M. comment

X. avec la calculatrice

M. vous obtenez une ss. éval ou une sur-éval.

X. une approximation 3,245

M. pour 1000 ?

GX. 3,239 et 3,2433

M - pour le moment, je mets à part le résultat sur 500.
Qu'est-ce qu'on observe au niveau des résultats ?
l'encadrement est de quel ordre de grandeur pour 1000 ?
$S^+ - S^- = 0,02$

+Ch X discussion (à part) sur les imprécisions de la machine

M - remarque sur le résultat obtenu avec 500 ?
X - on ne connait pas la précision de la machine
M - 3,245 est au-dessus de la minoration et au-dessous de la majoration ...

Ch on n'est pas sûr que c'est vrai
en faisant tourner 500 fois, on fait moins d'erreurs qu'en la faisant tourner 1000 fois
M - sur la machine 10^{-7} ou 10^{-8}. c'est un pb. réel
M - si le principe que la machine n'a pas fait d'erreur est accepté, on est garanti que la valeur est ds l'encadrement (3,239 et 3,2433)
on ne va pas plus loin ici ...

Ch X - il ne faut peut-être pas aller trop loin ds le découpage, on accumule une somme d'erreurs de la machine ...

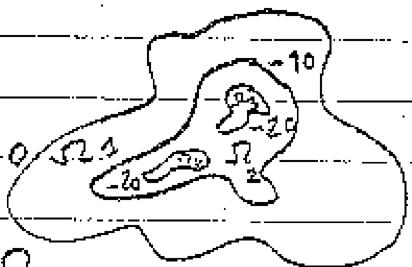
M - pour un temps, on suppose que la machine est parfaite - On aurait à gérer 2 choses difficiles en même temps ...
si vous êtes d'accord, pour un temps on évacue le pb. des erreurs de ~~la~~ machine.

a) Il est probable que si "m." avait embrayé sur les erreurs-machines, l'amphi aurait suivi, mais alors c'en aurait été fait de la procédure intégrale

(3° leçon 4)

M - Je vous propose une 3° situation - pb un peu différente des précédentes.

$\mathcal{E}$



Ω -100

carte

configuration et lignes de niveau

si rien de plus comme ligne de niveau, c'est entre -20 et -30

en Ω_4 un point côté à

M - Question : Quel est le volume V de cet étang $\mathcal{E}$?

2mn.

M - reprécise le pb....

((les étudiants semblent beaucoup travailler))

M - on essaie de mettre en commun..

X - on ne connait pas les surfaces (de Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4)

M : réponse ?

X - puisqu'on a la carte, on peut évaluer

((quelques étonnements))

M - pour répondre à ces objections, on va les supposer connues

ω_1 = aire de Ω_1

ω_i = aire de Ω_i

$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 1000\ m^2 \\ \omega_2 = 500\ m^2 \\ \omega_3 = 100\ m^2 \\ \omega_4 = 75\ m^2 \end{array}\right\}$ si ça peut vous arranger, voilà un exemple d'évaluation des 4 nombres

(5) "m." se rend compte que s'il ne donne pas des valeurs numériques pour les aires w1 ,w2 , ...,il va y avoir un déplacement de problème ; au lieu de réfléchir sur la procédure intégrale les étudiants vont se poser des questions sur la façon d'évaluer les aires w1,w2 etc.

X - je pense qu'on ne peut pas calculer le volume exact de l'étang, car on ne sait pas si au dessous de la côte -10 . . .

(2-4, ~ 5)

Ch — l'approximation dépend directement du nombre de lignes de niveau.

M —

Ch — C'est pour ça que là, on aura une très grande imprécision

Bl et M — plus les lignes de niveau sont serrées, plus la précision est importante

X ((inaudible, dommage!))

M — Je vous demande maintenant de chercher ...
((écrit au tableau: $V \leq$))

Br — Je considère qu'on peut voir profil en voyant les couches superposées ---- ((parle de "rectangles"??))

M — pourrait-on avoir un procédé ...? ((efface $V \leq$))
$V = \sum_{i=1}^{4} V_{\Omega_i}$ on découpe en 4 régions

X — propose $V_{\Omega_i} \leq (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \times 10$
$+ (w_2 + w_3 + w_4) \times 10$
$+ (w_3 + w_4) \times 10 + w_4 \times 100$

M — tout le monde est d'accord? c'est le total que vous proposez là. proposition pour V. C'est probablement le résultat des majorations partielles.

$\leq V_{\Omega_i} \leq$

essayez chacun de l'écrire.

GX' — majoré par w_1 fois 10 plus ....

M écrit $\leq V_{\Omega_i} \leq$ Surface$(\Omega_i) \times h_i^+$
h_i^+ cote maximale, profondeur maximale de la région Ω_i
vous minorez par quoi?

GX' — 0

(2ème leçon 6)

GX'' – non, par la cote minimale

M – écrit $Surf(\Omega_i) \times h_i^- \leq$

h_i^- = profondeur minimale correspondant à la région Ω_i

M – Quelle est la fonction qui semble assez naturellement apparaître ..?

– – –

X – la profondeur

M – écrit $h : \Omega \to \mathbb{R}^+$

$M \in \Omega \longmapsto h(M)$ = profondeur au-dessous de M.

pour cela, vous avez décomposé le domaine Ω en Ω_i – – ce qu'on affirme, c'est que le volume total est la somme des vol. partiels – et chacun est minoré et majoré

vous êtes d'accord ?

GX'' – (murmure je ne suis pas d'accord)

M – écrit $V \leq Surface(\Omega_1) \times 10 + Surf(\Omega_2) \times 20 + Surface(\Omega_3) \times 30 + Surf(\Omega_4) \times 100$

(dans l'ignorance on prend le plus gd)

et la minoration ?

M et X – $Surf(\Omega_2) \times 10 + Surf(\Omega_3) \times 20 + Surf(\Omega_4) \times$?

X – 20, 30 ....

M – pourquoi ?

X – 20

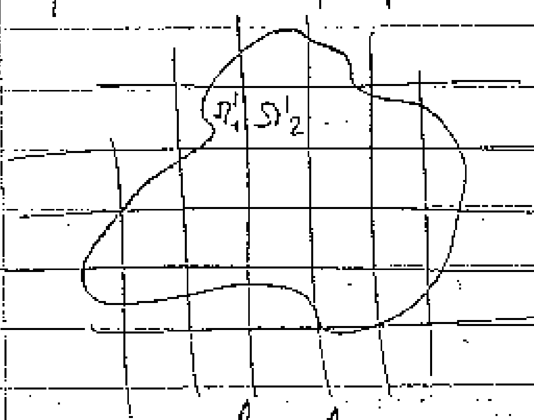
M – écrit $(\ldots) + Surf(\Omega_3 \cup \Omega_4) \times 20$

ça correspond à ce que vous aviez écrit avant (*)

M – 2° question : si au lieu d'une carte, vous avez seulement la superficie de l'étang, comment allez-vous faire pour déterminer le volume de l'étang ? sans disposer de carte d'état-major, mais pouvant effectuer vous-même les mesures

Ch – soit déterminer les lignes de niveau
– soit quadrillage de l'étang

M reprend les 2 propositions et dessine pour la 2°.



vous déterminez un nouveau régionnement de l'étang.

que faire ds chacune des régions ?

X – on va chercher un max et un min
M – est-ce que c'est facile à réaliser
X – on laisse la perche traîner ...

Ch – on prend une mesure, une seule ...
M – écrit "Dans chaque nouvelle région Ω'_i, on choisit un point $M_i \in \Omega'_i$
et qu'est-ce que vous faites à ce moment-là ?

Ch – une approximation de la profondeur
M – écrit à la suite " on évalue au point M_i $h(M_i)$"
on fait en quelque sorte un sondage ... on évalue 9 valeurs de l'étang.
est-ce que ça vous permet de déterminer le volume
écrit " V(sondage)

X – on obtient des valeurs de V, mais on ne peut pas encadrer V
M – je ne vous demande pas pour le moment d'encadrer
X – en multipliant par ... ((inaudible))

(9 - ligne ?)

M écrit $\boxed{V_{(sondage)} = \sum_{i=1}^{9} h(M_i) \times \text{Surface}(\Omega'_i)}$

opération assez semblable à celle faite précédemment
... ici, on n'a plus de majorant et minorant

c) Il s'agit ici de tenter une premiere approche des sommes de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(t_i).(x_{i+1} - x_i) \quad , t \in]x_i , x_{i+1}[$$

h — on est sûr que si on avait les max et min, c'est plus petit qu'un max et plus gd que le min ...

M écrit on est sûr que

$$\sum h_i^- \times \text{surf}(\Omega'_i) \leq V_{(sondage)} \leq \sum h_i^+ \ \text{surf}(\Omega'_i)$$

Ce procédé ne nous dit pas si on fait une majoration et une minoration du volume ... gros inconvénient.

X — qu'il y ait 1 pt ...

M — qu'il y ait une fosse ... ~~la~~ sondage tombe dessus ou passe à côté et on n'en tiendra pas compte

X — il faut quadrillé fin ...)

M — l'idée est qu'en quadrillant de + en + fin, on tende vers la valeur du volume de l'étang —

(pause)

M — on va prendre un virage maintenant par rapport à ce ~~qu'on~~ qu'on va faire —
les 3 pbs, on les a partiellement résolu ... mettre en place une procédure très compliquée de découpage de la situation globale en situations - - -
synthèse pour mettre en évidence des situations en physique ou chimie ... où on retrouve ces mêmes procédés
on monte d'1 cran dans l'abstraction de ce qu'on fait..

((parenthèse sur l'étang

le modèle proposé ne vaut rien

(2 · leçon 9)

d) C'est bien entendu pendant la pose que certains étudiants viennent discrètement soumettre le problème d'un étang dont le profil serait celui d'une carafe , ceci explique la mise au point qui suit après la pose !

(plus de pb de bruit... ils copient tous !)

Situation générale : on a un domaine ...
[Soit Ω un domaine de ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)
$f : \Omega \to \mathbb{R}$]

situation qui modélise ce qu'on a fait jusqu'à maintenant

[qui "produit un résultat R sur Ω"]
(le résultat est le volume, ..., surface, force ...)
[$R = R(f, \Omega)$]
(on va mettre 2 conditions pour pouvoir mettre en route la procédure intégrale ...)
[en satisfaisant aux 2 conditions suivantes :
1°) Si on opère une subdivision Δ du domaine Ω
($\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ $\Omega = \bigcup \Omega_i$) (partition ...)
alors le résultat global R est la somme des résultats partiels $R_i = R(f, \Omega_i)$

2°) Sur chaque sous-région Ω_a, le résultat partiel $R_a = R(f, \Omega_a)$ vérifie le principe fondamental d'encadrement suivant :

$$\boxed{mes(\Omega_a) \times f_a^- \leq R(f, \Omega_a) \leq mes(\Omega_a) \times f_a^+}$$

[... ce qui est écrit au tableau]

f_a^+ est un majorant de f sur Ω_a
f_a^- est un minorant de f sur Ω_a
$mes(\Omega_a)$ = volume, surface, longueur de la région Ω_a suivant les cas.]

Conclusion (ou plutôt ...

e) "m. "se régale il y a un silence religieux pour l'écouter et il a l'impression que tout le monde comprend et retient son soufle pour mieux saisir!!!

(2è leçon .ac)

[dans "la ~~plupart~~ majorité des cas" les mathématiciens peuvent prolonger la procédure précédente (découpage, encadrement) par un passage à la limite : "procédure intégrale" et obtenir un nombre unique appelé intégrale de f sur Ω noté $\int_\Omega f(M)\, d\Omega(M)$

et qui satisfait à tout encadrement proposé à partir d'une subdivision Δ

"il évalue le résultat R recherché"]

M - comment ... est-ce que c'est clair ?
On reprend les 3 situations précédentes et on découvre qui est Ω, qui est f et en gros où se situe le résultat ...

M - R, dans le cas de l'Etang ... ?

X - le volume

M - dans le cas de la surface ?

X - aire

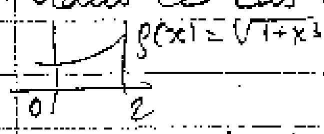
M - et force de gravitation ... ?

X - la force

M - plus exactement, la valeur absolue de la force.
où est le domaine Ω

GX - la surface

M - dans le cas de la surface ... je vais refaire le dessin



... Ω ?

GX - une partie de R, un intervalle de R ... ~~l'i~~

M - l'intervalle [0, 2]
dans le cas de la force ?

X - la barre

Ch - l'intervalle entre les 2 pts de la barre ...

M - le domaine, c'est la barre ... qui peut se modéliser par l'intervalle [0, 6]
c'est ce qui est difficile ds les pbs de physique : trouver le domaine et la fonction f
pour f ?

X - la ~~fonction~~ profondeur de l'étang

M - là, elle était évidente. Dans le cas de la surface ?

(2° Leçon 21)

X - $g(x)$

M - là aussi, elle était dessinée. Et ds le cas de la barre?

- - - silence

M - dessine

elle est beaucoup plus cachée - - par quoi on a essayé de l'encadrer? ?

je laisse un ?

M - subdivision Δ

X et M - - Ω_i ou Ω'_i
lignes de niveau quadrillage

M - pour la surface?

X - des rectangles . . .

M - ce n'est pas les rectangles qu'on a découpé

X - c'est l'intervalle - - 2/n

M - $I = \bigcup I_k$ — $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ — $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$

longueur de I_k pour un découpage en n morceaux?

GX - 2/n .

M - dans le cas de la force?
C'est exactement la même chose .

M - on arrête là - explique le tableau à remplir et 2 nouvelles situations - pbs - - - l'intégrale permet résoudre pbs spaciaux , mais aussi pbs basés sur temps (pbs historiques)
+ 1 situation spaciale (barrage)

qu'on peut intégrer de 2 façons - 2 domaines Ω différents à travailler d'ici lundi -

(2e leçon 12)

Feuille distribuée à la fin de ce cours !

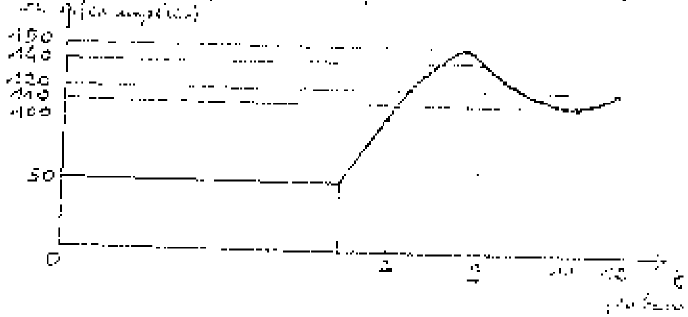
Enseignement : Introduction de la procédure Intégrale — 17 janvier 95

1 – Consommation de courant

Sachant que la puissance électrique P est le produit de la tension V par l'intensité A ($P = V.A$) et que la consommation W est le produit de la puissance P par la durée T pendant laquelle cette puissance a été fournie : $W = P.T$, le problème est le suivant :

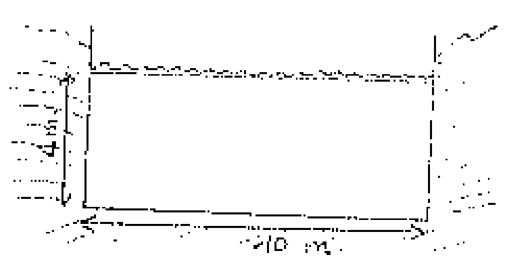
Un câble électrique débite une intensité $A(t)$ pour fournir le courant d'un groupe de maisons, suivant une tension fixe $V = 220$ volts.

Voici le graphique de la fonction $A(t)$ entre 0 h et 12 h :



Question :
Quelle a été la consommation W de courant de ce groupe de maisons entre 0 h et 12 h ?

2 – L'écluse



Question : Quelle est la force exercée par la pression de l'eau sur cette écluse verticale rectangulaire de 10 m de large et 4 m de hauteur d'eau ?

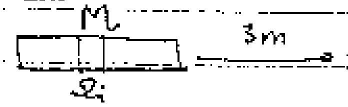
Résultat R	Surface S	Force F	Consommation W	force hydraulique E
Domaine Ω				
Fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$				
partition Δ de Ω : $\Delta = \{\Omega_k\}$, $\Omega = \bigcup \Omega_k$				
encadrement sur Ω_k : $f_k^+ \operatorname{mes}(\Omega_k)$, $f_k^- \operatorname{mes}(\Omega_k)$				
$R_\Delta^- \leq R \leq R_\Delta^+$				
choix de Δ pour obtenir une précision $\leq 10^{-15}$ (*) ($R_\Delta^+ - R_\Delta^- \leq 10^{-15}$)				

(*) Si cela ne vous semble pas possible a[illegible] données du pb, quelle subdivision choisir pour obtenir une [illegible] incertitude

(3e Leçon 1)

(3e séquence) (complété les notes prises sur le cours à partir des notes de Françoise)

(21 Janv. 85.

I° M. 

$\Omega=[0,6]$ $F=\sum F_i$

$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $mes(\Omega_i)\cdot f_i^- \le F_i \le mes(\Omega_i)\cdot f_i^+$

$x_0=0$ x_i x_{i+1} $x_n=6$

M- comment exprimez-vous la masse due à ce petit...

X- si on connait la densité de la barre
on connait la masse et la longueur on divise

M- donc la densité de masse c'est $\frac{M}{6}$

M- écrit et commente $F_i \le G\cdot m\,\frac{M}{6}(x_i - x_{i-1}) \times \frac{1}{(3+x_0)^2}$
avec les étudiants

$(3+x_0)^2$ contesté, on remplace par $(9-x_i)^2$

M et X- $G m \frac{M}{6}(x_i - x_{i-1}) \times \frac{1}{(9-x_{i-1})^2} \le F_i$

M- est-ce qu'on retrouve les ingrédients indispensables pour appliquer la procédure ~~de l'intégrale~~.

X- il faut la mesure de Ω_i...

M- c'est comme ça que vous pourrez mettre en équation vos problèmes. ... est-ce qu'on retrouve la mesure de Ω_i c'est ce qu'il y a de plus fondamental

X- c'est $x_i - x_{i-1}$

M- est-ce qu'on peut dégager la fonction qui habite sur Ω
$f(x) = ?$

X- $G m \frac{M}{6}\cdot\frac{1}{(9-x)^2}$

M- est-ce qu'on peut lui donner une interprétation physique force qui s'exerce sur quoi?

M et X- m et un élément de masse ~~m~~ au pt x.

M- on peut lui donner comme interprétation densité de force qui s'exerce au point x.

M- est-ce que c'est bien cette fction qui est minorée et majorée

$F = \int_{[0;6]} f(x)\, dI(x)$ si le processus intégrale fonctionne.

si on anticipe un peu, qqchose que vous connaissez par le biais des primitives -

a)A ce niveau "m." pense qu'il n'est plus possible d'ignorer la procédure "evaluation de l'intégrale au moyen d'une primitive" , procédure que certains étudiants avaient mis en oeuvre dès le début .
Le fait d'exploiter par anticipation sur le cours cette procédure montre toute la puissance de la théorie puisque l'on obtient sans aucune difficulté le résultat numérique 4/3g ,résultat qui satisfait tous les encadrements que l'on avait laborieusement mis en place .

soit $H(x)$ une primitive de f sur $\Omega = [0;6]$, si on calcule $\int$, obtient-on qqchose qui vérifie les encadrements trouvés.

M écrit:

$H(x) = G\, m \frac{M}{6} \times$ une primitive de $\frac{1}{(9-x)^2}$

X $\frac{-1}{9-x}$

M $H(x) = G\, m \frac{M}{6} \cdot \frac{1}{9-x}$

$H(6) - H(0) = G m \frac{M}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) = \ldots \quad G \times \frac{36}{6} \left(\frac{2}{9} \right) = \frac{4}{3} G$

est-ce que ça correspond aux encadrements

X. découpage en 8 on avait : $1{,}16 \leq F \leq 1{,}3\ G$

M- pour le moment, c'est de l'anticipation pure.

2 sol. passage à la limite / primitive ds le cas où ça se présente bien.

J'arrête pour cette question et on passe à la question sur la consommation électrique.

M dessine le graphe du pb et redit de quoi il s'agit.

qui a une évaluation de la consommation de courant.

Christophe X - J'ai minoré par 1031 par 220 et majoré par 1055 × 220

M écrit $1031 \times 220 \leq W \leq 1055 \times 220$.

X - propose les résultats en effectuant les opérations.

X. rien d'autre

M- Comment évaluer le courant si les seuls renseignements dont on dispose sont ceux-là.

(3 = 6 jan 3)

X - C'est l'aire

M - Pourquoi ? on a dit W = P.T. Qu'est ce qu'elle dit implicitement cette formule

X - P est la même tout le temps

M - où est-ce vrai ici ?

X - entre 0 et 6 heures

M - entre 0 et 6 W = 220 x 6 x 50 pas de pb. ailleurs, plus jamais constant.

Qu'est ce qu'on va avoir comme domaine Ω

X - l'intervalle [0, 12]

M - découpage raisonnable

X - $\Omega_1 = [0,6]$, [6,7]

M - [6,7] : on connait les val. de la fction aux extremums

X' - [7, 9], [9, 11], [11, 12]

X'' - [7, 8,5] (pas repris)

M - est ce qu'on peut affirmer que $W = \sum W_i$? - - -

Qu'est-ce qu'il faut vérifier sur les Ω_i pour cela.

6 X - somme des ensembles

M - ce n'est pas la somme, mais la réunion - fait Ω et

X - les Ω_i soient disjoints

M - j'insiste sur $\Omega = \biguplus \Omega_i$

chacun écrit une ~~encadr~~ minoration de Ω et une majoration de Ω tenant compte de ce découpage

2mn.

X - début de proposition, mais Marc demande qqs minutes.

(1080 , 1100

X - M demande le détail → $W \leq 220 \left[50 \times 6 + 1 \times 100 + 2 \times 140 + 140 \times 2 + 1 \times 120 \right]$

non, protestations

⇒ 150

M - effectué, ça donne quoi

X - 220×1100

M - tout le monde est d'accord ? à chaque fois, on fait le produit d'1 majorant de l'intensité par la longueur

pour minorant

GX | 220 X 880 ou 220 X 900

M - pour 900, le détail du calcul → M écrit 3 X 110 → on peut regrouper les 2 régions [9,11] et [11,12]

X et M. 200 [6 X 50 + 50 X 1 + 2 X 110 + 2 X 110 + 1 X 110] (⟹ 880 ...)

contesté : 100

Qu'est ce qu'on obtient comme erreur ?

X - 20% environ.

M - que faire pour avoir une précision supérieure ?

X | avoir plus de Ω_i

M - réécrit la 1° proposition : $1031 \times 220 \leq W \leq 1055 \times 220$
on est bien de notre encadrement.
Comment avez-vous fait ?

GX - j'ai majoré par les trapèzes ...

M - pour le faire, il faut avoir des renseignements plus puissants sur la fonction - la concavité ...

X | on peut diviser l'intervalle [6,12] en 12, par demi-heure

Ch - ça ne sert à rien de prendre plus de précisions sur l'intervalle où la fonction est constante

M - vous dites que le découpage doit être fonction de ce qu'est la fonction (...?) de la précision du dessin

Ch - le but essentiel : introduire que l'intégrale sert bcp à résoudre des pbs où l'intervalle c'est le temps.

b) Probablement qu'à ce niveau certains étudiants se posent la question : quel est le sens du travail que nous entreprenons ici puisque nous ne pouvons effectuer aucun calcul exact car tout dépend de la précision du dessin ? C'est la raison pour laquelle "m." se sent obligé d'expliciter l'intention didactique : montrer que la procédure intégrale est un outil privilégié pour évaluer les phénomènes variables au cours du temps !

W vous allez la remplacer par quelle formule ?

X - $W = V.A.T.$

X' - $W = \int V.A(t)\,dt$

M - $W = \int_I P(t)\,dI(t)$ qui tient compte du fait que P varie au cours du temps.

M : on laisse l'exemple de l'Ecluse à Réfléchir, on y reviendra

c)"m." voyant que "ça n'avance pas " ,et se rappelant l'expérience douloureuse de la première leçon ,lorsqu' il avait voulu proposer à tout prix les situations A2 et A3 alors qu'elles ne s'imposaient plus ,abandonne l'idée de traiter en cours la situation de l'écluse et renvoie l'étude de ce problème à la maison .

II a Question donnée : choisir Δ pour obtenir une précision de 10^{-15}

M : $g(x) = \sqrt{1+x^3}$ $\Omega = [0,2]$

quel découpage faire pour obtenir $S_\Delta^- \leq S \leq S_\Delta^+$

tel que $S_\Delta^+ - S_\Delta^- \leq 10^{-15}$

on prend $\Delta = (x_0 = 0, x_1 \leq \dots \leq x_n = 2)$

$I_i = [x_i - x_{i-1}]$

découpage régulier si

X : ...

M : si $|I_i| = |I|/n = 2/n$

qui a résolu ce pb ?

3 ont cherché à résoudre ce pb !

Sur quoi vous avez buté ?

X : manuellement, impossible

à la machine, on ne sait pas où on en est...

en intégrant, non

M : que voulez-vous dire par "intégrer $\sqrt{1+x^3}$"

X : Calculer $\int \sqrt{1+x^3}$

M : il y a une terminologie : chercher 1 primitive

intégrer : c'est appliquer la procédure mise en place...

personne n'a trouvé une primitive de $\sqrt{1+x^3}$

X : graphiquement, ça donne rien

M : celui qui a un résultat

GX : Si $n \geq 4/10^{-15} = 4\,10^{15}$

M : vous êtes sûr qu'alors l'erreur est $\leq 10^{-15}$

Qu'en pensez-vous

(S-ligne 6)

X - Vrai ... faux   Comment tu fais ça ? Étonnements !

M - Comment l'a t'il obtenu ?

GX - $\frac{2}{n} \times g(x_{k-1}) \leq S_{\Omega_k} \leq \frac{2}{n} \times g(x_k)$

M - d'accord avec cette proposition : pour quelle raison ?

GX - parce que g est croissante.

GX - mais c'est la méthode du rectangle

M. reprend : la raison est que | g croissante $g(x_{k-1}) \leq g(x) \leq g(x_k)$ $x \in I_k$

GX - l'encadrement total -- somme

M - $\sum_1^n \frac{2}{n} g(x_{k-1}) \leq S_\Omega \leq \sum_1^n \frac{2}{n} g(x_k)$

GX - après, je fais la différence entre les 2.

M - $S_\Delta^+ - S_\Delta^- = ? = \sum \frac{2}{n}(g(x_k) - g(x_{k-1}))$

chacun réfléchit à ce qui va se passer qd on fait la différence.

personne ne propose rien ...

G - c'est grand, cette somme. Est-ce que ça va être bornée ?

GX - je majore $g(x_k) - g(x_{k-1})$ par $g(2) - g(0)$

M - $S_\Delta^+ - S_\Delta^- \leq 2 \times \sum_{k=1}^n \frac{2}{n}$ - - -

X - à quoi sert la somme ? il n'y a plus de k

X' - le n ne varie pas ...

M - $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$, ça vaut combien ?

X - ça vaut $\frac{1}{n}$, elle ne sert à rien la somme.

M - Calculez $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$

X - ça veut rien dire, $\frac{1}{n}$ ne varie pas.

M - si vous avez $n = 20$ à l'examen, la Σ ne vaut rien ! ..

ça vaut $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5} = 1$.

ce n'est peut être pas très astucieux - - -

X - $\sum_1^n \frac{1}{n} = 1$

M - donc on obtient ici 4×1 !

(3e leçon 7)

d) Ici on assiste à un phénomène impossible à percevoir dans un cours traditionnel : "m." est persuadé que tout le monde a vu que $\sum_{k=1}^{n} 2/n = 2$.
Par suite il ne comprend absolument pas pourquoi les étudiants ne réalisent pas que la majoration est beaucoup trop grossière ! Il va s'en suivre un long quiproquo avant que "m." ne réalise enfin que ce qui pose problème c'est la compréhension de ce qui se cache derrière l'écriture symbolique $\sum_{k=1}^{n} 1/n$.

GX - mais $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$ c'est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

protestations dans l'amphi.

M - ... ce n'est pas parce que c'est simple que çà n'a plus de sens. Que vaudrait-il écrire ?

X .. $\frac{1}{k}$

M - qu'est ce qu'on peut dire de ... $S_\Delta^+ - S_\Delta^- \leq 4$

X - çà ne nous apporte pas grand-chose.

M - Qui veut intervenir ?

X - $S_\Delta^+ - S_\Delta^- = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x_k) - g(x_{k-1})$

Cette somme est $\leq g(2) - g(0)$

M - vous croyez à çà ?

X' - oui ! ... hésitations

M - si çà marche, on aura $\leq \frac{4}{n}$

là, on serait content ?

X'' - Oui.

M - il suffirait de faire $\frac{4}{n} \leq 10^{-15}$. Est ce que çà marche.

GX - c'est la méthode des rechauffés !

M ?

X''' - c'est quoi l'explication ? qu'la Σ fait $\leq g(2) - g(0)$

M - faites attention ..

X - en prenant par ex. $n = 4$,

M - écrivez tous la somme $\sum_{k=1}^{4} g(x_k) - g(x_{k-1})$

(?)

X' – je voudrais dire : on peut utiliser la méthode par récurrence

M – on est tombé sur un pb – la formalisation

X – on ne peut pas l'écrire (cette somme)

GX – $g(x_4) - g(0)$

repris par un autre

M – pourquoi ?

X' – ils se simplifient

M – écrit et explique – faut-il un rais^t par récurrence ?

X''' – ça se généralise facilement

M – est ce que ça peut se voir géométriquement ?

M dessine :

on additionne les marches

c'est exactement que la somme des variations donne la variation totale

d'où le résultat $\frac{4}{n}$; ce qu'on vient de faire avec $\sqrt{1+x^2}$,

IIb où est-ce que ça va pouvoir se refaire ?

X – pour les fonctions strictement monotones sur un intervalle

M – donc qu'est ce qu'on peut écrire ? Résultat

Si $g \quad : I \to \mathbb{R}$

$g \nearrow$ croissante alors si Δ est une subdivision de $[a, b]$ en n intervalles de longueurs égales, alors un encadrement de l'intégrale de g sur $[a, b]$ correspondant à cette subdivision peut être

$$S^+_\Delta - S^-_\Delta \leq$$

GX – $\left(\frac{b-a}{n}\right)(g(b) - g(a))$

M – le processus à la limite fonctionne-t-il bien ? si on augmente n, on peut encadrer $\int f$ aussi près qu'on veut.

si f décroissante, on a la m. en écrivant $g(a) - g(b)$

on écrit donc simplement f monotone.

(3e leçon 9)

11h40 —

11h45 M — on m'a fait remarquer que il y a l'égalité $S^+_\Delta - S^-_\Delta = \frac{b-a}{n}$ pour les fctions monotones, on a — fonctionne bien.

e) La remarque des étudiants qui ne comprennent pas pourquoi "m." a écrit $S^+_\Delta - S^-_\Delta \leqslant (b-a)/n$.. et qui lui demandent d'écrire $S^+_\Delta - S^-_\Delta = (b-a)/n$.. indique probablement que la "philosophie" de la majoration des erreurs n'est pas encore bien assimilée !

— écartons-nous des exemples

Soit $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (il nous faut préciser le "dans la plupart des cas" vu la dernière fois)

une subdivision Δ de $[a,b]$ ($x_0 = a \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$)

une sous-évaluation de $\int$ l'intégrale de f correspondant à Δ : S^-

$S^-_{(f,\Delta)} = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \times f^-_k$ où f^-_k est une minoration de f sur I_k

sur-évaluation de l'intégrale de f est :

M et X — $S^+_{(f,\Delta)} = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \times f^+_k$ où f^+_k maj. de f sur I_k

M — on va essayer de ranger dans une boîte toutes les sous-évaluations et dans une autre les ~~sous~~ sur-évaluations

$\mathcal{S}^+_f = \{$ toutes les sur-éval. de l'intégrale de f sur $[a,b]$ correspondant à des subdivisions $\Delta \}$

X — pour tous les découpages de l'intégrale de ...

$\mathcal{S}_f = \{ \ldots$ de l'intégrale de $\}$

Quel est l'intérêt ?

M et X — parties de $\mathbb{R}$ d'avoir ces boîtes

M — Quel est l'intérêt par rapport au pb qui nous préoccupe ?

X . . .

M dessine ( ) ( )

$\mathcal{S}^-_f$ $\mathcal{S}^+_f$

est-ce que $\mathcal{S}^+_f \gg \mathcal{S}^-_f$?

f) La notation $A \gg B$ adoptée en cours pour signifier que $\forall x \in A, \forall y \in B : x > y$, avait permis au début de l'année de mettre en évidence le caractère complet de $\mathbb{R}$ de la façon suivante : si $A \gg B$ et si A et B sont "infiniment proches" i.e. "$\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$, $\exists y \in B$: $|x-y| \leq \delta$", alors il existe un unique réel z vérifiant : $B \ll \{z\} \ll A$.

Ici "m." affirme péremptoirement que $\int^{-} f \ll \int^{+} f$, ce qui n'a rien d'évident, hormis la notation et la terminologie. Ce point sera repris beaucoup plus tard (2ème façon). "m." pense que s'il avait soulevé ce problème à ce moment de mise en place d'un critère raisonnable d'intégrabilité pratiquement aucun étudiant ne l'aurait suivi jusqu'à la définition!

X : ils sont infiniment proches

X' : oui

M : vrai, mais à vérifier

où se trouve (la zone d'habitation de) $\int f$

X'' : entre les deux

M : si f a une intégrale α sur $[a,b]$, on a $\mathcal{S}_f^- \ll \{\alpha\} \ll \mathcal{S}_f^+$

Qu'est-ce qu'il risque de se passer si f quelconque ?

danger qui existe auquel vous n'avez pas pensé

X : si la fonction n'est pas monotone...

M : reprend sa question

X : que ça s'annule

X' : que ce soit un intervalle (entre les 2 ensembles...)

M : que $\alpha^- = \operatorname{Sup} \mathcal{S}_f^-$ et $\alpha^+ = \operatorname{Inf} \mathcal{S}_f^+$ soient très distants. Alors ? si $\alpha_f^- < \alpha_f^+$? par ex. $\alpha^- = 3$; $\alpha^+ = 4$ ...? dorénavant il y a 36 000 candidats pour l'intégrale

X : on ne pourra pas donner de valeur à α...

M : l'intégrale pourra être n'importe quel nombre entre α^- et α^+ ... détestable sur le plan pratique...

C'est cela qu'on prend comme définition

par définition :

f est intégrable sur $[a,b]$ si $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ sont "infiniment proches"

et dans ce cas

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dI(x) = \,?$$

X' Sup ...
Inf ...
M ... = par définition α, où α est l'unique réel tel que $\mathcal{S}_f^- \ll \{\alpha\} \ll \mathcal{S}_f^+$ ($\ll$ est dominé par)

Vous avez vu tout le remue-ménage pour ~~arriver~~ savoir ce que c'était...

Comment se traduira $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ infiniment proches ?

Traduction :

M et X... ($\varepsilon = 10^{-15}$) Soit $\varepsilon > 0$, $\exists$ une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que $S^+_{\Delta,f} - S^-_{\Delta,f} \leq \varepsilon$

Réfléchir à :

est-ce que ce qu'on a fait ne démontre pas que toutes les fonctions monotones sont intégrables ?

(4e leçon 1)

24.01.85 (environ 80 personnes ...) (4e séquence)

M - Questions /. à ce qu'on a fait lundi?
X - Informatique au partiel? M - oui - un petit pb dont il faudra fabriquer un algorithme -
M - de un groupe : les étudiants ont demandé est-ce que vous avez vu le lien entre intégrale et primitive? dans ce groupe, vous avez répondu oui
G-X - Non!
M - on a parlé du pb de la primitive /. à l'intégrale .. mais on a seult évoqué ce lien.
2° pb : le pb. de la prise à note : le cours n'est pas facile à mettre en ~~f~~ note ... tableau! ..
Je suis inquiet pour ceux qui n'ont que 2 ou 3 formules au bout de 2 h. de cours - important :
noter les questions posées et la façon dont on y a répondu - J'en avais parlé au début de l'année.
ces questions, au bout de 2 mois, si vous ne pouvez y répondre ou vous sont étrangères, ça pose pb -
(silence absolu ...)
il vous faut apprendre à savoir ce qu'il est important de noter - apprentissage fondamental à faire à l'université ..
la mise en forme se fait après le cours -

10h20 -
M - on avait correctement défini qu'est ce que signifiait f intégrable ou pas?
$f : \Omega \to \mathbb{R}$
Déf. f est intégrable sur Ω
[on parle de l'intégrale de Riemann les autres, intégral de Lebesgue ne sont pas des objets nouveaux, c'est la finesse avec laquelle on regarde les choses qui change. Ici procédé simple - il n'est pas très assez fin - Des phénomènes complexes échappent à ce procédé - - - l'ensemble S^t reste très loin de S^t raison de l'intégrale de Lebesgue -

dit, non écrit

M. **Déf.** f intégrable (au sens de Riemann) sur Ω si $\mathcal{S}_f^+$ et $\mathcal{S}_f^-$ sont infiniment proches.

exemple : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \\ -2 & \text{si } x > \frac{2}{3} \end{cases}$

question : est ce que f est intégrable, si oui quelle est son intégrale sur I

2° fonction : $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1/2 \\ 1 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$

g intégrable ?

M. réécrit :

	oui	non	PS
f int ? sur [0,1] →			
g int ? sur [0,1] →			
si oui (quelles sont les valeurs de) $\alpha = \int_{[0,1]} f(x)\, dI(x)$ →			
$\beta = \int_{[0,1]} g(x)\, dI(x)$ et →			
$\gamma = \int_{[0,1]} (f(x)+g(x))\, dI(x)$ →			

5 mn pendant lesquelles Marc passe dans les rangs. tout le monde travaille.
(ceux qui sont autour de moi font des dessins pour f (et g un peu moins)

a) Remarquant que depuis le début de la séance c'est lui qui parle et que les étudiants sont en train de devenir totalement passifs ,"m." se dit que le meilleur moyen de retourner la situation est de proposer une situation problème extrêmement simple ;au moment où il la soumet , "m."est franchement persuadé que la question va être tranchée en cinq ou dix minutes au plus !!!

M. on est parti de situations physiques .. on s'est donné une définition. Il faut voir si cette définition on peut la mettre en oeuvre dans des cas simples.

10h35 - mise en commun → on remplit le tableau en commençant par PS non oui pour f ; pour g oui non PS

	oui	non	PS
f int ?	~60	4	11
g int.	5	35	~18
$\alpha =$	7/6	-5/6	-1/6
nbre	10 ~	1 qui dit non	~10

$\beta = ?$ 0 pour les 5 qui disent g intégrable.

$\gamma = 7/6$ pour les ~.

M. f intégrable ? pour ceux qui n'arrivent pas à se décider, qu'est-ce qui les empêche ?

X — pas de rép.

M - pour les 4 personnes qui disent f non intégrable quelles sont les raisons ?

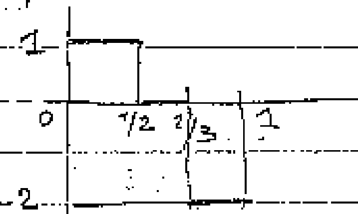
le même que $\frac{4}{n}$ du cours d'avant

GX - on doit aussi $\mathcal{S}_f^+$ qui domine $\mathcal{S}_f^-$ pour que f soit intégrable.

X' - f non intégrable parce qu'elle n'est pas continue

M - qui adhère à cette proposition ? Si on fait le dessin, ce n'est pas un mal ..

Ho



elle n'est effectivement pas continue.

M - Qui est d'accord avec cette argumentation ? ((celle de X'))

X - ~ 5 personnes

GX' - dans la définition, on n'a jamais parlé de continuité

Haupentkol - = $\int_0^1$ intégrale de 0 à $\frac{1}{2}$ plus de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ plus de $\frac{2}{3}$ à 1.

M - on a tout fait pour ça : probablement que ça va marcher. il faudra vérifier avec la définition qu'on s'est donnée

... résultat

$$\Omega = \biguplus_{i=1}^{n} \Omega_i \qquad \int_\Omega f = \sum_{i=1}^{n} \int f_i$$

reste à vérifier.
(peut-être des pbs de raccords) -

on n'a jamais évoqué, en effet, la continuité.

X'' - il faudrait prendre une fonction continue et montrer qu'elle n'est pas intégrable

M - ..

X'' rectifie - .. non continue .. et intégrable

M - celle-ci, si elle vérifie cette propriété, répondra à la question.

(4° 6, n° 4)

M - Si l'intégrale représente bien la surface, çà ....

X''' il suffit de trouver le minorant de $\mathcal{S}_f^+$ et le maj. de $\mathcal{S}^-$

M écrit (je rappelle) $\mathcal{S}_f^+$ = {toutes les sur-éval. de l'int. de f sur [0,1]}

Est-ce que, en général, la borne inf. et la borne sup., c'est qqchose qui va vous tomber des bras?

X - non

M - Qu'est-ce qu'il vous suffit de trouver?

X''' - un él^t qui ∈ aux 2 ensembles

M - je vous embête avec une fausse question.

$u \in \mathcal{S}^+$ et $v \in \mathcal{S}^-$ qu'est-ce que vous proposez? pour trouver u!

X - il faut une subdivision

M et X - [0, 1/2], [1/2, 2/3], [2/3, 1]

M écrit $\Delta\ (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$

M et X - $S^+ = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \ ?$

X' propose 0 comme majorant sur $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ((non repris)).

M - continue: $+ (-2) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)$

On a divisé l'ens. en 3 morceaux.

X - -- (inaudible, mais cela amène Marc à écrire ce qui suit)

M - On va préciser les ensembles $I_1 = [0, 1/2]$, $I_2 =]1/2, 2/3]$

$I_3 =]2/3, 1]$

reprend le calcul et fait préciser les valeurs en $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ de la fonction f^+.

X - çà représente la surface, si on prend un minorant et un majorant de la surface... ((çà lui pose pb.))

(11h) M - je rappelle ce qu'on essaie de faire: si f est bien définie sur [0,1] - on vient de trouver une sur-évaluation qui est en même temps une sous-évaluation -

donc $\mathcal{S}_f^+ \cap \mathcal{S}_f^- = S_f^+ = S_f^-$

Ces 2 nombres qui sont égaux, qu'est-ce que çà prouve?

X - qu'elle est intégrable!

M- et la valeur est la valeur trouvée $-1/6$

on a prouvé que cette f'ction est intégrable - On remarque que dès que f est <0, la surface est comptée <0.

Qu'est ce que çà prouve au passage?

X- Que la continuité ---

M- "La continuité n'est pas une condition nécessaire pour l'intégrabilité". ((M écrit et encadre cette phrase au tableau))

Ce sont des f'ctions en escaliers. les plus facilement intégrables et elles ne sont pas continues.

D'où vient $7/6$

X La somme sous le signe -

M- On remarque donc que l'aire est comptée <0 si $f<0$.

--- inconvénients ---

où est-ce que çà a des avantages? ...

X- fonction impaire

M- oui, mais du pt de vue physique

X''''- travail d'1 force -

M- parle de la notion de travail global qui compte la force ds le sens du déplacement ...

écrit au tableau : "l'intégrale modélise l'aire algébrique"

11h05 M- maintenant, vous êtes une majorité à penser que g n'est pas intégrable - Est-ce que vous pouvez donner vos explications -

M écrit

g non intégrable?

Y a-t'il un argument simple? ---- (silence)

Est-ce qu'elle est continue?

X non

M- est ce qu'on peut utiliser çà?

X' non (beaucoup! de non)

b)"m." constate avec soulagement qu'on n'a pas complètement perdu son temps depuis une heure ?

(4e leçon 6)

M - Quelle était la propriété caractéristique d'1 intervalle ?
si 2 pts y. ∃ 3e est forcément dedans.
est-ce qu'il c'est en contradiction ?

X - non

M - donc 1 point c'est un intervalle. Est-ce cela qui vous posait pb ? Quel argument simple avez-vous ?

GX - Propose $I_1 = [0, 1/2[$ $I_2 = [1/2, 1/2] = \{1/2\}$
$I_3 =]1/2, 1]$

M - sous-évaluation ? sur-évaluation ?

X' - la mesure de I_2 est égale à 0.

M - donc, qu'est-ce qui va se passer pour une s-éval. sur I_2 ?

X - ..

M - compte pour du beurre..

S^+ ?

X'' et M écrit : $\underset{|I_1|}{\overset{f_1^+}{0} \times \frac{1}{2}} + \underset{|I_2|}{\overset{f_2^+}{1} \times 0} + \underset{|I_3|}{\overset{f_3^+}{0} \times \frac{1}{2}}$

X et M - c'est encore une sous-évaluation

→ Haupenthal ne veut pas copier.., parce qu'il a son idée.
Qu'est ce qu'on peut dire ?

X - elle est intégrable

M et sa valeur ?

XX - 0.

M - c'est important d'avoir repéré qu'une telle fction est intégrable.
Du pt de vue physique, est-ce que c'est réaliste ?

XX - non qui surgit instantanément et agit en 1 seul pt

M - f : force // sur laquelle on se déplace ... que pensez-vous du travail ? ...
on a l'air de dire que le travail est nul.

11h15 M - donne l'ex. d'1 force sur une voiture ..
provoque des remous.

M - dernier point .. qu'est-ce que vous pensez de l'intégrale de f+g ?

XX - 1/6

(4e Leçon 7)

M - est-ce que quelqu'un imagine une généralisation de ce qu'on vient de trouver ? ___ (silence)
si vous avez une fonction f intégrable sur (a, b), est-ce que vous pouvez la modifier sans modifier son intégrale ?

X --- (inaudible et flou..)

(Viscaino) GX' et M) - si on la modifie en 1 pt, elle donne la fonction g

M - qu'est-ce qu'on peut dire de g ?

X - elle est intégrable et a même intégrale.

M - sous forme de conjecture pour le moment.
très important car cela signifie que l'intégrale ne s'occupe pas de ce qui se passe en un point.

très intéressant

X - Si on modifie f en 1 pt donne g intégrable → on modifie g en 1 pt → mi intégrale, donc f peut être modifiée en plusieurs points --

M - alors on peut tout modifier, cela ne change rien !

X' - po si les pts ne sont pas consécutifs.

GX'' pour une infinité de points

M - jusqu'où ce procédé peut être poursuivi ?

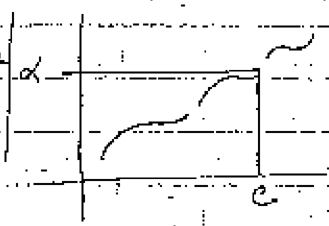
X''' -- par récurrence

M - on arrive à montrer que pour tout n, ça ne va rien changer. On ne peut faire le saut de n à +∞ - n entier. On peut la modifier en 100 milliards de pts sans que l'intégrale change - Mais le nbre de pts reste fini ---

11h25 - pause -

11h40

M - reprend en dessinant f. on la modifie en 1 pt c
$f(c) = \alpha$



on obtient une fonction g : $g(x) = f(x)$ si $x \neq \alpha$.
$g(c) = \beta$

(4 m b ... E)

M. Qu'est-ce qu'il faut faire pour montrer que g est intégrable?

X. il faut trouver un encadrement...

M. Qu'est-ce qu'il suffit de faire sachant que la 1ère l'était! Qu'est-ce que vous avez besoin de savoir?

X'. une subdivision...

M. on a pris le pb à l'envers. On se donne une précision soit $\varepsilon > 0$ fixé. il faut qu'on trouve 1 subdivision Δ

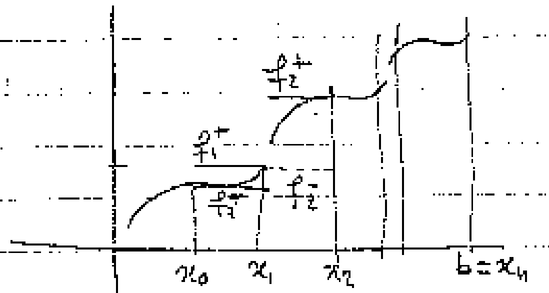
$\underbrace{x_0 = a < x_1}_{I_1} \underbrace{<}_{I_2} \cdots \underbrace{< x_n = b}_{I_n}$

Qu'est-ce qu'on a pu trouver?

M. récit: Une sur-évaluation $S_f^+ = \sum_{i=1}^{n} f_i^+ |I_i|$ et une ss-éval. $S_f^- = \sum_{i=1}^{n} f_i^- |I_i|$ telle que $|S_f^+ - S_f^-| \leq \varepsilon$

f_i^+ = maj. de f sur I_i, f_i^- = min. de f sur I_i

M. dessine



M. Que peut-on dire des f_i^+ et des f_i^- par rapport à g?

X. ce sont les mêmes... sauf pour l'intervalle qui contient c

M. soit I_{i_0} l'intervalle qui contient c — qu'est-ce qu'on va pouvoir faire?

GX. on subdivise l'intervalle... en faisant intervenir comme point de subdivision le point c

M. écrit $\Delta \to \Delta'$ $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_{i_0-1}, c, x_{i_0}, \ldots, x_n = b)$

on choisit $J_1 = I_1, \ldots,$

$J'_{i_0} = [x_{i_0-1}, c[$ — $J''_{i_0} =]c, x_{i_0}]$ — $J'''_{i_0} = \{c\}$

Ça nous permet quelle surévaluation de f?

X et M. partout la sur-év. de f sauf pour I_0

M. je le raconte simplement — essayez de le rédiger

I_0 est découpé en 3 morceaux

sur l'int. correspondant à $\{c\}$, on prend max α, β et min(α, β)

comme sur-év. et ss-év.

M (et X). on va récupérer exactement S_f^+ et S_f^-

puisqu'on a changé sur un intervalle de mesure nulle.

par définition longueur de $(x, y) = y - x$ qu'il soit fermé ou ouvert...

Conclusion? ..
L'encadrement de $\int f$ est un encadrement de $\int g$ → on récupère un encadrement de $\int g$ $\leq \varepsilon$.
⇒ on a $S_f^- \leq \int f \leq S_f^+$
on peut dire aussi que :
$S^- \leq \int_I g \leq S^+$

$\int f$ et $\int g$?
X - dépendent de ε.
M - $\forall \varepsilon$ → on a déjà plusieurs fois montré que
$\left| \int_I f - \int_I g \right| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon$ → elles sont égales

exercice : écrire comme il faut les S_g^+ et S_g^- ......
je voudrais soulever un pb qui a été posé par qq'un.
GX - Si f définie sur un intervalle fermé [a,b] alors f est intégrable
M l'écrit et l'encadre. Qui pense que c'est vrai?
~40 vrai
~1 faux → propose d'étudier l'intégrale de $x \sin \frac{1}{x}$ sur (0,1)

M - un petit pb en 0 ......
essayez de voir si cette proposition est vraie ?
Lundi : petit test d'1/4 d'heure .....

c)A la fin de cette leçon beaucoup d'étudiants sont très fortement déstabilisés ;en effet au début de l'heure ils pensaient que la modification des valeurs d'une fonction en un point avait une incidence et sur l'intégrabilité de la fonction (la continuité étant très souvent implicitement considérée comme nécéssaire) ,et surtout sur la valeur de l'intégrale. Ayant maintenant constaté avec beaucoup de difficulté que la modification des valeurs en un ,deux ,n points ne changeait pas l'intégrale, certains basculeraient dans l'excès inverse en pensant qu'on peut tout changer sur la fonction sans modifier l'intégrale ,ce qui ne manque pas de leur apparaitre comme tout à fait paradoxal .Ceci explique probablement l'engoument d'un grand nombre pour le faux énoncé :"toute fonction définie et bornée sur un intervalle fermé -borné y est intégrable"

23 janvier 1985 – (5° séance sur "intégrales") (5° séquence)

Test

1/4 h.

Soit $I = [0, 1000]_{\mathbb{R}}$
$f : I \to \mathbb{R}$ $f(k) = k^2$ si $k \in \mathbb{N}$
$f(x) = 1$ si $x \in I \setminus \mathbb{N}$
f est-elle intégrable sur I ? si oui $\alpha = \int_I f(x)\, dI(x)$

$J = [0, 2]_{\mathbb{R}}$
$g : J \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sin\sqrt{x}$
Pouvez-vous justifier le fait que g est intégrable sur J
$\beta = \int_J g(x)\, dJ(x)$ β peut-il être égal à $-7, -1, 0, \sqrt{2}, 10$

a) La première partie du test veut mesurer les étudiants qui ont à peu près compris la notion de "presque partout ," la deuxième partie veut mesurer si les procédures découpage et encadrement sont effectivement disponibles en situation d'action. On esperait aussi que la monotonie serait retenue comme un bon critère d'intégrabilité ;en fait c'est la continuité qui est retenue comme critère prioritaire d'intégrabilité ,alors que nous n'avons encore rien dit à ce sujet .C'est la raison pour laquelle la correction du test va déboucher sur l'étude des diverses conjectures liant continuité et intégrabilité .

Correction:

	oui	non	r s	
	tous	0	0	f intégrable sur [0, 1000]

X – h $[0, 1000] \to \mathbb{R}$ $h(x) = 1$ $\forall x \in I$
h intégrable et $\int_I h(x)\, dI(x) = 1000$

X'. elles ne diffèrent qu'en les points (h et f) ...

M. on dira que f et h sont égales "presque partout sur I" si elles ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.
Quel est le théorème qu'on a "montré" la dernière fois ?

X et M – si l'une est intégrable, l'autre également et la valeur des intégrales est la même.

M. donc f est intégrable puisque h l'est et $\int_I f(x)\, dI(x) = \int_I h = 1000$

Cette notion "égale presque partout" est très importante pour l'intégrale.

2 fonctions égales p.p. ... pour la continuité ...

X et M – si l'une est continue, on ne peut rien dire sur l'autre donc c'est une mauvaise ~~ho~~ notion pour la continuité.

est-ce que cette notion correspond à ce qu'on avait vu sur les 3 exemples
- masse de la barre densité très forte en 1 pt ne change rien

– aire ....

M - 2° point. g ? justification

Pouvez vous justifier ?

oui	non	PS
tous		

Quelle justification ?

X - $x \to \sin x$ monotone croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ donc g monotone croissante

M - qui a pris cette argumentation ? 12 personnes ~

M - autres propositions.

Br : - g n'est pas continue en 0, donc il y a un problème
g est continue sur $]0, 2]$
On sait que quand elle est continue elle est intégrable et comme il n'y a un pb. qu'en 1 point 0, elle est intégrable sur $[0, 2]$.

X - elle est continue en 0 !

X' - elle n'est peut être pas dérivable en 0

Br - Si elle n'est pas dérivable, elle n'est pas continue -

M - elle n'a pas de pb. de continuité en 0.

Br - c'est le contraire ..... (reconnait s'être trompé)

M - vous dites g continue $\xrightarrow{\text{sur } [0,2] \text{ fermé}}$ g intégrable.
Qui a utilisé cet argument ?

X - 13 environ

Ba. X' - la continuité n'intervient pas. Une fonction continue n'est pas forcément intégrable.

M - Vous avez un contre-exemple

Ba - la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x} = k(x)$ sur $[0,1]$

M - elle n'est pas définie en 0. donc sur $]0,1]$ ouvert en 0. On a bien insisté sur fermé.

X - et M - On a montré que l'intégrabilité n'implique pas la continuité

M écrit : Prop ① : g intégrable sur I $\not\Rightarrow$ g continue sur I

M - quelles sont les autres raisons ?

X - La continuité, mais en passant par le maximum et le minimum -
g continue sur 1 fermé borné $\to$ $\exists$ max et min. donc on peut encadrer g sur la subdivision

M - est-ce que ça prouve f intégrable ?

X - non . . . - - -

M - ça prouve qu'∃ encadrements sup et inf. mais on ne peut savoir s'ils sont proches.

X - ça va nous servir . . .

M - d'autres argumentations

Blanc - on divise I en autant d'intervalles qu'on veut → maj. min → S^+ et S^-

M - ce n'est pas la m. chose

Blanc - il n'a pas dit "en autant d'intervalles qu'on veut".

X - on ne peut pas dire : g étant définie sur un intervalle [fermé elle est intégrable.

M - quels sont ceux qui ont utilisé cette argumentation
5 environ.

M - qui réagit ?

X - propose $l = 1$ sur $[0,1]$, $= 2$ sur $]1,2]$ n'est pas continue et elle n'est pas intégrable

remous dans l'auditoire.

M - redit ce qu'on a déjà vu . . .

X' - vous avez plutôt dit que toute fonction monotone est intégrable.

M - qu'est ce qui semble sûr dans ces argumentations ?
refait

n intervalles égaux

Quel était l'encadrement ?

M et X - $\varepsilon \leq \frac{(b-a)(g(b)-g(a))}{n}$

marque "borné" M - donc si g est monotone sur . . .

récrit

Prop 2 : Si g est monotone sur I fermé
g est intégrable sur I

Prop. 3 (admise)
Si f est continue sur I intervalle fermé borné alors f est intégrable sur I

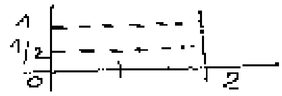
← insiste sur fermé parle de ∞.

M - il reste comme propriété g définie sur $[0,2]$ → g intégrable
est-ce que c'est vrai ?

X - non

M - c. ex.

GX - $\begin{cases} f(x) = 1/2 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ f(x) = 1 & \forall x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

M - prend sur $[0,2]$ et dessine 

2mn de réflexion.

M - f intégrable sur $[0,2]$

Oui	non	ns
25	10	4

à qui on donne la parole ?

X - à ceux qui n'arrivent pas à se décider.

X' - on ne peut pas utiliser le théorème -- sur les "égales p.p." --

M écrit. Prop. 4 Si f et g sont égales p.p. ...
et si f intégrable
g l'est aussi et a même intégrale

on ne peut pas l'utiliser ici, est-ce que ça prouve qu'elle n'est pas intégrable

non (général) ...

X'' - si on prend une subdivision -- parle de S^+ S^- (inaudible)

M écrit - Δ de $[0,2]$ $I_1, .., I_n$ $\bigcup I_n = [0,2]$

$S^+_\Delta = \sum f_i^+ |I_i|$ $S^-_\Delta = \sum f_i^- |I_i|$

f_i^+ majorant de f sur I_i
f_i^- minorant de f sur I_i

X'' - ... on ne peut pas les faire se rapprocher --

M - qu'est ce qui vous interdit de les approcher ?

X'' - c'est tjs ≥ 1

M écrit $S^+_\Delta - S^-_\Delta \geq 1$

si c'est vrai, qu'est ce qu'on pourra en déduire ?

XX - qu'elle n'est pas intégrable.

M - Raison pour penser ça ?

X - - dans les intervalles, il y a tjs des réels et des rationnels

M - ...entre 2 rationnels, il y a tjs un irrationnel
entre 2 irrationnels, ——— " ——— rationnel

X - et M donc $f_i^- \leq 1/2$ et $f_i^+ \geq 1$

M - Qu'est ce que ça va donner ? si on évalue de $S^+_\Delta - S^-_\Delta$ ...
tout le monde peut minorer cette (quantité)

X - par 1/2 fois la somme des ...

M. écrit : $S_\Delta^+ - S_\Delta^- = \Sigma(f_i^+ - f_i^-)|I_i| \geq \Sigma \frac{1}{2}|I_i| = \frac{1}{2} \underbrace{\Sigma|I_i|}_{\text{longueur de } [0,2]} = \frac{1}{2}\, 2$

$= 1$.

attention:
Cette conjecture (g définie sur un fermé borné ⇒ g intégrable) a été affirmée plusieurs fois par vous.

→ (il y a le silence, brusquement, dans l'amphi).

M. reprend oralement la démonstration.

Bi - ... Vous pourriez nous réécrire ... qu'on voit tout !

M - Qu'est ce que vous voulez ...

Bi - la conjecture ...

M - écrit : <u>Prop</u>: Une fonction f <u>bien</u> définie sur un intervalle fermé borné [a,b] n'est pas forcément intégrable
(par ex. $f(x) = 1$ si $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ et $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [a,b]$).

Bi - (murmure : ce n'est pas une propriété, ça) ??

11h10 - pause -

11h25 — M - L'intégrale est une procédure math. qui permet de résoudre tels types de pbs (physiques).
récapitule les propositions vues ...
Vous prenez 2 mn pour réfléchir : quelles sont les questions brûlantes auxquelles vous voulez qu'on réponde rapidement et quelles sont les conjectures que vous voulez formuler ?

b

5 mn pendant lesquelles M. écrit au tableau :

Conjectures 1)	<u>Questions</u>

X - quand on a étudié le pb de la force, on a utilisé une primitive, alors on voudrait savoir ... par rapport à l'intégrale

X' - si f et g intégrables sur I, alors f+g intégrable

M - pousser la conjecture un peu plus loin ?

GX - intégrale de la somme = Σ des intégrales.

M - encore plus loin?

X' - $I = I_1 \cup I_2 \ldots$

M et X' - c'est une conjecture n°2 : $I = I_1 \uplus I_2$ alors $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$

X - c'est faux.

M - si elle est vraie, on peut pousser jusqu'où?

X'' et M - Si $I = \uplus I_n$ alors $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f + \cdots + \int_{I_n} f$

GX - on l'a construite pour ça.

M. la conjecture n°1, vous ne voulez pas la compléter?

Bl - produit d'une fction par λ ...

M - écrit $\int_I \lambda f(x)\, dI(x) = \lambda \int_I f(x)\, dI(x)$ λ = constante

Ces 2 propriétés là se résument? .. terme qui synthétise..

M et X - L'application qui à $f \xrightarrow{\phi} \int_I f$ est linéaire
$\{f \text{ intégrable}\} \to \mathbb{R}$

M - autre conjecture?

Ba - intégrale de f par g

M - est-ce que le produit est intégrable? qu'est ce que vous pens

X' - je ne pense rien!

à faire exercice

M - écrit $\int_I fg \overset{?}{=} \int_I f \times \int_I g$

XX - C'est faux!

M - travail à faire chez vous : regarder si c'est vrai
d'autres questions à régler?

X' - si f est définie sur un intervalle non fermé?

M – par ex $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$ est bien définie et ni. continue sur $]0,1]$.

je vais rajouter les questions :

- f bornée et f intégrable sur I (I intervalle fermé borné) on ne parlera que des intervalles fermés bornés.
  Quel rapport entre f borné et f intégrable..

exemple • et quel rapport entre $f \geq 0$ sur I et $\int_I f \geq 0$

M – Qu'est-ce qui se passe si on travaille sur $I =]0,1]$ par ex. et qu'on regarde la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
quelle (réponse) donner à la question : f intégrable sur I ?

GX – on ferme l'intervalle on donne 0 en 0

M – $f(0) = 0$ f est définie sur $[0,1]$, non bornée.
Que signifie alors f intégrable ?

X – si on fait une subdivision de $[0,1]$ ..

M – $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup .. \cup I_n$

X – on doit trouver un minorant et un majorant ...

M. écrit $s^+_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f^+_i |I_i|$

2 mn.

M – si découpage de longueurs égales, I_1 contient 0.
Qu'est ce que vous pensez de $f^+_{I_1}$?

Ba – on ne peut pas déterminer $f^+_{I_1}$.

M. le seul candidat possible c'est $+\infty$ qui n'est pas a priori un majorant!.
$\Rightarrow$ seule surévaluation possible de $\int$ est $+\infty$.
les sous-évaluations .. grossières

GX – 0

M – est-ce qu'elles grimpent à l'infini ---?
La définition qu'on s'est donnée ne peut pas servir si la fonction n'est pas bornée.
Qu'est ce qu'on peut dire sur borné et intégrable ?
On aurait pu le mettre ds la définition

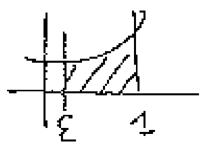
"si f est intégrable, alors par définition f est bornée".
donc si une fonction n'est pas bornée, on n'en parle pas.
ça ne résout pas le pb. inverse.

$\Rightarrow$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ ni prolongée en 0 n'est pas intégrable car non bornée.

M - 2° façon d'aborder $\frac{1}{x}$, c'est de dire sur tt intervalle
[ε, 1], elle est bornée.
est-ce qu'elle est intégrable

GX - monotone !

M -



$$F(\varepsilon)=\int_{[\varepsilon,1]} f(x)\,dI(x)$$

Qu'est ce qu'on peut se poser comme question ?

X et M - Que se passe t'il quand $\varepsilon \to 0$?
L'aire croît
M. donc $F(\varepsilon)$ est croissante
On anticipe nettement sur la suite.. Si çà tend vers une limite, on dira que la fction admet une intégrale sur $]0,1]$ -
On modifie la définition

M écrit : Si $F(\varepsilon)$ tend vers une limite qd ε tend vers 0, On dit que f admet une intégrale limite sur $]0,1]$

notation $\displaystyle\int_{0\leftarrow}^{1} f(x)\,dI(x)$

Je n'ai pas envie de parler de cette intégrale-là -
Pour le moment, on ne regarde que des fctions bornées sur un intervalle fermé borné.

M - rappelle les exercices à faire -

4.02.85 -

M - $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{E}_\Delta = \dfrac{b-a}{n} \left| f(b) - f(a) \right|$

$\left| \lim_{x \to b} f(x) - \lim_{x \to a} f(x) \right|$

Si f est monotone sur $]a,b[$ et f bornée, alors f ...

A propos des subdivisions

On avait affirmé que si $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{S}^+ = \{$ens. de toutes les sur-éval de l'intégrale de f sur $\Omega\}$

$\mathcal{S}^-$..., on avait affirmé que $\mathcal{S}^+ \gg \mathcal{S}^-$

vous allez dire c'est une évidence ...

pour montrer que $\mathcal{S}^+$ domine $\mathcal{S}^-$ qu'est ce qu'il faut faire ?
Soit $s^+ \in \mathcal{S}^+$ et $s^- \in \mathcal{S}^-$ - montrons que $s^+ > s^-$

un élt de s^+ se fabrique avec quoi ?

X ...(inaudible)

M - Soit $\Delta = \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ une subdivision de Ω

$s^+ = \sum f_i^+ \text{mes}(\Omega_i)$ $\quad f_i^+ = ?$

X - constante

M - oui, mais qui majore ... $f_i^+ = \text{Sup}\{f(t), t \in \Omega_i\}$
pour avoir une sous-éval. que faut-il faire ?

X ...

M - Ce n'est pas à priori la même subdivision ...
On prend. $\Delta' = \{\Omega'_1, \dots, \Omega'_p\}$ $\quad s^- = \sum f_i^- \times \text{mes}(\Omega_i)$

avec $f_i^- = \text{Inf}\{f(t), t \in \Omega'_i\}$

il s'agit de comparer les 2 choses :

$$\sum_{i=1}^{p} f_i^- \text{mes}(\Omega'_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} f_i^+ \text{mes}(\Omega_i)$$

- est ce qu'il y a un pb pour comparer ces 2 quantités

X ...

M - 

est-ce que c'est gênant pour comparer ...

X - la mesure de Ω_i on peut la trouver.

M - y a-t-il un rapport entre ces 2 mesures?

X' - non

M - à priori, aucun.

Ch - mais la somme reste la même -

M - vous êtes bien malin si vous pouvez comparer ces 2 subdiv.

X'' - remarque sur $f_i^- = f_{i_{\Delta'}}$ $f_i^+ = f_{i_\Delta}$

M - mais vous ne pouvez dire si $f_i^- \leq f_i^+$ car on n'est pas sur le même ensemble.

Solution?

X - c'est de voir l'ens des subdivisions de Ω_i /. à Ω'_i.

M - vous comprenez l'idée?

XX' - non

Ch - la subdivision qui recoupe les 2 - - -

M - on fait recouper les 2 subdivisions - on a une subdiv. qui découle naturellement des précédentes

M écrit: Si Δ et Δ' sont 2 subdivisions quelconques de Ω, il existe une subdivision Δ'' "plus fine" que les 2 précédentes

$$\Delta'' = \{\Omega_i \cap \Omega'_j \quad \begin{matrix} i=1\dots n \\ j=1,\dots,p \end{matrix}\}.$$

Qu'est ce qu'il faut retirer?

X - - -

M - il va y avoir des ensembles vides. On les retire - - -

j'écris ce que veut dire "plus fine"

$\Delta'' = \{\Omega''_1, \dots, \Omega''_\ell\}$

Δ'' est "plus fine" que Δ et Δ' car

$\forall i \quad \Omega''_i \quad \exists \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \quad \Omega''_i \subset \Omega_{k_1} \quad \Omega''_i \subset \Omega'_{k_2}$

M - à chaque fois, qu'est ce que je dois trouver?

Ch - une partition plus importante - - -

M - Si vous allez du mal à voir dans le cas général, regardez dans $\mathbb{R}$.

la subdivision + fine que 2 subdivisions est facile à obtenir (ds $\mathbb{R}$) intervalles - -

En quoi cela nous aide?

X - - -

M. Chacun des Ω_i, on peut les écrire comment?

X' - en Ω''

M - écrit $\quad \sum f_{i_{\Delta'}}^- \text{mes}(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i^- \text{mes}(\Omega''_j) \quad \Omega_i = \biguplus_{j=1,\dots,k_j} \Omega''_j$

M- $f_i^- = \mathrm{Inf}\{f(t),\ t\in\Omega_i\}$
Qu'est ce que vous pensez de $\mathrm{Inf}\{f(t),\ t\in\Omega_j''\}$ si $\Omega_j''\subset\Omega_i$

GX - elle est plus petite ..
M -

X - Monsieur, je ne comprends pas bien...
M - attendez, je term... -

$$\sum_{i=1}^{l} f_{i}^{+}\,mes(\Omega_i'') \leq \sum_{i=1}^{n} f_i^{+}\,mes(\Omega_i) \leq S_\Delta^{+}$$

$$S_{\Delta'}^{-} = \sum_{1}^{l} f_{i_{\Delta'}}^{-}\,mes(\Omega_i) \leq \sum_{1}^{l} f_{i_{\Delta''}}^{-}\,mes(\Omega_i'')$$

XX - brouhaha...
M - Qu'est ce qu'on peut dire entre les 2 choses? Est-ce que les quantités sont comparables?

XX - oui

M - je répète, si çà vous parait trop compliqué sur $\mathbb{R}^2$, faites le raisonnement sur $\mathbb{R}$

X' - c'est des "petits s^+" et des "petits s^-".

M. Cela démontre que S^+ domine S^- et qu'on peut trouver une division plus fine que 2 subdivisions dont les s. év. ne font que monter
les sur éval. ——— descendre
donc vous améliorez à chaque fois l'encadrement.

M - Dans vos tests, vous avez donné comme critère d'intégrab. la continuité alors qu'elle est monotone et qu'on n'avait pas vu le critère de continuité. C'est donc très fa. chez vous
On va le regarder ds un cas part.
la régularité - Qu'est ce que c'est

Gr et X et M) - $f : \Omega \to \mathbb{R}$ f est régulière sur Ω
si $\exists k$ (coeff. de dilatation) $|f(x) - f(y)| \leq k\, d(x,y)$

M - Pourquoi est ce que on a la continuité ?

X' - ...

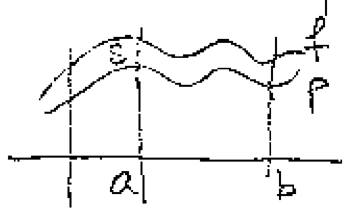
M - si $\varepsilon = 10^{-6}$ comment ~~trouver~~ prendre x et y - - ?
il suffit de prendre $d(x,y) \leq \dfrac{10^{-6}}{k}$

M_ Vous avez dû le voir un peu avec l'approximation des fonctions par les polynômes..

Ch ..- pour une fction constante, $\forall x$ et y, çà marche tjs.

M - c'est ce que vous dit la formule...
Vous avez cherché à approximer, pas en 1 pt, mais sur tou un intervalle.
Vous avez essayé de faire qqchose qu'on appelle
M écrit : "Uniforme" notion fine
On l'approchera seult un peu cette année.

M dessine



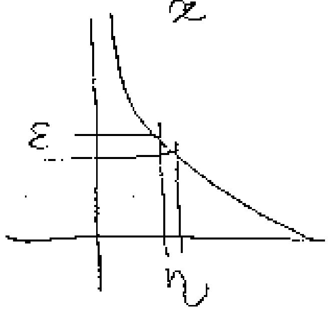
approximation qui soit la m sur tt l'intervalle : on appelle (çà) uniforme

X' _ - - -

M_ est-ce qu'on peut dire qu'ici la continuité est uniforme

X' - oui - - .

M - à un ε, vous faites une approximation avec $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$
çà dépend de k cte, de ε, pas du pt où on est
rappelez-vous $\frac{1}{x}$



ε donné
η de + en + petit lorsqu'on se rapproche de 0.

M _ revenons à notre pb. Si on veut regarder l'intégrabilité d'une fonction régulière, pourquoi est-ce que çà va marcher
Soit Δ une subd. de $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$.

$$\varepsilon_\Delta = s_\Delta^+ - s_\Delta^- = \sum_{i=1}^{n} (f_i^+ - f_i^-)\, mes(\Omega_i)$$

par quoi majorer cette somme si f est régulière ?

X _ on avait vu que - - - (inaudible)

M - Vous reliez le coeff. de dilatation et la dérivée
est-ce que régul $\Rightarrow$ diff. ou diff. $\Rightarrow$ régul.

Ch .- la 2°.

M - écrit f diff. sur Ω et $\exists k$: $|f'(t)| \leq k$ $\forall t \in \Omega$.
alors le théorème des accroist^{ts} finis donne
$$|f(x)-f(y)| \leq k \cdot d(x,y)$$

donc dès qu'on a une fction dérivable à dérivée bornée, on a une fction régulière.

Ce serait un critère ...

Question : Comment majorer cette somme ? $f_i^+ - f_i^-$

X - k que multiplie ... (inaudible)

M - $k \times \mathrm{Diam}(\Omega_i)$. Que va être le diamètre ?
les Ω_i seront des intervalles sur $\mathbb{R}$, rectangles, carrés sur $\mathbb{R}^2$

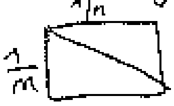
Ch - la distance des pts les plus ...
M - la plus gde distance entre 2 pts de Ω_i
$$\mathrm{Diam}(\Omega_i) = \sup_{\substack{x \in \Omega_i \\ y \in \Omega_i}} d(x,y)$$

c'est la borne sup. des distances entre 2 pts de Ω_i

(Un exercice sur les Sup et les Inf, à faire chez vous :
Si f est régulière alors $f_i^+ - f_i^- \leq k \cdot \mathrm{diam}(\Omega_i)$)

si vous n'y arrivez pas, on le fait ensemble Jeudi.
si on a ça, pourquoi est ce que c'est terminé ?

X - On a le diamètre ...
X - parle de surface et diamètre
M - est ce que surface ~~et~~ diamètre, c'est du même ordre ?



M et X) le diamètre est en $\frac{\sqrt{2}}{n}$
la surface est en $\frac{1}{n^2}$ c'est mieux — mais nous, c'est la distance qu'on a.

M - par quoi vous allez majorer ε_1 ?
les Ω_i est-ce tous les m. diamètres

XX' - non

M - on va introduire une nouvelle notion " maille d'une subdivisions " ... c'est le maximum des diamètres de Ω_i, $i = 1, \dots, n$.

M - lorsque les subdivisions ont intervalles égaux, la maille est la même.
mais en général, non.

Br .. on a le droit de prendre une subdivision inégale?

M - oui.

$f_i^+ - f_i^- \leq k \text{ diam}(\Omega_i) \leq ?$

GX - k fois la maille

$\leq k \text{ Maille}(\Delta)$

M. on se ramène à des choses uniformes -

M écrit $\mathcal{E}_\Delta \leq k \text{ maille}(\Delta) \times \sum_{i=1}^{n} \text{mes}(\Omega_i)$

à quoi c'est égal ça

Br - à Mes(Ω)

M écrit $\mathcal{E}_\Delta \leq k \cdot \text{mes}(\Omega) \times \text{maille}(\Delta)$

XX. k et mes(Ω) sont constants

M. maille(Δ), à vous de jouer dessus. $\mathcal{E}_\Delta$ donné, vous ~~trouvez~~ déterminez maille(Δ)

sur l'exemple de l'étang,

1° sol. ..

2° sol: on n'a pas les lignes de niveau, qu'est-ce qu'on avait? -- (murmures)

M. on avait fait un test

M écrit: Test sur l'intégrale de f relativement à une subdivision Δ

$T_\Delta = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \times \text{mes}(\Omega_i)$ quadrillage de l'étang Ω_i, test dans chacun des Ω_i

vous le prenez où le point ξ_i?

X - dans Ω_i

M écrit: ξ_i est un point choisi là où ça nous arrange dans Ω_i

il y a un choix possible -

si f est intégrable, à votre avis, quelle est la distance

$\left| T_\Delta - \int_\Omega f(t)\, d_\Omega(t) \right| \leq$

est-ce qu'on peut garantir ce nbre, si f est régulière.

Ch - Déjà, on peut majorer par $f(\xi_i) \times \ldots$

M - écrit $\sum_{\Omega} f_i^- \times mes(\Omega_i) \le T_\Delta \le \sum f_i^+ \times mes(\Omega_i)$

est-ce que c'est vrai? $\int_\Omega f(t)\, d\Omega(t)$

X - oui

GeXu - c'est inférieur à $\mathcal{E}_\Delta$

M. écrit $\left| T_\Delta - \int_\Omega f(t)\, d\Omega(t) \right| \le \mathcal{E}_\Delta = k\ mes(\Omega) \times maille(\Delta)$

Ceci nous donne un moyen de calculer l'intégrale avec une approximation de moins de $\mathcal{E}_\Delta$.

!! ça, c'est pour f régulière

M - pour f monotone, on avait :

$$\mathcal{E}_\Delta \le \frac{b-a}{n} \left| (f(b) - f(a) \right|$$

y a-t-il une ressemblance ?

GX - oui, $b-a$ = mesure de Ω
maille $1/n$

M - si jamais elle est régulière on a : $\le \frac{b-a}{n}\ k(b-a)$
sinon?
$b-a$ représente quoi ?

GX mesure de Ω et la maille

M - formules analogues, avec les m. ordres de grandeur, sous des hypothèses différentes.

(pause) -

M - Revenons un instant .. ds le cas des fctions régulières, on a pu s'en sortir.
sinon, c'est quelquechose de difficile sur lequel on reviendra la fin de l'année :

si f est seulement continue sur Ω fermé borné (= compact) alors

$(f_{\Omega_i}^+ - f_{\Omega_i}^-)$ tend vers zéro quand la maille de Δ tend vers 0.

faites bien la différence avec f régulière.
ici, on ne sait pas comment ça tend vers 0 (la vitesse à laquelle cela se passe est inconnue)

Ceci est un théorème admis (difficile)

M - Depuis le début j'ai insisté sur (fermé borné) pour avoir ce théorème là.

Ch - Ça veut dire que si on veut une précision pour l'intégrale

M. le théoricien dit $\exists$ maille mais on ne sait pas laquelle.

M - donc la conséquence de ce théorème admis est :

<u>Conséquence:</u>

Si f est continue sur $[a,b]$, f intégrable sur $[a,b]$

à faire $\Longrightarrow$ Si f est continue sur $]a,b[$, et si f bornée, alors question: est-ce qu'elle est intégrable?

M - je voudrais qu'on règle aujourd'hui 2 cas de figures vus la dernière fois.

si $f \geq 0$, $\int_\Omega f(M)\,d\Omega(M)$, qu'en pensez-vous?
$f(t) \geq 0 \ \forall t \in \Omega$

X - - - -

M - est ≥ 0, par définition de l'intégrale.
Que pouvez-vous dire de plus?
(ds le test) ... elle est strictement positive. Qu'en pensez-vous

Ch - si f n'est pas identiquement nulle ...

X - en un nbre infini de pts

Ch - alors elle n'est pas identiqt nulle

$\Longrightarrow$ M - Trouver des conditions suffisantes pour que $\int_\Omega f(M)\,d\Omega(M) > 0$
(f positive ne suffit pas) $\neq 0$

X - Si on prend la fonction $\begin{cases} 0 & \text{partout} \\ 45 & \text{en } 1/2. \end{cases}$
Cette fonction est ≥ 0 et $\int = 0$.
il faut donc qu'elle soit $\neq 0$ en 1 nbre infini de pts ...

M - à faire chez vous!
Je vous avais demandé de regarder si
f et g sont int. sur Ω, alors $f+g$?
Comment on va faire pour traiter ce pb!

GX - on prend des majorants de $f+g$ ..

M - Soit $\varepsilon > 0$. trouver un encadrement de l'intégrale de $f+g$ de précision ε.
Qu'est ce que vous proposez comme encadt ?

Br - - une précision sur $\int f$ et $\int g$

M - Soit Δ_1 une subd. de Ω donnant un encadrement de $\int f$ à combien ?

X - $\varepsilon/2$

M - ensuite

X - m. chose pour $\int g$

M - Soit Δ_2 - - - $\int g$ à $\varepsilon/2$ près
qu'est ce qu'on va faire maintenant

Ch - $\int f + \int g$ est un nbre avec une précision de ε
si on arrive à relier $\int f+g$ à $\int f + \int g$ . . .

M — Çà veut dire que vous avez déjà démontré que $f+g$ est intégrable. attention.

X - On va encadrer $f+g$

M - précautions ?

X et M - il faut les m. subdivisions

XX - On prend Δ une subdivision plus fine que Δ_1 et Δ_2

M - les encadrements s'améliorent donc,
Δ donne un encadrement de $\int f$ et de $\int g$ de précis $\leq \varepsilon/2$ toutes les 2.
maintenant ?

X — -(rien)

M - On a,
$$\overbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{i\Delta}^{-} \, mes(\Omega_i) \leq \int_{\Omega} f \leq \sum_{i=1}^{n} f_{i\Delta}^{+} \, mes(\Omega_i)}^{\varepsilon/2}$$
et
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} g_{i\Delta}^{-} \, mes(\Omega_i) \leq \int_{\Omega} g \leq \sum_{i=1}^{n} g_{i\Delta}^{+} \, mes(\Omega_i)}_{\varepsilon/2}$$

Br - On ajoute les deux lignes ;

M - membre à membre, on obtient
$$\sum_{i=1}^{n} (f_i^- + g_i^-) \times mes(\Omega_i) \leq \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} g \leq \sum_{i=1}^{n} (f_i^+ + g_i^+) mes(\Omega_i)$$

Sans division commune, on ne pouvait pas.

Br - l'encadrement de $f+g$ est $f_i^+ + g_i^+$ . . . .

$\Longrightarrow$ M - écrit $\sup_{t\in\Omega_i}(f(t)+g(t)) \leq \sup_{t\in\Omega_i}(f(t)) + \sup_{t\in\Omega_i}(g(t))$

à démontrer vous-même.
donc $f_i^+ + g_i^+$ est un maj. de $f+g$ sur Ω_i.
de m. $f_i^- + g_i^-$ - min. ———

$$\sum (f+g)_i^- \text{ mes.} \leq \int_\Omega f + \int_\Omega g \leq \sum (f+g)_i^+ \times \text{ mes.}$$

Br - On a écrit un encadrement de $\int f+g$.

M. est-ce que ça ne démontre pas que $f+g$ est intégrable ?
les 2 bornes sont distantes au plus de ε.
$\Rightarrow$ $f+g$ est intégrable
où peut-on coller $\int_\Omega f+g$?

X - elle est entre les deux sommes.

M - Qu'est ce que ça montre ça ?

Br - elles sont égales à ε près ($\int f+g$ et $\int f + \int g$)

M. écrit : $\left| \int_\Omega f + \int_\Omega g - \int_\Omega f+g \right| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$

et encadre.
est-ce qu'on est content ?

XX - Ben oui !

M - donc $= 0$.
donc $\int_\Omega f + \int_\Omega g = \int_\Omega f+g$

X. vous avez dit tout à l'heure que $\sup(f+g)$

M - Vous avez raison, j'ai écrit la chose ds le mauvais sens.

M réécrit les maj. min. - car c'est un passage difficile.

$$(f_i^- + g_i^-) \text{ mes } \Omega_i \leq (f+g)_i^- \times \text{mes } \Omega_i \leq (f+g)_i^+ \text{ mes } \Omega_i \leq (f_i^+ + g_i^+) \text{ mes } \Omega_i$$

A partir de la septième leçon nous ne diposons plus de prise de notes aussi précise, disons pour résumer qu'au cours de cette 7ème leçon va être définie la fonction $F(x)=\int^{x}f$, **intégrale dépendant de la borne supérieure.**

Les étudiants vont alors formuler l'essentiel des conjectures sur lesquelles nous travaillerons au cours des leçons suivantes; parmi ces conjectures, on trouve (dans le désordre) les suivantes:

-f strictement positive ,alors F strictement croissante !

-f continue, alors F dérivable!

-F est toujours dérivable (l'ancienne définition résiste bien!)

-aucune propriété n'apparait spontanément sur la continuité de F; après les questions de "m ." à ce sujet, certains pensent que F n'est pas toujours continue, en particulier si f est une fonction en escalier.

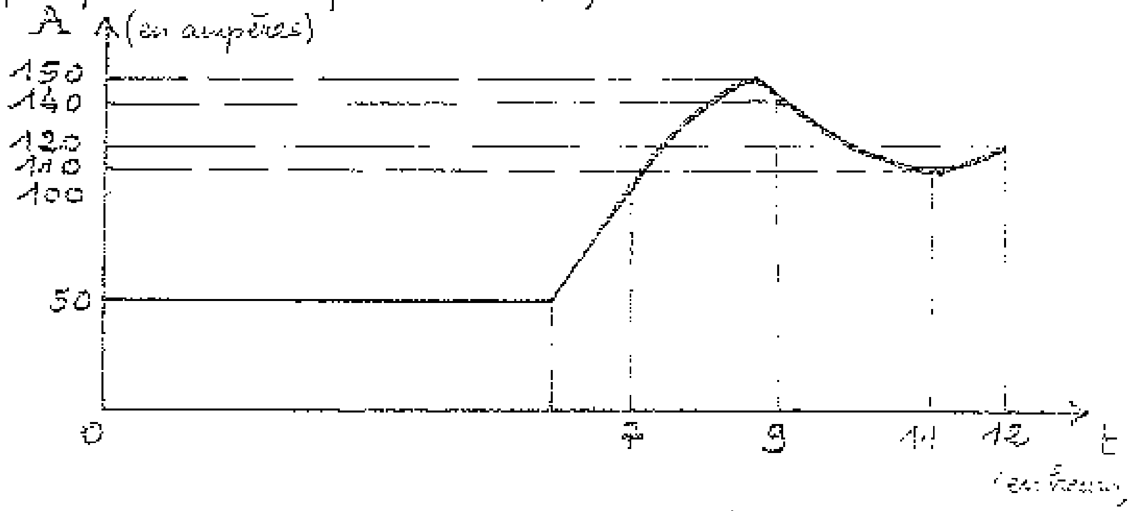
Contrairement aux autres années les questions d'intégrabilité des diverses fonctions rencontrées resteront au coeur des débats jusqu'à la fin de la séquence, en particulier les interrogations resteront très vives à propos des intégrales-limites alors qu'aucune théorie générale n'aura été faite à ce sujet .

1- Consommation de courant

Sachant que la puissance électrique P est le produit de la tension V par l'intensité A, (P=V.A) et que la consommation W est le produit de la puissance P par la durée T pendant laquelle cette puissance a été fournie : W = P.T , le problème est le suivant :

Un câble électrique débite une intensité A(t) pour fournir le courant d'un groupe de maisons, suivant une tension fixe V=220 volts.

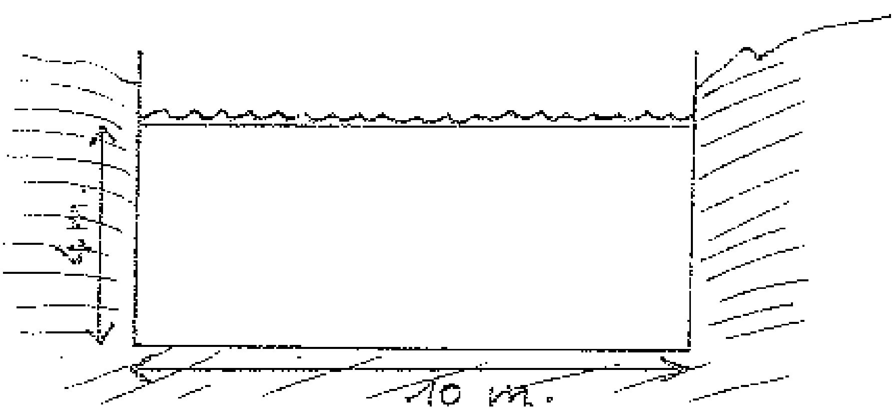
Voici le graphique de la fonction A(t) entre 0 h. et 12 h. :



Question :

Quelle a été la consommation W de courant de ce groupe de maisons entre 0 h. et 12 h. ?

2. L'écluse



Question : Quelle est la force exercée par la pression de l'eau sur cette écluse verticale rectangulaire de 10 m. de large et 4 m. de hauteur d'eau ?

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE
ET MEDICALE DE GRENOBLE

ANNEE 1984/1985

PEUG A PREMIERE ANNEE

SECTION A11

EXAMEN PARTIEL DE MATHEMATIQUES

– Lundi 10 février 1985 –

SANS DOCUMENT.

DUREE : 3 heures

Veuillez préciser votre N° de groupe sur chaque copie.

Chaque problème compte pour la moitié des points. Vos affirmations et résultats ne pourront être pris en compte que s'ils sont accompagnés des justifications nécessaires.

I – Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

et G définie, pour $x > 0$, par $G(x) = \int_{1/2}^{x} f(t)dt$.

1 1°) Construire le graphe de f.

2 2°) La fonction G est-elle continue, dérivable aux points $x = 1$, 2 et 3 ?

3 3°) Construire, sans utiliser le calcul de G, mais en justifiant vos choix, le graphe de G sur l'intervalle $[\frac{1}{4},+\infty[$.

3 4°) Calculer $G(x)$ pour $0 < x < +\infty$.

4 5°) Résoudre l'équation $G(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$ (c'est à dire donner le nombre et la valeur des solutions de cette équation).

II – Dans ce problème, il s'agit d'écrire un programme permettant de calculer une valeur approchée de $\ln(x)$ pour $x \geqslant 1$ donné, en n'utilisant que les opérations de l'arithmétique élémentaire (+, ×, – et /) et des valeurs approchées 0,69314 de $\ln(2)$ et –0,28768 de $\ln(3/4)$.
La séquence d'instructions demandée en 3°) et le programme demandé en 4°) seront écrits en "Pascal-Français". Les programmes BASIC ne seront pas considérés par les correcteurs.
Vous donnerez au début la signification des variables utilisées et vous pourrez aussi insérer des remarques précédées par REM:".....

2 1°) Ecrire le polynôme de Taylor $P^{0,75}_{k,\ln}(x)$ d'ordre k de la fonction $\ln$ au point $x_0 = 0,75$.

5 2°) Déterminer un entier k_0 tel que, pour tout $x \in I_0 = [\frac{1}{2}, 1[$, on ait

$$|P^{0,75}_{k_0,\ln}(x) - \ln(x)| \leqslant 10^{-3}.$$

Remarque : même si vous n'êtes pas parvenus à déterminer $P^{0,75}_{k_0,\ln}$, supposez pour la suite ce problème résolu et dans tous les cas désignez par $Q(x)$ un tel polynôme (i.e. tel que $\forall x \in I_0$, $|Q(x) - \ln(x)| \leqslant 10^{-3}$).

3 3°) Pour chaque réel $x \geqslant 1$, il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que $y = \frac{x}{2^n} \in I_0$, ou encore que $2^{n-1} \leqslant x < 2^n$. (On admettra ce résultat sans justifications).

Soit C la correspondance qui, à $x \geqslant 1$, associe le couple $(y;n)$ que l'on note aussi $C(x)$. Vérifier que :

$$C(3) = (0,75;2) \quad ; \quad C(5\pi) = (\frac{5\pi}{16};4)$$

et déterminer $C(10)$ et $C(50)$.

Ecrire une séquence d'instructions qui aura l'effet suivant :

si, au départ le nombre x est affecté dans la mémoire X de l'ordinateur, la séquence détermine $C(x) = (y;n)$ et affecte y dans la mémoire Y et n dans la mémoire N.
Schématiquement, on a, par exemple :

Etat initial :

X	Y	N
3	1,4	25

Etat après exécution de la séquence d'instructions :

X	Y	N
3	0,75	2

3 4°) Ecrire un programme qui, à partir de la lecture d'un nombre $\geqslant 1$, écrit une valeur approchée de son Log.népérien.
Voici ce qui pourrait rester sur l'écran lorsque ce programme a été exécuté une fois :

```
DONNER UN NOMBRE REEL(>=1)    3
SON LOG.NEPERIEN EST 1.0986 APPROXIMATIVEMENT
```

°o°

T.S.V.P.

Les résultats (95 copies = (31 + 32 + 32) 3 groupes) – 55 sur ce moyenne

1° le graphe de f est bien réussi par tous les étudiants sauf 2.
et 20 étudiants seulement ont fait une étude détaillée. Les autres ont tracé le graphe sans aucun commentaire ou presque.

bonne appréciation par les étudiants du fait que là n'est pas le problème que l'on leur demande de résoudre)

2° L'énoncé du faux théorème "f non continue $\Rightarrow$ G non dérivable" a été vu dans 31 copies (sous la forme ci-dessus ou utilisé de façon explicite) pour le point $x_0 = 1$.
19 autres étudiants ont contourné positivement ce pb. en démontrant que la dérivée à droite est différente de la dérivée à gauche ($G'_+(1) \neq G'_-(1)$).

sur ces 50 étudiants, 43 ont la moyenne au problème(*)

L'énoncé ou l'utilisation explicite du faux théorème :
"f non continue $\Rightarrow$ G non continue" (en $x = 1$)
a été vu chez 15 étudiants dont 11 n'ont pas la moyenne au problème.

Sur les 30 étudiants restants qui ne donnent aucun argument sur la dérivabilité de G en $x = 1$ ou sa continuité, 22 n'ont pas la moyenne au problème.

((*) pour ces étudiants "f non continue" ne perturbe pas le problème de la continuité de G, mais pose celui de la dérivabilité de G)

3° le graphe de G est massivement bien réussi ! Peu de graphes discontinus (4%). 17 étudiants ont fait un tableau de variation alors que 28 autres ont utilisé des arguments (de croissance, positivité de f) pour tracer le graphe ($G \nearrow$ si $f \geq 0$) ... D'autre part, le tracé entre 1 et $\frac{1}{2}$ est bien compris (l'intégrale dans le sens négatif de l'axe d'une fonction négative est un nombre positif).

52 étudiants ont plus que la moyenne à cette question, c'est-à-dire ont noté 2 au moins des 3 points suivants, sur le graphe :
- la non dérivabilité en 1
- la "linéarité" entre $x = 1$ et $x = 3$
- $G(1/2) = 0$

Les théorèmes généraux sont très peu cités (le tiers des étudiants) ou explicités.

4° Calcul de $G(x)$ pour $0 < x < +\infty$.

47 étudiants calculent les primitives et ajustent les constantes.
(45 de ces étudiants ont une note globale supérieure à la moyenne au problème).
Mais ce résultat est-il le fait d'une bonne représentation de l'étudiant de l'intégrale comme aire, ou le reflet d'un mécanisme (bien rodé) de la relation de Chasles ?

parmi les calculs faux, on trouve :

$$\int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^\infty \quad ; \quad \int_{1/4\infty}^{1/2} + \int_1^3 + \int_3^x$$

$$\int_{1/2}^x \ln t\,dt - \int_1^x 3\,dt - \int_3^x t\,dt$$

ou les 3 primitives $\ln x$, $3x$ et $\frac{x^2}{2}$ sur chacun des intervalles.

5° $G(x) = 0$

40 étudiants donnent $\frac{1}{2}$ comme solution évidente.
(d'autres le retrouvent par le calcul de $G(x) = 0$)
mais 21 seulement disent que c'est la seule solution dans $]0,1[$.
L'existence d'une solution dans $]1,3[$ est bien traitée, mais l'utilisation du "théorème des valeurs intermédiaires" se fait... sans le dire dans la plupart des copies.

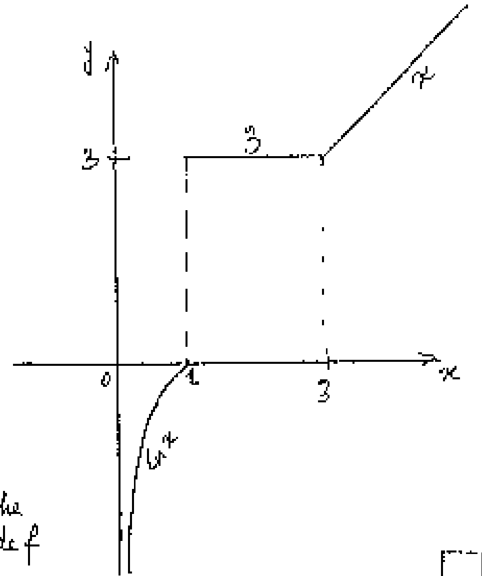
Pas de solution dans $]3,+\infty[$ est bien traité aussi :

retour ou appel au graphe de G pour vérifications
ou
résolution aveugle de $G(x) = 0$ d'après les calculs de (4°).

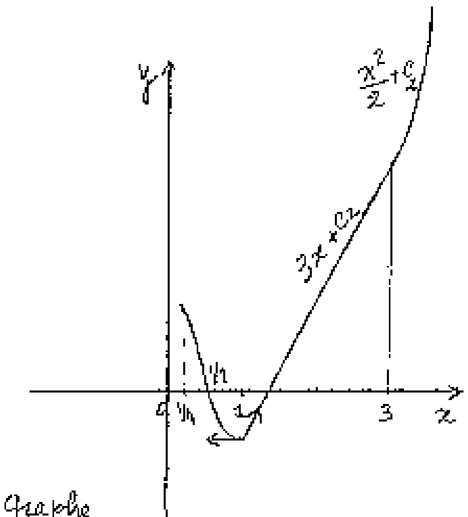
Partiel n° 1
Février 1985

Deug A 11.
Grenoble.

problème n° 1.



graphe de f



graphe de G

Quelques Résultats :

		nbre d'étudiants de ces groupes :		
	numéro du groupe	111	112	113
Question n° 2	f non continue ⇒ G non dérivable	16	8	7
	$G'_+(1) \neq G'_-(1)$	3	10 dont	6
	dont – ont la moy.	15	18	10
	f non cont ⇒ G non continue	2	6 dont	7
	dont – n'ont pas la moyenne	1	5	5
renseignements généraux	nombre d'étud. ayant la moyenne au pb. entier	20 sur	20 sur	15 sur
	nombre de copies	31	32	32
Question 4	Calcul de G avec ajustement des constantes	15	18 dont	10
	dont – ont plus que la moyenne	13	18	10
Question 5	$G(x)=0$ 1/2 solution évidente	17	12	11
	unicité sur $]0,1[$	6	11	4

Deug A11
Université Scientifique et
Médicale de Grenoble

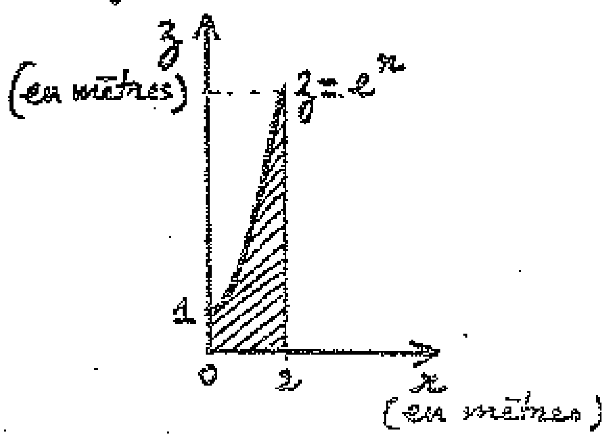
23 Mai 1985

durée : 1 heure

test de Maths

---

1. Calculer le volume V en m^3 du solide de révolution obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la plaque suivante:



2 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante:

$$x^2 - \int_0^{\pi} \sin(t^2)\,dt + 4 = 0$$

3 - Calculer $\int_0^{2\pi} ch(\pi - x) \sin x \, dx$

4 - Donner une primitive de la fonction définie par:

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{4x^2 + 4x + 10}$$
