i.r.e.m.

UNIVERSITE PARIS VII

LES REELS : quels modèles en ont les élèves ?

PAR: Jacqueline ROBINET

cahier de didactique des mathematiques

numéro 21

LES REELS : quels modèles en ont les élèves ?

Un certains nombre de travaux ont traité des difficultés que rencontrent les élèves dans le maniement des décimaux jusqu'en seconde. Il nous a semblé que ces difficultés à propos de décimaux pouvaient à leur tour créer des méprises dans l'idée que les élèves se font des nombres réels. Or nous prensons qu'une bonne conception des nombres réels pourrait améliorer les conditions d'apprentissage de certaines notions d'analyse, en particulier celles qui font intervenir les nombres réels dans leur formalisation : convergence des suites ou des fonctions par exemple. Notre propos est d'essayer de repérer du mieux possible les modèles qu'ont les élèves à propos des nombres réels ; la connaissance de ces modèles nous serait en effet utile pour éclairer et tenter d'améliorer les divers disfonctionnements repérés dans l'utilisation des nombres réels (soit pour des calculs, soit pour des formalisations dans des problèmes plus complexes)[*] .

Il y a à l'heure actuelle dans l'enseignement français deux périodes où l'on fait spécifiquement un apprentissage de la notion de nombre réel, c'est en 4è-3è[**] d'une part et en première année après le baccalauréat scientifique d'autre part. De l'enseignement de 4è-3è, il ressort que les professeurs sont assez mal à l'aise ; en effet ils introduisent la notion de développement décimal illimité, mais une fois cette introduction faite, la notion n'est plus jamais utilisée (il n'y a ni problèmes, ni exercices prévus sur ce sujet).[***] Du côté des élèves, il n'y a pas encore d'étude approfondie sur leurs conceptions des nombres réels ; les études existantes ont porté de façon plus précise sur les nombres décimaux.[***]

Notre recherche vise plus précisément l'interaction entre les conceptions des élèves à propos des nombres réels et les apprentissages des notions d'analyse ; nous ne nous intéresserons donc qu'aux élèves à partir de la première scientifique[****] , en effet il ne nous est pas utile d'étudier les modèles des élèves en fin de troisième[**] puisque, tous les élèves ne passant pas en seconde[*****] , il n'y a peut-être pas identité entre les

---

* Voir les travaux d'Aline Robert [15].

** Elèves de 14-15 ans.

*** Il y a des travaux en cours sur le sujet : J.M.Perrin Université Paris VII

**** Elèves de 17 ans (études longues).

***** Elèves de 16 ans (études longues).

modèles des élèves en fin de troisième et ceux des élèves en seconde ou en Première.

Nous allons étudier les modèles des élèves de Première, de Terminale scientifique, et de première année post-baccalauréat dans des études scientifiques (DEUG SSM à l'Université Paris VI et à l'Université Paris VII, IUT, quelques classes de mathématiques supérieures).

La confrontation entre les modèles des élèves de première et ceux des élèves de terminale nous permettra de contrôler si l'enseignement de notions périphériques à celle de nombre réel fait ou non évoluer les conceptions des élèves. Ensuite l'étude des modèles des étudiants pourra nous montrer comment un enseignement sur la notion de nombre réel fait changer (ou non) les conceptions, au moins temporairement (nous les avons étudiées peu de temps après l'apprentissage).

Pour réaliser notre projet, nous avons fait remplir un questionnaire, par des élèves de Première, Terminale et par des étudiants en première année d'études supérieures. Pour dépouiller ce questionnaire nous avons confronté les réponses des élèves et des étudiants avec les réponses apportées aux mêmes questions par tous les mathématiciens au cours du temps : d'Euclide et Aristote jusqu'à Dedekind et Cantor. En effet les études épistémologiques existantes (plus précisément celles faites par Dhombres, Ovaert et Verley, Caveing) nous sont très précieuses pour interpréter les réponses au questionnaire.

Pour éclairer notre exposé, nous allons rappeler brièvement et synthétiquement quelques repères historiques et épistémologiques sur la notion de nombre réel. Signalons, tout de suite, que ce bref rappel ne prétend être ni original (nous avons utilisé les travaux existants car nous ne sommes pas épistémologues), ni exhaustif et son seul intérêt est de mettre en lumière certains résultats qui pourront être utiles par la suite.

Un peu d'histoire.

Quelques points sont assez frappants lorsque l'on se penche sur l'histoire des nombres réels. Tout d'abord, si les Grecs ont été les pionniers puisqu'ils ont approché la notion d'irrationnel, ce n'est qu'avec Dedekind que la notion de nombre réel est complètement claire. Il a donc fallu énormément de temps pour passer de l'intuition grecque jusqu'à une construction effective ; c'est donc que cette construction nécessite des

des conceptions et des outils très élaborés. Ce qui est ensuite assez remarquable, c'est que les nombres réels ont deux origines ; l'une liée à la géométrie et à la notion de mesure, l'autre liée à des problèmes de calcul et de résolution d'équations. On voit au long de l'histoire, les deux points de vue s'affronter ou s'ignorer selon les époques. Enfin, on peut se poser la question de savoir si le temps très long de gestation de la notion de nombre réel n'est pas dû aux utilisations possibles de ces nombres : à quoi servent les nombres réels ? On peut répondre assez vite sur l'intérêt de l'outil "nombres réels" : cela permet de faire n'importe qu'elle mesure avec n'importe quelle précision ou de résoudre un certain nombre d'équations. Mais par contre le fait qu'il soit établi que les réels forment un corps ordonné complet qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous-corps n'a pas une utilité aussi immédiate. L'intérêt d'une telle construction est à mettre au compte des exigences de "l'âge de la rigueur" qui a pour objectif de fonder solidement l'analyse, c'est-à-dire sans aucun renvoi à l'intuition géométrique.

Etayons ces quelques remarques par une courte étude historique.

- Chez les mathématiciens grecs (Eudoxe, Euclide, Archimède), on parle de langage des "grandeurs" et il s'agit de les mesurer. Pour cela, Eudoxe a construit une théorie exposée dans le livre V des éléments d'Euclide, cette théorie des rapports de grandeurs (appelés "raisons") élimine le recours à la notion d'infini et à l'intuition géométrique. Cependant, dans cette théorie, seuls les nombres entiers ont vraiment le statut de nombres (c'est-à-dire qu'ils peuvent être additionnés et multipliés) ; par contre l'addition des raisons n'est pas définie, et le produit ne l'est que dans le cas de deux raisons en fait égales (le produit de deux grandeurs rectilignes est représenté par une grandeur d'un autre ordre puisqu'il s'agit de l'aire du rectangle associé). Pour Eudoxe et Euclide, les seuls rapports irrationnels étudiés sont ceux que l'on obtient par une construction géométrique à la règle et au compas c'est-à-dire de la forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$. Archimède fait progresser l'approfondissement de ces notions en introduisant le concept d'approximation d'un rapport irrationnel par des rapports rationnels (citons par exemple la troisième proposition du traité "De la mesure du cercle" : "le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des soixante et onzièmes parties du diamètre").

- Parallèlement, un courant dit "numéricien" se développe, il est caractérisé par le fait que tous les "nombres" sont utilisés pour le calcul sans que l'on se pose de questions sur la légitimité de telles opérations : par exemple, Héron utilise (en termes modernes) la suite $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \frac{A}{\alpha_{n-1}})$ pour calculer des valeurs approchées de $\sqrt{A}$. Cette pratique est très développée chez les mathématiciens indiens et arabes qui font preuve d'une grande habileté technique dans la résolution des équations : Aryabhata*, par exemple, détermine toutes les solutions entières des équations de la forme $ax \pm by = c$ où a,b et c sont entiers, en utilisant les fractions continues.

- L'influence des calculateurs numériciens va petit à petit se faire sentir en Occident, et jusqu'au XVII^{è}s, les mathématiciens vont adopter cette attitude formelle pour le calcul sans trop se poser de questions. A cette époque deux tendances amènent à une algèbrisation des notions concernées : grandeur et nombre.

Une tendance numérique :

★ Nicolas de Chuquet (1544) essaie de dégager le calcul des considérations géométriques.

★ Stevin introduit la représentation décimale des irrationnels (Traité des incommensurables grandeurs, 1634).

★ J. Wallis (Algèbre, 1685) et Newton (Arithmétique Universelle, 1685) développent des méthodes de calcul (pour approximer des racines d'équations, par exemple).

Une tendance géométrique :

★ Dans le traité d'Algèbre de Bombelli (1572), les rapports et les grandeurs sont identifiés à des nombres grâce au choix d'une grandeur unité.

★ Descartes, qui tient à rester dans le domaine géométrique, prouve l'existence de racines d'équations par des intersections de courbes (La géométrie, 1637).

Au XVIII^{è}s, le point de vue numérique est très développé, en effet les mathématiciens sont très occupés à résoudre les équations en exprimant les racines au moyen de radicaux portant sur les coefficients. Avec des mathématiciens comme Euler et Lagrange, l'algèbre et l'analyse vont être développées de manière autonome, la géométrie et la mesure des grandeurs apparaissent alors comme des applications.

Jusqu'au milieu du XIX^{è}s, les mathématiciens ont une utilisation implicite des propriétés de ce que nous appelons les sous-ensembles de $\mathbb{R}$; ils justifient leurs résultats par des propriétés intuitives de la droite. Par exemple, Cauchy et Bolzano utilisent la réciproque du critère de Cauchy

---

★ V^{è} siècle

et Bolzano s'en sert pour démontrer (en termes modernes) que tout ensemble non vide majoré de nombres réels admet une borne supérieure*. Dans "les notions fondamentales de la théorie des suites" et dans "le mémoire sur la série hypergéométrique" Gauss utilise la convergence des suites majorées, l'existence des bornes supérieures et celle des limites supérieures. Citons à ce propos Dedekind : "A propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croit constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur-limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques [......]. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme résolution de réfléchir jusqu'à ce que j'ai trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale". (Préface de "Continuité et nombres irrationnels, 1872).

L'utilisation de ces propriétés non démontrées est donc dénoncée et cela pour plusieurs raisons :

- Les considérations géométriques permettent de justifier mais pas de prouver, et Dedekind par exemple, sent bien la nécessité de fonder l'analyse (ne serait-ce que parcequ'il enseigne et donc qu'il doit démontrer).

- Certaines fonctions sont construites qui conduisent à des phénomènes inexplicables dans le cadre de la géométrie : par exemple les fonctions continues, nulle part dérivables (Bolzano).

- Il y a émergence de géométries non euclidiennes, cela porte un coup au prestige de la construction euclidienne, qui peut être contestée et donc sur laquelle on ne peut pas raisonnablement fonder l'analyse.

A partir de 1835, vont éclore des tentatives pour fonder la théorie des nombres réels sur une base purement arithmétique et donc incontestable.

La première tentative est celle de Bolzano (1835) dans son "traité sur la théorie des grandeurs". Autre tentative, c'est celle de Martin Olm qui projette de reconstruire toutes les mathématiques à partir du concept de nombre entier. Quelques découvertes antérieures ont permis à ces tentatives d'aboutir : les travaux de Vandermonde (1771), Lagrange (1770 et 1798), Ruffini (1799), Gauss (1801), Abel (1826) et Liouville (1851) sur les nombres algébriques et transcendants ont donné une meilleure connaissance des nombres irrationnels.

* Théorie des fonctions (1830)

Il va alors y avoir plusieurs constructions de l'ensemble des nombres réels uniquement élaborées à partir des propriétés des nombres irrationnels (celles-ci étant considérées comme bien fondées) :

- La méthode des agrégats de K.Weierstrass (établie vers 1863, publiée par Kossak en 1872). La notion de base est celle d'agrégat : $\frac{3}{5} = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$ ou encore $\frac{3}{5} = \{\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\}$ ce qui permet de définir chaque rationnel positif comme un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{Q}^+$ (modulo une relation d'équivalence). Weierstrass définit ensuite les agrégats infinis qui représentent soit des rationnels, soit d'autres nombres (modulo une relation d'équivalence). Ce nouvel ensemble peut alors être muni des opérations habituelles et en rajoutant la soustraction, on obtient tous les réels. Cela ne permettait pas à Weierstrass de montrer ce qui pour Dedekind est "le point central" à savoir que R est "continu" (c'est-à-dire parfait dans la terminologie moderne, continu étant réservé aux ensembles compacts).

- La construction de Dedekind (élève de Dirichlet et de Riemann). En 1858, celui-ci doit enseigner à l'école polytechnique de Zurich, et en rédigeant son cours sur "la première partie du Calcul différentiel et intégral", il sent la nécessité d'élaborer une théorie des nombres réels. Il intitule le premier paragraphe de son cours : "le domaine des nombres réels, sa continuité". Mais c'est en 1872 qu'il publie une construction dans "continuité et nombre irrationnels". Dans la préface, il insiste sur le fait que certains théorèmes fondamentaux de l'analyse sont fondés sur une intuition géométrique qu'il estime irrecevable pour fonder rigoureusement l'analyse. Il va s'appuyer sur la notion de rationnel : "le développement de l'arithmétique des rationnels est à vrai dire, supposé connu ici* ..." . Il rappelle que si $a > b$ et $b > c$ alors $a > c$, que si $a \neq b$ il existe une infinité de rationnels entre a et b (première manifestation d'une reconnaissance de propriété topologique dans $\mathbb{Q}$) et si a est rationnel, il existe deux parties A_1 et A_2 de $\mathbb{Q}$ telles que $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$, et telles que si a_1 est dans A_1 alors $a_1 \leqslant a$ et si a_2 est dans A_2 $a_2 \geqslant a$. Il considère alors un partage de $\mathbb{Q}$ (qu'il appelle d'ailleurs domaine R des nombres rationnels) en deux classes A_1 et A_2 telles que tout élément de A_1 est plus petit que tout élément de A_2, il appelle "coupure" une telle partition. Il montre quelle analogie on peut faire avec la droite, puis il considère l'ensemble des coupures que l'on peut construire sur $\mathbb{Q}$. Il montre qu'il existe des coupures qui ne sont pas engendrées par un rationnel, et chaque fois qu'une coupure n'est

---

* "Continuité et nombres irrationnels".

pas engendrée par un rationnel, elle crée un nouveau nombre entièrement défini par cette coupure et qui est irrationnel.

Dedekind prouve alors que la relation d'ordre de $\mathbb{Q}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ qui est un corps totalement ordonné dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ordonné. Il montre aussi qu'en renouvelant le procédé on n'obtient que $\mathbb{R}$.

- Méray publie en 1869 une construction rigoureuse des réels (c'est donc la première construction publiée). Il va considérer les suites de Cauchy de rationnels, il définit la notion d'équivalence pour celles qui ont une limite rationnelle et un passage au quotient donc $\mathbb{R}$. Cantor fait la même construction qui est publiée en 1872 par Heine*.

Dès 1872, Dedekind démontre que les premières constructions de $\mathbb{R}$ sont équivalentes et qu'elles permettent de démontrer :

- l'existence de bornes supérieures et de limites inférieures
- que toute suite de Cauchy est convergente
- que toute suite croissante majorée admet une limite.

Il a donc atteint son objectif : fonder l'analyse sur les propriétés arithmétiques des nombres sans aucune considération géométrique (la droite, le plan, l'espace devenant tout simplement $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$).

D'autres constructions apparaissent ultérieurement : celle de Stoltz fondée sur la méthode des développements décimaux (1885), celle de Kronecker fondée sur l'axiome du choix dénombrable (1887), celle de Hilbert fondée sur la méthode axiomatique (1869).

A partir de Dedekind, il n'y a plus de problème pour concevoir les réels chez les mathématiciens et leur utilité (autre que celle de fonder qui ne peut être motivante pour les étudiants) est claire : ils permettent de traiter des quantités avec une précision variable (ce que permet le développement décimal illimité).

Méthodologie

Questionnaire.

Avec la notion de réels, nous touchons à des notions qui ont fait l'objet de grandes controverses chez les philosophes et mathématiciens :

La notion de rationnel et celle d'incommensurable

La notion d'infini

La notion de continu.

* "Les éléments de la théorie des fonctions " (Journal de Crelle).

Nous avons donc essayé de trouver* des questions dont les réponses puissent nous éclairer sur les conceptions des étudiants à propos des trois points précédents.

1°) Comment vous représentez-vous les nombres réels ? Si vous en avez une image décrivez-là, vous pouvez par exemple imaginer et transcrire la réponse que vous feriez à un élève plus jeune vous posant la question : "Qu'est-ce qu'un nombre réel ?"

2°) Y-a-t-il un nombre réel (puis un rationnel, puis un décimal) compris entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$? entre π et $\frac{22}{7}$? entre π et 3,1416 ? entre $\frac{1}{3}$ et 0,3333... (développement décimal illimité) ?

3°) Y-a-t-il une différence si oui laquelle, entre les rationnels et les décimaux ? Y-en-a-t-il "plus" des uns que des autres ? Quels sont les avantages éventuels des uns des autres ? Quelles propriétés supplémentaires ont les réels ?

4°) Si on grossissait au microscope électronique (ou avec un ordinateur) la droite qu'est-ce qu'on obtiendrait comme dessin "ultime" ?
Même question pour la parabole.

La première et la quatrième questions sont complémentaires. En effet, on peut faire l'hypothèse que l'on aura des réponses de nature géométrique à la première question, la question 4 est alors nécessaire pour préciser les propriétés "accordées" par les élèves à la droite.

La deuxième question teste de manière différentielle les connaissances des élèves sur les décimaux, les rationnels, les irrationnels. Elle permet aussi de repérer l'utilisation de théorèmes "topologiques" du type : entre 2 nombres il y a une infinité de nombres dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{D}$ ou si au contraire ces théorèmes ne sont pas appliqués dans un ou plusieurs des ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{D}$. Cela donne aussi des indications sur le fonctionnement des développements décimaux chez les élèves.

La troisième question est destinée à faire préciser une différence entre nombre réel, écriture décimale et développement décimal, et à donner des indications sur les puissances respectives de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{D}$. A la deuxième partie de la question nous espérions avoir des réponses (au moins de la part des étudiants) concernant les propriétés spécifiques de $\mathbb{R}$ (complétude, indénombrabilité...).

---

* Ce questionnaire a été élaboré par A.Robert.

Les réponses à la question 4 (même si aucun modèle géométrique n'est exprimé dans la première question) peuvent, peut-être, donner des renseignements sur "l'idée" que les élèves se font de la droite. Par exemple, les propriétés de la droite qui sont spécifiques des réels (continu c'est-à-dire connexité, indénombrabilité) sont-elles aussi "intuitives" ou aussi évidentes que Dedekind l'espère :

"Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps".

Ceci dit, on peut déjà tenter de trouver dans les travaux épistémologiques concernant les réels des indications sur les modèles possibles.

1°) Rationnels - irrationnels.

Si chez les Grecs, seuls les nombres entiers avaient vraiment le statut de nombre, nous avons vu par contre que les mathématiciens ont assez souvent par la suite calculé avec les irrationnels sans trop se poser de questions. En fait, cela n'allait pas sans réserves de la part de certains d'entre eux. Un mathématicien allemand Stiffel écrit par exemple dans Arithmetica Integra (1544) :

"Puisque, en prouvant certaines figures géométriques, quand les nombres rationnels ne nous peuvent servir, ce sont les irrationnels qui interviennent et montrent exactement ces choses que ne peuvent montrer les rationnels..... nous sommes alors conduits à assurer que ce sont vraiment des nombres, conduits et obligés par le résultat que nous percevons comme réels certains et constants". A propos de la représentation décimale, il écrit :

" Il n'est cependant pas possible d'appeler vrai nombre celui dont la nature est de tendre vers la précision et n'a pas de proportion connue avec tout nombre vrai. De même qu'un nombre infini n'est pas un nombre, de même un nombre irrationnel n'est pas un vrai nombre, mais reste caché dans une nuée d'infini". [Traduction de Dhombres [5] p.127-128]. Les irrationnels prennent un statut plus numérique avec Wallis qui montre qu'ils sont des sommes infinies de rationnels ; c'est avec Dedekind que les opérations sur les irrationnels sont légitimées et il fait remarquer que personne avant lui n'avait démontré que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. [4,p.60].

2°) Fini - infini.

Rappelons brièvement les positions d'Aristote sur ce sujet : l'existence d'une pluralité d'objets infinie actuellement est contradictoire, mais elle est potentiellement infinie puisqu'on peut toujours ajouter un nouvel objet et donc obtenir un nombre plus grand.

Une grandeur infinie actuellement ne peut pas exister, elle ne peut être infinie en puissance que par la pensée (car le monde est borné).

Ensuite les conceptions ont évolué sous l'impulsion des mathématiciens ou des philosophes. Citons Tony Lévy, parlant des conceptions de Crescas (XIVès) :

"1°. Une grandeur infinie en acte n'est pas impossible ; au cours de son analyse Crescas proposera de définir le couple fini/infini non pas comme limité/illimité, mais comme mesurable/non-mesurable. Partant de là, il refutera l'argument aristotélicien du tout et de la partie.

2°. La grandeur peut croître à l'infini de la même manière que le nombre, en restant limitée. Cette analyse est l'occasion pour Crescas de faire un rapprochement audacieux entre infiniment grand et infiniment petit.

3°. Un nombre infini en acte n'est pas impossible. [....] Crescas est alors conduit à associer l'infinitude en acte à une multitude nombrable, susceptible de recevoir "l'idée de nombrement", mais non effectivement nombrée, car alors elle ne peut être que finie". (Lévy [12] p.6).

Au XVIIès. les mathématiciens sont bien conscients des difficultés liées à l'infini, Galilée (1638) observe que l'on peut considérer que deux segments de longueurs différentes ont le même nombre de points ; Pascal fait remarquer que par la correspondance $n \to 2n$, il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers. Dans les débuts du Calcul Différentiel, il y a eu des problèmes liés à l'attribution d'une valeur à l'infini, car les règles de calcul ne sont plus valables. Cette difficulté a été contournée par l'invention des différents ordres des infiniment grands et des infiniment petits (Leibniz).

Avec les travaux de Cauchy, Bolzano et Weierstrass, l'infini mathématique a cessé d'être une source d'inquiétudes métaphysiques (Bolzano utilise comme propriété des ensembles infinis le fait qu'ils puissent être mis en correspondance biunivoque avec une de leurs parties propres). Cauchy et Weierstrass se débarrassent des grandeurs infiniment petites ou infiniment grandes de Leibniz en définissant puis en algébrisant la notion de limite. Avec Dedekind, l'infini prend définitivement pied dans l'univers des concepts mathématiques. Dans "les nombres que sont-ils, à quoi servent-ils ?" (1888) il écrit : "Mais aucun de ces auteurs [Bolzano-Cantor] n'a essayé de transformer cette propriété* en définition de l'infini et de construire d'une façon rigoureusement logique la science des nombres sur cette base. "Il donne alors la définition suivante :

"Un système S est dit fini, si on peut l'appliquer dans lui-même de telle sorte qu'aucune partie propre de S ne se laisse appliquer dans lui-même ; dans le cas contraire, S est dit un système infini". A la suite, Cantor démontre que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (d'abord par la méthode des segments emboités, puis par celle de la diagonale), il élabore ensuite la théorie de l'équipotence, des nombres cardinaux, des types d'ordres et des ordinaux (en 1891, il établit que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Il reste un point qui interfère avec la notion de l'infini dans la notion de nombres réels, c'est la notion de continu.

3°) Continu.

Le continu intervient dans les éléments d'Euclide puisqu'on y demande qu'on puisse prolonger une droite finie en ligne droite "selon le continu". On peut retrouver là une idée aristotélicienne : "Je dis qu'il y a continuité quand l'une et l'autre des extrêmités par lesquelles deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et comme le nom l'indique, tiennent ensemble" (Physique, V,3).

On peut noter l'utilisation implicite de l'ordre total sur les grandeurs (dans les éléments d'Euclide) et l'utilisation explicite de l'axiome d'Archimède chez Archimède ; ces deux propriétés sont utilisées pour établir la divisibilité illimitée (Eléments, proposition X,1). De même, Aristote affirme la solidarité entre la notion de continu et la divisibilité illimitée : "Dans le continu, l'infini apparait en premier lieu ; c'est pourquoi les définitions qu'on donne du continu se trouvent utiliser souvent la notion de l'infini, en tant que le continu est divisible à l'infini". (Physique III,1). Le traitement du continu à l'époque d'Aristote et d'Euclide est caractérisé par une certaine difficulté à distinguer clairement le continu et l'infini (lequel correspond au dénombrable sans plus). C'est quand même très différent des thèses défendues par les partisans du point de vue finitiste (voir atomiste).

Jusqu'à Dedekind, ce sera sur des convictions géométriques que seront fondés les résultats faisant intervenir le continu.

On peut citer les quantités infinitésimales de Leibniz ; l'invention de Leibniz donnait la possibilité d'une extension qui eut conduit, si elle avait pu être poursuivie à l'époque de Leibniz, à une extension non

---

* Propriété énoncée par Bolzano utilisant la correspondance biunivoque.

archimédienne des nombres réels.

Cette construction n'étant pas envisageable au XIX$^{\grave{e}}$s, c'est une construction des réels qui va être opérée d'abord, celle de Weierstrass mais qui ne montre pas la propriété de complétude de ℝ. Or Dedekind insiste sur le fait qu'il a inventé sa construction précisément pour avoir cette propriété. Il veut conserver "les propriétés géométriques" de la droite, mais fonder sa construction uniquement sur les nombres. C'est quand même des propriétés géométriques qu'il extrait ses idées : il fait l'inventaire des propriétés des rationnels et il ajoute que beaucoup des points de la droite ne correspondent à aucun rationnel et il dit dans "Continuité et nombres irrationnels (Préface)" :

"La droite L est infiniment plus riche en individus ponctuels que le domaine R des nombres rationnels n'est riche en individus numériques . Si maintenant l'on veut et c'est bien ce que l'on souhaite, suivre ainsi arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffisent pas et il devient alors indispensable de raffiner de façon essentielle l'instrument R construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres tels que le domaine des nombres devienne aussi complet ou nous dirons tout de suite aussi "continu"* que la droite".

Plus loin il ajoute : "Je trouve alors l'essence de la continuité [...] dans le principe suivant : si tous les points de la droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la 1ère classe est située à gauche de tout point de la deuxième classe, il existe un et un seul point qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions" ([3] p.49,50,51). C'est sur cette notion de coupure qu'il va fonder sa construction, et il démontre alors que le système $\mathfrak{R}$ qu'il vient de créer est en langage moderne un corps totalement ordonné et que de plus :

"... le domaine $\mathfrak{R}$ possède encore la continuité, c'est-à-dire vaut la proposition suivante :

- IV Si le système $\mathfrak{R}$ de tous les nombres réels se subdivise en deux classes a_1, a_2 telles que tout nombres α_1 de la classe a_1 est plus petit que tout nombre α_2 de la classe a_2, il existe un et un seul nombre α par lequel est opérée cette division". ([3] p.58). Un peu plus loin (p.62) il affine : "l'un des théorèmes les plus importants s'énonce ainsi : "Quand une grandeur $\underline{x}$ croit constamment mais non au-delà de toute limite, elle tend vers une

* Bolzano cite dans Paradoxien des Unendlicher (1851) : "Il n'y a de continu que là ou se trouve un système d'objets simples (de points dans le temps ou dans l'espace, ou encore de substances) placés de telle sorte que chacun d'eux possède, à toute distance si petite soit-elle un voisin appartenant au système".

valeur limite".
..... le théorème équivaut au principe de la continuité....".
Cantor donnera un point final à la construction de cette notion en montrant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. C'est ainsi qu'en utilisant les études historiques et/ou épistémologiques, nous avons essayé de repérer chez les élèves et les étudiants un certain nombre de modèles déjà rencontrés ou non dans l'histoire.

Nous allons d'abord donner une description relativement qualitative des réponses au questionnaire en montrant justement les modèles mis en évidence par chaque question. Ensuite nous ferons une étude quantitative de l'apparition de ces modèles selon les niveaux et les enseignements. Enfin nous considérerons globalement les réponses à toutes les questions et nous essaierons de voir des correspondances, par exemple, entre un modèle "géométrique" à la question 1 et un modèle "discontinu" à la question 4 et nous verrons la fréquence d'apparitions des combinaisons de modèles en fonction du niveau scolaire, en particulier selon que l'on est explicitement avant ou après un apprentissage spécifique de la notion de réel.

Réponses à la première question.

Comment vous représentez-vous les nombres réels ? Si vous en avez une image décrivez-là. Vous pouvez, par exemple, imaginer et transcrire la réponse que vous feriez à un élève plus jeune vous posant la question : "Qu'est-ce qu'un nombre réel" ?

Aspect qualitatif

Il y a deux grandes catégories de réponses, une que nous avons noté N (la réponse fait allusion aux nombres) et une autre que nous avons noté G (la réponse fait allusion à une représentation des nombres réels sur la droite).

La catégorie N.

Elle se divise en sous-catégories N_o, N_1,... N_3 que nous allons détailler en donnant d'abord leurs caractéristiques, puis des exemples tirés des copies des élèves.

$\boxed{N_o}$

Cette catégorie est celle des réponses du genre : $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres entiers, relatifs, décimaux et rationnels.

<u>Exemples (citations d'élèves)</u> :.*"L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *comprend les ensembles*
$\mathbb{N}$ (entiers naturels)
$\mathbb{Z}$ (entiers relatifs, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$)
$\mathbb{Q}$ (ensemble des quotients)" (lèS)

.*"Les nombres réels font partie du plus grand ensemble de nombres que je connaisse. Un nombre réel peut donc être entier naturel, entier relatif ou nombre décimal. C'est-à-dire un nombre avec ou sans virgule, positif ou négatif"*. (lèS).

"
. *Un réel est un nombre* [illegible] *de la forme*

$$a,\ a_o a_1 \ldots a_n \quad \text{avec} \quad a,\ a_o, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$$
"
et $a_o \neq a_1 \neq \ldots \neq a_n \neq 9$ (DEUG)

On peut penser que ces formulations correspondent à des modèles où les irrationnels n'ont pas droit de cité. Cela semble confirmé par la formulation suivante :

."*L'ensemble des nombres réels comprend les entiers positifs ou négatifs, les fractions et les rationnels.*
$\mathbb{R}$ = *l'ensemble des nombres mesurant des longueurs et leurs opposés.*"

La première phrase exclut les irrationnels, la seconde phrase à l'air de les récupérer, mais comme longueurs.

$\boxed{N_1}$

Nous avons codé ainsi les copies où R contient $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et quelques autres nombres (quelques irrationnels ou tous les irrationnels).

<u>Citations.</u>

"Pour moi les nombres réels sont tous les nombres. L'ensemble $\mathbb{R}$ *inclut les nombres de la forme 1, 2, 3 (c'est-à-dire* $\mathbb{N}$)*ou -1, -2, -3 (donc* $\mathbb{Z}$) *mais aussi ceux de la forme* $\frac{a}{b}$ *(avec* $a,b \in \mathbb{R}$ *; c'est* $\mathbb{Q}$) *ou aussi de nombres qui ne sont pas issus de divisions, les irrationnels comme* $\sqrt{2}$ *et les transcendants* e *ou* π ... *Tout nombre non complexe appartient à* $\mathbb{R}$". (DEUG)

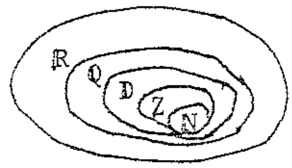
Parfois il n'est pas facile de classer une copie entre N_o et N_1.

"
. $\mathbb{R}$ *comprend tous les nombres entiers positifs et négatifs*
$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. " (Ecole normale d'instituteurs)

D'autant qu'il existe d'autres formulations ressemblantes.

" . *l'ensemble des réels est le plus vaste que je connaisse, il comprend les ensembles* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ "

Ceci accompagné du dessin



Les copies ont donc été classées systématiquement dans N_1.
Nous avons du donner des variantes à N_1, parce que les formulations n'étaient pas toujours aussi précises. J'ai ajouté :

. N_1' cela correspond aux copies où $\mathbb{R}$ désigne tous les nombres existants.

. N_1'' cela correspond aux copies où $\mathbb{R}$ désigne tous les nombres avec lesquels on peut calculer (en supposant que les élèves n'en excluent pas les irrationnels), ou qui sont le résultat de calculs.

Exemples (citations d'élèves).

" . *Ensemble de tous les nombres sous toutes les formes possibles existant.* "
(E N I) (N_1')

" . *Si je devais donner à un élève plus jeune une définition des nombres réels, je lui dirais que ce sont des chiffres (entiers ou non) et des nombres (-) obtenus par les multiples opérations mathématiques connues.* " (1èS) (N_1'')

" . *Il est impossible de se représenter l'infini, de même qu'il est difficile de se représenter l'infiniment petit. Il n'y a pas véritablement d'image pour un nombre réel. Toutefois un nombre réel est un nombre qui "existe".* " (HX)* (N_1')

" . *Les nombres réels représentent l'ensemble de tous les nombres qui existent.* "
(N_1') (T.D)

Lorsque nous avons dénombré les modèles, nous avons regroupé N_1, N_1' et N_1'' car nous pensons que tous les élèves ont rencontré $\sqrt{2}$ et qu'ils le classent dans les nombres existants.

- $\boxed{N_2}$ C'est le code des copies où $\mathbb{R}$ apparait comme un ensemble contenant tous les nombres que l'on peut écrire sous la forme d'un développement décimal éventuellement illimité.

Citations.

"*Un nombre réel est un nombre qui peut avoir une infinité de chiffres après la virgule (positif ou négatif)* " (T.D)

* Mathématiques Supérieures.

. "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *$\mathbb{R}$ comporte des nombres dont le développement décimal est illimité et non périodique."* (HX)

. "*Soit Δ l'ensemble des développements décimaux illimités* $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ *un nombre réel est un élément de l'ensemble* $\Delta /_{\Delta_9}$." (DEUG)

. "*Un réel c'est un nombre qui peut avoir une virgule après laquelle on peut écrire autant de chiffres et même plus que l'on veut.*" (HX)

. "*Un réel irrationnel a un nombre infini de décimales sans période.*" (HX)

. "*L'ensemble des nombres réels comprend les nombres fractionnels et décimaux (quelque soit la partie décimale du nombre) positif ou négatif.*" (lèS)

- $\boxed{N_3}$

Nous avons placé dans cette catégorie les copies où il apparait nettement que $\mathbb{R}$ est une complétion de Q.

. "$\mathbb{R}$ = $\mathbb{Q}$U *les irrationnels*." (DEUG)

. "*Un réel est une limite de suite de rationnels.*" (HX)

."*Les réels sont un corps qui compose l'ensemble des entiers naturels, relatifs, des décimaux, les rationnels et qui permette de combler les trous laissés par les rationnels par des nombres irrationnels* R = Q+*irrationnel*". (DEUG)

Certaines des formulations des élèves ou étudiants se font l'écho des difficultés qu'a pu "traverser" la notion de nombre réel au cours de son histoire.

."*L'ensemble* $\mathbb{R}$ *est un ensemble qui contient tous les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels, les irrationnels et tous les nombres compris entre ces nombres*" (DEUG)

L'aspect de corps maximal de $\mathbb{R}$ est ici poussé jusqu'à l'absurde.

- "[*Un réel*] *c'est un nombre qui s'exprime à l'aide de nos chiffres usuels, mais contrairement aux autres* ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$) *il arrive que l'on ne puisse l'écrire de façon explicite rigoureuse*".

La méfiance vis à vis des irrationnels apparait ici, du fait que la représentation décimale est infinie pour un irrationnel, elle est donc "non rigoureuse".

On retrouve ici une opinion qui ressemble fort à celle de Stiffel. Ainsi dans les modèles numériques, nous avons trouvé tous les points de vue numériques possibles.

- nombres avec lesquels on peut calculer.
- nombres représentés par leur écriture décimale.
- nombres réels comme complétion du corps des rationnels.

Il va donc être intéressant de comparer la fréquence d'apparition des différents modèles selon le niveau des élèves et donc l'enseignement suivi et la pratique effective acquise.

- Le modèle G.

Il apparait sous trois formes que nous avons groupées sous la lettre G :

- $\mathbb{R}$ est représentable par la droite, à chaque point correspond un réel.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des mesures de longueur (si on rajoute les négatifs).
- $\mathbb{R}$ est représentable sur un axe gradué.

Citations :

. *"Je me représente les nombres réels par une droite orientée, ayant une origine arbitrairement choisie en un point de cette droite. L'ensemble des réels est pour moi l'ensemble des abscisses de tous les points de cette droite rapportées au repère défini par cette origine et une unité de longueur également arbitraire".* (DEUG)

Certains précisent :

. *" Comme un axe qui n'ait pas de vide, cet axe aurait un repère et à tout point de cet axe sans exception correspond un réel".* (DEUG)

. *"Les nombres réels complètent sur une droite les trous laissés vides entre rationnels".* (DEUG)

D'autres sont plus vagues :

. *"Je représenterais une droite comportant les nombres réels représentés par des points de cette droite".*

. *"Règle graduée ayant une infinité de graduations aussi précises que l'on veut".* (DEUG)

D'autres sont savants :

. *"R est indénombrable. On peut le visualiser par une droite. Entre deux points, il existe une infinité de réels, cela traduit l'idée que l'on ne pourra pas les déterminer tous".*

D'autres sont plus étonnants :

. *"Si l'on peut associer un réel à un point, son ensemble serait l'espace (comprenant la droite et le point...)".*

Les modèles ainsi exprimés sauf lorsque c'est explicitement dit ("sans trous") ne peuvent pas être automatiquement associés au fait que leurs auteurs ont, même de manière très vague, une certaine idée du continu.

Même si on peut lire dans certaines copies :
"entre deux points différents, il sera toujours possible d'en trouver un autre" (1èS)

ou

"entre deux points distincts, il y a une infinité d'autres points". (HX)

Cela ne prouve pas que leur auteur attribue à la droite les propriétés spécifiques de $\mathbb{R}$. En effet, les propriétés énoncées dans les deux copies qui sont citées sont vraies dans $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$; elles seraient encore vraies si on ne représentait sur la droite que les points d'abscisses rationnelles ou décimales. De plus, on trouve dans des copies des points de vue qui ont l'air d'être les indices de confusion ou d'imprécision. Ainsi :
"On peut imaginer cet ensemble [$\mathbb{R}$] *sous la forme d'une droite où chaque point aurait son abscisse, nombre réel. Mais la notion de "nombres réels" reste toujours vague".* (1èS).

"Les nombres réels sont une suite infinie de nombres que l'on peut visualiser par une droite. Chacun des points de la droite (si on pouvait les visualiser) serait un nombre réel". (T.D.)

Dans toutes les copies auxquelles nous avons attribué la lettre G, les réels sont bien représentés par une droite, mais il n'est pas très sûr que cette droite ait, pour les élèves, toutes les propriétés qu'elle avait pour Dedekind.

Aspect quantitatif.

Pour rendre compte des résultats, nous avons regroupé entre elles les classes de mathématiques supérieures, les terminales et les différentes sections de DEUG. On obtient la répartition suivante :

Types de réponses / Classes	N_0	N_1	N_2	N_3	G	non réponses inclassables
Ecole normale 17	2 12%	5 29%	1 6%		2 12%	8 47%
Première S 26	5 19%	12 46%	5 19%		10 38%	0
Terminale A_1 D 62	10 16%	32 52%	4 6%		18 29%	2 3%
Terminale C E 152	9 6%	61 40%	25 17%	1	65 43%	13 9%
Math. Sup. 75	1 1%	33 44%	20 26% 27	13 17%	26 35%	0
Deug SSM 86	4 5%	16 19%	24 28%	13 15%	27 31%	11 13%
IUT 65 (fabrication mécanique)	12 18%	38 58%	8 12%	1 2%	12 18%	2 3%
Totaux 483	43 9%	197 41%	88 18%	27 ~~12~~ 5% (Supérieur)	160 33%	36 7%

Certains étudiants exposent un modèle numérique et un modèle géométrique à la fois, où un modèle N_2 puis un modèle N_3. Par conséquent les pourcentages sont donnés sur le nombre d'étudiants et pas sur le nombre de modèles exprimés.

Ce qui est frappant c'est que, à part peut-être pour les élèves instituteurs (mais mon échantillon est trop faible pour qu'il puisse signifier quoique ce soit), il y a entre 30 et 40 % des élèves qui affirment que la droite est une représentation de $\mathbb{R}$, et cela est stable de la lè à la math.sup.

La bijection entre la droite et $\mathbb{R}$ par l'intermédiaire d'un repère a l'air assez forte puisqu'elle permet à environ 35% des élèves de penser à la droite lorsque l'on parle des réels.

On verra plus loin* si pour les élèves la droite possède bien les propriétés d'infini non dénombrable et de connexité, qui sont nécessaires pour faire la différence entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

* pour l'étude de la 4ème question.

A part cela, on peut remarquer que lorsque le niveau augmente, les réponses se décalent de N_o vers N_3. On peut, peut-être, voir là l'effet (direct ou indirect) de l'enseignement.

En effet on ne peut avoir en 1è et en terminale que des modèles N_o, N_1 et N_2 puisque $\mathbb{R}$ est introduit par les développements décimaux illimités en quatrième, et qu'aucun autre apprentissage spécifique n'est fait de la troisième jusqu'au baccalauréat.

La construction éffective des réels par une complétion de $\mathbb{Q}$ en mathématique supérieure ou en DEUG ne donnent que 14% et 17% de réponses N_3 ; mais il faut remarquer que si tous les étudiants ont travaillé sur la notion de nombre réel, une grande partie d'entre eux n'avait (lorsqu'ils ont rempli le questionnaire) pas encore suivi le cours sur la construction des réels. Ce fait peut expliquer aussi que 26% d'entre eux en soient restés au développement décimal illimité.

La proportion de réponses N_2 est plus forte en DEUG et mathématiques supérieures, qu'en Première et Terminale. Cela est peut-être dû au fait qu'une grande partie des élèves de Première et de Terminale font d'autres études que des études exclusivement scientifiques (mathématiques et physique), et ce sont peut-être ceux qui ont le plus tendance à répondre N_2 qui font des études de mathématiques.

Pour préciser plus avant les modèles numériques, nous utiliserons les réponses à la question sur la différence entre rationnels et décimaux. (question 3).

Réponses à la deuxième question.

Y-a-t-il un nombre réel (puis un rationnel, puis un décimal) compris entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$? entre π et $\frac{22}{7}$? entre π et 3,1416 ? entre $\frac{1}{3}$ et 0,3333... (développement décimal illimité).

Cette question peut amener plusieurs types de réponses (qui peuvent être les mêmes pour chacune des 12 questions posées).

R_o . Il y a c entre a et b, c est réel. (exemple explicite).
R_1 . Il n'y a pas de réel entre a et b.
R_2 . Il y a un réel entre a et b.
R_3 . Il y a un réel, car il y a toujours un réel entre a et b ($a \neq b$)
R_4 . Il y a un réel, car il y a toujours une infinité de réels entre a et b ($a \neq b$).

En plus de ces réponses prévisibles, on trouve des réponses éventuellement dues à un excès de "conscience professionnelle"* de la part des étudiants, ils exhibent un irrationnel et un rationnel non décimal, ce qui est parfois assez compliqué à réaliser en pratique (code I).

Pour les rationnels on notera les réponses Q_o Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 et pour les décimaux D_o D_1 D_2 D_3 D_4.

Nous étudierons ensuite les exemples fournis par les étudiants.

Des réponses du type R_3 ou R_4 existent souvent pour 7/19 et 8/19, et voisinent avec un exemple. Pour π et 22/7 et π et 3,1416, on trouve moins de précision, on trouve plus souvent R_2 et moins souvent d'exemple.

En fait cela a peut-être amusé certains de chercher des exemples pour 7/19 et 8/19, mais ils se sont lassés ou ont trouvé que cela n'avait pas d'intérêt et n'ont pas donné d'exemples pour les autres, ou alors seulement un décimal sans d'ailleurs toujours préciser qu'ils avaient du même coup un réel et un rationnel (cela leur parait peut-être évident).

On peut remarquer que pour le 1er encadrement, le nombre de non réponses est à peu près le même pour les réels, les rationnels ou les décimaux. Pour la 2è inégalité, il y a plus de non réponses pour le rationnel, alors que les décimaux donnés sont des rationnels, mais les élèves cherchent peut-être inconsciemment un rationnel qui ne soit pas décimal, comme ils ont du mal à le trouver il ne répondent pas. Pour la 3ème inégalité cette tendance est encore plus forte.

(voir tableau des résultats page suivante).

---

*ou au respect d'un contrat implicite.

Entre 7/13 et 8/13 / Classes	R_0	R_1	R_2	R_3R_4	non réponse	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3Q_4	non réponse	D_0	D_1	D_2	D_3D_4	non réponse
Ecole Normale 17	3 18%	3 18%	5 24%		6 35%	8 47%		1 5%		8 47%	8 47%				9 52%
Première S 26	2 7%		2 7%	10+3 72%	3 11%	8 31%		2 7%	5+7 46%	4 15%	4 15%			5+9 54%	8 31%
Terminale A,D 62	17 27%	3 5%	23 37%	0+9 15%	12 19%	20 32%	3 5%	18 29%	0+6 10%	15 24%	16 26%	1 2%	23 37%	0+5 8%	17 27%
Terminale CE 152	54 36%	1	62 41%	36 24%	8 5%	75 50%	13 9%	44 29%	25 17%	6 4%	62 41%	10 7%	52 35%	23 15%	13 9%
Math-Sup. 75	26 35%		24 32%	15+10 33%	7 9%	46 61%	2 3%	20 27%	4+4 10%	5 7%	40 53%	1 1%	22 29%	4+4 10%	10 13%
DEUG SSM 86	23 27%	3 3%	39 45%	3+10 15%	11 13%	33 44%	8 9%	24 28%	1+5 8%	12 14%	27 31%	13 15%	23 27%	5+1 6%	20 23%
IUT 65	6 9%	3 5%	39 60%	0+10 15%	7 11%	12 18%	7 11%	28 43%	0+8 12%	10 15%	10 15%	4 6%	34 52%	0+8 12%	3 14%
Totaux 483	131 27%	13 3%	194 40%	106 22%	54 11%	202 42%	27 6%	137 28%	66 14%	60 12%	167 35%	29 6%	154 32%	64 13%	86 18%

Entre π et 22/7 / Classes	R_0	R_1	R_2	R_3R_4	NR	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3Q_4	NR	D_0	D_1	D_2	D_3D_4	NR
Ecole Normale 17	1 5%	4 23%	4 23%		8 47%	4 23%	2 12%	1 5%		10 59%	8 47%	1 5%			8 47%
Première S 26	1 4%		2 8%	4+8 46%	11 42%	2 8%	2 8%	1 4%	1+6 27%	14 54%	3 11%		2 8%	1+7 31%	12 46%
Terminale A,D 62	10 16%	5 8%	23 37%	1+5 10%	18 29%	5 8%	10 16%	19 31%	0+2 3%	26 42%	12 19%	4 6%	23 37%	0+2 3%	21 34%
Terminale CE 152	45 30%	1	57 38%	30 20%	19 13%	50 33%	17 11%	48 32%	18 12%	20 13%	58 39%	10 7%	53 35%	22 15%	19 13%
Math-Sup. 75	21 28%	1 1%	24 32%	11+9 27%	12 16%	26 35%	4 5%	21 28%	4+6 13%	17 23%	36 48%	2 3%	22 29%	4+4 11%	12 16%
DEUG SSM 86	19 22%	2 2%	38 44%	1+10 13%	18 21%	14 16%	10 12%	28 33%	0+7 8%	29 34%	26 30%	9 10%	22 29%	0+7 8%	26 30%
IUT 65	4 6%	5 8%	37 57%	0+7 11%	12 18%	5 8%	10 15%	30 46%	0+3 5%	17 26%	7 11%	5 8%	33 51%	0+6 9%	14 21%
Totaux 483	101 21%	18 4%	185 38%	86 18%	98 20%	106 22%	55 11%	148 31%	47 10%	133 28%	150 31%	31 6%	155 32%	53 11%	112 23%

Entre π et 3,1416 / Classes	R_0	R_1	R_2	R_3R_4	NR	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3Q_4	NR	D_0	D_1	D_2	D_3D_4	NR
Ecole Normale 17	1 5%	3 18%	6 35%		7 40%	4 23%	1 5%			12 71%	9 53%	1 5%			7 40%
Première S 26			3 11%	4+5 35%	14 54%	1 4%	2 8%		1+5 23%	17 65%	2 8%			2+5 27%	17 65%
Terminale A,D 62	6 10%	5 8%	22 35%	1+4 8%	24 39%	1 2%	7 11%	19 31%	0+2 3%	33 53%	8 13%	7 11%	17 27%	0+2 3%	29 47%
Terminale CE 152	40 27%	2	58 39%	30 20%	25 17%	44 29%	20 13%	40 26%	19 13%	34 23%	49 33%	13 9%	47 31%	20 13%	29 19%
Math-Sup. 75	15 20%		27 36%	11+8 25%	17 23%	23 31%	1 1%	21 28%	6+4 13%	24 32%	34 45%	3 4%	22 29%	4+2 8%	16 21%
DEUG SSM 86	15 17%	2 2%	43 50%	6+1 8%	20 23%	7 8%	11 13%	33 38%	0+4 5%	31 36%	20 23%	7 8%	28 33%	0+5 7%	28 33%
IUT 65	4 6%	4 6%	36 55%	0+7 11%	14 22%	4 6%	9 14%	29 45%	0+3 5%	20 31%	7 11%	5 8%	33 51%	0+4 6%	16 25%
Totaux 483	81 17%	16 3%	195 41%	77 16%	121 25%	84 17%	51 11%	142 29%	48 10%	171 36%	129 27%	36 7%	147 31%	43 9%	142 30%

Il y avait peu de réponses R_3 ou R_4 (sauf en 1èS mais ce n'est pas déterminant puisque l'échantillon est assez petit). On trouve un certain nombre de formulations que j'ai rattachées à R_3 ou R_4 :

- Entre deux entiers il y a une infinité de décimaux.
- Entre deux réels on peut trouver un décimal.
- On peut toujours trouver un rationnel entre 2 réels donc un réel.
- Entre deux rationnels, il y a une infinité de réels.
- Il y a toujours un réel non rationnel entre 2 rationnels.

1) - Entre deux réels il y a une infinité de réels.
- Entre deux rationnels il y a une infinité de décimaux.
- Entre deux rationnels il y a toujours un rationnel.
- Entre deux irrationnels il y a toujours un rationnel.
- Entre deux rationnels il y a toujours un réel.
- Il y a toujours un réel entre 2 rationnels (réel au sens d'irrationnel peut-être).

2) - Entre deux rationnels il y a une infinité de rationnels.

3) - Entre deux réels il y a une infinité de décimaux.

Les phrases 1, 2 et 3 apparaissent pour les 3 inégalités.

Classes / théorèmes	Ecole Normale	Premières S	Terminale A, D	Terminale CE	Math. Sup.	DEUG SSM	IUT	Totaux
1	0	16	20	25	27	21	9	109
2	0	18	13	20	14	17	8	90
3	0	21	12	18	10	13	5	79

. Ces théorèmes ainsi énoncés n'étaient pas nécessaires pour répondre correctement aux questions ce qui explique en partie leur faible emploi (il suffisait d'exhiber un décimal), mais il est intéressant de noter qu'en 1è où on est plus près de la quatrième et où l'on n'a pas encore fait un grand travail sur les suites et les fonctions, c'est la propriété des décimaux qui est le plus souvent citée alors que pour les mathématiques supérieures et les élèves de DEUG c'est la propriété des réels qui est le plus souvent citée.

L'effectif des élèves de 1è est de l'ordre du tiers des autres, or les théorèmes sont cités aussi souvent en 1è que dans les niveaux supérieurs, cela est peut-être dû au fait que les élèves en première, ayant plus de mal à calculer et à exhiber des exemples, préfèrent invoquer un théorème.

. On peut aussi s'intéresser à ceux qui prétendent qu'il n'existe pas soit un réel, soit un rationnel, soit un décimal.

Classes / 7/19 9/19	Ecole Normale	Première S	Terminale A, D	Terminale CE	Math. Sup.	DEUG SSM	IUT	Totaux
R_1	3	0	3	1	0	3	3	13 3%
Q_1	0	0	3	13	2	8	7	33 7%
D_1	0	0	1	10	1	13	4	29 6%
π 22/7								
R_1	4	0	5	1	1	2	5	18 4%
Q_1	2	2	10	17	4	10	10	55 11%
D_1	1	0	4	10	2	9	5	31 6%
π 3,1416								
R_1	3	0	5	2	0	2	4	16 3%
Q_1	1	2	7	20	1	11	9	51 11%
D_1	1	0	7	13	3	7	5	36 7%

En comptant toutes les réponses on trouve pour R_1 47 pour Q_1 139 pour D_1 96 soit respectivement 3%, 10% et 7% des occurrences possibles.

Globalement, "il n'existe pas de réel" apparait moins souvent que les autres; il y a sans doute donc bien l'idée qu'il y a plus de réels chez de nombreux élèves.

Pour π et $\frac{22}{7}$, et π et 3,1416 il y a beaucoup de réponses "pas de rationnels", mais il est possible que les élèves répondent ainsi parce qu'ils ne savent pas exhiber un rationnel qui ne soit pas décimal (ce serait pourtant facile avec un développement décimal illimité périodique, mais aucun n'y a pensé).

- Certains élèves font des réflexions qui n'entraînent pas forcément de mauvaises réponses mais qui sont intéressantes pour éclairer leurs conceptions :

- TA
- "Entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$, il y a tous les chiffres compris entre 0,368421 et 0,42

Exemple : 0,37.... ; 0,38... ; 0,39...."

- "$\frac{7}{19} \simeq 0{,}36842105....$ $\frac{8}{19} \simeq 0{,}42105263....$"

- TD
- "$\frac{7}{19} < ? < \frac{8}{19}$

$0{,}3684211 < 0{,}41364 < 0{,}4210526$"

- "$\pi \simeq 3{,}1416$ il n'y a donc pas de nombres décimaux [entre π et 3,1416]"
- "$\frac{7}{19} = 0{,}368421$ $\frac{8}{19} = 0{,}4210526$"

- "Entre π et $\frac{22}{7}$ il y a un réel 3,141888... un rationnel : un décimal 3,1418".

(On voit le souci de donner un réel qui ne soit pas décimal, mais l'étudiant ne remarque pas que c'est un rationnel tout comme 3,1418 qui est un rationnel mais pas satisfaisant puisqu'il est décimal).

- "Décimal ? j'ai oublié ce que c'était" - L'étudiant écrit "3,1416 = réel".
- "entre π et $\frac{22}{7}$ entre 3,14159 et 3,1428571 un réel oui, un décimal non, un rationnel non".

Mathématiques supérieures :

Dans ces classes nous avons trouvé beaucoup de réponses sophistiquées par exemple :

- entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$ un réel 0,387594... un décimal 0,4
  un rationnel $\frac{5}{12}$ = 0,41666...
- entre π et $\frac{22}{7}$ un réel 3,1422678... un décimal 3,1416
  un rationnel $\frac{31421}{10001}$ = 3,1417858...
- entre π et 31416 un réel 3,1415955... un décimal 3,141593
  un rationnel $\frac{314163}{100001}$

- "En additionnant 2 réels on obtient un réel ce n'est pas toujours le cas avec le cas avec les autres ⇒ R est clos".

Autres exemples de virtuosité ou de simplicité*.

. "Pour 7/19 et 8/19 $\sqrt{0,15}$; $\frac{15}{38}$; 0,4
Pour π et 22/7 $\sqrt{9,87}$; $\frac{2800}{2801}$; 3,142
Pour π et 3,1416 $\sqrt{9,86962}$; ; 3,141593"

. "Pour 7/19 et 8/19 il y a 0,4 donc un décimal, donc un rationnel donc un réel".

DEUG :

. Une vision assez réductrice de décimaux :

- "Il n'existe pas de décimal entre π et 3,1416 car ils ont la même partie décimale (3,1)".
- "Il existe un décimal entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$: $\frac{7}{19}$ + 0, ... 1"
- "$\frac{15}{38}$ qui est réel, rationnel et décimal 0,833..."

Ter D :

. "$\frac{7}{19}$ = 0,3684211 $\frac{22}{7}$ = 3,1428571 π = 3,1415927"

ou encore

"$\frac{7}{19}$ = 0,3684211 $\frac{22}{7}$ = 3,1428571 π = 3,1415927"...

---

* Remarque : La moyenne est souvent utilisée pour exhiber un réel ou un rationnel entre $\frac{7}{19}$ et $\frac{8}{19}$ y compris en donnant la réponse $\frac{1}{2}(\frac{7}{19}+\frac{8}{19})$, alors que les mêmes étudiants utilisent peu $\frac{1}{2}(\pi+\frac{22}{7})$ ou $\frac{1}{2}(\pi+3,1416)$ pour exhiber un réel entre R et $\frac{22}{7}$ ou entre π et 3,1416 ; tout se passe comme s'ils s'interdisaient d'additionner des nombres qui ne sont pas écrits avec le même type d'écriture.

On remarque dans tous ces exemples que s'il y a des confusions c'est au niveau des écritures décimales. L'écriture décimale avec des points de suspension est utilisée un peu n'importe comment, les points de suspension désignant tantôt un développement qui continue (toujours des 3) ou un développement infini mais où les valeurs décimales n'ont pas d'importance et cela parfois dans la même phrase :

un réel 0,387594... un rationnel $\frac{5}{12} = 0,41666...$

On perçoit aussi déjà une confusion entre les notions de réel, de décimal et d'écriture décimale, mais on va voir cela se préciser dans la 3ème question.

Avant de passer à cette question examinons le cas $\frac{1}{3}$ et 0,333... que nous avons pour l'instant laissé de côté.

Les réponses les plus courantes sont : "il n'y a rien", "il n'y a ni réel, ni rationnel, ni décimal", et parfois les étudiants ajoutent "parce-que $\frac{1}{3} = 0,333...$" ou "parce que $\frac{1}{3}$ et 0,333... représentent le même nombre" ou "parce que $\frac{1}{3}$ est la représentation rationnelle et 0,333... est la représentation décimale du même nombre".

Nous avons codé différemment ceux qui répondent qu'il n'y a rien sans commentaire et ceux qui justifient leur réponse.

classes / Types de réponses	Ecole Normale 17	Premiere S 26	Terminale A1 D62	Terminale CE152	Math. Sup. 75	DEUG 86	IUT 65	Totaux
non réponse	0	5	18	22	12	15	14	86 18%
il y a quelque chose	1	1	4	11	2	8	7	34* 7%
il n'y a rien	7	1	20	60	22	32	33	175 36%
$\frac{1}{3}=0,33....$	9	19	20	59	39	31	11	188 39%

* Parmi ces réponses 6 veulent dire qu'il y a 1/3.

les réponses "Il y a quelque chose différent de $\frac{1}{3}$ " ne représentent que 6% des réponses, c'est très marginal.

Examinons de plus près ce que disent les élèvent qui affirment qu'il y a quelque chose entre $\frac{1}{3}$ et 0,333....

. *Un élève d'E.N*

"entre $\frac{1}{3}$ et 0,333... (DI) il y a un réel et un décimal, pas de rationnel"

. *1è S*

- " $\frac{1}{3}$ étant 0,333, il n'y a pas de rationnel, ni de décimaux compris entre ces deux valeurs".

Remarquons que dans cette copie il y a confusion entre décimal et développement décimal, donc réel = décimal et par conséquent la réponse est correcte (il n'y a pas non plus de réel).

- "Entre 1/3 et 0,333... (infini) car 0,333 même si on développe les 3 à l'infini, ne pourra jamais atteindre la valeur exacte représentée par 1/3. Il existe un réel entre ces valeurs".

L'élève a du mal à envisager l'infini actuel par la représentation 0,333..., mais il l'utilise de manière implicite en affirmant l'existence d'un réel.

. *T.A*

- "Entre 1/3 et 0,3333 il n'y a ni réel ni décimal mais un rationnel". On peut rapprocher cette réponse de "oui il y a 1/3". (Remarquer l'écriture de 0,3333 sans signe indiquant l'infini).

. *T.D.*

- "Il existe un réel c'est lui-même et donc un décimal et donc un rationnel".
- "Entre 1/3 et 0,333... Il existe un rationnel".

Il s'agit de 1/3 sans doute.

- "Entre 1/3 et 0,333..., nous ne pouvons pas dire qu'il n'existe pas de nombre réel, décimal ou rationnel compris entre les nombres. 1/3 est un irrationnel : on ne peut pas l'écrire et personne (aucun mathématicien) ne sait si $\frac{1}{3}$ = 0,333 (aucun mathématicien) ne sait si $\frac{1}{3}$ = 0,333 comme un développement illimité".*

Il y a encore dans cette copie confusion entre réel et développement décimal, et donc irrationnel avec développement décimal infini. Il y a ici encore, difficulté à envisager l'infini actuel.

. *Mathématiques Supérieures*

- "1/3 = 0,33.... mais 1/3 est plus juste".

Encore des difficultés avec l'infini actuel, ou avec le nombre et les moyens calculatoires.

---

* L'incorrection est due à l'étudiant

- "Il y a un réel entre 1/3 et 0,33.... en rajoutant un 3, mais il n'existe ni rationnel ni décimal".

Ici $\infty \cup \{3\} \neq \infty$, il y a transfert des propriétés algébriques des nombres aux calculs sur l'infini.

- "Il n'y a ni rationnel ni décimal compris entre 1/3 et 0,3".
  Pourquoi n'y a-t-il rien à propos des réels ?
- "Que veut dire y-a-t-il un réel compris entre $\frac{1}{3}$ et 0,33... ?
  il y a un rationnel 1/3 ! "

. *DEUG*

. " $1/3 \in \mathbb{Q}$] il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$0,333... \in \mathbb{Q}$] $0,33... < \alpha < \frac{1}{3}$

1 2... n

si rang de 0,33 ... = n
1/3 = m

et $n < m$.

si $n = m$ α n'existe pas".

Ce que ne dit pas l'étudiant c'est que $n = m = \infty$. Est-ce encore une fois la difficulté d'envisager l'infini actuel ?

. Dans une copie, le cas de 1/3 et 0,333... est traité exactement comme 7/19 et 8/19 π et $\frac{22}{7}$ π et 3,1416 et les réponses données sont les mêmes. Peut-être s'agit-il ici d'une ambiguité sur l'écriture : l'étudiant écrit 0,333... mais n'ajoute pas développement décimal infini.

. Dans une autre copie, il y a le même traitement mais l'étudiant parlant des 4 cas, on ne sait pas comment il écrit la représentation décimale illimitée.

. "Entre π et $\frac{22}{7}$, il existe un nombre réel car π et $\frac{22}{7}$ sont deux nombres réels, pareil pour π et 3,1416 et $\frac{1}{3}$ et 0,333...".
  Pour cet étudiant $1/3 \neq 0,333...$

. "Entre 1/3 et 0,3333 il y a un nombre réel".

La proposition est vraie bien que cela ne réponde pas à la question posée. Cette déviation est sans doute l'indice d'une difficulté.

. "Entre 1/3 et 0,333, il y a encore le même cas que précédement, en effet, il suffit que la nième décimale soit différente pour que le décimal obtenu soit différent du précédent." C'est toujours l'écriture de 0,333 sans indice de l'infini qui pose problème.

Ici on trouve assez nettement les traces des problèmes historiques liés à l'infini. Nous allons préciser les difficultés que l'on voit poindre entre réel, décimal et écriture décimale grâce à la 3è question.

3ème question

Y-a-t-il une différence si oui laquelle, entre les rationnels et les décimaux ? Y-en-a-t-il "plus" des uns que des autres ? Quels sont les avantages éventuels des uns ou des autres ? Quelles propriétés supplémentaires ont les réels ?

Nous ne trouvons pas dans les discours des étudiants (ou peu) de réponses à la dernière question, certaines copies mais,assez peu,font allusion ailleurs au fait que $\mathbb{R}$ est non dénombrable et le fait que ce soit un parfait* n'est pas souvent évoqué.

Au deux premières questions, nous avons classé les réponses en 3 catégories :

$\boxed{M_1}$

Dans M_1, nous avons classé les réponses où les rationnels sont définis soit par les fractions, soit par des développements décimaux limités ou infinis et périodiques et où les décimaux sont définis soit par $\frac{a}{10^n}$ $(a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N})$ soit par les développements décimaux limités.

On a noté M_1 les copies qui affirment que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ ont le même nombre d'éléments (justifié ou non) et M_1' celles qui affirment que $\mathbb{Q}$ a plus d'éléments que $\mathbb{D}$ parce que $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$.

Exemple de M_1 (citations) :

"Les rationnels peuvent avoir une infinité de chiffres après la virgule à condition qu'on trouve une période : 0,$\underbrace{3}$33... ou 0,$\underbrace{124}$... ; par contre les décimaux ont un nombre fini de chiffres après la virgule. On ne peut pas dire pour autant qu'il y ait plus de rationnels que de décimaux puisque l'ensemble des rationnels comme celui des décimaux a un cardinal infini".

Exemple de M_1' (citations) :

"Tout décimal possède un rationnel équivalent mais cette relation n'est pas vraie en sens inverse ($\frac{1}{3}$ n'a pas de décimal fini équivalent), donc il y a plus de rationnels que de décimaux". (DEUG)

---

* Tous les fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont "continus" (i.e compacts connexes).

$\boxed{M_2}$ L'ensemble des décimaux est dans ces copies l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent avec une virgule : développement décimal limité ou illimité, périodique ou non.

Certains y incluent les entiers et alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont le même ensemble (modèle M_2'), d'autres en excluent les entiers (qui n'ont pas de virgule) et alors $\mathbb{Q}$ a plus d'éléments que $\mathbb{D}$ par ce qu'il contient les entiers (modèle M_2).

Dans un premier temps, les copies où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des développements décimaux, et $\mathbb{D}$ l'ensemble des développements illimités périodiques a été codé M_4 puis regroupé avec M_2 (il est assez rare).

Exemples de M_2.

- "Les rationnels sont présentés sous forme d'une fraction de nombres entiers irréductibles. Les décimaux sont inclus dans les réels, ce sont les nombres à virgule (c'est un nombre rationnel effectué). Il y a plus de rationnels que de décimaux".

- "Les rationnels et les décimaux ne s'écrivent pas de la même façon, par exemple $\frac{1}{3}$ et 0,333... au point de vue de leur valeur, elle est identique, seule l'écriture varie.

Il existe plus de rationnels que de décimaux car un décimal implique une virgule et des nombres ensuite ex : 2,1, s'il y a un 0 ce n'est plus un décimal mais un rationnel, tandis que pour les rationnels on peut ruser, on peut écrire 2 comme par exemple $\frac{4}{2}$ ou $\frac{16}{8}$ ". (terminale)

Ici la raison pour laquelle il y a plus de rationnels que de décimaux est clairement exprimée.

Exemples de M_2'.

. *"Il n'y a pas de différence"* (sous-entendu entre les rationnels et les décimaux). (Terminale)

. *"Non, il n'y a pas de différence entre rationnels et décimaux car les décimaux sont les développements décimaux illimités des rationnels.*

Prenons deux cas $\frac{1}{3} = 0,333...$ $\frac{4}{2} = 2,000...$

D'après notre conception du problème, il y a autant de rationnels que de décimaux.

Les réels peuvent donc être rationnels...." (Terminale)

Ici un traitement logique correct en conclut $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$, mais cet élève n'a t-il pas plutôt une idée du style $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$, mais c'est tellement énorme qu'il ne peut pas le dire d'où les points de suspension (on ne peut pas le savoir !).

Exemple de M_4.

- *"Les rationnels sont les suites décimales sans période, les décimaux sont les suites décimales avec période.*

1/3 est décimal, $\frac{22}{7}$ *ne l'est pas.*

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{Q}$ *l'ordre est dense* $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ *sont des corps*, $\pi \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$" (HX)

Cette citation est typique d'une copie de mathématique supérieure, L'étudiant explicite d'abord son propre modèle, puis récite ensuite ce qu'il a appris.

Dans une autre copie de mathématique supérieure, le modèle M_4 est clairement exprimé, puis il est suivi de "les réels forment un groupe parfait".

Dans d'autres copies, on trouve aussi par exemple un modèle M_3 exprimé, voisinant avec un modèle M_1 exprimé aussi sans que l'élève y voit de contradiction.

$\boxed{M_3}$

C'est un modèle où les décimaux sont complètement assimilés aux écritures décimales, mais où les rationnels ont des développements décimaux finis ou illimités mais périodiques. Les élèves concluent souvent qu'il y a plus de décimaux que de rationnels.

Exemples de M_3.

- "$D = Q + \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\}$" (DEUG)

ici l'étudiant prudent ne se prononce pas sur celui qui a le plus d'éléments, car ils en ont tous les deux une infinité.

- *"La différence est que les rationnels sont des décimaux mais il existe des décimaux qui ne sont pas rationnels (ex : 1,111...). Donc il y a plus de décimaux que de rationnels. Les réels n'ont pas de propriétés supplémentaires sur les décimaux".* (DEUG)

L'exemple cité de décimal non rationnel est justement rationnel.

- *"Il y a une différence : mais un rationnel est de la forme* $q = \frac{A}{B}$ avec $B \neq 0$ *et* $A \in \mathbb{Z}$, $B \in \mathbb{Z}$, *alors qu'un décimal est un nombre avec plusieurs chiffres après la virgule, d'une forme quelconque. Il y a plus de décimaux.*

Les rationnels sont définis plus précisément que les décimaux, ils sont plus nombreux". (DEUG)

On a ici une contradiction, peut être due au fait que le modèle de l'étudiant se heurte au modèle appris.

- *"Un rationnel peut se mettre sous la forme* $\frac{Q}{P}$ *, tandis qu'un nombre décimal se met sous la forme* a,bc de fg...... ".

"Il existe moins de rationnels que de décimaux, en effet des nombres tels que $\sqrt{2}$, π, e *ne se mettent pas sous la forme rationnelle mais peuvent se mettre sous forme d'un nombre décimal".* (DEUG)

On trouve des copies plus difficilement classables, par exemple :

- *"Les rationnels sont des nombres écrits sous forme de quotients d'entiers. Ils sont tous décimaux, un décimal étant un nombre fini non entier. Il y en a autant des uns que des autres car si les irrationnels ne peuvent être écrits sous forme fractionnaire, ils ne peuvent être qu'approchés sous forme décimale".* (Terminale)

Ici l'étudiant a retenu qu'un décimal a une écriture finie, or 1/3 est une écriture finie donc $\frac{1}{3}$ est un décimal. Il y en a encore contradiction dans cette copie puisque l'élève a écrit $\frac{1}{3}$ = 0,333..., à moins que l'écriture 0,33... ne soit pas vue comme infinie puisqu'il n'y a que 3. (Nous avons classé cette copie en M_2' puisque là aussi rationnels et décimaux sont confondus car ils ont le même mode d'écriture : écriture finie).

- *"Tout rationnel est décimal, tout décimal est rationnel, les irrationnels ex :* $\sqrt{2}$ = 1,414... *ont des valeurs approchées décimales mais ne sont pas décimales".* Cette copie a été classée aussi M_2'.

- *"Tout développement d'un rationnel donne un décimal, mais tout décimal n'est pas forcément un rationnel. L'ensemble des rationnels est inclus dans celui des décimaux. Il existe donc plus de décimaux que de rationnels. Il y a facilité d'écriture entre les deux, un nombre décimal* <u>*écrit*</u> *étant toujours limité".* (1è S)

Copie classée en M_2. Ici il y a une distinction subtile entre "les nombres décimaux <u>écrits</u>" et les autres.

Intéressons nous maintenant à la répartition numérique de ces trois modèles :

Types de réponses / Classes	M_1 ou M'_1	M_2 ou M'_2 ou M_4	M_3	non réponses inclassables
Ecole Normale 17	10 59%	1 6%	2 12%	4 24%
Première S 26	14 (dont 2 M_3) 54%		10 (dont 2 M_1) 38%	4 15%
Terminale A_1 D 62	22 35%	18 29%	15 24%	6 10%
Terminale CE 152	105 69%	7 dont 3 M_0 5%	28 18%	12 8%
Math. Sup. 75	65 (dont 1 M_3) 87%	2 3%	5 (dont 1 M_1) 7%	4 5%
DEUG SSM 86	54 63%	1 1%	24 28%	7 8%
IUT 65 (fabrication mécanique)	21 32%	14 dont 11 M_0 22%	17 26%	13 20%
Totaux 483	291 60%	43 9%	101 21%	50 10%

* M_0 est le code d'une réponse où décimal = nombre à virgule sans précision de la longueur du développement (fini ou infini).

Le modèle M_3 apparait entre 25 et 40% sauf dans les mathématiques supérieures et les Terminales CE.
Il semble qu'il résiste à un enseignement des débuts de l'analyse et des réels à l'Université.

Il parait être une conséquence de l'introduction des développements décimaux illimités en quatrième. L'examen des résultats de Terminale C montre que les élèves qui ont un modèle M_3 sont plus souvent orientés en Term D et donc en DEUG et IUT qu'en Math Sup, donc le modèle M_3 serait moins lié à des résultats brillants. En fait rien n'est très probant pour les modèles M_2 M_2', qui sont relativement marginaux.

En résumé, le modèle M_1 (dont M'_1 n'est qu'une variante qui prouve que les puissances des ensembles ne sont pas connues) est largement majoritaire.

La question sur les avantages entre les décimaux et les rationnels a entraîné peu de réponses (moins de 10%), nous n'en donnerons qu'une description qualitative :

1) Les écritures décimales sont plus commodes pour classer.
2) Les écritures décimales sont plus commodes pour les calculs approchés (ordinateurs).
3) Les rationnels sont plus commodes pour les calculs (simplifications et multiplications).
4) Les rationnels sont plus précis que les décimaux.
5) Les rationnels ont un inverse.
6) Les nombres décimaux sont plus précis (chaque proposition apparait à peu près une dizaine de fois).

Exemple de 1.

"Si l'on a un décimal et un rationnel à classer, l'écriture décimale sera plus avantageuse". (Term D)

Exemple de 2.

"On a plus de facilités à compter avec des décimaux qu'avec des rationnels. Certains rationnels doivent être mis sous une certaine forme pour faire des calculs. Exemple π ou 1/3. *Lorsque l'on calcule* π *avec 3,14, on obtient seulement un résultat approché".*

Exemple de 3 et 1.

"Deux nombres décimaux mis vis à vis, on peut facilement voir lequel est supérieur à l'autre contrairement au rationnel. Mais il est souvent plus commode d'écrire un nombre rationnel qu'un nombre décimal... (addition et opérations diverses)!!" (DEUG)

Exemple de 2 et 3.

"Les rationnels présentent une forme $\frac{P}{Q}$ *très pratique pour le calcul* $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ *est rapide à effectuer, alors que le même calcul sur la forme décimale de ces nombres serait "infiniment long"......... par contre* $\frac{23}{29}$ *n'est pas utilisé sur un graphe si on ne l'assimile* pas à 0,793 ≃ 0,8". (DEUG)

"Calculer avec des rationnels entraîne des résultats plus justes." (Term D).

"Le rationnel peut s'écrire sous forme de fractions et évite dans certains cas l'approximation des calculs". (lè S).

Exemple de 5.

"Dans $\mathbb{Q}$*, on peut diviser"* (lè S)

Exemple de 4.

"Les rationnels sont désignés plus précisément que les décimaux." (DEUG).

Exemple de 2.

."*Les décimaux sont nécessaires pour les calculs approchés.*" (H.X)

."*Les décimaux permettent une vision plus rapide des nombres.*" (1è S).

."*Avantage des décimaux : manipulation par ordinateur.*" (DEUG).

Exemple de 6.

. "*Les décimaux sont plus précis*". (1è S)

Les élèves insistent en fait beaucoup sur les avantages comparés des écritures fractionnaires ou décimales. Ils se posent assez peu les problèmes pratiques (calculs approchés), ni les problèmes théoriques (existence d'un inverse dans $\mathbb{Q}$).

Pour ce qui est des réels, nous avons fait la liste de toutes les affirmations :

- Les réels ne sont pas dénombrables. (1EN, 1HX)*
- Les réels n'ont pas de propriété supplémentaire sur les décimaux. (Term D)
- Les réels sont tous limite d'une suite de rationnels. (DEUG)
- $\mathbb{R}$ est dense et archimédien. (HX)
- $\mathbb{R}$ est un corps avec une relation d'ordre.(2 DEUG, 1 1èS, 2 Term C, 2 HX)
- Les réels bouchent les trous des rationnels.(2 DEUG)
- Les rationnels ne permettent pas de trouver toutes les mesures de longueur, les réels si (diagonale du carré) (2 DEUG).
- L'ensemble des réels est continu tandis que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ sont discontinus. (HX)
- Dans $\mathbb{R}$, on peut résoudre $x^2 = a$ $a \in \mathbb{Q}^+$. (2 HX, 3 Term C)
- Les réels ont la propriété de la borne supérieure. (3 HX, 1 DEUG)
- Les réels ont plus de nombres, une infinité de plus, les nombres réels peuvent avoir un développement décimal infini non périodique. (1èS, 6HX, 3 TC)
- Les réels forment un groupe parfait. (1 HX)
- Les réels ont les avantages des rationnels plus d'autres (1 Term C, 2 Term D 1 DEUG).
- $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ (1 HX, 7 DEUG, 1 Term C, 5 Term D, 1 1è S).
- Les avantages éventuels des réels seraient que quelque soit le niveau auquel on regarde (unité, centaine ou $10^{-1000\,000}$), il y a une continuité des nombres. (HX)
- L'ensemble des réels est plus complet que l'ensemble des rationnels ($\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$). (7 HX, 4 1è S, 4 DEUG).
- L'ensemble des réels nous permet d'avoir une continuité dans les fonctions et de faire une représentation continue". (1 HX, 3 Term C)

---

* HX : mathématiques supérieures.

Cette énumération confirme les résultats à la première question à savoir que $\mathbb{R}$ c'est $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ plus quelques autres nombres. 23 citations font explicitement allusion à des propriétés spécifiques des réels, alors que 34 explicitent ce que contient $\mathbb{R}$, mais ne donnent pas de propriétés supplémentaires. Sur les 23 citations de propriétés supplémentaires, 15 sont données par des élèves de mathématiques supérieures et dans certains cas, on a l'impression qu'il s'agit d'un savoir plaqué sans grande signification.

En conclusion, il y a une certaine confusion qui apparait entre les valeurs des nombres et leurs écritures. Les propriétés des ensembles de nombres sont comprises alors comme propriétés des écritures des nombres. On trouve donc assez peu de remarques sur les propriétés algébriques des ensembles de nombres, ni sur leurs propriétés pratiques.

Réponses à la quatrième question.

Si on grossissait avec un microscope électronique (ou avec un ordinateur) la droite, qu'est-ce qu'on obtiendrait comme dessin "ultime" ? (Même question pour la parabole).

Nous n'avons pas retenu les réponses concernant la parabole, en effet cette question voulait cerner plus précisément les images ("mentales") des élèves concernant les graphes de fonctions dérivables. Ceci n'est pas notre propos.

La quatrième question a été posée pour tenter d'approfondir le sens d'une réponse de type géométrique à la première question.

En effet, si pour les étudiants la droite est aussi riche qu'elle l'est pour Dedekind, on peut penser que leur modèle de $\mathbb{R}$ est assez proche de celui de Dedekind. Cependant l'étude historique a pu nous montrer que si les mathématiciens utilisent souvent un support géométrique, ils ont été très longtemps incapables d'expliciter ses propriétés spécifiques ; et c'est cela qui nous a donné l'idée d'essayer de faire préciser aux élèves leurs idées à propos de la "nature" de la droite. Pour cela, nous leur avons demandé, en quelque sorte, d'expliciter leur image mentale de la droite grâce à cette méthode. Cela ne donne pas exactement, pour tous les étudiants, l'idée qu'ils se font de la droite ; en effet certains n'ont peut-être pas d'image mentale et d'autres ont peut-être tendance à faire un mélange entre l'image mentale et l'image perceptive★ ; enfin certains sont enclins à répondre physiquement, c'est-à-dire qu'ils répondent comme si on leur avait dit que l'on grossissait

★ Voir bibliographie. Travaux de Lautrey [11] le trait de crayon.

Nous avons dans un premier temps classé les réponses en de nombreuses catégories que nous regroupons plus ou moins par la suite.

P Nous mettrons dans cette rubrique toutes les copies où il est clair que l'étudiant grossit le trait de crayon parce qu'il le dit.

Citation : *"Si l'on grossit fortement une droite représentée sur le papier, il apparait des points relatifs aux points tracés par le crayon"* (1è S)

M Nous codons ainsi les copies où le point de vue est résolument mathématique, il y a refus d'envisager une image mentale.

Citation : *"Une droite est une notion abstraite. Une droite ne peut donc être grossie au microscope. Le trait de crayon n'est qu'une représentation grossière".* (Math.Sup).

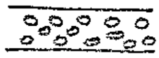
"Le point ne peut être représenté, on ne verrait rien". (1èS)

MP Nous mettons dans cette catégorie les copies où on ne trouve pas une distinction complète entre le modèle mathématique et la réalité qu'il modélise. On peut, peut-être penser qu'il y a dans ces cas-là télescopage entre l'image perceptive et l'image mentale. Nous en avons distingué une sous-catégorie parce qu'elle est très répandue ; nous l'avons notée B . Dans cette sous-catégorie nous avons classé les réponses faisant allusion à une bande, un rectangle, un plan : l'élève conserve l'idée que la droite a une épaisseur (propriété physique), mais elle reste peut-être "continue", dans la mesure ou les bandes, les rectangles etc... ont encore cette propriété. En effet, les élèves qui font cette réponse ne parlent jamais de voir des atomes, ce qui serait la réponse s'ils grossissaient seulement le trait de crayon.

Citations : *"Si on considère d'après la définition qu'une droite est un ensemble de points, on peut penser grâce à cette observation découvrir une suite de points. Mais en fait tout être, toute matière est constitué par l'infiniment petit, souvent l'atome".* (Term D).

"Une droite donnerait en théorie une portion de cette droite, c'est-à-dire une droite à condition qu'on ait pu la tracer assez finement". (Term D).

D La lettre D caractérise les modèles discrets, mais nous avons décomposé cette catégorie en plusieurs sous-catégories.

AD est le code attribué aux expressions atomistes les plus simples du genre *"on voit un point"* (1è S) le code est encore attribué aux dessins du type  ou  , bien que ces dessins prouve qu'il y a un certain mélange entre réalité et modèle mathématique : en effet, que veu-ent dire les deux traits ?

Citation : *"....] à l'ultime on obtient un point ou un vide".* (Term C)

DRD est le code des réponses du type : *"Une droite est un ensemble de points"* (DEUG)

C'est une réponse dont on ne peut guère retirer de renseignement. Il n'y a pas d'allusion à l'ordre, ni à la connexité, ni à l'infini.

FD est le code pour des réponses voisines, par exemple : *"on obtiendrait tout un alignement de points, tous dans le même axe, mais pas attachés les uns aux autres".* (Term A).

Dans cette copie, il est clair qu'il s'agit d'un modèle discret. Ce n'est pas toujours autant explicité. Par contre, les mots suites, alignement, succession font toujours allusion à l'ordre et c'est surtout ce renseignement que nous tirerons des réponses FD .

Il y a trois variantes dans cette catégorie :

- FID est attribué s'il y a mention d'une infinité de points
- FCD est le code pour spécifier que les points sont très rapprochés, par exemple :

"On pourrait dire qu'une droite est une succession de points, très rapprochés et qu'un grossissement permettrait d'en voir une multitude". (1è S)

Ici on pourrait presque attribuer le code FICD (avec des notations évidentes), en effet l'allusion à la multitude est peut-être une trace de l'infini, comme on ne peut en être sûr, la copie a été codée FCD.

DI Nous avons noté ainsi toutes les allusions à des nuages de points soit en dessin, soit en description. Dans ces copies, on ne trouve pas trace d'ordre, et les modèles exprimés sont discrets à l'évidence.

Citations : *"Une droite grossie x fois révèlerait un groupe de points distincts et désordonnés, eux-mêmes formés d'une infinité de points".* (1è S).

Il existe d'autres sortes de modèles atomistes auxquels nous avons attribué les codes FC et FIC. (FIC caractérise des réponses où il est fait explicitement allusion à l'infini). Ce sont toujours des modèles atomistes mais "sans trou" parce que les atomes se touchent.

Citations : *"Une suite de points qui se touchent".* (DEUG)

"La droite serait une infinité de points alignés toujours en contact. De même chaque point représenterait une infinité de particules plus petites...." (Term D).

DR est le code des réponses où on voit une droite. S'il n'y a pas d'autre commentaire, nous avons codé DRS. Mais s'il y a une justification du type :

"c'est une droite parce que :

- *entre deux points il y a toujours un point.*
- *entre deux points il y a une infinité de points.*
- *ℝ est continu.*
- *ℝ est dense.*
- *On ne peut pas distinguer de vide entre deux points".*

nous avons codé DRC.

S'il est précisé seulement qu'il y a une infinité de points, nous notons DRI, et s'il est spécifié que la droite est composée de points infiniment petits, nous avons codé DRIP.

Une réponse DRS n'apporte pas beaucoup de renseignement, on peut quand même penser que si l'élève répond cela c'est qu'il "voit la droite sans trou" et ordonnée ; mais on ne peut pas savoir s'il a une idée de la divisibilité à l'infini des segments* par exemple. Pour DRC, nous pensons qu'il est plus probable qu'il y ait des idées plus conscientes sur la densité ., sur l'ordre, mais la connexité n'est pas absolument sûre, en effet $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ possèdent aussi les propriétés de densité. Disons que la connexité est probablement présente (à cause de la réponse c'est une droite) mais pas de façon absolument certaine sauf pour ceux qui le spécifient.

DRi et DRIP sont difficiles à interpréter, car la réponse n'est pas toujours *"on voit une droite"*, mais souvent seulement *"la droite est composée de ...."* . On ne sait pas si l'on doit y attribuer des idées d'ordre, et il n'y a sans doute pas d'idée de connexité bien que cela ne soit pas sûr dans le cas de DRIP.

Citations :

DRC - *"Comme il existe une infinité de points entre deux points fixes, le dessin ultime, s'il pouvait y en avoir serait encore une droite"* (1è S)

"[on verrait] Une droite, il n'y aurait pas de trou". (DEUG)

---

* Voir page 11

DRI : *"Encore une portion de droite, car une droite est constituée d'une infinité de points".* (Math.Sup).

DRIP : *"Une droite est un ensemble de points considérés sans dimension"* (DEUG)

"La droite est formée d'un alignement de points matériels, on ne verrait pas pour autant la largeur puisque ces points matériels sont infiniment petits".

Nous avons dans la mesure du possible essayé d'attribuer DRI quand il y a une allusion à l'ordre (par exemple une infinité de points alignés), mais nous avons regroupé (parce qu'elles sont peu nombreuses) les allusions aux infiniment petits. Ces allusions aux infiniment petits sont assez souvent la trace d'un genre de mélange entre modèle mathématique et réalité, par exemple :

"Une droite étant un ensemble de points infiniment petits et alignés, quelque soit le grossissement, une droite aura en théorie le même aspect. Et d'ailleurs une droite étant infiniment mince elle n'est pas visible, on la représente par un trait qui lui est visible". (1è S).

On voit apparaitre quelques grands traits qualitatifs auxquels l'historique de la notion de nombre réel nous a déjà sensibilisés :

Tout d'abord certaines réponses sont peut-être l'indice d'un modèle atomiste (DI, AD, FD, FC, FCD, FICD), la plupart du temps c'est bien explicité ; mais parfois on ne peut pas absolument trancher les réponses "un point" ou "une infinité de points" sont bien difficiles à interpréter à elles seules. Sachant qu'elles sont parfois accompagnées d'une justification qui est toujours de type atomiste, nous les regrouperons dans une classe $\boxed{A}$.

Certaines réponses font allusion à la connexité, à la divisibilité à l'infini, à la densité ; nous les avons regroupées dans la classe $\boxed{C}$, parce que nous pensons qu'elles sont l'indice d'une certaine conception du continu chez les élèves. Ce sont les réponses du type : DRS, DRC, FC, FIC, B. Plusieurs réponses font intervenir l'ordre, soit l'ordre de $\mathbb{R}$ sans que cela soit explicité la plupart du temps, soit un ordre plus simple en effet les mots comme "suite" renvoie habituellement à l'ordre de $\mathbb{N}$; mais elles sont peut-être l'indice du fait que $\mathbb{N}$ est plongé dans $\mathbb{R}$ avec son ordre. Nous avons regroupé dans une classe $\boxed{O}$ les réponses du type : DRS, DRC, DRI, DRIP, FC, FIC, FD, FDC, FICD.

Enfin un certain nombre de réponses font allusion à une infinité de points. Parfois c'est incompatible avec d'autres caractéristiques de la réponse. Par exemple lorsque la réponse est *"on voit une infinité de points alignés espacés"*. Ce genre de réponse montre que les élèves ont quand même quelque part l'idée qu'à R est lié l'infini. Nous avons regroupé dans une classe I les réponses du type : DRI, DRIP, DI, FIC, FICD, mais aussi DRS, DRC, B (où l'infini est implicite).

Regardons maintenant la répartition quantitative de ces réponses :

Modèles / Classes	Non Réponse	P	MP	M	DRS	DRC	AD DRD	DRI	DRIP	DI	FC	FD	FDC	FIC	FICD	B
Ecole Normale			8		8			4		1		1				3
Premières S	1	1	3	4	3	6	1			2		1	1	1	1	4
Terminale A, D	4		3	1	2	3	10	12	2	2	3	14		2		7
Terminale CE	5	2	3	3	37	29	27	1	1	0	5	27				10
Math-Sup-29		2		3	5	5		2	2	1	3	6	1			1
DEUG SSM	6		5	3	15	5	2	9	2	3	7	16	7		1	10
IUT	1	3		4	20	5	14	2		4	2	9	1			2
Totaux 437	17	8	22	18	90	53	54	30	7	13	20	74	10	3	2	37
	4%	2%	5%	4%	20%	12%	12%	7%	1%	3%	4%	17%	2%			8%

Les réponses majoritaires sont : DRS et FD puis à égalité DRC et AD donc il apparait aussi fréquemment des réponses atomistes, que des réponses faisant allusion à une certaine conception du continu. Ces tendances vont peut-être se préciser, si on regroupe les classes et nous allons essayer de cerner d'un peut plus près les modèles majoritaires.

Modèles / classes	Non réponses inclassables	A	O	I	C
Ecole Normale 17	8 47%	2 12%	13 76%	16 94%	11 65%
Première S 26	9 35%	7 27%	13 50%	16 61%	14 54%
Terminale A, D 62	8 13%	34 55%	39 63%	30 48%	17 27%
Terminale CE 152	13 9%	59 39%	100 66%	78 51%	81 53%
Math. Sup. 29	5 17%	12 41%	24 83%	16 55%	14 48%
DEUG SSM 86	14 16%	36 42%	62 72%	45 52%	37 43%
IUT 65	8 12%	30 46%	39 60%	33 51%	29 45%
Totaux des élèves 437	65 15%	80 41%	290 66%	234 53%	203 46%

Il est assez frappant de remarquer que chacune des notions est également représentée (le pourcentage est donné sur le nombre d'élèves, certaines réponses intervenant dans plusieurs catégories). Curieusement aucune des quatre notions n'exclut les autres. En effet, le discret contigu peut-être infini explicitement ce qui est pourtant bien difficile à envisager. Le fait que $\mathbb{R}$ possède un ordre est ce qui est le plus utilisé, même si cet ordre n'est souvent pas tellement plus élaboré que celui de $\mathbb{N}$. Ensuite vient la propriété de densité : on voit une infinité de points entre deux points (cette propriété est souvent citée aussi à propos de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$). Enfin il arrive la connexité, mais elle peut-être atomiste ou non :

atomiste 23 élèves (FC)

non atomiste 180 élèves

La connexité est donc une notion assez antagoniste de celle de discret ce qui n'a rien d'étonnant ; il reste que 23 élèves ont un modèle où $\mathbb{R}$ est discret et connexe (23/437 soit 5% ce qui est marginal).

Enfin 49% des élèves ont un modèle atomistes, on ne peut pas en conclure brutalement que pour eux seul le discret existe, car comme nous l'avons déjà noté certaines réponses ont été classées dans les modèles atomistes mais en fait, elles correspondent peut-être plus sûrement à une absence d'image mentale. En effet, dans la définition de la droite, on apprend que c'est un ensemble de points, si donc on ne pense pas la droite comme en bijection avec R, on est amené à répondre "un point" ou un "alignement de points". Il nous reste donc à confronter les réponses de la question 1 et de la question 4, car il serait intéressant de voir quelles sont les réponses données à la question 4, par ceux qui ont répondu que les réels étaient représentés sur la droite à la question 1.

Modèles / élèves ayant G	Non réponse	P	MP	M	DRS	DRC	AD DRD	DRI	DRIP	DI	FC	FD	FCD	FIC	FICD	B
Ecole Normale 2								1		1						
Première S 9			1	2		3								1		2
Terminale A,D 17	2					3	5	1	1	1		2		1		1
Terminale CE 53	2	1			23	21	3		1		1	11				2
Math. Sup. 16		1			3	2		2	1		3	3				1
DEUG SSM 27	1			1	5	2	1	5	1	2	2	3	1			3
IUT 11		1			6	2					1	1				
Totaux 135	5 4%	3 2%	1 1%	3 2%	37 27%	33 24%	9 7%	9 7%	4 3%	4 3%	7 5%	20 15%	1 1%	2 2%		9 7%

Les proportions qui augmentent ou qui stagnent sont pour DRS, DRC, DRI, (nous n'avons retenu que les catégories pour lesquelles le nombre de réponses est suffisamment élevé).

Les proportions qui baissent sont pour AD, FD . Il semble bien qu'il y ait diminution des modèles atomistes, mais pas disparition. Ce point va être précisé par le tableau regroupant les modèles.

Modèles / Elèves ayant G	non réponses inclassables	A	O	I	C
Totaux 135	12 9%	43 32%	113 76%	98 73%	88 65%

Ici, il est bien clair que seul l'aspect atomique est en regression, cela amène un peu de consistance à notre hypothèse : les élèves considèrent la droite comme un"ensemble de points alignés" et oublient qu'elle représente ℝ d'où leur réponse atomiste. Il est possible que pour ceux qui ont répondu que la droite représentait ℝ, il se soit produit le même phénomène ; quand on leur a demandé de "grossir" la droite, ils ont perdu de vue qu'elle était en bijection avec ℝ et la droite est alors avant tout un ensemble de points plutôt du genre atomique.

C'est un résultat qui peut être utile pour l'enseignement, il prouve qu'il est insuffisant de donner l'exemple de la droite pour faire "sentir" aux élèves des propriétés de ℝ comme celle de "continu", en effet 41% d'entre eux voient en la droite un assemblage de points de type atomique ; et 32% qui peuvent expliciter que ℝ est en bijection avec la droite ont encore cette vision plutôt atomiste de la droite.

En conclusion, les élèves voient ℝ plutôt sous son aspect ensemble de nombres, c'est-à-dire sont plutôt dans le courant "numéricien", il y en a quand même 33% qui en ont aussi une conception géométrique. Disons que depuis Cauchy où les mathématiciens faisaient allusion à des propriétés de la droite lorsqu'ils utilisaient des réels, la tendance s'est plutôt inversée.

Les différents nombres qui constituent ℝ sont différenciés très souvent par leur type d'écriture et seulement ainsi. Les écritures décimales illimitées entrainent quelques confusions : ℝ et 𝔻 sont assimilés, un décimal étant assez souvent un nombres qui s'écrit avec une virgule (et avec un nombre fini ou une infinité de décimales). Cela a pour conséquence l'idée fausse qu'un nombre décimal est moins précis qu'un rationnel. Ces confusions au niveau des noms et des caractéristiques des divers nombres n'ont peut-être pas de conséquences graves quant à la compréhension de la notion de nombre réel, en effet dans la question 2, les réponses pour les nombres réels sont plus souvent données que pour 𝔻 et ℚ. De plus l'idée que les réels permettent de mesurer ou de calculer avec une précision aussi grande que l'on veut est bien donnée par l'écriture décimale illimitée.

Enfin un dernier point à utiliser pour l'enseignement, c'est que la droite ne donne pas "intuitivement" pour tous les élèves une bonne représentation de R, elle est donc insuffisante à elle seule, et donc ℝ doit être construit et ses propriétés explicitées, en plus.

BIBLIOGRAPHIE

CANTOR G. [1] Sur les ensembles infinis et linéaires de points
Acta Mathematica 2 (1883)

CAVEING [2] (et al) Penser les mathématiques.
Collection Points Sciences SEUIL

DEDEKIND R. [3] Continuité et nombres irrationnels. (1872)

[4] les nombres que sont-ils, à quoi servent-ils ? (1887)

(Préfaces traduites par Judith Milner).

DHOMBRES J [5] Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire. CEDIC (1978)

DUGAC P. [6] - Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Archive for history of exact sciences Vol 10 n°1-2 (1973).

[7] - Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire. Thèse d'Etat Université Paris VI (1978).

[8] - Sur les fondements de l'analyse au XIXè s. Université de Louvain (1980).

[9] - Richard Dedekind et les fondements des mathématiques Vrin Paris (1976).

HOUZEL C., OVAERT J.L., RAYMOND F. SANSUC J.J Philosophie et calcul de l'infini
[10] Maspero Paris (1976).

LAUTREY J. [11] Diversité comportementale et développement cognitif - Psychologie française n°1 (1984).

LEVY T. [12] L'infini et le nombre chez CRESCAS IREM PARIS NORD.
Collection Philosophie - Mathématique n°31 (1983)

OVAERT J.L. et VERLEY J.L. [1] Analyse Vol.1. (Collection Leonhard Epistemon)
[13] Cedic-Nathan (1983).

REVUZ A. et REVUZ G.[14] Eléments de topologie APM Paris (1966).

ROBERT A.[15] Rapports enseignement-apprentissage (Débuts de l'analyse sur R).
Cahiers de didactique n° 180 et 181 IREM PARIS 7. (1985).

RUCKER R[16] (1982) : Infinity & the Mind, Birkhäuser.

INTER-IREM [17] Histoire des mathématiques et épistémologie n°18 IREM Lyon (1979).

INTER-IREM [18] Enseignement de l'analyse n°20 - IREM Lyon (1981).

ENCYCLOPEDIA-UNIVERSALIS Tous les articles concernant les concepts en jeu.