

irem.

UNIVERSITE PARIS VII

SUR L'ANALYSE DES TRAITES D'ANALYSE :
LES FONDEMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES TRAITES
FRANCAIS, 1870-1914

PAR MARTIN ZERNER

cahier de
didactique des
mathématiques
numéro
30

**Sur l'analyse des traités d'analyse :
les fondements du calcul différentiel dans les traités
français, 1870-1914**

Martin Zerner

- I Délimitation d'un objet
 - Choix de la période
 - Pourquoi les traités français
 - Qu'est-ce qu'un traité d'analyse
 - Autres cours où on aborde le calcul différentiel
- II La tradition des grands traités d'analyse français
 - Aspects institutionnels
 - Aperçu sur le contenu scientifique
- III Trois générations de traités et deux espèces d'archaïsme
 - Note sur des questions de méthode
 - La première génération
 - Repérage de la deuxième génération, le principe de substitution
 - Livres postérieurs de la deuxième génération
 - La troisième génération
 - En guise de conclusion
- IV Un traité de la deuxième génération: Sturm
 - Histoire d'un livre
 - Le principe de substitution à l'œuvre

Premières conclusions

Le travail dont je vais exposer certains aspects pourra, je l'espère, contribuer à l'histoire de la transposition didactique du calcul différentiel. Il s'agit d'une recherche en cours et je suis très conscient qu'elle pose plus de questions qu'elle ne pourra en résoudre. Certaines de ces questions seront abordées plus tard. En particulier, j'ai mis en évidence des phénomènes d'archaïsme dont il faudra étudier, autant que faire se peut, la fonction.

I DELIMITATION D'UN OBJET

Choix de la période

J'ai choisi de faire porter ce travail sur les traités d'analyse français ayant eu une édition entre 1870 et 1914.

Ces dates se justifient assez évidemment du point de vue de l'histoire interne des mathématiques. Une construction analytique des nombres réels (on disait alors irrationnels) est publiée pour la première fois par Méray [19] en 1869, mais elle est passée alors inaperçue, même dans la cité savante. En 1872 paraissent les constructions de Dedekind [7] et Cantor, cette dernière dans un article de Heine [14] qui montre comment on peut fonder dessus une théorie rigoureuse des fonction d'une variable réelle (Dedekind est très succinct là-dessus). La même année 1872 Weierstrass lit à l'Académie des Sciences de Berlin sa construction d'une fonction continue n'ayant de dérivée en aucun point, construction qui sera publiée en 1875 [29]. Des exemples de fonctions ayant des propriétés voisines se trouvent également dans un mémoire de Darboux de 1875 [6]. C'est aussi en 1872 que Méray publie son cours [20] (il en publiera un autre en 1894 [21]). Je signale tout de suite que les cours de Méray sont en dehors du champ de cette recherche parce qu'il passe directement aux fonctions d'une variable complexe et refuse les techniques de variable réelle. Mais là aussi la construction des réels dite de Cantor est exposée. On peut donc dire que les fondements du calcul différentiel tels que nous les connaissons encore aujourd'hui ont été publiés au début des années 1870 (je ne m'occupe pas ici de l'histoire complexe de leur élaboration).

D'un autre côté, l'enseignement supérieur scientifique français se modifie profondément pendant le dernier quart du XIX^{ème} siècle: augmentation spectaculaire du nombre d'étudiants, organisation de la licence par certificats laissés à l'initiative des Facultés (1896), créations d'Instituts pour la formation d'ingénieurs liés à certaines Facultés de province, définition d'un programme national pour les classes de Mathématiques Spéciales (1904), et j'en passe (voir Prost [25], Liard [17], Shinn [27], SF-CIEM [26]).

En 1914, la situation s'est stabilisée. Le cours de Goursat a déjà eu deux éditions. De nombreux témoignages montrent qu'il dominera la période suivante. Mentionnons celui d'André Weil cité par Gispert [13]. Ceux de Dieudonné [8] et de Chevalley dans une interview traduite dans un numéro

récent du *Mathematical Intelligencer* ajoutent que l'idée de départ de Bourbaki était de remplacer le Goursat par un traité de référence rigoureux.

Pourquoi les traités français

La seule justification de la limitation à la France est que c'est le seul pays pour lequel je me sente capable de réunir une documentation suffisante. De plus je connais moins mal l'histoire de ce pays que celle des autres. Des comparaisons internationales sont pourtant fort utiles et je tenterai d'en esquisser une ou deux.

Il faut dire ce que j'ai considéré comme un livre français. La question des traductions ne s'est pas posée. La seule qui pouvait concerner le domaine était celle du livre de Paul du Bois-Reymond [1] qui aurait été de toute façon éliminé (avec de Freycinet [12] et Boutroux [2]) parce qu'écrit dans un but plus philosophique que didactique. Il ne semble d'ailleurs pas avoir influencé les discussions sur l'enseignement en France. Son traducteur et préfacier, Gaston Milhaud, devait d'ailleurs quitter l'enseignement des mathématiques pour celui de la philosophie où il fit une carrière universitaire. J'ai considéré comme étrangers les Belges, même publiant en France (il s'agit surtout de La Vallée-Poussin [18]).

Qu'est-ce qu'un traité d'analyse?

Reste à dire pourquoi et comment les traités. Le mot est à prendre ici au sens de cours publié chez un éditeur. On sait bien qu'ils ne permettent de saisir qu'un aspect de la réalité. Il reste qu'ils donnent en général le texte social du savoir. En tout état de cause, ils permettent une étude systématique. On peut évidemment s'adresser à d'autres sources: notes manuscrites ou polycopiées, souvenirs, pour les lycées, rapports d'inspection ... Vu ma situation personnelle, professionnelle et géographique, je suis obligé de laisser leur étude à d'autres. Mais, de toute façon, je crois que, s'agissant de la détermination d'un objet d'enseignement dans une époque révolue, l'étude des manuels reste notre outil le plus efficace, à condition d'en maîtriser le maniement.

L'objet empirique ainsi défini "cours d'analyse français parus entre 1870 et 1914" a besoin d'être encore un peu précisé: *a priori*, je travaille sur le titre qui doit comporter une des expressions "analyse", "calcul

différentiel", "calcul infinitésimal", "théorie des fonctions". Parmi ceux-là, j'élimine, je l'ai déjà dit, ceux qui ne comportent pas l'introduction du calcul différentiel. En plus des Méray déjà mentionnés, il s'agit des traités de Picard [24] et Hermite [15]. J'ai déjà dit aussi que j'avais éliminé les livres d'orientation philosophique. Il faut ajouter à ces exclusions celle de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques (Molk et al. [22]) qui apparaît beaucoup plus comme un traité de référence pour les chercheurs que comme un ouvrage ayant une visée didactique quelconque. Il faut y ajouter celle des deux livres de Fleury [11],[12] qui apparaissent comme l'œuvre d'un isolé sans portée sociale. A côté de ces éliminations, j'ai ajouté deux livres parus en dehors des dates retenues. L'un à vrai dire ne change pas grand chose, c'est la deuxième édition (1847) du cours de Polytechnique de Duhamel, qui a parfois été considérée comme une première édition de ses *Eléments de calcul infinitésimal* dont il semble plus proche que de sa propre première édition (le cours de Duhamel a été étudié par Th. Guitard dans un séminaire malheureusement non publié). J'ai ajouté le traité de Bertrand parce que, bien que le tome I "calcul différentiel", paru en 1864, ait été épuisé lors de la parution du tome II en 1870, il a certainement encore été utilisé par la suite. D'ailleurs c'est à lui que Hermite renvoie pour le calcul différentiel dans son cours de l'école Polytechnique [15].

L'ensemble de ces opérations aboutit à une liste de 25 titres qui constituent ce que j'appelle le *corpus restreint* ; on trouvera cette liste en annexe.

Autres cours où on aborde le calcul différentiel

Corpus restreint parce qu'il y manque deux séries de livres. La première est constituée des cours de Mathématiques Spéciales. Pour une raison que je ne connais pas, les manuels scolaires sont déposés à la Bibliothèque Nationale de façon très épisodique, ce qui fait qu'il est difficile d'en avoir une liste fiable. De plus, leur analyse comparative présente des difficultés qui sont, elles aussi, spéciales.

La deuxième série est constituée des cours de Mathématiques Générales. Quelques indications historiques peuvent être utiles ici. Jusqu'à une date assez avancée (je ne sais pas la déterminer précisément), les étudiants de mathématiques et de physique des Facultés avaient presque tous suivi une classe de Mathématiques Spéciales. Vers la fin du siècle, la situation change. Un public de plus en plus nombreux et différent apparaît. On en trouve la description chez plusieurs auteurs du début du XX^{ème} siècle,

par exemple Vessiot (dans SF-CIEM [26], p.22): "Le succès de cet enseignement [de Mathématiques Générales] a prouvé qu'il répondait à des nécessités très réelles. Les cours en sont suivis par de nombreux étudiants, qui y viennent chercher une préparation à des études ou à des carrières très diverses. Les uns se destinent à l'étude théorique des sciences physiques; d'autres aux écoles d'électricité de Paris, de Grenoble; d'autres encore à l'enseignement des écoles primaires supérieures, professionnelles ou techniques, au professorat des écoles normales primaires. De plus, un assez grand nombre de jeunes filles, qui aspirent pour la plupart aux fonctions de l'enseignement dans les lycées de jeunes filles, suivent aussi cet enseignement. Enfin il a pour auditeurs les élèves de écoles industrielles qui sont rattachées, par des liens plus ou moins étroits, à diversses Universités." C'est déjà pour une partie de ce public que l'Abbé Stoffaës publie son *Cours de mathématiques supérieures* en 1891 (l'expression Mathématiques Supérieures n'avait pas alors son sens actuel). A partir de 1896, les Facultés des Sciences sont libres de créer pour lui un enseignement spécifique; Caen sera la première à le faire en 1898. Le certificat ne deviendra une année propédeutique obligatoire que bien plus tard. On trouvera dans l'annexe une liste - peut-être incomplète - de cours de Mathématiques Spéciales et de Mathématiques Générales. Il faut ajouter que les *Eléments d'analyse* de Paul Appell seront indiqués comme destinés, entre autres, aux étudiants de Mathématiques Générales à partir de l'édition de 1913.

II LA TRADITION DES GRANDS TRAITÉS D'ANALYSE FRANÇAIS

Revenons au corpus restreint. En grande partie, il appartient à la tradition française des grands traités d'analyse dont il serait intéressant d'écrire l'histoire. J'en fais une première ébauche, du moins pour le XIX^{ème} et le début du XX^{ème} siècle, mais je ne peux guère la rapporter ici, je me contente d'indications sommaires sur les origines institutionnelles des traités considérés et sur leur contenu.

Aspects institutionnels

Quatre de nos traités: le premier Duhamel, Sturm, Jordan, Humbert, sont des cours de l'Ecole Polytechnique. Les auteurs de cinq autres ont enseigné dans cette école: Duhamel encore, Lacroix, Bertrand, Boucharlat, Laurent, les trois premiers comme professeurs, les deux autres comme répétiteurs. Six sont des cours de Facultés des Sciences: Serret, Goursat, les deux cours de Houël, le premier Demartres, Baire. Le livre de Tannery reprend un enseignement qu'il a donné à l'Ecole Normale Supérieure. Cinq livres sont des cours d'écoles d'ingénieurs (hors Polytechnique): deux de l'IDN (Institut Industriel du Nord), à savoir le premier Boussinesq et le deuxième Demartres, deux des Ponts et Chaussées (Collignon, Paul Haag), un de Centrale (Appell) où Sonnet était aussi enseignant. Boussinesq présente son traité de 1887 comme une extension de son cours de l'IDN, mais cette affirmation ne résiste pas à l'examen. Le livre de Pauly ne correspond pas à un enseignement particulier; l'auteur est ingénieur civil, sorti d'une Ecole d'Arts et Métiers. Enfin je manque totalement d'information sur Abel Souchon.

Retenons que la majorité de nos traités correspondent à un enseignement muni d'un curriculum bien défini et d'un programme.

En marge de ces aspects institutionnels, notons, s'il est besoin de le préciser, qu'il n'est pas question dans les livres que nous étudions d'enseigner les fondements du calcul différentiel au moment du premier contact avec le calcul des dérivées. J'ai déjà dit que jusqu'à une certaine période, le public des cours d'analyse avait suivi une classe de Mathématiques Spéciales. Ces classes n'ont eu un programme déterminé qu'à partir de 1904, jusque là c'était le programme du concours d'entrée de Polytechnique qui faisait loi. Il pouvait être révisé chaque année et je n'ai

pas été le chercher dans les archives. Mais on peut s'en faire une idée d'après les manuels. Briot semble avoir été le plus utilisé: 18 éditions au moins de 1855 jusqu'après 1900 sans doute (la 18ème édition, non datée, a été remaniée par Coursat). Voici, *in extenso*, ce qu'il dit dans la sixième édition (1868): "Nous supposerons dans ce qui suit que, lorsque la variable x varie d'une manière continue entre certaines limites, la fonction y varie aussi d'une manière continue. A une variation h très-petite de la variable correspond une variation k très-petite de la fonction; quand la première variation tend vers zéro, la seconde tend aussi vers zéro. En général, le rapport $\frac{k}{h}$ de la variation de la fonction à la variation de la variable tend

vers une limite finie et déterminée; cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction proposée."

J'avoue ne pas avoir cherché non plus les programmes du secondaire proprement dit antérieurs à 1905, mais d'après Bioche (dans SF-CIEM [26]) c'est en 1890 qu'a été introduite pour la première fois la notion de dérivée (avec application à la représentation graphique de fonctions simples). Il semble que ce soit à la même époque qu'apparaissent quelques cours de Spéciales faisant montre de plus d'ambitions théoriques (celui de Niewenglowski paraît pour la première fois en 1889); il a pu y avoir quelques flottements à ce moment-là. On aimerait bien à ce sujet voir paraître les travaux de Bour et Dorra.

Aperçu sur le contenu scientifique

En France pendant tout le XIXème siècle et la première moitié du XXème, l'enseignement supérieur des mathématiques a reposé sur deux piliers qui étaient le calcul différentiel et intégral (ou l'analyse, les deux sont synonymes) et la mécanique rationnelle. Si on trouve ça très restrictif, on a tort. L'enseignement de calcul différentiel et intégral comprenait outre la dérivation, l'intégration, le développement en série entière des fonctions, la résolution des équations différentielles et de certaines équations aux dérivées partielles, beaucoup de géométrie différentielle (courbures des courbes et des surfaces, enveloppes, développées et développantes, lignes de courbure ...), du calcul des variations, parfois l'étude des fractions continues et quelques méthodes numériques. Plus tard on y a ajouté les fonctions d'une variable complexe et les fonctions elliptiques.

III TROIS GENERATIONS DE TRAITES ET DEUX ESPECES D'ARCHAISMES

Note sur des questions de méthode

Puisqu'il s'agit de comparer l'avant et l'après d'une modification du savoir à enseigner, la périodisation pose un problème essentiel, lié à celui de l'analyse des traités. J'avoue reculer devant l'analyse détaillée de 25 d'entre eux, même limitée aux fondements du calcul différentiel, disons depuis le commencement jusqu'à la démonstration de la formule de Taylor. Je combine donc la recherche d'une typologie basée sur une lecture succincte avec l'analyse plus détaillée d'un très petit nombre de livres jugés les plus importants selon des critères sur lesquels je reviendrai. Cette analyse peut amener ensuite à revoir les autres livres, mais je n'en suis pas encore là.

Pour moi, le premier des critères de l'importance d'un traité est l'audience qu'il a eue auprès des utilisateurs. Je la mesure faute de mieux au nombre d'éditions. Le critère est contestable mais semble plutôt plus sûr que les tirages qui sont au demeurant assez difficiles à connaître (Martin [18]). Au moins sommes nous dans un domaine où il n'y a guère à redouter les éditions pirates et les éditions fictives. Voici le classement selon ce critère, limité au corpus restreint, et sans tenir compte des traductions en langues étrangères. Un record incontesté est détenu par Sturm: 15 éditions au moins de 1857 à 1929. Suivent ce que j'appellerai plus loin les deux livres de la première génération avec 9 éditions chacun, Lacroix de 1802 à 1881, Boucharlat de 1813 à 1891, encore convient-il de préciser qu'on en a fait un nouveau tirage en 1926 (mille neuf cent vingt six, il y en a un exemplaire à la Bibliothèque Nationale). Sonnet a eu 8 éditions (1869-1919). Nous trouvons ensuite des livres à 6 éditions: Serret (1868-1911), Appell (1898-1950), Goursat (1902-1942). Les *Eléments* de Duhamel ont eu 4 ou 5 éditions, selon qu'on compte ou non l'édition de 1847 du cours de l'Ecole Polytechnique. On descend ensuite à 3 avec Pauly et Jordan. Encore la première édition de ce dernier est-elle tellement différente des suivantes, du moins pour ce qui concerne les fondements de l'analyse, qu'il vaut mieux la considérer comme un ouvrage différent (cf Gispert [13]). J'avoue à ce point que j'ai aussi utilisé un critère très terre à terre de disponibilité, qui n'est d'ailleurs pas sans rapport avec celui de l'audience dont la présence dans des bibliothèques publiques ou privées est évidemment un indice.

Un critère à distinguer du précédent est celui de l'influence qu'a eue un traité sur les auteurs de traités ultérieurs. De ce point de vue, Duhamel et Serret sont certainement plus importants que Sturm.

Une attention particulière doit être portée aux premiers livres qui ont exposé en France les fondements modernes du calcul différentiel. Ils sont au nombre de trois. Le tout premier, mais remarquablement bien au point, est Tannery, qui semble d'ailleurs avoir eu une grande influence parmi les enseignants (là aussi, on attend avec impatience les précisions que peuvent apporter Bour et Dorra). Aujourd'hui encore, j'en conseillerais volontiers la lecture à qui a besoin de s'éclaircir les idées sur la question. Le deuxième ne fait pas partie du corpus restreint, car c'est le cours de Mathématiques Spéciales de Niewenglowski (1889) dont la logique n'est d'ailleurs pas à toute épreuve. Le troisième et le plus célèbre, c'est la deuxième édition du cours de Jordan.

La première génération

J'en viens à la division en ce que j'ai appelé des générations. Un premier fait saute aux yeux quand on examine, même superficiellement, les dates de première parution: il n'y en a pas entre 1813 et 1847. Non certes qu'il ne soit pas paru de traité d'analyse entre ces deux dates: ceux de Cauchy [3] ont fait quelque bruit, ainsi que la rédaction de ces cours, amuvable mais célèbre, publiée par le chanoine Moigno, on peut y ajouter celui de Cournot [5] et bien d'autres. Mais ces livres ne sont pas réédités après 1870 (la réimpression des cours de Cauchy dans ses œuvres complètes n'est évidemment pas significative ici). Si nous nous occupons de l'Allemagne, il faudrait faire une exception au moins pour le cours de l'Ecole Polytechnique de Navier [23] qui n'a eu en France (et, comme toujours, au mieux de mes connaissances) que deux éditions en 1840 et 1855 mais dont la traduction allemande en a connu au moins quatre, la quatrième en 1875.

Les deux traités publiés au début du siècle, Lacroix (1802) et Bouchardat (1813) feront donc partie de ce que vais appeler la première génération. La survie de ces deux livres à travers les modifications qu'a subies l'exposition de l'analyse pose un problème, d'autant qu'eux-mêmes ne sont guère modifiés dans les éditions successives. C'est ce que j'appelle l'archaïsme de première espèce. A eux deux, ils constituent ce qu'on pourrait appeler la première génération stricte. Nous nous apercevrons que des livres très postérieurs peuvent être rattachés eux aussi à cette première génération; c'est ce que j'appelle un archaïsme de deuxième espèce.

Repérage de la deuxième génération, le principe de substitution

La deuxième génération commence avec Duhamel, savoir où l'arrêter pose un problème que nous allons aborder maintenant. Pour cela il faut d'abord jeter un coup d'œil sur ceux de nos traités dont la première édition se situe entre 1847 et 1885, c'est-à-dire après la première génération et avant le livre de Tannery (1886).

Je passe sur pas mal de détails pour dire que ce qui caractérise la plupart de ces ouvrages, c'est la présence, au début du calcul différentiel, du principe de substitution des infiniment petits. J'en prendrai l'énoncé chez Bertrand où il est particulièrement condensé: "Deux infiniment petits α et β peuvent être substitués l'un à l'autre et l'on peut négliger leur différence soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux." Il s'agit donc de deux propositions concernant l'une le rapport, l'autre la somme. D'ailleurs dans la plupart des traités on trouve deux énoncés distincts mais groupés. Ils s'appellent principes, théorèmes fondamentaux, parfois seulement théorèmes, mais alors on insiste en général sur leur importance.

Rétrospectivement, le premier, qui concerne le rapport, ne pose pas de problème particulier; nous l'enseignons encore aujourd'hui mais sans lui accorder un caractère fondamental. C'est le deuxième qui fait l'essence du principe de substitution et il demande quelques éclaircissements. On a deux sommes $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ et quand n tend vers l'infini, la première a une limite. D'autre part, tous les rapports $(\alpha_i - \beta_i)/\alpha_i$ tendent vers zéro (tout le problème peut être vu dans l'ambiguïté de cette phrase: comment l'indice i varie-t-il avec n ?). Conclusion: la deuxième somme tend vers la même limite que la première. Il n'est jamais question d'uniformité. En France, il n'en sera d'ailleurs jamais question dans ce contexte, contrairement à ce qui passe en Italie à partir de 1877 (parution des *Lezioni* de Dini [9]). Mais pour les livres dont nous nous occupons ici (je rappelle qu'ils ont tous au moins une édition avant 1885) la distinction entre convergence simple et convergence uniforme est de toute façon inconnue. Elle ne fera son entrée qu'avec Tannery.

Je remets à plus tard une analyse de ce principe. Pour le moment, la description que je viens d'en faire suffit parce que dans un premier temps je

vais l'utiliser comme une simple marque pour caractériser les livres de la deuxième génération. Pour justifier cette utilisation comme marque, il faut vérifier en détail si les traités publiés entre 1847 et 1885 (il y en a treize) énoncent ce "principe". Trois seulement ne le font pas. Ce sont Sonnet, Collignon et Laurent. Laurent est à mettre à part pour une série de raisons. D'abord la date, 1885, d'autant que, répétiteur à Polytechnique, Laurent a pu être influencé par Jordan. Le premier tome du cours de ce dernier, paru en 1882, comporte comme les autres le principe de substitution; mais en 1887 devait sortir le tome III où figure une note additionnelle sur les fondements de la théorie des fonctions. Le volumineux traité (7 tomes) de Laurent est assez particulier en ce qu'il s'adresse, selon la préface, à ceux "qui n'ayant pas le moyen d'utiliser un grand nombre d'Ouvrages, ont le désir d'acquérir des connaissances étendues en Mathématiques" ; mais de qui s'agit-il? Enfin il faut savoir que, publiant en 1881 la huitième édition revue et corrigée du Boucharlat, Laurent y avait incorporé le principe de substitution des infiniment petits (mais pas à sa place habituelle, nettement plus loin). Les deux autres exceptions, Sonnet et Collignon, ont des points communs. Ce sont des livres pour la formation des ingénieurs, écrits par des auteurs dont la fonction principale est l'enseignement auxdits futurs ingénieurs (ce dernier point les distingue du cours de Boussinesq à l'IDN, sans que cela me paraisse très significatif). Dans tout cet exposé, je désigne par "ingénieurs", pour faire court, les ingénieurs non polytechniciens. D'ailleurs on retrouve, de façon assez vague il est vrai, certains caractères de la première génération chez Collignon et surtout Sonnet, en particulier dans la façon dont ce dernier emploie le mot "différentielle" dans des contextes où on utilise "dérivée" dans la deuxième génération. Il semble donc que nous nous trouvions devant des archaïsme de deuxième espèce.

La question est posée des autres caractères distinctifs de la deuxième génération. Je ne peux pas donner de réponse définitive mais je doute qu'on en trouve d'autres qui soient caractéristiques à la fois vis à vis de la première et de la troisième génération.

Livres postérieurs de la deuxième génération

Considérant comme établi qu'on peut utiliser le principe de substitution comme marque de la deuxième génération, nous ne nous attendons pas à le voir disparaître subitement après 1886, surtout après avoir vu des phénomènes d'archaïsme. On le retrouve encore dans le grand traité de Boussinesq (1887), ce qui n'a rien d'étonnant. Après tout, il a dû être écrit avant la parution du Tannery. Mais surtout la question des

fondements logiques semble tout à fait étrangère à Boussinesq, non qu'il néglige les bases générales de l'analyse, mais il les chercherait plutôt dans une réflexion sur ses applications. On trouve encore le principe de substitution dans Appell (1898) et dans le cours de l'IDN de Demartres. Ce dernier point est d'autant plus frappant qu'on ne le trouve pas dans le cours de Faculté du même Demartres, pourtant très antérieur (1892, celui de l'IDN est de 1909). Appell mérite une attention spéciale, ne serait-ce qu'à cause de ses six éditions (Goursat est le seul dont on puisse en dire autant parmi les livres parus à partir de 1886) mais aussi à cause de la personnalité de son auteur. Enfin il faut dire ici un mot du Goursat lui-même, car le principe de substitution se trouve dans sa première édition pour en disparaître ensuite. Toutefois, il y joue un rôle marginal, en fait purement heuristique, quoique l'auteur le présente comme un vrai théorème vrai.

La troisième génération

Naturellement, la troisième génération ne se caractérise pas seulement par l'absence du principe de substitution. On y trouve une construction des nombres irrationnels (réels) et les théorèmes sur les fonctions continues. Les traités qui présentent l'ensemble de ces caractères sont Tannery, la deuxième édition de Jordan, Goursat, Humbert et Baire (soit cinq livres en tout, beaucoup moins qu'en Italie où ils sont d'ailleurs plus précoces).

Il nous reste à classer: Pauly, livre assez semblable à Sonnet et Collignon, le cours d'analyse de Demartres (Faculté des Sciences de Lille) qui présente un caractère de transition, et enfin le cours de Paul Haag, cours des Ponts et Chaussées, assez difficile à classer. Il est bien normal que nous trouvions des livres de transition et d'autres difficiles à classer à la charnière de la deuxième et de la troisième génération; n'oublions pas que la période du passage de la première à la deuxième est en dehors de notre étude, nous ne pouvons pas voir les ouvrages correspondants.

En guise de conclusion

Résumons.

Première génération: Lacroix (1802) et Boucharlat (1813); entrée directe dans le calcul des dérivées, on parle d'ailleurs plutôt de coefficient différentiel. Trois livres postérieurs, tous trois destinés à la formation des

ingénieurs, présentent encore des caractères de cette génération; ce sont Sonnet (1869), Collignon (1877), Pauly (1887). Sonnet a connu un très grand succès avec une huitième édition en 1919.

Deuxième génération: onze livres parus de 1847 (Duhamel) jusqu'à 1887 (Boussinesq) dans notre corpus, d'autres qui n'en font pas partie (par exemple celui de l'Abbé Stoffaës). L'unité et la délimitation de la génération se font principalement autour du principe de substitution. Deux livres de cette génération, Serret (sixième édition en 1911) mais surtout Sturm (quinzième édition en 1929) connaissent un grand succès qui se prolongera largement pendant la vie de la troisième génération. Nous retrouvons l'archaïsme de première espèce. Deux livres postérieurs s'y rattachent, Appell (1898) et Demartres (1909), nous retrouvons l'archaïsme de deuxième espèce, et nous le trouvons de nouveau dans des livres destinés à la formation des ingénieurs.

Enfin la troisième génération comprend, toujours dans notre corpus restreint, cinq livres dont le premier est celui de Tannery (1886); ils présentent en gros les fondements du calcul différentiel tels qu'on les enseignera pendant toute la première moitié du XXème siècle. Un, et un seul d'entre eux, Goursat (sixième édition en 1942) connaîtra un vraiment grand succès et sera le cours standard de cette période.

IV UN TRAITE DE LA DEUXIEME GENERATION: STURM

Histoire d'un livre

Il est temps de donner un minimum d'analyse du principe de substitution. Je le ferai sur la base du cours de Sturm. Non seulement nous avons vu que c'était notre traité le plus souvent réédité, mais encore c'est un ouvrage clef pour notre problème parce qu'il a toute une histoire. Il s'agit en fait d'un livre posthume: Sturm est mort en 1855. La première édition a été réalisée par Eugène Prouhet, répétiteur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, sur la base de notes lithographiées d'élèves avec des corrections marginales de Sturm complétées par des notes personnelles de celui-ci.

A partir de la sixième édition au plus tôt, la septième (1884) au plus tard, on ajoute la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent. Il s'agit en fait de la reproduction de trois articles parus de 1877 à 1879 dans les Nouvelles Annales de Mathématiques et déjà publiés en un volume en 1880. Qui est ce on qui ajoute? Tout ce que je peux dire, c'est que ce n'est pas Prouhet, mort en 1867. Il faut savoir qu'un décret du 15 juillet 1877 avait modifié le programme de la licence, y incluant un certain nombre de connaissances sur les fonctions elliptiques (1877 est aussi l'année de la cinquième édition). Quant à ce Laurent, c'est le même que nous avons vu rééditer Boucharlat puis publier son propre traité d'analyse. Il a été répétiteur et examinateur d'entrée à Polytechnique. Bour et Dorra le voient intervenir dans les discussions sur l'enseignement de l'analyse.

Nouvel épisode en 1888 avec la parution de la neuvième édition "revue et mise au courant du nouveau programme de la licence par A. de Saint Germain". Ce nouveau programme est pour moi un mystère; il y a bien un décret du 28 juillet 1885 réorganisant ou plutôt précisant les examens des licences, mais il renvoie à celui de 1877 pour les programmes. Albert de Saint Germain était professeur à la Faculté des Sciences de Caen dont il a été doyen. Auparavant, il avait été trois ans Maître de Conférences aux Hautes Etudes. Il dirige en 1911 le volet "enseignement supérieur" du rapport de la SF-CIEM [26] et y rédige les parties concernant les D.E.S. (qui correspondaient à peu près à des mémoires de D.E.A.) et le Collège de France. Après la neuvième édition, le texte ne change plus ni avant ni après sa mort (1914).

Dans toutes les éditions, chacun des deux tomes s'achève par une très longue "Table analytique des matières" qui est en fait un résumé très complet. Le cours de Sturm a eu une traduction allemande. Dans sa préface, le traducteur, Gross, indique qu'il n'a pas traduit ce résumé, n'en voyant pas l'intérêt. Il suggère que son existence pourrait s'expliquer par le système français d'examens. *A contrario*, on peut penser que justement ce résumé a fortement contribué à l'immense succès de l'ouvrage de ce côté-ci du Rhin (ou de la ligne bleue des Vosges, selon les années). Il faudra un jour que je vérifie si les problèmes effectivement posés à la licence pouvaient se résoudre à l'aide des connaissances données dans ce résumé, voire dans Bouchariat. Il semble bien (Vessiot dans SF-CIEM [26]) que seul l'oral comprenait une question de cours. Or l'écrit était éliminatoire et il est plausible que c'est lui qui faisait la sélection.

Le principe de substitution à l'œuvre

Le principe de substitution s'appelle dans Sturm Théorème II et s'énonce: "*La limite d'une somme d'infiniment petits ne change pas quand on les remplace par d'autres dont les rapports aux premiers ont respectivement pour limite l'unité ou qui diffèrent des premiers par des quantités infiniment petites par rapport à eux.*" (italiques dans le texte).

Voici la démonstration, résumée en conservant les notations et autant que possible le vocabulaire. On pose

$$S = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$$

$$\beta = (1+\varepsilon)\alpha, \beta' = (1+\varepsilon')\alpha', \beta'' = (1+\varepsilon'')\alpha'', \dots$$

On suppose que S a une limite et que $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ ont zéro pour limite. On a donc:

$$\beta + \beta' + \beta'' + \dots = S + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \dots$$

On appelle η le plus grand des nombres $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$. Il a pour limite zéro (c'est toute la question! NDLR). La différence entre S et la somme $\beta + \beta' + \beta'' + \dots$ est donc majorée par ηS qui a pour limite zéro. Le principe de cette démonstration se trouve déjà chez Cauchy dans un contexte différent.

Une fois le théorème bien ou mal démontré, qu'est-ce qu'on en fait? En

le lisant, un mathématicien d'aujourd'hui (moi par exemple) se dira sans doute: " Bon, il a voulu grouper les points les plus généraux au début du livre, mais ce théorème servira effectivement au début du calcul intégral."

Raisonnement à la fois vrai et faux. Pour voir ce qu'il a de faux, il faut dire quelques mots de la structure du livre de Sturm, structure qui est d'ailleurs typique. Signalons que dans la première édition, le principe de substitution ne se trouve que dans la quinzième leçon qui deviendra la première à partir de la deuxième édition (soit dit en passant, je travaille sur la deuxième édition, 1863 ; mais cette partie du texte n'a pas varié par la suite). La division du livre en deux tomes correspond en gros à la répartition calcul différentiel/calcul intégral mais exactement aux deux années d'enseignement de Polytechnique. Il y avait deux professeurs d'analyse, et chacun enseignait les deux années de suite à la même promotion. Le calcul différentiel comprend trois parties. La première, non sous-titrée, donne en 8 leçons les théorèmes généraux, jusques et y compris le développement de McLaurin. La suivante (leçons 9 à 16) est consacrée aux applications analytiques et la troisième aux applications géométriques. Enfin les leçons 27 à 36 sont consacrées au début du calcul intégral.

Ayant laissé le principe de substitution à la première leçon, nous le retrouvons à la 17ème. Nous sommes donc dans la première leçon sur les applications géométriques du calcul différentiel. Elle est intitulée "Théorèmes sur les aires et les arcs des courbes planes". Le chapitre correspondant de Bertrand s'appelle "Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement", celui de Souchon (qui suit Sturm d'assez près) "Différentielles de l'aire et de l'arc d'une courbe". L'implicite de l'aire d'une courbe est, comme on s'en doute, de l'aire comprise entre la courbe, deux parallèles à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses. On commence par démontrer que la dérivée en est la fonction elle-même. Le point essentiel est que l'existence de l'aire est admise sans discussion, c'est en somme un "préconstruit" (cf Tonnelle [28] p. 60 et les références qu'il donne).

Il est indispensable de mettre ici une parenthèse. Admettons ce préconstruit. Notons $A(x)$ l'aire comprise entre l'axe des x , la courbe et les parallèles à l'axe des y d'abscisses a et x . Admettons que le tout est plus grand que la partie et que l'aire d'un rectangle est ce qu'on sait (on trouve ça dans Euclide). Soit δ un nombre strictement positif et ε un autre tel que $|h| < \varepsilon$ entraîne $|f(x+h) - f(x)| < \delta$.

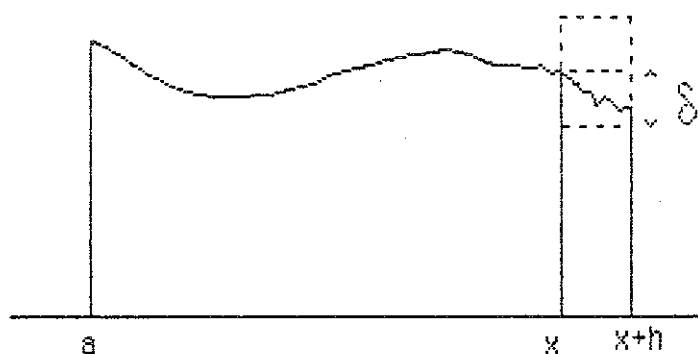


fig. 1

On a donc, sous la même condition (fig. 1):

$$f(x) - \delta \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x) + \delta$$

d'où $A'(x) = f(x)$.

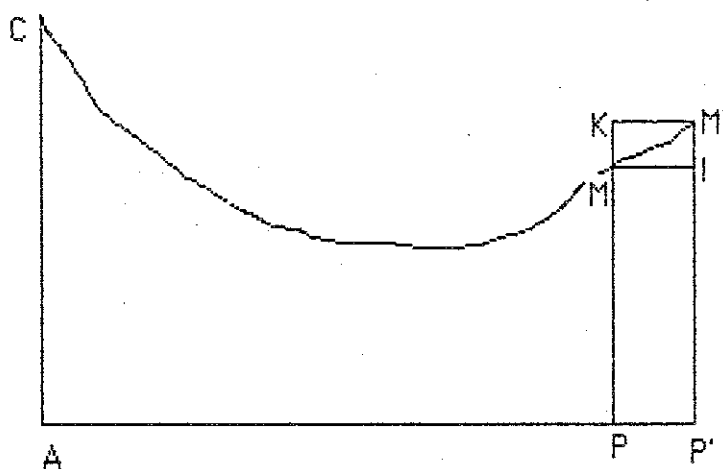


fig. 2

Voyons maintenant ce que fait Sturm (fig. 2). D'abord il prend P' assez voisin de P pour que f soit monotone sur l'intervalle correspondant (disons croissante pour fixer les idées). Il a donc, x et x' étant les abscisses de M et M' respectivement:

$$f(x) \leq \frac{A(x') - A(x)}{x' - x} \leq f(x')$$

et comme $f(x')$ se rapproche autant qu'on veut de $f(x)$, le rapport a $f(x)$

comme limite.

Au paragraphe suivant, Sturm refait la démonstration sans utiliser la monotonie par morceaux. Mais ce paragraphe commence par les mots "Quoiqu'on puisse parfaitement admettre qu'en prenant M' assez voisin de M les ordonnées seront toujours constamment croissantes ou décroissantes...". Je rappelle que la fonction sans dérivée de Weierstrass n'est monotone sur aucun intervalle et que sa construction a été publiée en 1875. Darboux [6] construit aussi des fonctions continues qui ne sont monotones sur aucun intervalle, toujours en 1875. Tannery parle de ces fonctions dans son livre de 1886. Saint Germain, qui semble avoir été bien placé pour se tenir au courant de la recherche mathématique a revu une édition de 1888. Les mots que j'ai cités se trouvent toujours dans celle de 1929.

Notons que jusqu'ici le principe de substitution n'est pas intervenu. Maintenant, Sturm va démontrer que l'aire est la limite des sommes de rectangles du type MIP'P (se reporter à la figure 2). Il commence par réaffirmer le présupposé de la monotonie par morceaux: "... on pourra toujours partager l'aire totale en parties dans lesquelles les ordonnées soient assujetties à constamment augmenter ou diminuer." On sait que sous l'hypothèse de monotonie, le résultat à démontrer peut l'être de façon simple et élémentaire. Mais Sturm ne procède pas ainsi; cette fois il utilise vraiment le principe de substitution. On voit donc que ce principe ne fonctionne pas tout seul, il lui faut l'aire préconstruite et la monotonie par morceaux présupposée. Bel exemple de "circulation de l'erreur" (Chevallard [4]). Il est bon d'ajouter à ce point que ces considérations sont simplement reprises et traduites sous forme analytique au commencement du calcul intégral.

Pourquoi fallait-il démontrer que l'aire est la limite de la somme des rectangles? Nous n'allons pas tarder à le savoir car le point suivant est la différentielle d'un arc de courbe. Or si l'aire est un préconstruit, la longueur d'un arc de courbe n'en est pas un. Sturm est tout à fait explicite sur ce point: "On ne peut se faire une idée nette et précise de la longueur d'une courbe qu'en nommant ainsi la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée inscrite dans cette courbe, lorsque ses côtés sont de plus en plus petits et que leur nombre croît jusqu'à l'infini. Il devient alors nécessaire de démontrer que ce périmètre a réellement une limite dans tous les cas."

Puisque c'est nécessaire, je vais expliquer comment il le démontre, mais sans respecter ses notations. La courbe est le graphe d'une fonction f ,

disons continûment dérivable, encore que ce point ne soit pas explicite chez Sturm qui de plus utilise peu la notation fonctionnelle. Divisons l'intervalle $[a,b]$ en n par les points $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$. Soient $y_i=f(x_i)$ et M_i le point de coordonnées x_i, y_i . Traçons la courbe représentative de la fonction $[1+f'(x)^2]^{1/2}$. D'après ce qui vient d'être démontré, l'aire comprise sous cette courbe est la limite de la somme S_n des $(x_{i+1}-x_i)[1+f'(x_i)^2]^{1/2}$. On a d'autre part:

$$M_i M_{i+1} = (x_{i+1}-x_i) [1+(y_{i+1}-y_i)^2/(x_{i+1}-x_i)^2]^{1/2}.$$

Mais lorsque les côtés deviennent de plus en plus petits les rapports des $(y_{i+1}-y_i)/(x_{i+1}-x_i)$ aux $f'(x_i)$ tendent tous vers un (encore une fois, toute question sur la nature de cette convergence serait indiscrete). La somme des $M_i M_{i+1}$ (le périmètre de la ligne brisée) tend donc, d'après le théorème II (principe de substitution), vers une limite, la même que celle des S_n . Notons que le principe de substitution est intervenu une fois via l'aire comme limite de somme de rectangles et une deuxième fois directement.

Exit le principe de substitution, on ne le reverra que dans le calcul intégral. Et quand (dans la 35ème leçon) on traitera de la cubature des solides de révolution, le raisonnement sera purement différentiel, sans intervention du principe de substitution, mais en utilisant la monotonie par morceaux.

Il est intéressant de revenir maintenant à la première édition du Jordan. J'ai mentionné en passant qu'on y trouvait le principe de substitution. Mais la définition de la longueur d'un arc de courbe est faite par une méthode différente de celle qu'on trouve chez Sturm, plus subtile, et qui l'amène à expliciter l'hypothèse de continuité de la dérivée. Sans doute faut-il voir là un des germes de l'exposition rigoureuse qui rendra célèbre la deuxième édition.

Il est intéressant aussi de constater que le présupposé de la monotonie par morceaux se retrouve explicitement chez Appell dans toutes les éditions faites de son vivant, c'est-à-dire jusqu'à celle de 1920 y compris, alors que celle de 1913 a été remaniée. Et dire qu'Appell faisait partie du jury de thèse de Baire!

PREMIERES CONCLUSIONS

Essayons de dresser des tableaux de la situation au début et à la fin de la période.

Début de période. La norme des cours d'analyse comprend une définition plus ou moins précise de la limite et de la continuité, sans mise en œuvre technique en général, le principe de substitution, une démonstration de la formule de Taylor avec reste. Deux livres du début du siècle continuent à être utilisés et d'autres d'un style analogue à paraître, à l'usage de la formation des futurs ingénieurs. On les reconnaît avant tout à l'absence du principe de substitution dont la présence apparaît à ce moment là comme la manifestation d'un effort de rigueur.

Fin de période. La norme comprend maintenant une construction des réels, en général par les coupures, le théorème de la borne supérieure, les propriétés des fonctions continues avec des démonstrations rigoureuses. La première génération stricte ne se manifeste plus, sauf l'énigmatique tirage de 1926 de Boucharlat, mais deux de ses archaïsmes de deuxième espèce survivent. Deux livres de la deuxième génération sont toujours là, suivis eux aussi d'archaïsmes de deuxième espèce. La fonction du principe de substitution a probablement changé. Entre temps, le public des cours d'analyse s'est élargi et diversifié. Les fondements du calcul différentiel sont exposés partiellement dans les cours de Mathématiques Spéciales. Pour un public nouveau, un genre nouveau se développe, le cours de Mathématiques Générales.

ANNEXE : LISTES DE TRAITES

LE CORPUS RESTREINT

- LACROIX S.-F. Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral
Paris 11802, 21806, 31820, 41828, 51837, 61861, 71867, 91881
- BOUCHARLAT J.-L. Elémens de calcul différentiel et intégral
Paris 11813, 21820, 31826, 41830, 51838, 61852, 71858, 81881, 91891
- DUHAMEL J.-M. C. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique
Paris 21847
- DUHAMEL J.-M. C. Eléments de calcul infinitésimal
Paris 11856, 21860, 31874, 41886
- STURM C. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique
Paris 11857, 21863, 31868, 51877, 71884, 81884, 91888, 101895, 121901, 141909, 151929
- BERTRAND J. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral
Paris 11864
- SERRET J. Cours de calcul différentiel et intégral
Paris 11868, 21879, 31886, 41894, 51900, 61911
- SONNET H. Premiers éléments de calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur
Paris 11869, 21879, 31884, 41889, 51897, 61902, 71909, 81919
- SOUCHON A. Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral
Paris 11870
- HOUEL J. Cours de calcul infinitésimal professé à la Faculté des sciences de Bordeaux
Paris 11871
- COLLIGNON E. Cours d'analyse de l'Ecole préparatoire à l'externat de l'Ecole des Ponts et Chaussées
Paris 11877
- HOUEL J. Cours de calcul infinitésimal
Paris 11878
- JORDAN C. Cours d'analyse
Paris 11882, 21893, 31909

- BOUSSINESQ J. Cours d'analyse infinitésimale de l'Institut Industriel du Nord
Lille 1883
- LAURENT H. Traité d'analyse
Paris 1885
- TANNERY J. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable
Paris 1886, 21904
- PAULY J. Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral
Paris 1887, 31920
- BOUSSINESQ J. Cours d'analyse infinitésimale à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques
Paris 1887
- DEMARTRES M. Cours d'analyse
Paris 1892
- HAAG P. Cours de calcul différentiel et intégral
Paris 1893
- APPELL P. Eléments d'analyse mathématique
Paris 1898, 21905, 31913, 41921, 51937, 61950
- GOURSAT E. Cours d'analyse mathématique
Paris 1902, 21910, 31917, 41924, 51927, 61942
- HUMBERT G. Cours d'analyse professé à l'Ecole Polytechnique
Paris 1903
- BAIRE R. Leçons sur les théories générales de l'analyse
Paris 1907
- DEMARTRES M. Cours de calcul différentiel et intégral
Lille 1909

COURS DE MATHEMATIQUES SPECIALES

- BRIOT C. Leçons d'algèbre conformes aux programmes officiels de l'enseignement des lycées Deuxième partie à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques Spéciales
Paris 1855, 21856, 31959, 41862, 51864, 61868, 71868, 81872, 161893, 171897, 18s.d.
- COMBEROUSSE (C. de) Cours de mathématiques à l'usage des candidats à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole Normale Supérieure, à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Tome III Algèbre supérieure

- Paris 11862, 21887, 31904, 41911, 51915, 61929, 71949
- LONGCHAMPS (G. de) Cours de Mathématiques Spéciales, 1ère partie;
algèbre
Paris 11883, 21890
- NIEWENGLOWSKI B. Cours d'algèbre à l'usage des élèves de la classe de
mathématiques spéciales ...
Paris 11889, 51902, 101931
- PAPELIER G. Précis d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie à l'usage des
Elèves de Mathématiques Spéciales
Paris 11903, 21905, 31910, 61918, 71920, 101927, 111932
- HAAG J. Cours complet de mathématiques spéciales Tome 1 algèbre et
analyse
Paris 1914

COURS DE MATHEMATIQUES GENERALES

- STOFFAES (Abbé E.) Cours de Mathématiques Supérieures à l'usage des
candidats à la licence es sciences physiques
Paris 11891, 21904, 31911, 51930
- VOGT H.-G. Eléments de mathématiques supérieures à l'usage des
physiciens, chimistes et ingénieurs et des élèves des Facultés des
Sciences
Paris 11901, 21904, 31906, 41907, 51909, 61912, 71916, 111923,
121925, 141934
- FABRY E. Traité de Mathématiques Générales à l'usage des chimistes,
physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences
Paris 11909, 21911, 31916, 41925
- CLAIRIN J. Cours de Mathématiques Générales
Lille s.d. (1909-10)
- ZORETTI L. Leçons de Mathématiques Générales
Paris 11914, 21925

LIVRE POUR INGENIEURS

- CLAUDEL J. Introduction théorique et pratique à la science de l'ingénieur
Paris 11848, 21857, 31863, 41866, 51871, 61875

BIBLIOGRAPHIE

Les ouvrages qui se trouvent dans les listes de l'annexe ne sont pas répétés dans la bibliographie.

Cette bibliographie comporte des lacunes et des flous (par exemple le renvoi aux œuvres de Weierstrass sans plus de précision pour la note de 1872-1875). Je les regrette mais je préfère la donner telle quelle plutôt que de retarder encore la remise d'un texte qui a trop traîné. Je n'ai pas donné les références des livres et articles que j'ai utilisé pour l'histoire des mathématiques. Elles sont standard et ne pourraient pas être raisonnablement complètes.

- 1 BOIS-REYMOND P. du *Die allgemeinen Funktionentheorie* Tübingen : Laupp 1882
Trad. française *Théorie générale des fonctions* par G. Milhaud et A. Girot Nice : Imprimerie Niçoise 1887
- 2 BOUTROUX P. *Les principes de l'analyse mathématique, exposé historique et critique* I Paris : Hermann 1914
- 3 CAUCHY A.-L. *Œuvres complètes* 26 volumes Paris : Gauthier-Villars 1882-1956
- 4 CHEVALLARD Y. *La transposition didactique* Grenoble : Editions La Pensée Sauvage 1985
- 5 COURNOT *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* 2ème éd. Paris 1856
- 6 DARBOUX G. Mémoire sur les fonctions discontinues *Annales E.N.S.* (2) 4 p.57-112 (1875)
- 7 DEDEKIND R. *Stetigkeit und irrationale Zahlen* Braunschweig : Vieweg 1872
- 8 DIEUDONNE *Notices AMS* 29 (1982) p. 618-623
- 9 DINI U. *Lezioni di analisi infinitesimale* Pise : Nistri 1877
- 10 FLEURY H. *Le calcul infinitésimal fondé sur les principes rationnels* Marseille 1879
- 11 FLEURY H. *L'analyse dite infinitésimale sans limites ni infiniment petits* 2ème éd. Paris 1896
- 12 FREYCINET C. de *L'analyse infinitésimale; étude sur la métaphysique du haut calcul* 2ème éd. Paris : Gauthier-Villars 1882
- 13 GISPERT H. Sur les fondements de l'analyse en France *Archives for hist. of ex. sc.* 28 (1983) p. 37-106
- 14 HEINE E. Die Elemente der Funktionenlehre *Journal für r. und a. Math.* 74 (1872) p. 172-188
- 15 HERMITE C. *Cours d'analyse* I Paris : Gauthier-Villars 1873
- 18 LA VALLEE-POUSSIN C. de *Cours d'analyse infinitésimale* Tome I

- 2ème éd. Louvain : Uyspruyst-Dieudonné et Paris : Gauthier-Villars 1909
- 17 LIARD L. *L'enseignement supérieur en France 1789-1893* tome II. Paris 1894
 - 18 MARTIN H.-J. Comment mesurer un succès littéraire dans *La bibliographie matérielle* (sous la direction de Laufer et Petit) Paris : CNRS
 - 19 MERAY C. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données *Revue des Sociétés savantes (Sciences mathématiques, physiques et naturelles)* (2) 4 (1969) p.284-
 - 20 MERAY C. *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* Paris : Savy 1872
 - 21 MERAY C. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques* Paris : Gauthier-Villars 1894
 - 22 MOLK (sous la direction de) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* Paris : Gauthier-Villars 1909-1927
 - 23 NAVIER L. *Résumé des leçons d'analyse données à l'Ecole Polytechnique* Paris : Carilian-Gœury 1840
Trad. allemande par T. Wittstein Hannover : Hahn 1847
 - 24 PICARD E. *Traité d'analyse* Tome I Paris : Gauthier-Villars 1891
 - 25 PROST A. *Histoire de l'enseignement en France 1800-1967* Paris : A. Colin 1968
 - 26 SF-CIEM (Sous-commission Française de la Commission Internationale pour l'Enseignement des Mathématiques) *Rapports*
Vol. 2 Enseignement secondaire sous la direction de C. Bioche
Vol. 3 Enseignement supérieur sous la direction de A. de Saint Germain
Paris : Hachette 1911
 - 27 SHINN T. The French Science Faculty system *Historical studies in the phys. sc.* 10 (1979) p. 271-332
 - 28 TONNELLE J. *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*
Etudes en didactique des mathématiques, IREM d'Aix-Marseille et de Bordeaux 1980
 - 29 WEIERSTRASS K. *Mathematische Werke* 7 vol. Berlin : Mayer et Müller 1894-1927